

Progetto N°2 - Calcolo Scientifico

Nodari Alessandro & Proserpio Lorenzo

May 2021

Problema 1

Soluzione analitica

Dato il sistema:

$$(\star) \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = -k_r(\theta^4 - \theta_a^4), & t \in (0, T] \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

Si nota subito che la prima equazione è a variabili separabili e può essere integrata nel seguente modo:

$$\int \left(-\frac{1}{2\theta_a^2(\theta^2 + \theta_a^2)} + \frac{1}{4\theta_a^3(\theta - \theta_a)} - \frac{1}{4\theta_a^3(\theta + \theta_a)} \right) d\theta = \int \frac{d\theta}{\theta^4 - \theta_a^4} = k_r t$$

Ora l'integrale di sinistra risulta semplicemente risolvibile e si ottiene:

$$-2 \arctan \frac{\theta}{\theta_a} - \log(\theta + \theta_a) + \log(\theta - \theta_a) = -4\theta_a^3 k_r t + c$$

con c costante da determinare imponendo che a $t = 0$ si abbia $\theta(0) = \theta_0 = 1200$, con $\theta_a = 300$ e $k_r = 2.20 \cdot 10^{-12}$; sostituendo, risulta:

$$c = -2 \arctan \frac{1200}{300} + \log \frac{900}{1500} \approx -3.1624...$$

Abbiamo così ottenuto la soluzione analitica del nostro problema.

Interpretazione matematica e fisica dell'equilibrio

Notiamo che l'equazione di (\star) possiede due equilibri, uno per $\theta = \theta_a$, l'altro per $\theta = -\theta_a$. Siccome $\theta_0 > \theta_a$ e per la regolarità dell'equazione possiamo far valere il teorema di unicità delle soluzioni e quindi abbiamo che l'evoluto a qualsiasi tempo di θ sarà necessariamente $\geq \theta_a$. Dunque ci limitiamo a studiare il primo equilibrio (anche perchè il secondo non ha fisicamente senso, siccome

la temperatura misurata in Kelvin non può essere negativa...). Vediamo che l'equilibrio in $\theta = \theta_a$ è un minimo di un potenziale naturalmente definito come:

$$\int k_r(\theta^4 - \theta_0^4)d\theta = k_r\left(\frac{\theta^5}{5} - \theta_a^4 \cdot \theta\right) = V(\theta)$$

dunque l'equilibrio è stabile, in realtà è addirittura asintoticamente stabile, di fatto possiamo prendere un intorno arbitrariamente piccolo di θ_a in modo che tutto l'intorno abbia per ogni suo punto $V(\theta) < 0$. Vediamo che potevamo giungere a tali conclusioni anche senza scomodare il teorema di Lyapunov, ma usando le leggi della termodinamica. Infatti, supponendo il nostro sistema come chiuso (cioè che possa scambiare solo energia con l'ambiente), vale il primo principio della termodinamica:

$$dU = \delta Q - \delta L \implies dU = \delta Q$$

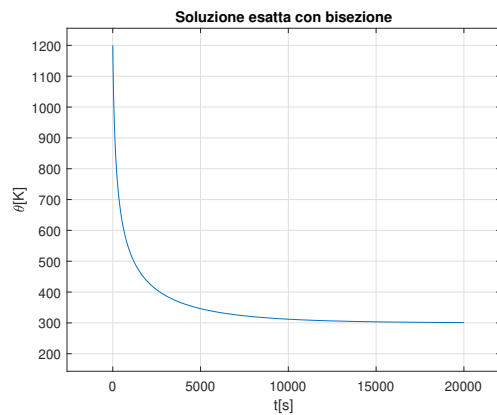
il lavoro che compie il nostro pezzo raffreddandosi è ovviamente nullo. Questa relazione deve valere inoltre per ogni tempo, e la variazione di energia interna per $\theta \rightarrow \theta_a$ tende a 0. Tradotto, il pezzo continua a cedere sempre meno calore all'ambiente e si raffredda tendendo alla temperatura dell'ambiente esterno. Per tale motivo abbiamo ritenuto opportuno, nell'implementazione, di non fissare un T grande a piacere, ma di far continuare l'algoritmo finchè lo scarto tra θ e θ_a non fosse minore di 1 K. Usando tale trucco ci assicuriamo ogni volta che venga rappresentata la maggior parte del processo di raffreddamento. Abbiamo notato che ciò avviene per $T \approx 2 \cdot 10^4$ s.

