



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA**  
**DIPARTIMENTO DI FISICA e ASTRONOMIA G.GALILEI**

**L. Bruschi, G. Mistura, M. Bazzan**

**LABORATORIO DI FISICA AVANZATO**

## CONTENTS

1	Introduzione .....	6
2	Norme di carattere generale .....	7
3	Adattamento d'impedenza .....	8
3.1	Segnali in tensione .....	10
3.2	Segnali in corrente .....	10
4	Misure differenziali e ponti di misura .....	12
4.1	Effetti capacitivi .....	15
4.2	Collegamento a tre terminali .....	19
5	Amplificazione dei segnali .....	21
5.1	Amplificatori .....	21
5.2	Amplificatori operazionali .....	22
5.3	L'operazionale come elemento di circuito .....	25
5.3.1	Amplificatore invertente .....	26
5.3.2	Amplificatore non invertente .....	27
5.3.3	Inseguitore .....	28
5.3.4	Amplificatore differenziale .....	28
5.4	Rumore .....	30
5.4.1	Rumore dovuto a cause esterne .....	31
5.4.2	Rumore dovuto a cause interne .....	31
5.4.3	Rumore degli amplificatori .....	33
5.5	Rivelatore a sensibilità di fase .....	36
6	Misura della temperatura .....	41
6.1.1	Termometri a semiconduttore .....	42
6.1.2	Termometri a diodo .....	42
6.1.3	Termometri a termocoppia .....	43
6.1.4	Montaggio dei termometri .....	45
6.1.5	Isolamento termico e controllo della temperatura .....	46
7	Tecniche di vuoto .....	52

7.1	Concetti base.....	53
7.2	Conduttanza di una condotta.....	57
7.3	Pompe da vuoto .....	60
7.3.1	Pompe rotative .....	63
7.3.2	Pompe turbomolecolari .....	66
7.3.3	Pompe ioniche .....	66
7.4	Misuratori da vuoto .....	67
8	Elementi di Ottica dei Fasci.....	70
8.1	Postulati dell'ottica ondulatoria e definizioni .....	70
8.2	Onde monocromatiche .....	71
8.2.1	Definizione .....	71
8.2.2	Funzione d'onda complessa.....	71
8.2.3	Intensità di un'onda monocromatica.....	72
8.2.4	Fronti d'onda .....	72
8.2.5	Alcuni esempi di onde monocromatiche .....	73
8.2.6	Onde parassiali.....	74
8.3	Fasci Gaussiani .....	75
8.3.1	Proprietà del fascio gaussiano .....	76
8.4	Lenti.....	80
8.4.1	Trasmissione attraverso lamine sottili .....	80
8.4.2	Lenti e fasci gaussiani.....	81
8.4.3	Tipi di lenti e utilizzi .....	84
9	Sensori di radiazione luminosa .....	116
9.1	Tubi fotomoltiplicatori .....	116
9.2	Fotodiodi .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
9.2.1	La Giunzione p-n .....	119
9.2.2	Giunzioni p-i-n polarizzate .....	124
9.2.3	Amplificatore a transimpedenza.....	128
10	Risontori ottici .....	87
10.1	Risonatori a specchi piani.....	90

10.2	risonatori a specchi sferici.....	93
11	Laser .....	93
11.1	L'emissione stimolata e i coefficienti di Einstein.....	94
11.2	Tipi di laser .....	97
11.2.1	Il laser He – Ne.....	97
11.2.2	I LASer a semiconduttore .....	99
11.2.3	Altri laser .....	102
11.2.4	Normativa .....	110
11.2.5	Precauzioni .....	111
11.3	Caratterizzazione di un fascio laser .....	112
11.3.1	Power meter.....	112
11.3.2	Fattore $M^2$ e metodo del coltello .....	113
11.3.3	Analizzatori di fascio.....	116
12	Elementi di interferometria .....	116
12.1	Teoria .....	129
12.2	Interferometri .....	131
12.2.1	Divisione di fronte d'onda .....	131
12.2.2	Divisione d'ampiezza .....	132
12.2.3	Interferometri a due fasci.....	133
12.2.4	Sorgenti .....	136
12.3	Misure di fase.....	136
12.3.1	Misure di intensità.....	136
12.3.2	Conteggio delle frange .....	137
12.3.3	Tecniche a modulazione di fase.....	137
12.4	Misure di lunghezza .....	138
12.4.1	Standard di linea.....	138
12.4.2	Standard di lunghezza .....	138
12.4.3	Il metodo delle frazioni esatte.....	138
12.5	Misure di indice di rifrazione.....	138
12.6	Microscopia a contrasto di fase .....	139

12.7	Spettroscopia Interferenziale .....	141
12.8	Tecniche elettroniche per l'interferometria .....	142

## 1 INTRODUZIONE

Scopo del corso è di mettere lo studente in grado di affrontare la maggior parte delle difficoltà che s'incontrano nell'esecuzione di un esperimento. Quest'obiettivo, a nostro parere, si raggiunge impegnando lo studente con esperimenti concettualmente semplici ma che devono essere praticamente montati a partire dall'inizio. Durante la realizzazione del progetto si presenteranno inconvenienti da affrontare e risolvere. L'obiettivo finale non è ottenere un numero come risultato di una misura, ma imparare le principali tecniche necessarie per poter effettuare la misura stessa.

In questi appunti saranno illustrati i principi generali di alcune tecniche che sono essenziali per la realizzazione di moltissimi esperimenti in fisica della materia. In particolare saranno descritte alcune tecniche di misure elettriche, di termometria, di vuoto e ottiche.

Rispetto alla versione originaria scritta dal Prof. Bruschi, questa è stata riformattata dal punto di vista grafico e contiene un'introduzione ai principali circuiti realizzabili con gli amplificatori operazionali. Per una discussione più approfondita si rimanda a G. Torzo.

## 2 NORME DI CARATTERE GENERALE

La linea di distribuzione elettrica monofase si presenta con prese provviste di tre terminali. In Fig.1.1a è rappresentata la presa “italiana”, nella Fig.1.1b quella “tedesca”. Esistono anche altri tipi di prese, in ogni caso tutte presentano tre terminali A,B,C. L’energia elettrica viene prelevata tra i terminali A,B, Il terminale C è detto terminale di “terra” e si trova al potenziale del terreno.

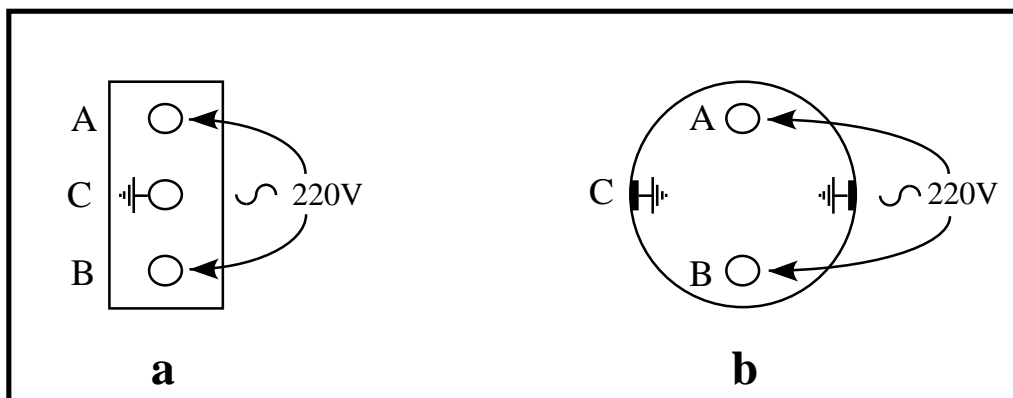


Fig.1.1 Tipi di prese monofase: a) italiana; b) tedesca.

Ogni strumento, quando non è alimentato a batterie, viene alimentato tramite la rete di distribuzione elettrica. Il terminale C, del cavo di alimentazione dello strumento, è collegato alla massa del medesimo e a tutte le parti metalliche accessibili dall'esterno Fig.1.2. In questo modo la massa dello strumento viene portata al potenziale di terra onde evitare eventuali scosse elettriche all'operatore.

Gli ingressi (o le uscite) di uno strumento (Fig.1.2) sono composti da due terminali, uno dei due, detto terminale “freddo” è collegato alla massa, l'altro serve per ricevere o inviare i segnali (terminale “caldo”).

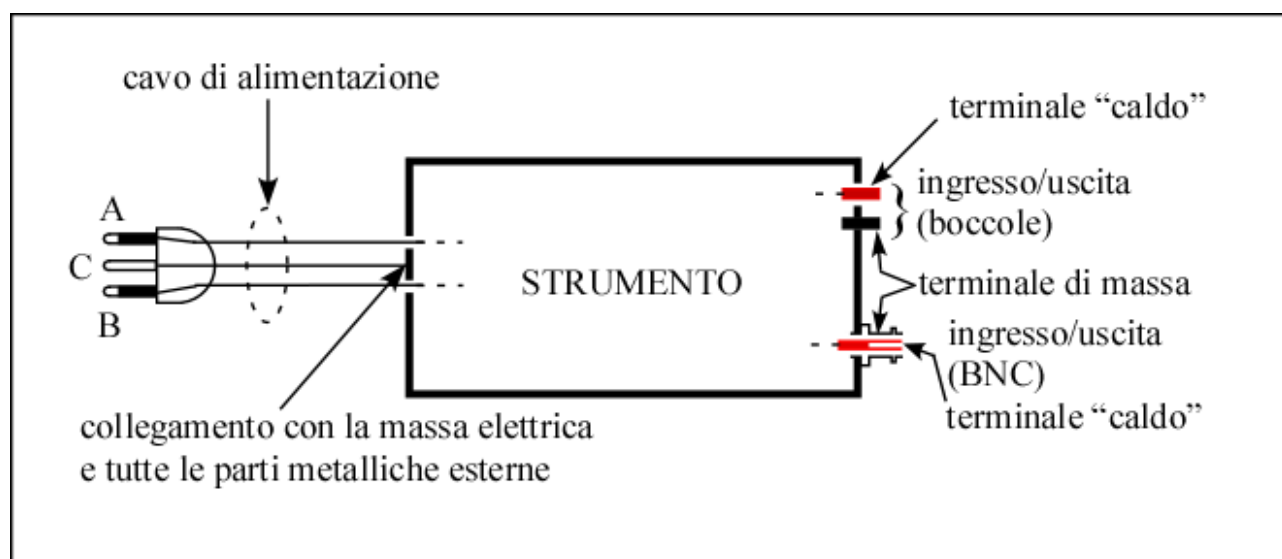


Fig.1.2 Collegamenti di massa in uno strumento elettrico

Il terminale “freddo”, quando necessario, è indicato da uno dei simboli di Fig. 1.3.

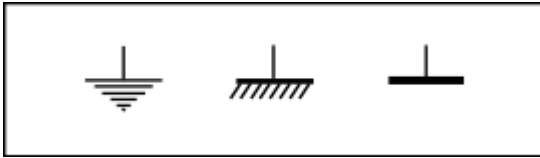


Fig.1.3 Simboli di massa

Quando si devono collegare due strumenti (uscita di uno ed entrata dell'altro) bisogna fare attenzione a collegare tra loro il terminale caldo del primo strumento con quello caldo del secondo (Fig.1.4). Lo stesso dicasi per i terminali di massa (freddi).

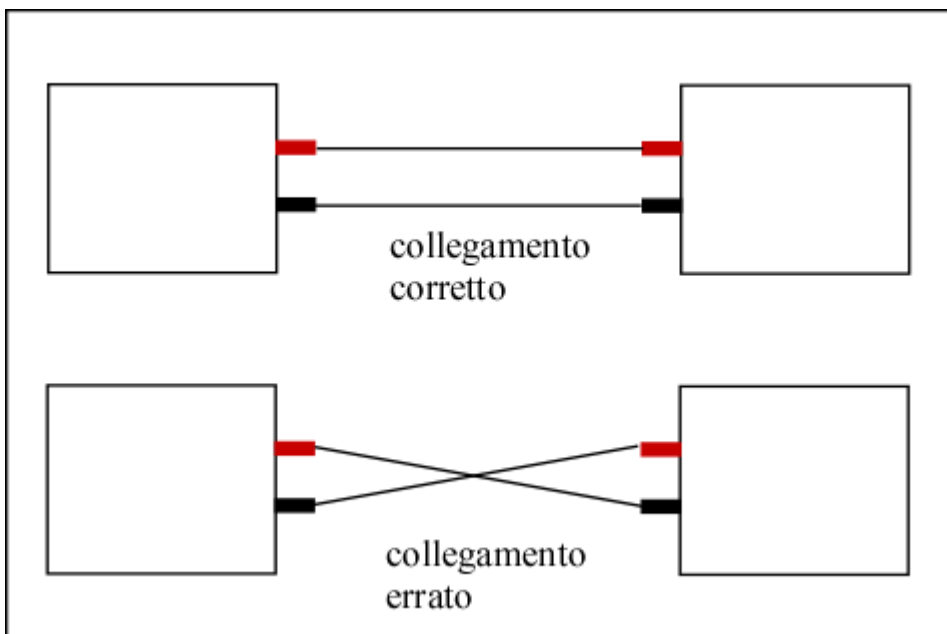


Fig.1.4 Collegamento di strumenti elettrici

Un collegamento errato in alcuni casi può avere effetti deleteri (rottura di uno o entrambi gli strumenti). Infatti, tramite i cavi di alimentazione, le masse dei due strumenti sono già collegate tra loro, quindi, con il collegamento errato, i terminali di ingresso/uscita dei due strumenti sono cortocircuitati.

Se i collegamenti sono effettuati tramite connettori tipo BNC si evita il pericolo di collegamenti errati.

### 3 ADATTAMENTO D'IMPEDENZA

Spesso ci troviamo nella necessità di collegare due o più strumenti tra di loro. Quest'operazione richiede qualche cautela se vogliamo ottimizzare i risultati che ci proponiamo. Gli strumenti possono essere i più disparati, però il loro comportamento visto dai terminali di uscita o di entrata può essere facilmente ricondotto ad un unico modello fornito



dai teoremi di Thevenin e di Norton. Per evitare malintesi, in Fig.2.1 sono rappresentati i simboli che useremo per i generatori di tensione e di corrente.

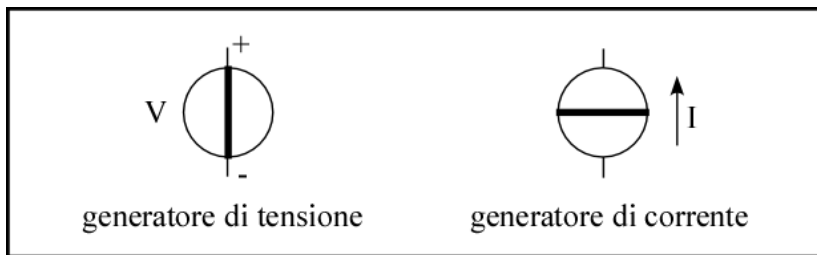


Fig.2.1 Simboli elettrici di generatori elettrici.

I segni + e - del generatore di tensione e la freccia per il generatore di corrente indicano solo la situazione corrispondente ad un certo istante.

La Fig.2.2 mostra i due modelli rispettivamente di Thevenin e di Norton.

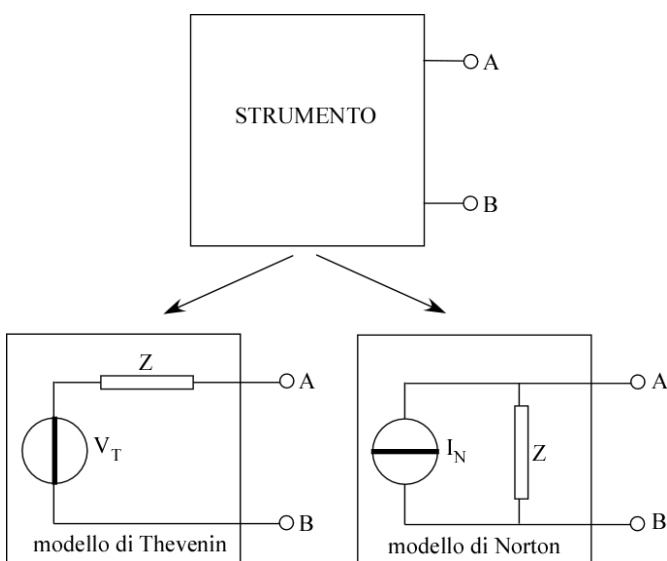


Fig.2.2 Circuiti equivalenti di uno strumento elettrico.

Qualunque strumento visto da due terminali A, B si comporta come se all'interno contenesse un solo generatore ed una sola impedenza disposti come rappresentato in figura 2.2. L'impedenza  $Z$  rappresenta quella che è chiamata impedenza di uscita. Le due rappresentazioni sono perfettamente equivalenti poiché  $V_T = Z I_N$ , cioè, qualunque sia la misura effettuata tra i due terminali A e B, non è possibile distinguere un modello dall'altro. Questi modelli sono molto utili nello stabilire le modalità di collegamento tra più strumenti.

Il collegamento tra due strumenti permette di trasferire un "segnale" fornito tra i due terminali di uscita del primo ai terminali di ingresso del secondo. In genere lo strumento che riceve il segnale è rappresentabile tra i terminali d'ingresso con una sola impedenza, senza generatori. In questo caso l'impedenza si chiama impedenza di ingresso.

A questo punto bisogna chiarire cosa s'intende per "segnale". Il segnale può essere la differenza di potenziale, oppure l'intensità di corrente o anche la potenza elettrica. Si pone quindi il problema dell'ottimizzazione del trasferimento del segnale o anche come si dice dell'"adattamento" dell'impedenza di uscita ( $Z_U$ ) con quella di ingresso ( $Z_I$ ).

### 3.1 SEGNALI IN TENSIONE

Facciamo riferimento alla Fig.2.3, usando il modello di Thevenin.

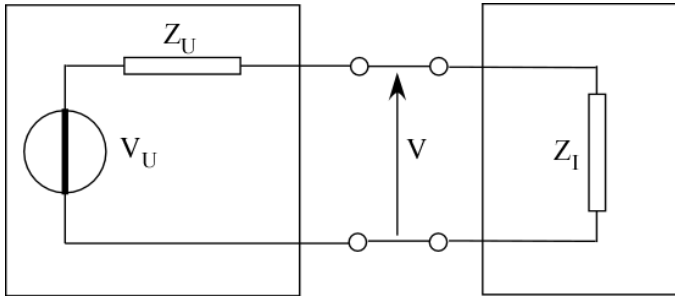


Fig.2.3 Collegamento tra generatore e carico (modello di Thevenin).

La tensione  $V$  applicata a  $Z_I$ , risulterà:

$$V = V_U \frac{Z_I}{Z_I + Z_U}$$

Quindi la tensione che riceve il secondo strumento risulterà minore di quella  $V_U$  disponibile all'uscita del primo strumento a terminali aperti. Affinché il segnale trasferito sia prossimo a  $V_U$  occorre che sia verificata la condizione:

$$|Z_I| \gg |Z_U|$$

In altre parole, se vogliamo rendere massimo il trasferimento di un segnale in tensione, l'impedenza del carico deve essere molto più grande (in modulo) di quella del generatore. Va osservato che, in caso di impedenze complesse e segnali dipendenti dal tempo, se la condizione non è soddisfatta oltre ad una attenuazione si ha anche una distorsione del segnale.

### 3.2 SEGNALI IN CORRENTE

Facciamo riferimento alla Fig.2.4, usando il modello di Norton.

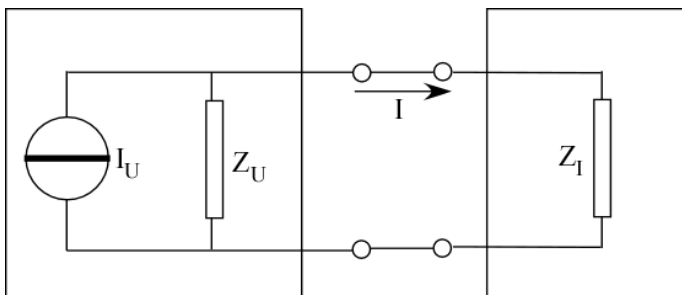


Fig.2.4 Collegamento tra generatore e carico (modello di Norton).

La corrente  $I$  che circola nella  $Z_I$ , sarà:

$$I = I_U \frac{Z_U}{Z_I + Z_U}$$

Solo se  $|Z_I| \ll |Z_U|$  allora  $I \approx I_U$ . In altre parole, se vogliamo rendere massimo il trasferimento di un segnale in corrente, l'impedenza del carico deve essere molto più piccola (in modulo) di quella del generatore.

Adattamento in potenza

Possiamo fare riferimento alla Fig.2.3. In questo caso ci limitiamo a considerare impedenze reali, cioè di tipo resistivo:  $Z_U = R_U$ ,  $Z_I = R_I$ . La potenza elettrica dissipata in  $R_I$  sarà:

$$W = R_I \left( \frac{V_U}{R_I + R_U} \right)^2$$

Ebbene da questa espressione si può vedere che, per  $R_I = R_U$ , la  $W$  ha un massimo, pari a:

$$W_{\max} = \frac{V_U^2}{4R_U}$$

Ne consegue che, se vogliamo dissipare la massima potenza nella resistenza  $R_I$ , questa deve avere il medesimo valore della  $R_U$  di uscita.

#### 4 MISURE DIFFERENZIALI E PONTI DI MISURA

La tecnica di misura differenziale è largamente usata quando si vogliano ottenere alte risoluzioni (con "risoluzione" si intende la minima quantità misurabile di una grandezza fisica). Supponiamo ad esempio di voler misurare la tensione continua  $V_A \approx 8.9V$  di un generatore, disponendo di un voltmetro con fondo scala di 0.1V, 1V, 10V con una risoluzione dell'1%. E' ovvio che, se misuriamo direttamente tale tensione, dovremo utilizzare il voltmetro con 10Vfs e avremo una risoluzione pari a 0.1V. Se, però, disponiamo di un generatore campione di tensione continua  $V_B = 9V$ , possiamo eseguire una misura differenziale (Fig. 3.1).

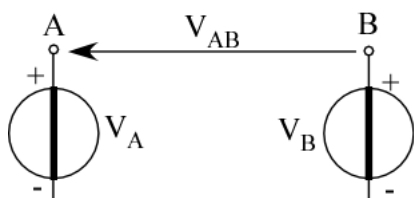


Fig.3.1 Confronto tra due tensioni.

La tensione  $V_{AB}$  che dobbiamo misurare, sommata alla  $V_B$  ci darà il valore  $V_A$  cercato. Se  $V_{AB} < 0.1V$  useremo il fondo scala di 0.1V con una risoluzione di 0.001V, se  $V_{AB} > 0.1V$  useremo il fondo scala di 1V con una risoluzione di 0.01V. In ogni caso avremo una risoluzione migliore che non misurando direttamente  $V_A$ . Questa tecnica differenziale può essere ulteriormente raffinata se disponiamo di un generatore campione a tensione variabile. In questo caso si varia  $V_B$  fino ad annullare la  $V_{AB}$ . La risoluzione dipende dalle minime variazioni che si possono effettuare su  $V_B$  e dalla minima tensione  $V_{AB}$  misurabile. Va osservato che il generatore di tensione nota può anche avere una tensione fissa  $V_g$ , basta disporre di un partitore di tensione come mostrato in Fig.3.2.

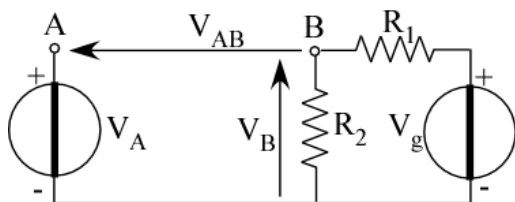


Fig.3.2 Confronto continuo tra due tensioni.

La  $V_B$  sarà data da:

$$V_B = V_g \frac{R_2}{R_1 + R_2} = V_g \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

Si varia il rapporto  $R_1/R_2$  fino a quando  $V_{AB}=0$ . A questo punto  $V_A=V_B$ . Va notato che non è necessario conoscere il valore di  $R_1$  e  $R_2$ , basta conoscere il loro rapporto.

Questa tecnica differenziale si può applicare anche alla misura di elementi passivi. Supponiamo ad esempio di dover misurare il valore di una certa resistenza  $R_x$ . Per questa misura si potrebbe applicare la legge di Ohm, disponendo di un voltmetro, di un amperometro e di un generatore di tensione  $V_g$  (Fig.3.3).

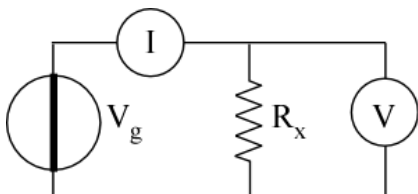


Fig.3.3 Circuito volt-amperometrico.

La misura di corrente può essere evitata avendo a disposizione una resistenza di valore noto  $R_n$ . In Fig.3.4 è rappresentato il circuito di misura. Il rapporto  $R_x/R$  è uguale al rapporto  $V_A/V_n$ .

Ovviamente il numero di cifre che assegneremo al valore di  $R_x$  dipenderà dalla risoluzione con la quale misuriamo  $V_A$  e  $V_n$ . Anche in questo caso possiamo applicare la tecnica della misura differenziale per ottenere una migliore risoluzione. Senza fare ricorso ad un altro generatore di tensione possiamo utilizzare la tecnica del partitore di tensione (Fig.3.5). Osserviamo che:

$$V_A = V_g \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_n}}$$

$$V_B = V_g \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_x}}$$

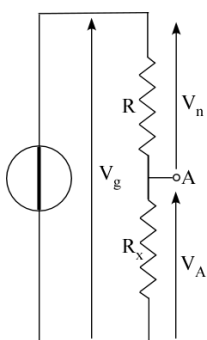


Fig.3.4 Partitore di tensione

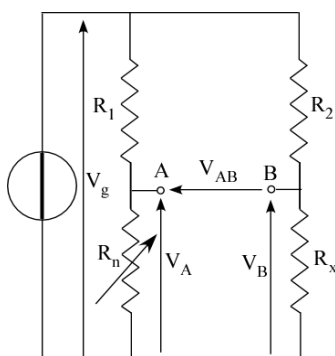


Fig.3.5 Ponte di Wheatstone

Variamo opportunamente una resistenza, ad esempio  $R_n$ , fino ad ottenere  $V_A = V_B$ , cioè  $V_{AB} = 0$ . Vale allora la relazione:

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_n$$

Il circuito di Fig.3.5 rappresenta quello che è comunemente chiamato ponte di Wheatstone e costituisce il metodo a più alta risoluzione per la misura di resistenze. Quando  $V_{AB} = 0$  si dice che il ponte è in condizioni di "azzeramento". Per "azzerare" il ponte in generale si tengono fisse due resistenze e si varia la terza, ad esempio  $R_n$ . Il valore di  $R_x$  si può ottenere se è noto il valore di  $R_n$  e il rapporto  $R_2 / R_1$ . L'errore nella misura di  $R_x$ , oltre che dagli errori con cui si conoscono le altre tre resistenze, dipende anche dall'errore che si commette nell'azzeramento del ponte, cioè nella valutazione di  $R_n$ :

$$\Delta R_x = \Delta R_n \frac{R_2}{R_1}$$

D'altra parte dipende dall'errore  $\Delta V_{AB}$  sull'azzeramento del ponte

$$\Delta V_{AB} = V_g \left( \frac{R_n + \Delta R_n}{R_n + \Delta R_n + R_1} - \frac{R_n}{R_n + R_1} \right) \approx V_g \frac{\Delta R_n}{R_n + R_1}$$

$$\Delta R_n = (R_n + R_1) \frac{\Delta V_{AB}}{V_g}$$

L'errore su  $R_x$  sarà:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R_n + R_1}{R_n} \frac{\Delta V_{AB}}{V_g}$$

Da questa relazione si vede, com'è intuitivo, che l'errore è tanto più piccolo quanto più grande è  $V_g$ . Questa però non può superare certi valori perché ci sono limitazioni severe sulla dissipazione elettrica massima nelle resistenze del ponte.

Come si vede  $V_g$  non entra nel calcolo di  $R_x$ , il generatore di tensione può quindi presentare una resistenza di uscita  $R_g$  diversa da zero.

La tensione di alimentazione  $V_g$  del ponte può essere continua o alternata. L'utilizzazione di una tensione alternata comporta vari vantaggi:

La tensione di azzeramento del ponte in genere deve essere amplificata per ridurre gli errori di misura. Quest'operazione è molto più facile con segnali in alternata che con segnali in continua.

Spesso le varie parti del ponte si trovano a temperature diverse, ad esempio se  $R_x$  rappresenta la resistenza di un termometro. Questo comporta l'insorgere di effetti termoelettrici che danno luogo a differenze di potenziale nei vari

rami del ponte che nulla hanno a che vedere con il valore dell'elemento corrispondente. Le differenze di potenziale dovute a effetti termoelettrici sono continue, se anche il ponte è alimentato in continua è evidente che l'azzeramento del ponte in queste condizioni può comportare grossi errori di misura. Lavorando in alternata questi problemi vengono eliminati.

Alimentando il ponte in alternata si possono misurare anche induttanze e capacità. Le considerazioni sono le medesime, basta sostituire alle resistenze le corrispondenti impedenze. In Fig.3.6 e Fig.3.7 sono riportati due possibili ponti per misurare rispettivamente induttanze e capacità.

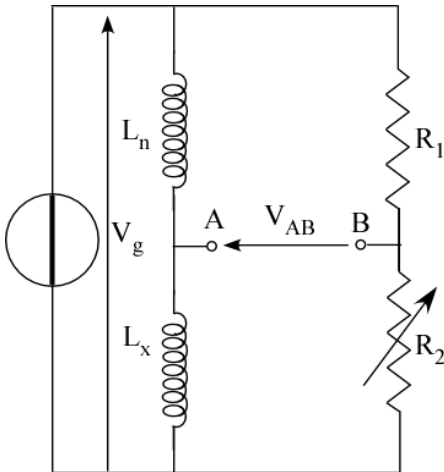


Fig.3.6 Ponte induttivo

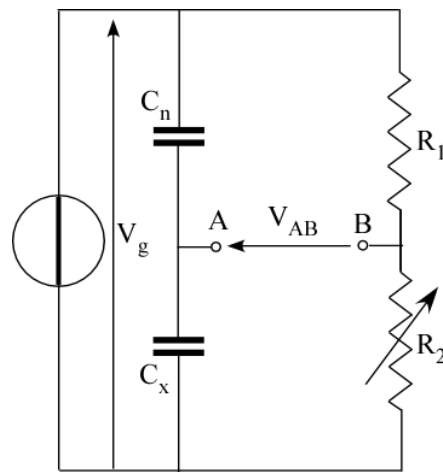


Fig.3.7 Ponte capacitivo

In condizioni di azzeramento, avremo per le induttanze:

$$j\omega L_x = j\omega L_n \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow L_x = L_n \frac{R_2}{R_1}$$

Per le capacità:

$$\frac{1}{j\omega C_x} = \frac{1}{j\omega C_n} \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow C_x = C_n \frac{R_1}{R_2}$$

#### 4.1 EFFETTI CAPACITIVI

Quando si misura una resistenza con un ponte in alternata, spesso non si riesce ad azzerare il segnale di sbilanciamento semplicemente variando il valore delle resistenze note. Questo è dovuto al fatto che i resistori del ponte non sono pure resistenze ma resistenze con, in parallelo, una capacità parassita (gli effetti induttivi sono in genere trascurabili). Questa situazione si verifica spesso quando la resistenza incognita  $R_x$  si trova distante dal resto del ponte. I cavi di collegamento introducono una capacità parassita  $C_x$  in parallelo ad  $R_x$ , capacità che può risultare anche di diverse decine di pF (Fig.3.8).

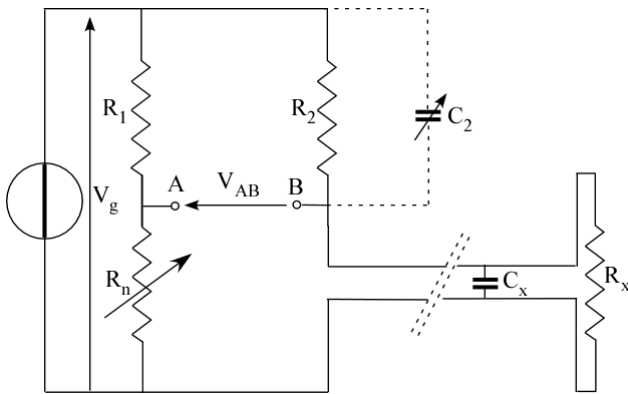


Fig.3.8 Capacità parassite in un ponte resistivo.

Le capacità parassite in parallelo agli altri elementi del ponte sono in genere trascurabili ( $<1\text{pF}$ ). La condizione di azzeramento è:

$$Z_x = R_n \frac{R_2}{R_1}$$

ove:

$$Z_x = \frac{R_x \frac{1}{j\omega C_x}}{R_x + \frac{1}{j\omega C_x}} = \frac{R_x}{1 + j\omega C_x R_x}$$

É quindi evidente che la relazione di azzeramento non può mai essere soddisfatta perché il primo membro è complesso il secondo reale.

Se:

$$\frac{1}{\omega C_x} \gg R_x$$

allora:

$$Z_x \approx R_x$$

Ad esempio se la frequenza di lavoro è di 1kHz,  $R_x \approx 100\Omega$  e  $C_x \approx 50\text{pF}$  :

$$\frac{1}{\omega C_x} \approx 3 \times 10^6 \Omega \gg R_x$$

e l'effetto della capacità parassita è trascurabile. Se questo non si verifica, per azzerare il ponte occorre mettere una capacità  $C_2$  in parallelo, ad esempio, a  $R_2$  (Fig.3.8).



L'azzeramento avviene quando:

$$Z_x = R_n \frac{Z_2}{R_1}$$

ove:

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

Quindi la condizione di azzeramento diventa:

$$R_x = R_n \frac{R_2}{R_1} \frac{1 + j\omega C_x R_x}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

Ne consegue che se sono verificate le due condizioni:

$$R_x = R_n \frac{R_2}{R_1}$$

$$C_x R_x = C_2 R_2$$

il ponte risulterà azzerato. In pratica si opera su  $R_n$  e  $C_2$  fino a quando  $V_{AB}=0$ . Dalla prima condizione si ricava  $R_x$ .

Difficoltà nella misura del segnale di sbilanciamento

Il generatore che alimenta il ponte ha in generale un terminale a massa, l'amplificatore utilizzato per amplificare  $V_{AB}$  deve dunque essere un amplificatore differenziale. Indicando con  $A_C$  l'amplificazione di modo comune e con  $A_D$  quella differenziale si deve verificare la condizione:

$$\left| \frac{A_C (V_A + V_B)}{2} \right| \ll |A_D V_{AB}|$$

Ossia:

$$\left| \frac{A_C}{A_D} \right| = \rho \ll \left| \frac{V_A + V_B}{V_{AB}} \right|$$

$\rho$  rappresenta quello che è chiamato "fattore di reiezione" dell'amplificatore differenziale. Questa condizione è in genere difficile da ottenere, specie se si vogliono alte risoluzioni. Ad esempio, se  $V_A \approx V_B \approx 5V$  e si vogliono rivelare segnali  $V_{AB} \approx 1\mu V$ , si deve utilizzare un amplificatore differenziale con un fattore di reiezione almeno di  $10^7$ . Cosa quasi impossibile da ottenere. Lo schema di Fig.3.9 permette di risolvere parzialmente il problema sia per ponti in

continua, sia in alternata. Infatti, il punto B è praticamente tenuto a potenziale nullo rispetto a massa dall'operazionale OP (massa virtuale).

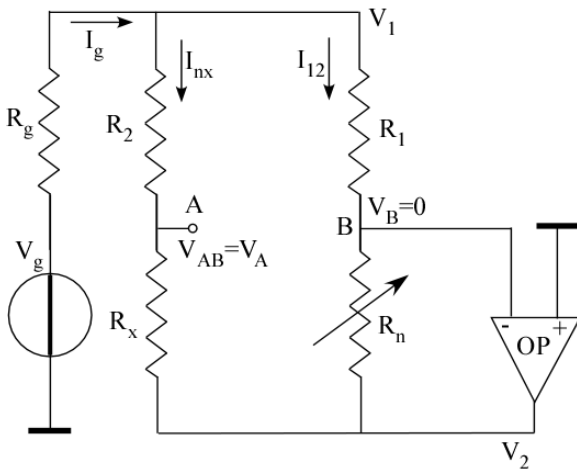


Fig.3.9

Se il ponte è alimentato in continua, la corrente di polarizzazione di ingresso deve essere trascurabile rispetto a quella che circola in  $R_1$  e  $R_n$ . La tensione  $V_2$  risulta:

$$V_2 = -V_1 \frac{R_n}{R_1}$$

In condizione di azzeramento, poiché  $V_A \approx V_B=0$ , le correnti circolanti nelle resistenze del ponte saranno:

$$I_{1n} = \frac{V_1}{R_1}$$

$$I_{2x} = \frac{V_1}{R_2}$$

Queste correnti ci permettono di calcolare le potenze dissipate nelle resistenze del ponte. Per ricavare  $V_1$  basta osservare che:

$$I_g = I_{1n} + I_{2x} = V_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_g - V_1}{R_g}$$

da cui:

$$V_1 = \frac{V_g}{R_g} \frac{1}{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_g} \right)}$$

Poiché l'operazionale non ha amplificazione infinita, il punto B non si trova esattamente a potenziale di massa ma ad un potenziale pari a:

$$V_B = \frac{V_2}{A}$$

dove  $A$  è il guadagno a loop aperto. Per un buon operazionale  $A \sim 300000$ . Ovviamente di volta in volta, in base alla risoluzione che uno vuole ottenere, andrà verificata se l'ipotesi  $V_B = 0$  è accettabile.

Soluzioni alternative che non utilizzano elementi attivi, si possono adottare se il ponte è alimentato in alternata. Nella figura 3.10 è rappresentato un possibile circuito di che utilizza un trasformatore.

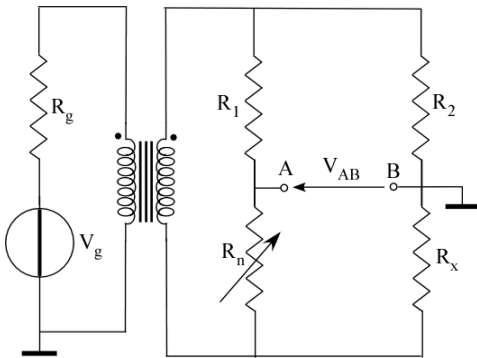


Fig.3.10 Ponte alimentato da un trasformatore.

In Fig.3.11 è rappresentato il segnale di sbilanciamento del ponte di Fig.3.10 in due situazioni opposte.

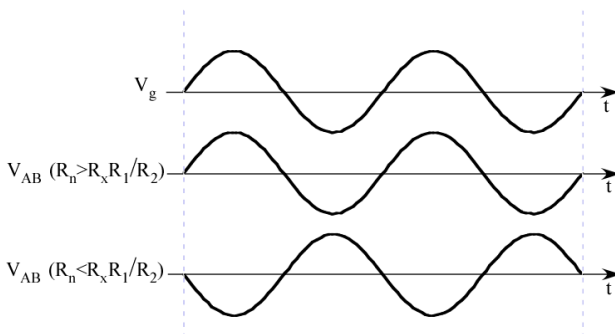


Fig.3.11 Segnale di sbilanciamento del ponte.

## 4.2 COLLEGAMENTO A TRE TERMINALI

Come già detto spesso  $R_x$  non è in prossimità del ponte di misura ma può trovarsi ad una certa distanza. I cavi di collegamento, oltre a introdurre una capacità parassita, possono presentare anche una resistenza elettrica non trascurabile rispetto ad  $R_x$ . Se i due cavi hanno resistenze  $r_1$  e  $r_2$ , la resistenza che si misura sarà  $r_1 + r_2 + R_x$ . Questo fatto porta a seri inconvenienti, ad esempio la resistenza dei cavi può cambiare con la temperatura in maniera non controllabile. Esistono vari accorgimenti per ovviare a questo inconveniente ma prenderemo in considerazione solo quello più comune che utilizza tre cavi di collegamento. Avendo cura di utilizzare cavi di collegamento della medesima sezione e lunghezza, possiamo presumere che i tre cavi presentino la medesima resistenza  $r$ .

In Fig.3.12 sono rappresentati due ponti completi. Come si vede in queste configurazioni un cavo è in serie a  $R_n$ , l'altro a  $R_x$ , ne consegue che in condizioni di azzeramento:

$$R_x + r = (R_n + r) \frac{R_2}{R_1}$$

Se poniamo  $R_1 = R_2 = R$ :

$$R_x = R_n$$

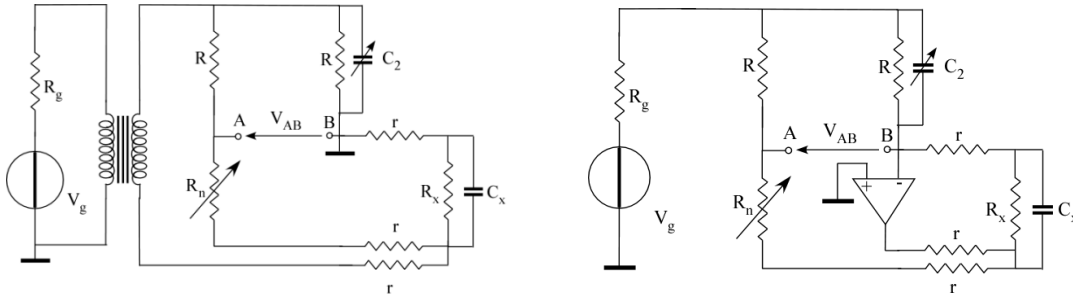


Fig.3.12 Tipologie di ponti completi a tre terminali

## 5 AMPLIFICAZIONE DEI SEGNALE

Nell'eseguire un esperimento ci troviamo spesso ad avere dei segnali che sono troppo piccoli per essere misurati direttamente. Ad esempio, se vogliamo misurare una resistenza con un'elevata risoluzione tramite un ponte, può avvenire che i segnali di sbilanciamento da apprezzare siano dell'ordine del  $\mu V$ . Tali segnali devono quindi essere amplificati tramite opportuni amplificatori.

Spesso i segnali da amplificare sono accompagnati da segnali "spuri" comunemente chiamati **rumore**. Si presenta quindi il problema della riduzione del rumore in modo da ottenere solo i segnali utili.

### 5.1 AMPLIFICATORI

L'amplificatore è un circuito che permette l'*amplificazione* dei segnali (in tensione ecc.). Utilizzando il modello di Thevenin, si può schematizzare come in Fig.4.1.

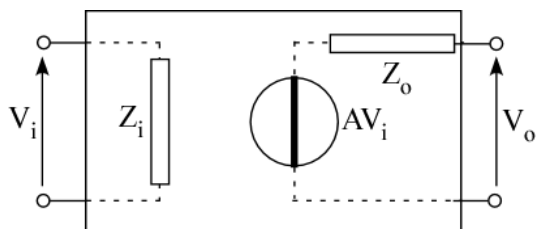


Fig.4.1 Schema equivalente di un amplificatore di tensione.

$Z_i$  rappresenta l'impedenza d'ingresso,  $Z_o$  quella di uscita e  $A$  il guadagno. Quello mostrato è un amplificatore in tensione. Una rappresentazione simile si può fare per un amplificatore di corrente, ecc. A seconda dei casi,  $A$  rappresenta un guadagno in tensione, in corrente, ecc. Talvolta il segnale di ingresso è di natura diversa da quello di uscita, ad esempio il segnale di ingresso è una tensione e quello di uscita una corrente, in questo caso si parla di **convertitore tensione-corrente**, piuttosto che di amplificatore ed  $A$  rappresenta quello che è comunemente chiamato **fattore di conversione**. Caratteristica di un amplificatore è la **banda passante**. Normalmente l'amplificazione  $A$  varia con la frequenza  $\nu$  del segnale (Fig.4.2).  $\nu_1$  e  $\nu_2$  sono rispettivamente la frequenza di taglio inferiore e superiore dell'amplificatore. La differenza  $\nu_2 - \nu_1$  è chiamata banda passante.

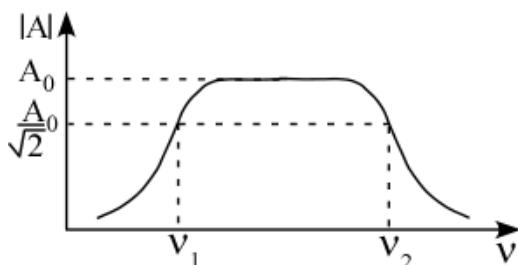


Fig.4.2 Banda passante di un amplificatore.

Se  $\nu_2 - \nu_1 \ll (\nu_2 + \nu_1) = \nu_0$ , cioè vengono amplificati praticamente segnali con frequenza prossima ad una frequenza  $\nu_0$ , l'amplificatore viene chiamato **amplificatore selettivo**. Gli amplificatori selettivi sono usati per migliorare il rapporto

segnale/rumore, oppure per amplificare solo un particolare segnale fra quelli presenti all'ingresso dell'amplificatore. Il grado di selettività è indicato dal fattore di merito Q:

$$Q = \frac{V_0}{V_2 - V_1}$$

Quando  $V_1=0$  l'amplificatore è chiamato **amplificatore in continua**. Praticamente tutti gli amplificatori operazionali in forma integrata appartengono a questa categoria. Quando non strettamente necessario, nel caso di guadagni  $\gg 1$ , è consigliabile progettare amplificatori non in continua. In questo modo si evitano problemi di deriva (drift), specialmente legati ad effetti di temperatura ed invecchiamento. I migliori operazionali presentano drift dell'ordine del  $\mu V/Kn$ .

## 5.2 AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

L'amplificatore operazionale<sup>1</sup> (AO) è un circuito integrato, costituito da una rete di resistenze, capacità, diodi e transistori incapsulati in un unico contenitore di piccole dimensioni<sup>2</sup>, di plastica o di metallo, che viene collegato normalmente al circuito di utilizzo mediante una zoccolatura a pressione (Figura 4.3).

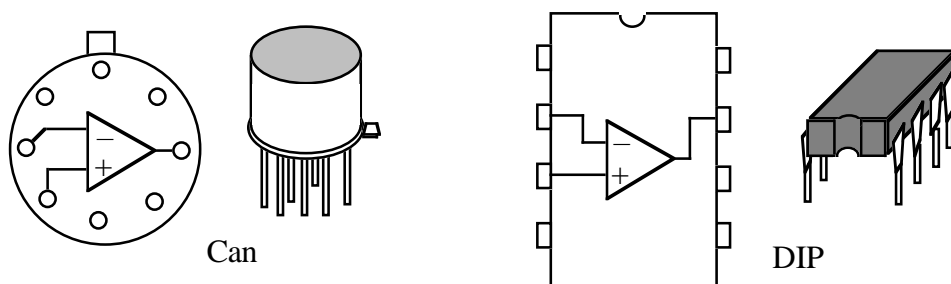


Figura 4.3 Tipi di amplificatori operazionali.

L'AO può essere definito funzionalmente come un **amplificatore differenziale**, cioè un dispositivo attivo a tre terminali che genera al terminale di uscita una tensione proporzionale alla differenza tra le tensioni fornite ai due terminali d'ingresso. Le tensioni vanno sempre riferite a un potenziale comune, detto potenziale di terra o massa.

Il rapporto tra la tensione in uscita e la differenza tra le tensioni in ingresso è detto **guadagno differenziale ad anello aperto**  $A_d$ . Il valore di  $A_d$  per tensioni continue, e per segnali a bassa frequenza ( $\nu < \nu_0 \approx 100$  Hz) è molto elevato ( $A_d \approx 10^5$ ). Il simbolo grafico comunemente usato per rappresentare l'AO è quello di figura 4.4. Qui  $V_1$  e  $V_2$  sono le tensioni d'ingresso e  $V_0$  è la tensione di uscita, mentre i simboli (-) e (+) indicano rispettivamente gli ingressi, o **canali, invertente e non-invertente**.

Le tensioni di alimentazione  $V_{cc}^+$  e  $V_{cc}^-$  sono spesso omesse negli schemi semplificati: esse normalmente sono uguali ed opposte (da  $\pm 5$  V a  $\pm 20$  V) nelle alimentazioni duali, mentre valgono tipicamente  $V_{cc}^+ = 3$  V ÷ 30 V e  $V_{cc}^- = 0$  V nelle

<sup>1</sup> Il nome Amplificatore Operazionale è stato coniato da coloro che si occupavano di calcolatori elettronici *analogici*. Tali calcolatori, ormai superati dai calcolatori *digitali*, più rapidi e precisi, utilizzavano questi dispositivi reazionati in modo da eseguire, su segnali di tensione, *operazioni* somma, prodotto, divisione, integrazione, differenziazione...

