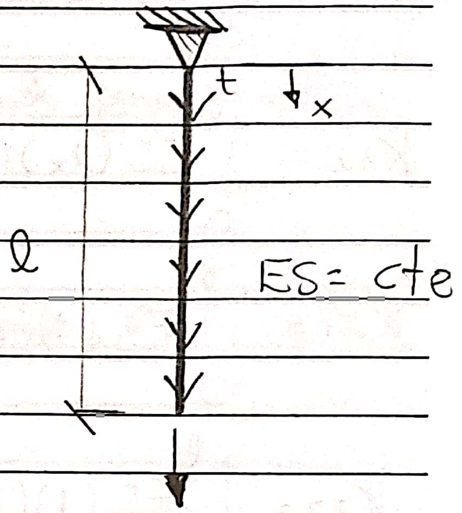
Nome: Alessandro Melo de Oliveira
Nº USP: 10788662

Exercício 12 - SAA 0336

2) Determine a matriz [k] e o vetor {L}.



Admitindo que a solução do problema seja da forma $K_{ij}\, a_j = L_i$, e o campo de deslocamentos possa ser expresso como um polinômio quadrático, temos:

$$\tilde{u}(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Aplicando a condição de contorno no engaste:

$$\tilde{u}(0) = 0 \Rightarrow A.0^2 + B.0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Logo $\tilde{u}(x) = Ax^2 + Bx$

de onde podemos tirar que:

$$\begin{cases} \phi_1 = x^2 \rightarrow \phi_1' = 2x \\ \phi_2 = x \rightarrow \phi_2' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = A \\ a_2 = B \end{cases}$$

Com isso, conseguimos montar a matriz [k] e [L].

$$\begin{cases} K_{ij} = \int_0^l ES\, \phi_i' \phi_j' \quad c/\ i,j = 1,2 \\ L_j = \int_0^l t\, \phi_j\, dx + P\phi_j(l) \quad c/\ j = 1,2 \end{cases}$$

data
fecha

Com isso, aplicando as relações, temos:

$$K_{11} = \int_0^{\ell} ES\,(2x)(2x)\,dx = ES\int_0^{\ell} 4x^2\,dx \Rightarrow K_{11} = \frac{4ES\ell^3}{3}$$

$$K_{12} = \int_0^{\ell} ES\,(2x)(1)\,dx = ES\int_0^{\ell} 2x\,dx \Rightarrow K_{12} = ES\ell^2$$

$$K_{21} = \int_0^{\ell} ES\,(1)(2x)\,dx = ES\int_0^{\ell} 2x\,dx \Rightarrow K_{21} = ES\ell^2$$

$$K_{22} = \int_0^{\ell} ES\,(1)(1)\,dx = ES\int_0^{\ell} dx = ES\ell$$

Como esperado, $[K]$ é simétrico.

Calculando agora o vetor de forças:

$$L_1 = \int_0^{\ell} t\,\phi_1\,dx + P\,\phi_1(\ell) = \int_0^{\ell} t\,.\,x^2 + P\,.\,\ell^2 \Rightarrow L_1 = \frac{t\ell^3}{3} + P\ell^2$$

$$L_2 = \int_0^{\ell} t\,\phi_2\,dx + P\,\phi_2(\ell) = \int_0^{\ell} t\,.\,x + P\,.\,\ell \Rightarrow L_2 = \frac{t\ell}{2} + P\,.\,\ell$$

Logo, o sistema de solução é descrito por:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \frac{4}{3}ES\ell^3 & ES\ell^2 \\ ES\ell^2 & ES\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t\ell^3/3 + P\ell^2 \\ t\ell^2/2 + P\ell \end{Bmatrix}}$$