Assenza dell'inversa esplicita

Nel primo paragrafo abbiamo integrato completamente il sistema purtroppo però la soluzione è della forma $f(\theta, t) = 0$, il che rende difficile disegnare al calcolatore la soluzione esatta nei tempi della nostra mesh. Dunque il problema si riduce ora alla ricerca degli zeri di quella funzione. Abbiamo optato per due soluzioni diverse: la prima utilizza il metodo di Newton (con numero di iterazioni fisso) e si può trovare implementata nei file *mainHeunRK4Kutta.m* e *mainRKF45.m*, la seconda utilizza il metodo di bisezione e si può trovare nei file *mainHeunRK4KuttaBis.m* e *mainRKF45Bis.m*. Nel progredire del progetto abbiamo trovato più opportuno utilizzare bisezione, poichè, individuando l'intervallo a cui appartiene lo zero, riusciamo a controllare l'errore commesso su θ e dunque possiamo studiare meglio l'ordine di convergenza degli altri metodi. Abbiamo usato alcune accortezze per rendere il metodo di bisezione più performante, ad esempio, sapendo che la soluzione deve essere monotona decrescente, l'intervallo di partenza ha come estremi il punto θ_a e il punto della soluzione calcolato nel nodo precedente. Vi sono due versioni di bisezione, *bisezione.m* funziona rispettando una tolleranza data, mentre *bisezione2.m* funziona con un numero di iterazioni fissato.

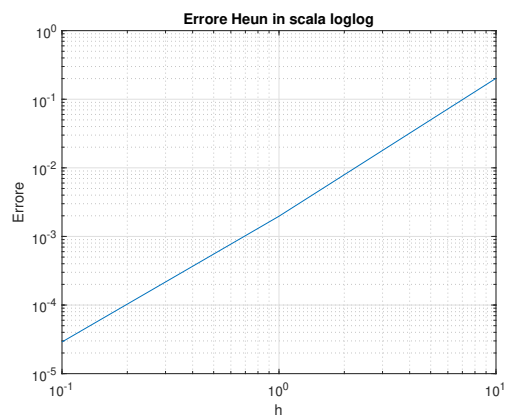
Soluzione esatta

Mettiamo qua sotto il grafico della soluzione esatta ottenuto con bisezione con tolleranza pari a 10^{-13} e usando come passi di mesh i tempi scelti dal metodo RKF45. Notiamo che succede effettivamente quello che ci suggeriva l'intuizione fisica.



Heun

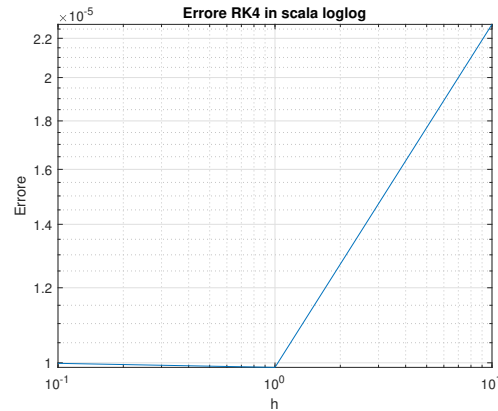
Ordine di convergenza



Notiamo che effettivamente viene rispettato l'ordine di convergenza teorico (2) per funzioni sufficientemente regolari, come nel nostro caso.

