RO raccolta di esercizi di PL e PLI:

- Esercizio 1:

	A	B
P1	4	10
P2	7	7

quantità usata di P1 ≥ 40

quantità usata di P2 ≤ 49

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\text{quantità prodotta di A}}{\text{quantità prodotta di B}} \leq 4$$

profitto A = 2 profitto B

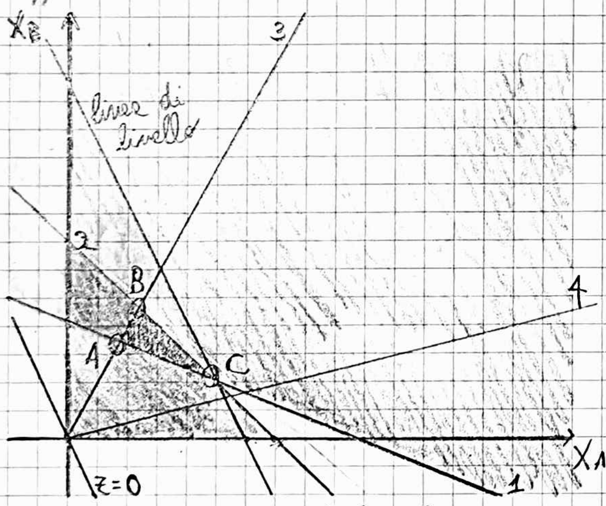
obiettivo → max profitto

$$\begin{cases} \max\ 2X_A + X_B \\ 4X_A + 10X_B \geq 40 \\ 7X_A + 7X_B \leq 49 \to X_A + X_B \leq 7 \\ X_A - \frac{1}{2}X_B \geq 0 \\ X_A - 4X_B \geq 0 \to \text{vincolo superfluo} \\ X_A, X_B \geq 0 \end{cases}$$

X_A = quantità prodotta di A

X_B = quantità prodotta di B

Rappresentazione del dominio di ammissibilità:



riscriviamo prima il modello:

$$\begin{cases} -4X_A - 10X_B \leq -40 \\ X_A + X_B \leq 7 \\ -X_A + \frac{1}{2}X_B \leq 0 \\ \max\ 2X_A + X_B \\ X_A, X_B \geq 0 \end{cases}$$

introduciamo le variabili slack:

$$\begin{cases} \max\ 2X_A + X_B \\ -4X_A - 10X_B + Y_1 = -40 \\ X_A + X_B + Y_2 = 7 \\ -X_A + \frac{1}{2}X_B + Y_3 = 0 \\ X_A, X_B \geq 0 \end{cases}$$

composizione delle s.b.e:

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3
A:	>0	>0	=0	>0	=0
B:	>0	>0	>0	=0	=0
C:	>0	>0	=0	=0	>0

Riscriviamo il modello matematico:

$$
\begin{cases}
\max \; 2X_A + X_B \\
-4X_A - 10X_B + Y_1 = -40 \\
X_A + X_B + Y_2 = 7 \\
-X_A + \frac{1}{2}X_B + Y_3 = 0 \\
X_A, X_B \geq 0
\end{cases}
$$

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	$-Z$	b
Y_1	-4	-10	1				-40
→ Y_2	1	1		1			7
Y_3	-1	$\frac{1}{2}$			1		0
$-Z$	2 ↑	1				1	0

← qui forse andava preso Y_3 come variabile uscente

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	$-Z$	b
Y_1		-6	1	4			-12
X_A	1	1		1			7
Y_3		$3/2$		1	1		7
$-Z$		-1		-2		1	-14

↑
$Y_1 + 4Y_2$
$Y_3 + Y_2$
$-Z - 2Y_2$

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & -12 & 1 & 0 & -4 & 0 & -40 \\
0 & 3/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\
+1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & +2 & 1 & 0
\end{array}
$$

svolgo i calcoli alla pagina successiva:

← caso in cui si sceglie Y_3 come variabile uscente.

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	$-Z$	b
Y_1	0	-12	1	0	-4	0	-10
Y_2	0	3/2	0	1	1	0	7
X_A	1	-1/2	0	0	-1	0	0
$-Z$	0	2	0	0	2	1	0

$-2X_A \to$ per ottenere 1

↑

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	$-Z$	b
Y_1	-24	0	1	0	20	0	-40
Y_2	3	0	0	1	-3	0	7
X_B	-2	1	0	0	2	0	0
$-Z$	4	0	0	0	4	1	0

$Y_1 + 12X_B$

$Y_2 - \frac{3}{2}X_B$

$-Z - 2X_B$

Non ho ancora ben capito come funziona il simplesso.
Devo approfondire le scelte delle variabile uscente e capire se in questo caso è necessario applicare il big M o il metodo delle due fasi.

Domande:

Se dovessimo avere un $\frac{b_i}{e_{is}} = 0$ $(b_i = 0)$, e tutti gli altri termini $\frac{b_j}{e_{js}} > 0$, dovremmo scegliere e_{is} come pivot?

Pongo queste domande perché ho il dubbio che sia illegale.

Probabilmente deve essere riscritto il modello:

$$
\begin{cases}
\max z = 2x_A + x_B \\
\min W = h_1 + h_2 \\
4x_A + 10x_B - y_1 + h_1 = 40 \\
x_A + x_B + y_2 = 7 \\
x_A - \frac{1}{2}x_B - y_3 + h_2 = 0 \\
x_A, x_B \geq 0
\end{cases}
$$

operazione di pivoting: $h_1 = 40 - 4x_A - 10x_B + y_1$

$h_2 = y_3 - x_A + \frac{1}{2}x_B$

$$W = 40 - 5x_A - \frac{19}{2}x_B + y_1 + y_3 \rightarrow -W + 5x_A + \frac{19}{2}x_B - y_1 - y_3 = 40$$

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	h_1	h_2	$-W$	$-z$	b
h_1	4	10	-1			1				40
y_2	1	1		1						7
h_2	1	$-\frac{1}{2}$			-1		1			
$-z$	2	1							1	0
$-W$	5	$\frac{19}{2}$	-1		-1			1		40

← Non riesco a capire il motivo per cui ora non ci sono variabili candidate per entrare in base.

come mai gli Δ_is sono tutti negativi o nulli? Nei problemi a minimizzare non entrano variabili con coefficienti negativi?

Provo a risolvere il problema con il big M:

$$\begin{cases} \max z = 2X_A + X_B - Mh_1 - Mh_2 \\ 4X_A + 10X_B - Y_1 + h_1 = 40 \\ X_A + X_B + Y_2 = 7 \\ X_A - \frac{1}{2}X_B - Y_3 + h_2 = 0 \\ X_A, X_B \geq 0 \end{cases}$$

$$h_1 = 40 - 4X_A - 10X_B + Y_1$$
$$h_2 = \frac{1}{2}X_B - X_A + Y_3$$

$$\max z = 2X_A + X_B - M(40 - 4X_A - 10X_B + Y_1) - M(-X_A + \frac{1}{2}X_B + Y_3) =$$
$$= 2X_A + X_B - 40M + 4MX_A + 10MX_B - MY_1 + MX_A - \frac{1}{2}MX_B - MY_3 =$$
$$= (2+5M)X_A + \left(1 + \frac{19}{2}M\right)X_B - MY_1 - MY_3 - 40M$$

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	h_1	h_2	$-z$	b
→ h_1	4	10	-1			1			40
Y_2	1	1		1					7
h_2	1	$-\frac{1}{2}$			-1		1		
$-z$	$2+5M$	$1+\frac{19}{2}M$ ↑	$-M$		$-M$			1	$40M$

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	h_1	h_2	$-z$	b
X_B	$2/5$	1	$-1/10$	0	0	$1/10$	0	0	4
Y_2	$3/5$	0	$1/10$	1	0	$-1/10$	0	0	3
→ h_2	$6/5$	0	$-1/20$	0	-1	$1/20$	1	0	2
$-z$	$\frac{8+6M}{5}$ ↑	0	$\frac{2-M}{20}$	0	$-M$	$\frac{-2+19M}{20}$	0	0	$2M-2$

$Y_2 - X_B$

$h_2 + \frac{1}{2}X_B$

$-z - \left(1 + \frac{19}{2}M\right)X_B$

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	h_1	h_2	$-z$	b
X_B	0	1	$-\frac{1}{12}$	0	$1/3$	$1/12$	$-1/3$	0	$\frac{10}{3}$
Y_2	0	0	$1/8$	1	$1/2$	$-1/8$	$-1/2$	0	2
X_A	1	0	$-\frac{1}{24}$	0	$-5/6$	$1/24$	$5/6$	0	$5/3$
	0	0	$\frac{1}{6}+\frac{1}{5}M$	0	$4/3$	$-\frac{1}{5}+\frac{2}{10}M$	$-\frac{4}{3}+M$	0	$-14/3$

$\frac{5}{6}h_2 = X_A$

$X_B - \frac{2}{5}X_A$

$Y_2 - \frac{3}{5}X_A$

$-z - \left(\frac{8+6M}{5}\right)X_A$

↑ devo aver sbagliato i calcoli, perché qui dovrei far rientrare h_2 (?)

Esercizio 2:

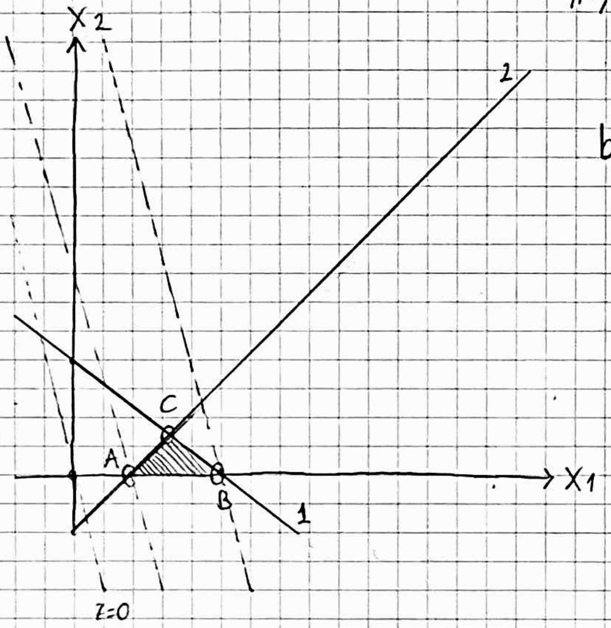
$$\min\ z = 4x_1 + x_2$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$
$$x_1 - x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) disegna dominio e risolvi graficamente

b) indica la composizione delle s.b.a. ed evidenzia quelle degeneri

c) esegui uno step del simplesso a partire da quella indicata e specifica i vertici di partenza e di destinazione.

a)



no, il problema è a minimizzare: A è ottimo

B dovrebbe essere il vertice ottimo.

b)

	x_1	x_2	y_1	y_2	h_2
A	>0	=0	>0	=0	=0
B	>0	=0	=0	>0	=0
C	>0	>0	=0	=0	=0

5 variabili → n = 5

2 vincoli → m = 2

non dovrebbero esserci soluzioni degeneri.

c)

	x_1	x_2	y_1	y_2	h_2	$-z$	b
y_1	4	5	1	0	0	0	20
→ h_2	1	-1	0	-1	1	0	2
$-z$	4-M	1+M	0	M	0	1	-2M

↑

$$x_1, x_2, y_1, y_2, h_2$$
$$V = (0, 0, 20, 0, 2)$$

↑

ho dei dubbi sulla correttezza di questo vertice.

operazioni da compiere:

$y_1 - 4h_2$

$-z - (4-M)h_2$

	x_1	x_2	y_1	y_2	h_2	$-z$	b
y_1	0	9	1	4	-4	0	12
x_1	1	-1	0	-1	1	0	2
$-z$	0	5	0	4	M-4	1	-8

soluzione ottima: $P = (2, 0, 12, 0, 0) \equiv A$

$z = 8$

Esercizio 3:

4 Tipi di merce (scatole)

ogni scatola ha un proprio: volume, peso; consideriamo [redacted] anche il numero di scatole da recapitare

7 veicoli, ognuno con capacità massima 20 pallet e 400 kg.

costo giornaliero / veicolo = 200K€

obiettivo: minimizzare veicoli utilizzati

SCATOLA	# ESEMPLARI	# PALLET VOLUME	PESO
1	3	8	70
2	5	7	180
3	2	3	90
4	2	4	110
	e_i	v_i	p_i

x_{ij} → numero di esemplari di Tipo i Trasportati dal veicolo j

y_j → variabile binaria che mi indica se quel veicolo j è utilizzato

$$\min \sum_{j=1}^{7} y_j$$ → minimizzare numero di veicoli utilizzati

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij}\, p_i \leq 400\, y_j \quad \forall j \in 1,..,7$$ → vincolo sul peso

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij}\, v_i \leq 20\, y_j \quad \forall j \in 1,..,7$$ → vincolo sul volume

$$\sum_{j=1}^{7} x_{ij} = e_i \quad \forall i \in 1,..,4$$ → vincoli sul numero di esemplari

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in 1,..,4, \forall j \in 1,..,7$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in 1,..,7$$

Rimane ancora da implementare tramite Gurobi

Esercizio 4 :

5 clienti da rifornire : C1, C2, C3, C4, C5
si vuole costruire un massimo di due depositi
abbiamo tre possibili zone dove costruirli
A seconda di dove vengono costruiti, i tre possibili depositi hanno un costo di costruzione e una capacità massima diversi.

costi → K€ capacità → Tonnellate

	costo di costruzione	capacità massima
deposito 1	10000	180
deposito 2	15000	230
deposito 3	13000	500

c'_i = costo di costruzione

c''_i = capacità max

Nella prossima tabella sono riportati il quantitativo di merce (in tonnellate) richiesto da ciascun cliente e i costi (in K€) del trasporto di una unità di merce da ciascuno dei possibili depositi a ciascun cliente.

	C1	C2	C3	C4	C5
deposito 1	15	13	27	9	7
deposito 2	12	21	34	21	3
deposito 3	7	10	2	17	12
Richiesta	91	170	135	153	110

c_{ij} = costo di trasporto

r_j = richiesta del cliente

Obiettivo : minimizzare il costo complessivo

Ipotesi : non ci sono limitazioni sulle quantità di merce trasportabili.

x_{ij} → quantità di merce trasportata dal magazzino i verso il cliente j (espressa in tonnellate)

y_i → variabile binaria che indica la costruzione del deposito i

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} c_{ij} + \sum_{i=1}^{3} c'_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \leq c''_i y_i \qquad \forall i = 1,..,3$$ → vincoli di capacità massima

$x_{ij} \geq 0 \qquad y_i \in \{0, 1\}$

$\sum_{i=1}^{3} y_i \leq 2$

(prosegue alla pagina succ.)