<sup>2</sup> La zoccolatura è generalmente a geometria circolare nei modelli a contenitore metallico (*Can*), e in doppia fila in quelli plastici (*Dual-In-Line Plastic* = DIP). Per ulteriori informazioni sulla piedinatura si veda l'appendice D.

alimentazioni unipolari. Nel seguito s'intenderà sempre sottintesa una alimentazione duale ove non sia diversamente indicato.

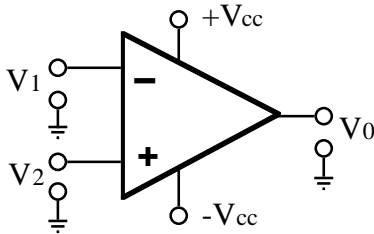


Figura 4.4 Simbolo di un amplificatore operazionale.

Si è detto che l'AO amplifica la differenza  $V_d = V_2 - V_1$  tra le tensioni in ingresso, ma ciò vale solo quando il dispositivo opera in **zona lineare**, ovvero per valori molto piccoli di  $|V_2 - V_1|$ . Per valori di  $|V_d|$  maggiori si dice che l'amplificatore satura, cioè l'uscita si porta rispettivamente a  $V_{cc}^+$  o  $V_{cc}^-$  a seconda che sia  $V_2 > V_1$  o  $V_2 < V_1$ .

Il guadagno differenziale è in realtà il risultato della sovrapposizione dei guadagni dei singoli canali. Il segnale che viene fornito all'ingresso invertente si ripresenta all'uscita invertito di segno e amplificato di un fattore  $A^-$ , e sommato al segnale fornito all'ingresso non-invertente a sua volta amplificato di  $A^+$ , e in definitiva si ha:

$$V_0 = -A^-V_1 + A^+V_2$$

Poiché il valore assoluto  $A^+$  dell'amplificazione del canale non invertente è di solito molto vicino a quello dell'amplificazione del canale invertente  $A^-$ , invece che definire il valore di  $A^+$  e di  $A^-$ , si può definire il loro valor medio, o guadagno differenziale a circuito aperto:

$$A_d = \frac{1}{2}(A^+ + A^-)$$

Il valore assoluto della differenza tra le due amplificazioni è definito invece **guadagno di modo comune**:

$$A_{cm} = |A^+ - A^-|.$$

Per quanto già detto dev'essere  $A_{cm} \ll A_d$ . La differenza tra le tensioni in ingresso è detta **segnale differenziale**:

$$V_d = V_2 - V_1$$

mentre il loro valor medio è detto **segnale di modo comune**:

$$V_{cm} = \frac{1}{2}(V_2 + V_1)$$

Dalle definizioni segue che le tensioni in ingresso possono essere espresse in termini di tensione differenziale e tensione di modo comune:

$$V_1 = V_{cm} - \frac{1}{2} V_d \quad \text{e} \quad V_2 = V_{cm} + \frac{1}{2} V_d.$$

Il segnale in uscita  $V_o$  può quindi essere riscritto in termini di  $V_d$ ,  $V_{cm}$ ,  $A_d$  e  $A_{cm}$ :

$$V_o = A^+ V_2 - A^- V_1 = A_{cm} V_{cm} + A_d V_d.$$

Il rapporto, espresso in decibel (dB), tra  $A_d$  e  $A_{cm}$  è detto **rapporto di reiezione del modo comune**:

$$\text{CMRR} = 20 \log_{10} (A_d / A_{cm}).$$

La sigla CMRR deriva dalla notazione inglese *Common Mode Rejection Ratio*. Valore tipico di CMRR è 100 dB.

Un parametro importante nell'uso degli AO è la tensione di sbilanciamento riferita all'ingresso  $V_{os}$  (**input offset voltage**), cioè la tensione differenziale che si deve fornire all'ingresso per ottenere un segnale di uscita nullo. Nell'analisi semplificata dei circuiti con AO si può tuttavia, in prima approssimazione, trascurare  $V_{os}$  che è dell'ordine del millivolt. Molti operazionali dispongono anche di terminali per l'azzeramento di  $V_{os}$  (terminali di *offset null*). Il valore di  $V_{os}$  dipende anche dalla temperatura e dalla tensione di alimentazione: la sensibilità a questi parametri viene misurata rispettivamente come  $\partial V_{os} / \partial T$  ( $V_{os}$  *temperature coefficient*), che è tipicamente dell'ordine di qualche  $\mu\text{V} / \text{K}$ , e come PSRR (*Power Supply Rejection Ratio* = rapporto tra variazione di  $V_{cc}$  e variazione di  $V_{os}$ ) che è dell'ordine di 100 dB.

Anche le correnti d'ingresso  $I_b$  (**input bias current**) possono essere trascurate in prima approssimazione, essendo piccole rispetto a quelle che normalmente intervengono negli altri rami del circuito. L'AO ha infatti una elevata impedenza di ingresso<sup>3</sup> ( $Z_{in} \approx 10^6 \div 10^{11} \Omega$ ) e una bassa impedenza d'uscita ( $Z_{out} \approx 1 \div 100 \Omega$ ). L'**impedenza d'ingresso**  $Z_{in}$  è il rapporto tra la tensione applicata all'ingresso e la corrente che per effetto di tale tensione viene iniettata all'ingresso. L'**impedenza di uscita**  $Z_{out}$  equivale alla resistenza interna dell'operazionale considerato, all'uscita, come generatore di tensione comandato dalle tensioni in ingresso.

Il modello di *Operazionale Ideale* usato nell'analisi semplificata consiste nelle seguenti approssimazioni:

$$A_d = \infty$$

$$V_{os} = 0$$

$$I_{b1} = I_{b2} = 0$$

$$Z_{in} = \infty$$

$$Z_{out} = 0$$

$$\text{CMRR} = \infty$$

$$\text{Banda Passante} = \infty$$

---

<sup>3</sup> Bisogna qui distinguere tra impedenza di ingresso dei due canali  $Z_{1,2}$  e impedenza di ingresso differenziale  $Z_d$ : di solito si ha  $Z_{1,2} > 10^9 \Omega$  e  $Z_d \approx 10^{-2} Z_{1,2}$ .



Per capire il funzionamento di un circuito costruito con AO (o per progettare uno) conviene sempre impostare l'analisi partendo dall'approssimazione di AO ideale. Solo in un secondo tempo si prenderanno in considerazione le caratteristiche non-ideali dell'operazionale reale. A prima vista il modello di AO ideale sembrerebbe inutilizzabile in modo lineare dato che per  $A = \infty$  qualsiasi segnale differenziale all'ingresso produce saturazione. Si vedrà tuttavia nel prossimo capitolo che, utilizzando una rete di controreazione che praticamente azzerla la tensione differenziale all'ingresso, l'AO può essere sempre mantenuto in zona lineare.

La tabella 4.1, che dà un'idea indicativa degli ordini di grandezza dei valori assunti dai parametri sopra elencati negli operazionali reali, distingue tra operazionali con stadio di ingresso costituito da normali transistor bipolari BJT (a giunzione), da transistor unipolari ad effetto di campo (FET) e da transistor tipo MOS.

Stadio di Ingresso	$V_{os}$ (mV)	$I_b$ (pA)	$I_{os}$ (pA)	CMRR (dB)	$\omega_1$ (MHz)
bipolare	0.01÷2	≈100.000	≈10.000	≈90	1÷2
FET	0.5÷5	5÷30	0.5÷5	≈90	1÷5
MOS	0.1÷0.5	1	0.5	90÷110	1÷2

Tabella 4.1 Parametri caratteristici amplificatori operazionali.

Il parametro  $I_{os}$  (**input offset current**) è definito come differenza tra le correnti di ingresso:  $I_{os} = |I_{b1}| - |I_{b2}|$ . Normalmente  $I_{os}$  è di un ordine di grandezza inferiore a  $I_b$ . ( $I_{os} / I_b \approx 0.1$ ).

Il guadagno differenziale ad anello aperto  $A_d$  verrà nel seguito chiamato semplicemente  $A$ , trascurando la differenza tra  $A^+$  e  $A^-$ . Esso è una funzione complessa della frequenza  $A = A(j\omega)$ , (ove  $\omega = 2\pi \nu$  è la frequenza angolare e  $j = \sqrt{-1}$  è l'unità immaginaria), che assomiglia alla funzione di trasferimento di un filtro passa-basso:  $A(j\omega) \approx A_0 (1+j\omega/\omega_0)^{-1}$ .

In un grafico in cui si riporta il  $\log|A(\omega)|$  verso  $\log(\omega)$ , la funzione  $|A(\omega)|$  è approssimabile con una spezzata, e in tal caso il grafico è detto grafico di Bode (figura 4.5). Infatti, per  $\omega \ll \omega_0$  è  $|A(\omega)| \approx A_0$  e per  $\omega \gg \omega_0$  è invece  $|A(\omega)| \approx A_0 \omega_0 / \omega$ . Il parametro  $\nu_0 = 2\pi/\omega_0$  è detto frequenza di taglio (**break frequency**), ed è generalmente dell'ordine di pochi Hz. Il prodotto  $A_0 \omega_0$ , dove  $A_0$  è l'amplificazione alla frequenza zero, è indicato con GBP (**gain-bandwidth product**).

La frequenza a cui l'amplificazione è pari a 1 (*unity-gain frequency*) è indicata con  $\omega_1$  ed il suo valore è una misura della rapidità dell'AO, o meglio della banda passante in condizioni di guadagno unitario. Nell'approssimazione di Bode si ha  $\omega_1 = A_0 \omega_0 = \text{GBP}$ , e  $\omega_1$  è individuata dall'intercetta con l'asse delle ascisse: infatti se  $A(\omega_1) = 1$ ,  $20\log[A(\omega_1)] = 0$ .

### 5.3 L'OPERAZIONALE COME ELEMENTO DI CIRCUITO

Controreazionando l'AO (ovvero riportando all'ingresso invertente una frazione del segnale che l'AO produce all'uscita) mediante componenti passivi (resistenze e capacità), si ottengono configurazioni con guadagno inferiore (*guadagno ad anello chiuso*  $G \ll A$ ), ma molto più stabili in un ampio intervallo di frequenze (tipicamente  $0 < \nu$

$< 1000 v_0$ ). In questo modo si può utilizzare l'AO per produrre operazioni algebriche su segnali di tensione, come somma, sottrazione, derivazione, integrazione e, utilizzando componenti non lineari (diodi), anche logaritmo ed esponenziale.

L'intervallo di tensioni in uscita entro cui può operare l'AO è limitato dalle tensioni di alimentazione  $V_{cc}^+$  e  $V_{cc}^-$ , e il corrispondente intervallo di tensioni differenziali in ingresso è già stato definito *zona lineare*. Facendo lavorare l'AO fuori zona lineare, lo si può usare come circuito a scatto (rivelatore di soglia, temporizzatore, impulsatore ...). Aggiungendo alla retroazione negativa una retroazione positiva, si possono ottenere oscillatori, sfasatori ...

Buona parte dei dispositivi realizzati con AO possono essere facilmente analizzati scomponendoli nelle configurazioni elementari dell'amplificatore invertente, non-invertente e differenziale, utilizzando il modello di AO ideale, i principi di Kirchhoff ed il **principio di sovrapposizione**. Il principio di sovrapposizione è uno strumento di analisi dei sistemi lineari molto importante. Esso permette di calcolare la tensione in ogni punto di un circuito, in cui vi siano più sorgenti, come somma delle tensioni prodotte in quel punto da ogni sorgente presa come unica. In altri termini, si considerano spente tutte le sorgenti di segnale eccetto una e si calcola la tensione da essa generata nel punto esaminato. Poi a turno si *accendono* una alla volta le altre sorgenti. Il segnale risultante è la somma delle tensioni parziali così calcolate. In questa sezione si analizzeranno le configurazioni elementari: amplificatore invertente e non-invertente, sommatore e sottrattore (o differenziale). Si studierà inoltre l'effetto dell'amplificazione finita e delle correnti di polarizzazione (non nulle) degli operazionali reali.

### 5.3.1 AMPLIFICATORE INVERTENTE

Lo schema dell'amplificatore invertente è illustrato in figura 4.6. Applichiamo il modello di AO ideale. Poiché  $I_{b2} = 0$ , si ha  $V_2 = -R I_{b2} = 0$ . La funzione della resistenza  $R$ , il cui valore in questa approssimazione è influente, si chiarisce quando si prendono in considerazione operazionali reali con  $I_{b2} \neq 0$ .

Supposto infinito il guadagno ad anello aperto ( $A = \infty$ ) la tensione differenziale in ingresso è nulla:  $V_d = V_2 - V_1 = V_o / A = 0$ , cioè  $V_2 = V_1$ . L'ingresso invertente è quindi vincolato a massa (massa virtuale) per effetto della retroazione. Inoltre, poiché per ipotesi anche  $I_{b1} = 0$ , si ha  $I_i = I_o$ , che, applicando la legge di Ohm, si può scrivere  $(V_i - V_1) / R_i = (V_1 - V_o) / R_o$ , relazione che ci dà il valore del **guadagno ad anello chiuso** dell'invertente :

$$G = V_o / V_i = -(R_o / R_i).$$

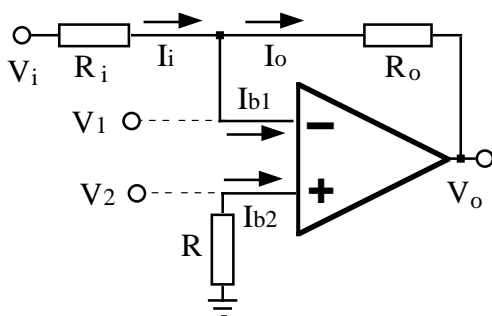


Figura 4.6 Schema elettrico amplificatore invertente.

Si vede da questo primo esempio che il guadagno ad anello chiuso non dipende dal valore di  $A$ , e quindi non varia con la frequenza, né con il tipo di AO usato: esso è determinato esclusivamente dai valori di  $R_o$  e  $R_i$ . Di solito il valore di  $G$  è molto inferiore al valore di  $A$ : questo è il prezzo che si paga per avere un guadagno stabile e facilmente controllabile.

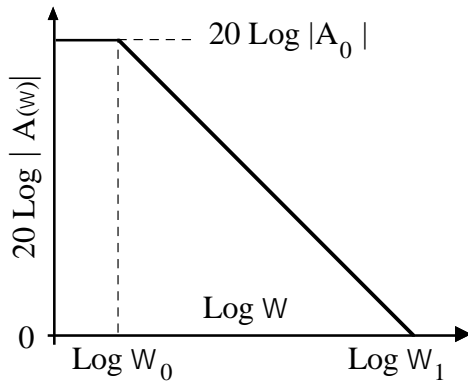


Figura 4.5 Grafico di Bode di un amplificatore operazionale.

La corrente massima  $I_{AOmax}$  (**corrente di uscita di corto circuito**) erogata dai comuni AO è dell'ordine di una decina di mA. Esistono tuttavia degli AO di potenza che possono erogare correnti di picco fino a qualche ampere<sup>4</sup>.

Legati al valore della larghezza di banda GBP sono il tempo di salita  $t_r$  (*rise time*), cioè il tempo necessario perché l'uscita passi dal 10% al 90% del valore finale quando all'ingresso è applicato un segnale a gradino, e la massima velocità della variazione della tensione in uscita (*slew rate*), che si esprime generalmente in V/μs. Il tempo di salita dipende dall'amplificazione ad anello chiuso  $G$  ed è praticamente il reciproco della larghezza di banda  $t_r \approx 1/f_{GBP} = G/f_1$ . La slew rate è misurata generalmente in condizioni di guadagno unitario (*buffer*), ed è limitata principalmente da  $I_{AOmax}$ .

I vari dispositivi si differenziano infine per l'intervallo di temperature entro il quale possono essere impiegati (tipicamente 0 °C / +100 °C, o -55 °C / +150 °C), e per i valori massimi permessi alla tensione differenziale e di modo comune applicata agli ingressi (*input voltage ranges*).

### 5.3.2 AMPLIFICATORE NON INVERTENTE

Una seconda configurazione elementare è l'amplificatore non-invertente, descritto in figura 4.7. Nell'approssimazione di AO ideale si ha  $V_2 = V_i$  perché  $I_{b2} = 0$ , e sulla resistenza  $R$  non si ha caduta di tensione, e anche qui  $V_2 = V_1$ , perché  $A = \infty$ . Poiché  $I_{b1} = 0$ , anche ora  $I_i = I_o$ , relazione che per la legge di Ohm si può riscrivere  $-V_1 / R_i = (V_1 - V_o) / R_o$ . Sostituendo  $V_i$  a  $V_1$  ed esplicitando  $V_o$  si ottiene il guadagno ad anello chiuso del non-invertente:

$$G = V_o / V_i = (1 + R_o / R_i).$$

<sup>4</sup> Ad esempio National μA759 e μA791, Siemens TC365, SGS L165, Burr-Brown 3571, ...

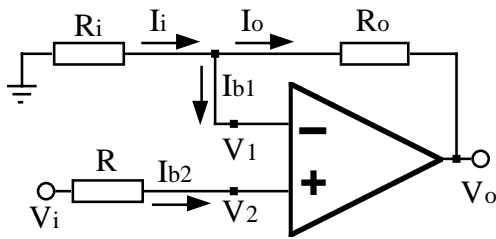


Figura 4.7 Schema elettrico amplificatore non invertente.

Di nuovo  $G$  è indipendente dal valore di  $A$ , finché  $A$  è abbastanza grande, ed è determinato invece solo dai valori usati per la rete di reazione. Questo è un risultato che è comune a tutti i circuiti con reazione negativa, ed è molto importante perché permette di rendere insensibile il circuito alle caratteristiche del componente attivo, che possono ad esempio cambiare con la temperatura, variare da tipo a tipo, ...

### 5.3.3 INSEGUITORE

Un caso semplice di amplificatore non-invertente si ha per  $R_i = \infty$  (circuito aperto): per ogni valore di  $R_o$  (per esempio anche  $R_o = 0$ , come in figura 4.8) si ha  $G = 1$ . Questo circuito è utile come stadio di accoppiamento (buffer): esso ha infatti impedenza di ingresso elevata ed impedenza di uscita bassa, e quindi viene visto da un segnale al suo ingresso come circuito aperto, e da un carico all'uscita come generatore di tensione ideale. In altri termini: la sorgente del segnale  $V_i$  praticamente non eroga corrente, e la tensione  $V_o$  ai capi del carico applicato all'uscita non dipende dal valore del carico. Questo circuito è spesso detto anche **inseguitore** (follower), in quanto l'uscita segue l'ingresso ( $V_o = V_i$ ).

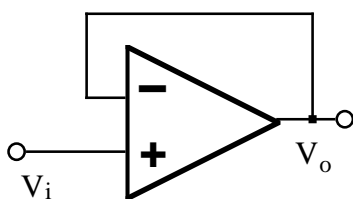


Figura 4.8 Schema elettrico inseguitore.

### 5.3.4 AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE

In figura 4.9 è riportato lo schema di un amplificatore differenziale reazionato. Esso può essere visto come la sovrapposizione di un invertente e di un non-invertente. La tensione in uscita è la somma di due contributi. Quello dovuto all'invertente, quando si considera  $V_{i2}$  spento:  $V_{o1} = -(R_{o1}/R_{i1})V_{i1}$ , e quello dovuto al non-invertente quando  $V_{i1}$  è spento:

$$V_{O2} = (1 + R_{O1} / R_{i1}) V_{i2} R_{O2} / (R_{O2} + R_{i2})$$

Nel caso semplice di amplificatore bilanciato<sup>5</sup>  $R_{i1} = R_{i2} = R_i$  e  $R_{O1} = R_{O2} = R_O$ , si ottiene, sommando i due contributi,  $V_O = (R_O / R_i)(V_{i2} - V_{i1})$ . Il guadagno ad anello chiuso del differenziale è quindi:

$$G_d = V_O / V_d = R_O / R_i$$

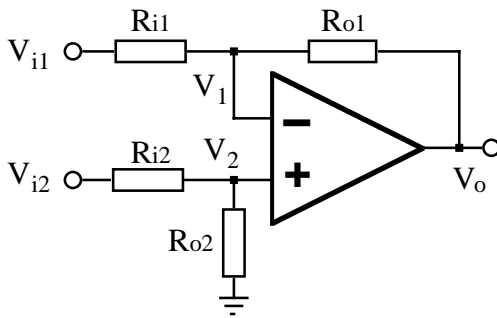


Figura 4.9 Schema elettrico amplificatore differenziale.

Per analizzare l'effetto dello sbilanciamento dovuto a  $R_{O1} \neq R_{O2}$  oppure  $R_{i1} \neq R_{i2}$  conviene esprimere  $V_O$  in funzione di  $V_{cm}$  e di  $V_d$ :

$$V_O = \frac{R_{O2}R_{i1} - R_{O1}R_{i2}}{R_{i1}(R_{i2} + R_{O2})} V_{cm} + \frac{R_{O1}}{R_{i1}} \left[ \frac{1 + R_{i1}/R_{O1}}{1 + R_{i2}/R_{O2}} \right] \frac{1}{2} V_d = G_{cm} V_{cm} + G_d V_d$$

relazione che è facilmente deducibile osservando lo schema di figura 4.10, ed usando il principio di sovrapposizione.

Nel caso un po' più generale  $R_{O1} / R_{i1} = R_{O2} / R_{i2} = R_O / R_i$ , si ha ancora che il guadagno di modo comune ad anello chiuso è nullo  $G_{cm} = 0$ , e che il guadagno differenziale è  $G_d = R_O / R_i$ . Il bilanciamento (se  $V_{OS} = 0$ ) è perciò possibile aggiustando una sola delle quattro resistenze. L'errore di bilanciamento è valutabile ponendo ad esempio  $R_{i1} = (1 + x)R_i$ ,  $R_{i2} = (1 - x)R_i$ ,  $R_{O1} = (1 - x)R_O$ ,  $R_{O2} = (1 + x)R_O$ : si ottiene per il modo comune un guadagno  $G_{cm} \approx 4x(R_O / R_i) / (1 + R_O / R_i)$ , che per  $R_O \gg R_i$  dà  $G_{cm} \approx 4x$ . Usando resistenze all'1% si ha nel peggiore dei casi  $G_{cm} = 0.04$ .

<sup>5</sup> Bilanciare un amplificatore differenziale significa minimizzare il guadagno di modo comune (ovvero massimizzare il CMRR del circuito ad anello chiuso).

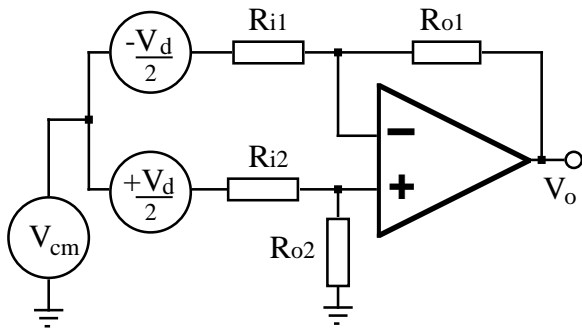


Figura 4.10 Schema circuito equivalente amplificatore.

Nel bilanciamento tuttavia giocano anche le impedenze d'uscita dei generatori dei segnali  $V_{i1}$  e  $V_{i2}$ , che si sommano rispettivamente a  $R_{i1}$  e a  $R_{i2}$ , e delle quali si dovrà tener conto caso per caso.

## 5.4 RUMORE

Il segnale fornito da un qualsiasi circuito elettrico è composto sempre da due termini, un termine  $v_s$ , che rappresenta il segnale utile e che contiene le informazioni richieste, e un segnale di rumore  $v_n$ , che non contiene alcuna informazione utile (di seguito, lettere minuscole indicheranno segnali che variano nel tempo aventi un'ampiezza rms rappresentata da lettere maiuscole). Il rumore può essere pensato come un segnale con un andamento temporale casuale che ha valor medio nullo. Per quantificarlo grandezze come  $v_n$  o  $v_n^2$  non hanno molto senso. Un modo utile per esprimerlo è tramite il suo valore efficace

$$V_n^2 = \langle v_n^2 \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T v_n^2(t) dt$$

Il rapporto:

$$\frac{V_n}{V_s} = \text{SNR}$$

è chiamato rapporto segnale/rumore (SNR=Signal to Noise Ratio). Nella progettazione di una qualunque catena di amplificazione si cerca sempre di rendere SNR il più grande possibile.

Un altro modo per quantificare il rumore è tramite il suo spettro. Il segnale  $v_n$  in un intervallo temporale  $T$  può essere espresso come somma di una serie di Fourier. È quindi possibile rappresentare il segnale nello spazio delle frequenze graficando le ampiezze delle varie armoniche in funzione della frequenza. La curva così ottenuta è lo *spettro* del segnale  $S(v)$ . Sperimentalmente, lo si può misurare usando un analizzatore di spettro. Nel caso di un segnale sinusoidale di frequenza  $v_0$ , lo spettro consiste di un punto avente coordinate (ampiezza,  $v_0$ ). Si dimostra (Teorema di Parseval) che

$$V_n^2 = \int_0^\infty S(v) dv$$

Segnali (rumori) diversi avranno funzioni spettrali diverse. Il rumore viene detto bianco quando  $S(v)$  è costante. In tal caso, il valore efficace del rumore dipende dall'intervallo di frequenza (larghezza di banda) considerato. Ovviamente quanto abbiamo detto, riferendoci a segnali in tensione, può essere esteso a segnali di altro tipo.

Il rumore può essere suddiviso in due categorie, che esamineremo separatamente, il rumore dovuto a cause esterne alla catena di amplificazione e il rumore intrinseco dei componenti che costituiscono la catena di amplificazione stessa.

---

#### 5.4.1 RUMORE DOVUTO A CAUSE ESTERNE

Questo tipo di rumore, una volta individuate le cause, può essere, almeno in linea di principio, eliminato completamente. Le cause principali possono essere:

**a) Effetti di microfonicità.** Se i circuiti sono sottoposti a disturbi di tipo meccanico, i componenti e i collegamenti variano la loro posizione reciproca dando luogo a segnali indesiderati. Consideriamo ad esempio due conduttori a potenziali diversi che presentano tra loro una certa capacità parassita. Quando i due conduttori cambiano la loro posizione reciproca la differenza di potenziale tra i due cambierà dando luogo ad un segnale spurio. I rimedi consistono nel ridurre la capacità parassita modificando il cablaggio, nell'isolare meccanicamente la catena di amplificazione, nella costruzione rigida dei circuiti.

**b) Presenza di onde elettromagnetiche.** Se la catena di amplificazione usata ha una frequenza di taglio superiore che comprende le onde radio, non è raro che parte dell'apparato funzioni da antenna e capti segnali indesiderati. Il rimedio consiste in uno schermaggio. Va precisato che onde elettromagnetiche possono avere origine anche da altri strumenti presenti nelle vicinanze.

**c) Accoppiamento capacitivo e induttivo.** Apparatı operanti nelle vicinanze della catena di amplificazione che presentino tensioni o correnti variabili nel tempo, anche se danno luogo a irraggiamento elettromagnetico trascurabile, possono disturbare la catena di amplificazione tramite accoppiamenti capacitivi o induttivi. Principale sorgente di rumore di questo tipo è la rete di distribuzione elettrica. Il rimedio consiste in uno schermaggio elettrostatico e magnetico.

---

#### 5.4.2 RUMORE DOVUTO A CAUSE INTERNE

Tutti i componenti elettrici sono sorgenti di rumore. Le origini possono essere le più svariate e non entreremo qui nei dettagli fisici che le determinano. Ci limiteremo a mettere in evidenza due tipi di rumore: il rumore termico (Effetto Johnson) e il rumore  $1/f$  (Effetto Flicker).

**Rumore termico.** Questo tipo di rumore è presente in ogni conduttore ed è dovuta all'agitazione termica degli elettroni liberi. È un rumore bianco avente funzione spettrale

$$S(v) = 4KRT$$

ove  $K$  è la costante di Boltzmann ( $=1.38 \cdot 10^{-23}$  Joule/Kelvin),  $R$  è la resistenza del conduttore e  $T$  la sua temperatura assoluta. Il valore efficace di questo rumore è quindi pari

$$V_n^2 = 4KRT\Delta v$$

dove  $\Delta f$  è la banda di frequenze considerata. Se  $R$  espresso in  $\Omega$ ,  $T$  in  $K$ ,  $\Delta f$  in  $Hz$ ,  $V_n$  risulta espressa in  $V$ . Per rendersi conto dell'entità di questo rumore, consideriamo una resistenza  $R = 10\text{ M}\Omega$  tenuta a temperatura ambiente ( $T \approx 300\text{ K}$ ). Si ottiene:

$$\frac{V_n}{\sqrt{\Delta f}} = \sqrt{4KRT} = 4 \times 10^{-7} \frac{V}{\sqrt{Hz}}$$

Se all'ingresso di un amplificatore, con una banda passante di  $1\text{ MHz}$ , poniamo tale resistenza, questa si comporta come un generatore di tensione pari a  $400\text{ }\mu V$ .

I rimedi a questo tipo di rumore consistono nel tenere quanto più possibile stretta la banda passante, nel lavorare con resistenze di valore "basso", nel raffreddare se possibile il componente interessato. Lavorando ad esempio alla temperatura dell'azoto liquido ( $\approx 77\text{ K}$ ) la medesima resistenza considerata presenta un rumore termico di circa la metà.

**Rumore di tipo shot.** È dovuto alla quantizzazione della carica elettrica, quindi una corrente elettrica a valori molto bassi può essere pensata come una "grandinata". È un altro rumore bianco avente come funzione spettrale

$$S(v) = 2qI$$

dove  $q$  è la carica elementare dei portatori del materiale considerato (metalli  $q=e$ ) e  $I$  è la corrente che circola nel conduttore. Il valore efficace di questo rumore è

$$I_n^2 = 2qI\Delta f$$

dove  $\Delta f$  è la banda di frequenze considerata. Se  $I=10\text{ }\mu A$ , nel caso di un conduttore metallico si ha un rumore di tipo shot  $I_n=1.8\text{ pA}/\sqrt{Hz}$ .

**Rumore  $1/f$ .** Molti componenti, specialmente quelli attivi, presentano un rumore che dipende dalla frequenza e che si può rappresentare con una funzione spettrale la relazione:

$$S(v) = \frac{H}{v}$$

$$\langle V^2 \rangle = H \frac{\Delta f}{v}$$

Come si vede questo tipo di rumore si fa sentire maggiormente alle basse frequenze. Il fattore  $H$  non è universale ma dipende dal componente considerato.

In definitiva un trasduttore o un qualsiasi componente si può raffigurare come in Fig.4.11. In questa raffigurazione la  $Z$  si suppone ideale, cioè esente da rumore.



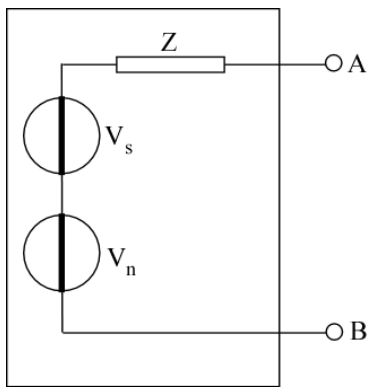


Fig.4.11 Schema equivalente trasduttore.

### 5.4.3 RUMORE DEGLI AMPLIFICATORI

Un amplificatore presenta in genere una struttura interna abbastanza complicata, ed è convenzione rappresentare il rumore generato nei vari stadi, come se questo fosse generato solo all'ingresso dell'amplificatore stesso. Il rumore presente all'uscita si ottiene moltiplicando il rumore all'ingresso per il guadagno dell'amplificatore.

Il rumore di un amplificatore operazionale si può descrivere con un generatore di tensione  $V_n$  ed uno di corrente  $I_n$  posti all'ingresso (Fig.4.12).

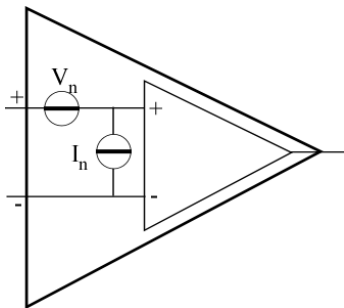


Fig.4.12 Schema equivalente di un amplificatore

Consideriamo un operazionale reazionato (Fig.4.13).

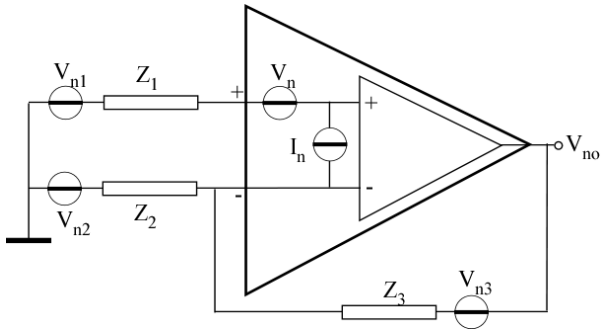


Fig.4.13 Schema equivalente di un amplificatore reazionato

Le tre impedenze sono resistori con elementi capacitivi e induttivi in serie o parallelo. I generatori sono generatori equivalenti di rumore. Vogliamo calcolare il contributo dei vari elementi al rumore totale visto in uscita. Poiché il rumore dei vari componenti è scorrelato, ciascun contributo si somma quadraticamente.

Siano  $V_{noV}$ ,  $V_{noI}$ ,  $V_{no1}$ ,  $V_{no2}$ ,  $V_{no3}$ , rispettivamente i contributi dell'amplificatore e dei tre componenti passivi:

$$V_{no} = \sqrt{V_{noV}^2 + V_{noI}^2 + V_{no1}^2 + V_{no2}^2 + V_{no3}^2}$$

Per calcolare i vari contributi applichiamo il principio di sovrapposizione, facendo agire un solo generatore alla volta e sfruttando la relazione:

$$V_{no} = A(V^+ - V^-)$$

dove  $A$  è il guadagno a loop aperto dell'operazionale (che viene fatto tendere all'infinito) e  $V^\pm$  le tensioni ai due ingressi.

$$V_{noV} = V_n \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2}$$

$$V_{noI} = I_n (Z_1 \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2} + Z_3)$$

$$V_{no1} = V_{n1} \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2}$$

$$V_{no2} = V_{n2} \frac{Z_3}{Z_2} \text{ (il segno- viene omissso, i contributi sono quadratici)}$$

$$V_{no3} = V_{n3} \text{ (il segno- viene omissso, i contributi sono quadratici)}$$

Con queste relazioni è possibile valutare il rumore in uscita dell'amplificatore in quasi tutte le situazioni. In Fig.4.14 è riportato lo spettro del rumore equivalente di ingresso in tensione e in corrente di un operazionale tipo SE5534 ( la funzione  $F(v)=\sqrt{S(v)}$  ).

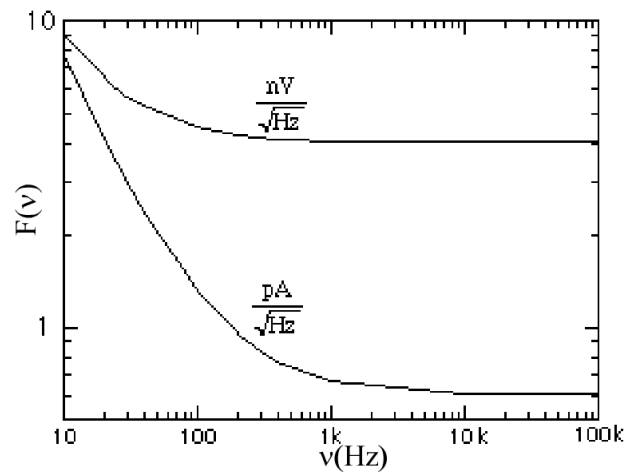


Fig.4.14 Spettro rumore amplificatore operazionale

Supponiamo di dover calcolare il rumore in un certo intervallo di frequenze  $v_1, v_2$ . Se  $F_v(v)$  e  $F_i(v)$  rappresentano lo spettro del rumore in tensione e in corrente:

$$V_n^2 = \int_{v_1}^{v_2} F_v^2(v) dv$$

$$I_n^2 = \int_{v_1}^{v_2} F_i^2(v) dv$$

Se disponiamo di un solo grafico tipo quello di Fig.4.14, si opera come segue. Per prima cosa si suddivide l'intervallo di frequenze in N intervalli più piccoli  $\Delta v$ :

$$v_2 - v_1 = N \Delta v$$

entro i quali il rumore non cambia apprezzabilmente e si valuta il rumore medio  $\langle V_n \rangle_i$  e  $\langle I_n \rangle_i$  entro ogni intervallo. Sommando tutti i contributi:

$$V_n^2 = \sum_{i=1}^N \langle F_{vi} \rangle^2 \Delta v$$

$$I_n^2 = \sum_{i=1}^N \langle F_{ii} \rangle^2 \Delta v$$

## 5.5 RIVELATORE A SENSIBILITÀ DI FASE

Spesso il rapporto segnale/rumore  $V_s/V_n$  è piccolo e difficilmente misurabile. Ci sono però delle tecniche che permettono di migliorare questo rapporto. Prima di tutto l'apparato dovrà essere opportunamente schermato per ridurre il rumore di origine esterna. Per ridurre il rumore residuo si utilizzano tecniche che si basano, in forme diverse, su un unico principio: ridurre la banda passante della catena di amplificazione. In linea generale si useranno quindi amplificatori a basso rumore (anche gli amplificatori introducono un rumore che può essere comparabile o superiore al segnale da amplificare) e con una banda passante più stretta possibile (compatibilmente con i segnali da rivelare). La tecnica che verrà descritta permette di misurare ampiezza e fase di segnali sinusoidali dei quali si conosce la frequenza, anche se il rumore ha una ampiezza molto superiore al segnale stesso. Questo metodo sfrutta le proprietà di uno strumento chiamato "rivelatore a sensibilità di fase".

Supponiamo di avere un sistema come quello rappresentato in Fig.4.15.

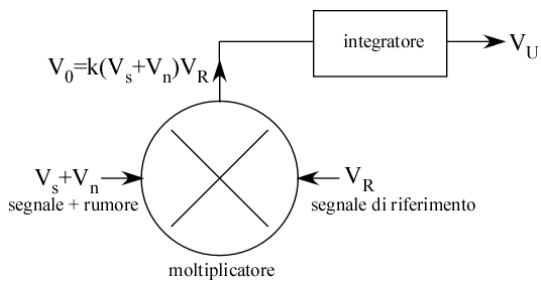


Fig.4.15 Schema a blocchi rivelatore a sensibilità di fase

$V_s$  è il segnale sinusoidale che intendiamo misurare,  $V_n$  il rumore e  $V_R$  un segnale di riferimento con la stessa frequenza di  $V_s$ :

$$V_R = V_{R0} \cos(\omega t)$$

$$V_s = V_{s0} \cos(\omega t + \phi)$$

$V_s + V_n$  viene inviato ad un ingresso di un circuito elettronico moltiplicatore. All'altro ingresso viene inviato  $V_R$ . All'uscita del moltiplicatore avremo:

$$V_0 = kV_{R0} \cos(\omega t) [V_{s0} \cos(\omega t + \phi) + V_n] = kV_{R0} V_{s0} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi) + kV_{R0} \cos(\omega t) V_n =$$

$$\frac{1}{2} kV_{R0} V_{s0} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos(\phi)] + kV_{R0} \cos(\omega t) V_n$$

ove  $k$  è una costante con le dimensioni dell'inverso di una tensione.  $V_0$  ha una componente continua e due componenti a media nulla:

$$\langle V_0 \rangle = \frac{1}{2} k V_{R0} V_{s0} \cos(\phi)$$

Inviando  $V_0$  a un filtro integratore ad esempio un filtro passa basso con funzione di trasferimento:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

Scegliendo opportunamente  $\omega_T = 1/\tau$  ( $\omega_T \ll \omega$  e  $\omega_T \ll$  componenti a bassa frequenza del rumore), all'uscita del filtro rimarrà praticamente solo la componente in continua:

$$V_U = \frac{1}{2} k V_{R0} V_{s0} \cos(\phi)$$

Ebbene, se  $V_R$  è un segnale noto, cioè ne conosciamo ampiezza e fase, questa relazione ci fornisce il valore del prodotto  $V_{s0} \cos(\phi)$ . Il massimo di  $V_0$  si ottiene per  $\phi=0$ . Se  $\phi \neq 0$ , introducendo uno sfasamento noto  $\phi$  nella  $V_R$ , si avrà il valore massimo di  $V_0$  quando  $\phi=\phi$ . In questo modo si può misurare separatamente  $V_{s0}$  e  $\phi$ .

Questo metodo di rivelazione è molto efficace per la soppressione del rumore. Per comprendere meglio l'efficacia del metodo, supponiamo di inviare un segnale  $V_s$  con frequenza arbitraria  $\omega_a$  su un ingresso, sull'altro è presente il segnale di riferimento a frequenza  $\omega$ :

$$V_s = V_{s0} \cos(\omega_a t)$$

All'uscita del moltiplicatore avremo:

$$V_0 = k V_{R0} V_{s0} \cos(\omega t) \cos(\omega_a t) = \frac{1}{2} k V_{R0} V_{s0} \{ \cos[(\omega + \omega_a)t] + \cos[(\omega - \omega_a)t] \}$$

All'uscita del filtro, poiché  $\omega_T \ll \omega$ , il termine a pulsazione  $\omega + \omega_a$  darà un contributo praticamente nullo a  $V_U$ . Il secondo termine darà invece un contributo diverso da zero se  $\omega_a \approx \omega$ :

$$|V_U| = \frac{1}{2} k V_{R0} V_{s0} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega - \omega_a)^2 \tau^2}}$$

In Fig.4.16 si riporta l'andamento di  $V_U$  in funzione di  $\omega_a$ .

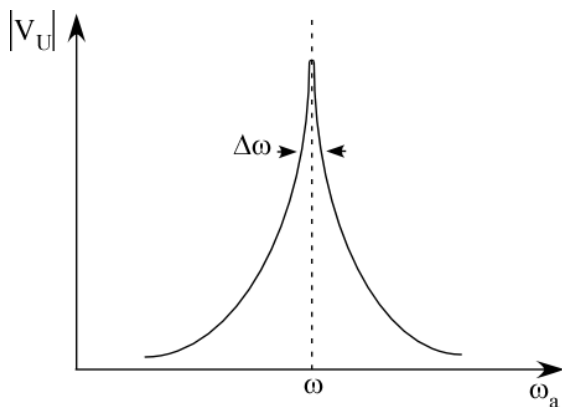


Fig.4.16 Uscita rivelatore a sensibilità di fase con moltiplicatore.

Come si può osservare, il rivelatore a sensibilità di fase si comporta per segnali spuri come un filtro selettivo con una larghezza di banda pari a:

$$\Delta\omega = 2\omega_T = \frac{2}{\tau}$$

E' facilmente intuibile come si possano ottenere delle bande strettissime semplicemente operando sulla costante di tempo del filtro passa basso. Con questa tecnica si possono rivelare segnali che sono diversi ordini di grandezza più piccoli del rumore. Il moltiplicatore e il filtro in uscita costituiscono quello che viene chiamato **rivelatore a sensibilità di fase**.

Il segnale di uscita  $V_U$  dipende dall'ampiezza  $V_{R0}$  del segnale di riferimento. Per ottenere un segnale di ampiezza indipendente da  $V_{R0}$  si ricorre spesso ad circuito leggermente diverso che tuttavia, come vedremo, si può ricondurre a quella descritto. Prendiamo in esame il circuito di Fig.4.17.

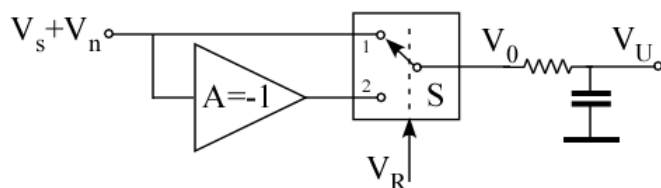


Fig.4.17 Schema rivelatore a sensibilità di fase con deviatore.

Il moltiplicatore è sostituito da un deviatore elettronico S comandato da  $V_R$  e da un amplificatore con guadagno  $A=-1$ . Supponiamo che il deviatore sia nella posizione 1 in corrispondenza delle semionde positive di  $V_R$  e nella posizione 2 in corrispondenza di quelle negative. In Fig.4.18, è riportata la posizione del commutatore e il segnale  $V_O$ , a vari sfasamenti  $\varphi$  del segnale  $V_s.V_n$  non è rappresentato perché a media nulla.

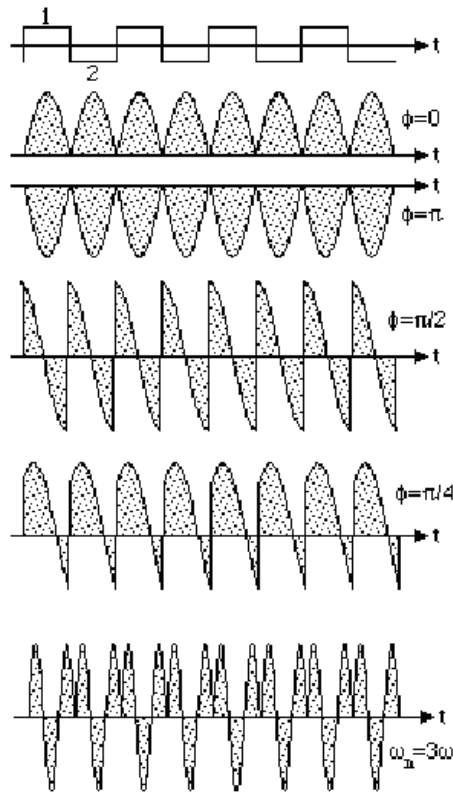


Fig.4.18 Uscita deviatore a vari sfasamenti.

L'uscita  $V_U$  del filtro, nella condizione  $\omega \gg 1/T$ , ci fornirà il valor medio di  $V_0$ . Tale valore è rappresentato dall'area punteggiata diviso il periodo  $T=2\pi/\omega$ . Come si può osservare  $V_U$  ha un massimo in valore assoluto, per  $\phi=0$  e  $\phi=\pi$ . Vale invece 0 per  $\phi=\pi/2$ . In formule:

$$V_U = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} V_0 dt = \frac{2V_{s0}}{\pi} \cos(\phi)$$

Come si vede  $V_U$  non dipende dall'ampiezza del segnale di riferimento  $V_R$ . Va osservato che un segnale spurio con una frequenza che è un multiplo dispari di quella del segnale di riferimento, contribuisce al valore di  $V_U$ .

Nella Fig.4.18 si vede infatti il segnale  $V_0$  dovuto ad un segnale con pulsazione  $\omega_n=3\omega$ . Come si può osservare le aree positive sono due volte quelle negative, quindi il valore medio è diverso da zero. Il rivelatore a sensibilità di fase a deviatore si può considerare come un moltiplicatore che moltiplica il segnale  $V_s$  con una funzione  $Q(t)$ , adimensionale, che rappresenta un'onda quadra la cui ampiezza varia da +1 a -1. Se il periodo è  $2\pi/\omega$  la funzione  $Q(t)$  può essere sviluppata in serie di Fourier :

$$Q(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) - \dots \right]$$

Il segnale viene quindi moltiplicato per tutte le armoniche dispari oltre che per la fondamentale. Se quindi osserviamo come questo rivelatore filtra i segnali in funzione della frequenza, otteniamo, a differenza dell'andamento mostrato in Fig.4.16, quello mostrato in Fig.4.19.

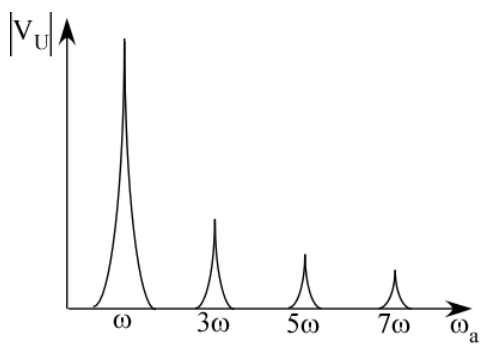


Fig.4.19 Uscita rivelatore a sensibilità di fase con deviatore.

Spesso, per tagliare la risposta alle armoniche, il segnale, prima di essere inviato al rivelatore a sensibilità di fase, viene filtrato da un amplificatore a banda stretta centrata su  $\omega$ .

In commercio esistono numerosi strumenti comprendenti l'amplificatore e il rivelatore a sensibilità di fase. Uno strumento di questo tipo viene comunemente chiamato **amplificatore lockin**.

Osserviamo che il rivelatore a sensibilità di fase è uno strumento utilissimo per la misura del segnale di sbilanciamento dei ponti in alternata. Oltre a ripulire il segnale dal rumore, l'uscita del rivelatore ci fornisce anche l'indicazione se  $R_n$  è maggiore o minore di  $R_x$ , a seconda del segno del segnale di uscita.