RK4

Ordine di convergenza



Notiamo che effettivamente viene rispettato l'ordine di convergenza teorico (4) per funzioni sufficientemente regolari, come nel nostro caso, anzi per $h = 1, 10$ s risulta anche migliore del previsto.

A-Stabilità

Utilizzando il file *mainASHeunRK4Kutta.m* e scegliendo manualmente di volta in volta h , siamo giunti alla conclusione che il metodo di Heun è assolutamente stabile per valori di $h \leq 473$ s, mentre il metodo RK4 è assolutamente stabile per valori di $h \leq 510$ s. La regione di assoluta stabilità del metodo di ordine maggiore è più grande di quella del metodo di ordine minore.

RKF45

Ordine di convergenza

Essendo un metodo a passo adattivo l'ordine di convergenza dovrebbe essere quello della tolleranza, tuttavia, come ci si può accorgere runnando il file *mainRKF45Bis.m* non viene raggiunto l'ordine della tolleranza, ma come minimo viene raggiunto un errore dell'ordine di 10^{-8} . Non abbiamo individuato il motivo, crediamo che sia colpa della funzione di bisezione.

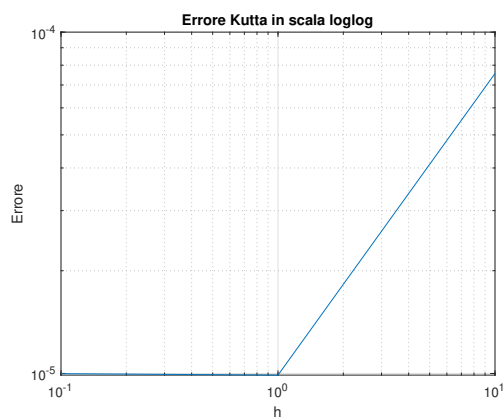
Kutta

Il metodo che ci è stato richiesto di implementare è un metodo Runge-Kutta esplicito a 4 stadi chiamato comunemente Kutta.

Tableau di Butcher

0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	0
1	1	-1	1	0
<hr/>				
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ordine di convergenza



L'ordine di convergenza sembrerebbe essere 4, infatti sappiamo che un metodo RK esplicito a s stadi non può avere un ordine di convergenza superiore ad s .

A-Stabilità

Utilizzando il file *mainASHeunRK4Kutta.m* e scegliendo manualmente di volta in volta h , siamo giunti alla conclusione che il metodo di Kutta è assolutamente stabile per valori di $h \leq 259$ s.

Problema 2

Riduzione a due equazioni

Preliminarmente notiamo che il sistema da analizzare

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta_t SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta_t SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

può essere ridotto ad un sistema di due equazioni differenziali. Siccome si considera la popolazione, composta dai suscettibili (S), dagli infetti (I) e dai rimossi (R), come costante e normalizzata, ovvero tale che

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

si può scegliere di esprimere una delle tre categorie in funzione delle altre due. Nel nostro caso abbiamo eletto R come tale categoria ottenendo dunque il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta_t SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta_t SI - \gamma I \\ R(t) = 1 - S(t) - I(t) \end{cases}$$

Notiamo che questa riduzione comporta dunque una semplificazione del sistema non solo dal punto di vista analitico, ma anche del tempo e del costo di calcolo per approssimarlo.

Metodo numerico scelto

Come metodo è stato scelto RK4 che è il metodo più utilizzato anche in ambito aziendale per il suo ottimo rapporto tra costo computazionale e qualità dell'approssimazione. Il metodo è stato implementato direttamente nei vari codici MATLAB che abbiamo scritto per le varie casistiche proposte da analizzare.