$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = r_j \quad \forall j = 1, .., 5$ → vincoli sulle richieste dei clienti

Spazio per eventuali osservazioni:

Esercizio 5:

7 centri di domanda
5 punti → A, B, C, D, E nei quali poter costruire nuovi ipermercati

i clienti non devono distare più di 30 minuti da un qualsiasi ipermercato.

Costi di apertura dei centri di vendita: A = 310, B = 250, C = 260, D = 330, E = 280 ← c_j

Obiettivo: minimizzare i costi di apertura

	A	B	C	D	E
1	41	33	24	29	58
2	25	12	22	58	41
3	21	43	34	54	18
4	21	42	39	26	18
5	11	23	24	29	53
6	47	23	19	16	31
7	37	47	51	26	19

← d_{ij} → distanze del centro i dell'ipermercato j

x_{ij} → variabile binaria che indica l'afferenza del centro all'ipermercato

$$\begin{cases} \min \sum_{j=A}^{E} c_j y_j \\ x_{ij} d_{ij} \leq 30 y_j \quad \forall i = 1, .., 7 \text{ e } \forall j = A, .., E \\ \sum_{j=A}^{E} x_{ij} \geq 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad y_j \in \{0,1\} \end{cases}$$

← sembra una sorta di set covering

→ vincolo di copertura

b) Si suppone che l'azienda ritenga attivabile il centro B se almeno uno dei centri C o D sia attivato. Come cambia il modello?

$$y_B \leq y_C + y_D$$

si deve aggiungere il vincolo appena descritto. Il modello sarà dunque:

$$\min \sum_{j=A}^{E} c_j y_j$$

$$x_{ij} d_{ij} \leq 30 y_j \quad \forall i = 1,..,7 \text{ e } \forall j = A,..,E$$

$$\sum_{j=A}^{E} x_{ij} \geq 1 \quad \forall i = 1,..,7$$

$$y_B \leq y_C + y_D$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1,..,7 \text{ e } \forall j \in A,..,E$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j = A,..,E$$

Esercizio 6:

dimensioni totali = 95 cm^2

\# argomenti = 10

Argomento	Spazio richiesto (cm^2) $\uparrow S_i$	% copertura dell'esame $\uparrow C_i$
1	10	5
2	18	10
3	22	15
4	16	10
5	14	10
6	20	5
7	32	20
8	12	5
9	12	15
10	10	5

Tre dei foglietti {2, 3, 7, 8, 9}

O porto il 9, o il 10.

Porto il 5 solo se c'è anche il 4.

$Y_i \to$ variabile binaria che indica se il foglietto è messo nello zaino

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{10} C_i Y_i \to \text{massimizzare la copertura} \\ Y_2 + Y_3 + Y_7 + Y_8 + Y_9 \geq 3 \\ Y_9 \leq M z \\ Y_{10} \leq M(1-z) \\ Y_5 \leq Y_4 \\ \sum_{i=1}^{10} S_i Y_i \leq 95 \end{cases}$$

Esercizio 7:

1 macchina → capacità unitaria (1 lavoro per volta)

3 lavori, con tempo di processamento, rispettivamente:

$p_1 = 2 \quad p_2 = 3 \quad p_3 = 4$

determinare la sequenza che minimizza la media dei tempi di completamento dei lavori, tenendo conto che:

- se il primo lavoro precede il secondo, l'inizio del terzo lavoro deve aspettare un tempo $\Delta 3 = 2$ dopo il termine del 2° lavoro
- se il terzo lavoro precede il primo, l'inizio del secondo deve aspettare un tempo $\Delta_2 = 3$ dopo il termine del 1° lavoro

Esercizio 8:

$G(N, A) \rightarrow$ non orientato
vanno dislocate delle pattuglie sui nodi $\rightarrow$ 2 Tipi: fisse e mobili
Le Truppe fisse difendono solo il nodo i e per dislocarle si spende 2.
Le Truppe mobili difendono il nodo i e Tutti i nodi adiacenti, ma per dislocare la Truppa si spende 3.

Obiettivo difendere Tutti i nodi del grafo con costo minimo.

$$\min \sum_i 2Y_{i1} + \sum_i 3Y_{i2} \rightarrow \text{minimizzare i costi}$$

costo delle localizzazione delle pattuglie fisse

variabile binaria che indica se nel nodo i è stata piazzata una pattuglia fissa.

ipotesi: ogni nodo ha una variabile che indica se è difeso $\rightarrow z_i$

$z_i \geq Y_{i1}$
$z_i \geq Y_{i2}$
$z_i \geq Y_{j2}$, $\forall j \in S(i)$
$z_i \leq Y_{i1} + Y_{i2} + Y_{j2}$ $\quad \forall j \in S(i)$
$z_i \in \{0,1\}$ $\quad Y_{i1}, Y_{i2} \in \{0,1\}$
$\forall i = 1, .., |N|$ $\rightarrow$ cardinalità dei nodi

ogni nodo deve:
- o essere difeso da una pattuglia fissa ($Y_{i1} = 1$)
- o essere difeso da una pattuglia mobile localizzata su di lui. ($Y_{i2} = 1$)
- o essere difeso da una pattuglia mobile localizzata su un nodo a lui vicino ($\sum_{j \in S(i)} Y_{j2} \geq 1$)

(quindi almeno una $Y_{j2} = 1$ $\forall j \in S(i)$)

Devo ancora imporre il vincolo di copertura:

$$\sum_{i=1}^{|N|} z_i = |N|$$

Il modello, se non ho fatto errori, dovrebbe essere:

$$\min \sum_{i=1}^{|N|} 2Y_{i1} + \sum_{i=1}^{|N|} 3Y_{i2}$$

$z_i \geq Y_{i1}$ $\quad \forall i = 1, .., |N|$

$z_i \geq Y_{i2}$ $\quad \forall i = 1, .., |N|$

$z_i \geq Y_{j2}$ $\quad \forall i = 1, .., |N|$ e $\forall j \in S(i)$

$z_i \leq Y_{i1} + Y_{i2} + Y_{j2}$ $\quad \forall i = 1, .., |N|$ e $\forall j \in S(i)$

$\sum_{i=1}^{|N|} z_i = |N|$ $\quad z_i, Y_{i1}, Y_{i2} \in \{0,1\}$ $\forall i = 1, .., |N|$

Esercizio 9:

$r_j \rightarrow$ quantità richieste di risorse j

\# bamboline = 15000 = r_1

\# automobiline = 17000 = r_2

\# libri = 12000 = r_3

d_{ij} → numero di oggetti di Tipo j nello stock i

	STOCK	j=1 BAMBOLINE	j=2 AUTOMOBILINE	j=3 LIBRI	c_i COSTO (EURO)
i=1	1	100	40	80	90
i=2	2	50	90	20	75
i=3	3	80	60		80
i=4	4	25	125	140	100

non è possibile acquistare pacchi sia dello stock 1 che 2

Babbo natale riceve uno sconto di 2000€ se il numero complessivo di stock 3 e 4 acquistati è maggiore di 120

obiettivo: minimizzare i costi

$$\min \sum_{i=1}^{4} x_i c_i - 2000\, z$$

x_i → # stock i acquistati

c_i → costo stock i

$$\sum_{i=1}^{4} d_{ij} x_i = r_j \quad \forall j = 1,..,3$$ → vincolo sulle richieste

$x_1 \le M y_1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \le M y_2$

$x_2 \geq 0$

$y_1 + y_2 = 1$

→ vincoli di alternativa sugli stock di Tipo 1 e 2

penso ci sia una imprecisione su questo vincolo. La Traccia non costringe il modello a essere intero, quindi il 121 non ha molto significato, ma d'altronde $x_3 + x_4 \geq 120 z$ temo non funzionerebbe. Probabilmente, anche per senso logico, il modello deve essere intero.

$x_3 + x_4 \geq 121 z$

$z \in \{0, 1\}$

→ vincolo per lo sconto di 2000€ al superamento della soglia (120)

in realtà mi trovo con il vincolo descritto nell'ultima osservazione

↳ continua →

$$\min \sum_{i=1}^{4} c_i X_i - 2000\, Y_3$$

$$\sum_{i=1}^{4} d_{ij} X_i = V_j \quad \forall j = 1, \dots, 3$$

$X_1 \leq M Y_1$

$X_1 \geq 0$ → ridondanti, ma inseriti per chiarezza

$X_2 \leq M Y_2$

$X_2 \geq 0$

$Y_1 + Y_2 \leq 1$ → corretto rispetto al modello precedente

$X_3 + X_4 \geq 120\, Y_3$

$X_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4$ → volendo possono essere considerate intere, ma dovrebbe essere modificato il vincolo:

$$\sum_{i=1}^{4} d_{ij} X_i = V_j$$

in:

$$\sum_{i=1}^{4} d_{ij} X_i \geq V_j$$

$Y_1, Y_2, Y_3 \in \{0, 1\}$

Siccome non sono sicuro del risultato, lascio dello spazio per eventuali osservazioni:

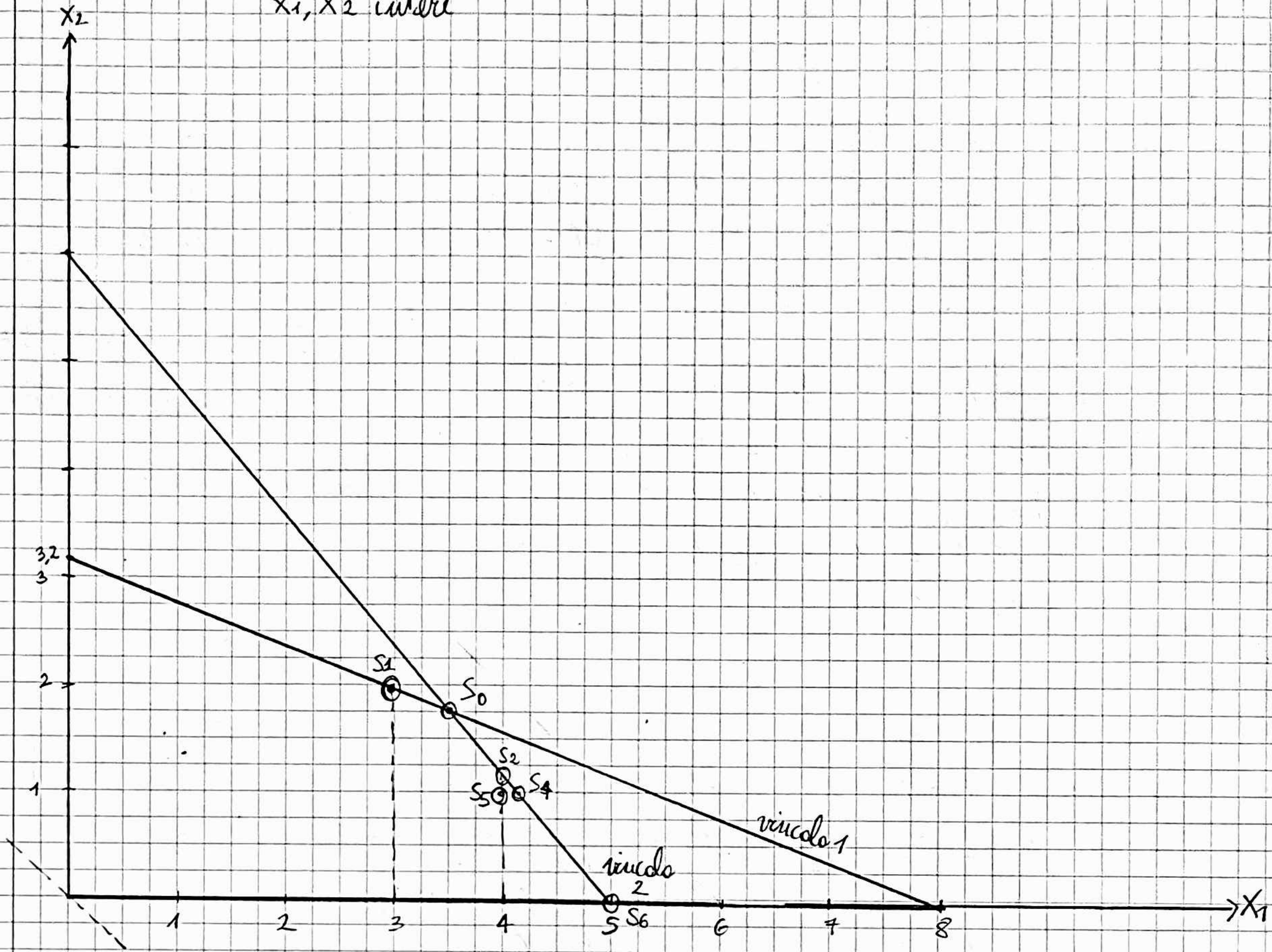
Esercizio 10:

$\max\ z = x_1 + x_2$

$2x_1 + 5x_2 \leq 16$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$

x_1, x_2 intere



S0

$U_0 \simeq 5,3$

$x_1 \leq 3$ → S1: $Y_1 = (3,2)$, $U_1 = 5$

$x_1 \geq 4$ → S2: $U_2 \simeq 5,2$

$x_2 \geq 2$ → S3: inammiss.