Spesso uno dei parametri più importanti da tenere presente quando si esegue un esperimento è la temperatura. La temperatura si può misurare in vari modi, in questa sede prenderemo in considerazione alcuni sensori tra i più usati, che forniscono un segnale elettrico funzione della temperatura stessa. Questi sensori si possono dividere in tre categorie: **resistivi** (metallici o a semiconduttore), a **diode**, **termocoppie**.

#### Termometri a resistenza metallica

Quelli a resistenza metallica hanno un coefficiente di temperatura positivo e sono costruiti di solito in nichel, rame o platino. La resistività di un metallo segue, in prima approssimazione e per temperature non troppo basse, la legge lineare  $\rho(T) = \rho_0(1 + \alpha T)$ , dove  $\rho_0$  è la resistività residua a  $T \sim 0$  K, proporzionale alla quantità di impurezze e imperfezioni del reticolo cristallino, e  $\alpha = (\rho/\rho_0)/T$  è il coefficiente di temperatura. Per platino, rame e alluminio si ha  $\alpha \sim 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ , per il nichel, ferro e argento  $\alpha \sim 6 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

I termometri a *platino* sono i più affidabili perché il platino può essere prodotto con un estremo grado di purezza, e si possono quindi ottenere sensori con caratteristiche di elevata riproducibilità. Normalmente i termometri a platino sono realizzati in capsula ceramica e resistenza a  $0^\circ\text{C}$  con valori multipli di  $10 \Omega$ ; i valori commerciali più diffusi sono  $100 \Omega$  (PT100) e  $1000 \Omega$  (PT1000). Costruttivamente possono essere costituiti da un sottile filo avvolto a spirale oppure da un film evaporato sopra un supporto ceramico (Fig.5.1a,b). Esistono curve di calibrazione, in genere è però conveniente fare uso di tabelle molto accurate resistenza-temperatura e ottenere i punti che mancano per interpolazione.

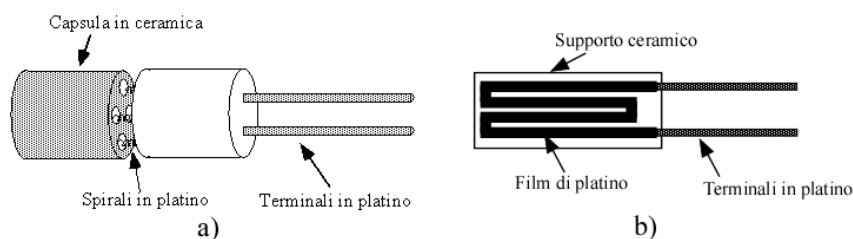


Fig.5.1 Tipi di termometri a platino.

Per misurare la resistenza  $R_T$  del termometro occorre far circolare una corrente  $I$ . La potenza dissipata nel termometro sarà:

$$W_T = I^2 R_T$$

Maggiore è la potenza dissipata, maggiore è l'errore sistematico dovuto all'autoriscaldamento per effetto Joule. L'errore dovuto all'autoriscaldamento può essere stimato variando la corrente  $I$  ed osservando la corrispondente variazione di  $R_T$ . Valori tipici dei coefficienti di autoriscaldamento per termometri a platino vanno da  $0.05$  a  $0.4 \text{ K/mW}$ .

In generale i termometri *metallici* possono essere costruiti con piccola massa e consentono una risposta rapida, hanno però lo svantaggio di avere una resistenza relativamente bassa, e quindi presentano difficoltà di misura. Se la resistenza del termometro viene misurata tramite un ponte, per evitare che la resistenza dei cavi introduca errori notevoli, occorre utilizzare una configurazione a quattro o a tre terminali.

Intervallo utile: per i termometri a platino si va da qualche K a  $800 \text{ K}$ , per il nichel da  $200 \text{ K}$  a  $600^\circ\text{C}$  e per il rame da  $200 \text{ K}$  a  $450 \text{ K}$ .

---

### 6.1.1 TERMOMETRI A SEMICONDUCTORE

Questi sensori sono essenzialmente di due tipi, *termistori NTC* e *termometri al Germanio*.

I termistori NTC sono sensori costituiti da semiconduttori ceramici con una sensibilità molto più elevata dei sensori metallici. Hanno un coefficiente di temperatura negativo e sono costituiti da una miscela di polveri di ossidi metallici (manganese, nichel, ferro cobalto ecc.) mescolata ad un opportuno legante e sinterizzate ad alta temperatura. Gli NTC hanno una resistenza che dipende esponenzialmente dall'inverso della temperatura assoluta. L'equazione caratteristica è:

$$R_T = R_0 e^{\frac{\beta}{T}}$$

I termistori esibiscono quindi una notevole *non-linearità*, con una sensibilità  $\alpha$  che varia inversamente con il quadrato della temperatura assoluta T:

$$\alpha = \frac{1}{R_T} \frac{\partial R_T}{\partial T} = -\frac{\beta}{T^2}$$

A fronte di questo svantaggio i termistori offrono la possibilità di scegliere il valore ohmico a temperatura ambiente in un intervallo vastissimo, senza che questo imponga un sensibile aumento delle dimensioni del sensore. Altri svantaggi dei termistori sono la scarsa riproducibilità e stabilità nel tempo e il limitato range di applicazione (~250 K-370 K).

Esistono anche termistori (PTC Thermistor) che hanno un coefficiente termico positivo in un limitato intervallo di temperature e vengono essenzialmente utilizzati come elementi di controllo in circuiti elettronici.

I termometri al germanio vengono usati in genere alle basse temperature (<30K), sono costituiti da un singolo cristallo di Germanio opportunamente drogato. In base al drogaggio si può variane la resistenza, che presenta un coefficiente di temperatura negativo. Hanno una buona stabilità, lo svantaggio consiste nel fatto che è molto difficile costruire due termometri uguali e l'andamento della resistenza in funzione della temperatura è complicato.

---

### 6.1.2 TERMOMETRI A DIODO

Il termometro a diodo sfrutta il fatto che la dipendenza dalla temperatura della tensione diretta  $V_D$  di una giunzione p-n polarizzata con corrente  $I_D$  costante è quasi lineare. La curva caratteristica del diodo è infatti:

$$I_D = I_0 (e^{\frac{qV_D}{\eta k_B T}} - 1)$$

ove  $k_B$  è la costante di Boltzmann,  $q$  è la carica dell'elettrone,  $\eta$  il fattore di non idealità (~2 per Silicio, ~1 per il Germanio),  $I_0$  è la corrente inversa, che dipende esponenzialmente dalla temperatura:

$$I_0 = A e^{-\frac{E_g}{\eta k_B T}}$$

ove  $E_g$  è l'energy gap del materiale di cui è fatta la giunzione, ed A è una costante di proporzionalità che dipende dall'area della giunzione. Si ha quindi, passando ai logaritmi (trascurando l'unità rispetto all'esponenziale per  $V_f \gg 0.26V$ ):

$$\ln(I_D) = \ln(A) + \frac{qV_D}{\eta k_B T} - \frac{E_g}{\eta k_B T}$$

$$V_D = \frac{E_g}{q} - \frac{\eta k_B}{q} \ln\left(\frac{A}{I_D}\right) T$$

Se  $I_D$  è costante si ha una relazione quasi lineare tra la differenza di potenziale e la temperatura, con una sensibilità dell'ordine di 2mV/K. Questa relazione è però valida solo fino a  $30 \div 50\text{K}$  (Fig.5.2). Occorre quindi fare una curva di taratura alla stessa corrente  $I_D$  di quella usata per le misure (normalmente  $I_D$  varia tra 1mA e 1mA). Il limite superiore delle temperature si aggira attorno ai 400 K.

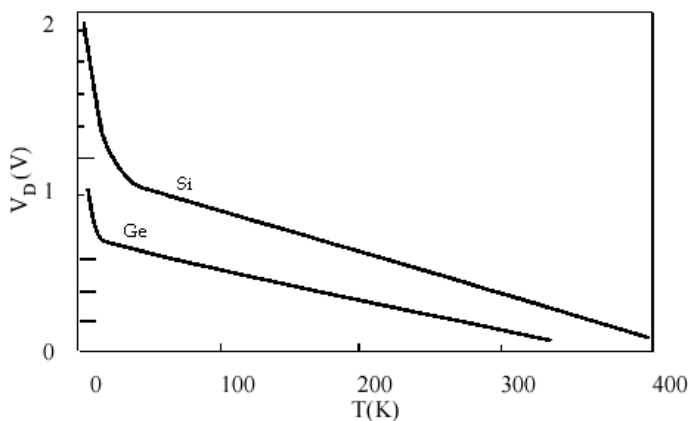


Fig.5.2 Curve caratteristiche termometri a diodo.

### 6.1.3 TERMOMETRI A TERMOCOPPIA

La termocoppia è costituita dalla giunzione di due fili di metalli diversi (Fig.5.3). Tra i due fili si stabilisce una forza elettromotrice  $V_{ab}$  (effetto Seebeck) che è funzione crescente di  $T$ , ed è quasi lineare in prossimità della temperatura ambiente.

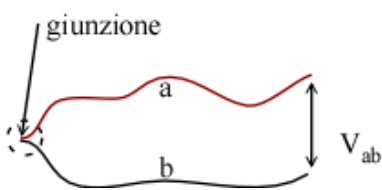


Fig.5.3 Schema termocoppia.

La sensibilità  $S = \frac{\partial V_{ab}}{\partial T}$  dipende dai materiali usati nei vari tipi di termocoppia, ma è sempre dell'ordine di qualche decina di  $\mu\text{V/K}$  (vedi tabella).

Materiali	Colore cavi	Tipo	$S(T)$ ( $\mu V/K$ )	Temperature di lavoro(K)
Rame-Costantana	Blue-Red	T	20-55	70 ÷ 900
Ferro-Costantana	White-Red	J	20-60	70 ÷ 1200
Chromel-Costantana	Purple-Red	E	50-75	270 ÷ 1300
Chromel-Alumel	Yellow-Red	K	15-40	70 ÷ 1700
Platino Rodio-Platino(10%)		R	5-13	270 ÷ 2100

Tabella 5.1 Principali tipi di termocoppie.

In Fig.5.4 è riportato l'andamento di  $V_{ab}$  in funzione della temperatura per termocoppie tipo J e K.

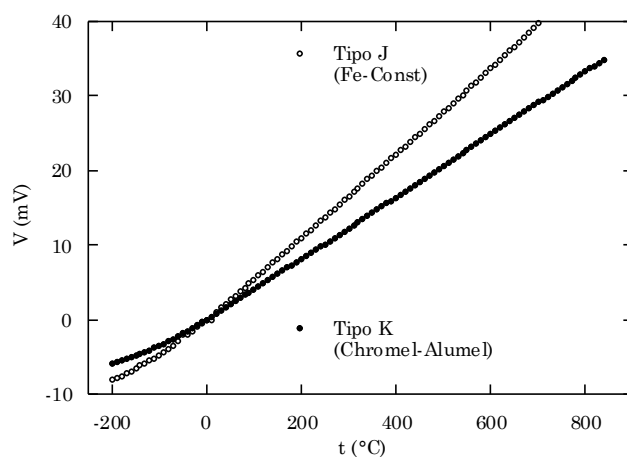


Fig.5.4 Curve caratteristiche termocoppie tipo J e K.

Qualche precauzione va presa per la misura di  $V_{ab}$ . È importante notare che quando i due fili della termocoppia vengono connessi ai terminali di un voltmetro, normalmente di rame, costituiscono con questi altre due giunzioni, di solito alla temperatura ambiente  $T_0$  (Fig.5.5).

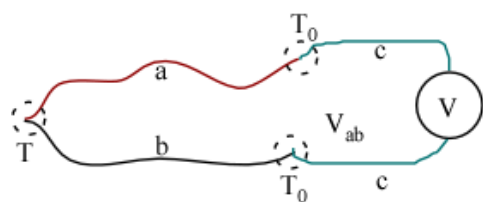


Fig.5.5 Collegamento termocoppia.

La tensione  $V$  misurata è la somma di tre forze elettromotrici:

$$V = V_{ab}(T) + V_{bc}(T_0) + V_{ca}(T_0)$$

Per ovviare a questo inconveniente si ricorre ad una struttura rappresentata in Fig.5.6.

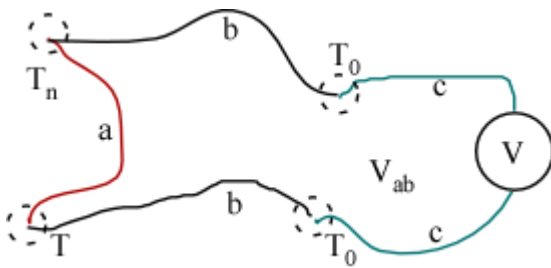


Fig.5.6 Collegamento alternativo termocoppia.

$$V = V_{ab}(T) + V_{bc}(T_0) + V_{cb}(T_0) + V_{ba}(T_n)$$

Poiché:

$$V_{bc}(T_0) = -V_{cb}(T_0)$$

otteniamo:

$$V = V_{ab}(T) + V_{ba}(T_n) = V_{ab}(T) - V_{ab}(T_n)$$

Se  $T_n$  è una temperatura di riferimento nota si risale facilmente a  $T$ .

I vantaggi essenziali del sensore a termocoppia sono: prontezza (dovuta alla piccola massa) facilità di accoppiamento termico (purché si usino fili sufficientemente sottili e lunghi) esteso intervallo di lavoro (da 70 K a più di 1000 K) basso costo, non richiede polarizzazione.

I principali svantaggi della termocoppia sono: la necessità di usare fili senza interruzione dal punto di misura fino ai terminali di lettura della tensione, la scarsa sensibilità e dover amplificare in continua segnali della decina di  $\mu V$ .

#### 6.1.4 MONTAGGIO DEI TERMOMETRI

Per una misura accurata, non solo il sensore, ma anche i cavi necessari per la sua polarizzazione e per la lettura del segnale vanno ancorati termicamente al campione (oggetto di cui si vuole misurare la temperatura), per evitare che si crei un gradiente tra sensore e campione, con conseguente errore di misura difficilmente calcolabile.

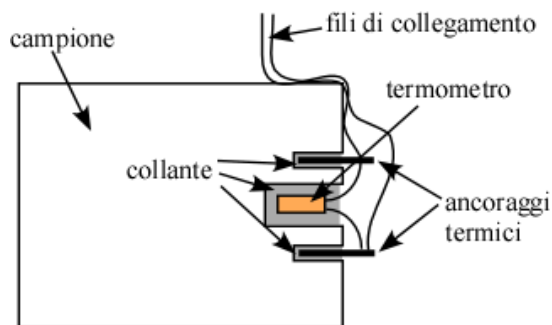


Fig.5.7 Montaggio termometro

L'ancoraggio va fatto per compressione (mediante viti o molle) contro la parete del campione, o meglio per incollaggio mediante resine con buona conducibilità termica; una parete di buon conduttore termico (metallo) dovrebbe sempre schermare sensore e fili dall'ambiente esterno. In Fig.5.7 è rappresentato un possibile tipo di montaggio. Il termometro è alloggiato in una cavità del campione immerso in un collante buon conduttore di calore. I fili del termometro sono saldati a due terminali di rame incollati entro due fori e isolati elettricamente dal campione. Questi terminali servono per ancorare termicamente i fili di collegamento. I fili di collegamento dovranno essere sottili per evitare scambi di calore con l'esterno. Per questa ragione, la loro resistenza elettrica spesso non è trascurabile. Ne consegue che se il termometro è a resistenza può essere necessario ricorrere al collegamento a tre fili.

#### 6.1.5 ISOLAMENTO TERMICO E CONTROLLO DELLA TEMPERATURA

Eseguendo un esperimento spesso non basta misurare la temperatura, questa va anche tenuta costante per tutta la durata della misura. La prima cosa da fare è quella di ridurre al massimo gli scambi termici tra il campione e l'ambiente esterno.

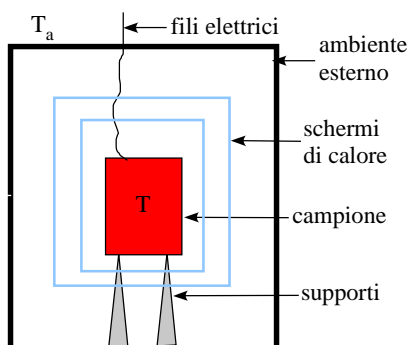


Fig.5.8 Schema termostato.

Consideriamo la Fig. 5.8. Gli scambi termici con l'ambiente esterno avvengono essenzialmente per tre cause: la conduzione termica dei supporti e dei fili elettrici di collegamento, la conduzione termica del gas che circonda il campione e l'irraggiamento termico. La prima causa si riduce utilizzando, per i supporti, materiali a bassa conducibilità termica (plastiche, acciaio inox, ceramiche ecc.) e, per i collegamenti, elettrici fili di piccola sezione. La seconda causa

può essere quasi eliminata facendo un vuoto spinto attorno al campione ( $P < 10^{-3}$  mbar). L'irraggiamento è invece spesso una delle maggiori cause di scambio termico. Se abbiamo due superfici di area  $S$  a temperature  $T_1$  e  $T_2$  ( $T_2 < T_1$ ) (Fig.5.9a), la potenza scambiata è:

**Errore. Non si possono creare oggetti dalla modifica di codici di campo.**

dove  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  è la costante di Stefan-Boltzmann e  $\epsilon$  il coefficiente di riflessione.  $\epsilon$  è sempre minore di 1 ( $\epsilon=1$  per il corpo nero) e dipende dal materiale e dalla struttura delle superfici. Superfici ben lucide hanno un coefficiente di riflessione minore di superfici rugose, a parità di materiale.

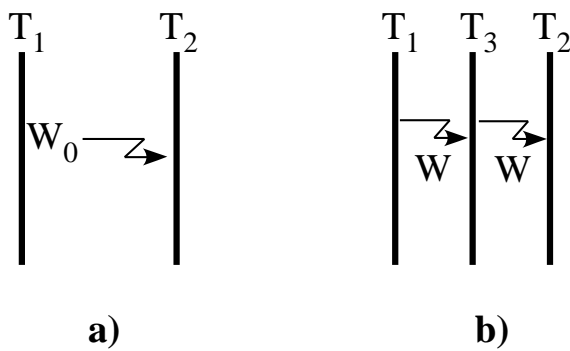


Fig.5.9 Schermi termici.

Poiché la potenza scambiata dipende dalla differenza delle quarte potenze delle temperature, si possono avere situazioni nelle quali il meccanismo dell'irraggiamento è quello predominante nello scambio termico. La potenza scambiata può essere notevolmente ridotta con l'introduzione di schermi intermedi. Consideriamo la situazione della Fig.5.9b. In condizioni stazionarie lo schermo intermedio si porterà ad una temperatura intermedia  $T_3$  determinata dalle relazioni:

$$W = S\sigma\epsilon(T_1^4 - T_3^4)$$

$$W = S\sigma\epsilon(T_3^4 - T_2^4)$$

Quindi:

$$T_3^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$

Sostituendo in una delle due relazioni precedenti:

$$W = \frac{S\sigma\epsilon}{2}(T_1^4 - T_2^4) = \frac{W_0}{2}$$

Come si vede il calore scambiato nell'unità di tempo si è dimezzato con l'introduzione di uno schermo. Con lo stesso ragionamento si trova facilmente che inserendo  $n$  schermi il calore scambiato si riduce di un fattore  $1/(n+1)$ . Nella trattazione fatta si è supposto schermi e superfici con il medesimo coefficiente di riflessione, sostanzialmente la cosa non cambia molto in situazioni più generali. In Fig.5.8 è rappresentato un apparato sperimentale nel quale il campione è circondato da due schermi di calore.

L'isolamento termico non è sufficiente per garantire la stabilità della temperatura, primo perché l'isolamento non può mai essere perfetto e quindi si risentono gli effetti delle variazioni della temperatura ambiente, secondo perché entro il campione ci sono in genere dei dispositivi elettrici o meccanici che possono sviluppare calore. Esistono vari modi per ottenere la stabilizzazione della temperatura, tali metodi differiscono a seconda delle condizioni ambientali e dalle dimensioni del campione. In questa sede ci limiteremo a considerare il problema riguardante la stabilizzazione della temperatura di piccoli oggetti, temperatura che è sempre superiore a quella ambiente. Per ambiente circostante non si deve intendere necessariamente l'ambiente a temperatura di circa  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , questo può anche essere un bagno di un liquido criogenico a qualche centinaio di gradi al di sotto di  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . In questi casi il mantenimento costante della temperatura può essere fatto in maniera automatica tramite uno strumento chiamato **termoregolatore**. Consideriamo la situazione rappresentata in Fig.5.10.

**Errore. Non si possono creare oggetti dalla modifica di codici di campo.**

Fig.5.10

Il campione (rappresentato in rosso) si trova a temperatura  $T$  all'interno di un contenitore in contatto termico con l'ambiente esterno a temperatura  $T_a$  ( $T > T_a$ ). Tramite un termometro a resistenza  $R_T$  si misura la temperatura. Una resistenza  $R_H$  viene utilizzata come riscaldatore. Se  $I$  è la corrente che circola in  $R_H$ , la potenza ceduta al campione sarà:

$$Q_{in} = R_H I^2$$

Poiché il campione non può essere completamente isolato termicamente dall'ambiente esterno ci sarà uno scambio di calore che supponiamo linearmente dipendente dalla differenza di temperatura (per semplicità linearizziamo anche il calore di radiazione):

$$Q_{out} = \lambda(T - T_a)$$

La temperatura finale a cui si porta il campione sarà:

$$T = T_a + \frac{R_H I^2}{\lambda}$$

Se  $T_0$  è la temperatura di misura a cui si vuole portare il campione si dovrà variare opportunamente la corrente  $I$  fino a quando per una certa  $I_0$ :



$$T_0 = T_a + \frac{R_H I_0^2}{\lambda}$$

Questa operazione effettuata manualmente risulta estremamente difficile, senza tenere conto che  $T_a$  può variare nel tempo e questo richiede un aggiustamento continuo della corrente  $I$ . Come già detto tutto questo può essere fatto in maniera automatica da un termoregolatore (Fig.5.11).

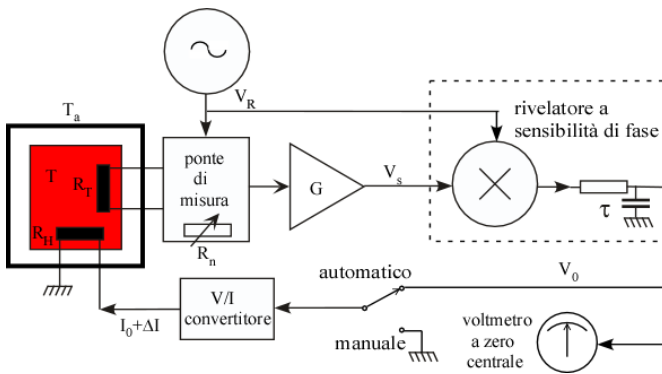


Fig.5.11 Schema circuito termoregolatore.

Questo sistema di controllo ha una struttura praticamente identica a quella largamente usata in elettronica e che va sotto il nome di “reazione negativa” o “retroazione”. Supponiamo che il termometro sia di tipo resistivo e la resistenza venga misurata tramite un ponte in alternata. Il ponte si suppone azzerato quando  $R_T = R_n$ . Inizialmente il campione si trova ad una generica temperatura  $T$ . Sia  $T_0$  la temperatura che vogliamo ottenere. A questa temperatura il termometro avrà una resistenza:

$$R_T(T_0) = R_{T0}$$

Poniamo la resistenza di riferimento  $R_n = R_{T0}$ . Poiché il termometro si trova a una generica temperatura  $T$ , il ponte non sarà azzerato e si avrà in uscita un segnale di sbilanciamento pari a:

$$V = A(R_T - R_{T0}) = B(T_0 - T)$$

avendo supposto un andamento quasi lineare del termometro. Questo segnale viene amplificato da un amplificatore con guadagno  $G$ :

$$V_s = GB(T_0 - T)$$

e inviato ad un rivelatore a sensibilità di fase assieme al segnale di riferimento  $V_R$ , fornito dal generatore che alimenta il ponte. L'uscita  $V_0$  del rivelatore sarà proporzionale a  $V_s$ :

$$V_0 = CV_s = GCB(T_0 - T)$$

$V_0$  comanda un generatore di corrente  $I$ :

$$I = I_0 + \Delta I = I_0 + DV_0$$

In altre parole il generatore fornisce una *corrente base*  $I_0$  più una corrente  $\Delta I$  proporzionale a  $V_0$  (che può essere positiva o negativa a seconda del segno di  $V_0$ ). La potenza dissipata in  $R_H$  sarà:

$$Q_{in} = R_H I^2 = R_H [I_0^2 + 2I_0 \Delta I + (\Delta I)^2] \approx R_H (I_0^2 + 2I_0 \Delta I) = R_H (I_0^2 + 2DI_0 V_0)$$

Nell'ipotesi che vedremo verificata:

$$|\Delta I| \ll I_0$$

EsPLICITANDO  $V_0$ :

$$Q_{in} = R_H (I_0^2 + 2DI_0 V_0) = R_H I_0^2 + 2R_H DI_0 GCB(T_0 - T)$$

Applichiamo la condizione, verificata in condizioni stazionarie:

$$Q_{in} = Q_{out}$$

$$R_H I_0^2 + 2R_H DI_0 GCB(T_0 - T) = \lambda(T - T_a)$$

Risolvendo rispetto a  $T$ :

$$T = \frac{R_H I_0^2 + \lambda T_a + 2R_H DI_0 GCB T_0}{\lambda + 2R_H DI_0 GCB} = \frac{\frac{R_H I_0^2}{\lambda} + T_a + \frac{2R_H DI_0 GCB}{\lambda} T_0}{1 + \frac{2R_H DI_0 GCB}{\lambda}} = \frac{\frac{R_H I_0^2}{\lambda} + T_a + h T_0}{1 + h}$$

Questa è la temperatura a cui si porta il sistema in condizioni stazionarie. L'errore che si commette rispetto alla temperatura voluta risulta:

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{\frac{R_H I_0^2}{\lambda} - (T_0 - T_a)}{1 + h}$$

Questo errore si può ridurre aumentando opportunamente il guadagno  $G$  e quindi  $h$ . Questi valori però non possono superare certi limiti perché, per ragioni che non andremo ad indagare, il sistema diventa instabile. È però possibile agire sulla corrente base  $V_0$  in modo da verificare la condizione:

$$\frac{R_H I_0^2}{\lambda} \approx T_0 - T_a$$

Questo è possibile perché  $T_a < T_0$  e abbiamo  $I_0 \gg \Delta I \approx 0$ . Il raggiungimento di questa condizione può essere facilmente verificata osservando la tensione  $V_0$  che deve essere praticamente nulla. La condizione  $V_0 > 0$  corrisponde a  $T < T_0$ , se  $V_0 < 0$  allora  $T > T_0$ . Va osservato che, se il segnale di sbilanciamento  $V$  risultasse  $V = B(T - T_0)$ , la catena sarebbe in reazione positiva e quindi instabile. Questo può succedere se ad esempio il termometro ha un coefficiente negativo di temperatura. In questo caso basta scambiare  $R_T$  nel ponte con  $R_n$ , oppure sfasare di  $\pi$  il segnale di riferimento  $V_R$  inviato al rivelatore a sensibilità di fase.

## 7 TECNICHE DI VUOTO

Talvolta gli esperimenti vanno condotti in atmosfera controllata, ad esempio per problemi legati al controllo della temperatura oppure per questioni di contaminazione atmosferica. Spesso è necessario mantenere il campione sotto vuoto entro un opportuno contenitore (camera da vuoto).

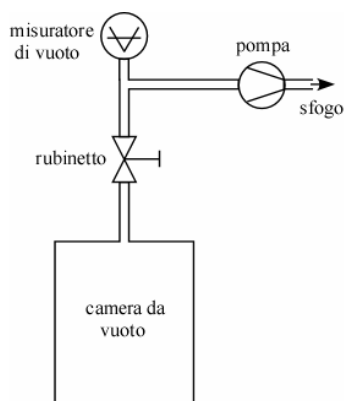


Fig.6.1 Sistema da vuoto.

In Fig.6.1 sono rappresentati schematicamente i principali elementi che costituiscono un impianto da vuoto. Nella figura compare la camera che si vuole vuotare, i condotti che collegano questa alla pompa, un rubinetto per isolare la camera e un misuratore che permette di monitorare il grado di vuoto raggiunto. Si dice che un ambiente è sotto vuoto se la pressione del gas è inferiore a quella atmosferica.

Tutta la struttura dell'impianto deve ovviamente essere a tenuta stagna. Le varie parti dell'impianto devono essere connesse l'una all'altra tramite giunti smontabili. Per le parti che si trovano a temperatura ambiente in generale si usano guarnizioni di gomma di neoprene o "viton" a forma di anello ("O" ring) se ci accontentiamo di vuoti corrispondenti a pressioni  $P > 10^{-7}$  mbar. In Fig.6.2 sono riportati due possibili esempi di connessione di elementi a sezione circolare.

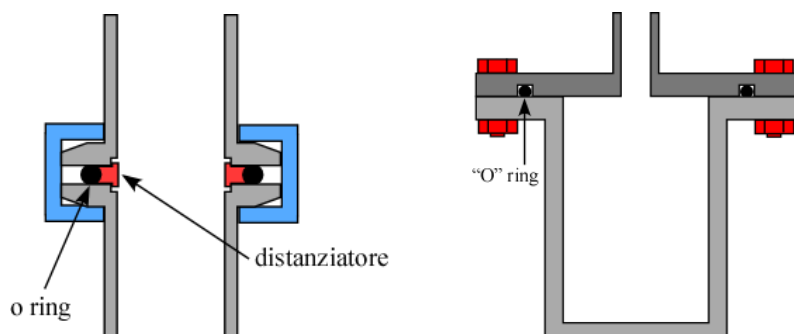


Fig.6.2 Tipi di connessione.

Se vogliamo raggiungere vuoti migliori, oppure le temperature di lavoro sono diverse da quella ambiente (  $T \geq 70 \div 80^\circ\text{C}$ ;  $T \leq 0^\circ\text{C}$  ), si usano guarnizioni metalliche di rame, di piombo o di indio (Fig.6.3).

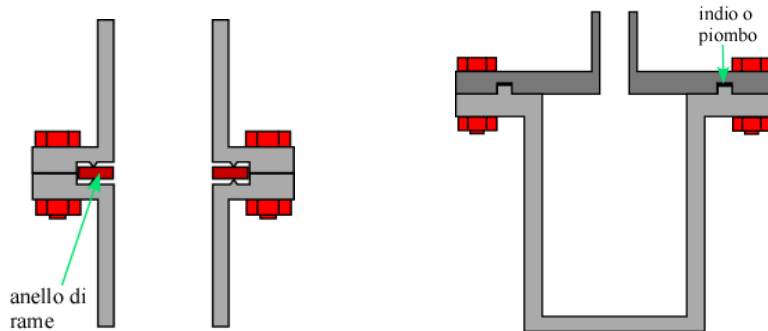


Fig.6.3 Guarnizioni metalliche.

## 7.1 CONCETTI BASE

Nella tecnologia del vuoto per pressione si intende sempre la **pressione assoluta**, cioè la forza esercitata dal gas sull'unità di superficie. Nella tabella sono riportate varie unità di misura della pressione e i fattori di conversione.

	Pa (Pascal, $\text{N/m}^2$ )	Bar	atm	Torr (mmHg)	psi
<b>Pa</b>	1	$1 \times 10^{-5}$	$9.87 \times 10^{-6}$	$7.50 \times 10^{-3}$	$1.45 \times 10^{-4}$
<b>bar</b>	$10^5$	1	0.9869	750.063	14.50
<b>atm</b>	$1.01 \times 10^5$	1.01325	1	760	14.696
<b>Torr</b>	133.32	$1.332 \times 10^{-3}$	$1.32 \times 10^{-3}$	1	$1.93 \times 10^{-2}$
<b>psi</b>	6895	0.0689	0.068	51.71	1

Tabella 6.1 Fattori di conversione unità di misura della pressione.

È consuetudine suddividere il grado di vuoto in base alla pressione P:

Basso vuoto (RV)	$P = 1000 - 1 \text{ mbar}$
Medio vuoto (MV)	$P = 1 - 10^{-3} \text{ mbar}$
Alto vuoto (HV)	$P = 10^{-3} - 10^{-7} \text{ mbar}$
Ultra alto vuoto (UHV)	$P = 10^{-7} - 10^{-14} \text{ mbar}$

In queste condizioni il gas si può considerare come un gas perfetto che obbedisce alla legge:

$$PV = nRT$$

con ovvio significato dei simboli  $R=8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Il numero di molecole per unità di volume è:

$$n_g = \frac{nN_A}{V} = \frac{PN_A}{RT} = \frac{P}{k_B T}$$

dove  $N_A$  è il numero di Avogadro ( $= 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ) e  $k_B$  è la costante di Boltzmann ( $= 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ ). Anche nei vuoti più spinti, il numero di molecole residue è estremamente elevato: ad una pressione di  $10^{-10} \text{ mbar}$  e a temperatura ambiente troviamo ancora circa  $2.4 \times 10^6$  molecole per  $\text{cm}^3$ .

Se  $m$  è la massa di una molecola, la densità di massa è pari a:

$$\rho = n_g m = \frac{mP}{k_B T}$$

Alla pressione atmosferica ( $\sim 1 \text{ bar}$ ), abbiamo ad esempio per l'aria  $\rho = 1.16 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Come vediamo le masse in gioco non sono trascurabili.

Supponiamo di avere un cubo, con lati  $L=1 \text{ m}$ , entro il quale viene fatto il vuoto. La pressione atmosferica agirà su ogni parete (trascurando la pressione residua all'interno del cubo) con una forza pari a:

$$F = PL^2 \approx 1 \times 10^5 \text{ N}$$

Questa equivale alla forza peso di una massa di 10 tonnellate. È quindi evidente che nel progettare un impianto da vuoto bisogna calcolare bene lo spessore delle pareti se vogliamo evitare il pericolo di implosioni.

Il libero cammino medio  $\lambda$ , ossia la distanza media percorsa da una molecola prima urtarne un'altra, si può calcolare dalla formula

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n_g d^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi P d^2}$$

dove  $n$  è il numero di molecole per unità di volume e  $d$  il diametro molecolare. Nella tabella è riportato il libero cammino medio delle molecole di Azoto a 0 °C a varie pressioni.

Pressione (torr)	$\lambda$ (cm)
760	$\sim 8.5 \times 10^{-6}$
1	$\sim 6.5 \times 10^{-3}$
$10^{-3}$	$\sim 6.5$
$10^{-4}$	$\sim 6.5 \times 10$
$10^{-5}$	$\sim 6.5 \times 10^2$
$10^{-6}$	$\sim 6.5 \times 10^3$
$10^{-9}$	$\sim 6.5 \times 10^6$

Tabella 6.2 Libero cammino medio.

Il numero di Knudsen  $Kn$  è definito come il rapporto tra il libero cammino medio e la dimensione caratteristica del contenitore del gas  $a$ , ad esempio il diametro di una condotta:

$$Kn = \frac{\lambda}{a}$$

In base al valore di questo numero adimensionale si possono distinguere almeno tre zone, che approssimativamente sono:

zona di flusso viscoso:  $Kn < 10^{-2}$  oppure  $aP > 100 \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2}$

zona di flusso intermedia o di Knudsen:

$$10^{-2} < \text{Kn} < 0.5 \quad \text{oppure} \quad 2 \frac{k_B T}{\sqrt{2\pi} a P d^2} < aP < 100 \frac{k_B T}{\sqrt{2\pi} a P d^2}$$

zona di flusso molecolare:  $\text{Kn} > 0.5 \quad \text{oppure} \quad aP < 2 \frac{k_B T}{\sqrt{2\pi} a P d^2}$

Nelle zone di flusso viscoso e di Knudsen, le proprietà di trasporto sono dominate dagli urti tra le molecole del gas e la viscosità del gas risulta:

$$\eta = \frac{2}{3} \pi^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{m k_B T}}{d^2}$$

e la conducibilità termica:

$$k = \frac{25 C_V}{32 N_A} \sqrt{\frac{k_B T}{\pi m}} \frac{1}{d^2}$$

dove  $C_V$  è il calore specifico molare a volume costante. Quindi la viscosità e la conducibilità termica, a temperatura costante, sono indipendenti dalla pressione.

È interessante notare che quanto più leggera è la molecola del gas tanto maggiore è la conducibilità termica. Nella tabella sono riportati i valori di  $\eta$  e  $k$  per alcuni gas.

GAS	$\eta$ (Poise)	$k$ (W cm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
N <sub>2</sub>	166	2.6×10 <sup>-4</sup>
H	86	1.8×10 <sup>-3</sup>
He	189	1.5×10 <sup>-3</sup>

Tabella 6.3 Viscosità e conducibilità di alcuni gas a T=20 C.



Invece, nella zona di flusso molecolare predominano gli urti delle molecole con le pareti. Sia  $\lambda$  sia  $\eta$  dipendono dalla pressione. Questa proprietà, come vedremo, viene sfruttata nella realizzazione di alcuni misuratori di vuoto.

Il numero di Reynolds Re è un parametro che permette di determinare il tipo di regime dinamico di un fluido viscoso ed è definito come

$$Re = \frac{\rho U a}{\eta}$$

dove U è la velocità caratteristica del fluido. Fisicamente, rappresenta il rapporto tra il contributo inerziale e quello viscoso. Per Re sufficientemente piccoli, il flusso è laminare, per Re sufficientemente grandi è turbolento. Il valore critico dipende dalla geometria del sistema. Nel caso di una condotta di diametro a, il flusso è turbolento per  $Re > 2200$ , per  $Re < 1200$  il flusso è sempre laminare, mentre per valori intermedi il regime dipende dalle irregolarità dell'imbocco e dalla rugosità delle pareti.

## 7.2 CONDUTTANZA DI UNA CONDOTTA

Per vuotare un impianto ci sono dei tubi di connessione tra la camera principale e la pompa da vuoto. La velocità con cui si riesce ad ottenere un certo grado di vuoto dipende, oltre che dalla pompa, anche dalle caratteristiche dei tubi di connessione.

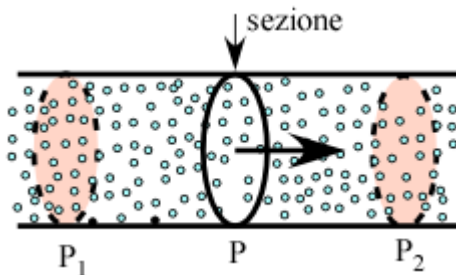


Fig.6.4 Sezione di una condotta contenente un fluido.

Il comportamento di un condotto da vuoto è caratterizzato da due quantità: **flusso volumetrico**, ossia il volume di gas che attraversa una sezione del condotto nell'unità di tempo pari a (Fig.6.4):

$$S = \frac{dV}{dt}$$

e **flusso PV** (in inglese noto come **throughput**), proporzionale alla massa di gas che attraversa una sezione del condotto nell'unità di tempo:

$$Q = \frac{d(PV)}{dt}$$

In condizioni stazionarie:

$$Q = P \frac{dV}{dt} = PS$$

Q dipende dalle pressioni  $P_1, P_2$  ( $P_1 > P_2$ ) presenti alle estremità del condotto:

$$Q = C(P_1 - P_2) = C\Delta P$$

Il fattore C:

$$C = \frac{Q}{\Delta P}$$

è chiamato **conduttanza**, dipende dalla geometria del condotto e può dipendere anche dalla pressione. L'inverso Z della conduttanza è chiamato impedenza:

$$Z = \frac{1}{C} = \frac{\Delta P}{Q}$$

Questa relazione è analoga alla legge di Ohm, ove Q è l'equivalente della corrente elettrica,  $\Delta P$  della differenza di potenziale e Z della resistenza elettrica. In analogia con la legge di Ohm, due condotti collegati in serie (Fig.6.5 a) presentano una conduttanza ed una impedenza:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} ; \quad Z = Z_1 + Z_2$$

e due condotti in parallelo (Fig.6.5 b):

$$C = C_1 + C_2 ; \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

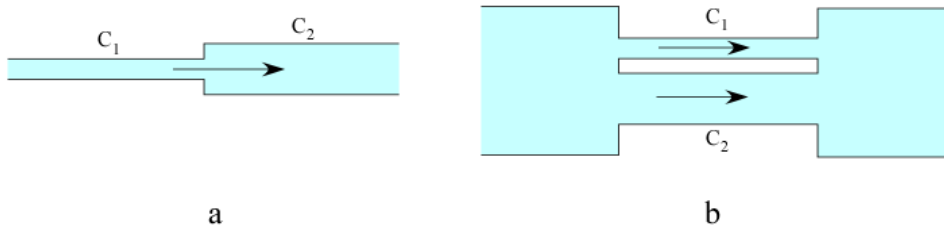


Fig.6.5 Tipi di collegamento condotte: a) serie, b) parallelo.

Come abbiamo detto la conduttanza dipende dalla geometria della condotta, come la sezione se circolare, ellittica ecc., la sua lunghezza e se il condotto è diritto o curvo. La conduttanza dipende anche dalla pressione. È difficile fare una trattazione di carattere generale, esistono però delle formule semi-empiriche che sono applicabili in casi particolari.

Nel caso di un gas in regime viscoso, il flusso volumetrico indotto da un gradiente di pressione tra le due estremità di una condotta di diametro  $a$  e lunghezza  $L$  è dato dall'equazione di Poiseuille

$$S(\text{m}^3/\text{s}) = \frac{\pi a^4}{128\eta L} \Delta P$$

che vale per un flusso completamente sviluppato (ossia la velocità non dipende dalla distanza dall'ingresso), laminare (ossia  $Re < 1200$ ) e per un gas incompressibile. Il criterio per un flusso completamente sviluppato è che la lunghezza della condotta sia molto maggiore della lunghezza d'ingresso  $L_e$  che quantifica la distanza necessaria affinché le linee di flusso assumano il loro profilo stazionario di linee parallele all'asse della condotta. A bassi numeri di Reynolds si trova che  $L_e = 0.0568 a Re$ . La condizione d'incompressibilità è garantita se il numero di Mach, ossia il rapporto tra la velocità del fluido e quella del suono nello stesso mezzo, è  $Ma < 0.3$ .

Il corrispondente throughput è

$$Q(\text{Pa m}^3/\text{s}) = \frac{\pi a^4}{128\eta L} \bar{P} \Delta P$$

dove

$$\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Nel caso di un regime molecolare, si trova che

$$Q(\text{Pa m}^3/\text{s}) = \frac{\pi a^3}{12L} U \Delta P$$

dove  $U$  è la velocità media del gas nella condotta.

Nel regime di Knudsen si usano delle formule interpolanti tra questi due casi limite. Ad esempio, se abbiamo aria a 20 °C che circola, in regime non turbolento, in un condotto dritto a sezione circolare, di lunghezza  $L$  e diametro  $a$  ( $a \ll L$ ), la conducibilità della condotta può essere calcolata tramite l'equazione di Knudsen:

$$C(\text{m}^3/\text{s}) = 1.35 \times 10^{-4} \frac{a^4}{L} \bar{P} + 12.1 \times 10^{-4} \frac{a^3}{L} \frac{1 + 1.92a\bar{P}}{1 + 2.37a\bar{P}}$$

Posto:

$$F(a\bar{P}) = \frac{1 + 2.03a\bar{P} + 0.264(a\bar{P})^2}{1 + 2.37a\bar{P}}$$

la conducibilità può riscriversi in forma compatta

$$C(\text{m}^3/\text{s}) = 12.1 \times 10^{-4} \frac{a^3}{L} F(a\bar{P})$$

dove  $L$  e  $a$  sono espressi in m e  $P_1, P_2$  in mbar.

La funzione  $F$  si può semplificare nei due casi limite. In regime viscoso ( $a\bar{P} \gg 1$ )

$$C(\text{m}^3/\text{s}) = 1.35 \times 10^{-4} \frac{a^4}{L} \bar{P}$$

In regime molecolare ( $a\bar{P} \ll 1$ )

$$C(\text{m}^3/\text{s}) = 12.1 \times 10^{-4} \frac{a^3}{L}$$

Come si può osservare, in regime molecolare la conduttanza risulta indipendente dalla pressione.

### 7.3 POMPE DA VUOTO

L'estrazione del gas da un impianto viene effettuata tramite uno strumento chiamato **pompa da vuoto**. L'efficienza di una pompa è definita dalla velocità di pompaggio, ossia dal flusso volumetrico  $S_p$  all'ingresso della pompa.  $S_p$  dipende dalla pressione  $P$ .

Dal punto di vista dimensionale  $S$  e  $C$  sono uguali, ma hanno significati diversi. Mentre  $C$  implica un gradiente di pressione,  $S$  può essere invece applicata ad ogni sezione di un condotto e si comporta come l'ingresso di una pompa per il tratto che la precede. Consideriamo ad esempio l'impianto di Fig.6.6, costituito da una camera collegata alla pompa tramite un condotto di conduttanza  $C$ .

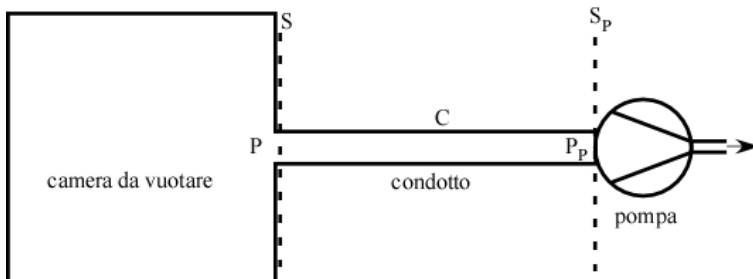


Fig.6.6 Schema sistema da vuoto.

Sia  $S_p$  la velocità di pompaggio della pompa, alla pressione  $P_p$ :

$$\frac{1}{S_p} = \frac{P_p}{Q}$$

La velocità di pompaggio  $S$  all'ingresso della camera sarà:

$$\frac{1}{S} = \frac{P}{Q}$$

D'altra parte:

$$\frac{1}{C} = \frac{P - P_p}{Q}$$

da cui:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_p} + \frac{1}{C}$$

Come si vede la velocità effettiva di pompaggio  $S$  sulla camera è inferiore a quella  $S_p$  della pompa. Se  $C \gg S_p$  allora  $S \sim S_p$ , viceversa se  $C \ll S_p$  allora  $S \sim C$ .

Va precisato che la pressione limite in un impianto è determinata dal fenomeno del degassamento delle pareti dell'impianto stesso e non dalla rimozione del volume del gas. I materiali di cui è composto l'impianto rilasciano nel

tempo piccole quantità di gas (degassamento) e questo fenomeno può essere facilmente evidenziato se chiudiamo il pompaggio. Osserveremo che la pressione all'interno dell'impianto cresce nel tempo.

I principali contributi al degassamento sono: desorbimento, diffusione e permeazione. Il desorbimento è dovuto ai gas che si sono adsorbiti sulla superficie interna delle pareti quando era esposta all'atmosfera. Il tasso di desorbimento dipende dall'energia di legame delle molecole, dalla temperatura della superficie e dal numero di strati molecolari che la copre. Molecole fisisorbite (e.g. gas rari, metano...) sono debolmente legate alla superficie tramite interazioni di van der Waals con energie caratteristiche di decine di meV. L'adsorbimento a energie superiori è noto come chemisorbimento. Un tipico esempio è l'acqua su superfici metalliche. Particelle fisisorbite si rimuovono facilmente dalle pareti solide a temperatura ambiente e non costituiscono un problema per il pompaggio. Il desorbimento chimico è invece il principale responsabile del degassamento osservato nei sistemi da vuoto. Per ridurre questo contributo è necessario riscaldare le pareti a temperature superiori ai 150 °C per qualche giorno durante il pompaggio in modo da rimuovere gran parte dell'acqua adsorbita (processo di baking). Il degassamento può essere anche dovuto alla diffusione dei gas racchiusi nel materiale delle pareti durante la sua lavorazione (tipicamente H<sub>2</sub>, CO e CO<sub>2</sub>) nella camera da vuoto. La diffusione è generalmente un processo più lento del desorbimento che può essere accelerato dal baking delle pareti. Infine, permeazione è il trasporto di gas dall'atmosfera esterna alla camera da vuoto attraverso le pareti. Sperimentalmente, si trova che H<sub>2</sub> permea le pareti metalliche, He quelle di vetro, mentre le guarnizioni di gomma sono permeabili ai tipici gas atmosferici.

L'entità del degassamento D si misura come il flusso PV nell'unità di tempo per unità di superficie:

$$D = \frac{Q_D}{A} = \frac{1}{A} \frac{d(PV)}{dt}$$

ove A è la superficie considerata.