Confronto tra $I(S)$ esatta e numerica

Notiamo che il sistema non è risolvibile in modo esplicito, tuttavia si può esprimere il numero di infetti I in funzione del numero di suscettibili S. Bisogna quindi eliminare il tempo nelle due relazioni e ottenere

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta_t SI - \gamma I}{-\beta_t SI} = -1 + \frac{\gamma}{\beta_t S}$$

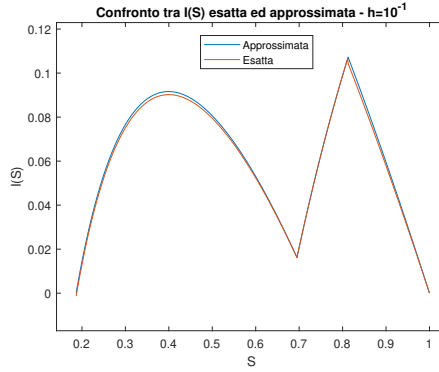
Tale relazione si può facilmente integrare per separazione di variabili

$$dI = \left[-1 + \frac{\gamma}{\beta_t S} \right] dS \Rightarrow I(S) = c_0 - S + \frac{\gamma}{\beta_t} \log S$$

dove c_0 si esprime in funzione dei dati iniziali come

$$c_0 = I_0 + S_0 - \frac{\gamma}{\beta_t} \log S_0$$

c_0 deve essere ricalcolato ogni volta che β_t varia considerando come dati iniziali quelli presenti nell'istante in cui avviene il cambiamento. Nel caso di assenza di lockdown non sorge questo problema mentre nei casi di lockdown breve, indipendentemente dal fatto che sia stretto o debole, c_0 deve essere ricalcolato due volte quando $t = 40$ e quando $t = 70$.

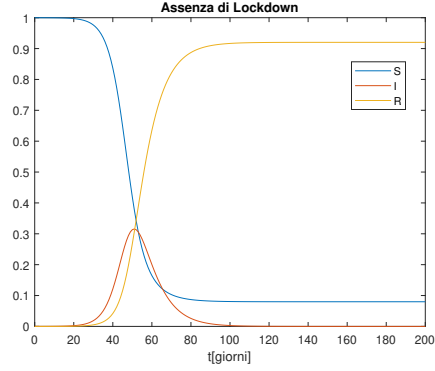


Il grafico si riferisce al modello *lockdown breve e intenso* con un passo di integrazione $h = 10^{-1}$; con un passo inferiore i due grafici si sovrappongono completamente.

Politiche di Lockdown

Assenza di lockdown

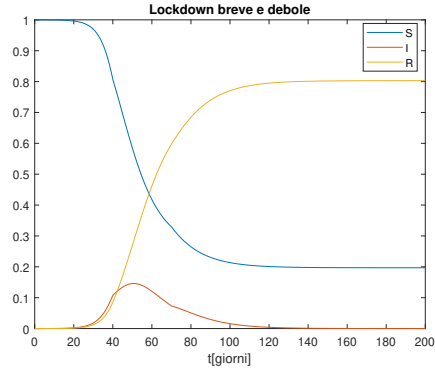
In questo primo modello, sviluppato nel file MATLAB *mainSIRNoLock.m*, si suppone che non vengano messe in atto politiche di lockdown. Dunque β_t rimane costante per tutto il periodo di osservazione con un valore pari a $\beta_0 = 0.35$.



Lockdown breve e debole

In questo secondo modello, sviluppato nel file MATLAB *mainSIRBD.m*, viene attuata una politica di lockdown breve e debole così che β_t vari in funzione di un parametro l_t che rappresenta la presenza e l'intensità del lockdown.