$x_2 \leq 1$ → S4: $U_4 \simeq 5,2$

$x_1 \leq 4$ → S5: $Y_5 = (4,1)$, $U_5 = 5$

$x_1 \geq 5$ → S6: $Y_6 = (5,0)$, $U_6 = 5$

Esercizio 16:

$$\min\ z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3$$
$$3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\downarrow$

$$\min\ z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + h_1 = 3$$
$$3x_1 + x_2 - 3x_3 + h_2 - y_2 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$W = h_1 + h_2 =$
$= 3 - x_1 + 2x_2 - 2x_3 +$
$+ 6 - 3x_1 - x_2 + 3x_3 +$
$+ y_2 =$
$= 9 - 4x_1 + x_2 + x_3 + y_2$
$-W - 4x_1 + x_2 + x_3 + y_2 = -9$

vogliamo minimizzare W.

	x_1	x_2	x_3	y_2	h_1	h_2	$-z$	$-w$	b
h_1	1	-2	+2	0	1	0	0	0	3
→ h_2	3	1	-3	-1	0	1	0	0	6
$-W$	-4	1	1	1	0	0	0	1	-9
$-z$	3	2	4	0	0	0	1	0	0

↑

	x_1	x_2	x_3	y_2	h_1	h_2	$-z$	$-w$	b
→ h_1	0	$-7/3$	3	$1/3$	1	$-1/3$	0	0	1
x_1	1	$1/3$	-1	$-1/3$	0	$1/3$	0	0	2
$-W$	0	$7/3$	-3	$-1/3$	0	$+4/3$	0	1	-1
$-z$	0	1	7	1	0	-1	1	0	-6

↑

	x_1	x_2	x_3	y_2	h_1	h_2	$-z$	$-w$	b
x_3	0	$-7/9$	1	$1/9$	$1/3$	$-1/9$	0	0	$1/3$
x_1	1	$-4/9$	0	$-2/9$	$1/3$	$2/9$	0	0	$7/3$
$-W$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$-z$	0	$\frac{58}{9}$	0	$2/9$	$-7/3$	$-2/9$	1	0	$-\frac{25}{3}$

	x_1	x_2	x_3	y_2	$-z$	b
x_3	0	$-7/9$	1	$1/9$	0	$1/3$
x_1	1	$-4/9$	0	$-2/9$	0	$7/3$
$-z$	0	$\frac{58}{9}$	0	$2/9$	1	$-\frac{25}{3}$

→ soluzione ottima: $x_2 = y_2 = 0$

$x_1 = \frac{7}{3} \quad x_3 = \frac{1}{3}$

$z = \frac{25}{3}$

Esercizio 11:

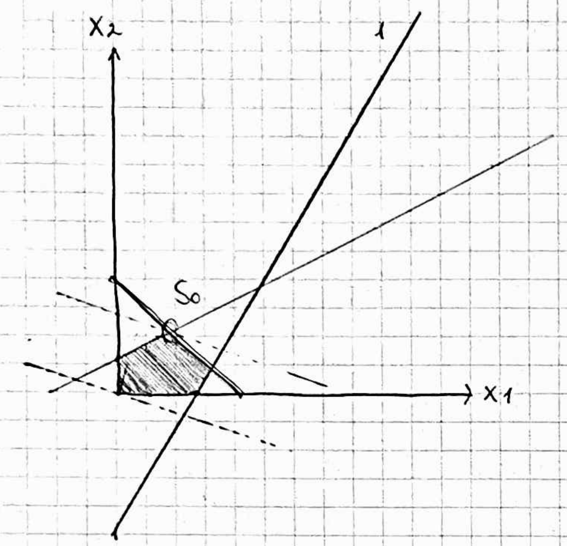
$$\max\ x_1 + 3x_2$$

1) $4x_1 - 2x_2 \leq 11$

2) $-2x_1 + 4x_2 \leq 5$

3) $x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$ (intere)



S_0
$U_0 \simeq 8,1$

$x_1 \leq 1$ ↙ ↘ $x_1 \geq 2$

S_1
$U_1 \simeq 6,4$

S_2
$U_2 \doteq 8$
$Y_2 = (2,2)$

↑
soluzione ottima

Esercizio 12:

disponibilità → 14 milioni

4 tipi di investimenti

	i				
INVESTIMENTO	1	2	3	4	
RITORNO NETTO	16	22	12	8	→ r_i
CAPITALE DA INVESTIRE	5	7	4	3	→ c_i

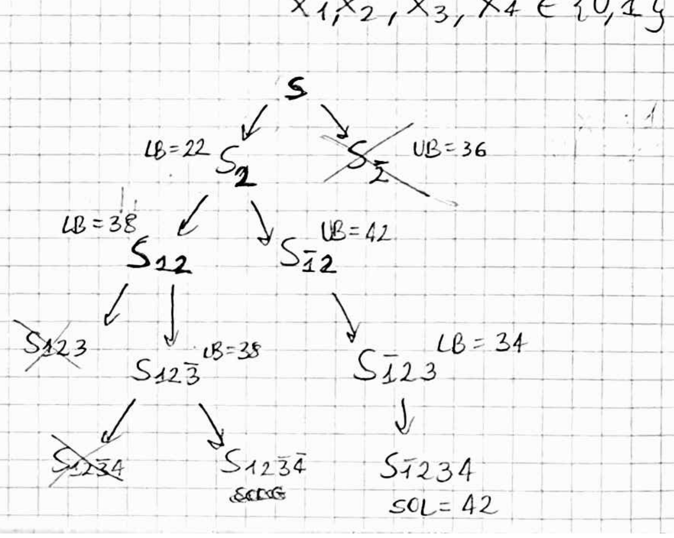
$$\max \sum_{i=1}^{4} r_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^{4} c_i x_i \leq 14$$
$$x_i \text{ intere} \quad \forall i = 1, \dots, 4$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4$$

↓

$$\max \; 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$
$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ e intere}$$

Osservazione: questo modello è in PLI, ma la traccia allude alla possibilità di scegliere interamente o non scegliere affatto di effettuare l'investimento. Per cui, vista anche la difficoltà di effettuare manualmente un branch and bound a 4 variabili, non rimane altro che modellare il problema come un problema di zaino.

$$\max \; 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$
$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$$



inserendo l'elemento di ricavo 22 (quindi con $x_2 = 1$) ho un LB = 22 (lo uso per ridurre i nodi)

Esercizio 13:

due tipi di solventi → 1 e 2
due tipi di vernici → A e B
quintali: → 1B = 1 solvente 1 + 3 solvente 2
→ 1A = 6 solvente 1 + 1 solvente 2
bisogna usare almeno 12 unità di solvente 1 e almeno 12 unità di solvente 2.
Si devono produrre in totale, tra A e B, massimo 9 quintali di vernice.
i costi di A e B sono equivalenti

obiettivo: minimizzare il costo di produzione

a) modellare il problema in PL
b) risolvere graficamente
c) branch and bound aiutandosi con un'analisi grafica.

a) $i \in \{1,2\}$ → indice dei solventi
$j \in \{A,B\}$ → indice delle vernici
→ non userò gli indici, particolarizzerò il modello

$$\min \; X_A + X_B$$

1) $6X_A + X_B \geq 12$

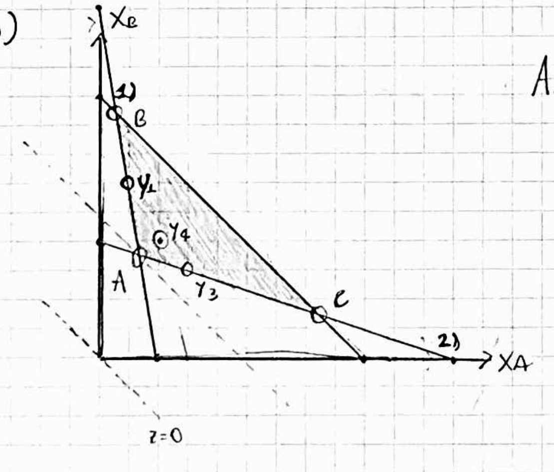
2) $X_A + 3X_B \geq 12$

3) $X_A + X_B \leq 9$

$X_A, X_B \geq 0$

note: le variabili non sono intere

b)



A è il vertice ottimo

c)

S_0
$L_0 \simeq 4,8$

$X_A \leq 1$ → S_1: $y_1 = (1,6)$, $L_1 = 7$

$X_A \geq 2$ → S_2: $L_2 \simeq 5,5$

$X_B \leq 3$ → S_3: $y_3 = (3,3)$, $L_3 = 6$

$X_B \geq 4$ → S_4: $y_4 = (2,4)$, $L_4 = 6$

Esercizio 14:

10 display
18 logica di controllo
12 trasmettitori
21 tastierini
9 moduli di navigazione
10 led

Telecomandi → 2 tipi → A e B

A → 1 display, 1 modulo di navigazione, 2 Testierini, ~~2~~
2 moduli di logica, 1 trasmettitore, 1 led

B → 2 display, 3 tastierini, 2 moduli di logica e 3 trasmettitori

guadagno netto di A → 3 €
" " " B → 8 €

obiettivo: massimizzare il guadagno

$$\max\ 3x_A + 8x_B$$

$x_A + 2x_B \leq 10$ → vincolo sui display
$x_A \leq 9$ → vincolo sui moduli di navigazione
$2x_A + 3x_B \leq 21$ → vincolo sui tastierini
$2x_A + 2x_B \leq 18$ → vincolo sui moduli di logica
$x_A + 3x_B \leq 12$ → vincolo sui trasmettitori
$x_A \leq 10$ → vincolo sui led

Ripulisco il modello:

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_A + 8x_B \\
& x_A + 2x_B \leq 10 \\
& x_A \leq 9 \\
& 2x_A + 3x_B \leq 21 \\
& x_A + x_B \leq 9 \\
& x_A + 3x_B \leq 12 \\
& x_A, x_B \geq 0 \text{ e intere}
\end{aligned}
$$

Esercizio 15:

$$\max\ x_1 + 5x_2$$
$$x_1 - x_2 \leq 3$$
$$5x_1 - 2x_2 = 8$$
$$-x_1 + 3x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

usare il metodo delle due fasi

$$\downarrow$$

$$\max\ z = x_1 + 5x_2$$
$$\min\ w = h_2 + h_3 \quad \rightarrow \quad w = 8 - 5x_1 + 2x_2 +$$
$$x_1 - x_2 + y_1 = 3 \qquad + 1 + x_1 - 3x_2 + y_3 =$$
$$5x_1 - 2x_2 + h_2 = 8 \qquad = -4x_1 - x_2 + y_3 + 9$$
$$-x_1 + 3x_2 - y_3 + h_3 = 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

	x_1	x_2	y_1	y_3	h_2	h_3	$-w$	$-z$	b
y_1	1	-1	1						3
→ h_2	5	-2			1				8
h_3	-1	3		-1		1			1
$-w$	-4	-1		1			1		-9
$-z$	1	5	0	0	0	0	0	1	0

↑

	x_1	x_2	y_1	y_3	h_2	h_3	$-w$	$-z$	b
y_1	0	$-\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	$7/5$
x_1	1	$-\frac{2}{5}$	0	0	$1/5$	0	0	0	$8/5$
→ h_3	0	$13/5$	0	-1	$1/5$	1	0	0	$13/5$
$-w$	0	$-13/5$	0	1	$1/5$	0	1	0	$-13/5$
$-z$	0	$\frac{27}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	$-8/5$

↑

	x_1	x_2	y_1	y_3	h_2	h_3	$-w$	$-z$	b
y_1	0	0	1	$-\frac{3}{13}$	$-\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	0	2
x_1	1	0	0	$-\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	0	2
x_2	0	1	0	$-\frac{5}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{5}{13}$	0	0	1
$-w$	0	0	0	0	1	1	1	0	0
$-z$	0	0	0	$\frac{27}{13}$	$-\frac{8}{13}$	$-\frac{27}{13}$	0	1	-7

↖ posso rimuovere $h_2, h_3, -w$

$y_1 - x_1$:

$1 - 1 = 0$
$-1 + \frac{2}{5} = -\frac{3}{5}$
$1 - 0 = 1$
$0 - 0 = 0$
$0 - 1/5 = -1/5$
$0 - 0 = 0$
$3 - 8/5 = 7/5$

$h_3 + x_1$:

$-1 + 1 = 0$
$3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$
$0 + 0 = 0$
$-1 + 0 = -1$
$0 + 1/5 = 1/5$
$1 + 0 = 1$
$\vdots$
$1 + 8/5 = \frac{13}{5}$

continuo i calcoli su un altro foglio.

$-w + 4x_1$:

$-4 + 4(1)$
$-1 + 4(-\frac{2}{5})$
$0 + 4(0)$
$1 + 4(0)$
$0 + 4(1/5)$
$0 + 4(0)$
$1 + 4(0)$
$0 + 4(0)$
$-9 + 4(\frac{8}{5})$

$-z + x_1$:

$1 - 1 = 0$
$5 + \frac{2}{5} = \frac{27}{5}$
$0 - 0 = 0$
$0 - 0 = 0$
$0 - 1/5 = -\frac{1}{5}$
$0 - 0 = 0$
$0 - 0 = 0$
$1 - 0 = 1$
$0 - 8/5 = -\frac{8}{5}$

	x_1	x_2	y_1	y_3	$-t$	b
y_1	0	0	1	$-\frac{3}{13}$	0	2
x_1	1	0	0	$-\frac{5}{13}$	0	2
x_2	0	1	0	$-\frac{2}{13}$	0	1
$-t$	0	0	0	$+\frac{21}{13}$	1	-7

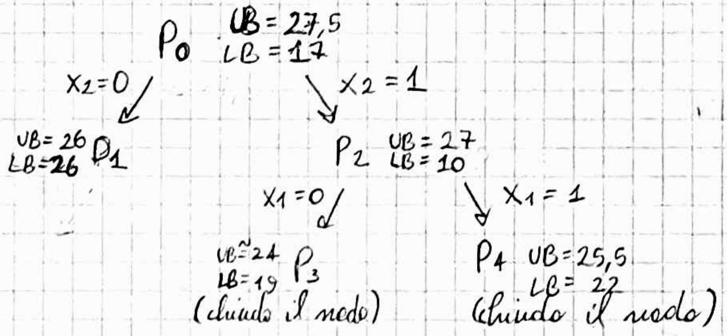
Esercizio 17:

$$\max z = 10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5$$
$$5x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 7x_5 \leq 14$$
$$x_i = \{0,1\} \quad \forall i = 1,..,5$$

valore "specifico" associato alle variabili:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \to 2 = 2 \\ x_2 \to 3/2 = 1,5 \\ x_3 \to 5/6 = 0,8\overline{3} \\ x_4 \to 7/2 = 3,5 \\ x_5 \to 9/7 \cong 1,28 \end{array}\right] \to \text{ordino le variabili in ordine di convenienza} \to \begin{array}{l} > \\ x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_3 \\ < \end{array}$$

soluzione ottima $\to \left(x_4 = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = \frac{7}{8}\right)$ sol. ammissibile $\to (x_4 = 1, x_1 = 1)$
$= 27,5$ $\qquad\qquad \uparrow 17$