I metalli in genere presentano valori di D nell'intervallo 10<sup>-6</sup> - 10<sup>-9</sup> mbar.litri.s<sup>-1</sup>cm<sup>-2</sup> a temperatura ambiente. Naturalmente D varia molto a seconda del trattamento subito dalla superficie. Questo effetto non è trascurabile. Consideriamo una camera cilindrica metallica lunga 5cm con diametro di 4cm (dimensioni interne). La superficie totale e il volume sono rispettivamente: A=75.4cm<sup>2</sup> e V=62.8cm<sup>3</sup>=0.0628 l. Supponiamo di vuotare la camera fino a P<sub>iniziale</sub>=10<sup>-2</sup> mbar. Chiudiamo il pompaggio e aspettiamo per 1 ora. Se D~10<sup>-6</sup> mbar.litri.s<sup>-1</sup>cm<sup>-2</sup>:

$$Q_D = DA = V \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Quindi la pressione dopo 1 ora diventa:

$$P_{\text{finale}} = P_{\text{iniziale}} + \Delta P = P_{\text{iniziale}} + \frac{DA}{V} \Delta t = (0.01 + 4.32) \text{mbar}$$

Nei casi pratici la situazione è ulteriormente peggiorata dal fatto che in genere la camera da vuoto contiene dispositivi di misura composti da materiali che hanno un alto grado di degassamento. Normalmente tenendo l'impianto per lungo tempo sotto vuoto il degassamento tende a diminuire. Questo inoltre diminuisce all'abbassarsi della temperatura.

Le pompe da vuoto sono usate per ridurre la pressione di un gas entro un certo volume. Esistono innumerevoli tipi di pompe che si possono suddividere essenzialmente in due classi:

pompe che aspirano il gas dalla camera da vuoto e lo scaricano nell'atmosfera (rotative, turbomolecolari, a diffusione ecc.).

pompe che fanno condensare il gas su una parete fredda (criopompe), oppure che sfruttano fenomeni di adsorbimento, oppure pompe nelle quali il fenomeno di pompaggio è causato da fenomeni chimici (pompe getter).

Di seguito illustreremo le pompe più comuni che vengono utilizzate in laboratorio a partire dalle pompe rotative a bagno di olio.

### 7.3.1 POMPE ROTATIVE

Una camera cilindrica, che costituisce il corpo della pompa, contiene un rotore eccentrico. Due palette inserite nel rotore sono tenute in contatto con la camera cilindrica tramite una molla e dalla forza centrifuga. In Fig.6.7 è rappresentata schematicamente una pompa nelle quattro fasi di pompaggio. Allo sfogo della pompa è presente una valvola che si apre solo quando il gas compresso supera la pressione atmosferica. La tenuta stagna tra le varie parti della pompa è ottenuta tramite un velo di olio, distribuito sulle superfici a contatto, e proveniente da un opportuno serbatoio (non rappresentato in figura.).

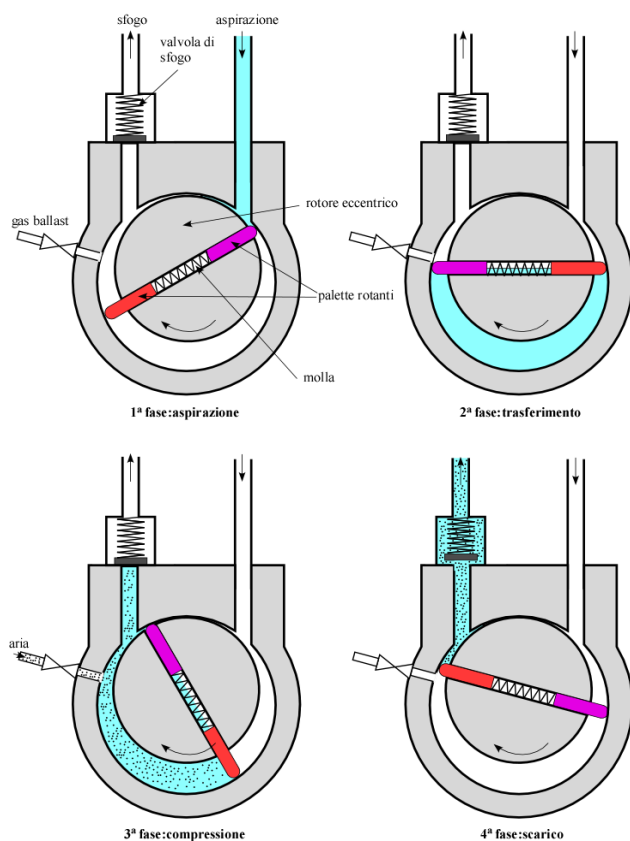


Fig.6.7 Fasi di pompaggio di una pompa rotativa.

Quando si pompa su un recipiente contenente vapori di qualche sostanza (in genere acqua, solventi ecc.), questi, in fase di compressione, possono condensare ed inquinare l'olio della pompa, compromettendone il funzionamento.

Questo inconveniente può essere in parte eliminato introducendo dell'aria, tramite quello che è chiamato **gas ballast**, nella fase di compressione.

L'aria introdotta permette di raggiungere la pressione atmosferica e quindi l'espulsione prima che i vapori possano condensare. L'uso del gas ballast peggiora la pressione finale raggiungibile dalla pompa, quindi in condizioni di lavoro normali, è consigliabile tenere il rubinetto dell'introduzione dell'aria chiuso. Molte pompe sono a due stadi (Fig.6.8), il primo stadio che è collegato all'impianto da vuoto e un secondo stadio che fornisce il pre-vuoto al primo. In questo modo si possono ottenere dei vuoti dell'ordine di  $\sim 10^{-4}$  mbar (senza gas ballast attivato) all'ingresso della pompa.

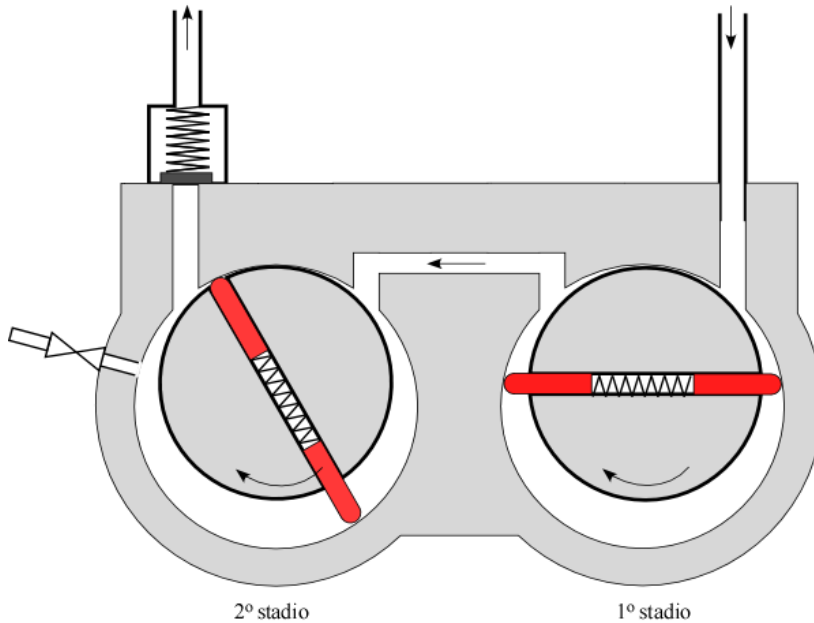


Fig.6.8 Sezione di una pompa rotativa a due stadi.

La pressione finale  $P_0$  di una pompa non è nulla. Ci sono varie cause che determinano il vuoto finale, fra cui:

La tensione di vapore dell'olio, che aumenta con la temperatura della pompa, la quale può facilmente raggiungere i  $70 \div 80$  °C, e che può arrivare anche a  $10^{-5}$  mbar.

L'aria che si mescola con l'olio durante la fase di espulsione.

La non perfetta tenuta stagna tra la zona ad alta e bassa pressione.

Questi effetti si possono considerare equivalenti ad una piccola immissione  $Q_0$  di gas. La velocità di aspirazione di una pompa è definita come:

$$S_p = \frac{Q_p}{P}$$

$Q_p$  è la quantità di gas aspirato dalla pompa,  $P$  la pressione all'ingresso. La quantità effettiva, tenendo conto di  $Q_0$  sarà:

$$Q = Q_p - Q_0$$



La velocità di aspirazione effettiva della pompa è dunque:

$$S = \frac{Q}{P}$$

La pressione limite si raggiunge quando:

$$Q = Q_p - Q_0 = 0$$

ossia:

$$S_p = \frac{Q_0}{P_0}$$

si ottiene quindi:

$$S = \frac{Q}{P} = \frac{Q_p - Q_0}{P} = S_p - \frac{P_0 S_p}{P} = S_p \left(1 - \frac{P_0}{P}\right)$$

La velocità di aspirazione effettiva cambia con la pressione e tende a zero quando si raggiunge la pressione limite (Fig.6.9).

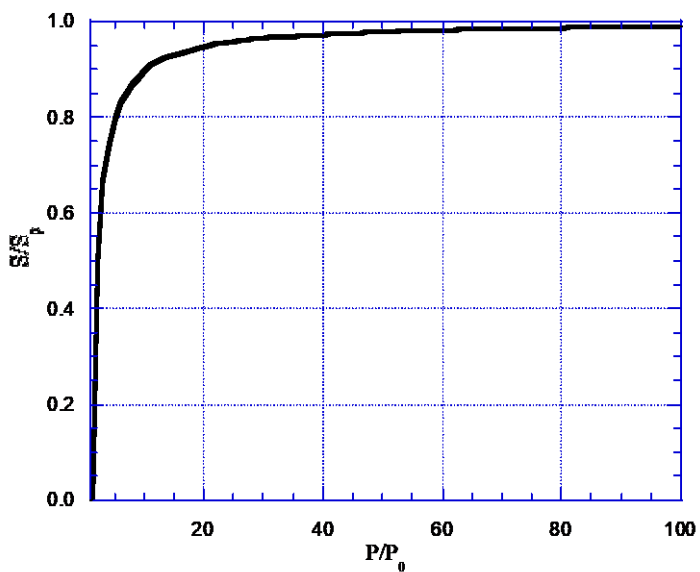


Fig.6.9 Velocità di pompaggio pompa rotativa

I vuoti limite delle attuali pompe rotative si aggirano attorno a  $10^{-3} \div 10^{-4}$  mbar.

### 7.3.2 POMPE TURBOMOLECOLARI

La pompa turbomolecolare è composta da una turbina che comprime il gas dall'ingresso all'uscita trasferendo momento lineare in una direzione preferenziale dalle lame che ruotano ad alta velocità alle molecole (vedi Fig. 6.10). Tipicamente le velocità di rotazione del rotore sono comprese tra i 20000 e i 65000 giri al minuto. Per garantire un elevato pompaggio, il rotore è composto da vari stadi in cascata (tipicamente, da 8 a 20 a seconda del modello), ciascuno avente una ben precisa forma delle lame. In questo modo si possono raggiungere buone velocità di pompaggio anche a pressioni molto basse. Altro vantaggio rispetto alle rotative è che non presentano problemi legati al possibile flusso di ritorno di vapori d'olio in camera. Il loro limite è che per il loro funzionamento necessitano di una pompa primaria, come una rotativa. Non possono, infatti, funzionare a pressioni superiori al mBar, altrimenti il momento viscoso frenerebbe significativamente il moto della turbina, causando surriscaldamenti e danneggiamenti alle lame. Inoltre, non possono scaricare i gas esausti direttamente nell'atmosfera. Il sistema di pompaggio è quindi formato da una pompa turbomolecolare collegata alla camera da vuoto e da una pompa rotativa collegata all'uscita della turbo. Questo è il modo standard per raggiungere l'alto e ultra-alto vuoto se le vibrazioni meccaniche non sono un problema. In caso contrario, la soluzione più adatta per raggiungere la regione UHV è costituita dalla pompe ioniche.



Fig.6.10 Sezione di una pompa turbomolecolare

### 7.3.3 POMPE IONICHE

Il principio di funzionamento di queste pompe si basa sul fatto che gli ioni si pompano facilmente perché sono più reattivi con le superfici delle molecole e se hanno sufficiente energia si possono sotterrare nelle pareti della pompa. Per facilitare la ionizzazione in un ampio intervallo di pressione, si usano delle celle dette di Penning che combinano opportunamente campi elettrici e magnetici come schematicamente illustrato in Fig. 6.11. I campi elettrici presenti in una cella di Penning intrappolano gli elettroni in una buca di potenziale compresa tra i due catodi e il campo magnetico assiale forza gli elettroni lungo orbite circolari allungando le loro traiettorie, aumentando così la probabilità di collisioni ionizzanti con le molecole del gas. Il tempo trascorso dall'entrata casuale del primo elettrone nella cella al raggiungimento dello stato stazionario della densità elettronica, pari a circa  $10^{10}$  elettroni/cm<sup>3</sup>, è inversamente proporzionale alla pressione. Il tempo di accensione di una cella a  $10^{-3}$  mBar è qualche nanosecondo, mentre a  $10^{-11}$

mBar è di 10 minuti. Gli ioni prodotti in queste collisioni sono accelerati verso il catodo, dove collidono, erodono il catodo e emettono elettroni secondari che a loro volta sono accelerati dal campo.

Il meccanismo preciso di pompaggio in una pompa ionica dipende dalla natura del gas da evacuare e si basa su uno o più tra quelli seguenti: a) adsorbimento a seguito di dissociazione; b) gettering dal materiale del catodo che è stato eroso; c) seppellimento sotto il materiale eroso; d) seppellimento di ioni veloci nel catodo. In ogni caso, una pompa ionica ha bisogno di una pompa primaria come la rotativa per raggiungere un vuoto inferiore al mBar e innescare la scarica. A pressioni superiori, gli elettroni non riescono a raggiungere un'energia sufficiente a ionizzare le molecole del gas.

Ciascuna cella di Penning ha un diametro di circa 10 mm, una lunghezza di 20 mm e una distanza tra anodo e catodo di 4mm. Le pompe moderne sono costruite da moduli di celle arrangiate attorno la periferia della parete da vuoto con magneti permanenti aventi un campo B di 0.1-0.2 T e tensioni al catodo di circa 5 kV.

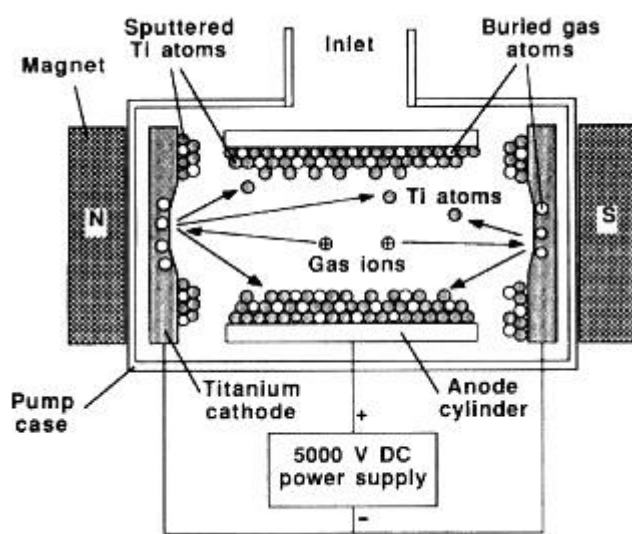


Figura 6.11 Schema di funzionamento di una cella di Penning

## 7.4 MISURATORI DA VUOTO

I sistemi per misurare il grado di vuoto raggiunto in un impianto variano a seconda della pressione. Le pressioni riguardanti la tecnologia del vuoto possono andare dalla pressione atmosferica ( $\sim 1\text{ bar}$ ) fino a  $\sim 10^{-12}\text{ mbar}$ . È ovvio che non esiste un unico dispositivo di misura capace di lavorare nell'intero range di pressioni. I più comuni dispositivi, chiamati vacuometri (quando si misurano pressioni superiori a quella atmosferica si parla di manometri), sono:

- a) Vacuometri a mercurio ad U, possono misurare fino ad circa 0.1 mbar. Attualmente sono poco utilizzati anche a causa della pericolosità del mercurio.
- b) Vacuometri a mercurio McLeod, permettono di misurare pressioni fino a  $10^{-5}\text{ mbar}$ . Attualmente sono poco utilizzati per le medesime ragioni dette sopra.
- c) Vacuometri meccanici (Bourbon gauges e diaphragm gauge). Permettono di misurare fino a 1 mbar.
- d) Vacuometri capacitivi. Sono tra i più accurati, la misura di pressione è assoluta e hanno un range di funzionamento tra  $10^{-3}\div 1000\text{ mbar}$ .

e) Vacuometri a conducibilità termica (Pirani e termocroce). Hanno un range di funzionamento compreso tra  $10^{-3} \div 1$  mbar.

f) Vacuometri a ionizzazione a catodo freddo (Penning)

g) Vacuometri a ionizzazione a catodo caldo (Bayard-Alpert).

Poiché il nostro scopo è quello di illustrare il principio di funzionamento dei dispositivi utilizzati in questo laboratorio, ci limiteremo a descrivere i Pirani e i Penning.

Il misuratore Pirani funziona nel range  $10^{-3} - 1$  mbar. Un filamento metallico, di resistenza elettrica  $R$ , viene riscaldato tramite una corrente elettrica  $I$ .

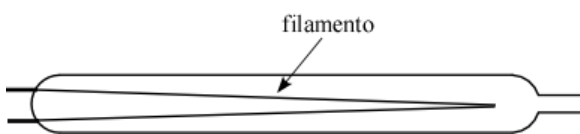


Fig.6.12 Tubo Pirani.

Il filamento è racchiuso da una ampolla comunicante con l'impianto da vuoto (Fig.6.12). La temperatura  $T$  a cui si porta il filamento, compresa tra  $100 \div 150$  °C, dipende da come il calore viene dissipato verso l'esterno e quindi dalla conducibilità termica del gas presente.

Poiché la resistenza del filamento dipende dalla sua temperatura  $T$  una misura di  $R$  permette di risalire alla pressione.

Dalla teoria cinetica dei gas sappiamo che in regime viscoso e di Knudsen la conducibilità termica è indipendente dalla pressione. In questo caso il misuratore non è utilizzabile. In regime molecolare la conducibilità termica dipende dalla pressione e quindi il Pirani può essere utilizzato. Per stabilire le condizioni di lavoro occorre confrontare il diametro  $a$  del filamento metallico con il libero cammino medio  $\lambda$  delle molecole del gas. Normalmente si possono misurare pressioni al di sotto di 1 mbar. Il limite inferiore si ha quando il calore disperso tramite il gas diventa confrontabile con quello scambiato per irraggiamento e per conduzione attraverso i supporti. Questo limite è dell'ordine di  $10^{-3}$  mbar.

Per misurare la  $R$  questa viene inserita in un ponte di Wheatstone (Fig.6.13). Come si può notare su un ramo è inserito il Pirani di misura, su un altro è inserito un secondo Pirani in una ampolla sigillata. Questo per compensare gli effetti delle variazioni di temperatura ambiente.

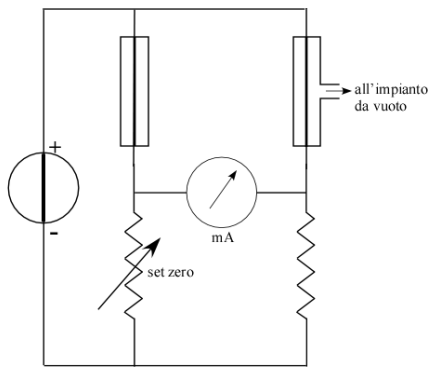


Fig.6.13 Ponte di misura Pirani.

Poiché la conducibilità termica dipende dalla natura del gas, per ogni tipo di gas occorre eseguire una taratura. Sugli strumenti commerciali la taratura standard è quella riferita all'aria. Nei Pirani più recenti al variare della pressione del gas si varia la corrente di riscaldamento del filamento in modo che questo mantenga la medesima resistenza e quindi la stessa temperatura. In questo modo il ponte è sempre bilanciato e la risposta a variazioni di pressione risulta più rapida. La misura della corrente di riscaldamento permette di risalire alla pressione.

Il penning è un vacuometro a ionizzazione che misura la pressione in base al numero di molecole di gas presenti. Lo strumento contiene due elettrodi, un catodo cilindrico e un anodo filiforme concentrico (Fig.6.14). Tra i due elettrodi viene applicata una differenza di potenziale continua dell'ordine di  $1\div 2\text{ kV}$ , tramite il generatore  $V_g$ . Gli elettroni, estratti dal catodo, vengono accelerati dal campo elettrico e ionizzano le molecole del gas che urtano. Un campo magnetico esterno viene utilizzato per spiralizzare le traiettorie degli elettroni. In questo modo si allunga il percorso degli elettroni, prima che questi vengano catturati dall'anodo, e aumenta la probabilità di ionizzare le molecole del gas. In definitiva si ottiene una corrente, misurabile da un microamperometro, che è funzione del numero di molecole e quindi della pressione del gas. Il campo di misura va da  $10^{-2}$  mbar a circa  $10^{-8}$  mbar. Come per il Pirani anche il Penning non è uno strumento assoluto, gli strumenti commerciali sono normalmente tarati per l'aria.

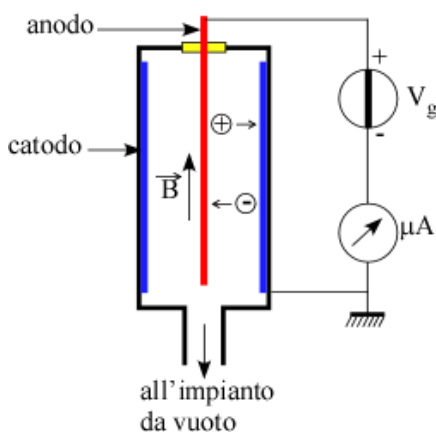


Fig.6.14 Vacuumetro Penning.

## 8.1 POSTULATI DELL'OTTICA ONDULATORIA E DEFINIZIONI

L'ottica è la branca della fisica che descrive i fenomeni associati alla propagazione della luce. L'elettromagnetismo classico e le moderne teorie quantistiche spiegano quasi tutta la fisica fondamentale della radiazione luminosa. Per utilizzare la luce in laboratorio, comunque, in molti casi non c'è bisogno di una conoscenza dettagliata della natura elettromagnetica (o quantistica) della luce, e si possono utilizzare descrizioni pratiche del campo ottico che ci permettono di fare i conti che ci servono nella normale vita di laboratorio. Le descrizioni più usate in questo senso sono l'ottica geometrica e l'ottica ondulatoria. In questo corso ci concentreremo di più sulla seconda, assumendo che la prima sia nota da studi precedenti.

Con questo spirito si fanno i seguenti postulati:

- La luce si propaga sottoforma di onde con velocità  $c$ . La velocità  $c$  dipende dal mezzo nel quale la luce si propaga. Nel vuoto  $c=c_0=3\times 10^8$  m/s pari a 30 cm/ns. Nei mezzi omogenei la velocità della luce si definisce in rapporto alla velocità della luce nel vuoto tramite un numero adimensionale detto *indice di rifrazione*  $n$  ponendo:

$$c = \frac{c_0}{n} \quad (8.1)$$

In genere  $n > 1$  per cui nei mezzi usualmente incontrati la luce viaggia più lentamente che nel vuoto. La lunghezza d'onda della luce generalmente è suddivisa in tre bande: ultravioletto (da 10 a 390 nm), visibile (da 390 a 760 nm) e infrarosso (da 760nm a 1mm).

- Matematicamente un'onda ottica può essere descritta da una funzione reale della posizione e del tempo che indichiamo con  $u(\mathbf{r},t)$  chiamata "funzione d'onda" tale da soddisfare la seguente equazione:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (8.2)$$

Come si vede, l'equazione è lineare, per cui se  $u_1$  e  $u_2$  sono due possibili soluzioni, anche  $au_1 + bu_2$  con  $a, b$  reali lo sarà.

- L'osservabile fisica per eccellenza degli esperimenti di ottica è l'**intensità**, il cui significato fisico è di un flusso di energia, ossia una potenza per unità di area (unità:  $W/m^2$ ). Essa si calcola se è nota la funzione d'onda con la seguente formula:

$$I(\mathbf{r}, t) = 2\langle u^2(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (8.3)$$

ove l'operazione  $\langle \cdot \rangle$  denota il calcolo della media su un intervallo di tempo lungo rispetto alla durata di una oscillazione del campo ottico, ma breve rispetto a qualsiasi altro tempo di interesse per l'esperimento (come la durata di un impulso luminoso, ad esempio). La durata di un ciclo ottico è dell'ordine di  $10^{-15}$  s a una lunghezza d'onda di 600 nm. L'ultima relazione costituisce il legame fra una quantità matematica astratta (la funzione d'onda) e quello che effettivamente misuriamo in laboratorio.

In questa trattazione,  $u$  non ha significato fisico (lo acquista nell'elettromagnetismo), è solamente un attrezzo matematico che permette di descrivere le cose che vediamo con una struttura logica ordinata e coerente.

La **potenza** di un campo ottico è l'integrale dell'intensità su una certa area. Rappresenta il flusso di energia che giunge perpendicolarmente a una data superficie  $A$  quando è illuminata:

$$P(t) = \int_A I(\mathbf{r}, t) dA \quad (8.4)$$

L'**energia** che un campo ottico ha trasportato su un'area  $A$  in un tempo  $T$  è l'integrale della potenza sull'intervallo di tempo considerato:

$$E = \int_T P(t) dt. \quad (8.5)$$

## 8.2 ONDE MONOCROMATICHE

### 8.2.1 DEFINIZIONE

Un'onda monocromatica è un particolare tipo di soluzione caratterizzata da una dipendenza armonica dal tempo. Si può cioè fattorizzare la funzione d'onda nel prodotto di una funzione della sola posizione per una funzione armonica nel tempo (ma non nello spazio):

$$u(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})] \quad (8.6)$$

come si vede il termine di fase  $\varphi(\mathbf{r})$  complica le cose.

### 8.2.2 FUNZIONE D'ONDA COMPLESSA

E' perciò conveniente, quando si ha a che fare con onde monocromatiche, descriverle in termini di una funzione complessa

$$U(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})} \times e^{2\pi i \nu t} \quad (8.7)$$

così che:

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2}[U(\mathbf{r}, t) + U^*(\mathbf{r}, t)]. \quad (8.8)$$

La funzione  $U$  è detta *funzione d'onda complessa*. La sua conoscenza richiede la conoscenza di  $a(\mathbf{r})$ , di  $v$  e di  $\varphi(\mathbf{r})$ , le stesse quantità richieste per descrivere  $u$ , ma in questa forma diventa molto più facile fare i conti! Infatti adesso si può porre:

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \times e^{2\pi i v t} \quad (8.9)$$

e la fattorizzazione è perfetta, dato che si ha un termine complesso che dipende esclusivamente dalla posizione,  $U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}$  chiamato *ampiezza complessa* e un secondo termine che lo fa oscillare in modo armonico a una frequenza  $v$  ben precisa.

Grazie alle sue proprietà di linearità, è immediato vedere che l'equazione delle onde deve valere anche per le funzioni d'onda complesse

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (8.10)$$

Se consideriamo ora un'onda monocromatica, sostituendo l'espressione (8.9) nell'equazione delle onde, troviamo una condizione a cui deve sottostare l'ampiezza complessa, detta *equazione di Helmholtz*.<sup>6</sup>

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0 \quad (8.11)$$

ove  $k = \frac{2\pi v}{c}$  è detto *numero d'onda*.

---

### 8.2.3 INTENSITÀ DI UN'ONDA MONOCROMATICA

L'ampiezza complessa di un'onda monocromatica è una grandezza particolarmente interessante perché determina completamente come l'intensità dell'onda si distribuisce nello spazio. Sostituendo la (8.6) nella (8.3) si trova:

$$2\langle u^2(\mathbf{r}, t) \rangle = 2\langle a^2(\mathbf{r}) \cos^2(2\pi v t + \varphi(\mathbf{r})) \rangle = |U(\mathbf{r})|^2 \{1 + \langle \cos[2(2\pi v t + \varphi(\mathbf{r}))] \rangle\} \cong |U(\mathbf{r})|^2 \quad (8.12)$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene perché il termine oscillante è mediato a zero integrando su tempi molto più lunghi di un periodo ottico  $1/v$ . Quindi, *l'intensità di un'onda monocromatica è il modulo quadro della sua ampiezza complessa e non varia con il tempo*.

---

### 8.2.4 FRONTI D'ONDA

---

<sup>6</sup> Si noti come l'equazione di Helmholtz giochi un ruolo analogo all'equazione di Schroedinger agli stati stazionari. Si potrebbe dire che le onde monocromatiche corrispondono agli stati con energia definita della meccanica quantistica.



I fronti d'onda sono le varietà bidimensionali definite dal vincolo  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{costante}$ . Le costanti sono di solito prese come multipli di  $2\pi$ . La "direzione" dei fronti d'onda, intesa come la direzione verso cui la fase varia più rapidamente è data evidentemente dal vettore  $\nabla\varphi(\mathbf{r})$ .

### 8.2.5 ALCUNI ESEMPI DI ONDE MONOCROMATICHE

Per descrivere un'onda monocromatica di frequenza  $\nu$  basta dare la sua ampiezza complessa. Le soluzioni più semplici dell'equazione di Helmholtz in un mezzo omogeneo sono l'onda piana e l'onda sferica.

**Onda piana:**  $U(\mathbf{r}) = Ae^{-ik\cdot\mathbf{r}}$  ove  $A$  è una costante complessa e  $\mathbf{k}$  è un vettore. E' immediato vedere che i fronti d'onda sono piani di cui  $\mathbf{k}$  è la polare. Nel caso dell'onda piana ha senso definire la "lunghezza d'onda"  $\lambda$  come la distanza fra due fronti d'onda con fase che differisce di  $2\pi$ ,  $\lambda = c/\nu$ .

**Onda sferica:**  $U(\mathbf{r}) = \frac{A}{r}e^{-ik\cdot\mathbf{r}}$  ove  $A$  è la solita costante complessa e  $k = 2\pi\nu/c$ . L'intensità  $I(r) = \frac{|A|^2}{r^2}$  diminuisce col quadrato della distanza, come ben noto. I fronti d'onda sono sfere concentriche separate da una distanza radiale  $\lambda = 2\pi/k$ , che avanzano a una velocità radiale  $c$ .

**Onda parabolica:** Consideriamo un'onda monocromatica sferica originatasi a  $\mathbf{r} = 0$ . Nei punti  $(x, y, z)$  sufficientemente lontani dall'origine, ma vicini all'asse  $z$  così che  $\sqrt{x^2 + y^2} \ll z$ , possiamo considerare l'angolo  $\theta^2 = \frac{x^2 + y^2}{z^2} \ll 1$  così che il modulo della distanza  $r$  può essere approssimato come segue:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z\sqrt{1 + \theta^2} \approx z\left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}. \quad (8.13)$$

Sostituendo  $r = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$  nella fase, e brutalmente  $r \cong z$  nel modulo dell'ampiezza dell'onda sferica, si trova questa approssimazione<sup>7</sup>, valida vicino all'asse  $z$ :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{A}{z}e^{-ikz} \times e^{-ik\frac{x^2 + y^2}{2z}}. \quad (8.14)$$

Come si vede, in prossimità dell'asse  $z$ , la nostra onda sferica si può approssimare come un'onda piana  $Ae^{-ikz}$  modulata per un termine di ampiezza,  $1/z$ , e uno di fase che curva i fronti d'onda come dei paraboloidi. Questo tipo di onde si chiamano infatti onde paraboliche e possono essere pensate come una approssimazione delle onde sferiche abbastanza vicino a uno dei tre assi (*approssimazione di Fresnel*). Si può mostrare che, per punti  $(x, y)$  contenuti in un cerchio di raggio  $a$  centrato sull'asse  $z$ , l'approssimazione di Fresnel è buona per  $\frac{N_F \theta_M^2}{4} \ll 1$ , ove  $\theta_M = a/z$  è il massimo angolo sotteso con l'origine e  $N_F = \frac{a^2}{\lambda z}$  è detto *numero di Fresnel*. Per  $z$  molto grandi, il termine parabolico diventa a sua volta trascurabile e l'ampiezza cambia molto lentamente con  $z$ , così che l'onda sferica diventa sempre più simile a un'onda piana.

<sup>7</sup> A causa dell'esponenziale, la sensibilità della formula a errori nella fase è maggiore: ecco perché si è usata la più accurata approssimazione (8.13) nella fase.

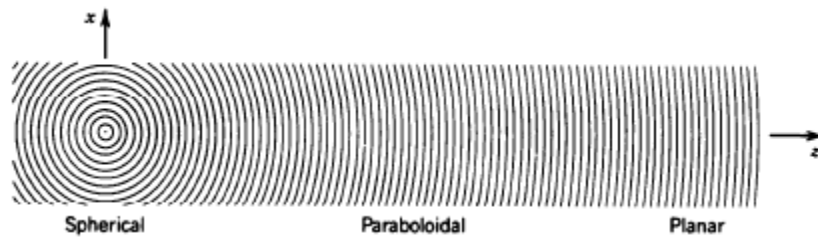


Figura 8-1: Un'onda sferica può essere approssimata prima da un'onda parabolica e per distanze abbastanza grandi come un'onda piana

### 8.2.6 ONDE PARASSIALI

L'approssimazione appena discussa serve a introdurre il concetto di *onde parassiali*. Un'onda monocromatica è così chiamata se le normali ai fronti d'onda formano un angolo piccolo con la direzione di propagazione. Uno dei modi di costruire un'onda parassiale è di considerarla come una perturbazione di un'onda piana. In concreto si suppone una ampiezza complessa del tipo:

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{-ikz}. \quad (8.15)$$

Perché il trucco funzioni, è necessario che  $A(\mathbf{r})$  sia una funzione che varia di poco sulla distanza di una lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . La funzione d'onda si ricava prendendo la parte reale della funzione d'onda complessa e sarà:

$u(\mathbf{r}, t) = |A(\mathbf{r})|\cos(2\pi\nu t - kz + \text{Arg}(A(\mathbf{r})))$ . In figura 8 - 2 è rappresentata un'onda parassiale.

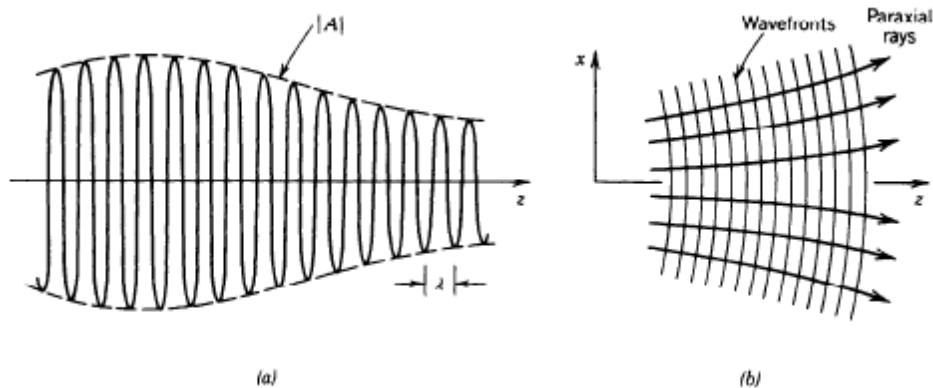


Figura 8-2: (a) L'ampiezza di un'onda parassiale in funzione della distanza assiale. (b) I fronti d'onda e le normali ai fronti d'onda di un'onda parassiale.

Proviamo adesso a vedere quali condizioni deve soddisfare la perturbazione  $A(\mathbf{r})$  per essere un buon fascio ottico, sostituendo l'espressione (8.15) nell'equazione di Helmholtz. Si ottiene una nuova equazione, che può essere semplificata grazie all'ipotesi che  $A(\mathbf{r})$  vari lentamente su una lunghezza d'onda. Questa condizione significa che su una distanza  $\Delta z = \lambda$ , la variazione  $\Delta A$  deve essere molto piccola rispetto alla stessa  $A$ , nel senso che la parte reale e la parte immaginaria di  $A$  separatamente devono variare di poco (approssimazione di involuppo lentamente variabile). Facendo tutti i conti si trova:

$$\nabla_{\perp}^2 A = 2ik \frac{\partial A}{\partial z} \quad (8.16)$$

ove  $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  è l'operatore Laplaciano trasverso. Questa ultima condizione per l'involuppo di un'onda parassiale monocromatica è detta *equazione di Helmholtz parassiale*. L'onda parabolica è una soluzione di questa equazione. Un'altra soluzione di grande importanza per i nostri scopi è il fascio Gaussiano, come vedremo fra poco.

### 8.3 FASCI GAUSSIANI

L'onda piana e l'onda sferica rappresentano i due estremi della collimazione e della localizzazione rispettivamente. La prima investe l'intero spazio e quindi è del tutto delocalizzata, ma ha fronti d'onda piani e si propaga lungo una direzione ben precisa. La seconda al contrario ha fronti d'onda curvi e si propaga in tutte le direzioni, ma ha una origine completamente localizzata. Esiste qualche tipo di campo ottico che si propaga lungo una direzione "abbastanza ben definita" e, allo stesso tempo, è confinato nello spazio?

Se consideriamo l'asse  $z$  come direzione di propagazione, sappiamo già che campi monocromatici i cui fronti d'onda siano quasi perpendicolari a  $z$  sono onde parassiali con ampiezza complessa del tipo  $U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{-ikz}$  e devono soddisfare all'equazione (8.16). Una soluzione importante (ma ce ne sono anche molte altre) di questa equazione è il *fascio gaussiano*. Tale soluzione si ottiene a partire dall'onda parabolica (8.14) aggiungendo una componente *complessa* lungo  $z$ :

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} e^{-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}} \quad (8.17)$$

dove  $q(z) = z + iz_0$  e  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . Il parametro complesso  $z_0$  è noto come *parametro di Rayleigh*. Dato che l'onda parabolica è una soluzione, anche questa sua versione "traslata" lo è, non importa se la traslazione è complessa. Tuttavia questa aggiunta conferisce all'onda parabolica delle proprietà del tutto nuove. Per metterle in evidenza possiamo riscrivere  $1/q(z)$  separandolo in parte reale e immaginaria (per le definizioni esplicite si veda sotto):

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)}. \quad (8.18)$$

Così facendo e utilizzando la definizione di onda parassiale, otteniamo questa nuova espressione per l'ampiezza complessa di questo nuovo tipo di campo ottico:

$$U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \left[ e^{-\frac{\rho^2}{W^2(z)}} \right] \times \exp \left\{ -i \left[ k \left( z + \frac{\rho^2}{2R(z)} \right) - \zeta(z) \right] \right\} \quad (8.19)$$

con le seguenti posizioni:

$$A_0 = \frac{A_1}{iz_0} \quad (8.19 \text{ a})$$

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \quad (8.19 \text{ b})$$

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (8.19 \text{ c})$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right] \quad (8.19 \text{ d})$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (8.19 \text{ e})$$

Notiamo che, a parte la lunghezza d'onda  $\lambda$  che supponiamo nota, il fascio è completamente determinato da due parametri,  $A_0$  e  $z_0$  o, equivalentemente,  $W_0$ . Tutti gli altri parametri vengono di conseguenza.

---

### 8.3.1 PROPRIETÀ DEL FASCIO GAUSSIANO

---

#### 8.3.1.1 INTENSITÀ

L'intensità ottica è data da  $I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2$  come da (8.12) ed è una funzione separatamente delle distanze assiali  $z$  e radiali  $\rho$ :

$$I(\rho, z) = I_0 \left[ \frac{W_0}{W(z)} \right]^2 \exp \left[ -\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right] \quad (8.20)$$

ove  $I_0 = |A_0|^2$ . Per ogni  $z$  fissato, l'intensità è una funzione gaussiana della distanza radiale  $\rho$ , da cui il nome di questo tipo di fasci. Il massimo dell'intensità si trova sull'asse di propagazione e diminuisce monotonamente con la distanza radiale. La larghezza della distribuzione gaussiana è data dal parametro  $W$  chiamato *cintura* o *waist* del fascio. Come si vede dalla sua definizione (8.19 c), la cintura del fascio si allarga allontanandosi dall'origine nei due versi (figura 8.3).

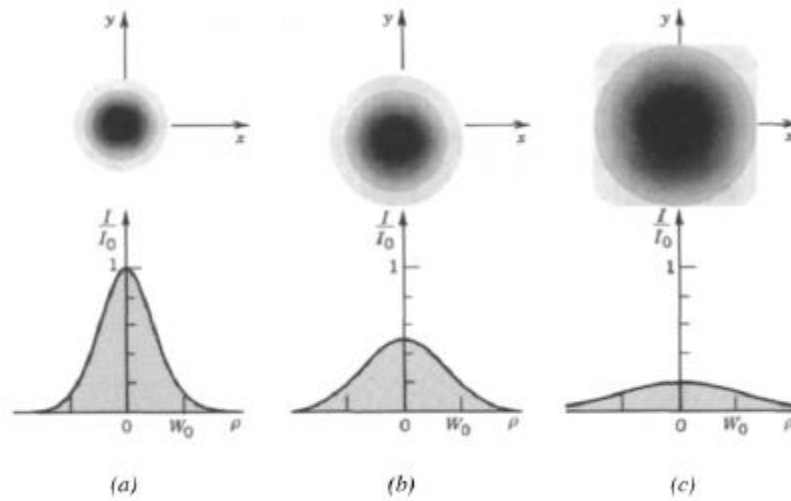


Figura 8-3: Intensità normalizzata del fascio gaussiano  $I/I_0$  per diversi valori della distanza assiale: (a)  $z = 0$ ; (b)  $z = z_0$ ; (c)  $z = 2z_0$ .

Sull'asse ( $\rho = 0$ ) l'intensità:

$$I(0, z) = I_0 \left[ \frac{W_0}{W(z)} \right]^2 = \frac{I_0}{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2} \quad (8.21)$$

ha il suo massimo valore  $I_0$  a  $z = 0$  e diminuisce gradualmente aumentando  $z$ . Quando  $z = \pm z_0$ , l'intensità è ridotta della metà, e per  $|z| \gg z_0$ ,  $I(0, z) \approx I_0 \left( \frac{z_0}{z} \right)^2$  così che l'intensità massima diminuisce come  $z^{-2}$ , analogamente alle onde sferiche o paraboliche.

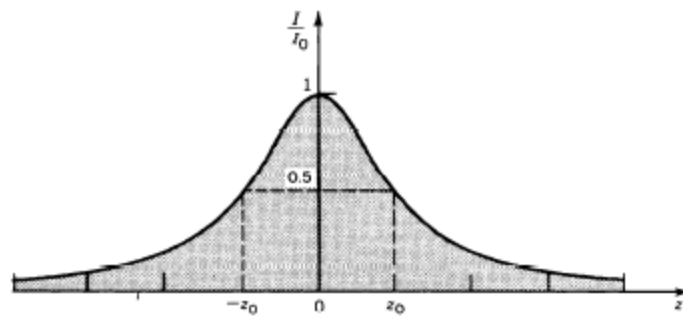


Figura 8-4: Andamento dell'intensità normalizzata a  $I_0$  in funzione della distanza di propagazione  $z$ .

### 8.3.1.2 POTENZA

La potenza trasportata da un fascio gaussiano si trova integrando l'intensità su un'area data. Se prendiamo l'integrale su un'intera sezione del fascio, si trova:

$$P = \int_0^\infty I(\rho, z) 2\pi \rho d\rho = \frac{1}{2} I_0 \times \pi W_0^2 \quad (8.22)$$

pari cioè a metà dell'intensità massima moltiplicata per l'area compresa all'interno della cintura del fascio nel fuoco. Come è logico la potenza trasportata si conserva indipendentemente da  $z$ . Integrando da 0 a  $W(z)$  si trova che all'interno della cintura del fascio è trasportato circa l'86% della potenza totale, e in un cerchio di raggio  $1.5 W(z)$  centrato sull'asse  $z$  sta il 99% della potenza del fascio.

### 8.3.1.3 DIMENSIONE DEL FASCIO

Ha quindi senso considerare  $W(z)$  per  $z$  fissato come il "raggio" della sezione del fascio gaussiano. Il punto a  $z = 0$ , è il punto in cui l'intensità è più concentrata ed è chiamato *fuoco* del fascio. In tale punto  $W = W_0$ , tale parametro ha quindi il significato fisico di minima larghezza del fascio. Il diametro  $2W_0$  è chiamato taglia o larghezza o dimensione del fuoco. Per  $|z| > 0$  la cintura del fascio si allarga secondo l'espressione (8.19 c) il cui andamento è mostrato in figura 8-5:

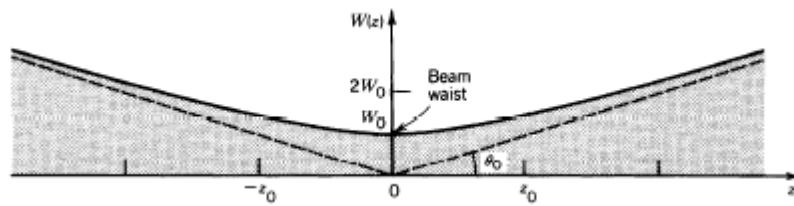


Figura 8-5: Andamento del raggio del fascio gaussiano in funzione di  $z$ .

Come si vede, all'interno della regione  $|z| < z_0$  il diametro del fascio dipende debolmente da  $z$ , cosicché in prima approssimazione si può considerare che il raggio del fascio rimanga costante all'interno di questa regione, che viene chiamata *profondità di fuoco*, *parametro confocale* o *regione di Rayleigh*. Usando le definizioni date si può riscrivere la profondità di fuoco come:

$$2z_0 = \frac{2}{\lambda} \pi W_0^2. \quad (8.23)$$

La profondità di fuoco è direttamente proporzionale all'area del fascio nel fuoco e inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda. Quando un fascio è molto stretto, la profondità di fuoco è piccola, così che è impossibile ottenere una grande focalizzazione se non su lunghezze di propagazione limitate. Ad esempio, per una lunghezza d'onda di 600 nm (luce visibile rossa) un fascio di diametro 2 cm ha una profondità di fuoco di 1 km. Viceversa se lo stesso fascio fosse focalizzato in un cerchio di 20  $\mu\text{m}$ , la profondità di fuoco sarebbe circa 1 mm.

Fuori dalla regione di Rayleigh, per  $|z| \gg z_0$  l'espressione (8.19 c) può essere approssimata da una dipendenza lineare:

$$W(z) \sim \frac{W_0}{z_0} z = \theta_0 z. \quad (8.24)$$

Il fascio cioè, lontano dal centro, si espande come un cono di semi apertura  $\theta_0 = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{2W_0}$ . Questo parametro è spesso usato per descrivere un fascio gaussiano ed è chiamato *divergenza* del fascio. E' importante notare che la divergenza è direttamente proporzionale alla lunghezza d'onda e inversamente proporzionale alla taglia del fuoco. In altre parole, più un fascio gaussiano è localizzato, maggiore sarà la sua divergenza; meno è localizzato nello spazio, più risulterà collimato: per avere un fascio altamente direzionale bisogna usare lunghezze d'onda corte e fasci molto larghi. Una importante regola pratica che discende da queste considerazioni è la seguente:

$$W_0 \theta_0 = \text{costante.} \quad (8.25)$$

Qualsiasi operazione venga compiuta su un fascio gaussiano (collimazione, focalizzazione ecc.) cambia *simultaneamente* la divergenza e la cintura in modo che il loro prodotto rimanga invariato.

#### 8.3.1.4 FRONTI D'ONDA

La fase del fascio gaussiano varia con  $\rho$  e  $z$  secondo l'espressione:

$$\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}. \quad (8.26)$$

Sull'asse del fascio vale semplicemente  $kz - \zeta(z)$ : il primo addendo è la fase di un'onda piana, come ci aspettiamo dall'espressione generica di un'onda parassiale. Il secondo termine, dato da (8.19 e), varia da  $-\pi/2$  a  $\pi/2$  tra  $-\infty$  e  $+\infty$  e rappresenta un ritardo di fase del fascio gaussiano rispetto a un'onda piana della stessa lunghezza d'onda, il cosiddetto *effetto Guoy*. In pratica i fronti d'onda del fascio gaussiano non sono tutti equispaziati, come nell'onda piana, ma accumulano un ritardo di fase il cui valore dipende dalla posizione lungo  $z$ .

La terza componente in (8.26) è responsabile della curvatura dei fronti d'onda. Fuori dal centro del fascio, le superfici di fase costante sono i luoghi dei punti dello spazio che soddisfano alla condizione:  $k \left[ z + \frac{\rho^2}{2R(z)} \right] - \zeta(z) = 2\pi q$ . Dato che  $\zeta(z)$  e  $R(z)$  variano relativamente poco su una lunghezza d'onda, possiamo considerarli approssimativamente costanti. Si vede allora che le superfici equifase soddisfano all'equazione di un paraboloide di rotazione, con raggio di curvatura  $R$ . Il parametro  $R(z)$  descrive perciò il raggio di curvatura dei fronti d'onda del fascio gaussiano. Dato che  $R$  varia con  $z$ , la curvatura dei fronti d'onda dipende dalla posizione: vicino al centro del fascio, i fronti d'onda sono praticamente piani, lontano dal centro crescono approssimativamente in modo lineare con  $z$ , come per l'onda sferica. A  $z = z_0$  il raggio di curvatura è minimo.