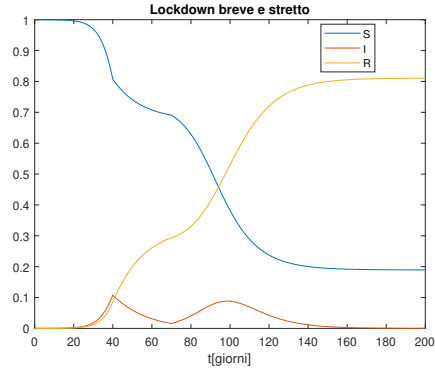
$$\beta_t = (1 - l_t)\beta_0 \quad l_t = \begin{cases} 0.3 & 40 \leq t \leq 70 \text{ giorni} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Lockdown breve e intenso

Nell'ultimo modello proposto, sviluppato nel file MATLAB *mainSIRBS.m*, viene attuata una politica di lockdown breve e intensa. In questo caso

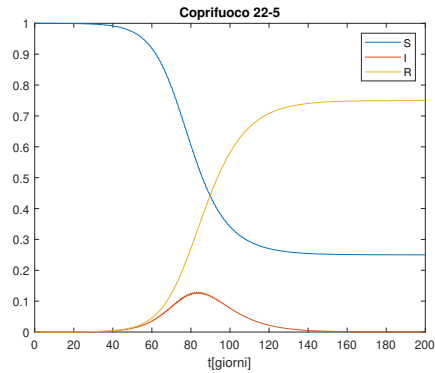
$$\beta_t = (1 - l_t)\beta_0 \quad l_t = \begin{cases} 0.7 & 40 \leq t \leq 70 \text{ giorni} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Politica del coprifuoco

Abbiamo deciso di analizzare un ulteriore caso sviluppato nel file MATLAB *mainSIRCoprifuoco.m*. In questo modello non ci sono politiche di lockdown, ma vige il coprifuoco dalle ore 22:00 alle ore 5:00. Abbiamo deciso di imporre un l_t molto alto in quella fascia oraria, ma non pari a 1 poichè vi sono comunque delle persone che lavorano o degli eventuali trasgressori. Dunque in questo caso abbiamo

$$\beta_t = (1 - l_t)\beta_0 \quad l_t = \begin{cases} 0 & 5 : 00 \leq t \leq 22 : 00 \\ 0.9 & \text{altrove} \end{cases}$$



Interpretazione del problema e dei risultati

Interpretazione del problema

Il problema richiede di studiare l'andamento di una popolazione soggetta ad un'epidemia. La popolazione è divisa in tre categorie: i suscettibili (S) ovvero coloro che si possono ammalare; gli infetti (I) ovvero coloro che sono ammalati e che diffondono la malattia; i rimossi (R) ovvero coloro che sono guariti dalla

malattia o che sono morti a causa della stessa. Si suppone che la popolazione sia in numero costante N e che i dati siano normalizzati avendo dunque

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

Nel modello proposto si considera che la malattia si trasmetta con il venire a contatto da parte di un suscettibile con un infetto e tale termine è rappresentato, con una modulazione β_t della probabilità di incontro dovuta alle politiche di lockdown, da SI . Inoltre vi è un secondo parametro γ che rappresenta la probabilità di guarigione per unità di tempo (in questo caso un giorno). Partendo dall'ipotesi che $R_0 = 0$, ipotesi sensata per una nuova epidemia in cui non vi sono persone immuni, ci si accorge che se $I_0 = 0$ allora $I(t) = 0$ risolve il sistema, ovvero l'infezione non si diffonde. Se invece in modo diametralmente opposto $I_0 = 1$ e dunque $S_0 = 0$ si ottiene facilmente

$$I(t) = e^{-\gamma t} \implies R(t) = 1 - I(t) = 1 - e^{-\gamma t}$$

Interessanti sono dunque i casi in cui $0 < I_0 < 1$ in cui però il sistema non è risolubile in modo esplicito. Si possono però fare delle considerazioni a priori sull'andamento delle funzioni. Dividendo per I la seconda equazione e separando le variabili si ottiene

$$\frac{dI}{I} = [\beta_t S(t) - \gamma] dt \implies I(t) = I_0 e^{\int_0^t [\beta_t S(x) - \gamma] dx}$$

Analogamente dividendo la prima equazione per S e separando le variabili si ottiene

$$\frac{dS}{S} = [-\beta_t I(t)] dt \implies S(t) = S_0 e^{\int_0^t [-\beta_t I(x)] dx}$$