Esercizio 18 :

produzione max = 10 Tonnellate

produzione di B = 7 Tonnellate

produzione A = 2.5 produzione B

2 prodotti → A e B

Errato

$\frac{\text{profitto } A}{\text{profitto } B} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{profitto } A = \frac{2}{3} \text{ profitto } B$

a) $\max \frac{2}{3} X_A + X_B$

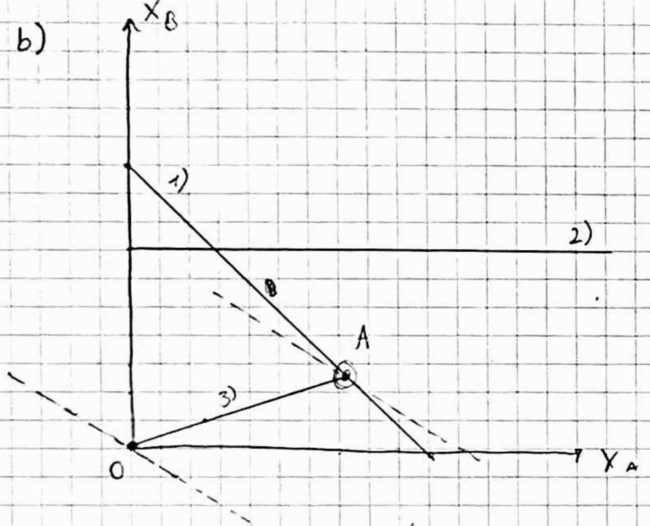
1) $X_A + X_B \leq 10$

2) $X_B \leq 7 \rightarrow X_B + Y_2 = 7$

3) $X_A -$

$X_A, X_B \geq 0$

b)



c)

	X_A	X_B	Y_1	Y_2	h_3
0 :	=0	=0	>0	>0	=0
A :	>0	>0	=0	>0	=0

e) $\max \frac{2}{3} X_A + X_B$

$X_A + X_B \leq 10$

$X_A - 2.5 X_B = 0$

$X_A, X_B \geq 0$

F) $\max \frac{2}{3} X_A + X_B - Mh$

$X_A + X_B + Y_1 = 10$

$X_A - 2.5 X_B + h = 0$

	X_A	X_B	Y_1	h	$-z$	b
Y_1	1	1	1	0	0	10
→ h	1	-2,5	0	1	0	0
$-z$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-M$	1	0
		↑				

	X_A	X_B	Y_1	h	$-z$	b
→ Y_1	$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	0	10
X_B	$-\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	0	0
$-z$	$\frac{16}{15}$	0	0	$\frac{-5M+2}{5}$	1	0
	↑					

	X_A	X_B	Y_1	h	$-z$	b
X_A	1	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{50}{3}$
X_B						
$-z$						

Esercizio 18:

produzione max = 10 Tonnellate — 2 prodotti → A e B

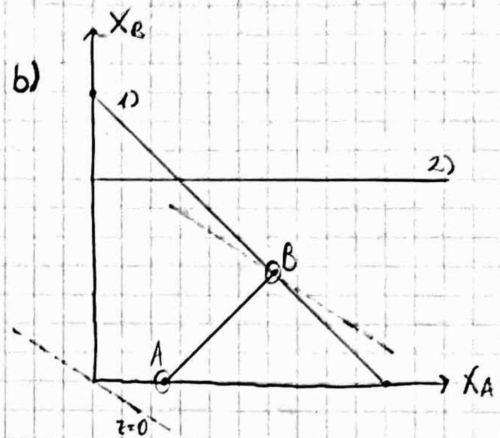
produzione di B = 7 Tonnellate

produzione di A − produzione B = 2.5

profitto di A = $\frac{2}{3}$ profitto di B

a)
$$\max \ \frac{2}{3}x_A + x_B$$
$$x_A + x_B \leq 10$$
$$x_B \leq 7$$
$$x_A - x_B = 2.5$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

b)



c)

	x_A	x_B	y_1	h
A:	>0	$=0$	>0	$=0$
B:	>0	>0	$=0$	$=0$

e)
$$\max \ \frac{2}{3}x_A + x_B$$
$$x_A + x_B \leq 10$$
$$x_A - x_B = 2.5$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

f)
$$\max \ \frac{2}{3}x_A + x_B - Mh$$
$$x_A + x_B + y_1 = 10$$
$$x_A - x_B + h = 2.5 \quad \rightarrow h = 2.5 - x_A + x_B$$
$$x_A, x_B, y_1, h \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{2}{3}x_A + x_B - M(2.5 - x_A + x_B) =$$
$$= \left(\frac{2}{3} + M\right)x_A + (1 - M)x_B - M2.5 =$$

	x_A	x_B	y_1	h	$-z$	b
y_1	1	1	1	0	0	10
→ h	1	−1	0	1	0	2.5
$-z$	$\frac{2}{3}+M$	$1-M$	0	0	1	$2.5M$
	↑					

	x_A	x_B	y_1	h	$-z$	b
→ y_1	0	2	1	−1	0	7.5
x_A	1	−1	0	1	0	2.5
$-z$	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\left(\frac{2}{3}+M\right)$	1	$-\frac{5}{3}$
		↑				

	x_A	x_B	y_1	h	$-z$	b
x_B	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{4}$
x_A	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{25}{4}$
$-z$	0	0	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}-M$	1	$-\frac{95}{12}$

soluzione ottima: $x_A = \frac{25}{4}$ $x_B = \frac{15}{4}$ $y_1 = 0$ $h = 0$

$$z = \frac{25}{12}$$

Esercizio 20:

due prodotti → P1 e P2
due risorse → R1 e R2
$P1 = 6R_1 + 9R_2$
$P2 = 10R_1 + 6R_2$
$R1 \leq 80$
$R2 \leq 54$
$\cancel{P1} \geq P2 + 2$
$P1 + P2 \geq 5$
$5P1 + 2P2$

obiettivo: minimizzare i costi di produzione

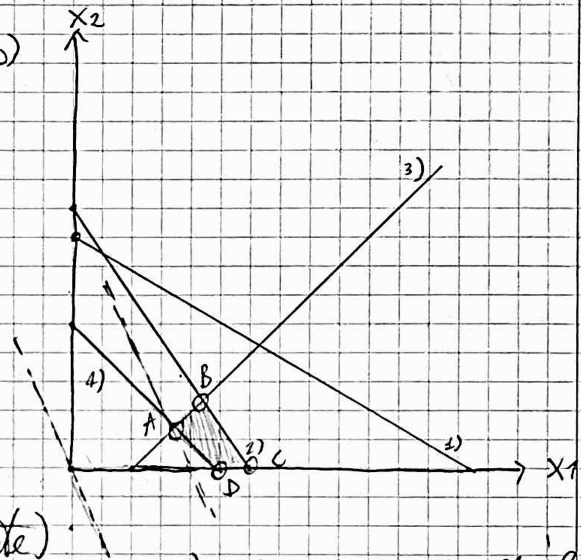
a) $\min \; 5X_1 + 2X_2$

1) $6X_1 + 10X_2 \leq 80$
2) $9X_1 + 6X_2 \leq 54$
3) $X_1 - X_2 \geq 2$
4) $X_1 + X_2 \geq 5$
$X_1, X_2 \geq 0$

↓

$\min \; 5X_1 + 2X_2 + Mh_2 + Mh_3$

b)



e) (il primo vincolo era ridondante)

$9X_1 + 6X_2 + Y_1 = 54$
$X_1 - X_2 - Y_2 + h_2 = 2$
$X_1 + X_2 - Y_3 + h_3 = 5$
$X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3, h_2, h_3 \geq 0$

c)

	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	h_2	h_3
A:	>0	>0	>0	=0	=0	=0	=0
B:	>0	>0	=0	=0	>0	=0	=0
C:	>0	=0	=0	>0	>0	=0	=0
D:	>0	=0	>0	>0	=0	=0	=0

d) A è il vertice ottimo

f) operazioni preliminari: $h_2 = 2 - X_1 + X_2 + Y_2$
$h_3 = 5 - X_1 + X_2 - Y_3$

$h_2 + h_3 = 7 - 2X_1 + 2X_2 + Y_2 - Y_3$

dunque: $Z = 5X_1 + 2X_2 + 7M - 2MX_1 + 2MX_2 + MY_2 - MY_3$

Ora possiamo impostare la Tabella del Simplesso.

↓

$Z = (5 - 2M)X_1 + (2 + 2M)X_2 + MY_2 - MY_3 + 7M$

Test A

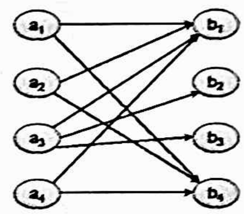
Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di LM in Ingegneria Informatica
Insegnamento di Ricerca Operativa, docente Maurizio Boccia
Prova d'esame del 14-06-2021

Esercizio1:
Una ditta di trasporti distribuisce frigoriferi in 4 città A, B, C e D a partire da 3 centri di distribuzione 1, 2 e 3 e vuole valutare la convenienza ad aprire il centro 4. Il costo di trasporto di un frigorifero in euro, le richieste delle città e le disponibilità dei centri di distribuzione (già aperti o potenziali) sono sintetizzati nella seguente tabella:
c

	Città A	Città B	Città C	Città D	*Disponibilità centri*
Centro 1	4	3	2	3	*1800*
Centro 2	2	4	3	1	*3000*
Centro 3	2	3	4	5	*1800*
Centro 4	3	1	2	2	*1000*
Richieste città	*1000*	*2000*	*1700*	*1300*	

Scrivere il modello di programmazione lineare che permetta di minimizzare i costi di trasporto e di valutare la convenienza ad aprire il nuovo centro 4 considerando che:
- il costo di apertura del nuovo centro è di 1000 euro;
- il centro 4, per poter essere aperto, deve servire una domanda di almeno 600 frigoriferi;
- il centro 4, per poter essere aperto, deve servire almeno 2 città diverse.

Esercizio2:
Sia dato il grafo bipartito in figura che rappresenta un problema di matching di cardinalità massima in cui si vuole determinare il massimo numero di archi non adiacenti.
1) Si formuli il problema come un problema di programmazione lineare intera.
2) Si trasformi il problema in un problema di massimo flusso equivalente e lo si risolva utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson.

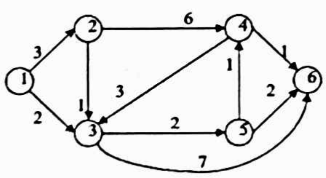


Esercizio3:
Una ditta produce leghe per la saldatura (L1, L2, L3) a partire da tre elementi base: stagno, zinco e rame. Le leghe vengono vendute in barre. Le quantità degli elementi (in grammi) per ogni barra sono:

	Lega 1	*Lega 2*	*Lega 3*
Stagno	40	30	20
Zinco	70	90	20
Rame	80	70	120

L'azienda possiede 300, 800 e 1000 Kg di stagno, zinco e rame. I guadagni per una barra di lega sono: 16 per la lega1, 10 per la lega2 e 2 per la lega3. Si determini, formulando il problema come un problema di Pl e risolvendolo mediante l'algoritmo del simplesso, il numero di barre da realizzare per ogni lega, al fine di massimizzare i guadagni.

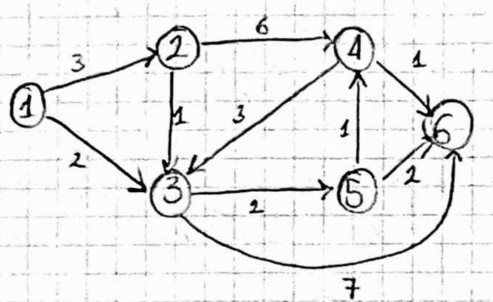
Esercizio4:
Si consideri il seguente grafo:



a) si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati al corso per determinare i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
b) si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo);

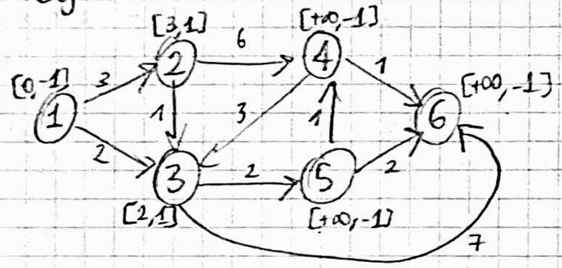
c) si disegni l'albero dei cammini minimi.

Prova del 14/06/2021 ↦ esercizio 4   Test A

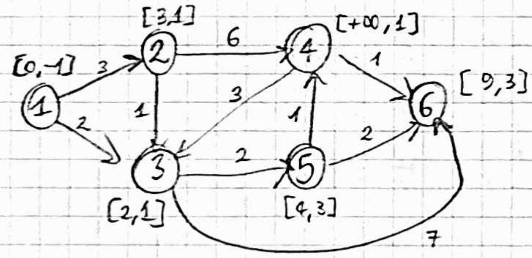


a) Il grafo è ciclico, non ha archi negativi, né cicli di costo totale negativo.

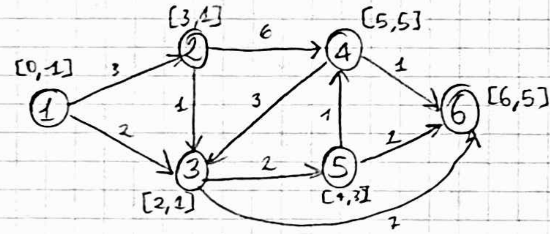
b) Possiamo usare algoritmi label setting come quello di Dijkstra.



rendiamo definitiva l'etichetta del nodo 3. aggiorniamo l'etichetta temporanea di 2.

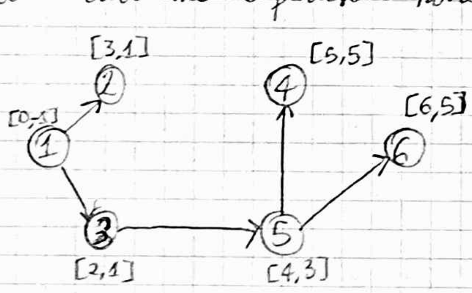


Rendiamo definitiva l'etichetta del nodo 5. Aggiorniamo l'etichetta del nodo 6.

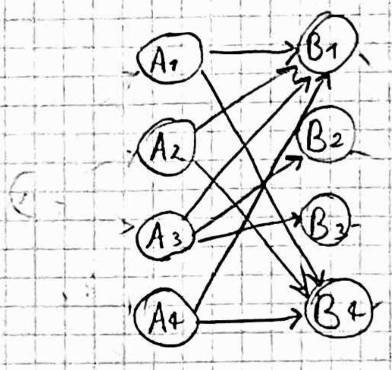


Rendiamo definitiva l'etichetta del nodo 4. Aggiorniamo l'etichetta del nodo 6.

c) Visitando il nodo 4, ci accorgiamo che non è possibile migliorare l'etichetta di nessun nodo nella vicinanza, per cui rendiamo definitive tutte le etichette rimanenti.