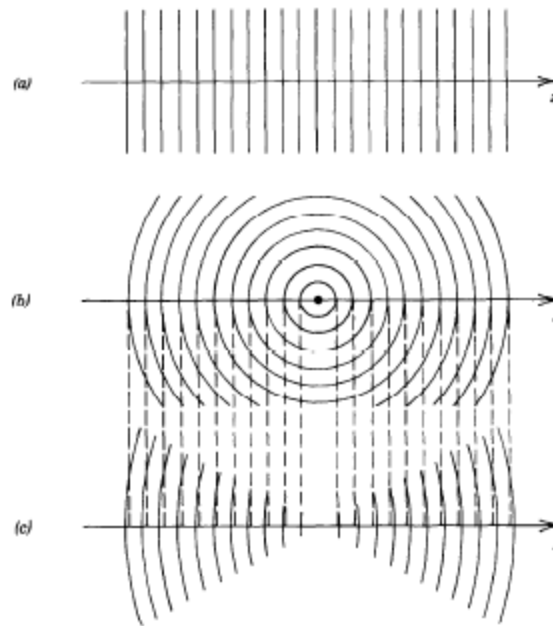


Figura 8-6: Fronti d'onda di (a) un'onda piana; (b) Un'onda sferica; (c) Un fascio gaussiano. Nei punti vicini al centro, il fascio gaussiano è simile ad un'onda piana. Per  $z$  grandi, il fascio gaussiano è simile ad un'onda sferica con un ritardo di fase dato dall'effetto Guoy.

## 8.4 LENTI

### 8.4.1 TRASMISSIONE ATTRAVERSO LAMINE SOTTILI

In generale non è facile calcolare l'effetto di un arbitrario mezzo ottico trasparente sulla propagazione di un campo. Noi qui limiteremo l'attenzione a dei casi molto particolari e semplici da trattare.

La situazione più banale è data dalla trasmissione di un'onda attraverso una lamina supposta (a) trasparente: l'ampiezza (reale) del fascio non viene modificata e l'intensità totale si conserva; (b) otticamente omogenea: l'indice di rifrazione del mezzo è considerato costante all'interno di tutto il mezzo in esame; (c) sottile: così che spostamenti nello spazio del campo dovuti alla propagazione attraverso la lamina possono essere trascurati; in altre parole il mezzo ottico in esame può essere considerato matematicamente come qualcosa che modifica la fase di un'onda senza che la distribuzione di intensità nel piano di uscita sia significativamente diversa dalla distribuzione di intensità nel piano di ingresso; (d) con superfici non riflettenti in modo da poter trascurare effetti di riflessione alle superfici.

Il caso tipico della situazione considerata è dato da una lamina sottile di spessore uniforme  $d$  e indice di rifrazione  $n$ , come ad esempio un vetrino da microscopio, circondata dallo spazio libero. Le superfici della lamina sono i piani  $z = 0$  e  $z = d$ . Consideriamo il caso di un'onda piana che viaggia nella direzione  $z$ .

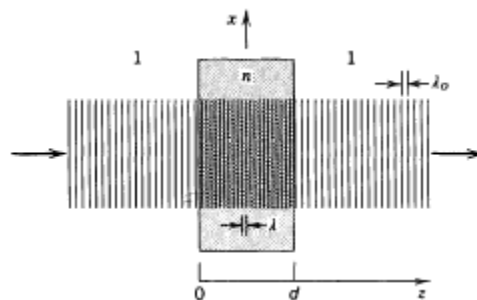


Figura 8-7: Trasmissione di un'onda piana attraverso una lastra trasparente.



Sia  $U(x,y,z)$  l'ampiezza complessa dell'onda. Dato che le riflessioni esterne e interne sono ignorate,  $U(x,y,z)$  si può considerare continua attraverso le interfacce. Il rapporto  $t(x,y) = \frac{U(x,y,d)}{U(x,y,0)}$  rappresenta la *trasmissione complessa* della lamina. L'onda piana incidente continua a propagarsi come tale all'interno della lamina con un numero d'onda  $nk_0$ , per cui la sua fase nel piano  $z = d$  sarà data dalla fase a  $z = 0$  moltiplicata per  $\exp(-ink_0d)$ . Di conseguenza la lamina sottile a facce parallele ha una trasmissione  $t = \exp(-ink_0d)$ .

Un caso leggermente più complesso è quello di lamina sottile il cui spessore  $d$  varia lentamente nel piano  $(x,y)$ . Ci limiteremo al caso di onda incidente parassiale. Il trucco sarà quello di inscrivere la lamina all'interno di una lamina immaginaria di spessore  $d_0$  (vedi figura).

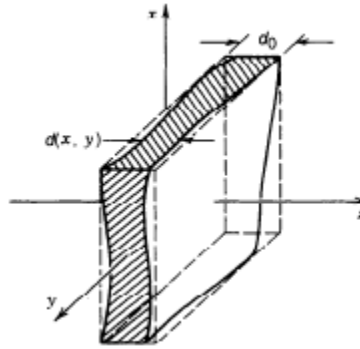


Figura 8-8: Una lamina trasparente di spessore variabile.

In prossimità del punto  $(x,y,0)$  della faccia di ingresso, l'onda parassiale incidente può essere riguardata localmente come un'onda piana la cui direzione di propagazione formi un piccolo angolo con l'asse  $z$ . Attraversa una lamina sottile di spessore  $d(x,y)$  circondato da una sottile lamina di aria di spessore totale  $d_0 - d(x,y)$ . La trasmissione totale di questo oggetto è data dal prodotto della trasmissione della lamina di spessore variabile per quella della "camicia" di aria che la circonda:

$$t(x,y) = \exp[-ink_0d(x,y)] \times \exp[-ik_0(d_0 - d(x,y))] = \exp(-ik_0d_0) \times \exp[-i(n-1)k_0d(x,y)]. \quad (8.27)$$

#### 8.4.2 LENTI E FASCI GAUSSIANI

Applichiamo ora le relazioni viste al caso particolare di una lamina sottile il cui spessore vari secondo una legge di tipo parabolico.

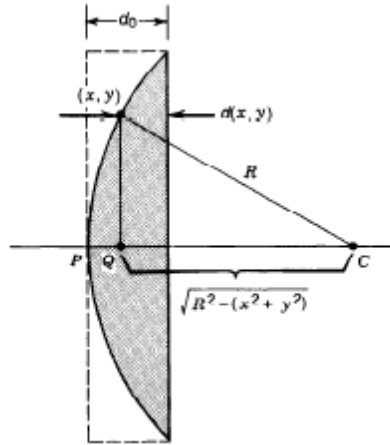


Figura 8-9: Lente piano – convessa.

Con riferimento alla figura (8.9), si ha che in un certo punto  $(x, y)$  del piano di ingresso, lo spessore  $d(x, y)$  è dato da  $d_0 - PQ = d_0 - (R - QC)$  e quindi, dal teorema di Pitagora

$$d(x, y) = d_0 - [R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}]. \quad (8.28)$$

In approssimazione parassiale,  $x^2 + y^2 = \rho^2 \ll R^2$  per cui:

$$QC = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = R \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} \sim R \left(1 - \frac{\rho^2}{2R^2}\right) \quad (8.29)$$

e di conseguenza:  $d(x, y) \sim d_0 - \frac{\rho^2}{2R}$ . Sostituendo nella formula per la trasmittanza complessa di una lamina sottile (8.27), si trova che la trasmittanza della lente sottile è:

$$t(x, y) = \exp(-ik_0 d_0) \times \exp \left[ -i(n-1)k_0 \left( d_0 - \frac{\rho^2}{2R} \right) \right] = \exp(-ink_0 d_0) \times \exp(-ik_0 \frac{\rho^2}{2f}) \quad (8.30)$$

ove abbiamo introdotto la *lunghezza focale*:  $f = \frac{R}{n-1}$ .

E' facile mostrare che formule analoghe valgono per altri tipi simili di componenti ottici. Ad esempio la lente biconvessa, definita da una lamina di indice di rifrazione  $n$  con superfici date da calotte sferiche con raggi di curvatura  $R_1$  e  $R_2$  è descritta dalla stessa formula (8.30) ma con focale data da  $f = \left[ (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^{-1}$ .

Vediamo ora l'effetto di una lente sottile su un fascio gaussiano.

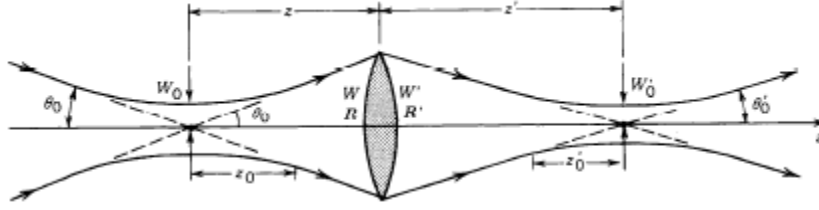


Figura 8-10: Trasmissione di un fascio gaussiano attraverso una lente sottile.

Con riferimento alla figura 10, consideriamo un fascio gaussiano centrato a  $z = 0$  con cintura  $W_0$  e parametro confocale  $z_0$  trasmesso attraverso una lente che si trova a  $z$ . La fase del fascio a  $z$  è  $\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}$ . La lente moltiplica l'ampiezza complessa per la trasmittività  $t(\rho)$  data dall'eq. (8.30) aggiungendo un termine  $-k\rho^2/2f$  all'argomento dell'ampiezza complessa. La nuova fase del fascio dopo la lente diventa:

$$\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + \frac{k\rho^2}{2R'(z)} \quad (8.31)$$

$$\text{con } \frac{1}{R'(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{1}{f}. \quad (8.32)$$

Per quanto riguarda invece il diametro del fascio, grazie all'approssimazione di lente sottile, possiamo affermare che prima e dopo la lente esso rimane invariato. Nel complesso, dopo la lente abbiamo un nuovo fascio gaussiano con i seguenti parametri<sup>8</sup>:

$$W'(z) = W(z) \quad (8.33)$$

$$R'(z) = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{R(z)} \right)^{-1}. \quad (8.34)$$

A questo punto possiamo ricalcolare gli altri parametri del nuovo fascio gaussiano utilizzando le relazioni (8.33 – 8.34).

Ad esempio è facile mostrare che la nuova cintura vale:

$$W'_0 = \frac{W'}{1 + \left( \frac{\pi W'^2}{\lambda R'} \right)^2} \quad (8.35)$$

e il fuoco del nuovo fascio è posizionato in  $z'$  dato da<sup>9</sup> (vedi figura 9):

<sup>8</sup> Inizialmente  $R > 0$ , il che significa che il fascio è divergente. In conformità con la figura, si suppone che la focale della lente convessa sia abbastanza forte da trasformare il fascio in convergente, per cui  $R' < 0$ .

$$-z' = \frac{R'}{1 + \left(\frac{\lambda R'}{\pi W'^2}\right)^2}. \quad (8.36)$$

A meno di altri calcoli elementari si trovano le seguenti relazioni utili nella pratica di laboratorio:

$$W'_0 = MW_0 \quad (8.36 \text{ a})$$

$$z' = M^2(z - f) + f \quad (8.36 \text{ b})$$

$$2z'_0 = M^2(2z_0) \quad (8.36 \text{ c})$$

$$2\theta'_0 = 2\theta_0/M \quad (8.36 \text{ d})$$

ove:  $M = \frac{M_R}{\sqrt{1+r}}$  è un numero adimensionale detto *magnificazione* che è ottenuto da una correzione dell'analogia quantità  $M_R = \left| \frac{f}{z-f} \right|$  che viene dall'ottica geometrica. Il termine correttivo  $r$  è dato da  $r = \frac{z_0}{z-f}$ . Come si può vedere, questo termine diventa piccolo se  $z - f \gg z_0$  cioè se la lente è piazzata abbastanza lontano dal centro del fascio, in modo che il suo punto focale stia bene al di fuori della regione di Rayleigh. In queste condizioni l'ottica geometrica descrive adeguatamente il comportamento della lente e il fascio gaussiano è approssimato a un cono di luce con divergenza  $\theta_0$ . Al contrario bisogna usare l'ottica dei fasci gaussiani.

Concludiamo notando che il prodotto  $W'_0 \theta'_0 = W_0 \theta_0$  come previsto.

---

### 8.4.3 TIPI DI LENTI E UTILIZZI

#### 8.4.3.1 TIPI DI LENTI

Ci sono moltissimi tipi diversi di lenti in commercio, noi qui vedremo solo i tipi più comuni. I parametri da valutare nella scelta di una lente sono: il materiale, le dimensioni, la focale e il tipo.

Il **materiale** si sceglie principalmente sulla base della lunghezza d'onda e della potenza della radiazione che si vuole usare.

Le lenti più comuni sono in vetro crown BK7, un vetro boro silicato relativamente duro ed economico. E' adatto per potenze non troppo elevate (fino a qualche centinaio di mW) e ha una buona trasmittanza nel visibile da 350 a 2000 nm.

Di qualità e costo più elevati sono le lenti in silice fusa. Il vantaggio principale di questo materiale è che può essere utilizzato per il profondo ultravioletto, d 185 a 2100 nm. Il range di potenze è all'incirca lo stesso delle lenti in BK7.

Viceversa, per applicazioni con radiazione nel profondo infrarosso si utilizzano ottiche fatte con materiali semiconduttori, come il silicio e il germanio.

---

<sup>9</sup> Il segno negativo è dato dal fatto che il nuovo raggio di curvatura è negativo, o equivalentemente che la cintura del fascio si trova a destra della lente.

Le lenti in fluoruro di cadmio e fluoruro di magnesio ( $\text{CaF}_2$  e  $\text{MgF}_2$ ) hanno un ampio intervallo di trasmissione e possono sopportare alte potenze, il che le rende adatte per laser con picchi di potenza elevati. Sono inoltre abbastanza stabili chimicamente e relativamente resistenti a graffi.

Le lenti in fluoruro di bario ( $\text{BaF}_2$ ) offrono una amplissima finestra di trasmissione che si estende dall'UV fino all'estremo infrarosso. Inoltre possono sopportare potenze molto alte. Di contro sono sensibili agli shock termici e chimicamente poco stabili, dal momento che si degradano rapidamente a contatto con l'umidità. Il loro utilizzo richiede pertanto precauzioni particolari.

Le **dimensioni** della lente decidono, assieme alla sua lunghezza focale, quanta luce la lente può raccogliere. Di conseguenza, a parità di focale, lenti con diametro grande sono in grado di raccogliere più luce. Chiaramente, quando si lavora con i fasci gaussiani, è importante utilizzare lenti il cui diametro sia ragionevolmente più grande del diametro del fascio. I parametri che tengono conto di questi aspetti sono l'*apertura numerica* e il cosiddetto *F - number* del sistema ottico. L'apertura numerica, N.A., NA o  $A_N$  è un numero adimensionale che indica il massimo angolo utile al sistema (obiettivo, condensatore ottico od altro) per ricevere od emettere luce. La definizione precisa è differente nelle varie branche della materia come microscopia, fibre ottiche, ottica dei laser. In quest'ultimo caso, assumendo che la lente abbia un diametro ragionevolmente più grande del diametro del fascio, NA è data da  $NA = n \sin \theta$  dove  $\theta$  è la divergenza del fascio ed  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo in cui viaggia la luce al di fuori della lente, che nella maggior parte dei casi è l'aria o il vuoto per cui  $n = 1$ . L'*F - number* indicato con  $F/\#$  o con simbologie simili è invece dato dalla focale della lente divisa per il diametro della lente stessa. Esso fornisce una misura della capacità della lente di raccogliere luce: più l'*F - number* è piccolo, maggiore è la potenza ottica che una lente raccoglie da una sorgente puntiforme piazzata nel fuoco.

Naturalmente, come visto nei paragrafi precedenti, la **focale** della lente oltre all'*F - number* determina anche la sua magnificazione.

Il **tipo** di lente è determinato dall'utilizzo che si prevede di farne. Le lenti *piano - convesse* sono indicate per focalizzare un fascio collimato o per collimare la luce proveniente da una sorgente puntiforme. Possono essere usate anche per applicazioni di imaging, purché una delle due distanze coniugate sia ben maggiore dell'altra ( $> 5$  volte). I *collimatori* sono lenti piano convesse con grande apertura numerica usati per raccogliere e collimare la massima intensità luminosa proveniente da una sorgente puntiforme, spesso usati nei sistemi di illuminazione. Le lenti *biconvesse* sono adatte in applicazioni di imaging quando l'oggetto e l'immagine si trovano dai lati opposti della lente e il rapporto delle distanze coniugate sta fra 0.2 e 5. Le lenti *biconcave* hanno una focale negativa e possono essere usate per aumentare la divergenza di un fascio, mentre quelle *piano - concave* sono utili in sistemi ottici composti per bilanciare eventuali aberrazioni sferiche positive introdotte da altre lenti. Le lenti *concavo - convesse* o lenti *a menisco* sono da usarsi in combinazione con altre lenti. In applicazioni di focalizzazione, una lente a menisco combinata con una lente piano-convessa fornisce uno spot focalizzato di poche decine di micron, laddove la sola lente piano convessa avrebbe prodotto uno spot di qualche centinaio di micron. Una lente a menisco positiva in combinazione con un'altra lente aumenta l'apertura numerica del sistema e riduce la focale. Al contrario, una lente a menisco negativa riduce l'apertura numerica e allunga la focale. Infine i *doppietti acromatici* sono sistemi ottici formati da due o più lenti cementate insieme e progettati in modo da ridurre al minimo le aberrazioni cromatiche. Sono utili per focalizzare fasci non monocromatici.

---

#### 8.4.3.2 APPLICAZIONI STANDARD

##### 8.4.3.2.1 FOCALIZZAZIONE DI UN FASCIO

---

Se una lente è piazzata nella cintura di un fascio gaussiano, come mostrato in figura, i parametri del nuovo fascio sono determinati dalle formule (8.36) ponendo  $z = 0$ .

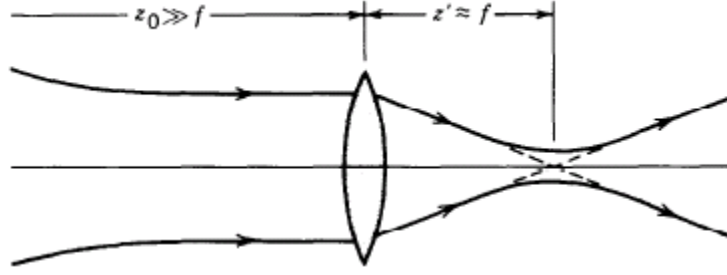


Figura 8-11: Focalizzazione di un fascio gaussiano con lente all'interno della regione di Rayleigh.

Il fascio trasmesso è quindi focalizzato in uno spot di diametro  $W'_0$  a una distanza  $z'$  dati da:

$$W'_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_0}{f}\right)^2}} \quad (8.37)$$

$$z' = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z_0}\right)^2}. \quad (8.38)$$

Se la focale della lente è piccola rispetto al parametro  $z_0$ ,  $W'_0 \cong \frac{f}{z_0} W_0$  e usando  $z_0 = \pi W_0^2 / \lambda$  si ottiene:

$$W'_0 \cong \frac{\lambda}{\pi W_0} f = \theta_0 f \quad (8.39)$$

$$z' \cong f.$$

Come si vede la formula ottenuta coincide in parte con quella dell'ottica geometrica. Questo perché, all'interno della regione di Rayleigh il fascio gaussiano si comporta all'incirca come un'onda piana. La dimensione dello spot focalizzato è inversamente proporzionale al diametro del fascio in ingresso e direttamente proporzionale alla focale e alla lunghezza d'onda. Quindi per ottenere fasci molto focalizzati bisogna espandere al massimo il fascio di ingresso e utilizzare lenti con focali corte.

#### 8.4.3.2.2 COLLIMAZIONE DI UN FASCIO

Come visto la divergenza di un fascio si può ridurre solo a spese di aumentarne il diametro. Uno dei metodi più semplici per ottenere questo risultato, è di utilizzare una combinazione di due lenti come mostrato in figura:

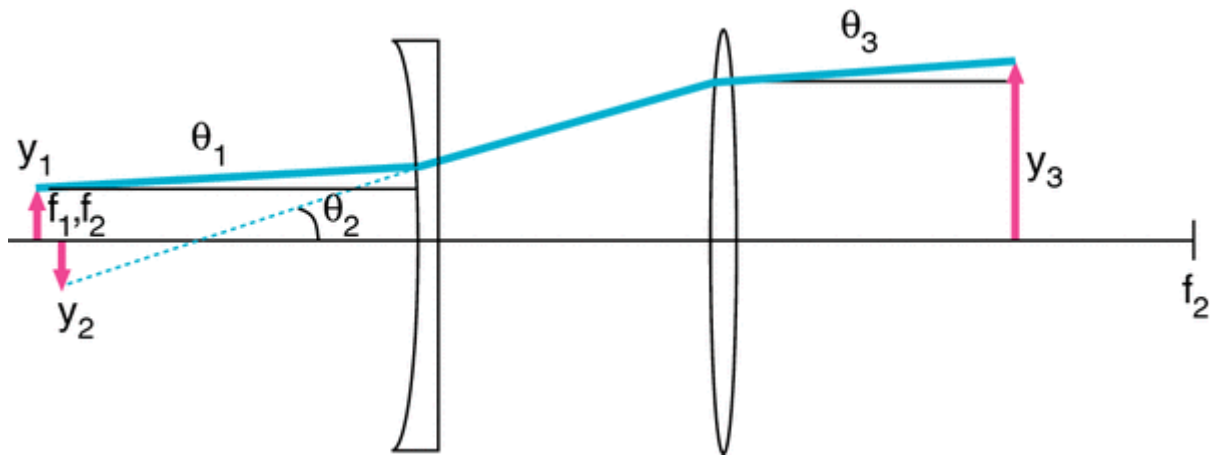


Figura 8-12: Espansore di fascio.

#### 8.4.3.2.3 IMAGING

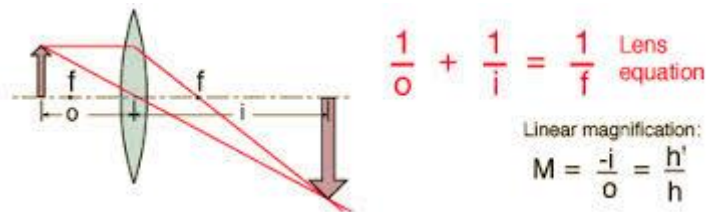


Figura 8-13: L'equazione delle lenti e la magnificazione

Spesso capita di voler formare una immagine ingrandita (o rimpicciolita) a partire da un oggetto. L'equazione delle lenti permette di calcolare a che distanza si devono piazzare rispettivamente l'oggetto e il piano di osservazione per ottenere una certa magnificazione. Se si usa una lente convessa, la regola è che per ingrandire qualcosa l'oggetto deve essere vicino alla lente e il piano di osservazione lontano. Per rimpicciolire vale il viceversa. Una applicazione tipica di quest'ultimo caso si ha ad esempio quando una sorgente estesa deve essere focalizzata in una area piccola, ad es. per raccogliere molta luce e mandarla in una fibra ottica. Il prezzo da pagare in questo caso è che, come detto, la lente deve stare lontano dall'oggetto e quindi la luce raccolta nel sistema diminuisce. Per ovviare a questo problema sono necessarie quindi lenti con un diametro importante.

#### 8.4.4 OTTICA MATRICIALE

Per progettare un sistema ottico si può utilizzare una tecnica di calcolo semplice ed efficace, l'ottica matriciale o metodo delle matrici ABCD. Si applica a sistemi ottici con simmetria radiale o sistemi con geometria planare. Grazie a questa simmetria, si può considerare il raggio luminoso in un piano (z,y) dove l'asse z è la direzione di propagazione e l'asse y è la distanza dall'asse ottico (considerato a y = 0). L'idea è di considerare una approssimazione geometrica in cui un raggio luminoso parassiale è rappresentato da una coppia di valori: (i) l'angolo fra la direzione di propagazione  $\theta$  e l'asse ottico; (ii) la posizione del raggio y.

Un elemento ottico, come una lente ad esempio, è rappresentato da un piano di input e uno di output situati ad una certa distanza, e da una funzione che associa la coppia  $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  sul piano di input alla coppia  $\begin{pmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  sul piano di output.

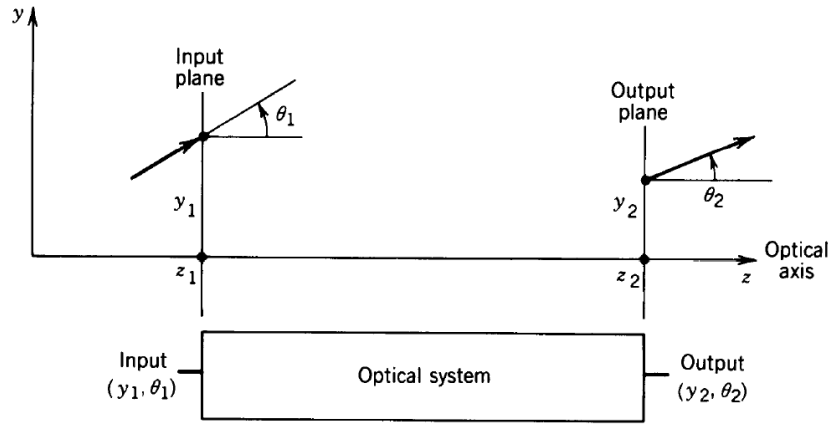


Figura 8-14: Schema di un sistema ottico generico in approssimazione parassiale.

Dato che in approssimazione parassiale la posizione e l'angolo del fascio sui piani di input e di output sono legati da due equazioni lineari, tale relazione si può esprimere tramite una matrice  $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{M}$  caratterizza completamente il sistema ottico. I suoi elementi  $A, B, C, D$  sono numeri reali da trovare in base alla struttura dell'elemento ottico stesso. Il vantaggio di questo metodo è che la matrice di una sequenza di componenti ottici è pari al prodotto delle matrici dei singoli componenti.

#### 8.4.4.1 PROPAGAZIONE IN SPAZIO LIBERO

Un raggio luminoso parassiale si propaga in linea retta nello spazio vuoto. Consideriamo una distanza  $d$  lungo l'asse  $z$ . Si vede subito che  $y_2 = y_1 + \theta_1 d$  e  $\theta_2 = \theta_1$ . La matrice di trasferimento è quindi:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 8.4.4.2 RIFRAZIONE A UNA INTERFACCIA PIANA

Una interfaccia fra due mezzi caratterizzati da indice di rifrazione  $n_1$  e  $n_2$  obbedisce alla legge di Snell. In approssimazione parassiale  $\sin \theta \approx \theta$  per cui la legge di Snell si riscrive  $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$ . Inoltre la posizione dei raggi non viene modificata,  $y_1 = y_2$ . In tutto:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

#### 8.4.4.3 RIFRAZIONE A UNA INTERFACCIA SFERICA

Consideriamo una interfaccia sferica di raggio di curvatura  $R$  ( $R > 0$  se la lente è convessa,  $R < 0$  se la lente è concava). Un raggio che arriva sulla superficie a una distanza  $y_1$  con un angolo  $\theta_1$  rispetto all'asse ottico forma un angolo  $\theta_1 + \theta$  con la superficie della lente, dove  $\theta \approx y_1/R$  in approssimazione parassiale. Dalla legge di Snell in approssimazione parassiale, si vede che il fascio esce ad un angolo  $\theta_2 + \theta$  rispetto alla superficie tale che  $n_1(\theta_1 + \theta) = n_2(\theta_2 + \theta)$ . Alla fine si ha:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$



#### 8.4.4.4 LENTE SOTTILE

Data una lente sottile con raggi di curvatura  $R_1$  e  $R_2$  si ha che la focale  $f$  della lente è data da

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Si può dimostrare che gli angoli dei raggi rifratto e incidente in approssimazione parassiale sono legati da:  $\theta_2 = \theta_1 - y_1$ . Inoltre, dato che la lente è sottile,  $y_1 = y_2$ . In conclusione:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

#### 8.4.4.5 SPECCHIO PIANO

Per trattare gli specchi, si descrive il fascio riflesso nel sistema di riferimento “specchiato” in cui l’asse  $z$  ha verso opposto al fascio incidente. Con questa convenzione, il fascio riflesso parte dalla stessa  $y$  del fascio incidente e forma con l’asse  $z$  specchiato un angolo uguale a quello che il fascio incidente formava con l’asse  $z$  originario. In tutto quindi:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 8.4.4.6 SPECCHIO SFERICO

Usando la stessa convenzione impiegata per lo specchio piano, si ottiene per uno specchio sferico di raggio di curvatura  $R$  ( $R > 0$  se lo specchio è convesso,  $R < 0$  se lo specchio è concavo):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

#### 8.4.4.7 LA LEGGE ABCD PER I FASCI GAUSSIANI

Il formalismo delle matrici di trasferimento può essere adottato anche per descrivere l’effetto di un elemento ottico su un fascio gaussiano. Un fascio gaussiano è univocamente determinato dal parametro  $q = z_{\text{waist}} + iz_0 = z_{\text{waist}} + i \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$  dove  $z_{\text{waist}}$  è la posizione del fuoco lungo la direzione di propagazione e  $W_0$  è la cintura del fascio. Si dimostra che vale la *legge ABCD*: dato un elemento ottico caratterizzato dalla matrice  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , il fascio gaussiano di parametro  $q_1$  è trasformato in un nuovo fascio gaussiano con parametro  $q_2$  dato da:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

**Esempio:** supponendo di avere un fascio incidente a  $\lambda = 632.8$  nm caratterizzato dalla posizione del fuoco in  $z_1 = 0$  e con waist minimo  $W_1 = 100$  micron, calcolare come diventerà il fascio se lo facciamo passare attraverso un sistema ottico costituito da una lente di focale 100 mm posizionata a  $z = 250$  mm.

**Soluzione:** il sistema ottico è costituito da una propagazione in spazio libero (caratterizzata dalla matrice  $\mathbf{M}_{\text{libero}}$ ) e da una lente (caratterizzata da una matrice  $\mathbf{M}_{\text{lente}}$ ). La matrice ottica del sistema completo è:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{lente}} \cdot \mathbf{M}_{\text{libero}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.25m \\ -10m^{-1} & -1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Il fascio iniziale ha un parametro complesso  $q_1 = (0 + i 49.65)\text{mm}$ , da cui applicando la formula si trova:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} = (-160.09 + i19.9)mm$$

Il che significa che il nuovo fascio ha il centro a 160.09 mm dalla lente e quindi a 410.1 mm dall'origine (il segno negativo della parte reale di  $q_2$  indica che il fascio si sta focalizzando) e un waist pari a  $W_2 = 63.29$  micron.

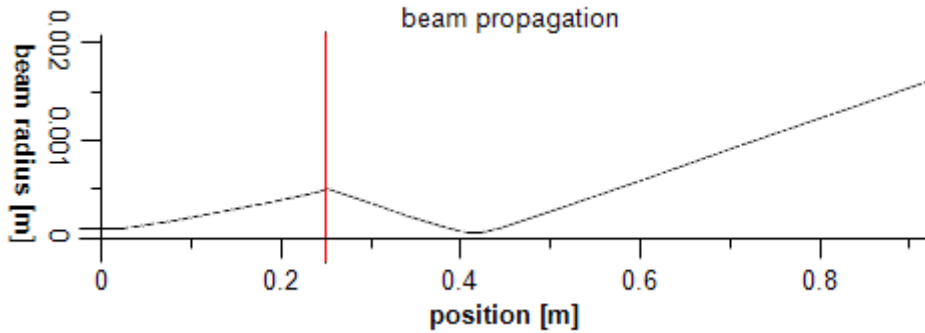


Figura 8-15: Schema della soluzione trovata. La linea rossa rappresenta la posizione della lente.

## 9 RISONATORI OTTICI

Un risonatore o cavità risonante è l'equivalente ottico di un circuito risonante. Il suo uso principale è come analizzatore di spettro e come elemento fondamentale di ogni sistema laser. Il risonatore determina la frequenza e la forma spaziale del fascio. I fasci gaussiani studiati nei paragrafi precedenti sono i modi stazionari di un risonatore a specchi sferici.

### 9.1 RISONATORI A SPECCHI PIANI

Consideriamo i modi normali di un risonatore ottico costituito da due specchi piani paralleli altamente riflettenti (cavità di Fabry- Perot). Trascurando le perdite, possiamo descrivere la situazione considerando l'equazione di Helmholtz per le onde piane monocromatiche  $\nabla^2 U + k^2 U = 0$  e applicando le condizioni al contorno date dall'avere due specchi perfetti uno a  $z = 0$  e l'altro a  $z = d$ , cioè che l'ampiezza complessa dell'onda valga zero sulle superfici degli specchi:  $U(0) = U(d) = 0$ .

La soluzione è l'onda stazionaria

$$U_q(\mathbf{r}) = A \sin k_q z \quad (10.1)$$

a condizione che  $A$  sia una costante e  $k_q = q \frac{\pi}{d}$  dove  $q$  è un numero intero. Lo spettro dei possibili numeri d'onda diveta quindi *discreto* e li etichetteremo con l'indice  $q$ . Questi modi costituiscono una base ortogonale di autostati per la cavità e qualunque campo all'interno dei due specchi può essere espresso come una somma di modi normali del risonatore:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_q A_q \sin k_q z.$$

Poiché la frequenza di un'onda monocromatica è proporzionale al suo numero d'onda ( $k = 2\pi\nu/c$ ), ne consegue che lo spettro delle frequenze delle onde che possono esistere all'interno del risonatore è anch'esso discreto:

$$\nu_q = q \frac{c}{2d} \quad (10.2)$$

Tali frequenze sono dette frequenze di risonanza. Sono le frequenze delle onde che hanno una semilunghezza pari a un sottomultiplo della lunghezza del risonatore:  $\lambda_q = c/\nu_q = 2d/q$ . Naturalmente le lunghezze d'onda in questione tengono conto del mezzo che si trova fra i due specchi tramite la velocità  $c = c_0/n$ , dove  $c_0$  è la velocità della luce nel vuoto e  $n$  è l'indice di rifrazione.

Dall'equazione (10.2) segue che nello spazio delle frequenze, le risonanze formano un pettine equispaziato con una separazione pari a:

$$\nu_F = c/2d \quad (10.3)$$

Chiamato range spettrale libero o *free spectral range* (FSR). Per un risonatore della lunghezza di 15 cm in aria, il free spectral range è dell'ordine di 1GHz.

Volendo ora descrivere l'effetto delle perdite, dobbiamo cercare una maniera per calcolare esplicitamente  $U$ . Per fare questo ricorriamo a una rappresentazione complessa. Ogni volta che l'onda viene rimbalzata tra i due specchi, essa acquisisce uno sfasamento di  $\pi$  radianti sul primo specchio più un'altro sfasamento di  $\pi$  radianti sul secondo specchio, più uno sfasamento dato dalla distanza percorsa nel risonatore tra andata e ritorno, in tutto:  $\varphi = 2\pi + 2kd$ . Appare allora chiaro che la condizione di risonanza  $k = q \frac{\pi}{d}$  corrisponde a una situazione in cui gli sfasamenti ad ogni andata e ritorno danno un multiplo di  $2\pi$  e consentono quindi ad un'onda monocromatica all'interno del risonatore di sommarsi in fase con sé stessa. Quantitativamente, se consideriamo l'onda all'interno del risonatore come la sovrapposizione di tutte le sue repliche date dalle infinite riflessioni fra i due specchi:  $U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots = U_0 + hU_0 + h^2U_0 + h^3U_0 + \dots = U_0/(1 - h)$  dove  $h = \exp(-i\varphi)$  è lo sfasamento accumulato ad ogni passata. È quindi chiaro che alla risonanza  $\varphi = q2\pi$  l'ampiezza complessa diverge, mentre per ogni altro valore l'ampiezza rimane limitata.

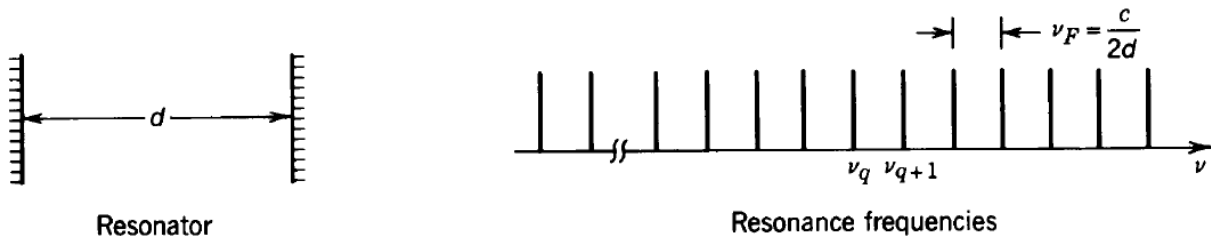


Figura 16: Spettro di una cavità Fabry – Perot senza perdite

È chiaro che questa è una situazione non fisica. Un modello più realistico si ha includendo l'effetto delle perdite. Quando si hanno perdite, i fattori  $h$  hanno un modulo minore di uno che descrive il fatto che ad ogni rimbalzo le onde possiedono una ampiezza che va riducendosi, quindi ora si scrive:  $h = r \exp(-i\varphi)$  e si ha, esplicitamente:

$$I = |U|^2 = \frac{|U_0|^2}{|1 - r e^{-i\varphi}|^2} = \frac{I_{max}}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (10.4a)$$

dove:

$$I_{max} = \frac{|U_0|^2}{|1 - r|^2} \quad F = \frac{\pi\sqrt{r}}{1 - r} \quad (10.4b)$$

Sono rispettivamente l'intensità massima e la finesse della cavità Fabry – Perot. Se si grafica l'intensità in funzione della frequenza sostituendo le espressioni viste prima per  $\varphi$  si trova:

$$I = \frac{I_{max}}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\nu_F}\right)} \quad (10.5)$$

Quest'ultima espressione mostra che vicino alle risonanze il profilo di intensità segue una funzione molto vicina a una Lorenziana (per  $F \gg 1$ ), la cui FWHM è inversamente proporzionale alla finesse della cavità:  $\delta\nu = \nu_F / F$ . Quindi, più la finesse è elevata, più le risonanze sono strette e alte. Alla risonanza l'intensità all'interno della cavità viene amplificata rispetto al suo valore medio  $|U_0|^2$  di un fattore che grossolanamente vale  $F^2$ .

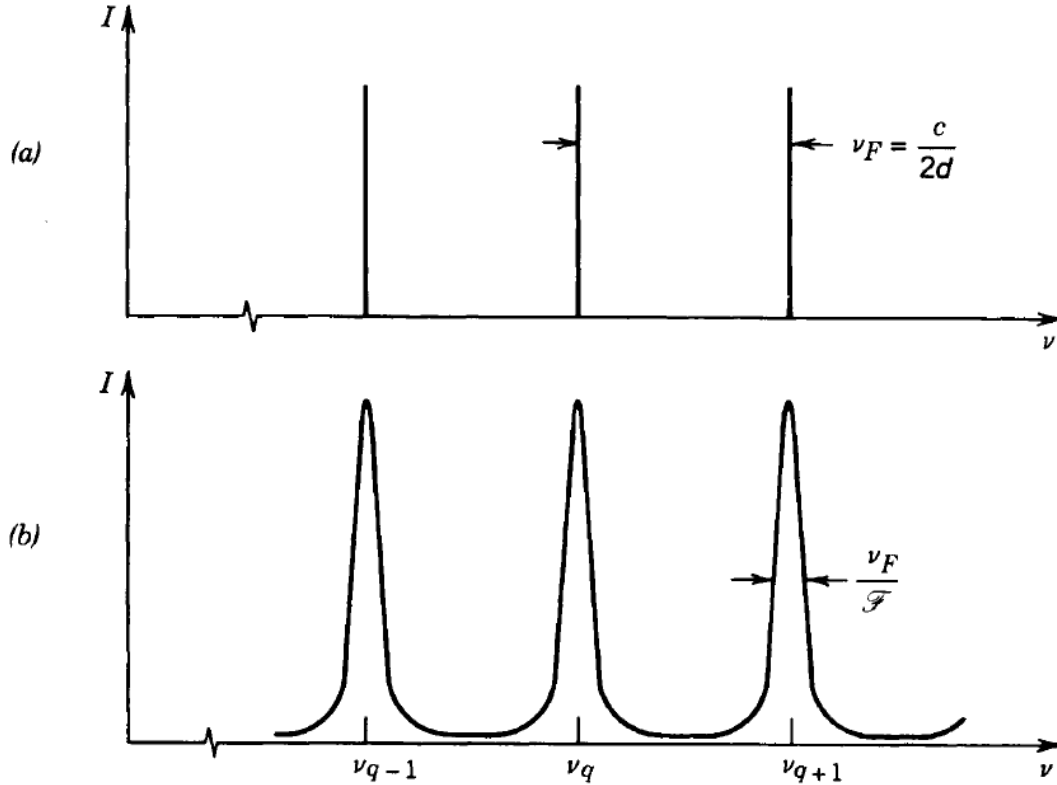


Figura 17: Confronto fra lo spettro di una cavità senza (a) e con (b) perdite.

Spesso la prima sorgente di perdite è costituita dal fatto che la riflettanza degli specchi non è unitaria (cosa che in certi casi può anche essere voluta, come ad esempio nel caso di cavità a trasmissione parziale, usati ad es. nei laser). In aggiunta a ciò possiamo avere un assorbimento durante la propagazione, dovuto alla non idealità del mezzo nel quale l'onda si propaga. In tutto possiamo scrivere, per un andata e ritorno completi:

$$r^2 = R_1 R_2 e^{-\alpha_r d} \quad (10.6)$$

Dove il fattore 2 ad esponente tiene conto del fatto che l'onda viaggia in andata e in ritorno all'interno del mezzo. Il tutto si può riesprimere in termini di un fattore di assorbimento efficace

$$r^2 = e^{-2\alpha_r d} \quad (10.7)$$

Con  $\alpha_r = \alpha - \frac{1}{2d} \ln R_1 R_2$ . Sostituendo queste espressioni in (10.4b) si trova che la finesse fornisce una misura diretta delle perdite del risonatore, e può essere usata proprio come misura di queste ultime:

$$F = \frac{\delta\nu}{\nu_F} = \frac{\pi \exp(-\alpha_r d/2)}{1 - \exp(-\alpha_r d)}$$

In particolare, per cavità non troppo smorzate ( $\alpha_r d \ll 1$ ) gli esponenziali si approssimano al primo ordine e l'espressione precedente diventa:

$$F \approx \frac{\pi}{\alpha_r d} \quad (10.8)$$

Se gli specchi della cavità sono parzialmente trasmissivi, in modo da accoppiare il campo interno con un campo incidente e con uno uscente, è facile mostrare che alla risonanza in uscita alla cavità si ha una sovrapposizione di onde trasmesse con fase coerente. Procedendo in modo analogo a quanto visto prima, si trova la trasmittanza  $T(\nu) = I_t/I_i$  di una cavità Fabry - Perot come:

$$T(\nu) = \frac{T_{max}}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\nu_F}\right)} \quad (10.9)$$

con

$$T_{max} = \frac{|t_1 t_2|}{1 - r_1 r_2} \quad (10.10)$$

Una cavità Fabry – Perot può quindi essere utilizzata come un filtro ottico con banda passante molto stretta o un analizzatore di spettro se, ad esempio, la lunghezza della cavità può essere fatta variare con precisione. A causa della periodicità della risposta spettrale di questo dispositivo, la banda spettrale da misurare deve essere minore di un free spectral range, per evitare ambiguità. Da notare che un piccolo cambiamento  $\Delta d$  della lunghezza della cavità modifica le frequenze di risonanza (vedi eq. 10.2) come:

$$\Delta\nu_q = -\frac{qc}{2d^2} \Delta d = -\nu_q \frac{\Delta d}{d}$$

Poiché le frequenze di risonanza a regimi ottici sono dell'ordine di  $10^{14}$  Hz, un cambiamento relativo  $\frac{\Delta d}{d} = 10^{-4}$  cambia la frequenza di risonanza di 10GHz. (per  $n=1$ ).

Al contrario, il free spectral range non è molto sensibile al cambiamento di lunghezza. Infatti, come per la frequenza di risonanza si ha

$$\Delta\nu_F = -\nu_F \frac{\Delta d}{d}$$

Ma poiché  $\nu_F$  è dell'ordine della decina di GHz, lo stesso cambio di lunghezza  $\frac{\Delta d}{d} = 10^{-4}$  lo modifica solo di qualche MHz.

## 9.2 RISONATORI A SPECCHI SFERICI

# 10 LASER

Un *LASER* (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) è un sistema ottico composto da due elementi fondamentali: un amplificatore ottico e un sistema di retroazione. Il secondo dei due elementi è una cavità ottica, un qualcosa che “ripiega” il campo ottico su sé stesso in modo da creare un’onda stazionaria e può essere realizzata, almeno a livello concettuale, in modo abbastanza semplice, come ad esempio nella solita “scatola” con pareti completamente riflettenti, che dovrete conoscere bene già da altri corsi. La questione dell’amplificazione ottica è invece tutt’altro che banale e la vedremo nei prossimi paragrafi. Prima di continuare, vale la pena sottolineare che i sistemi laser sono divenuti onnipresenti nelle moderne applicazioni tecnologiche, dalla chirurgia alle telecomunicazioni, dall’informatica all’industria pesante. Una loro conoscenza, per quanto sommaria, non può mancare nel bagaglio di competenze di un fisico sperimentale.

## 10.1 L'EMISSIONE STIMOLATA E I COEFFICIENTI DI EINSTEIN

Nel 1916 Einstein comprese che l'equilibrio fra un campo ottico e un insieme di corpuscoli materiali elementari (atomi) si raggiunge attraverso processi quantizzati di tre tipi: *assorbimento*, *emissione spontanea* e *emissione stimolata*. Il primo processo avviene quando un atomo sottrae energia al campo ottico per passare ad uno stato eccitato. Dato che l'atomo può assumere solo determinati stati energetici, i fotoni scambiati devono necessariamente possedere una energia (frequenza) tale da essere risonanti con il nuovo stato eccitato. Il processo di emissione spontanea, al contrario, si verifica quando un atomo che si trova in uno stato eccitato decade ad uno stato ad energia più bassa, cedendo al campo ottico un fotone di energia opportuna. Il terzo processo (emissione stimolata) può essere compreso considerando l'analogia meccanica di un pendolo forzato alla sua frequenza propria. Se la forzante è in fase con l'oscillazione, l'energia è trasferita dalla forzante al pendolo. Ma se la forzante è in controfase rispetto al pendolo, l'energia viene risucchiata da quest'ultimo. La prima di queste due possibilità corrisponde al processo di assorbimento, la seconda all'emissione stimolata, che è la vera controparte del processo classico descritto sopra ed appare quindi perfettamente ragionevole. Da questo punto di vista, il processo senza analogo classico è quello di emissione spontanea!

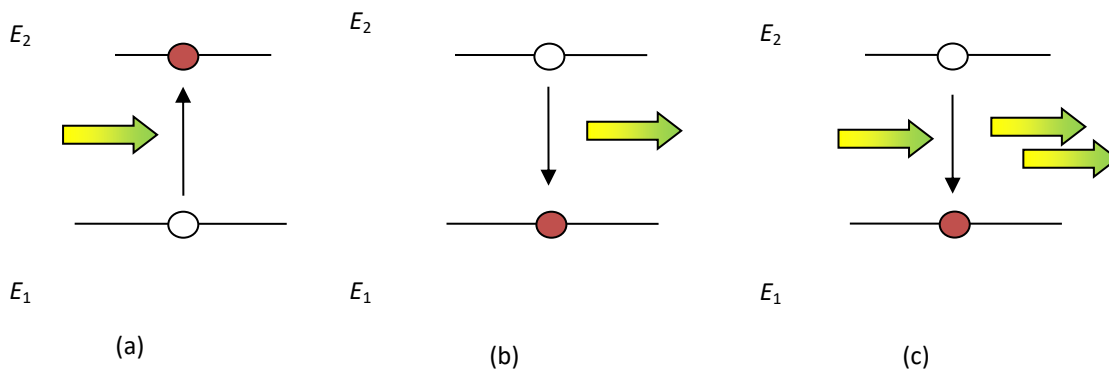


Figura 10-1: I tre processi elementari di scambio di energia fra un campo ottico e la materia: (a) assorbimento; (b) emissione spontanea; (c) Emissione stimolata.

E' importante rilevare che i fotoni emessi nei processi di emissione stimolata hanno la stessa fase e direzione dei fotoni che hanno indotto la transizione, a causa della natura risonante del processo illustrata prima. La coppia di fotoni risultante è quindi perfettamente coerente e la radiazione ottica risulta amplificata.

