Stati coerenti per bosoni e fermioni

Alessandro Lovo

16 giugno 2020

Luce e materia

Consideriamo l'hamiltoniana in prima quantizzazione $\hat{H}_{cl} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})$ con autostati

$$\hat{H}_{cl} |\phi_\alpha\rangle = E_\alpha |\phi_\alpha\rangle$$

Una generica funzione d'onda può dunque essere espressa come $|\psi\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |\phi_\alpha\rangle$ e si può dunque scrivere l'energia associata come

$$H = \langle\psi| \hat{H}_{cl} |\psi\rangle = \sum_\alpha \frac{E_\alpha}{2} \left(c_\alpha c_\alpha^* + c_\alpha^* c_\alpha\right)$$

Con un procedimento simile a quello per la seconda quantizzazione del campo elettromagnetico è possibile promuovere ad operatori c_α, c_α^* e di conseguenza H, ψ.

Operatori bosonici e fermionici

$$\hat{\psi} = \sum_{\alpha} \hat{c}_{\alpha} \phi_{\alpha}$$

$$\hat{N}_{\alpha} = \hat{c}_{\alpha}^{\dagger} \hat{c}_{\alpha}$$

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \left(\hat{N}_{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \approx \sum_{\alpha} E_{\alpha} \hat{N}_{\alpha}$$

Nel caso di bosoni

$$[\hat{c}_{\alpha}, \hat{c}_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta},\ [\hat{c}_{\alpha}, \hat{c}_{\beta}] = [\hat{c}_{\alpha}^{\dagger}, \hat{c}_{\beta}^{\dagger}] = 0,\ \sigma(\hat{N}_{\alpha}) = \mathbb{N}$$

mentre nel caso di fermioni

$$\{\hat{c}_{\alpha}, \hat{c}_{\beta}^{\dagger}\} = \delta_{\alpha\beta},\ \{\hat{c}_{\alpha}, \hat{c}_{\beta}\} = \{\hat{c}_{\alpha}^{\dagger}, \hat{c}_{\beta}^{\dagger}\} = 0,\ \sigma(\hat{N}_{\alpha}) = \{0, 1\}$$

Stati numero e stati coerenti

Come nel caso della luce gli operatori $\hat{c}_\alpha, \hat{c}_\alpha^\dagger$ rispettivamente distruggono e creano una particella nello stato ϕ_α agendo sullo spazio di Fock in rappresentazione di numero:

$$\hat{N}_\alpha \left|\ldots n_\alpha \ldots\right\rangle = n_\alpha \left|\ldots n_\alpha \ldots\right\rangle$$

Viene dunque spontaneo chiedersi se anche per la materia sia possibile avere degli stati coerenti, ossia autostati dell'operatore di annichilazione in cui il numero di particelle non sia fissato

$$\hat{c}_\alpha \left|c_\alpha\right\rangle = c_\alpha \left|c_\alpha\right\rangle$$

Bosoni

Nel caso di particelle bosoniche non c'è limite al numero di particelle che occupino un singolo stato e infatti con la condensazione di Bose-Einstein occupano tutte lo stato ad energia inferiore ϕ_0. Inoltre poichè le regole di commutazione sono le stesse della luce è immediato esprimere lo stato coerente come

$$|c\rangle_\alpha = e^{-|c_\alpha|^2/2} \sum_{n_\alpha=0}^{\infty} \frac{c_\alpha^n}{\sqrt{n_\alpha!}} |n_\alpha\rangle$$

dove $\overline{N} = |c_\alpha|^2$ rappresenta il numero medio di bosoni nello stato ϕ_α. Analogamente al caso della luce la fluttuazione di $\hat{\psi}$ (che corrisponde al campo elettrico) calcolata sullo stato coerente è la stessa di quella sullo stato di vuoto.

Fermioni

Nel caso di fermioni la situazione è più complicata poiché ogni stato ϕ_α può contenere al massimo una particella. Questo altro non è che il principio di esclusione di Pauli che in seconda quantizzazione può essere formulato come $(\hat{c}_\alpha^\dagger)^2 |0\rangle = 0$.
Ciononostante è comunque possibile definire lo stato coerente come autosatato dell'operatore di annichilazione

$$\hat{c}_\alpha |c_\alpha\rangle = c_\alpha |c_\alpha\rangle \,, \; \langle c_\alpha| \hat{c}_\alpha^\dagger = \bar{c}_\alpha \langle c_\alpha|$$

Tuttavia a causa delle regole di anticommutazione $c_\alpha, \bar{c}_\alpha$ non sono numeri complessi bensì numeri di Grassmann.

$$c_\alpha^2 = \bar{c}_\alpha^2 = 0, \; c_\alpha \bar{c}_\alpha + \bar{c}_\alpha c_\alpha = 1$$

Campi 'classici'

Gli stati coerenti possono essere usati come ponte per ottenere l'analogo 'classico' del campo di materia $\hat{\psi}$:

$$\hat{\psi} = \sum_\alpha \phi_\alpha \hat{c}_\alpha \rightarrow \psi = \sum_\alpha \phi_\alpha c_\alpha$$

$$\hat{\psi} \left|\psi\right\rangle = \psi \left|\psi\right\rangle$$

$$\left|\psi\right\rangle = \bigotimes_\alpha \left|c_\alpha\right\rangle , \; \hat{c}_\alpha \left|c_\alpha\right\rangle = c_\alpha \left|c_\alpha\right\rangle$$

Nel caso di bosoni ψ sarà un campo complesso, mentre nel caso di fermioni un campo di Grassmann.