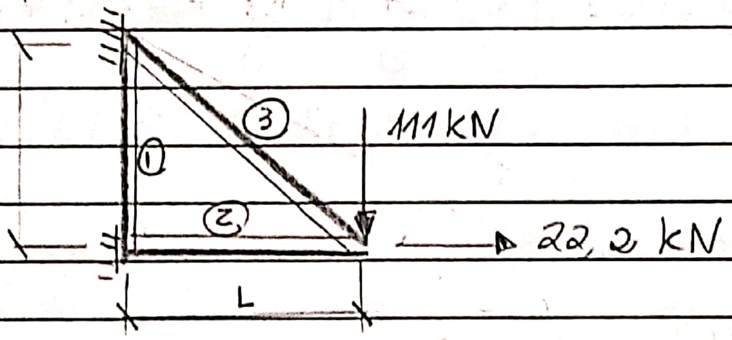
data
fecha

Nome: Alexandre Melo de Oliveira
NºUSP: 10788062

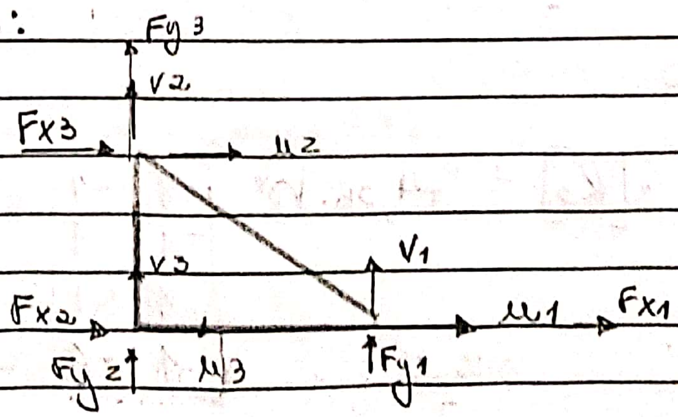
Exercício 13 - SAA0336

Encontrar os campos de ~~deslocamento~~ deformações e tensões para a estrutura em questão.

a) Não considerar o peso da própria estrutura
b) Considere o peso próprio da estrutura (1 - alumínio, 2 e 3 - aço)



a) Há um total de 3 nós na estrutura, cada nó com dois graus de liberdade:



Como os nós 2 e 3 estão engastados, $u_2 = u_3 = v_2 = v_3 = 0$.

data
fecha

Montando a matriz de rotação, temos:

$$[R_i] = \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

onde $c = \cos(\beta)$
$s = \sin(\beta)$

Montando as matriz de cada elemento, temos:

- Elemento 1

$$[K]_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1} \cdot [R_1] = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 67{,}74 & 0 & -67{,}74 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -67{,}74 & 0 & 67{,}74 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix} \end{array}$$

- Elemento 2

$$[K]_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2} \cdot [R_2] = 10^6 \cdot \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 315{,}39 & 0 & -315{,}39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -315{,}39 & 0 & 315{,}39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_1 \\ v_1 \end{matrix} \end{array}$$

- Elemento 3

$$[K_3] = \frac{E_3 A_3}{L_3} \cdot [R_3] = 74{,}36 \cdot 10^6 \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix} \end{array}$$

Como temos 3 elementos, cada qual com 2 gdl, temos uma matriz resultante 6x6:

$$\begin{bmatrix} 390 & -74{,}38 & -315{,}39 & 0 & -74{,}38 & 74{,}38 \\ -74{,}38 & 74{,}38 & 0 & 0 & 74{,}38 & -74{,}38 \\ -315{,}39 & 0 & 315{,}39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 67{,}74 & 0 & -67{,}74 \\ -74{,}38 & 74{,}38 & 0 & 0 & -74{,}38 & -74{,}38 \\ 74{,}38 & -74{,}38 & 0 & -67{,}74 & 74{,}38 & 162{,}12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22{,}2 \\ -111 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Como os nós ② e ③ estão engastados:

$u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = 0$, e portanto podemos zerar várias linhas e colunas da matriz de rigidez. Resolvendo, temos:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}261 \\ -1{,}773 \end{Bmatrix} mm \qquad \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 66{,}6 \\ 0 \\ -111 \\ 111 \end{Bmatrix} kN$$

Tendo a solução, podemos encontrar o campo de deslocamento:

- Elemento a

$$\tilde{u}(x_2) = u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2$$
$$\tilde{u}(x_2) = u_1 \phi_1$$

Como $\phi_1 = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} \Rightarrow \phi_1 = 0{,}3937x$

$$\therefore \tilde{u}(x_2) = -0{,}261 \cdot 0{,}3937x$$
$$\boxed{\tilde{u}(x_2) = -0{,}111x}\ mm$$

$$\boxed{\tilde{v}(x_2) = 0}$$

data
fecha

D S T Q Q S S
D L M M J V S

• Elemento 3

$\tilde{u}(x_3) = \phi_1 u_1 + \phi_3 u_3$; $\phi_1 = \dfrac{x - x_3}{x_1 - x_3} = 0{,}3937x$

$\tilde{u}(x_3) = \phi_1 u_1$

$\therefore \tilde{u}(x_3) = -0{,}2815 \cdot 0{,}3937x$

$\boxed{\tilde{u}(x_3) = -0{,}111\,x \quad mm}$

Análogo para o deslocamento vertical:

$\tilde{v}(x_3) = v_1\phi_1 + v_3\phi_3$; $\phi_1 = \dfrac{y - y_3}{y_1 - y_3} \Rightarrow \phi_1 = -0{,}3937y + 1$

$v(x_3) = v_1\phi_1$

$\tilde{v}(x_3) = -1{,}773(-0{,}3937y + 1)$

$\boxed{\therefore \tilde{v}(x_3) = 0{,}6982y - 1{,}7735 \quad mm}$

• Elemento 1

Como o elemento está todo engastado:

$\boxed{\therefore \tilde{w}(x_1) = v(x_1) \simeq 0 \quad mm}$

data
fecha

Tendo os campos de deslocamentos, podemos encontrar os campos de deformação:

$$\boxed{\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2} = 0} \quad \text{pois} \quad \tilde{u}(x_1) = \tilde{v}(x_1) = 0$$

$$\varepsilon_{x2} = (-0{,}111x)' = \boxed{-0{,}111 \text{ mm}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{y2} = 0}$$

$$\varepsilon_{x3} = (-0{,}111x)' \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{x3} = -0{,}111 \text{ mm}}$$

$$\varepsilon_{y3} = (0{,}6982y - 1{,}7735)' \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{y3} = 0{,}6982 \text{ mm}}$$

Usando a Lei de Hooke, podemos encontrar o campo de tensões:

$\sigma = E\varepsilon$. Usando os módulo do enunciado, temos:

$$\boxed{\sigma_{x1} = \sigma_{y1} = 0}$$

$$\sigma_{x2} = 20{,}7 \cdot 10^{10} \cdot (-0{,}111 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow \boxed{\sigma_{x2} = -22{,}97 \text{ MPa}}$$

$$\boxed{\sigma_{y2} = 0}$$

$$\sigma_{x3} = 20{,}7 \cdot 10^{10} (-0{,}111 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow \boxed{\sigma_{x3} = -22{,}97 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{y3} = 20{,}7 \cdot 10^{10} (0{,}698 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow \boxed{\sigma_{y3} = 144{,}527 \text{ MPa}}$$

data
fecha

b) Neste caso, vamos considerar o peso de cada barra em nossa análise:

Usando os dados do Mil-Handbook, temos:

$$\rho_{alumínio} \cong 2663{,}35 \ kg/m^3$$
$$\rho_{aço} \cong 8051{,}40 \ kg/m^3$$