L'idea è quindi di preparare un sistema in modo che molti atomi si trovino in uno stato eccitato, in modo da poter sfruttare il processo di emissione stimolata per amplificare il campo ottico. I fotoni prodotti per emissione spontanea non forniscono una vera amplificazione, perché non hanno alcuna relazione predeterminata con il campo ottico e si manifestano come radiazione diffusa incoerente sovrapposta al campo ottico "ordinato" del sistema.

Proviamo a esprimere questi processi in modo matematico nel caso più semplice di un sistema a due livelli. Supponiamo che vi siano  $N_1$  ( $N_2$ ) atomi di una certa specie per unità di volume nei due stati di energia  $E_1$  ( $E_2$ ) e che tutti gli altri stati possano venire ignorati. Il numero di processi di assorbimento per unità di tempo con cui i fotoni sono assorbiti è proporzionale al numero di atomi nello stato 1 e alla densità di fotoni con energia opportuna per "risuonare" con la transizione  $1 \rightarrow 2$ . Sia  $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$  la frequenza corrispondente a tale energia e sia  $W(\nu)$  la densità

spettrale di energia della radiazione (in parole povere, la “concentrazione” di fotoni con frequenza  $\nu$ ) misurata in  $\text{J/m}^3\text{Hz}$ . Il rateo di processi di assorbimento sarà:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{ab} = B_{12}N_1W(\nu). \quad (11.1)$$

Analogamente, il numero di processi di emissione stimolata per unità di tempo sarà proporzionale a  $N_2$  e  $W(\nu)$ :

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{st} = -B_{21}N_2W(\nu). \quad (11.2)$$

Infine, il rateo di processi di emissione spontanea sarà proporzionale a  $N_2$ , ma indipendente da  $W(\nu)$ .

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{sp} = -A_{21}N_2. \quad (11.3)$$

I tre coefficienti  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  e  $A_{21}$  sono detti *coefficienti di Einstein*. Trascureremo in questa semplice analisi la possibilità di processi non lineari che potrebbero verificarsi per alte intensità luminose.

All’equilibrio i tre processi devono bilanciarsi e uguagliando la loro somma a zero si ottiene subito:

$$W(\nu) = \frac{A_{21}N_2}{B_{12}N_1 - B_{21}N_2}. \quad (11.4)$$

Chiaramente i tre coefficienti dipendono da quali atomi sono coinvolti nel processo, ma non dovrebbero dipendere dalla radiazione. Einstein usa questo fatto per stabilire una relazione generale fra i coefficienti, tenendo conto del fatto che la densità spettrale  $W(\nu)$  è una funzione generale che dipende solo dalla temperatura di un corpo (legge del corpo nero):

$$W(\nu) = 8\pi h\nu^3 \left(\frac{n}{c}\right)^3 \times \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (11.5)$$

D’altra parte, la meccanica statistica richiede che le popolazioni di un sistema a due livelli in equilibrio termico stiano tra loro come il fattore di Boltzmann:

$$N_1 = N_2 \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (11.6)$$

Dove  $g_1/g_2$  è un fattore che tiene conto delle possibili degenerazioni dei livelli energetici. Sostituendo questa espressione nella (9.4) troviamo che  $W(\nu)$  dovrebbe avere una espressione del tipo:

$$W(\nu) = A_{21} \times \frac{1}{B_{12} \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - B_{21}} \quad (11.7)$$

che effettivamente ricorda molto quella del corpo nero. Se vogliamo che le due coincidano, deve essere:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (11.8)$$

$$A_{21} = 8\pi h\nu^3 \left(\frac{n}{c}\right)^3 B_{21}. \quad (11.9)$$

A noi interessa il rapporto delle due frequenze di salto dei processi di emissione stimolata e spontanea. Usando le formule appena derivate è facile vedere che, all'equilibrio:

$$\frac{(dN_2/dt)_{st}}{(dN_2/dt)_{sp}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (11.10)$$

Per temperature “normali”, quindi, la stragrande maggioranza dei processi di diseccitazione è di tipo spontaneo. Per aumentare l'efficienza del processo è necessario trovare un altro modo per rendere l'emissione spontanea predominante.

Si ricorre al metodo detto “*inversione della popolazione*” che consiste nel portare il sistema in una condizione (metastabile, cioè in un equilibrio poco stabile) per cui ci sono più atomi nello stato eccitato che nello stato fondamentale. In questo modo il processo di emissione stimolata può avvenire molto più frequentemente. La cosa non si può ottenere all'equilibrio termico (vedi eq. (9.6)) ma bisogna ricorrere a qualche tipo di *pompaggio*, come vedremo meglio con qualche esempio fra poco.

Grazie all'inversione della popolazione un mezzo ottico diventa *attivo*: un qualsiasi fotone con energia  $E_2 - E_1$  che attraversi il mezzo può stimolare uno dei moltissimi atomi eccitati a emettere un secondo fotone identico e coerente. Il processo continua a cascata, e così un tenue segnale luminoso che attraversi un mezzo attivo, ne esce amplificato, ossia con intensità aumentata di un certo fattore detto *guadagno ottico*. Questo è il principio degli amplificatori ottici, sistemi che agiscono come degli attenuatori con coefficiente di assorbimento negativo e sono usati ad esempio nelle telecomunicazioni su fibra ottica per rigenerare dei segnali dopo che questi hanno subito delle perdite per propagazione. Un laser è un amplificatore ottico inserito all'interno di una cavità ottica: si può pensare che la luce sia fatta “rimbalzare” più volte all'interno del mezzo attivo e che a ogni passaggio aumenti la propria intensità in modo coerente. Se uno degli specchi che costituisce la cavità può trasmettere una piccola parte della radiazione, si avrà dalla cavità l'emissione di un fascio laser.

L'uso della cavità ha anche un altro effetto rilevante: il campo ottico al suo interno deve essere quantizzato e le lunghezze d'onda (e le frequenze) permesse sono determinate dalla geometria della cavità secondo la relazione:

$$m\lambda = 2nL \quad (11.11)$$

Ovvero

$$\nu = m \frac{c_0}{2nL} \quad (11.12)$$

Dove  $m$  è un intero,  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo che riempie la cavità,  $L$  è la lunghezza della cavità e  $\lambda$  è la lunghezza d'onda in spazio libero. Per avere l'effetto laser è necessario che almeno una di queste frequenze permesse coincida con quella a cui risuona l'amplificatore ottico. In questo caso il laser è detto *a singolo modo* (longitudinale). Se invece più frequenze ottiche sono consentite dal sistema, il laser è detto *multimodo*.





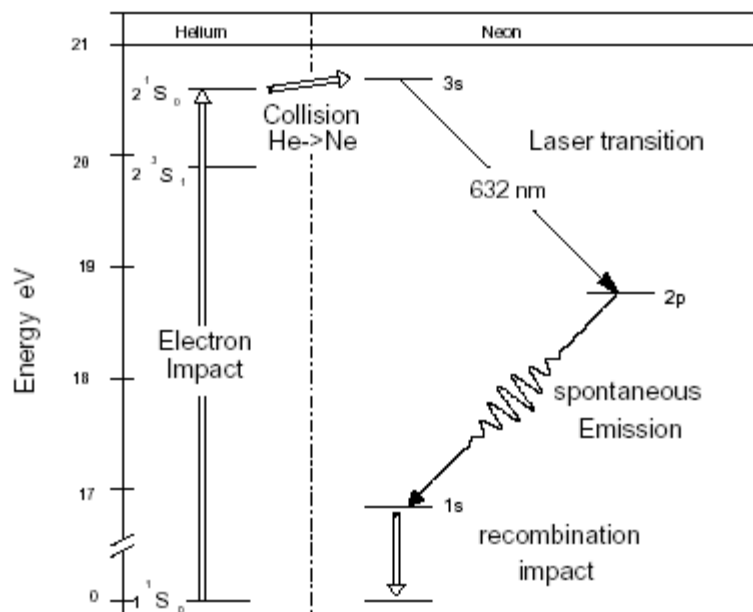


Figura 10-3: Schema dei livelli energetici e processi di eccitazione e diseccitazione

Il pompaggio inizia con l'eccitazione tramite collisione con gli elettroni della scarica dei numerosi atomi di Elio presenti nella camera. Si viene quindi a formare un'alta concentrazione di ioni He nello stato  $2^1S_0$ . Questo stato ha un'energia molto prossima a quella dello stato  $3s$  del Ne, per cui è altamente probabile che, se un atomo di He collide con uno di Ne, questo possa ricevere energia dal primo e passare a uno stato eccitato. Il livello  $3s$  del Ne ha un lungo tempo di vita, il che lo rende adatto a garantire l'inversione di popolazione. Un qualsiasi fotone con lunghezza d'onda corrispondente a quella della transizione  $3s \rightarrow 2p$  del Ne può innescare la cascata di emissioni stimolate; in generale questa emissione coerente inizierà in una direzione arbitraria, quindi verrà immediatamente dissipata sulle pareti della cavità. In questo caso le perdite ottiche superano il guadagno fornito dall'emissione stimolata e il laser non si innesca. Un caso particolare però prevale su tutti gli altri, ossia quando la direzione dell'emissione avviene lungo l'asse della cavità. Se allora il pompaggio è abbastanza efficiente e la cavità è di buona qualità, il guadagno ottico supera le perdite. In questo caso il processo si auto-innesca e il campo all'interno della cavità aumenta la sua intensità a dismisura.

Per quanto riguarda la distribuzione spaziale del campo ottico all'interno della cavità, si può mostrare che la semplice struttura riportata in figura (9-2) non è molto efficiente. In effetti, due specchi piani non sono in grado di confinare efficacemente la luce perché, a causa della diffrazione, non sono in grado di "ripiegare" efficacemente il campo su sé stesso. Per ovviare a questo problema si utilizzano degli specchi sferici (o parabolici) per chiudere la cavità. Si dimostra allora che esistono infinite soluzioni stazionarie del problema<sup>10</sup>, e la prima di esse (modo  $TEM_{00}$ ) è un modo con profilo di intensità gaussiano e fronti d'onda che curvano in modo da combaciare con gli specchi della cavità: si tratta proprio del fascio gaussiano che viene emesso dal tubo laser, in cui la cintura si colloca circa al centro della cavità. In generale, viste le qualità vantaggiose di questo tipo di emissione, i laser vengono progettati in modo da selezionare questa particolare situazione.

Con riferimento alla figura 14, si trova che il gas è confinato in un piccolo tubo capillare del diametro di pochi mm e lungo qualche decina di cm. Le due finestre di entrata del capillare sono inclinate all'angolo di Brewster, in modo da trasmettere la radiazione con polarizzazione  $p$ . L'altro stato di polarizzazione è invece attenuato quel tanto che basta da sopprimerlo all'interno della cavità. In questo modo il fascio laser uscente da questo tipo di sistemi è generalmente

<sup>10</sup> Il problema è analogo a quello di una particella quantistica in una buca di potenziale.

polarizzato. Queste finestre hanno anche lo scopo di impedire l'innesco di altre linee risonanti con la struttura del tubo, come ad esempio la transizione a  $3.39\mu\text{m}$  che si verifica tra altri livelli del Ne.

---

## 10.2.2 I LASER A SEMICONDUCTORE

I laser a semiconduttore utilizzano elementi dai gruppi III ai gruppi VI della tavola periodica. L'inversione di popolazione si ottiene facendo passare una corrente all'interno di una giunzione pn in modo da creare coppie elettrone – lacuna che si separano grazie all'ausilio del campo interno presente alla giunzione. Le coppie elettrone lacuna si possono ricombinare liberando energia sottoforma di fotoni. Questi laser hanno emissione a lunghezze d'onda che vanno dal visibile ( $\sim 400\text{ nm}$ ) all'infrarosso a seconda della composizione della lega che viene usata come mezzo attivo, la quale determina l'ampiezza del gap energetico del materiale. Naturalmente i materiali impiegati devono essere sufficientemente trasparenti alle lunghezze d'onda di operazione. Questo ampio intervallo di emissioni, combinato con le dimensioni ridotte del dispositivo finale, bassa corrente di operazione, basso costo e alta efficienza fa dei laser a semiconduttore una delle più importanti classi di laser in uso.

---

### 10.2.2.1 TIPI DI DIODI LASER A SEMICONDUCTORE

---

#### 10.2.2.1.1 DIODI LASER A CAVITÀ FABRY – PEROT

Il tipo più semplice di diodo laser a semiconduttore è il diodo laser a cavità Fabry – Perot (FP). In questo dispositivo, due superfici del cristallo semiconduttore sono tagliate secondo dei piani di sfaldamento creando due specchi riflettenti che formano una cavità Fabry – Perot in cui il semiconduttore funge contemporaneamente anche da mezzo attivo. Dei ricoprimenti ottici sono applicati alle faccette a specchio per ottimizzare l'accoppiamento in uscita della radiazione.

#### 10.2.2.1.2 LASER A ETEROSTRUTTURE

#### 10.2.2.1.3 LASER A BUCA QUANTICA

#### 10.2.2.1.4 LASER A FEEDBACK DISTRIBUITO

#### 10.2.2.1.5 LASER A CAVITÀ VERTICALE CON EMISSIONE DI SUPERFICIE (VCSEL)

---

---

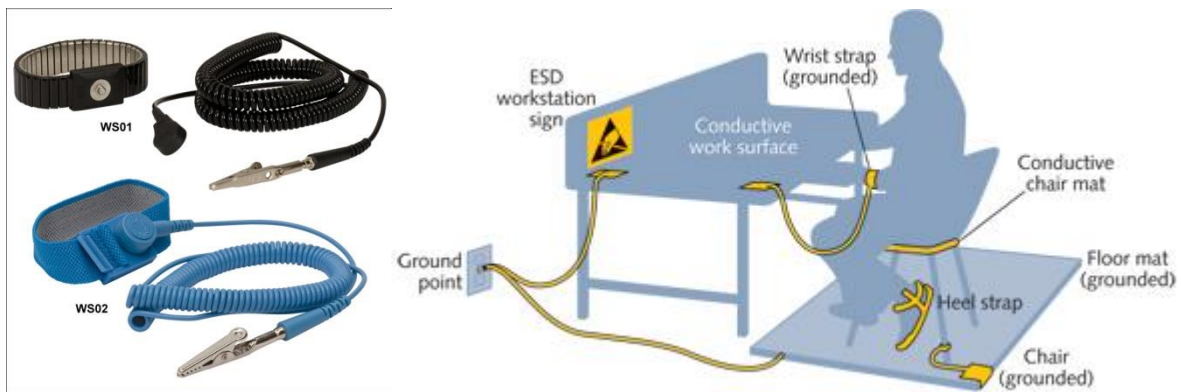
### 10.2.2.2 GUIDA ALL'UTILIZZO DEI LASER A DIODO

---

#### 10.2.2.2.1 DANNEGGIAMENTO

I diodi laser sono dispositivi molto delicati ed è necessario operarli usando alcune cautele per evitare un funzionamento poco affidabile o la loro rottura. Le principali cause di danno sono: elettroniche, termiche e legate alla potenza emessa.

Le cause elettroniche sono la principale causa di danneggiamento dei diodi laser. La più subdola fra esse è la scarica elettrostatica: quando lo sperimentatore si carica per sfregamento contro elementi dell'ambiente circostante è possibile che, nel toccare il diodo, una scarica di corrente venga trasmessa attraverso il dispositivo. Questo è sufficiente a provocarne la rottura. Per questo motivo quando si lavora con i diodi laser è opportuno indossare dei braccialetti conduttori cortocircuitati con il tavolo ottico, in modo da scaricare tutte le correnti elettrostatiche senza passare per il diodo.



Per lo stesso motivo è necessario evitare di somministrare al diodo degli *spike* elettrici o transienti troppo rapidi, dato che questo potrebbe facilmente distruggere il dispositivo: sono da annoverare fra questi fenomeni improvvisi sbalzi di tensione, sovraccarichi dovuti a temporali e così via. Chiaramente sono da evitare anche il montaggio di diodi su zoccoli in tensione. Una buona norma è dunque portare il diodo lentamente nelle condizioni di operazione, assicurarsi di utilizzare un alimentatore progettato specificatamente per questo scopo e mantenere i collegamenti con il circuito di controllo il più corti possibile per evitare interferenze. Va detto che i normali alimentatori tensione /corrente da laboratorio generalmente non sono abbastanza affidabili da questo punto di vista, così è buona norma dotare il diodo laser di un piccolo circuito di sicurezza che ne allunga la vita.

Gli effetti della temperatura sono meno catastrofici, ma altrettanto importanti, in quanto hanno un forte impatto sulla radiazione prodotta e sulla durata di vita del laser. La corrente di soglia, la potenza ottica, la stabilità in frequenza e il “salto” fra i diversi modi della cavità sono solo alcuni dei parametri fortemente dipendenti dalla temperatura del diodo. Inoltre rapidi cambiamenti di temperatura durante l’operazione del diodo ne riducono pesantemente la speranza di vita. Dal momento che solo una parte della potenza assorbita dal diodo viene convertita in radiazione ottica, il diodo tende a scaldarsi velocemente se non vengono prese precauzioni particolari. Ovviamente anche le condizioni ambientali e il tipo di montaggio usato influenzano la temperatura. Per questi motivi, un buon sistema laser a diodo deve prevedere qualche sistema di termostatazione attivo che fissa la temperatura del dispositivo a un valore ottimale quando viene operato.

Il danneggiamento dovuto alla potenza emessa è un’altra causa da non sottovalutare. A parte indurre effetti termici, le retroriflessioni del fascio laser all’interno della cavità, a potenze elevate, possono danneggiare le facce di ingresso del chip. In questo caso è necessario stimare la quantità di potenza che rientra nel diodo laser a causa di riflessioni e valutare se eccede la soglia di danneggiamento del dispositivo. Per sistemi in cui la potenza è elevata si può prevedere l’utilizzo di isolatori ottici per evitare il problema.

Tutte queste accortezze diventano tanto più necessarie quanto maggiore è la potenza ottica emessa dal laser.

#### 10.2.2.2 SPECIFICHE IMPORTANTI

Quando si vuole progettare un sistema a diodo laser, ci sono molti parametri da considerare. I più importanti sono in genere espressi in termini di valori massimi:

- **Potenza ottica di uscita** (determina il tipo di montaggio da scegliere e le precauzioni da usare per operare il laser in sicurezza).
- **Lunghezza d’onda** (determina l’energia della radiazione prodotta e il tipo di protezioni da usare per operare il laser in sicurezza)
- **Corrente di soglia, di lavoro, massima ( a T fissata)** (determina il tipo di montaggio da usare e il circuito di alimentazione)
- **Voltaggio di lavoro** (determina il tipo di circuito di alimentazione)

### 10.2.2.2.3 MONTAGGI STANDARD

Se il laser è a bassa potenza e non si è interessati ad applicazioni particolarmente spinte, si può montare il diodo su un semplice supporto e alimentarlo con una batteria, come si fa nei puntatori laser. Il diodo non si scalda molto perché la potenza è bassa e una alimentazione a batteria previene il rischio di scariche perché il sistema è isolato dall'ambiente esterno. Per applicazioni più esigenti bisogna prevedere, come già detto, almeno una elettronica di controllo per evitare che il diodo si “bruci” dopo pochi utilizzi. I diodi laser dispongono spesso di tre pin, dei quali due sono connessi a massa e all'anodo, mentre l'altro pin è collegato ad un fotodiodo (PD) che misura in tempo reale l'emissione del diodo laser (LD).

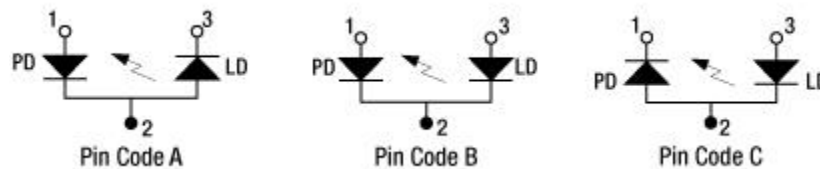


Figura 4: Alcuni comuni tipi di configurazione per un diodo laser a tre pin.

### 10.2.2.2.4 MODALITÀ DI OPERAZIONE

I diodi laser si operano generalmente somministrando una corrente a tensione fissata. Sotto un certo valore chiamato corrente di soglia  $I_{th}$ , un diodo si comporta come un LED e emette fotoni semplicemente per emissione spontanea. Al di sopra di  $I_{th}$  il diodo inizia a generare luce laser, e la potenza ottica emessa aumenta rapidamente con la corrente somministrata. La relazione fra potenza ottica emessa e corrente in ingresso è lineare fino a un certo valore massimo. Da notare che spesso la differenza fra corrente di soglia e corrente massima è piuttosto piccola: non più del 10 – 20%. Le specifiche del dispositivo indicano quali sono i valori ottimali. Tuttavia durante l'attivazione, un diodo laser modifica (in peggio) la sua risposta in funzione soprattutto della temperatura alla giunzione. Inoltre la corrente di soglia varia molto da dispositivo a dispositivo. Risultato: progettare un circuito con un valore di corrente fissato è un approccio destinato al fallimento! L'unico modo per operare efficacemente un diodo laser è di misurare la potenza ottica prodotta e di impostare la corrente di conseguenza (controllo in corrente). Questo può essere o dinamicamente: molti sistemi commerciali utilizzano il fotodiodo di monitor presente all'interno del laser per operare dei sistemi di feedback e realizzare così un controllo continuo in tempo reale (controllo in potenza).

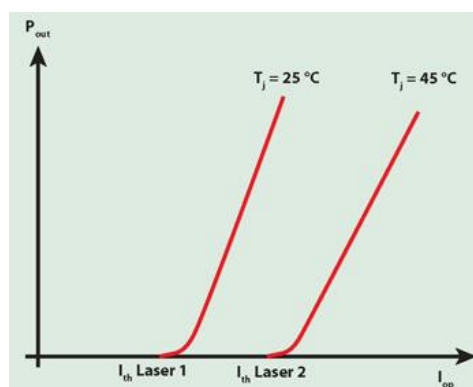


Figura 5: Curve di potenza emessa da un laser a diodo per diversi valori di temperatura.

Una volta che il diodo sia attivato, è importante ottenere un fascio ottico con le caratteristiche volute. I diodi laser di solito sono caratterizzati da un fascio molto divergente e astigmatico (si propaga cioè come un cono ellittico ed è

quindi caratterizzato da due valori di divergenza). Per ovviare al primo problema si utilizzano delle lenti asferiche, cioè lenti con grande apertura numerica ma corrette per l'aberrazione sferica che raccolgono il massimo dell'intensità prodotta e la collimano.

Per accoppiare opportunamente un diodo laser ad una lente è necessario procedere come segue:

- Determinare l'apertura numerica del diodo laser tramite la formula  $NA = \sin \theta_{\max}$  dove  $\theta_{\max}$  è il maggiore tra i due valori di divergenza che caratterizzano l'emissione del diodo (reperibili sulle specifiche). Selezionare solo lenti con apertura numerica maggiore di questo valore. Indicativamente, un buon valore è dato da  $2 \times NA$ , dato che valori inferiori a questo comportano una perdita dell'intensità raccolta dalla lente.
- Regolare la lente in modo che il diodo si trovi alla distanza focale. In questo modo si ottiene un fascio collimato, caratterizzato da due diametri. I diametri sono determinati dalla focale scelta e dalla divergenza iniziale del laser, secondo la formula:  $\frac{D_{\min, (\max)}}{2} = f \tan \frac{\theta_{\min (\max)}}{2}$

A questo punto si ha un fascio con sezione ellittica, una generalizzazione del fascio gaussiano. Si può correggere questo astigmatismo tramite una coppia di prismi anamorfici o di lenti cilindriche:

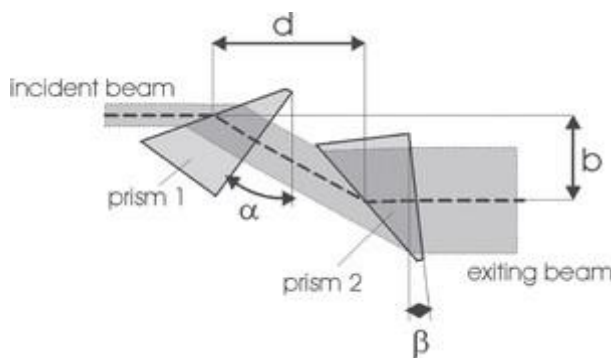


Figura 6: Coppia di prismi anamorfici.

### 10.2.3 ALTRI LASER

Il laser He – Ne e più recentemente i diodi laser sono i tipi di laser “economici” più diffusi, ma esistono moltissimi tipi di laser diversi. Di seguito una lunga lista dei possibili tipi di laser e dei loro impieghi:

#### Laser a gas

Mezzo e tipo di amplificazione laser	Lunghezza d'onda operativa	Sorgente di pompaggio	Usi e note
Laser a elio-neon	632.8 nm (543.5 nm, 593.9 nm, 611.8 nm, 1.1523 μm, 1.52 μm, 3.3913 μm)	Scarica elettrica	Interferometria, olografia, spettroscopia, scansione di codici a barre, allineamento, dimostrazioni ottiche.

Laser a ioni di argon	454.6 nm, 488.0 nm, 514.5 nm (351 nm, 457.9 nm, 465.8 nm, 476.5 nm, 472.7 nm, 528.7 nm)	Scarica elettrica	Fototerapia retinica (per diabete), litografia, microscopia confocale, pompaggio di altri laser.
Laser a ioni di kripton	416 nm, 530.9 nm, 568.2 nm, 647.1 nm, 676.4 nm, 752.5 nm, 799.3 nm	Scarica elettrica	Ricerca scientifica, mescolati con argon per ottenere laser a luce bianca per giochi di luci.
Laser a ioni di xeno	Molte righe spettrali dall'ultravioletto fino all'infrarosso.	Scarica elettrica	Ricerca scientifica.
Laser ad azoto	337.1 nm	Scarica elettrica	Pompaggio di laser a coloranti organici, misura dell'inquinamento ambientale, ricerca scientifica. I laser ad azoto possono funzionare in superradianza (cioè senza una cavità risonante). Costruzione di laser amatoriali. Vedi laser TEA
Laser ad anidride carbonica	10.6 µm, (9.4 µm)	Scarica elettrica trasversale (alta potenza) o longitudinale (bassa potenza)	Lavorazione di materiali (taglio, saldatura, etc.). Chirurgia.
Laser a monossido di carbonio	2.6 to 4 µm, 4.8 to 8.3 µm	Scarica elettrica	Lavorazione di materiali (incisione, saldatura etc.), spettroscopia fotoacustica.
Laser a eccimeri	193 nm (ArF), 248 nm (KrF), 308 nm (XeCl), 353 nm (XeF)	Ricombinazione di eccimeri con una scarica elettrica	Litografia ultravioletta per fabbricazione di circuiti integrati, chirurgia laser, LASIK.

Laser chimici

Usati come armi a energia diretta.

Mezzo e tipo di amplificazione laser	Lunghezza d'onda operativa	Sorgente di pompaggio	Usi e note
Laser a fluoruro di idrogeno	da 2.7 a 2.9 $\mu\text{m}$ per il fluoruro di idrogeno (<80% trasmittanza atmosferica)	Reazione chimica in un flusso di combustione di etilene e trifluoruro di azoto ( $\text{NF}_3$ )	Usato in ricerche sugli armamenti laser dal ministero della difesa degli Stati Uniti, funziona in onda continua e può raggiungere potenze dell'ordine del megawatt.
Laser a fluoruro di deuterio	~3800 nm (3.6 to 4.2 $\mu\text{m}$ ) (~90% trasmittanza atmosferica)	reazione chimica	MIRACL, Proiettile a energia impulsiva & Laser tattico ad alta energia
COIL (Chemical Oxygen-Iodine Laser)	1.315 $\mu\text{m}$ (<70% trasmittanza atmosferica)	Reazione chimica in un flusso di ossigeno in stato singlet e iodio	Armamenti laser, ricerca scientifica e sui materiali, laser usati nel Laser aviotrasportato degli Stati Uniti. Funziona in onda continua e può avere potenze dell'ordine del megawatt.

#### Laser a coloranti organici

Mezzo e tipo di amplificazione laser	Lunghezza d'onda operativa	Sorgente di pompaggio	Usi e note
Laser a coloranti	390-435 nm (stilbene), 460-515 nm (cumarina 102), 570-640 nm (rodammina 6G) e molti altri	Altri laser, lampade stroboscopiche	Ricerca, spettroscopia, rimozione di voglie, separazione isotopica. La gamma di sintonia del laser varia a seconda del particolare



			colorante usato.
--	--	--	------------------

#### Laser a vapori metallici

Mezzo e tipo di amplificazione laser	Lunghezza d'onda operativa	Sorgente di pompaggio	Usi e note
Laser a vapori <b>elio-cadmio</b> (HeCd)	441.563 nm, 325 nm	Scarica elettrica in vapore metallico mescolato con <b>elio</b> come gas di riempimento.	Stampa e fotocomposizione, esami per eccitazione della <b>fluorescenza</b> , Ricerca scientifica.
Laser a vapori <b>elio-mercurio</b> (HeHg)	567 nm, 615 nm		Rari; ricerca scientifica, costruzione di laser amatoriali.
Laser a vapori <b>elio-selenio</b> (HeSe)	fino a 24 lunghezze d'onda diverse fra l'infrarosso e l'ultravioletto		Rari; ricerca scientifica, costruzione di laser amatoriali.
Laser a vapori di <b>rame</b>	510.6 nm, 578.2 nm	Scarica elettrica	Dermatologia, fotografia ad alta velocità, pompaggio per laser a coloranti organici.
Laser a vapori d' <b>oro</b>	627 nm		Rari, dermatologia e <b>terapia fotodinamica</b> .

#### Laser a stato solido

Mezzo e tipo di amplificazione laser	Lunghezza d'onda operativa	Sorgente di pompaggio	Usi e note
<b>Laser a rubino</b>	694.3 nm	Lampada stroboscopica	<b>Olografia</b> , rimozione di tatuaggi. Il primo tipo di laser a luce visibile inventato (Maia <b>1960</b> ).
<b>Laser Nd:YAG</b>	1.064 $\mu\text{m}$ , (1.32 $\mu\text{m}$ )	Lampada stroboscopica, <b>diode laser</b>	Lavorazione di materiali, misurazione distanze, puntatori laser, chirurgia, ricerca, pompaggio di altri laser (combinato con <b>duplicatori di frequenza</b> per produrre un fascio

			verde da 532 nm). Uno dei più comuni laser ad alta potenza. Di solito funziona ad impulsi (brevi fino a frazioni di <b>nanosecondo</b> ).
Laser Er:YAG	2.94 μm	Lampada stroboscopica, <b>diodo laser</b>	Scalatura periodontale, <b>odontoiatria</b> .
Laser Nd:YLF	1.047 e 1.053 μm	Lampada stroboscopica, diodo laser	Generalmente usato per il pompaggio impulsivo di certi tipi di laser <b>Ti:zaffiro</b> , combinato con <b>duplicatori di frequenza</b> .
Laser Nd:YVO <sub>4</sub>	1.064 μm	diodo laser	Generalmente usato per il pompaggio continuo di laser Ti:zaffiro o a coloranti in <b>mode-locking</b> , in combinazione con <b>duplicatori di frequenza</b> . Usato anche a impulsi per marcatura e microlavorazioni meccaniche.
Laser Nd:YCOB (Nd:YCa <sub>4</sub> O(BO <sub>3</sub> ) <sub>3</sub> )	~1.060 μm (~530 nm alla seconda armonica)	diodo laser	Nd:YCOB è un cosiddetto "materiale laser ad autoraddoppio di frequenza" o materiale SFD, che oltre ad essere capace di amplificazione laser ha anche caratteristiche ottiche nonlineari che lo rendono capace di funzionare in seconda armonica. Tali materiali permettono di semplificare il progetto di laser verdi ad elevata brillantezza.
Laser Neodimio-vetro (Nd:Glass)	~1.062 μm (vetri ai silicati), ~1.054 μm (vetri ai fosfati)	Lampada stroboscopica, diodo laser	Usati per potenze ed energie estremamente elevate (dell'ordine del <b>terawatt</b> e dei <b>megajoule</b> ), in sistemi a fasci multipli per <b>fusione a confinamento inerziale</b> . Viste le potenze in gioco, i laser Nd:Glass sono <b>otticamente nonlineari</b> e vengono usati per triplicare la loro stessa frequenza di lavoro: funzionano generalmente in terza armonica a 351 nm.
Laser allo zaffiro di titanio (Ti:zaffiro)	650-1100 nm	Altri laser	spettroscopia, <b>Lidar</b> , ricerca. Questo laser si usa spesso in laser infrarossi altamente accordabili in <b>modelocking</b> per produrre <b>impulsi ultrabrevi</b> e in amplificatori laser per produrre impulsi ultrabrevi e ultrapotenti.

Laser Tm:YAG (Tm:YAG)	2.0 $\mu\text{m}$	diodo laser	Lidar.
Laser itterbio:YAG (Yb:YAG)	1.03 $\mu\text{m}$	Diodo laser, lampada stroboscopica	Raffreddamento ottico, lavorazione materiali, ricerca sugli impulsi ultrabrevi, microscopia multifotonica, Lidar.
Laser a vetro drogato con itterbio (bacchette, piastrine, fibre))	1. $\mu\text{m}$	diodo laser.	La versione a fibra è in grado di produrre parecchi kilowatt di potenza continua vantando una efficienza ottico-ottico del 70-80% ed elettrico-ottica del 25%. Lavorazione di materiali: taglio, saldatura, marcatura; fibre ottiche nonlineari: sorgenti basate nonlineari di fibre a larga banda, pompaggio per laser Raman su fibra; pompa Raman di amplificazione distribuita per telecomunicazioni.
Laser Olmio:YAG (Ho:YAG)	2.1 $\mu\text{m}$	diodo laser	Ablazione tissutale, rimozione di calcoli renali, odontoiatria.
Laser Ce:LiSAF, Ce:LiCAF (fluoruro di litio, stronzio (o calcio) e alluminio drogato con cerio)	~280 to 316 nm	Pompaggio di laser Nd:YAG a frequenza quadruplicata, di laser a eccimeri, di laser a vapori di rame.	Sensoristica atmosferica remota, Lidar, ricerca ottica.
Laser a stato solido a vetro fosfatico drogato con Promezio 147 ( $^{147}\text{Pm}^{+3}$ :Glass)	933 nm, 1098 nm	??	Questo materiale laser è radioattivo. Dopo la dimostrazione del suo funzionamento all'LLNL nel 1987, per il decadimento del promezio 147 il mezzo di amplificazione laser si è trasformato in un étalon composto di vetro ai fosfati drogato con piombo e indio.
Laser al crisoberillo drogato al cromo (alessandrite)	Generalmente sintonizzato nella gamma da 700 a 820 nm	Lampada stroboscopica, diodo laser, arco almercurio (per funzionamento in onda continua)	Dermatologia, Lidar, lavorazioni laser.
Laser a vetro drogato con erbio ed erbio-itterbio	1.53-1.56 $\mu\text{m}$	diodo laser	Questi vetri sono fabbricati in bacchette, pistrine e fibre. Le fibre ottiche drogate con erbio sono comunemente usate come

			amplificatori ottici per telecomunicazioni.
Laser a stato solido al fluoruro di calcio drogato con uranio trivalente (U:CaF <sub>2</sub> )	2.5 µm	Lampada stroboscopica	È stato il primo laser a stato solido a quattro livelli (novembre 1960) sviluppato da Peter Sorokin e Mirek Stevenson nei laboratori IBM, e il secondo laser inventato in assoluto (dopo il laser a rubino di Maiman), raffreddato con elio liquido. Oggi non è più usato.
Laser a fluoruro di calcio drogato con samario bivalente (Sm:CaF <sub>2</sub> )	708.5 nm	Lampada stroboscopica	Anche questo inventato da Peter Sorokin e Mirek Stevenson nei laboratori IBM, primi mesi del 1961. Anche questo raffreddato a elio liquido e oggi non più usato.
Laser a centri F.	2.3-3.3 µm	Laser a ioni	Spettroscopia

#### Laser a semiconduttori

Mezzo e tipo di amplificazione laser	Lunghezza d'onda operativa	Sorgente di pompaggio	Usi e note
Diodo laser a semiconduttore	0.4-20 µm, a seconda del materiale della regione attiva.	Corrente elettrica	Telecomunicazioni, olografia, stampa laser, armamenti, macchinari, saldatura, sorgenti di pompaggio per altri laser.
GaN	0.4 µm		Dischi ottici
AlGaAs	0.63-0.9 µm		Dischi ottici, puntatori laser, comunicazioni dati. I laser da 780 nm per i lettori CD sono il tipo di laser più comune del mondo. Pompaggio di altri laser a stato solido, lavorazioni industriali, applicazioni mediche.
InGaAsP	1.0-2.1 µm		Telecomunicazioni, pompaggio di altri laser a stato solido, lavorazioni industriali, applicazioni mediche.

sali di piombo	3-20 $\mu\text{m}$		
Vertical cavity surface emitting laser (VCSEL)	850 - 1500 nm, a seconda del materiale		Telecomunicazioni
Laser a cascata quantica	Dal medio al lontano infrarosso.		Ricerca, applicazioni future includono radar anticollisione, controllo di processi industriali e strumenti di diagnosi medica come analizzatori del fiato.
Laser ibridi al silicio	Medio infrarosso		Ricerca

#### Altri tipi di laser

Mezzo e tipo di amplificazione laser	Lunghezza d'onda operativa	Sorgente di pompaggio	Usi e note
Laser a elettroni liberi	Una vasta gamma di lunghezze d'onda (da circa 100 nm a molti millimetri); i laser a elettroni liberi sono sintonizzabili su molte lunghezze d'onda diverse.	Fascio di elettroni relativistico	Ricerca atmosferica, scienza dei materiali, applicazioni di ricerca in medicina molecolare.
Laser "simil-nichel" al samario	Raggi X a 7.3 nm	Doppio impulso laser dell'ordine del terawatt in un plasma ultra-caldo di samario, creato da un laser Nd:Glass ad altissima potenza nei laboratori Rutherford Appleton.	Prima dimostrazione di operazione saturata efficace di un laser a raggi X con lunghezza d'onda al di sotto di 10 nm; possibili applicazioni in microscopia ad alta risoluzione e olografia. Il funzionamento è vicino alla "finestra dell'acqua" da 2.2 a 4.4 nm, dove sarebbe possibile l'osservazione della struttura del DNA e dell'azione dei virus e dei farmaci nelle cellule.
Laser Raman, usa la	1-2 $\mu\text{m}$ per varie versioni	Altri laser, soprattutto	Copertura completa

diffusione Raman anelastica stimolata in un mezzo nonlineare, generalmente fibre ottiche, per l'amplificazione	della fibra	laser in fibra ottica Yb-vetro	dell'intervallo 1-2 $\mu\text{m}$ ; amplificazione ottica distribuita di segnali per telecomunicazioni; generazione e amplificazione di solitoni.
Laser a pompaggio atomico	Vedi laser a gas	Fissione nucleare	Ricerca

#### 10.2.4 NORMATIVA

Un laser è un dispositivo potenzialmente nocivo per la salute di chi lo utilizza o di chi vi è vicino. Esiste una normativa in materia che sancisce in sostanza che chi attrezza un laboratorio con un laser deve:

1. Valutare qual è l'effettiva pericolosità del sistema laser.
2. Fornire a chi vi accede tutti i mezzi per capire quali rischi corre e come comportarsi.
3. Prevenire possibili cause di incidente (ad esempio non puntando il fascio verso un passaggio di persone)
4. Fornire tutte le attrezzature necessarie al corretto utilizzo dell'apparato.

Dal canto suo l'utente deve conoscere come utilizzare la strumentazione in questione. Vediamo alcuni dettagli della normativa.

La grande varietà di lunghezze d'onda, energie e caratteristiche d'impulso dei laser e sistemi che includono laser, e delle applicazioni e dei modi di impiego di tali sistemi, rendono indispensabile, ai fini della sicurezza, il loro raggruppamento in *categorie, o classi, di pericolosità*. E' risultato molto utile pertanto l'introduzione di un nuovo parametro chiamato Limite di Emissione Accettabile (LEA), che descrive i livelli di radiazione emergente da un sistema laser, la cui valutazione permette la collocazione dell'apparecchio nell'opportuna categoria di rischio. La determinazione del LEA deve essere effettuata nelle condizioni più sfavorevoli ai fini della sicurezza. L'occhio, per la sua configurazione anatomofunzionale e per il suo comportamento ottico, è l'organo più vulnerabile nei confronti della luce laser e rappresenta pertanto l'organo "critico" per eccellenza. A seconda della radiazione ottica (ultravioletto 100-400nm, visibile 400-760 nm, infrarosso 760-1mm) e dell'intensità di dose si possono avere diversi tipi di danno a carico di questo organo quali: danni retinici di natura fotochimica, alterazioni retiniche caratterizzate da piccoli addensamenti di pigmento, discromie, effetti catarattogeni di origine fotochimica e termica, fotocheratocongiuntivite, ustioni corneali.

Di minore importanza è l'eventuale danno a carico della cute e i più comuni sono: eritemi, ustioni cutanee, superficiali e profonde, la cui gravità sarà in rapporto, oltre che all'energia incidente, al grado di pigmentazione, all'efficienza dei fenomeni locali di termoregolazione, alla capacità di penetrazione nei vari strati delle radiazioni incidenti. Laser di potenza notevolmente elevata possono danneggiare seriamente anche gli organi interni.

Si sono individuate 5 classi: 1, 2, 3A, 3B e 4, con indice di pericolosità crescente con il numero di classe.

Nella **Classe 1** vengono raggruppati i laser cosiddetti intrinsecamente sicuri, poiché il livello di esposizione massima permesso non viene mai superato, o quei sistemi laser non pericolosi grazie alla loro progettazione ed ingegnerizzazione: involucri fissi e sicurezze intrinseche come ad esempio sistemi che bloccano definitivamente l'emissione in caso di guasto o di apertura involontaria o volontaria dell'apparato. I LEA per la classe 1 sono le

condizioni di esposizione massima permessa più rigide e limitative per ciascuna lunghezza d'onda e durata di esposizione.

Di **classe 2** sono quelle sorgenti o sistemi che emettono radiazione nell'intervallo 400 e 700 nm (cioè nel visibile) a bassa potenza. Non sono intrinsecamente sicuri, ma la protezione dell'occhio è normalmente facilitata dal riflesso di ammiccamento. Bisogna evitare di guardare nel fascio.

La **classe 3A** comprende i laser con potenze di uscita non inferiori a 5 mW. La protezione dell'occhio è facilitata dal riflesso di ammiccamento. Bisogna evitare di guardare nel fascio, né osservare direttamente con strumenti ottici.

Per la **classe 3B** i livelli, sia per radiazione visibile che per quella non visibile, non devono superare i 500 mW. La visione diretta nel fascio è sempre pericolosa, mentre non è a rischio la visione di radiazioni non focalizzate, mediante riflessione diffusa.

I laser di **classe 4** sono i più potenti e pericolosi. La classe 4 comprende tutti quei sistemi che superano i livelli imposti alla classe 3B. Il loro uso richiede un'estrema prudenza. Sono pericolosi anche per riflessione diffusa. Essi possono causare danni a carico della cute e presentano anche un rischio di incendio. E' necessario evitare l'esposizione dell'occhio e della pelle alla radiazione diretta o diffusa.

---

## 10.2.5 PRECAUZIONI

Nella valutazione dei rischi e nell'applicazione delle misure di controllo vanno presi in considerazione tre aspetti:

- La possibilità per il laser o il sistema laser di nuocere alle persone.
- L'ambiente nel quale il laser viene utilizzato.
- Il livello di formazione del personale che fa funzionare il laser o che può essere esposto alla sua radiazione.

---

### 10.2.5.1 PROTEZIONE PERSONALE

#### **Classe 1**

- a) Utilizzo senza prescrizioni

#### **Classe 2**

- a) Evitare una visione continua del fascio diretto
- b) Non dirigere il fascio laser deliberatamente sulle persone

#### **Classe 3 A**

- a) Evitare l'uso di strumenti ottici quali binocoli o teodoliti
- b) Affiggere un segnale di avvertimento laser
- c) Terminare il fascio laser in una zona esterna al luogo di lavoro o delimitare tale zona
- d) Fissare la quota del raggio laser molto al di sopra o al di sotto dell'altezza dell'occhio
- e) Evitare che il fascio laser sia diretto verso superfici riflettenti

### **Classe 3 B**

Può causare danni a un occhio non protetto. Valgono le precauzioni della classe 3 A e inoltre:

- a) Funzionamento solo in zone controllate dagli operatori
- b) Evitare assolutamente riflessioni speculari
- c) Far terminare il fascio su un materiale atto a disperdere calore e riflessione
- d) Indossare le protezioni oculari

### **Classe 4**

Causa danni a un occhio sia tramite il fascio diretto, riflessioni speculari e diffuse.

Rappresentano anche un potenziale pericolo di incendio. Valgono le precauzioni della classe 3 B e inoltre:

- a) Tragitti dei fasci protetti da un riparo
- b) Durante il funzionamento presenza solo di personale tecnico munito di protettori oculari e idonei vestiti protettivi
- c) Per evitare la presenza di personale sarebbe preferibile se fossero comandati a distanza
- d) Preferibili bersagli metallici non piani e adeguatamente raffreddati come coni o assorbitori
- e) Per evitare riflessioni indesiderate nella parte invisibile dello spettro per la radiazione laser situata nell'infrarosso

---

#### **10.2.5.2 PROTEZIONE SULLA SORGENTE**

- Segnali di avvertimento
- Schermi protettivi
- Cartelli di avvertimento
- Chiave di comando, per un utilizzo dell'apparecchio solo delle persone autorizzate

---

#### **10.2.5.3 PROTEZIONE DEGLI OCCHI**

Un protettore oculare previsto per assicurare una protezione adeguata contro le radiazioni laser specifiche deve essere utilizzato in tutte le zone pericolose dove sono in funzione laser della classe 3 e 4. I protettori oculari vanno scelti in base alla lunghezza d'onda della sorgente laser e della sua potenza massima.

### **10.3 CARATTERIZZAZIONE DI UN FASCIO LASER**

---

#### **10.3.1 POWER METER**

Una delle prime caratteristiche da misurare in un fascio laser è la sua potenza ottica. Esistono tre tipi principali di misuratori di potenza (*power meter*). I *sensori a fotodiodo* sono dispositivi che producono una corrente elettrica proporzionale alla potenza incidente. Il coefficiente di proporzionalità dipende dalla lunghezza d'onda della



radiazione. Questa corrente, generalmente dell'ordine del mA, viene trasformata in tensione tramite un semplice circuito chiamato *amplificatore di transimpedenza* basato su un amplificatore operazionale. Questo tipo di sensori è generalmente collegato a qualche unità elettronica che contiene i dati di calibrazione e permette la lettura diretta del risultato. Questi sensori consentono di misurare fasci con potenze dal nW fino a decine di mW, con lunghezze d'onda nel visibile o nell'IR, a condizione di scegliere opportunamente il sensore. I *sensori termici* si basano sulla misura dell'aumento di temperatura di un'oggetto di capacità termica nota indotto dall'irraggiamento laser. Sono adatti a misurare potenze elevate. Infine, i *sensori piroelettrici* sono adatti alla misura di fasci impulsati. In questo caso si preferisce misurare l'energia trasportata dall'impulso integrando la potenza totale sulla durata dell'impulso stesso. Questi detector rilasciano un picco di corrente proporzionale all'energia di ogni impulso tramite l'effetto piroelettrico, ossia la capacità di certi materiali cristallini di produrre una carica superficiale se riscaldati.



Figura 10-7: Brochure di un power meter con vari tipi di teste di misura.

### 10.3.2 FATTORE $M^2$ E METODO DEL COLTELLO

I fasci gaussiani che abbiamo descritto nei paragrafi precedenti sono un'idealizzazione matematica. A causa dei difetti nella cavità, instabilità meccaniche, incompleta purezza dei modi ecc., i fasci effettivamente prodotti da un sistema laser reale possono solo avvicinarsi a questa idealizzazione. Quando si fa riferimento a fasci reali le equazioni trovate devono essere modificate tenendo conto del fattore  $M^2$  dove tale fattore si definisce a partire dalla relazione:

$$w_{0M} \theta_M = M^2 \lambda / \pi > \lambda / \pi \quad (9.13)$$

dove  $w_{0M}$  e  $\theta_M$  sono, rispettivamente, il raggio del waist per un'intensità di  $1/e^2$  e metà dell'angolo di divergenza per un fascio laser reale.

La conoscenza del valore di  $M^2$  per un fascio laser è un metodo per misurare la qualità di un fascio. Tale metodo è basato sulla comparazione del fascio in esame con un fascio puramente gaussiano.