Prova del 14/06/2021 → Esercizio 2: **Test A**



$i \in A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

$j \in B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$

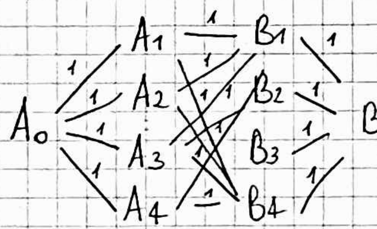
1) $\max \sum_i \sum_j X_{ij}$

$\sum_i X_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in B$

$\sum_j X_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in A$

$X_{ij} \in \{0,1\}$

2)



$G(N,A)$

$i,j \in N$

$(i,j) \in A$

$\max f$

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} X_{ij} - \sum_{j \in \delta^-(i)} X_{ji} = \begin{cases} f, & \forall i = A_0 \\ 0, & \forall i \in N \setminus \{A_0, B_0\} \\ -f, & \forall i = B_0 \end{cases}$$

$0 \leq X_{ij} \leq U_{ij}$

$X_{ij} \in \{0, 1\}$

nodo precedente simbolico

iterazione 1: $Q = A_0$ ... $A_0 \to [0]$

" 2: $Q = [A_1, A_2, A_3, A_4]$ $A_1, A_2, A_3, A_4 \to [A_0]$

" 3: $Q = [A_2, A_3, A_4, B_1, B_4]$ $B_1, B_4 \to [A_1]$

" 4: $Q = [A_3, A_4, B_1, B_4]$

" 5: $Q = [A_4, B_1, B_4, B_2, B_3]$ $B_2, B_3 \to [A_3]$

" 6: $Q = [B_1, B_4, B_2, B_3]$

" 7: $Q = [B_2, B_3, B_4, B_0]$ $B_0 \to B_1$

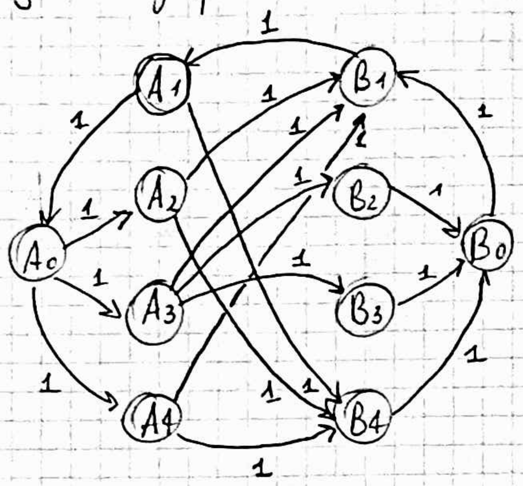
↳ condizione di Terminazione

cammino aumentante:

$A_0 \to A_1 \to B_1 \to B_0$

flusso = 1

Ridisegno il grafo residuo:



iterazione 1: $Q = [A_0]$ $A_0 \to [0]$

2: $Q = [A_2, A_3, A_4]$
$A_2, A_3, A_4 \to [A_0]$

3: $Q = [A_3, A_4, B_1, B_4]$
$B_1, B_4 \to [A_2]$

4: $Q = [A_4, B_1, B_4, B_2, B_3]$
$B_2, B_3 \to [A_3]$

5: $Q = [B_1, B_4, B_2, B_3]$

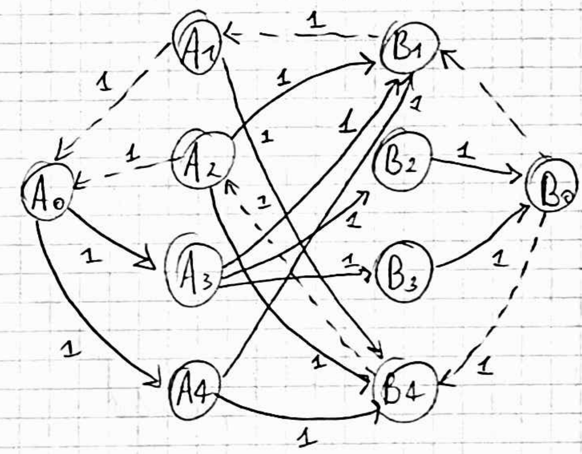
6: $Q = [B_4, B_2, B_3]$

7: $Q = [B_2, B_3, B_0]$
$B_0 \to [B_4]$

condizione di terminazione verificata.

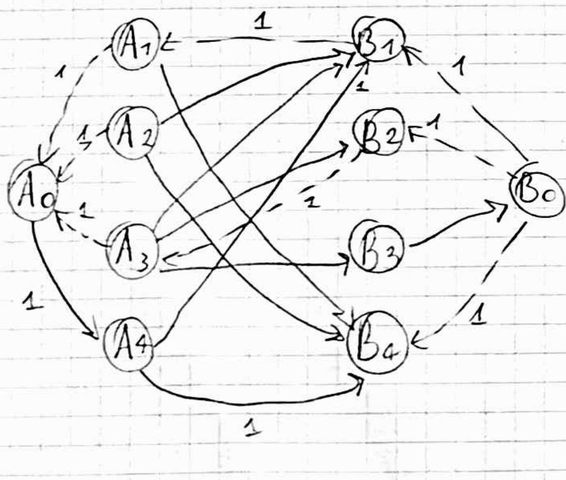
~~Per~~ Cammino aumentante: A. $A_0 \to A_2 \to B_4 \to B_0$ flusso $= 2$

Per evitare confusione, gli archi "inversi" li tratteggio:



1: $Q = [A_0]$ $A_0 \to [0]$
2: $Q = [A_3, A_4]$ $A_3, A_4 \to [A_0]$
3: $Q = [A_4, B_2]$ $B_2 \to [A_3]$
4: $Q = [B_2, B_4]$ $B_4 \to [A_4]$
5: $Q = [B_4, B_0]$ $B_0 \to [B_2]$

cammino aumentante: $A \to A_3 \to B_2 \to B_0$
flusso $= 3$



1: $Q = [A_0]$ $A_0 \to [0]$
2: $Q = [A_4]$ $A_4 \to [A_0]$
3: $Q = [B_4]$ $B_4 \to [A_4]$
4: $Q = [\,]$

condizione di terminazione
↓
flusso massimo $= 3$

Prova d'esame del 11/06/2021 Test A

Esercizio 1:

3 centri di distribuzione (1, 2, 3)

4 città

	A	B	C	D	disponibilità
1	4	3	2	3	1800
2	2	4	3	1	3000
3	2	3	4	5	1800
4	3	1	2	2	1000
richieste città	1000	2000	1700	1300	

$$\min\ 4X_{1A} + 3X_{1B} + 2X_{1C} + 3X_{1D} +$$
$$+ 2X_{2A} + 4X_{2B} + 3X_{2C} + X_{2D} +$$
$$+ 2X_{3A} + 3X_{3B} + 4X_{3C} + 5X_{3D} +$$
$$+ 3X_{4A} + X_{4B} + 2X_{4C} + 2X_{4D} +$$
$$+ 1000\,Y_4$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_{iA} = 1000$$
$$\sum_{i=1}^{4} X_{iB} = 2000$$
$$\sum_{i=1}^{4} X_{iC} = 1700$$
$$\sum_{i=1}^{4} X_{iD} = 1300$$

→ vincoli sulle richieste

$$\sum_{j=A}^{D} X_{1j} \leq 1800$$
$$\sum_{j=A}^{D} X_{2j} \leq 3000$$
$$\sum_{j=A}^{D} X_{3j} \leq 1800$$
$$\sum_{j=A}^{D} X_{4j} \leq 1000$$

→ vincoli sulle disponibilità

$$\sum_{j=A}^{D} X_{4j} \geq 600\,Y_4$$

vincolo di attivazione su domanda

$$X_{4A} \leq 1000\,Y_{4A}$$
$$X_{4B} \leq 1000\,Y_{4B}$$
$$X_{4C} \leq 1000\,Y_{4C}$$
$$X_{4D} \leq 1000\,Y_{4D}$$

→ vincoli di attivazione in base alle città servite

$$X_{4j} \geq Y_{4j} \quad \forall j = A,..,D$$

$$2Y_4 \leq Y_{4A} + Y_{4B} + Y_{4C} + Y_{4D}$$
$$Y_{4A} + Y_{4B} + Y_{4C} + Y_{4D} \leq 4Y_4$$

Vanno aggiunti anche:

$X_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1,..,4$

e intere $\quad \forall j = A,..,D$

$Y_4, Y_{4A}, Y_{4B}, Y_{4C}, Y_{4D} \in \{0,1\}$

Prova del 14/06/2021 **Test A**

Esercizio 3:

L1, L2, L3 → leghe

Tre elementi → stagno, zinco, rame

Le tabelle di destra è in grammi, per cui deve essere convertite. (oppure vanno convertite le disponibilità)

	lega 1	lega 2	lega 3	disponibilità
stagno	40 g	30 g	20 g	300 Kg
zinco	70 g	90 g	20 g	800 Kg
rame	80 g	70 g	120 g	1000 Kg
guadagni	16 g	10 g	2 g	

i → indice di lega

j → indice di risorse

$$\max\ 16x_1 + 10x_2 + 2x_3$$
$$40x_1 + 30x_2 + 20x_3 \le 300'000$$
$$70x_1 + 90x_2 + 20x_3 \le 800'000$$
$$80x_1 + 70x_2 + 120x_3 \le 1000000$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$\max\ 16x_1 + 10x_2 + 2x_3$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_1 = 30'000$$
$$7x_1 + 9x_2 + 2x_3 + y_2 = 80'000$$
$$8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + y_3 = 10000$$
$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
→ y_1	4	3	2	1	0	0	0	30000
y_2	7	9	2	0	1	0	0	80000
y_3	8	7	12	0	0	1	0	100000
$-z$	16	10	2	0	0	0	1	0
	↑							

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_1	1	$3/4$	$1/2$	$1/4$	0	0	0	7500
y_2	0	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-7/4$	1	0	0	27500
y_3	0	1	8	-2	0	1	0	40000
$-z$	0	-2	-6	-4	0	0	1	-120'000

$x_1 = 7500$ $\quad y_1 = 0$

$y_2 = 27500$ $\quad x_2 = 0$

$y_3 = 40000$ $\quad x_3 = 0$

$z = 120'000$

Prova d'esame del 14/06/2021 Test B

Esercizio 1:

3 celle

2 attrezzi agricoli

due anni di Tempo

CELLA	COSTO ACQUISTO	CAPACITA' PROD.	COSTO PROD. ATTR. 1	COSTO PROD. ATTR. 2
1	30000 €	500	200 €	120 €
2	25000 €	400	180 €	150 €
3	23000 €	450	225 €	160 €

ATTREZZO	PREZZO VENDITA	DOMANDA
1	350 €	8000
2	320 €	10500

budget celle = 250 000 €

obiettivo : max profitto

$i = 1, .., 3 \rightarrow$ indice di celle

$j = 1,2 \rightarrow$ indice di attrezzo

$K = 1,2 \rightarrow$ indice di anno

$X_{ijK} \rightarrow$ attrezzi j prodotti dalle celle i nell'anno K

$$\max \; 350 \sum_{i=1}^{3}\sum_{K=1}^{2} X_{i1K} + 320 \sum_{i=1}^{3}\sum_{K=1}^{2} X_{i2K} - C$$

$$C = 200 \sum_{K=1}^{2} X_{11K} + 120 \sum_{K=1}^{2} X_{12K} + 180 \sum_{K=1}^{2} X_{21K} + 150 \sum_{K=1}^{2} X_{22K} +$$

$$+ 225 \sum_{K=1}^{2} X_{31K} + 160 \sum_{K=1}^{2} X_{32K} + 30000\, Y_1 + 25000\, Y_2 + 23000\, Y_3$$

$C \leq 250000 \rightarrow$ vincolo sul budget

$\sum_{j=1}^{2} X_{1jK} \leq 500 Y_1 \quad \forall K = 1,2$

$\sum_{j=1}^{2} X_{2jK} \leq 400 Y_2 \quad \forall K = 1,2$

$\sum_{j=1}^{2} X_{3jK} \leq 450 Y_3 \quad \forall K = 1,2$

vincoli sulle capacità produttive

$\sum_{i=1}^{3} X_{i1K} \leq 8000 \quad \forall K = 1,2$

$\sum_{i=1}^{3} X_{i2K} \leq 10500 \quad \forall K = 1,2$

$X_{ijK} \geq 0$ e intere $\forall i = 1,2,3, \; \forall j = 1,2, \; \forall K = 1,2$

$Y_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1,2,3$

Esercizio 3:

$$\max \; x_1 + x_2$$
$$x_2 \geq 1$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$
$$x_1 - x_2 \geq -3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\rightarrow$

$$\min \; W = h_1 + h_2$$
$$\max \; z = x_1 + x_2$$
$$x_2 - y_1 + h_1 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 + y_2 = 0$$
$$x_1 - x_2 - y_3 + h_3 = -3$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, h_1, h_3 \geq 0$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	h_1	h_3	$-W$	$-z$	b
h_1	0	1	-1	0	0	1	0	0	0	1
y_2	1	-2	0	1	0	0	0	0	0	0
h_3	-1	+1	0	0	+1	0	-1	0	0	+3
$-W$	-1	0	1	0	1	0	0	1	0	2
$-z$	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0

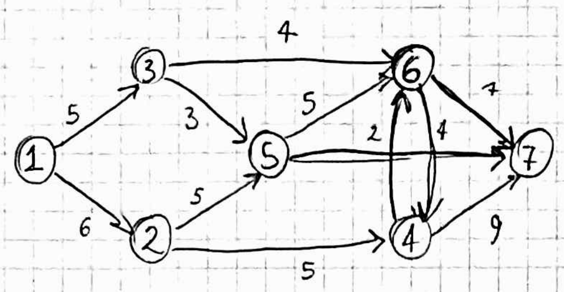
$$h_1 = 1 - x_2 + y_1$$
$$h_3 = -3 - x_1 + x_2 + y_3$$
$$W = -2 - x_1 + y_1 + y_3$$
$$2 = -x_1 + y_1 + y_3 - W$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	h_1	h_3	$-W$	$-z$	b
h_1										
x_1										
h_3										
$-W$										
$-z$										