Logo, o peso de cada barra é dado como:

$$\begin{cases} W_1 = 32{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}54 \cdot 2863{,}35 \cdot 9{,}81 = 230{,}45 \ N \\ W_2 = 36{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}54 \cdot 8051{,}4 \cdot 9{,}81 = 776{,}40 \ N \\ W_3 = 25{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}59 \cdot 8051{,}4 \cdot 9{,}61 = 731{,}57 N \end{cases}$$

Tendo os valores do peso de cada barra, podemos dividir o peso em cada nó, de modo que um nó passa a ter contribuição de metade do peso das barras concorrentes nesse nó.

$$F_R = F + W = 10^{-6} \cdot \begin{Bmatrix} 22200 \\ -111000 - 731{,}57/2 - 776{,}40/2 \\ F_{u2} \\ F_{v2} - 776{,}40/2 - 230{,}45/2 \\ F_{u3} \\ F_{v3} - 230{,}45/2 - 731{,}57/2 \end{Bmatrix} = 10^{-6} \cdot \begin{Bmatrix} 22200 \\ -111755 \\ F_{u2} \\ F_{v2} - 273 \\ F_{u3} \\ F_{v3} - 250 \end{Bmatrix}$$

Com isso, temos um sistema similar ao resolvido na questão a), apenas com o vetor de forças diferente:

$$[K] \begin{Bmatrix} u_i \\ r_i \end{Bmatrix} = [F_R]$$

Resolvendo no MATLAB, temos:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,2639 \\ -1,7850 \end{Bmatrix} \text{ mm} \qquad \begin{Bmatrix} F_{u2} \\ F_{v2} \\ F_{u3} \\ F_{v3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 88,6 \\ -0,273 \\ -111 \\ 110,75 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

Repetindo os passos do item a) para encontrar os campos de deslocamento, deformação e tensão:

→ Elemento 1

$$\boxed{\tilde{u}(x_1) = \tilde{v}(x_1) = 0} \quad \text{(completamente engastado)}$$

→ Elemento 2

$$\tilde{u}(x_2) = u_1 \phi_1 + \cancel{u_2} \phi_2$$

$$\boxed{\tilde{u}(x_2) = -0,111x \text{ mm}}$$

$$\boxed{\tilde{v}(y_2) = 0}$$

→ Elemento 3

$$\tilde{u}_3(x_3) = u_1 \phi_1 + \cancel{u_3} \phi_3$$

$$\boxed{\tilde{u}_3(x_3) = 0,111x \text{ mm}}$$

$$\tilde{v}_3(y_3) = v_1 \phi_1 + \cancel{v_3} \phi_3$$

$$\boxed{\therefore \tilde{v}_3(y_3) = 0,7021y - 1,786 \text{ mm}}$$

data
fecha

D S T Q Q S S

D L M M J V S

Encontrando os campos de deformações:

$\boxed{\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{y1} = 0}$

$\varepsilon_{x2} = (-0{,}111x)' \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{x2} = -0{,}111 \text{ mm}}$

$\boxed{\varepsilon_{y2} = 0}$

$\varepsilon_{x3} = (-0{,}111X)' \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{x3} = -0{,}111 \text{ mm}}$

$\varepsilon_{y3} = (0{,}7021y + 1{,}786)' \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{y3} = 0{,}7021 \text{ mm}}$

Novamente pela Lei de Hook:

$\boxed{\sigma_{x1} = \sigma_{y1} = 0}$

$\sigma_{x2} = 20{,}7 \cdot 10^{10} \cdot (-0{,}111 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow \boxed{\sigma_{x2} = -22{,}97 \text{ MPa}}$

$\boxed{\sigma_{y2} = 0}$

$\sigma_{x3} = 20{,}7 \cdot 10^{10} \cdot (-0{,}111 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow \boxed{\sigma_{x3} = -22{,}97 \text{ MPa}}$

$\sigma_{y3} = 20{,}7 \cdot 10^{10} \cdot (0{,}7021 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow \boxed{\sigma_{y3} = 145{,}34 \text{ MPa}}$