Un fascio puramente gaussiano (spesso indicato come  $TEM_{00}$ ) ha un  $M^2$  pari ad 1 (vedi eqs. 8.23 – 8.25). Il valore di tale parametro per un fascio laser ideale è derivato dalla teoria di propagazione ed è indicato anche come Times-Diffraction-Limit-Factor. Una pratica conseguenza della definizione di  $M^2$  è che **un fascio con  $M^2$  uguale ad 1 può essere focalizzato al minimo diametro possibile.**

La conoscenza di tale valore quindi fornisce notevoli informazioni sul fascio laser ed è di particolare utilità soprattutto se tale fascio è usato in applicazioni in cui è necessaria una focalizzazione a piccoli diametri.

Considerando il fattore  $M^2$ , per un fascio laser reale, si ha che le equazioni viste per un fascio ideale si modificano come segue:

$$w_M(z) = w_{0M} \left[ 1 + \left( \frac{z \lambda M^2}{\pi w_{0M}^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (9.14)$$

$$R_M(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_{0M}^2}{z \lambda M^2} \right)^2 \right] \quad (9.15)$$

La definizione del range di Rayleigh rimane la stessa per un fascio laser reale:

$$z_R = \pi w_{0M}^2 / \lambda \quad (9.16)$$

L'equazione per una lente sottile diventa:

$$\frac{1}{s + (z_R / M^2)^2 / (s - f)} + \frac{1}{s''} = \frac{1}{f} \quad (9.17)$$

Alcuni tipici valori di  $M^2$  per vari laser sono:

Laser	TEM <sub>00</sub>	He-Ne	ionico	diodo collimato (TEM <sub>00</sub> )	multimodo ad alta energia
<b>M<sup>2</sup></b>	<b>1</b>	<b>≅1.1</b>	<b>1.1 – 1.3</b>	<b>1.1 – 1.7</b>	<b>3 - 4</b>

Si noti che la definizione di  $M^2$  per un laser a diodo (usualmente astigmatico) è possibile solo dopo che il suo fascio è stato collimato ad un modo TEM<sub>00</sub>.

Un metodo semplice per misurare il fattore  $M^2$  è il cosiddetto *metodo del coltello*. Questa tecnica permette di ottenere un profilo spaziale della propagazione del fascio e confrontarla con quella prevista dalle formule (9.13 – 9.14 e 9.16) per misurare il fattore  $M^2$ . Nel fare questo, naturalmente, si ottengono anche importanti informazioni come il diametro del fascio e la sua divergenza.

Il metodo consiste nel “tagliare” un fascio laser in direzione perpendicolare all’asse di propagazione con una lama di rasoio e contemporaneamente misurare la potenza del fascio che non viene intercettato.

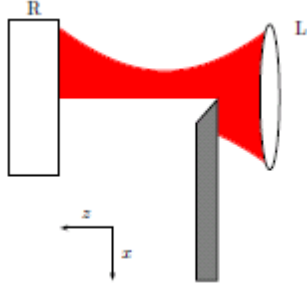


Figura 10-8: Il metodo del coltello: la potenza di un fascio gaussiano ( in questo caso focalizzato da una lente  $L$ ) è misurata da un detector  $R$  piazzato dopo il coltello [Ceolin – Sartorello, relazione di laboratorio 2012 – 2013].

La potenza media sarà data dall'integrale dell'intensità sull'area lasciata libera dal coltello. Se  $x$  è la posizione del filo del coltello si avrà:

$$P(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dy dx = A \operatorname{erfc} \left( \frac{x - x_c}{\sqrt{2}W(z)} \right) \quad (9.18)$$

Ove  $A$  è una costante,  $x_c$  è la posizione del centro del fascio lungo  $x$  e  $\operatorname{erfc}$  è la funzione d'errore complementare, data dall'integrale della funzione di Gauss:  $\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} e^{-t^2} dt$ . Eseguendo un fit dei dati trovati è possibile ricostruire, per una certa posizione  $z$  il diametro del fascio laser.

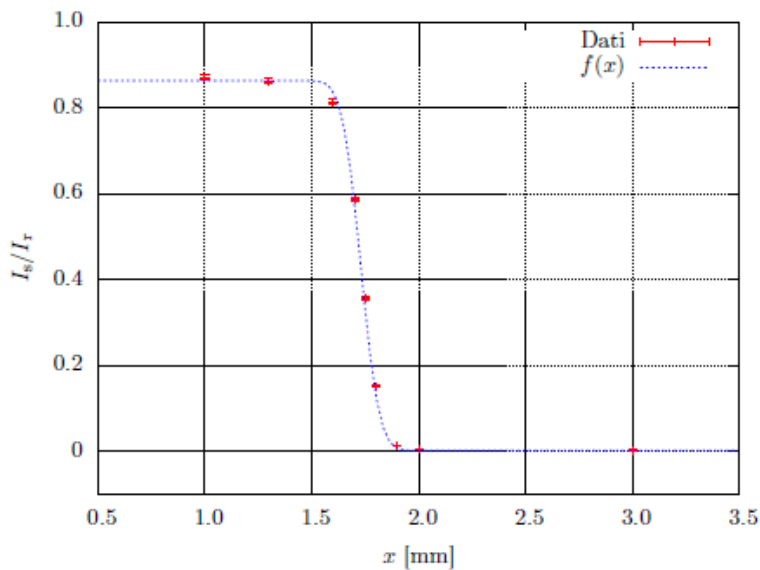


Figura 10-9: Misura con il metodo del coltello e relativo fit [Ceolin – Sartorello, relazione di laboratorio 2012- 2013].

Basta ripetere la misura per un certo numero di punti lungo l'asse di propagazione per ottenere l'andamento del diametro del fascio lungo la direzione di propagazione. Questi dati, a loro volta, possono poi essere interpolati con le funzioni viste per determinare le quantità di interesse.

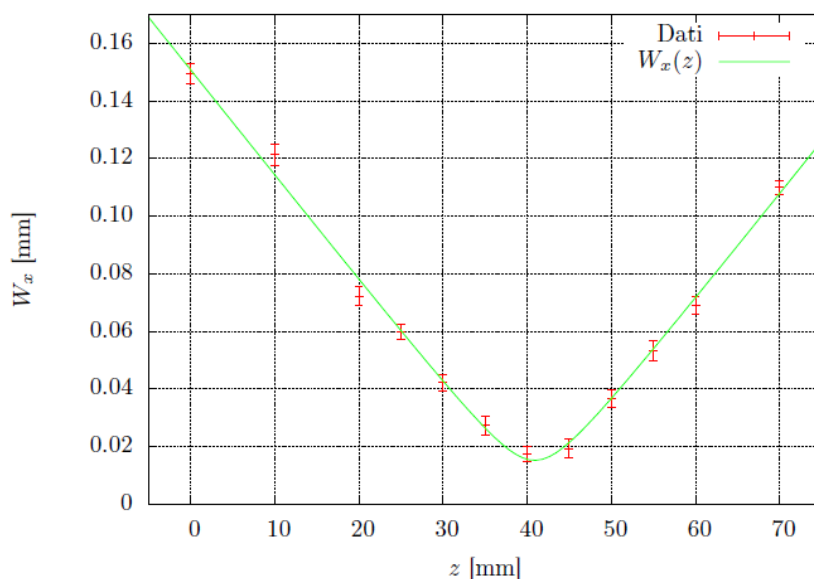


Figura 10-10: Andamento della larghezza del fascio per varie posizioni del coltello lungo la direzione di propagazione e fit con la funzione  $W(z)$  [Ceolin – Sartorello 2012 - 2013].

### 10.3.3 ANALIZZATORI DI FASCIO

Il metodo migliore per misurare un fascio laser, a condizione che questo non sia troppo focalizzato è dato da strumenti chiamati *analizzatori di fascio* o *Beam Profiler*. Si tratta di una matrice di sensori con dimensioni dell'ordine della decina di micron quadri, che effettuano con una singola esposizione, una "foto" del fascio laser opportunamente attenuato. Questi sistemi sono generalmente abbinati a dei sofisticati software che consentono di analizzare in dettaglio il fascio. Naturalmente l'analisi può essere ripetuta a varie posizioni lungo la direzione di propagazione per ottenere, ad es. una misura del fattore  $M^2$ , della divergenza, della circolarità ecc.

## 11 SENSORI DI RADIAZIONE LUMINOSA

Un sensore di radiazione luminosa è un dispositivo che rivela un flusso di fotoni assorbendone una parte e convertendo l'energia corrispondente in una grandezza misurabile. Nel seguito ci interesseremo di dispositivi che convertono la luce in corrente elettrica. Questi sono basati sull'effetto fotoelettrico che può essere distinto in due forme: **emissione fotoelettrica** e **fotoconduttività**. Nel primo caso le cariche vengono estratte dal materiale, nel secondo rimangono all'interno di esso, ma cambia la loro mobilità e quindi le caratteristiche elettriche del materiale stesso.

### 11.1 TUBI FOTOMOLTIPLICATORI

I tubi fotomoltiplicatori sono tra i primi dispositivi messi a punto per la misura dell'intensità luminosa e usati ancora oggi. Il loro principale vantaggio è l'estrema sensibilità che li rende adatti a misurare intensità luminose molto tenui, dell'ordine di pochi fotoni al secondo, e la loro prontezza di risposta. Il funzionamento del fotomoltiplicatore si basa principalmente su due effetti: l'effetto fotoelettrico e l'emissione secondaria (cioè l'elettromoltiplicazione).

Il fotomoltiplicatore è costituito da un tubo in vetro al cui interno è stato praticato il vuoto, in cui è presente un anodo e diversi elettrodi che costituiscono i *dinodi* (figura (10.1)).

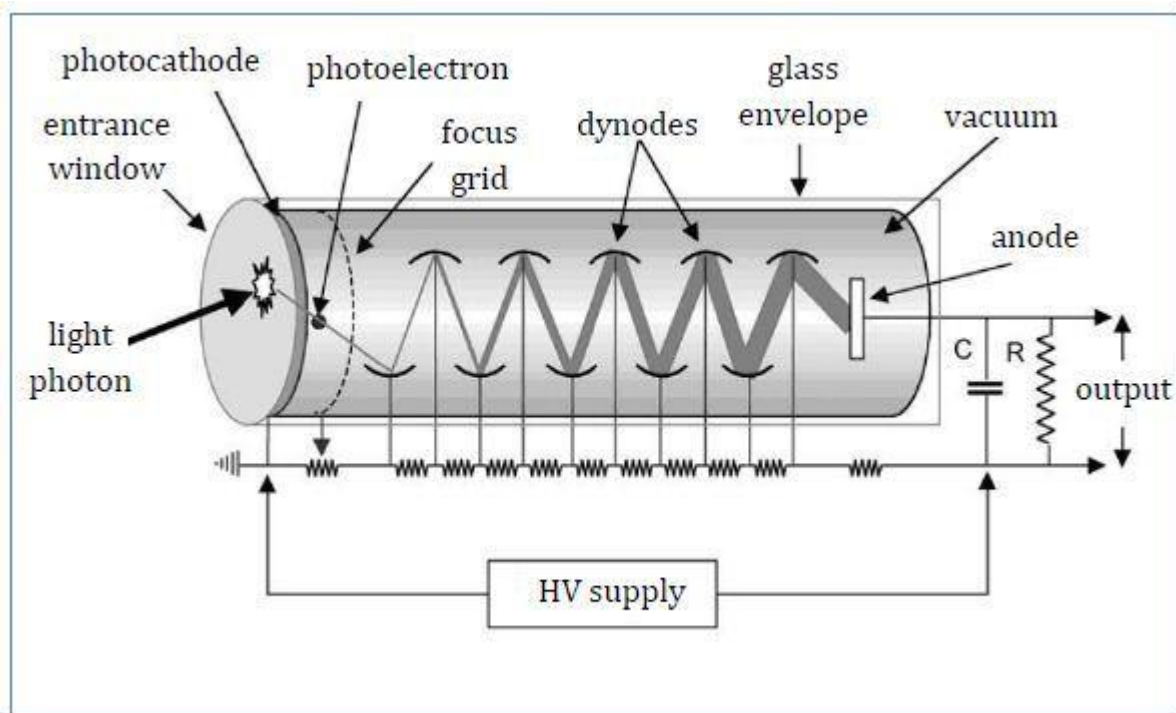


Figura 11-1: Schema di funzionamento di un tubo fotomoltiplicatore.

I fotoni colpiscono attraverso una finestra di ingresso una superficie chiamata *fotocatodo*, ricoperta di uno strato di materiale che favorisce l'effetto fotoelettrico. A causa di questo effetto vengono emessi degli elettroni, chiamati *fotoelettroni* che sono focalizzati da un elettrodo verso lo stadio di moltiplicazione.

Questo stadio è costituito da una serie di elettrodi ciascuno caricato ad un potenziale superiore al precedente. Il primo elettrone emesso per effetto fotoelettrico subisce una accelerazione a causa del campo elettrico e acquisisce energia cinetica. Quando l'elettrone colpisce il primo elettrodo del dinodo provoca l'emissione secondaria di diversi elettroni di minore energia. La struttura del sistema è progettata in modo che ciascun elettrone emesso da un elettrodo venga accelerato e provochi l'emissione di diversi elettroni dall'elettrodo successivo. Si ha così un fenomeno a cascata per cui un singolo fotone che colpisce il tubo provoca il passaggio di moltissimi elettroni. Il guadagno  $G$ , cioè il numero totale di elettroni prodotti per fotone incidente in un fotomoltiplicatore a  $n$  dinodi è:

$$G = f^n \quad (10.1)$$

dove  $f$  è il fattore di emissione di elettroni secondari di ogni dinodo. Al termine della sequenza di elettrodi gli elettroni colpiscono un anodo, ed un rapido impulso elettrico indica il rilevamento del fotone.

I fotomoltiplicatori devono essere schermati magneticamente, in quanto un campo magnetico esterno (anche quello terrestre) può deviare il percorso degli elettroni al suo interno. Solitamente la schermatura è costituita da uno strato di *Mu-metal*, una particolare lega metallica con alto valore di permeabilità magnetica.

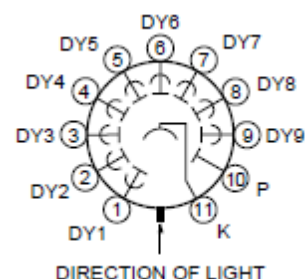
Dato che l'effetto fotoelettrico si basa sulla rimozione di un elettrone dal metallo, questo processo si verifica solo se il fotone incidente ha una energia sufficiente per superare la *funzione lavoro* del metallo, cioè la differenza in energia fra il livello di vuoto e il livello di Fermi del metallo, corrispondente allo stato quantico a più alta energia in cui possono trovarsi gli elettroni a una temperatura data. Di conseguenza i tubi fotomoltiplicatori funzionano solo per fotoni abbastanza energetici, tipicamente dal visibile in su.

Il tubo fotomoltiplicatore è uno strumento adatto anche a mettere in luce la natura quantistica del campo elettromagnetico. Infatti per intensità ridotte, la corrente emessa dal tubo fotomoltiplicatore ha la forma di una sequenza di impulsi della durata di qualche ns, corrispondenti in qualche modo al processo di “rivelazione” di ogni singolo fotone. La misura dell’intensità ottica viene fatta in questo caso tramite una opportuna elettronica che serve a contare quanti impulsi (ciascuno corrispondente alla rilevazione di un singolo fotone) sono generati nell’unità di tempo. Tuttavia non tutti i fotoni incidenti sul fotocatodo producono effettivamente un impulso di corrente. Un parametro importante a questo riguardo è l’*efficienza quantica* del detector, cioè la probabilità che un fotone incidente sul fotocatodo produca un impulso misurabile di corrente. Questo parametro dipende dalla lunghezza d’onda della luce incidente ma in genere non supera qualche decina di percento.

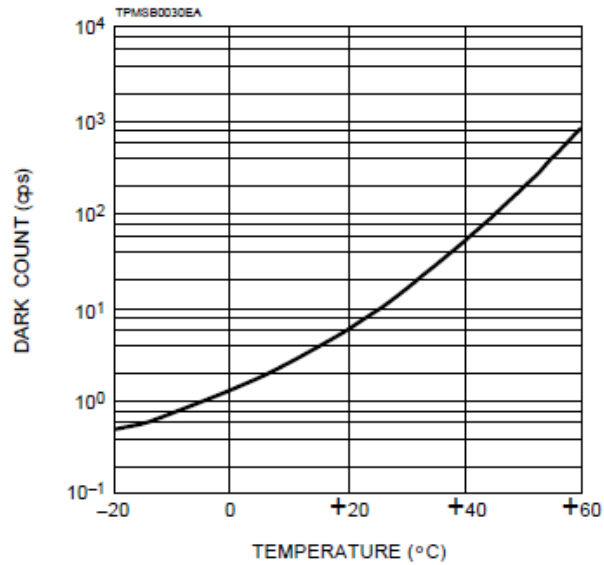
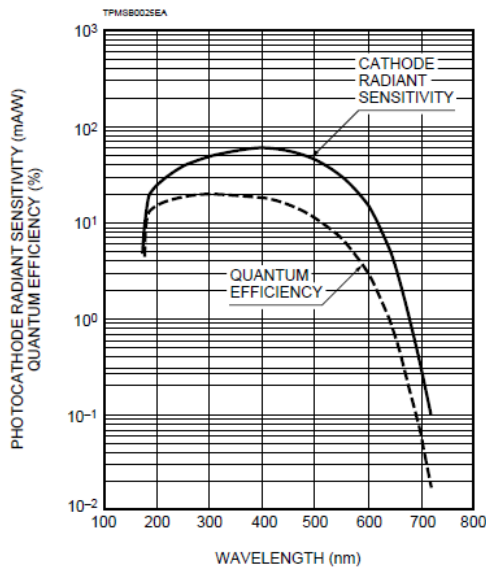
Una delle caratteristiche tipiche di un fotomoltiplicatore è il *rumore*, dovuto al fatto che nella corrente di uscita si rilevano impulsi spuri, cioè non provocati da un processo di fotoemissione. Il rumore ha svariate cause: il carattere probabilistico inerente alla quantizzazione del campo ottico (shot noise), il processo di foto generazione, il processo di amplificazione, il rumore associato all’elettronica e il rumore termico cioè il fatto che qualche elettrone viene prodotto dal fotocatodo non perché estratto da un fotone, ma semplicemente a causa delle fluttuazioni termiche. Di conseguenza ogni tubo fotomoltiplicatore è caratterizzato da un parametro definito *equivalent noise input* (ENI) che rappresenta la potenza ottica necessaria per avere, ad una data lunghezza d’onda, un numero di conteggi pari a quelli di buio.

#### 11.1.1 ESEMPIO

Un fototubo per utilizzo generale è ad esempio l’Hamamatsu R1527 o R1527 P (quest’ultimo adatto specificatamente per impieghi di photon counting). Il suo fotocatodo è attivo in un range di lunghezze d’onda che vanno da 185 a 680 nm con una efficienza di qualche decina di mA/W. Il guadagno totale dipende poi dalla tensione applicata alla catena di amplificazione, ma per valori tipici si assesta intorno a  $10^5$  A/W!



Alcune caratteristiche dell’R1527 sono riportate di seguito.



## 11.2 PROPRIETÀ DEI DETECTOR A SEMICONDUCTORE

I detector a semiconduttore presentano delle proprietà generali.

### 11.2.1 EFFICIENZA QUANTICA

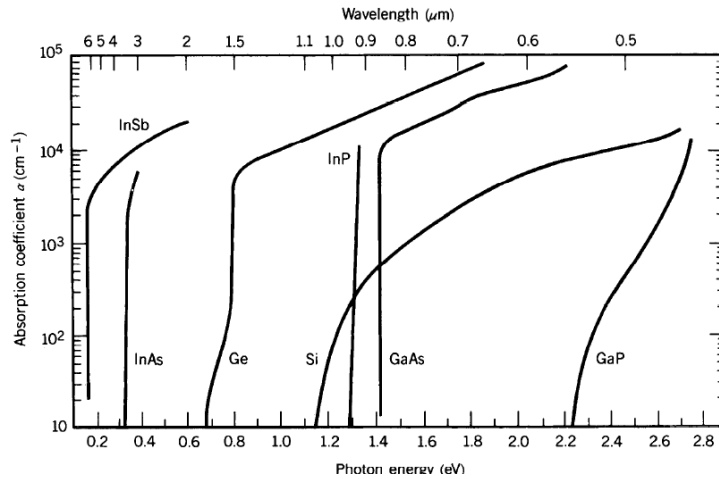
L'efficienza quantica  $\eta$  è un numero compreso tra 0 e 1 corrispondente alla probabilità che un singolo fotone incidente sul dispositivo produca una coppia buca – elettrone in grado di contribuire alla corrente del detector.

Se il flusso di fotoni è elevato, l'efficienza quantica è semplicemente il rapporto tra il flusso di coppie prodotte e dei fotoni incidenti:

$$\eta = \phi_{e-h} / \phi_{ph} = (1 - R)[1 - e^{-\alpha d}] \zeta$$

Dove il primo fattore rappresenta gli effetti della riflessione alla superficie del dispositivo ( $R$  è il coefficiente di riflessione, che può essere opportunamente ridotto impiegando degli opportuni ricoprimenti ottici); il secondo fattore rappresenta la frazione di fotoni assorbiti dal materiale (come si vede, il dispositivo deve essere sufficientemente spesso); il terzo fattore rappresenta la frazione di coppie elettrone-lacuna che NON si ricombina e che può quindi contribuire al processo di trasporto di carica (questo fattore dipende dalla qualità cristallina del substrato).

L'efficienza quantica in generale dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione, principalmente a causa di  $\alpha(\lambda)$ . In particolare, posso rilevare solo fotoni con energia superiore al bandgap del semiconduttore usato, in modo da potere dissociare la coppia elettrone – lacuna.



D'altra parte, fotoni troppo energetici vengono assorbiti in modo troppo efficace e le coppie prodotte sono confinate molto vicino alla superficie del materiale, dove  $\zeta$  è piccolo, a causa della natura intrinsecamente difettosa della regione superficiale del cristallo.

### 11.2.2 RISPOSTA

La risposta del dispositivo definisce il fattore di proporzionalità  $R$  fra la corrente elettrica  $i_p$  che fluisce nel dispositivo e la potenza ottica incidente  $P$ :

$$i_p = e\phi_{e-h} = e\eta\phi_{ph} = e\eta \frac{P}{h\nu} = RP$$

Dato che la frequenza e la lunghezza d'onda sono collegate, se esiste una certa regione in cui l'efficienza quantica varia debolmente con la lunghezza d'onda, si può scrivere:

$$R = \eta \frac{e}{h\nu} = \eta \frac{\lambda_0}{1.24}$$

Dove  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda dominante espressa in micron. Questa ultima equazione esprime il fatto che, trascurando la variazione di  $\eta$ , aumentare la lunghezza d'onda significa che, a parità di potenza ottica, il flusso di fotoni è maggiore, essendo l'energia del fotone minore.

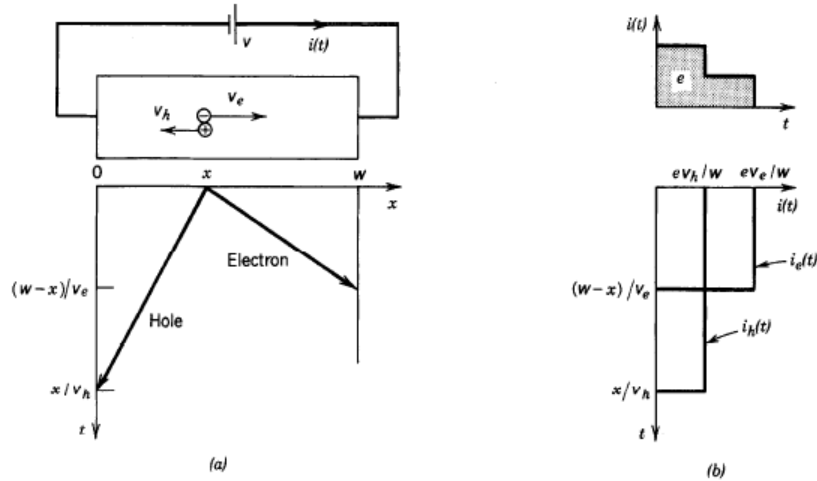
$R$  è quindi dell'ordine di 1 A/W per  $\lambda_0 = 1.24 \mu\text{m}$ , assumendo una efficienza quantica pari a 1.

### 11.2.3 PRONTEZZA

Il tempo necessario all'estrazione della carica è finito e non istantaneo. La corrente totale è data dalla somma del contributo della lacune più quello dell'elettrone, tenendo conto anche delle rispettive velocità di estrazione. Inoltre i detector a semiconduttore possiedono sempre una capacità in parallelo che implica una certa costante di tempo RC.

Vediamo il primo meccanismo. Consideriamo una coppia elettrone-lacuna generata in una posizione  $x$  all'interno di un materiale semiconduttore di larghezza  $w$  al quale è applicato un voltaggio  $V$ . Consideriamo il moto lungo la direzione  $x$ .





Un portatore di carica  $q$  ( $= -e$  per un elettrone,  $+e$  per una lacuna) che si muove con velocità  $v(t)$  nella direzione  $x$  produce una corrente nel circuito esterno pari a:

$$i(t) = -q \frac{v(t)}{w}$$

Prova: il potenziale applicato corrisponde a un campo elettrico  $E = V/w$ . Il lavoro fatto dal campo per muovere la carica di  $dx$  è  $-qEdx = -q \frac{V}{w} dx$ .

Questo lavoro deve essere uguale al lavoro elettrico fornito dal circuito esterno, dunque deve essere che:  $i(t)Vdt = -q \frac{V}{w} dx$  da cui la formula cercata, essendo  $v(t) = dx/dt$ .

Supponiamo che le velocità degli elettroni e delle lacune siano costanti, ma diverse tra loro. Avremo allora due correnti:

$$i_e(t) = -(-e) \frac{v_e}{w}$$

$$i_h(t) = -(e) \frac{(-v_h)}{w}$$

Il tempo in cui durano le due correnti corrisponde al tempo necessario alle due particelle per raggiungere il bordo del materiale:  $\Delta t_e = (w-x)/v_e$  e  $\Delta t_h = w/v_h$  per elettroni e buche rispettivamente.

Si potrebbe pensare che la carica generata in un circuito esterno quando un fotone viene convertito con successo in una coppia elettrone – lacuna sia  $2e$ . In realtà la carica prodotta è esattamente  $e$ : infatti, integrando la somma delle correnti date dalla lacuna e dall'elettrone nel tempo per cui queste durano e sostituendo le espressioni viste sopra:

$$i_e \Delta t_e + i_h \Delta t_h = e.$$

Notiamo che il portatore più lento (di solito le lacune) è quello che determina la durata totale del transitorio di corrente. Supponendo che il dispositivo di larghezza  $w$  sia illuminato uniformemente, avremo che l'impulso di corrente durerà almeno  $w/v_h$  perché anche le buche create nel punto più lontano dal bordo del campione (cioè dal bordo opposto).

Come detto, in ogni dispositivo è sempre presente una capacità  $C$  in parallelo e una resistenza interna che formano un filtro con tempo caratteristico  $RC$ . Questo ha l'effetto di rallentare ulteriormente la risposta del dispositivo, così che a un segnale luminoso di durata molto breve corrisponde un segnale elettrico con una certa FWHM. La risposta del dispositivo si può modellizzare convolvendo il segnale ottico in ingresso con una certa funzione (funzione di risposta impulsiva) caratterizzata da una certa FWHM. La larghezza di questa funzione dipende dai processi microscopici visti

prima e dalla costante RC del dispositivo e della relativa elettronica. La rapidità di un dispositivo a semiconduttore richiede quindi di tenere conto di tutti questi parametri.

#### 11.2.4 LA GIUNZIONE P-N

Un fotodiodo è un dispositivo per la misura dell'intensità luminosa basato sulla fotogenerazione *interna* di cariche. Lo schema essenziale di un fotodiodo è rappresentato da una interfaccia fra due cristalli semiconduttori drogati in modo da essere ricchi di impurezze pronte a cedere cariche positive (buche) e negative (elettroni) rispettivamente. Quando i due cristalli vengono posti in contatto intimo tramite opportuni processi produttivi, le cariche mobili abbandonano le rispettive trappole (fisse nel reticolo cristallino) per diffondere nel materiale adiacente "spinte" dal gradiente di concentrazione. Questo processo fornisce una corrente diretta da p ad n (positiva), detta corrente di diffusione  $i_{diff}$ .

A questo punto le trappole rimaste "nude" formano due strati di carica non compensata affacciati, i quali creano un forte campo elettrico interno localizzato all'interfaccia. Questo campo elettrico contrasta la corrente di diffusione creando una corrente di segno opposto (diretta da n a p) e proporzionale al campo di carica spaziale detta corrente di drift  $i_{drift}$ . I portatori che contribuiscono alla corrente di drift sono quelli che si generano per separazione termica di coppie elettrone-lacuna dentro la zona di svuotamento. All'equilibrio si ha  $i_{diff} = i_{drift}$ .

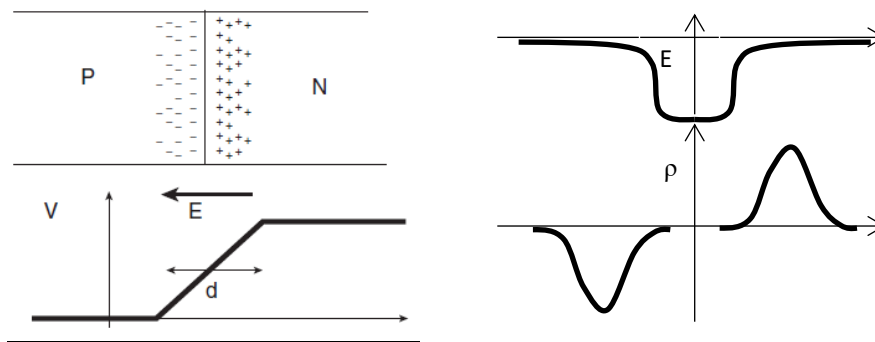


Figura 11-2: (Sinistra) Schema della giunzione p-n e del potenziale elettrico presente all'interfaccia. (Destra) profilo del campo elettrico interno e della densità di carica.

La regione così creata, di spessore, diciamo,  $d$  è la parte attiva del detector. Ai capi di questa giunzione si misura in generale una densità di corrente  $i$ , prodotta da vari contributi. Consideriamo una giunzione p-n inversamente polarizzata, uniformemente illuminata come in Figura 11-3. I fotoni sono assorbiti ovunque con coefficiente di assorbimento  $\alpha$ . In qualunque punto un fotone venga assorbito c'è una certa probabilità di creare una coppia elettrone-lacuna, tuttavia solo le coppie che si creano in presenza di campo elettrico vengono separate e contribuiscono al trasporto. Dato che il campo di carica spaziale è presente solo nella zona di svuotamento, questa è la parte sensibile del detector.

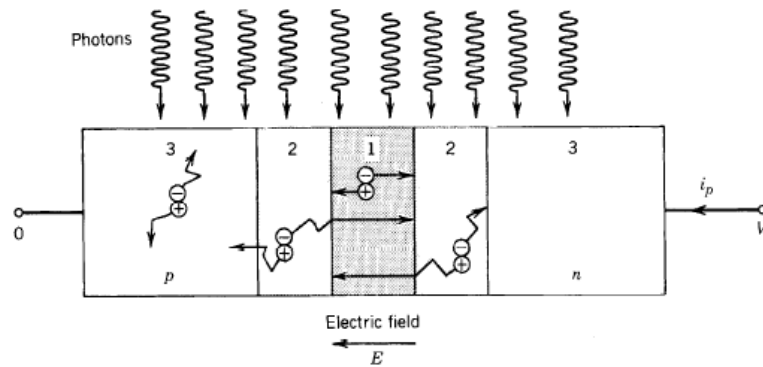


Figura 11-3: Schema delle diverse regioni in cui si può suddividere una giunzione p-n sotto illuminazione.

Possiamo distinguere tre regioni. (regione 1): Gli elettroni e le lacune vengono rapidamente separati e guidati in modo da creare una corrente diretta da  $n$  verso  $p$ , cioè concorde con il bias applicato. Ogni coppia crea un impulso di corrente pari complessivamente a una carica  $e$ . (regione 2): Le coppie che si formano in prossimità del campo elettrico (ma non all'interno di esso), hanno comunque una possibilità di avere una delle due cariche diffondere in questa regione e venire trasferite all'altro lato della giunzione. La carica fornita al circuito esterno è ancora  $e$ . (regione 3) le coppie che si formano lontano dal campo si annichilano dopo un certo tempo e non contribuiscono alla corrente. I fotodiodi reali sono costruiti in modo da allargare lo spessore  $d$  della giunzione in modo da favorire al massimo il processo di foto eccitazione (fotodiodi p-i-n, vedere figura (9.3)).

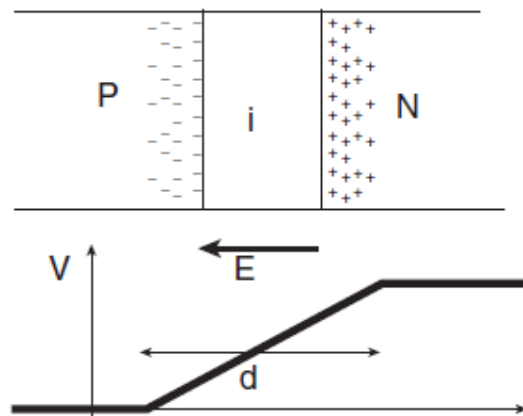


Figura 11-4: Schema di una giunzione p-i-n.

Ricapitolando abbiamo quindi i seguenti contributi:

#### 11.2.4.1 CORRENTE DI DIFFUSIONE

Si tratta di un flusso di cariche determinato dal gradiente di concentrazione di portatori. A una data temperatura  $T$ , qualsiasi sistema tende a riportarsi all'equilibrio termodinamico azzerando questi gradienti, il che comporta un trasporto di carica corrispondente appunto alla corrente di diffusione  $i_{diff}$ . Si può dimostrare che l'intensità della corrente di diffusione dipende dall'altezza della barriera energetica che le cariche devono superare per muoversi da una parte all'altra secondo una legge di tipo Arrhenius  $i_{diff} = Ae^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$ , ove  $k_B$  è la costante di Boltzmann.

(9.3)

#### 11.2.4.2 CORRENTE DI DRIFT

In assenza di luce, a temperatura fissata, esiste una corrente che contrasta la corrente di diffusione, prodotta dal campo di carica spaziale e dalle cariche che si formano per dissociazione termica di coppie elettrone – lacuna nella regione di svuotamento. A circuito aperto, in assenza di illuminazione, senza potenziali applicati e ad una temperatura  $T$  fissata, la corrente totale che circola nella giunzione deve essere nulla all'equilibrio. Questo ci permette di dire che in queste condizioni, diciamo, “di riferimento” la corrente di diffusione è uguale e opposta a quella di drift, in modo da avere corrente totale nulla. In condizioni standard, se  $\Delta V$  è la differenza di potenziale prodotta dal campo interno,

$$i_{diff}^0 = i_d = A e^{-\frac{e\Delta V}{k_B T}}.$$

#### 11.2.4.3 CORRENTE FOTOGENERATA

Se un'onda ottica di frequenza opportuna è in grado di attraversare la regione di svuotamento, può creare una coppia elettrone – buca tramite eccitazione intrabanda. Il forte campo elettrico della giunzione separa le due cariche appena create che si ritrovano quindi ai due capi della giunzione. Per ricombinarsi le due cariche non possono che viaggiare nel circuito esterno, producendo una densità di corrente  $i$  proporzionale al numero di fotoni incidenti sulla giunzione per unità di tempo, ossia all'intensità luminosa:

$$i_p = RI \quad (9.2)$$

Questa corrente è diretta da n verso p, quindi ha segno negativo.

#### 11.2.4.4 GIUNZIONI P-I-N POLARIZZATE

Le cose cambiano in modo interessante quando alla giunzione viene applicata una differenza di potenziale  $V$  che “spinge” le cariche in un senso o nell'altro. Come visto prima, la densità di corrente totale ai capi della giunzione è data dalla somma dei tre contributi

$$i = i_{diff} - i_d - RP \quad (9.4)$$

Vediamo prima il caso in cui la differenza di potenziale è *diretta* ( $V > 0$ ) cioè crea un campo elettrico *opposto* (sic) a quello della giunzione, vedere figura (9.4)):

In questo caso la barriera di potenziale è ridotta a  $\Delta V - V$  e di conseguenza la corrente di diffusione aumenta secondo la legge  $i_{diff} = A e^{-\frac{e(\Delta V - V)}{k_B T}} = i_{diff}^0 e^{\frac{eV}{k_B T}} = i_d e^{\frac{eV}{k_B T}}$ . La corrente totale cresce quindi in modo esponenziale al crescere di  $V$ . Al contrario se la polarizzazione è *inversa* ( $V < 0$ ), cioè con campo elettrico applicato *concorde* al campo interno, la barriera energetica aumenta di  $eV$  e la corrente di diffusione diminuisce.

In entrambi i casi, tenendo opportunamente conto del segno di  $V$ , la corrente ai capi della giunzione si può scrivere come (*equazione di Shockley*):

$$i(I, V) = i_d \left( e^{\frac{eV}{k_B T}} - 1 \right) - RP. \quad (9.5)$$

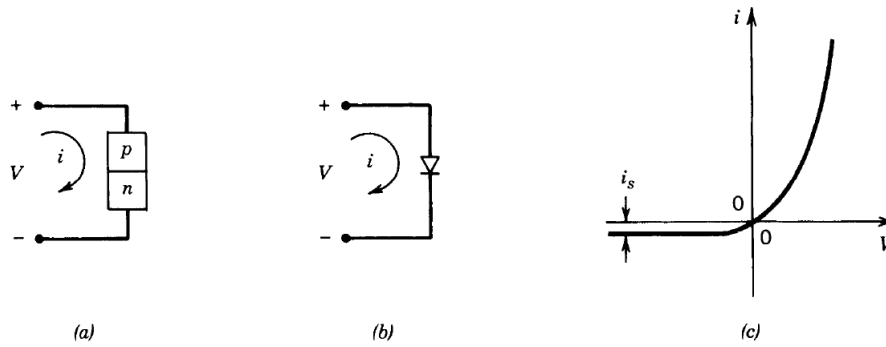


Figura 11-5: Schema di una giunzione P- i- n polarizzata nel buio: per polarizzazione diretta la corrente dipende in modo esponenziale dal potenziale applicato. Per polarizzazione inversa, la corrente rimane indipendente da V e costante a un valore  $i_s$ .

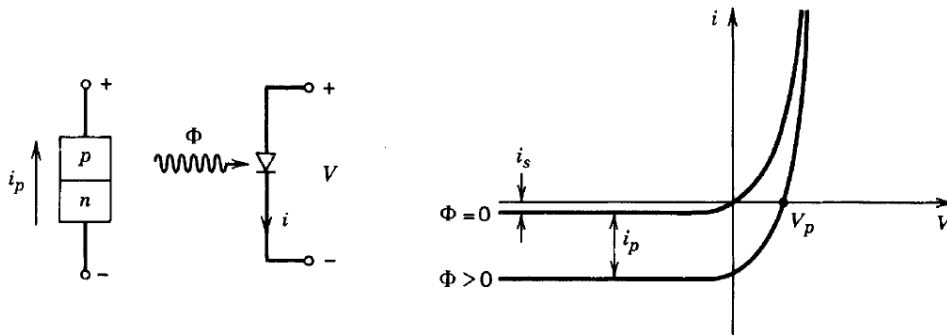


Figura 11-6: Curva di risposta di un fotodiodo: in presenza di illuminazione  $\Phi$  si innesca una corrente  $i_p$  di segno negativo.

La risposta della giunzione p-n a un potenziale variabile è determinata risolvendo le equazioni differenziali che descrivono i processi di diffusione e drift per elettroni e lacune sotto l'influenza dei campi elettrici presenti. Si può costruire un circuito equivalente costituito da due capacità in parallelo con un diodo ideale. La prima è la capacità di giunzione che descrive il tempo necessario per modificare il profilo di carica spaziale fissa presente alla giunzione in risposta alla variazione di potenziale. Si ha che la larghezza della regione di svuotamento aumenta se il diodo è polarizzato inversamente e viceversa. Dato che la capacità della giunzione è inversamente proporzionale allo spessore della regione di svuotamento, un diodo polarizzato inversamente ha un tempo di risposta più rapido di uno polarizzato direttamente. Il tempo di risposta legato alla diffusione dei portatori maggioritari è invece descritto dalla capacità di diffusione, definita dal tempo di vita dei portatori e dalla corrente di operazione.

Per quanto riguarda l'utilizzo del fotodiodo come strumento di misura, sono possibili varie soluzioni. Le prime tre prevedono l'utilizzo del cosiddetto *regime fotovoltaico*. In questa condizione, il fotodiodo viene polarizzato direttamente. Se collegato ad una resistenza  $R_L$  abbiamo lo schema mostrato in figura (9.5 A). Dalla legge di Ohm e dall'equazione di Shockley si trova la relazione trascendente che lega il potenziale misurato ai capi di  $R_L$  all'intensità luminosa  $I$ :

$$V/R_L = i_d \left( e^{\frac{eV}{k_B T}} - 1 \right) - PR. \quad (9.6)$$

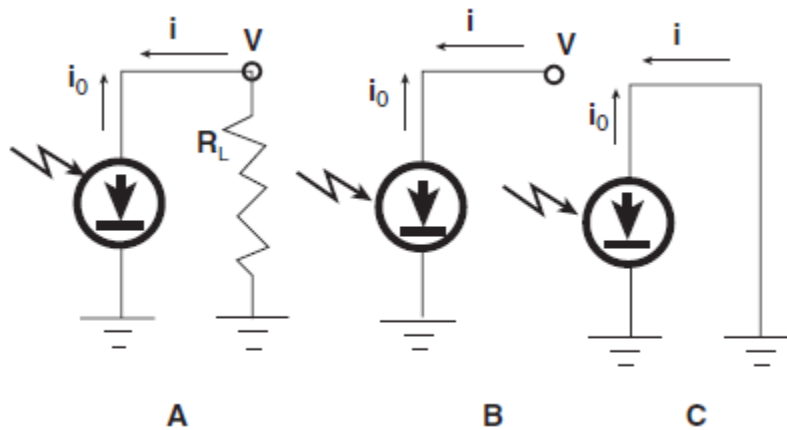


Figura 11-7: Possibili configurazioni di utilizzo del fotodiiodo in regime fotovoltaiico.

Per capire cosa succede in pratica possiamo ricorrere a una soluzione grafica del problema (figura 9.6). La curva corrispondente all'equazione di Shockley è traslata in basso di una quantità proporzionale all'intensità luminosa  $I$  e interseca la retta  $i = V/R_L$  in un certo punto. Come si vede, per alte intensità luminose il sistema è fortemente non lineare, poiché all'aumentare di  $I$  il voltaggio letto ai capi di  $R_L$  tende a saturare.

Utilizzando la configurazione (B) della figura (10.5) abbiamo un piccolo vantaggio. In questo caso si lavora in regime fotovoltaiico *a circuito aperto*. La corrente che fluisce nella maglia è zero e quindi il primo membro dell'equazione 10.5 si annulla. Si trova quindi la relazione esplicita fra  $V$  e  $I$ :

$$V = \frac{k_B T}{e} \ln \left( \frac{KI}{i_d} + 1 \right) \quad (10.7)$$

Che è ancora non lineare e dipendente dalla temperatura. Per lavorare in regime fotovoltaiico (anche se a questo punto il termine diventa improprio, come sarà chiaro fra un attimo) la cosa migliore è spesso quella di utilizzare una configurazione a *circuito chiuso* e misurare direttamente la corrente prodotta dal fotodiiodo (figura (10.5) C). In questo modo non si applica nessun potenziale ai capi della giunzione e, sostituendo  $V = 0$  nell'equazione di Shockley, si trova che la corrente è direttamente proporzionale all'intensità luminosa:

$i = -KI$ . Questo sistema è quindi particolarmente efficace, ma presenta tuttavia lo svantaggio che richiede di lavorare con un segnale in corrente, contrariamente a quanto si è soliti fare nei circuiti elettronici. Inoltre è inadatta alla misura di segnali rapidamente variabili, poiché la giunzione p- i- n si comporta come una capacità, rallentando la risposta del sistema.

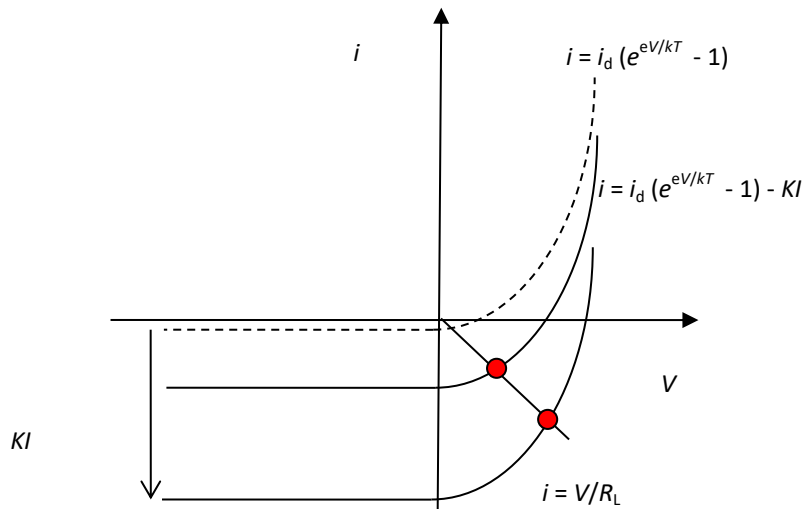


Figura 11-8: Soluzione grafica dell'equazione (10.6). I punti rossi rappresentano la soluzione per differenti condizioni di illuminazione.

Un modo alternativo per operare il fotodiode è di lavorare in *regime fotoconduttivo*. Questo sistema consiste nell'applicare intenzionalmente un potenziale esterno  $V_B$  alla giunzione in modo da polarizzarla inversamente. Da un punto di vista fisico questo ha l'effetto di aumentare l'ampiezza della regione di svuotamento e di rendere il sistema più reattivo diminuendone i tempi di risposta in quanto la capacità della giunzione viene ridotta. D'altra parte fa sì che la corrente di drift sia aumentata di un certo fattore  $N$  corrispondente a un rumore elettronico iniettato nel circuito. La lettura del segnale in questa configurazione viene effettuata attraverso una resistenza di carico  $R_L$ , figura (10.7)

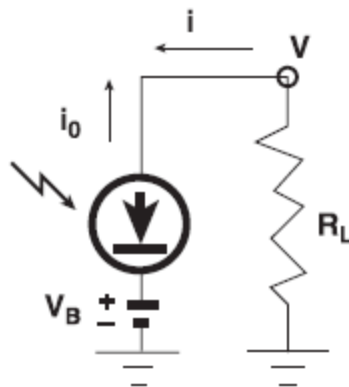


Figura 11-9: Operazione del fotodiode in modalità fotoconduttiva. Generalmente  $V_B \gg V$ .

Lavorando in queste condizioni, l'equazione di Shockley va riscritta come:

$$V/R_L = i_d \left( e^{\frac{e(V-V_B)}{k_B T}} - N \right) - KI \quad (10.8)$$

Si vede allora che se  $V_B \gg V$ , il termine esponenziale diventa trascurabile e si ha una relazione lineare fra  $V$  e  $I$ . Il termine  $Ni_d$  che rimane rappresenta il rumore elettronico generato dalla giunzione quando viene polarizzata inversamente. Chiaramente, quando  $I \gg 0$ , l'approssimazione non è più valida e il sistema torna non lineare (vedi figura (9.8)). Bisogna quindi dimensionare il sistema scegliendo  $R_L$  e  $V_B$  in modo opportuno. I vantaggi di questo tipo di configurazione sono la sua prontezza di risposta e il fatto che fornisce un segnale in tensione proporzionale all'intensità luminosa. Gli svantaggi sono che è lineare solo entro un certo intervallo di intensità luminose e che è generalmente più rumorosa di una configurazione in regime fotovoltaico.