ERRATO

Prova del 14/06/2021, Test B:

Esercizio 2:



disegno il grafo senza gli archi di capacità 0 e senza archi residui.

a) modello del massimo flusso tra 1 e 7

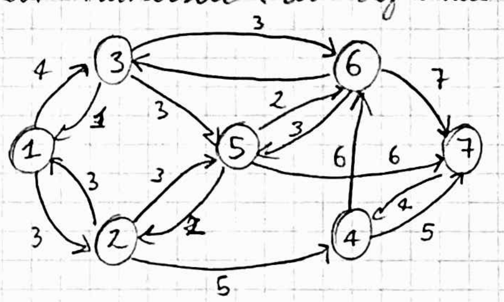
$\max f$

$$\sum_{j\in\delta(i)} x_{ij} - \sum_{j\in\bar{\delta}(i)} x_{ji} = \begin{cases} f & se\ i=1 \\ 0 & se\ i\neq 1,\ i\neq 7 \\ -f & se\ i=7 \end{cases}$$

$x_{ij} \leq u_{ij},\ \forall (i,j)\in A$

$x_{ij} \geq 0$

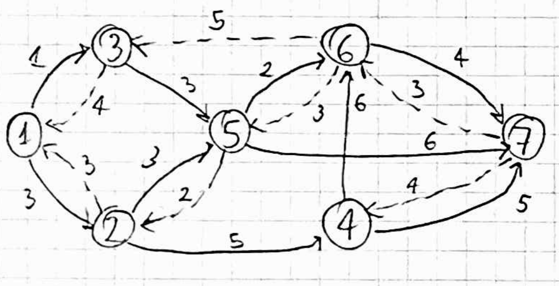
b) Rappresento il grafo residuo, mi servirà per applicare Ford-Fulkerson (con algoritmo di Edmonds-Karp):



1: Q=[1] 1→[0]
2: Q=[3,2] 3,2→[1]
3: Q=[2,6,5] 6,5→[3]
4: Q=[6,5,4] 4→[2]
5: Q=[5,4,7] 7→[6]

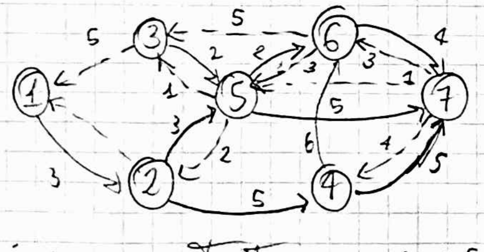
condizione di terminazione ⇒ flusso = 4+3=7

cammino aumentante = 1→3→6→7



1: Q=[1] 1→[0]
2: Q=[3,2] 3,2→[1]
3: Q=[2,5] 5→[3]
4: Q=[5,4] 4→[2]
5: Q=[4,6,7] 6,7→[5]

cammino aumentante: 1→3→5→7 flusso = 8



1: Q=[1] 1→[0]
2: Q=[2] 2→[1]
3: Q=[5,4] 5,4→[2]
4: Q=[4,6,7] 6,7→[5]

cammino aumentante: 1→2→5→7 flusso = 11 Terminato

Esercizi 3:

$$\max \ z = x_1 + x_2$$
$$x_2 \geq 1$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$
$$x_1 - x_2 \geq -3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\rightarrow$

$$\max \ z = x_1 + x_2$$
$$x_2 - y_1 + h_1 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 + y_2 = 0$$
$$-x_1 + x_2 + y_3 = 3$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, h_1 \geq 0$$

$h_1 = 1 - x_2 + y_1$ $\qquad W = 1 - x_2 + y_1 \rightarrow -W - x_2 + y_1 = -1$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	h_1	$-W$	$-z$	b
$\rightarrow h_1$	0	1	-1	0	0	1	0	0	1
y_2	1	-2	0	1	0	0	0	0	0
y_3	-1	1	0	0	1	0	0	0	3
$-W$	0	-1	1	0	0	0	1	0	-1
$-z$	1	1	0	0	0	0	0	1	0

$\uparrow$

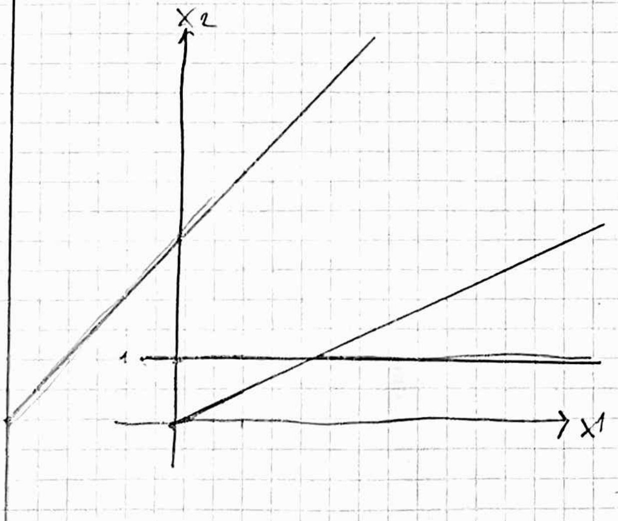
	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	h_1	$-W$	$-z$	b
x_2	0	1	-1	0	0	1	0	0	1
$\rightarrow y_2$	1	0	-2	1	0	2	0	0	2
y_3	-1	0	1	0	1	-1	0	0	2
$-W$	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$-z$	1	0	1	0	0	-1	0	1	-1

$\uparrow$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_2	0	1	-1	0	0	0	1
$\rightarrow y_2$	1	0	-2	1	0	0	2
y_3	-1	0	1	0	1	0	2
$-z$	1	0	1	0	0	1	1

$\uparrow$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_2	0	1	-1	0	0	0	1
x_1	1	0	-2	1	0	0	2
y_3	0	0	-1	1	1	0	4
$-z$	0	0	3	-1	0	1	-1



non c'è un vertice massimo

Esercizio 1:

$$\min\ 2x_1 + x_2$$
$$5x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$2x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$-x_1 + x_2 \geq -1$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere}$$

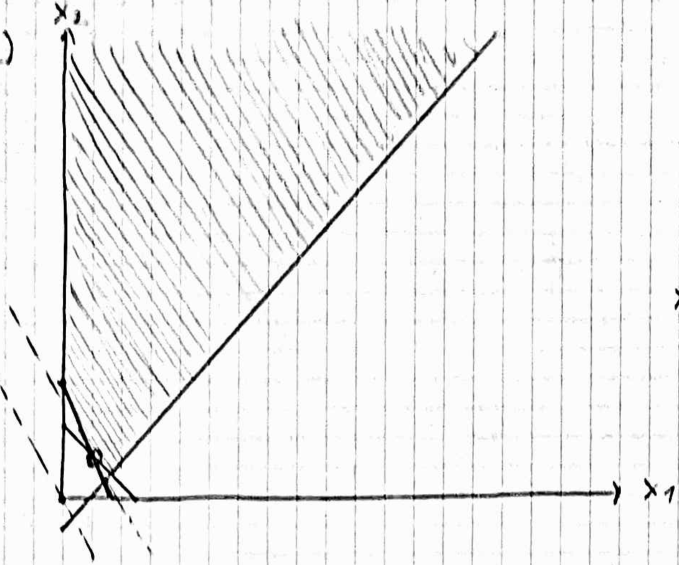
$x_1 = \frac{8}{5} - \frac{2}{5}x_2 \rightarrow x_1 = \frac{8}{5} - \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2} = 1$

$2\left(\frac{8}{5} - \frac{2}{5}x_2\right) + 2x_2 = 5 \rightarrow \frac{16}{5} - \frac{4}{5}x_2 + 2x_2 = 5$

$\frac{6}{5}x_2 = \frac{9}{5}$

$x_2 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

1)



S_0
$L_0 = 7/2 = 3{,}5$
$y_0 = (1, 3/2)$

$x_2 \geq 2$ → S_1: $L_1 = 18/5 = 3{,}6$, $y_1 = (4/5, 2)$

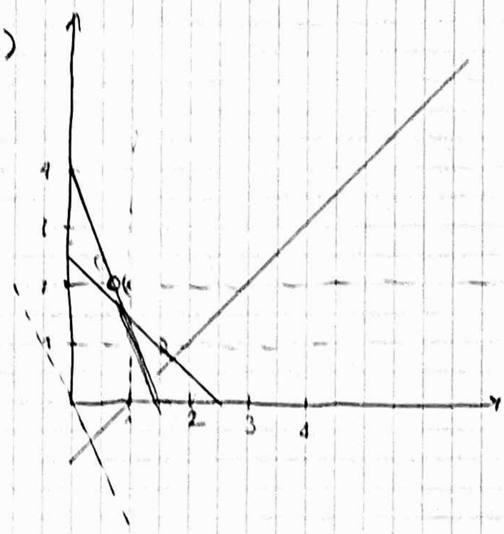
$x_2 \leq 1$ → S_2: $L_2 = 4$, $y_2 = (3/2, 1)$

S_1:

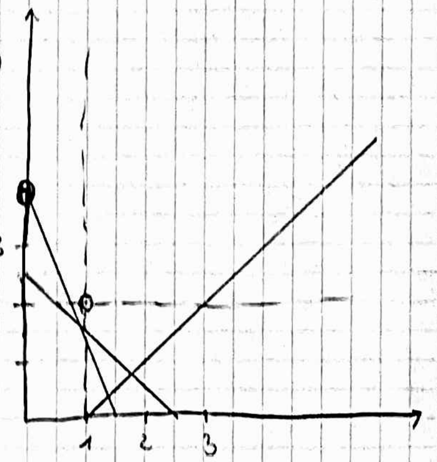
$x_1 \leq 0$ → $L_3 = 4$, $y_3 = (0, 4)$

$x_1 \geq 1$ → $L_4 = 2+2 = 4$, $y_4 = (1, 2)$

2)



3)



Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di LM in Ingegneria Informatica
Insegnamento di Ricerca Operativa, docente Maurizio Boccia
Prova d'esame del 16-06-2021

Test A

Esercizio1:
La FinDomestic vuole investire un capitale di 1000000 € in 6 tipi di azioni. La tabella riporta, per ogni azione, il paese d'origine, la categoria (T: tecnologico; N: non-tecnologico) ed il guadagno stimato, in percentuale rispetto al capitale investito.

Azione	Paese	Categoria	Guadagno %
1	Giappone	T	5.3
2	UK	T	6.2
3	Francia	T	5.1
4	USA	N	4.9
5	Germania	T	6.5
6	Francia	N	3.4

La FinDomestic vuole investire almeno metà del capitale iniziale in azioni Europee ed al massimo il 30% in azioni tecnologiche. Inoltre vuole investire tra 4000 e 400000 € in ogni tipo di azione eccetto quelle del tipo 5 per cui il capitale investito deve essere minore o uguale di 10000 € oppure non inferiore a 150000 €.
Si scriva un modello di programmazione lineare che aiuti la FinDomestic a determinare il piano di investimento di guadagno massimo.

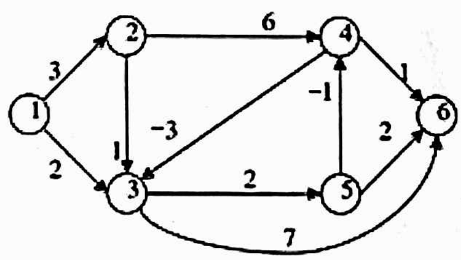
Esercizio2:
Si vuole investire in modo ottimo un capitale di 90 milioni in obbligazioni della BEI e/o della Federal Reserve (FR). Le obbligazioni possono essere acquistate solo in "tagli" da 15 o da 18 milioni, rispettivamente. Le obbligazioni BEI rendono 2 milioni per ogni "taglio" acquistato, mentre quelli della FR rendono 3 milioni per taglio. Per motivi di diversificazione dell'investimento si sceglie inoltre che il numero di tagli di obbligazioni BEI sia al massimo pari a quello dei tagli di obbligazioni FR. Si formuli il problema con un modello di PLI e lo si risolva con il metodo del Branch and Bound.

Esercizio3:
Si consideri il seguente problema di ottimizzazione lineare continua e lo si risolva con il metodo del simplesso in due fasi.

$$\begin{aligned} \max\ & 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.t.\ & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio4:
Si consideri il seguente grafo:

a) si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati al corso per determinare i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
b) si applichi l'algoritmo scelto (riportare e giustificare i passi dell'algoritmo);



Prova del 16/06/2021 Test A

Esercizio 1:

capitale = 1'000'000 €
6 Tipi di azioni.

investire almeno metà del capitale in azioni Europee
massimo 30% in azioni Tecnologiche
investire tra 4000 e 400'000 € in ogni Tipo di azione, tranne che per il Tipo 5 per cui il capitale deve essere ≤ 10'000 oppure non inferiore a 150'000

obiettivo: guadagno massimo

AZIONE	PAESE	CATEGORIA	GUADAGNO %
1	GIAPPONE	T	5.3
2	UK	T	6.2
3	FRANCIA	T	5.1
4	USA	N	4.9
5	GERMANIA	T	6.5
6	FRANCIA	N	3.4

$$\max \ 0,053X_1 + 0,062X_2 + 0,051X_3 + 0,049X_4 + 0,065X_5 + 0,034X_6$$

$$X_3 + X_5 + X_6 \geq 500'000 \qquad \sum_{i=1}^{6} X_i \leq 1'000'000$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_5 \leq 300'000$$

$$X_i \geq 4000 \qquad \forall i = 1, .., 4, 6$$

$$X_i \leq 400'000 \qquad \forall i = 1, .., 4, 6$$

$$X_5(1-y) \leq 10000$$

$$X_5 \geq 150'000\, y$$

$$y \in \{0, 1\}$$

Esercizio 2: Test A

[Tipi]

capitale 90 — 1, 2

2 Tipi di obbligazioni → BEI, FR

Tagli → 15, 18

guadagno → 2, 3

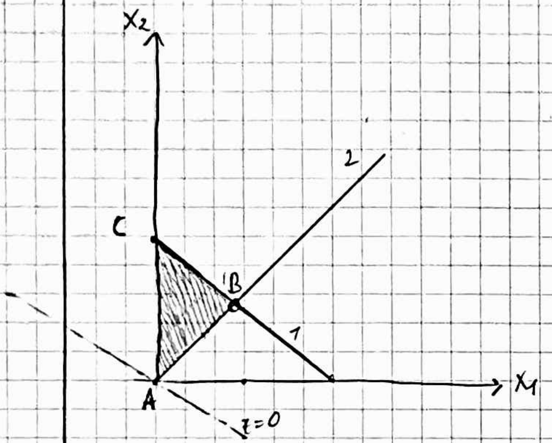
$\max z = 2x_1 + 3x_2$

1) $15x_1 + 18x_2 \leq 90$

2) $x_1 - x_2 \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$ e intere

x_i → numero di Tagli di Tipo i da acquistare

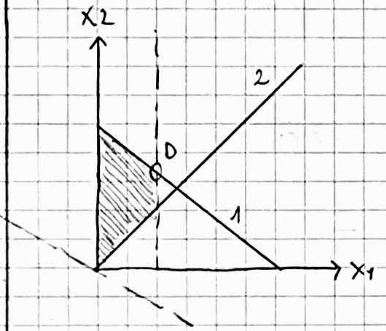


$$\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 = 90 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$15x_2 + 18x_2 = 90$

$x_2 = \frac{90}{33} \cong 13,64$

$B \cong (2,72, 2,72)$



S_0

$U_0 \cong 13,64$

$B \cong (2,72; 2,72)$

$x_1 \leq 2$ → S_1

$U_1 \cong 14$

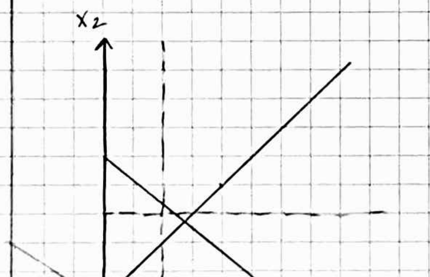
$D = (2; 3,\overline{33}) = (2, \frac{10}{3})$

$x_2 \geq 4$ → inammiss.