Si deduce quindi che sia $I(t)$ che $S(t)$ sono funzioni strettamente positive, in accordo con il fatto che non possa esserci un numero negativo di persone. Da ciò discende che $S(t)$ è strettamente decrescente

$$\frac{dS}{dt} = -\beta_t SI < 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

Inoltre

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = -\gamma I < 0$$

dunque la funzione $\omega(t) = S(t) + I(t)$ è strettamente decrescente e conseguentemente $R(t) = 1 - S(t) - I(t) = 1 - \omega(t)$ è strettamente crescente. Come osservato nel primo paragrafo il sistema si può ridurre a sole due equazioni

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta_t SI \\ \frac{dI}{dt} = (\beta_t S - \gamma)I \end{cases}$$

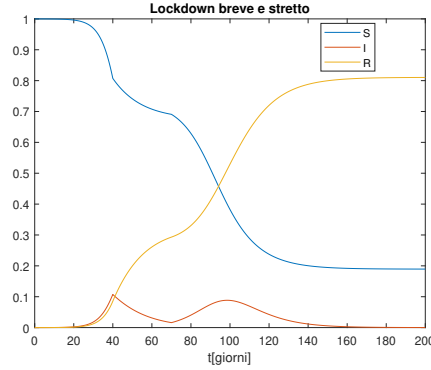
Osserviamo che se in un certo istante

$$S(t) < \frac{\gamma}{\beta_t} =: \alpha \implies \frac{dI}{dt} < 0$$

allora $I(t)$ inizia a decrescere. Dunque se $S_0 < \alpha$ allora l'epidemia non si diffonde, ovvero il numero di infetti diminuisce fin da subito, se invece $S_0 > \alpha$ allora l'epidemia si diffonde fino a toccare il picco di infetti nell'istante in cui $S(t) = \alpha$ per poi diminuire nuovamente. Nei modelli proposti il cambiare di β_t può essere visto come la suddivisione del modello in modelli staccati tra loro a cui vengono cambiate le condizioni iniziali ogni qualvolta venga cambiato il parametro β_t , tuttavia le considerazioni fatte valgono anche in questi casi.

Interpretazione dei risultati

Nell'analisi ci soffermiamo sul caso più interessante ovvero quello del *lockdown breve e intenso*.



Dal grafico possiamo notare il comportamento, a prima vista bizzarro, degli infetti. Tuttavia si spiega in modo semplice rifacendosi a quanto detto nel paragrafo precedente. Infatti β_t varia due volte durante il periodo di osservazione. La prima a $t = 40$ assumendo il valore $\beta_t = 0.3\beta_0$ e la seconda a $t = 70$ ritornando al valore iniziale $\beta_t = \beta_0$. Dunque il problema viene suddiviso in tre intervalli $T1 = [0, 40]$ $T2 = [40, 70]$ $T3 = [70, 200]$, gli intervalli sono tutti chiusi poiché i valori iniziali di ogni intervallo sono imposti come i valori finali ottenuti nell'intervallo precedente.

t	β_t	S_0	α
0	β_0	0.999965	0.4
40	$0.3\beta_0$	0.812774785382426	$1.\bar{3}$
70	β_0	0.695103025703869	0.4

Dalla tabella si nota come all'inizio $S_0 > \alpha$ e quindi gli infetti crescono. Al tempo $t = 40$ invece $S_0 < \alpha$ allora il numero degli infetti deve calare, come si vede dal grafico. Al tempo $t = 70$ nuovamente $S_0 > \alpha$ dunque gli infetti tornano a crescere in numero. La crescita raggiunge il picco quando $S(t) = \alpha$ e poi inizia a diminuire. Dopo $t = 70$ non ci sono più cambiamenti del valore di β_t dunque il sistema non presenta e non può presentare altri fenomeni di momentanea decrescita e poi ricrescita del numero degli infetti.