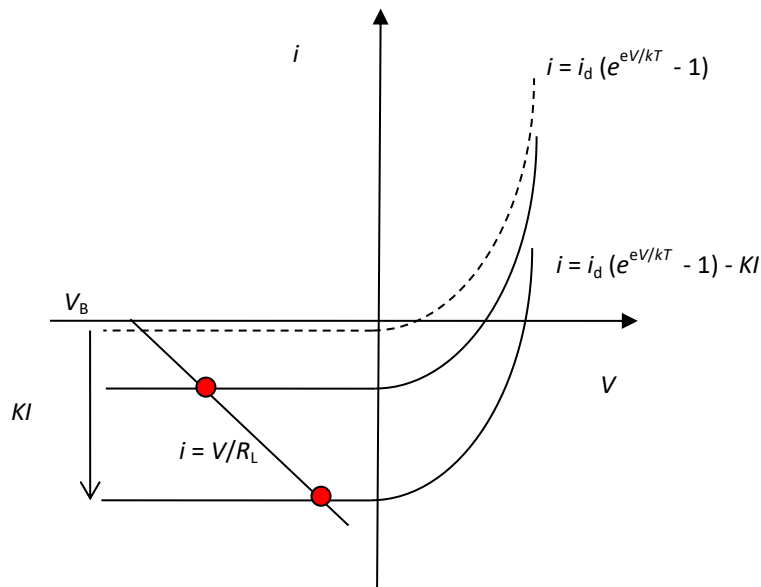


Figura 11-10: Soluzione grafica dell'eq. (10.8) per un fotodiodo operato in regime fotoconduttivo. Fino a quando le intersezioni tra  $i = V/R_L$  e  $i = i_d (e^{eV/kT} - 1) - KI$  rimangono nel terzo quadrante, il sistema è lineare. Per  $I$  elevate si ha saturazione.

#### 11.2.4.5 AMPLIFICATORE A TRANSIMPEDENZA

Un modo per ovviare alle limitazioni delle configurazioni appena discusse è di utilizzare un circuito attivo per trattare il segnale proveniente dal fotodiodo. Il fotodiodo viene operato in regime fotovoltaico a circuito chiuso e la corrente è trasformata in una tensione proporzionale utilizzando un amplificatore operazionale retro azionato (figura 10.9).

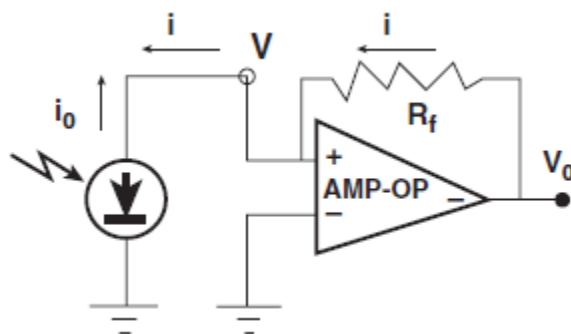


Figura 11-11: Fotodiodo operato tramite un amplificatore operazionale in regime fotovoltaico cortocircuitato.



Poiché un amplificatore (ideale) ha guadagno infinito, quando si stabilisce un feedback come in figura (10.9) l'ingresso non invertente dell'amplificatore è vincolato a massa (massa virtuale). La corrente che fluisce nel ramo di feedback è quindi semplicemente  $i = V_0/R_f$ . D'altra parte, utilizzando il modello di amplificatore operazionale ideale, si ha che l'impedenza di ingresso è infinita. Di conseguenza la corrente che fluisce nell'operazionale è zero. Tale corrente è data dalla somma della corrente  $i$  proveniente dal fotodiodo e da quella che arriva dal ramo di retroazione dell'amplificatore operazionale, che deve pertanto essere uguale e opposta alla corrente generata dal fotodiodo. Ricordando che in regime fotovoltaico cortocircuitato la corrente è proporzionale a  $I$  e mettendo tutto insieme, si ha:

$$V_0 = iR_f = -IKR_f \quad (9.9)$$

Per cui la tensione misurata in uscita è proporzionale all'intensità luminosa in ingresso. I vantaggi di questo tipo di soluzione sono molteplici: il fotodiodo è operato con un carico virtualmente nullo e quindi per quanto già visto è intrinsecamente lineare (almeno fino a quando l'amplificatore operazionale non satura). Il fattore di conversione fra l'intensità luminosa e la tensione prodotta può essere deciso scegliendo opportunamente la resistenza  $R_f$ , il che rende questo tipo di approccio il più indicato per la misura di segnali luminosi deboli. Un altro vantaggio è che il rumore prodotto dal fotodiodo è molto basso, specialmente se viene operato a basse temperature in modo da eliminare il contributo di drift. Bisogna però fare attenzione al rumore elettronico generato dall'amplificatore. Infine l'impedenza di uscita dell'amplificatore operazionale costituisce un altro vantaggio di questo dispositivo.

## 12 ELEMENTI DI INTERFEROMETRIA

### 12.1 TEORIA

Consideriamo due onde monocromatiche con la stessa frequenza, aventi ampiezza complessa  $U_1(\mathbf{r})$  e  $U_2(\mathbf{r})$ . Le intensità delle due onde, prese separatamente sono  $I_{1,2} = |U_{1,2}(\mathbf{r})|^2$ . Se ora considero il campo ottico *totale*, per il principio di sovrapposizione, questo sarà dato da:

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) \quad (11.1)$$

e l'intensità sarà:

$$I = |U|^2 = |U_1 + U_2|^2 = |U_1|^2 + |U_2|^2 + U_1^* U_2 + U_1 U_2^* \quad (11.2)$$

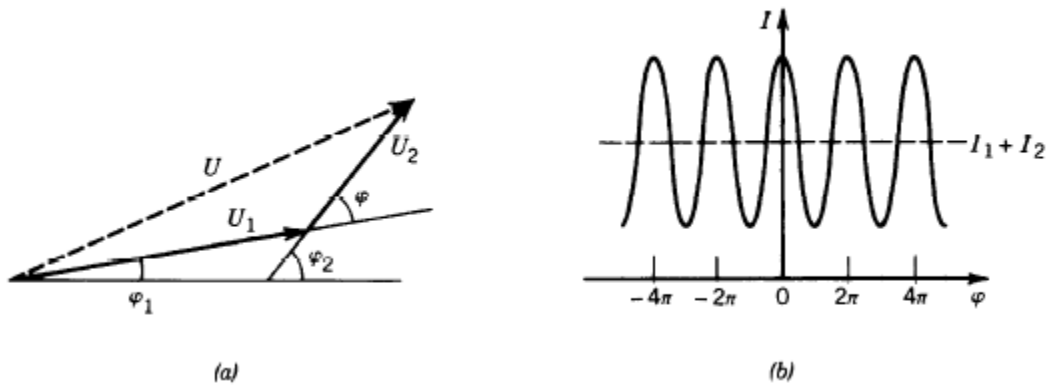
Dove si intende implicitamente che le varie  $U$  dipendono da  $\mathbf{r}$ . Utilizzando la notazione complessa in termini di fasori,  $U_i = \sqrt{I_i} \exp(i\varphi_i)$ , si ottiene:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\varphi. \quad (11.3)$$

con  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Questa è la relazione fondamentale dell'interferometria, che segue immediatamente dalla rappresentazione complessa mostrata in figura (11.1) (a), la quale mostra come il modulo del fasore  $U$  dipenda anche dalla differenza di fase  $\varphi$  e non solamente dal modulo dei fasori  $U_1$  e  $U_2$ . L'intensità del campo ottico totale *non* è semplicemente la somma delle intensità, figura (11.1) (b); il termine addizionale dovuto all'interferenza delle onde nell'equazione di base modula l'intensità totale. Questo termine può essere positivo o negativo, a seconda che l'interferenza sia costruttiva o distruttiva. Per fissare le idee, consideriamo il caso in cui  $I_1 = I_2 = I_0$ . In questo caso  $I = 2I_0(1 + \cos\varphi) = 4I_0 \cos^2(\varphi/2)$  per cui per una differenza di fase  $\varphi = 0$ ,  $I = 4I_0$  (l'intensità è pari a 4 volte l'intensità di una delle due onde interferenti). Per  $\varphi = \pi$ , il termine di interferenza è negativo, le due onde si cancellano l'una con

l'altra e  $I = 0$ . Infine per  $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$  il termine di interferenza svanisce e l'intensità è pari alla somma delle intensità delle due onde,  $I = 2I_0$ .



12-1: (a) Diagramma dei fasori per la sovrapposizione di due onde di intensità  $I_1$  e  $I_2$  e differenza di fase  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . (b) Dipendenza dell'intensità totale dalla differenza di fase  $\varphi$ .

L'idea alla base delle tecniche interferometriche è quindi quella di risalire alle variazioni della differenza di fase dei due fasci tramite una misura di intensità. La differenza di fase è data in generale da:  $\varphi = 2\pi n_2 z_2 / \lambda_0 - 2\pi n_1 z_1 / \lambda_0$  dove si è considerato che le due onde piane possono propagarsi lungo cammini diversi e/o attraverso mezzi con indice di rifrazione diversi. Il prodotto  $p_i = n_i z_i$  è detto *cammino ottico* e come si vede l'interferenza risulta dipendere proprio dalla differenza nei cammini ottici compiuti dalle due onde costituenti. Un *interferometro* è un dispositivo ottico che divide un'onda in due componenti utilizzando un divisore di fascio, gli fa compiere due cammini ottici differenti, le ricombina e infine misura l'intensità del campo risultante. A seconda della particolare configurazione sperimentale, un interferometro può essere usato o per misurare piccole variazioni di distanza, di indice di rifrazione o di lunghezza d'onda. Per esempio, se  $z_1 \approx z_2 = d$  e  $d/\lambda_0 = 10^4$ , una variazione di indice di rifrazione di  $\Delta n = 5 \times 10^{-4}$  fra i due rami dell'interferometro corrisponde a una variazione della differenza di fase di  $\Delta\varphi = \pi$  e l'intensità può passare ad es. da un massimo ad un minimo.

Condizione necessaria per osservare l'interferenza è che la luce utilizzata nei due fasci mantenga la propria relazione di fase stabile per tempi sufficientemente lunghe per effettuare la misura. Se la differenza di fase varia in modo casuale (come in un esperimento con luce ordinaria), il termine di interferenza oscilla con fase casuale in modo rapidissimo e si media a zero, sicché l'intensità totale diventa semplicemente la somma delle intensità dei due fasci, come se questi non interferissero. La stabilità di un dato tipo di radiazione rispetto a variazioni casuali di fase come quelli appena descritti definisce una proprietà del campo ottico chiamata *coerenza*. Il caso di onda monocromatica è un caso estremo in quanto questo tipo di onda è infinitamente coerente. In realtà tutte le sorgenti luminose esistenti in natura sono solo parzialmente coerenti, e quindi possono dare luogo a interferenza o meno a seconda di come l'esperimento viene effettuato. Una misura conveniente dell'evidenza del fenomeno è data dal contrasto delle frange di interferenza, che viene descritta dal parametro:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (11.4)$$

detto *visibilità* delle frange. Utilizzando l'equazione di base dell'interferenza si trova:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \quad (11.5)$$

Per semplicità, in questo corso supporremo che la sorgente sia perfettamente coerente.

Da un altro punto di vista, gli interferometri sono strumenti piuttosto esigenti dal punto di vista sperimentale poiché, a causa della loro elevata sensibilità, per effettuare una misura pulita è sempre necessario garantire un ottimo isolamento rispetto a perturbazioni esterne, specialmente per quanto riguarda il rumore meccanico (vibrazioni, dilatazioni termiche ecc.) e ottico (stabilità della lunghezza d'onda e dell'intensità della sorgente, direzione dei fasci ecc.).

## 12.2 INTERFEROMETRI

Esistono numerosi tipi di interferometri. Una prima classificazione può essere compiuta sulla base del metodo utilizzato per dividere il fascio in modo da creare le due componenti da fare interferire.

### 12.2.1 DIVISIONE DI FRONTE D'ONDA

La prima classe di tecniche va sotto il nome di divisione di fronte d'onda e consiste nell'usare due porzioni dello stesso fronte d'onda.

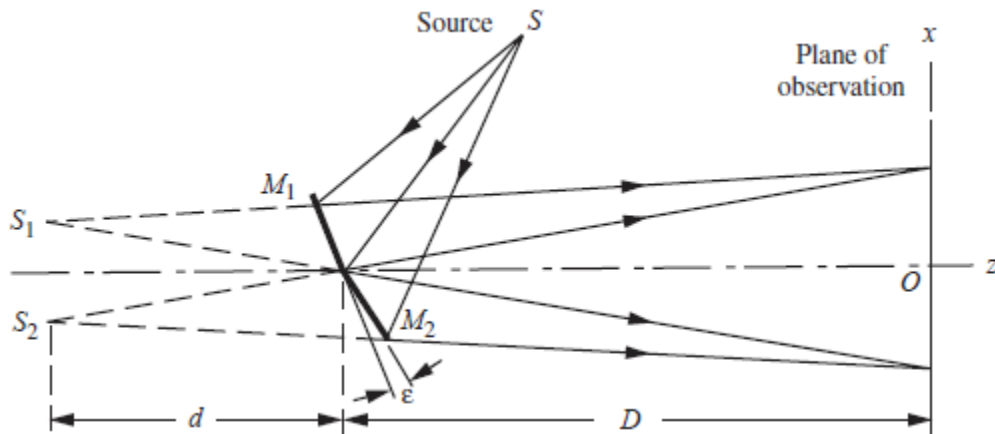


Figura 12-2: Sistema ottico usato per produrre interferenza tramite divisione di fronte d'onda (specchio di Fresnel).

Un semplice sistema ottico a questo scopo è illustrato in figura (11.2) e va sotto il nome di specchio di Fresnel. Si tratta in effetti di due specchi accostati e formanti un piccolo angolo  $\epsilon$  fra di loro. Lo specchio di Fresnel viene usato per riflettere la luce proveniente da una sorgente puntiforme. Nella regione in cui le due porzioni di fascio si sovrappongono si osservano delle modulazioni di intensità (frange di interferenza). Usando la semplice costruzione geometrica mostrata in figura, si vede che è possibile ripensare il problema come l'interferenza fra due sorgenti virtuali puntiformi  $S_1$  e  $S_2$  collocate alla stessa distanza  $d$  dallo specchio a cui si trova la sorgente  $S$ . La distanza fra le sorgenti virtuali è:

$$S_1 S_2 = 2d\epsilon \quad (11.6)$$

Sia ora  $x$  la coordinata sullo schermo di osservazione orientata nel piano in cui viaggiano i due raggi deflessi dallo specchio. Se i raggi viaggiano nel vuoto (o nell'aria)  $n = 1$  e la differenza di cammino ottico fra le due sorgenti virtuali per arrivare nello stesso punto dello schermo alla coordinata  $x$  è in prima approssimazione:

$$p = \frac{2d\epsilon x}{d+D} \quad (11.7)$$

Dato che i massimi e i minimi nella figura di interferenza corrispondono a una variazione nel cammino ottico pari a una lunghezza d'onda, le frange sono approssimate da una serie di righe dritte perpendicolari al piano in cui si propagano le due onde. La loro separazione sul piano di osservazione è data da:

$$\Delta x = \frac{\lambda(D+d)}{2d\epsilon} \quad (11.8)$$

Altri tipi di interferometri basati su questo tipo di principio sono l'interferometro di Young, lo specchio di Lloyd e l'interferometro di Rayleigh.

### 12.2.2 DIVISIONE D'AMPIEZZA

L'altro metodo tramite il quale due fasci possono essere ottenuti da una stessa sorgente è la divisione dell'ampiezza dell'onda sulla stessa sezione del fronte d'onda. Un modo è utilizzare una superficie parzialmente riflettente.

#### 12.2.2.1 LAMINA PIANA – PARALLELA

Un semplice interferometro a divisione d'ampiezza è una banale lamina trasparente a facce piane e parallele, come mostrato in figura .

Nel caso la sorgente sia monocromatica e puntiforme (figura 11.3), qualsiasi piano nello stesso semispazio contenente la sorgente può mostrare una figura di interferenza. Da considerazioni di simmetria si nota come la figura di diffrazione sia costituita da cerchi aventi centro nel punto in cui il piano di osservazione interseca la retta  $SO$  normale alla lamina e passante per la sorgente.

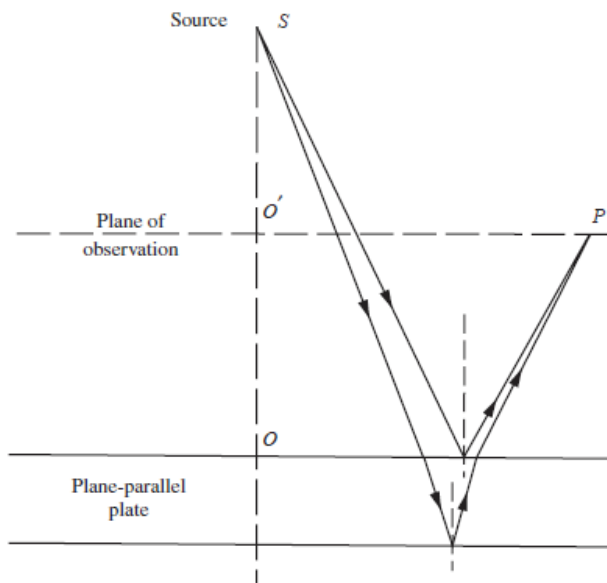


Figura 12-3

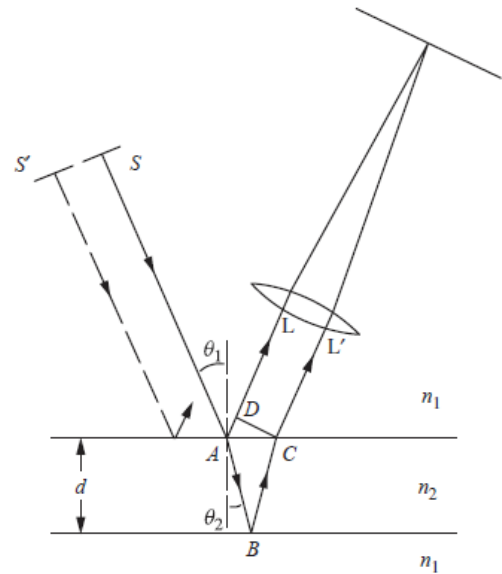


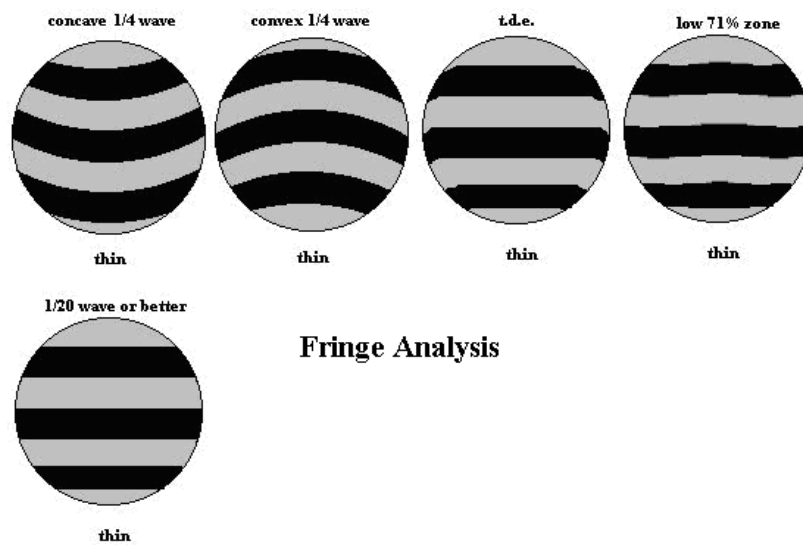
Figura 12-4

Nel caso di sorgente estesa (figura 11.4) la figura di interferenza viene proiettata all'infinito e per osservarla è necessario l'utilizzo di una lente. Facendo alcuni semplici calcoli si trova che la differenza di cammino ottico è:

$$\Delta p = n_2(AB + BC) - n_1AD = 2dn_2\cos\theta_2 \quad (11.9)$$

Tuttavia si deve tener conto anche di uno sfasamento di  $\pi$  introdotto dalla riflessione a una delle due superficie, per cui la differenza di cammino ottico effettiva è:  $\Delta p = 2dn_2\cos\theta_2 \pm \lambda/2$ . Una frangia chiara corrisponde alla condizione  $\Delta p = m\lambda$ . L'ultima equazione scritta mostra che per un  $d$  fissato la differenza di fase fra le onde dipende solo dall'angolo di incidenza e pertanto questo tipo di configurazione si applica anche a sorgenti estese. Le frange prodotte da qualunque altro punto  $S'$  della sorgente sul piano focale della lente si sovrappongono a quelle prodotte da  $S$  così che la loro visibilità non viene intaccata. La forma della figura di interferenza è di nuovo quella di una serie di cerchi concentrici. Le frange sono dette frange di ugual inclinazione.

Se la lamina non è piana e parallela, la figura di interferenza è modificata di conseguenza e, grazie alla grande sensibilità dell'interferometria, permette di caratterizzare in modo molto preciso le variazioni di spessore (Figura 11.5). In questo caso si preferisce lavorare in condizioni quasi normali in modo che  $\Delta p \cong 2n_2d \pm \lambda/2$ . Le frange corrispondono allora a contorni di uguale spessore e sono infatti chiamate "frange di spessore".

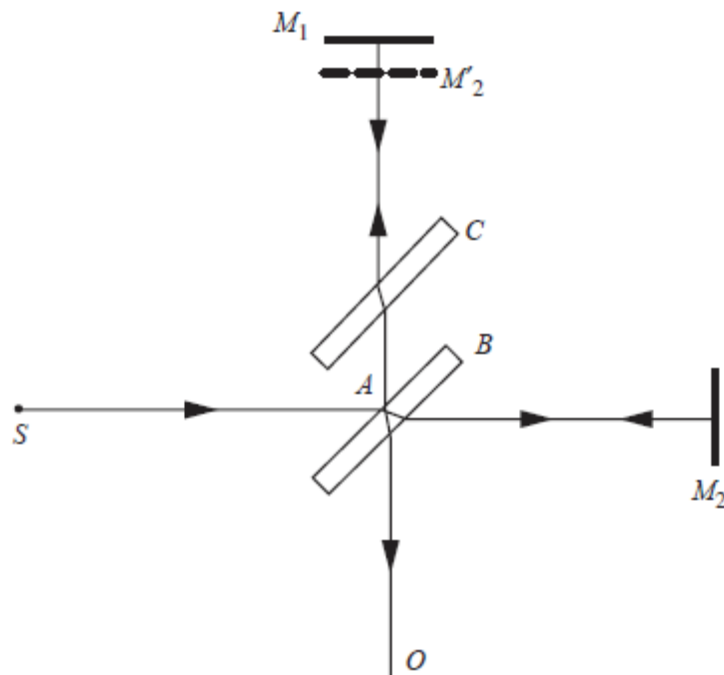


12-5: Analisi qualitativa della figura di interferenza prodotta da un interferometro di Fizeau.

### 12.2.3 INTERFEROMETRI A DUE FASCI

Per molte applicazioni è desiderabile avere un sistema ottico in cui i due fasci interferenti sono fisicamente separati e viaggiano attraverso percorsi differenti prima di venire ricombinati. La maggior parte di questi sfrutta la divisione di ampiezza. L'elemento ottico che assolve a questo compito può essere di vari tipi. Un divisore di fascio basato su un film parzialmente riflettente di metallo o di dielettrico; un reticolo di diffrazione o una lamina diffusiva; una lamina birifrangente accoppiata a un rotatore di polarizzazione (due fasci devono avere la medesima polarizzazione per interferire). Esistono inoltre varie configurazioni per ottenere un interferometro a due fasci, di seguito ne vedremo i prototipi.

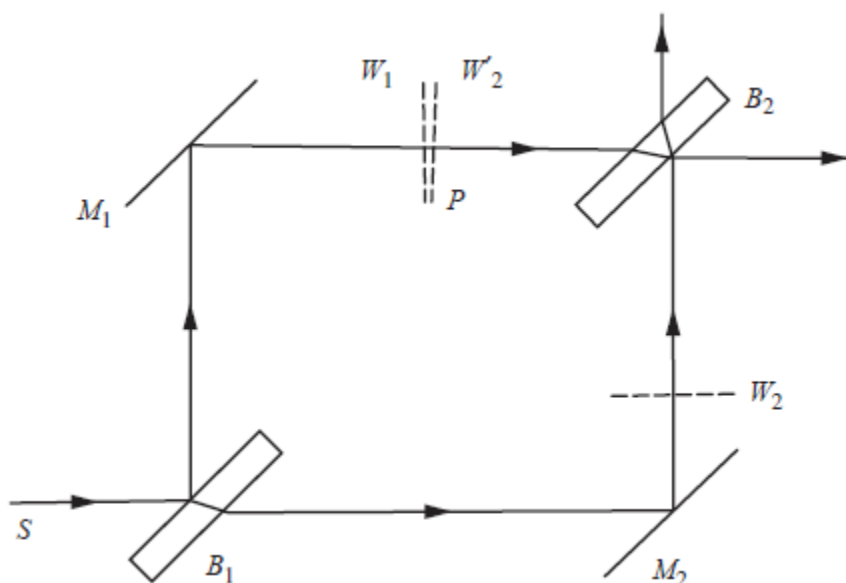
### 12.2.3.1 INTERFEROMETRO DI MICHELSON



12-6: Interferometro di Michelson

In questo caso abbiamo due specchi e un divisore di fascio. La differenza di fase è data dalla differenza di due somme effettuate sui ogni braccio dell'interferometro sui cammini ottici dei fasci. Uno dei due fasci attraversa il divisore solo una volta, mentre l'altro lo attraversa tre volte. Per questo motivo si può concettualmente pensare di inserire una lamina ritardante nel braccio 1 in modo da compensare per questa differenza di fase. In questo sistema una immagine virtuale dello specchio  $M_2$  è creata a una certa distanza dallo specchio  $M_1$ . La figura di itnerferenza è quindi la stessa che si osserverebbe se prodotta in una lastra d'aria fra i due specchi  $M_1$  e  $M_2$ .

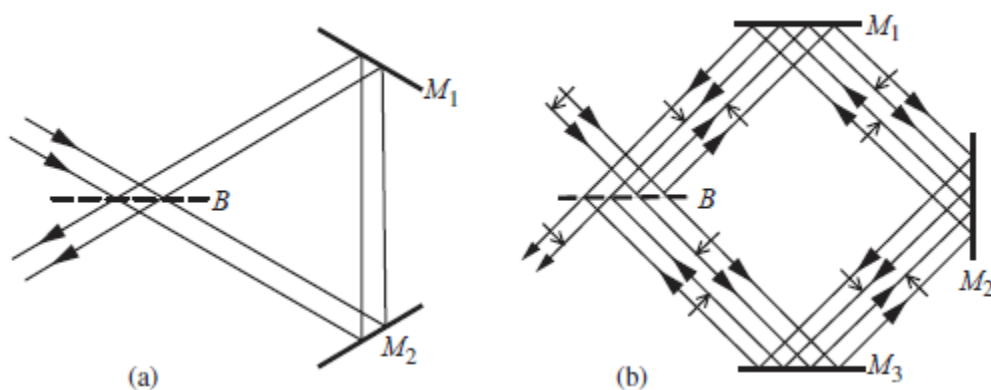
### 12.2.3.2 INTERFEROMETRO DI MACH – ZEHNDER



12-7: Interferometro di Mach – Zehnder.

Nell'interferometro di Mach –Zehnder ci sono due divisori di fascio e due specchi. Ogni fascio attraversa il divisore di fascio solo una volta e il cammino ottico può essere definito con maggior libertà rispetto all'interferometro di Michelson.

### 12.2.3.3 INTERFEROMETRO DI SAGNAC



12-8: Interferometro di Sagnac (a) con un numero pari di riflessioni. (b) numero dispari di riflessioni.

Benché descritto per la prima volta da Michelson, questo interferometro è associato al nome di Sagnac che lo utilizzò estensivamente nei suoi studi sulla propagazione della luce. In questo interferometro abbiamo un divisore di fascio e due (o più) specchi disposti in modo che i due fasci luminosi si propaghino attraverso lo stesso percorso ottico ma in direzione diversa con il risultato che questo interferometro è estremamente stabile.

Questo interferometro esiste in due forme, a seconda che venga utilizzato un numero pari o dispari di specchi. Nel secondo caso (figura 11.8 (b)) i due fasci possono essere fisicamente separati facendoli propagare lungo un percorso parallelo. Questo tipo di interferometro è insensibile a una traslazione di uno qualsiasi dei suoi elementi ottici (lo spostamento si compensa nella differenza di cammino ottico) ma è sensibile a rotazioni di uno degli elementi. In questo caso il sistema di frange si localizza sul divisore di fascio. Nel caso di un numero pari di riflessioni (figura 11.8 (a)) invece, i due fasci sono sempre sovrapposti nello stesso modo (a condizione che i vari elementi ottici siano perpendicolari ai piani della figura). Le frange si localizzano all'infinito se la configurazione è quella mostrata in figura. Tuttavia, se il divisore di fascio viene leggermente inclinato attorno ad un asse giacente nel piano della figura si ottengono delle frange parallele a tale piano.

#### 12.2.4 SORGENTI

Una sorgente ideale per l'interferometria è il laser, poiché è monocromatico e ha ottime proprietà di coerenza se confrontato con le sorgenti naturali. In generale il costruttore dovrebbe specificare la *lunghezza di coerenza* del laser. Se la differenza di cammino ottico nell'interferometro supera questa lunghezza il fenomeno dell'interferenza non è più visibile. In aggiunta a ciò, quando sono necessarie misure con particolare precisione, si può fare in modo che anche la frequenza di emissione del modo laser sia stabilizzata (e in certi casi, nota). Un laser He-Ne (uno dei laser più utilizzati in interferometria) non stabilizzato, anche in configurazione di modo singolo ha una frequenza di emissione caratterizzata da una certa banda piuttosto stretta e centrata su un valore che però può variare di qualche parte per milione, a causa di effetti termici o meccanici. Per questo motivo la banda di frequenze effettivamente esplorata dall'emissione laser è significativamente più larga della larghezza di riga intrinseca del laser. Si rendono perciò necessarie delle tecniche per stabilizzare la frequenza del laser tipicamente di una parte su  $10^8$  e con tecniche più sofisticate fino a una parte su  $10^{13}$ . L'idea di tutte queste tecniche è di dotare la cavità laser di qualche meccanismo di retroazione che modifichi la cavità stessa in modo da mantenere fissato qualche osservabile legato con ottima precisione alla frequenza.

### 12.3 MISURE DI FASE

#### 12.3.1 TRASDUZIONE FASE-INTENSITÀ

Per piccole variazioni di fase (molto minori di  $\pi$ ) è possibile utilizzare una misura diretta basata sull'intensità del segnale interferenziale. Si tratta di posizionare inizialmente l'interferometro in regime di funzionamento lineare, cioè con  $\Delta\varphi \cong \frac{\pi}{2}$ . In questo regime l'equazione (11.3) si linearizza e si ha una relazione lineare fra l'intensità e la fase:  $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \Delta\varphi$ . Ovviamente questa tecnica di misura richiede che l'interferometro si possa considerare stabile in un intervallo di tempo sufficientemente lungo perché la misura possa essere compiuta. Se poi l'intervallo su cui varia la fase non si può considerare infinitesimo, e tuttavia rimane minori di  $\pi$ , questa tecnica si può estendere, invertendo la funzione cos nell'eq. (11.3) che sotto queste condizioni è invertibile.



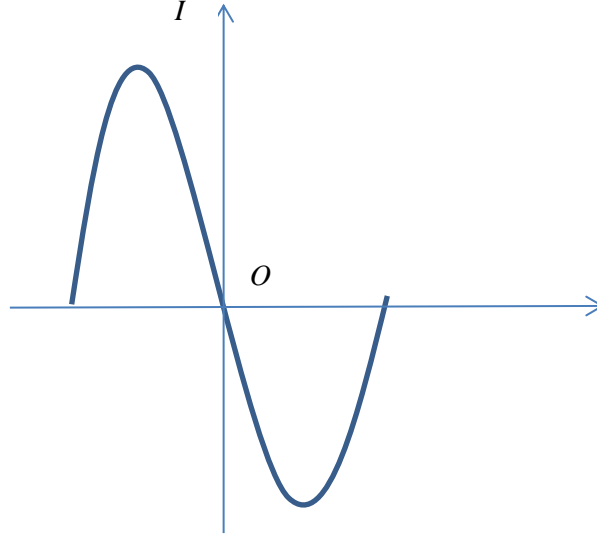


Figura 12-9: Misura di fase in condizioni di linearità.

### 12.3.2 CONTEGGIO DELLE FRANGE

Per variazioni di fase più importanti, pari a svariati multipli di  $\pi$ , la misura della fase consiste essenzialmente nel “contare” quante volte l’intensità attraversa un massimo (o un minimo). In questo modo si trova la fase come  $\Delta\varphi = n\pi + \varphi_0$ . Il “resto” di questa determinazione,  $\varphi_0$ , si può poi stimare usando le tecniche discusse nel paragrafo precedente. Questo tipo di misura richiede in generale una acquisizione “in tempo reale” delle variazioni di intensità, in modo da poter poi analizzare l’interferogramma una volta che tutta la fase abbia terminato la sua evoluzione.

### 12.3.3 TECNICHE A MODULAZIONE DI FASE

Piloto il piezo con un segnale del tipo:

$$V(t) = V_{off}(t) + V_0 \sin \Omega t \quad (11.10)$$

Dove il primo termine rappresenta un offset lentamente variabile nel tempo (tempi lunghi rispetto  $1/\Omega$ ).

L’intensità misurata dal fotodiodo sarà:

$$I(t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[\varphi(t) + \varphi_{off}(t) + \varphi_0 \sin \Omega t] \quad (11.11)$$

Ove i tre termini rappresentano le variazioni di fase indotte nell’interferometro da tutte le possibili cause a parte il segnale di controllo.

Essendo  $\varphi_0 \ll \pi$  si sviluppa  $I$  in serie rispetto alle armoniche di frequenza  $\Omega$ . Il primo termine non dipende da  $\Omega$ , mentre le prime due armoniche sono:

$$I_{\Omega}(t) = 4J_1(\varphi_0)\sqrt{I_1 I_2} \sin[\varphi(t) + \varphi_{off}(t)] \times \sin \Omega t \quad (11.12)$$

$$I_{2\Omega}(t) = 4J_2(\varphi_0)\sqrt{I_1 I_2} \cos[\varphi(t) + \varphi_{off}(t)] \times \cos 2\Omega t \quad (11.13)$$

## 12.4 MISURE DI LUNGHEZZA

Una delle maggiori applicazioni dell'interferometria consiste nella misura accurata di una lunghezza. Questo consiste essenzialmente nella determinazione dell'ordine dell'interferenza su una certa area della figura di interferenza. Questo tipo di misure si fanno su due tipi di standard: *standard di linea* e *standard di lunghezza*.

### 12.4.1 STANDARD DI LINEA

Si tratta essenzialmente di una serie di righe equispaziate incise su una superficie levigata. Le misure su questo tipo di standard sono compiute con un comparatore interferenziale: la scala da calibrare è montata su un equipaggio mobile al quale è fissato lo specchio di un interferometro Michelson. Si collima con un microscopio la tacca della scala con un riferimento e si misura lo spostamento dell'equipaggio fra due tacche successive contando lo spostamento degli ordini di interferenza. In questo modo si hanno precisioni tipiche superiori al centinaio di nm.

### 12.4.2 STANDARD DI LUNGHEZZA

In questo caso si tratta di misurare la distanza fra due superficie levigate. Si può usare il metodo delle frazioni esatte (vedi in seguito) per misurare la posizione di una superficie rispetto al sistema di riferimento dell'interferometro, quindi si ripete la cosa con la seconda superficie e si fa la differenza.

### 12.4.3 IL METODO DELLE FRAZIONI ESATTE

Si tratta di un "trucco" per determinare in modo assoluto l'ordine di interferenza alla quale ci si trova per una data realizzazione dell'interferometro. Questo metodo si avvale di luce a varie lunghezze d'onda. Si può utilizzare ad esempio un laser multiriga oppure una sorgente naturale con uno spettro a righe con un grado di coerenza sufficientemente buono (lampade a gas opportunamente monocromatizzate).

Siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  le varie lunghezze d'onda utilizzate e sia  $p$  il cammino ottico da misurare. Per ogni lunghezza d'onda avremo che il cammino ottico sarà pari a un multiplo intero di lunghezze d'onda  $m_i$  incognito più una frazione di lunghezza d'onda  $\epsilon_i$  che invece si può misurare con buona precisione. Ripetendo le misure con le varie lunghezze d'onda si ottiene un set di  $n$  incognite e termini noti del tipo:

$$\begin{aligned} p &= (m_1 + \epsilon_1) \\ p &= (m_2 + \epsilon_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Da misure meccaniche uno conosce già con una certa incertezza il valore di  $p$ . Di conseguenza si può fare una certa stima del valore delle  $n$  incognite  $m_i$  trascurando le frazioni di lunghezza d'onda. A questo punto si sceglie un intervallo di valori centrati su tale valore atteso e si varia  $p$  in tale intervallo, minimizzando le differenze fra le frazioni di lunghezza d'onda calcolate e quelle osservate sperimentalmente.

## 12.5 MISURE DI INDICE DI RIFRAZIONE

Se la distanza in uno dei bracci dell'interferometro è nota, le tecniche appena esposte si possono usare per misurare l'indice di rifrazione di una sostanza a partire dalla conoscenza del cammino ottico. Essendo note le dimensioni del solido con sufficiente accuratezza, l'indice di rifrazione segue di conseguenza. Nel caso di sostanze gassose si può effettuare una misura di tipo differenziale. Ad esempio in figura (11.10 a) è mostrato un interferometro di Rayleigh progettato per la misura dell'indice di rifrazione dei gas e in (11.10 b) una sua variante, l'interferometro di Jamin. Qui l'indice di rifrazione si calcola contando quanti ordini di diffrazione si "percorrono" in mano a mano che si aumenta la pressione del gas nella cella di test.

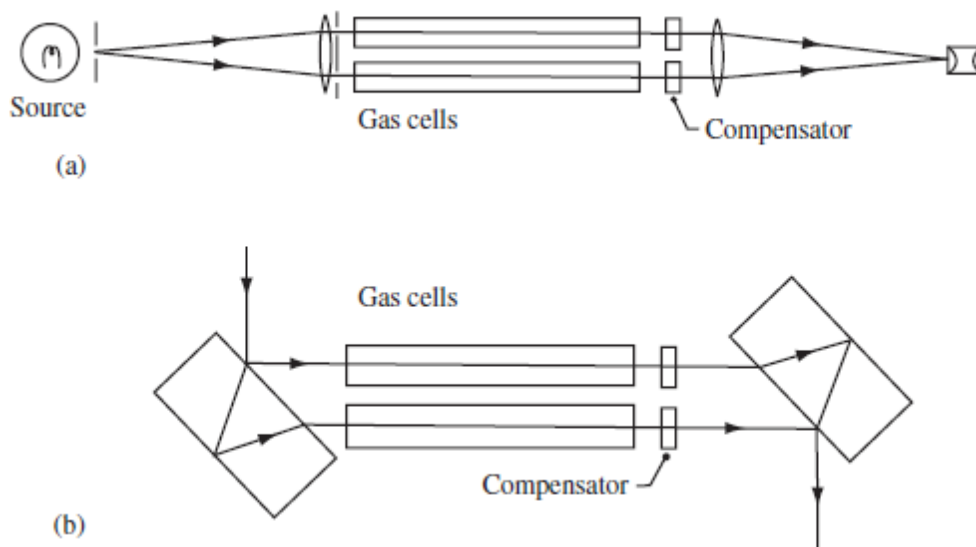


Figura 12-10: (a) Interferometro di Rayleigh. (b) Interferometro di Jamin.

## 12.6 MICROSCOPIA A CONTRASTO DI FASE

Le tecniche interferometriche sono spesso cruciali nel campo della microscopia, specialmente se applicata allo studio di tessuti viventi. Nel caso ad esempio di strutture cellulari, i corpuscoli sono difficilmente evidenziabili con un microscopio normale perché le varie strutture assorbono o riflettono la luce all'incirca nello stesso modo. L'idea è perciò quella di sfruttare il contrasto di indice di rifrazione per evidenziarle. Vi sono numerosi schemi ottici che assolvono a questo compito. Uno schema usato abbastanza spesso è l'interferometro di Mirau (figura 11.11).

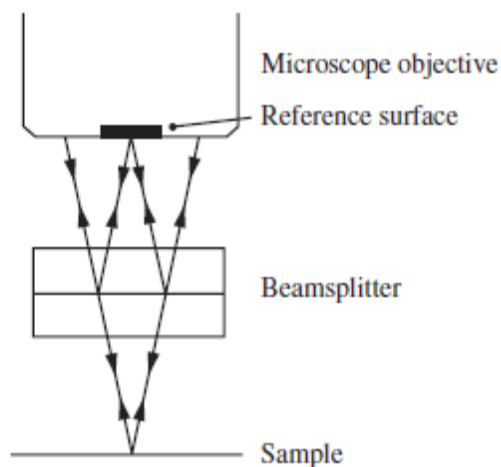
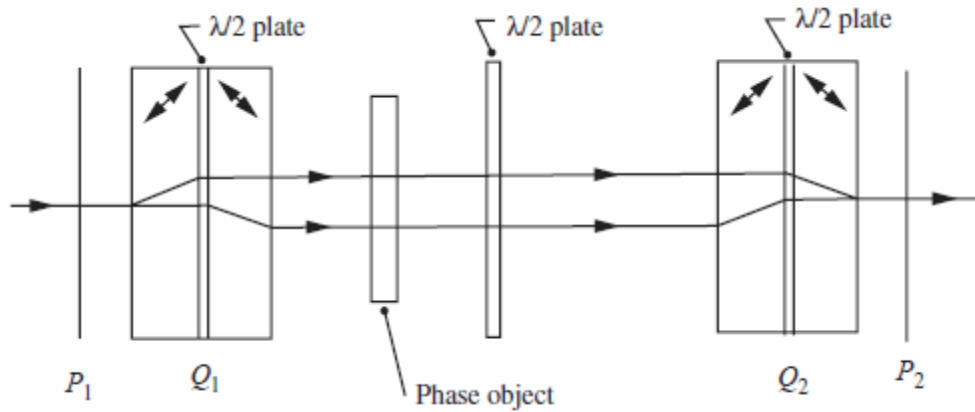


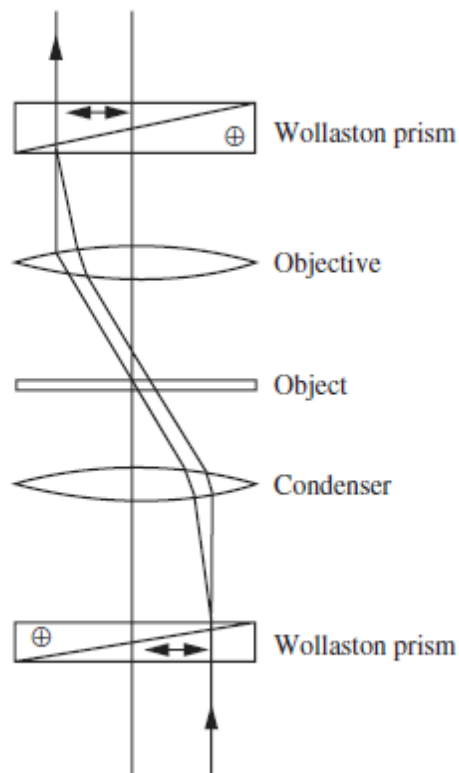
Figura 12-11: Interferometro di Mirau

Si tratta di un interferometro a percorso comune in cui l'immagine viene fatta interferire con un fonte d'onda di riferimento creato da un apposito specchio.

Altri tipi di schema ottico utilizzano elementi birfrangenti per creare due fasci paralleli e farli interferire (figure 11.12, 11.13).

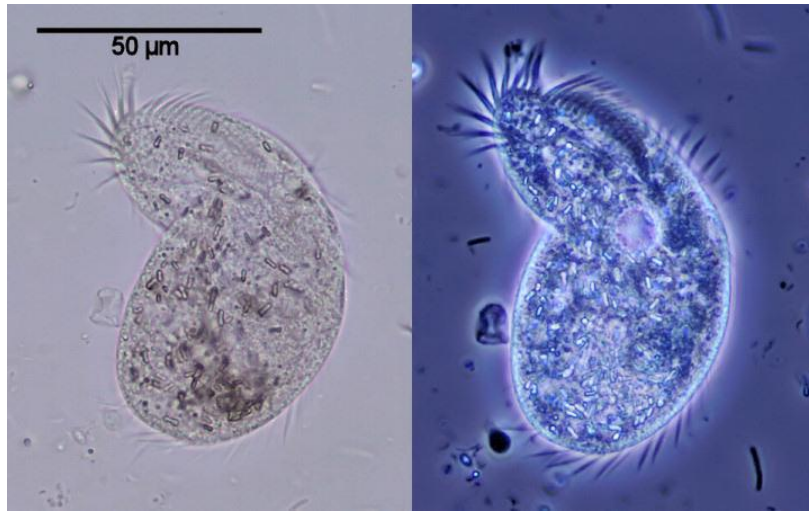


12-12: Interferometro a shearing utilizzando due poliscopi di Savart.



12-13: Interferometro di Nomarski

Se entrambi i fasci attraversano il campione, quello che viene evidenziato è il *gradiente* di indice di rifrazione. Queste tecniche vengono chiamate a contrasto differenziale (Differential Interference Contrast, DIC).



12-14: Confronto fra un'immagine di microscopio convenzionale e una a contrasto di fase.

## 12.7 SPETTROSCOPIA INTERFERENZIALE

Consideriamo una sorgente monocromatica e un interferometro di tipo Michelson in cui uno dei due bracci può venire spostato con continuità. Si registra con un fotodiodo l'intensità in uscita dall'interferometro (dopo averlo opportunamente allineato) in funzione dello spostamento del braccio, si avrà un andamento sinusoidale dell'intensità. Se ora ripetiamo l'esperimento con un'altra sorgente monocromatica di lunghezza d'onda diversa, la variazione di intensità avverrà con una frequenza diversa. Da qui l'idea di utilizzare l'interferometria per risolvere le componenti spettrali di una sorgente utilizzando una analisi alla Fourier.

Proviamo a mettere in formule quanto appena visto. Per una sorgente monocromatica di frequenza  $\nu$ , supponendo che le frange di interferenza abbiano contrasto massimo, il segnale in uscita dal detector sarà proporzionale a:  $G(\tau) = g(\nu)(1 + \cos 2\pi\nu\tau)$  ove  $\tau$  è il ritardo temporale accumulato tra i due bracci dell'interferometro (proporzionale alla differenza di cammino ottico) e  $g(\nu) = I(\nu)T(\nu)d(\nu)$  è il peso da attribuire alla componente spettrale di frequenza  $\nu$ , data dal prodotto dell'intensità della sorgente,  $I(\nu)$ , della funzione di trasmissione dell'interferometro,  $T(\nu)$ , e della risposta del detector,  $d(\nu)$ . Se sono presenti simultaneamente più componenti spettrali, l'output del detector sarà dato dalla loro somma:

$$G(\tau) = \int_0^\infty g(\nu)d\nu + \int_0^\infty g(\nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu. \quad (11.14)$$

Il primo termine del secondo membro dell'equazione è un termine costante e rappresenta il segnale medio. Il secondo termine invece è un termine oscillatorio che costituisce il cosiddetto *interferogramma*. Si riconosce subito che tale termine corrisponde alla parte reale della trasformata di Fourier di  $g$ . Per effettuare l'inversione dell'interferogramma e ottenere  $g$  si procede come segue:

- Per effettuare la trasformata di Fourier si deve integrare su tutto l'asse reale; tuttavia lo spettro  $g(\nu)$  è definito solo per valori positivi. La cosa si aggiusta come segue: si definiscono due funzioni ausiliarie  $g_e(\nu)$  e  $g_o(\nu)$  tali che:

Per  $\nu > 0$  definiamo  $g_e(\nu) = g_o(\nu) = \frac{1}{2} g(\nu)$  mentre per  $\nu < 0$   $g_e(\nu) = \frac{1}{2} g(-\nu)$  e  $g_o(\nu) = -\frac{1}{2} g(-\nu)$ . Si ha pertanto che:

$$g_e(\nu) = g_e(-\nu)$$

$$g_o(\nu) = -g_o(-\nu)$$

Sono funzioni pari e dispari rispettivamente e tali che:

$$g(\nu) = g_e(\nu) + g_o(\nu).$$

- Possiamo quindi scrivere la parte reale della trasformata di Fourier di  $g(\nu)$  come segue:

$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [g_e(\nu) + g_o(\nu)] \cos 2\pi\nu\tau d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu$  Che come si vede coincide con l'equazione che descrive la parte oscillante dell'interferogramma. Lo spettro si ottiene quindi antitrasformando i dati sperimentali relativi alla parte oscillante dell'interferogramma, prendendo solo la parte relativa alle frequenze positive e tendo conto dei vari fattori. Il risultato è:

$$g(\nu) = 4 \int_0^{\infty} F(\tau) \cos 2\pi\nu\tau d\tau \quad (11.16)$$

## 12.8 TECNICHE ELETTRONICHE PER L'INTERFEROMETRIA