$x_2 \leq 3$ → S_3

$x_1 \geq 3$ → S_2 inammissibile

errato!



Esercizio 2: Test A

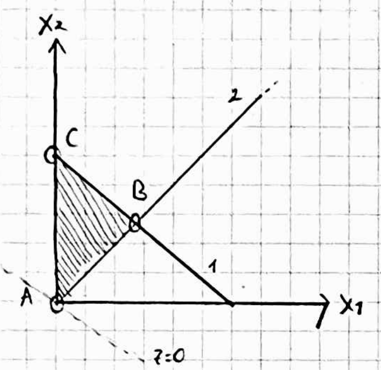
	Tipi 1	Tipi 2
capitale 90		
2 Tipi di obbligazioni →	BEI	FR
Tagli →	15	18
guadagno →	2	3

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

1) $15x_1 + 18x_2 \leq 90$

2) $x_1 - x_2 \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$ e intere



$C = (0,5) \rightarrow z_C = 15$

$$\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 = 90 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$15x_2 + 18x_2 = 90$

$x_2 = \frac{90}{33} \cong 2,727$

$B \cong (2,73,\ 2,73) \rightarrow z_B \cong 13,64$

C è il vertice ottimo del problema rilassato, ed essendo una soluzione intera, risulta essere anche la migliore soluzione del problema originario.

Esercizio 3:

$$\max\ 7x_1+3x_2+2x_3 \qquad\qquad \max\ 7x_1+3x_2+2x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3\geq 0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2x_1+x_2-x_3+y_1+h_1=0 \\ x_1+x_2+x_3+h_2=0 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{cases}$$

$$h_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 + y_1$$

$$h_2 = -x_1 - x_2 - x_3$$

$$w = h_1 + h_2 = 2x_1 - x_2 + x_3 + y_1 - x_1 - x_2 - x_3 =$$

$$= x_1 - 2x_2 + y_1$$

$\min\ w$

	x_1	x_2	x_3	y_1	h_1	h_2	$-w$	$-z$	b
→ h_1	-2	1	-1	-1	1	0	0	0	0
h_2	1	1	1	0	0	1	0	0	0
$-w$	1	-2	0	1	0	0	1	0	0
$-z$	7	3	2	0	0	0	0	1	0

↑

	x_1	x_2	x_3	y_1	h_1	h_2	$-w$	$-z$	b
x_2	-2	1	-1	-1	1	0	0	0	0
→ h_2	3	0	2	1	-1	1	0	0	0
$-w$	-3	0	-2	-1	2	0	1	0	0
$-z$	13	0	5	3	-3	0	0	1	0

↑

	x_1	x_2	x_3	y_1	h_1	h_2	$-w$	$-z$	b
x_2	0	1	$1/3$	$-1/3$	$1/3$	$2/3$	0	0	0
x_1	1	0	$2/3$	$1/3$	$-1/3$	$1/3$	0	0	0
$-w$	0	0	0	0	1	1	1	0	0
$-z$	0	0	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{13}{3}$	0	1	0

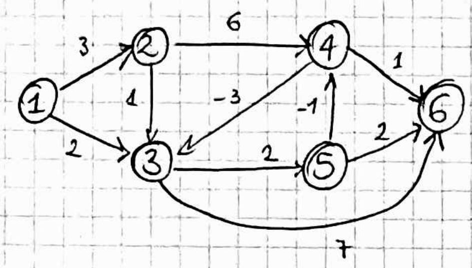
soluzione: $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = 0$

$z = 0$

↓

graficando con Geogebra ho verificato che è il risultato corretto.

Esercizio 4:

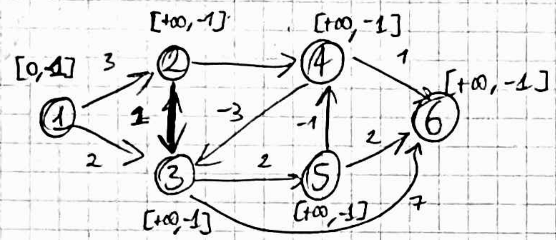


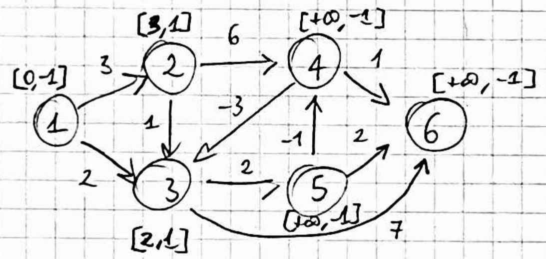
a) Userò Bellman-Ford

K = 1

nodo	etichette
1	0, -1
2	+∞, -1
3	+∞, -1
4	+∞, -1
5	+∞, -1
6	+∞, -1

K = 1





K = 2

nodo	etichette
1	0, -1
2	3, 1
3	2, 1
4	+∞, -1
5	+∞, -1
6	+∞, -1

K = 3

nodo	etichette
1	0, -1
2	3, 1
3	2, 1
4	9, 2
5	4, 3
6	9, 3

K = 4

nodo	etichette
1	0, -1
2	3, 1
3	2, 1
4	4, 5
5	4, 3
6	6, 5

K = 5

nodo	etichette
1	0, -1
2	3, 1
3	1, 4
4	3, 5
5	4, 3
6	6, 5

K = 6 → cond. di Terminazione

↓

ciclo con costo Totale negativo

nodo	etichette
1	0, -1
2	3, 1
3	0, 4
4	3, 5
5	3, 3
6	6, 5

Test B

Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di LM in Ingegneria Informatica
Insegnamento di Ricerca Operativa, docente Maurizio Boccia
Prova d'esame del 16-06-2021

Esercizio1:
Un'azienda produce pc e deve acquistare le scorte di materie prime necessarie per la produzione del case. Per produrre i case nel mese corrente sono necessari i seguenti materiali:

1. Viti: 15000 unità
2. Plastica: 1300 kg
3. Acciaio: 2900 kg

Per effettuare gli acquisti l'azienda si può appoggiare a quattro fornitori i quali le forniscono le materie prime in lotti contenenti le seguenti quantità di materiale:

	viti	plastica	acciaio
F1	50	3	5
F2	30	4	7
F3	25	1	3
F4	10	8	1

Nell'ottica di gestire al meglio il proprio magazzino, l'azienda intende avere, alla fine del mese, la minore quantità di materiale non utilizzato possibile e, a tal fine, è disposta anche a comprare una quantità di materie prime inferiore alle proprie necessità. Il costo per lo stoccaggio e per il mancato acquisto di una unità di materiale è il seguente:

Viti	0,2 euro/pezzo
Plastica	1 euro/kg
Acciaio	3 euro/kg

Formulare il modello di programmazione lineare che minimizzi i costi derivanti dallo scostamento tra le quantità di materiali acquistate e quelle necessarie, tenendo conto che non è possibile comprare porzioni di lotto di materiali (variabili intere).

Esercizio2:
Dato il problema descritto nell'esercizio 1, si supponga che per motivi commerciali l'azienda, se acquista dei lotti di materiale dal fornitore F1, è impossibilitata a rifornirsi fai fornitori F2 ed F4. Riformulare il problema come un problema di programmazione lineare intera.

Esercizio3:
Sia assegnato il problema intero:

$$\begin{aligned} &\max x_1 + x_2 \\ s.t.\quad & -4x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad e\ intere \end{aligned}$$

1) Lo si risolva con il metodo del branch and Bound.
2) Si riporti l'albero di Branch and Bound ottenuto: a fianco di ciascun nodo, ove possibile, si indichino le coordinate del punto di ottimo del rilassamento continuo e i valori di lower e upper bound.

Esercizio4:
Si consideri il seguente problema di ottimizzazione lineare continua e lo si risolva con il metodo del simplesso in due fasi.

$$\begin{aligned} &\max 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.t.\quad & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Prova del 16/06/2021 Test B

Esercizio 1:

viti → 15000
plastica → 1300 Kg
acciaio → 2900 Kg

		viti	plastica	acciaio
fornitori →	F1	50	3	5
	F2	30	4	7
	F3	25	1	3
	F4	10	8	1

costi per lo stoccaggio:

viti	0,2	€/pezzo
plastica	1	€/Kg
acciaio	3	€/Kg

a fine mese si vuole avere le minore quantità di materiale non utilizzato.

obiettivo: minimizzare i costi derivanti dallo scostamento tra le quantità di materiali acquistate e quelle necessarie

non è possibile comprare porzioni di lotti.

$$\min\ 0,2\cdot\left|\sum_{i=1}^{4} x_{i1}-15000\right| + \left|\sum_{i=1}^{4} x_{i2}-1300\right| + 3\left|\sum_{i=1}^{4} x_{i3}-2900\right|$$

i → indice fornitori

j → indice materie
1 = viti
2 = plastica
3 = acciaio

a_{ij} → elemento della matrice fornitori-risorse

$\Downarrow$

$$y_1=\max\left\{\sum_{i=1}^{4}x_{i1}-15000,\ 15000-\sum_{i=1}^{4}x_{i1}\right\}$$
$$y_2=\max\left\{\sum_{i=1}^{4}x_{i2}-1300,\ 1300-\sum_{i=1}^{4}x_{i2}\right\}$$
$$y_3=\max\left\{\sum_{i=1}^{4}x_{i3}-2900,\ 2900-\sum_{i=1}^{4}x_{i3}\right\}$$

$$y_1 \geq \sum_{i=1}^{4}x_{i1}-15000 \qquad y_1 \geq 15000-\sum_{i=1}^{4}x_{i1}$$
$$y_2 \geq \sum_{i=1}^{4}x_{i2}-1300 \qquad y_2 \geq 1300-\sum_{i=1}^{4}x_{i2}$$
$$y_3 \geq \sum_{i=1}^{4}x_{i3}-2900 \qquad y_3 \geq 2900-\sum_{i=1}^{4}x_{i3}$$

$\boxed{\text{modello errato, vedi alla pag. successiva}}$

$$\min\ 0,2\,y_1+y_2+3y_3$$

$x_{ij}\geq 0 \quad \forall\, i=1,\dots,4 \quad \forall\, j=1,2,3$ e intere

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$ e intere

Prova del 16/06/2021 Test B

Esercizio 1:

$$\min \; 0{,}2Y_1 + Y_2 + 3Y_3$$

$$Y_1 \geq \sum_{i=1}^{4} a_{i1} X_i - 15000 \qquad Y_1 \geq 15000 - \sum_{i=1}^{4} a_{i1} X_i$$

$$Y_2 \geq \sum_{i=1}^{4} a_{i2} X_i - 1300 \qquad Y_2 \geq 1300 - \sum_{i=1}^{4} a_{i2} X_i$$

$$Y_3 \geq \sum_{i=1}^{4} a_{i3} X_i - 2900 \qquad Y_3 \geq 2900 - \sum_{i=1}^{4} a_{i3} X_i$$

$X_i \geq 0$ e intere $\forall\, i = 1, 2, 3, 4$

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$ e intere

$i \rightarrow$ indice fornitori

$a_{ij} \rightarrow$ elemento della matrice fornitori - risorse

$i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2, 3$

Esercizio 2:

Aggiungiamo il vincolo: $X_1 \leq Mz$

$X_2 + X_4 \leq M(1-z)$

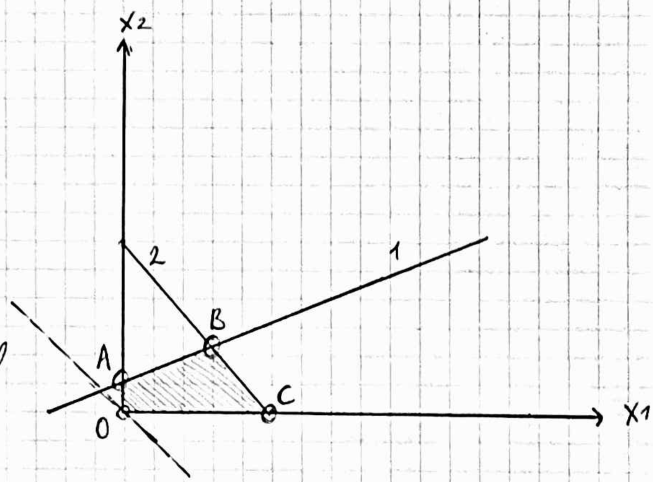
Esercizio 3:

$$\max \; x_1 + x_2$$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere}$$



Graficamente il vertice B risulta essere ottimo per il problema rilassato.

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 = 5 \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \end{cases}$$

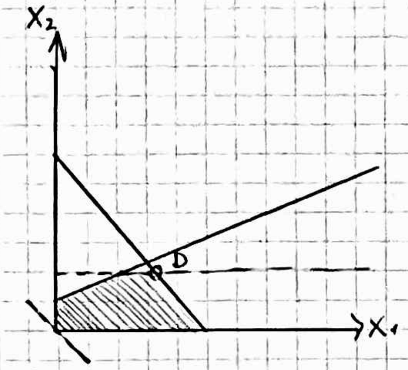
$$x_1 = \frac{30}{6} - \frac{5}{6}x_2 = 5 - \frac{5}{6}x_2$$

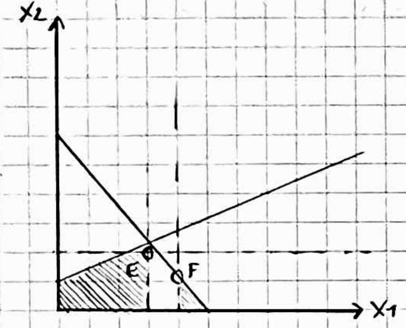
$$-4\left(5 - \frac{5}{6}x_2\right) + 5x_2 = 5$$

$$-20 + \frac{10}{3}x_2 + 5x_2 = 5$$

$$\frac{25}{3}x_2 = 25$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 5 - \frac{5}{6}\cdot 3 = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \Rightarrow B = (3; 2{,}5)$$





P_0
$B = (3;\ 2{,}5)$
$U_0 = 5{,}5$

$x_2 \geq 3$ ↙ inammiss.

$x_2 \leq 2$ ↘ P_1
$D = (3{,}\bar{3},\ 2)$
$U_1 = 5{,}\bar{3}$

$x_1 \leq 3$ ↙
$E = (3, 2)$
$U_2 = 5$
opt

$x_1 \geq 4$ ↘
$F = (4,\ 1{,}2)$
$U_3 = 5{,}2$

$x_2 \leq 1$ ↙
$G = (4{,}\bar{6},\ 1)$
$U_4 = 5{,}\bar{6}$

$x_2 \geq 2$ ↘ inammiss.

$x_1 \leq 4$ ↙
$H(4, 1)$
opt
$U_7 = 5$

$x_1 \geq 5$ ↘
$I(5, 0)$
opt
$U_6 = 5$

Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di LM in Ingegneria Informatica
Insegnamento di Ricerca Operativa, docente Maurizio Boccia
Prova d'esame del 17-06-2021

Test C

Esercizio1:

La vostra azienda assembla due tipi di laptop, standard e lusso, che vende ottenendone guadagni unitari rispettivamente pari a 300 euro e 500 euro. Sapendo che ciascun laptop dei due tipi contiene rispettivamente 1 hard-disk e un kit base il primo, 2 hard-disk e un kit premium il secondo, e che le scorte in magazzino sono di 120 hard-disk, 60 kit base e 50 kit premium:

- si formuli il problema di massimizzazione del guadagno;
- si disegni il dominio di ammissibilità del problema e la funzione obiettivo;
- si indichi, per ciascuno dei vertici del dominio, la composizione della soluzione basica ammissibile ad esso associata;
- si risolva graficamente il problema, individuando il vertice ottimo;
- si risolva il problema analiticamente utilizzando l'algoritmo del simplesso.

Esercizio2:

Un'aziende pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare un campione significativo di persone: almeno 100 uomini non sposati, almeno 120 uomini sposati, almeno 110 donne non sposate e almeno 150 donne sposate. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo di 1.1 euro) o alla sera (al costo di 1.6 euro). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate in tabella. Si noti come le telefonate srali siano più costose, ma permettano di raggiungere un maggior numero di persone: solo il 5% di esse infatti va a vuoto.

	Mattino	Sera
Uomini non sposati	10%	10%
Uomini sposati	15%	30%
Donne non sposate	20%	20%
Donne sposate	25%	30%
Nessuno	30%	5%

1) Si formuli un modello di programmazione lineare intera per decidere quante telefonate effettuare (alla mattina e/o alla sera), miniumizzando il costo complessivo e facendo in modo di raggiungere un campione significativo di persone.
2) Si illustri come deve essere modificato il modello proposto qualora per effettuare le telefonate sia necessario affittare una sala che costa 65 euro al mattino e 80 euro la sera. Se si decide di effettuare anche una sola telefonata in una fascia oraria, verrà addebbitato all'azienda l'intero costo della sala.

Esercizio3:

Risolvere il seguente problema di knapsack con il metodo del branch and bound:

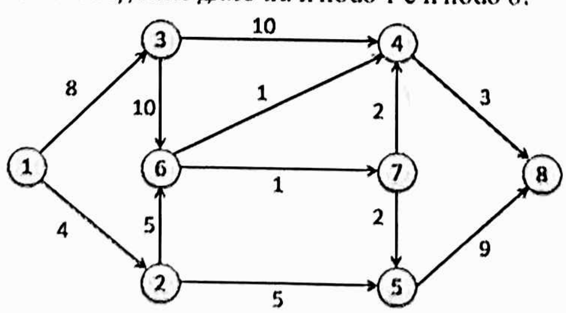
$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \le 9$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

Esercizio 4:

Si determini il taglio di capacità minima sul seguente grafo tra il nodo 1 e il nodo 8:



Prova d'esame del 17/06/2021 : Ricerca Operativa

Esercizio 1:

$x_1 \rightarrow$ laptop standard : 1 hard disk , 1 KiT base → 300 €

$x_2 \rightarrow$ laptop di lusso : 2 hard disk, 1 KiT premium → 500 €

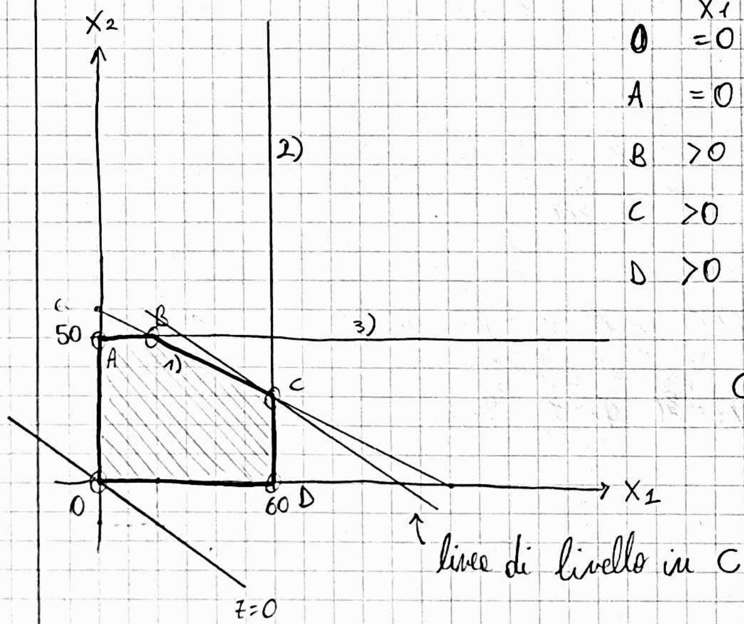
scorte :

hard disk	120
KiT base	60
KiT premium	50

direttiva : massimizzare il guadagno

$$\begin{array}{ll} \max & 300x_1 + 500x_2 \\ 1) & x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 2) & x_1 \leq 60 \\ 3) & x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \max\ 300x_1 + 500x_2 \\ x_1 + 2x_2 + y_1 = 120 \\ x_1 + y_2 = 60 \\ x_2 + y_3 = 50 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
O	$=0$	$=0$	>0	>0	>0
A	$=0$	>0	>0	>0	$=0$
B	>0	>0	$=0$	>0	$=0$
C	>0	>0	$=0$	$=0$	>0
D	>0	$=0$	>0	$=0$	>0



C è il vertice ottimo

Ora risolvo il modello con il Simplesso.

Tabella 1

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
y_1	1	2	1	0	0	0	120
y_2	1	0	0	1	0	0	60
→ y_3	0	1	0	0	1	0	50
$-z$	300	500	0	0	0	1	0

Tabella 2

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
→ y_1	1	0	1	0	-2	0	20
y_2	1	0	0	1	0	0	60
x_2	0	1	0	0	1	0	50
$-z$	300	0	0	0	-500	1	-25000

Tabella 3

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_1	1	0	1	0	-2	0	20
→ y_2	0	0	-1	1	2	0	40
x_2	0	1	0	0	1	0	50
$-z$	0	0	-300	0	100	1	-31'000

Tabella 4

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_1	1	0	0	1	0	0	60
y_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	20
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	30
$-z$	0	0	-250	-50	0	1	-33'000

$z = 33'000$ → valore finale di f. o.

soluzione: $x_1 = 60$ $x_2 = 30$ $y_1 = 0$ $y_2 = 0$ $y_3 = 20$

↳ vertice C

Esercizio 2:

1)
$$\min \ 1.1\, X_1 + 1.6\, X_2$$
$$0.1\, X_1 + 0.1\, X_2 \geq 100$$
$$0.15\, X_1 + 0.3\, X_2 \geq 120$$
$$0.2\, X_1 + 0.2\, X_2 \geq 110$$
$$0.25\, X_1 + 0.3\, X_2 \geq 150$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \ \text{e intere}$$

2)
$$\min \ 1.1\, X_1 + 1.6\, X_2 + 65\, Y_1 + 80\, Y_2$$
$$0.1\, X_1 + 0.1 \geq 100$$
$$0.15\, X_1 + 0.3\, X_2 \geq 120$$
$$0.2\, X_1 + 0.2\, X_2 \geq 110$$
$$0.25\, X_1 + 0.3\, X_2 \geq 150$$
$$X_1 \leq M Y_1$$
$$X_2 \leq M Y_2$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \ \text{e intere}$$
$$Y_1, Y_2 \in \{0, 1\}$$

Nota:
la traccia credo presenti un errore. Le percentuali della colonna delle serre sommate fra loro restituiscono valore 95%. All'esame ho interpretato diversamente la traccia, per cui, per farvi avere un paragone, ho deciso di pubblicare entrambe le modellazioni.

Esercizio 2:

almeno 100 uomini non sposati
almeno 120 uomini sposati
almeno 110 donne non sposate
almeno 150 donne sposate

costo Tel. al mattino → 1,1 €
costo Tel. la sera → 1,6 €

			1 MATTINO	2 SERA
1	UOMINI	NON SP	10 %	10 %
2	UOMINI	SP	15 %	30 %
3	DONNE	NON SP	20 %	20 %
4	DONNE	SP	25 %	30 %
5	NESSUNO		30 %	5 %

obiettivo: minimizzare i costi

1) $\min 1,1 \sum_{i=1}^{5} x_{i1} + 1,6 \sum_{i=1}^{5} x_{i2}$ i → indice delle righe della Tabella (Tipologie di persone)

$0,1\, x_{11} + 0,1\, x_{12} \geq 100$

$0,15\, x_{21} + 0,3\, x_{22} \geq 120$ j → indice di colonna (mattino = 1, sera = 2)

$0,2\, x_{31} + 0,2\, x_{32} \geq 110$

$0,25\, x_{41} + 0,3\, x_{42} \geq 150$

$x_{ij} \geq 0$ e intere $\forall i = 1, 2, .., 5 \quad \forall j = 1, 2$

2) dobbiamo aggiungere dei vincoli di costo fisso:

$\sum_{i=1}^{5} x_{i1} \leq M y_1$ → se almeno un $x_{i1} > 0 \Rightarrow y_1$ deve essere necessariamente $= 1$

$\sum_{i=1}^{5} x_{i2} \leq M y_2$

e modificare la funzione obiettivo:

$\min 1,1 \sum_{i=1}^{5} x_{i1} + 1,6 \sum_{i=1}^{5} x_{i2} + 65 y_1 + 80 y_2$

Esercizio 3:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4$$
$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \le 9$$
$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j = 1,\dots,4$$

Ordino per "pesi specifici" decrescenti le variabili:

PESO SPECIFICO	VAR
2	x_1
1	x_4
4/5	x_3
3/4	x_2

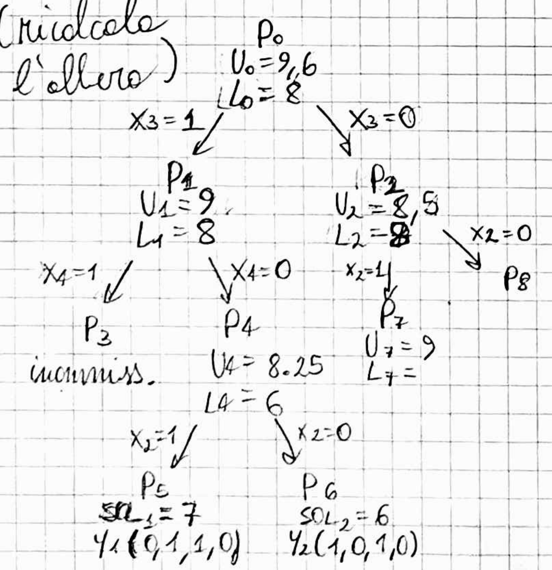
Inserisco le variabili x_1 e x_4 interamente, mentre x_3 viene inserita parzialmente.

La soluzione di questo rilassamento del problema è quindi:

$$U_0 = 2+6+\frac{2}{5}\cdot 4 = 8+\frac{8}{5} = \frac{48}{5} = 9,6$$

inserendo x_1 e x_4, rimane una capacità pari a 2.
Per questo motivo, è possibile inserire solo $\frac{2}{5}$ di x_3.

Una soluzione ammissibile potrebbe essere: $x_1 = x_4 = 1 \quad x_2 = x_3 = 0$
a cui corrisponde un lower bound: $L_0 = 8$



(vedere pagina successiva)

P_2: inserisco interamente x_1, x_4
inserisco $\frac{1}{2}$ di x_2

P_1: inserisco x_3, x_1 interamente
inserisco $\frac{1}{2}$ di x_4

P_4: inserisco x_3, x_1 interamente
$x_4 = 0$
$x_2 = \frac{3}{4}$

P_5: $x_2 = x_3 = 1 \Rightarrow$ è una sol. intera

P_6: $x_3 = 1 = x_1$
$x_2 = x_4 = 0$

P_7: $x_2 = 1 = x_1$ inserisco $\frac{2}{3}$ di x_4
$x_3 = 0$

P_0: inserisco x_1, x_4
inserisco $\frac{2}{5}$ di x_3

P_1: $x_3 = 1 = x_1$
$x_4 = \frac{1}{2}$

P_2: $x_1 = x_4 = 1$
$x_3 = 0$
$x_2 = \frac{1}{2}$

P_3: $x_1 = x_4 = 1$
$x_3 = 0 = x_2$

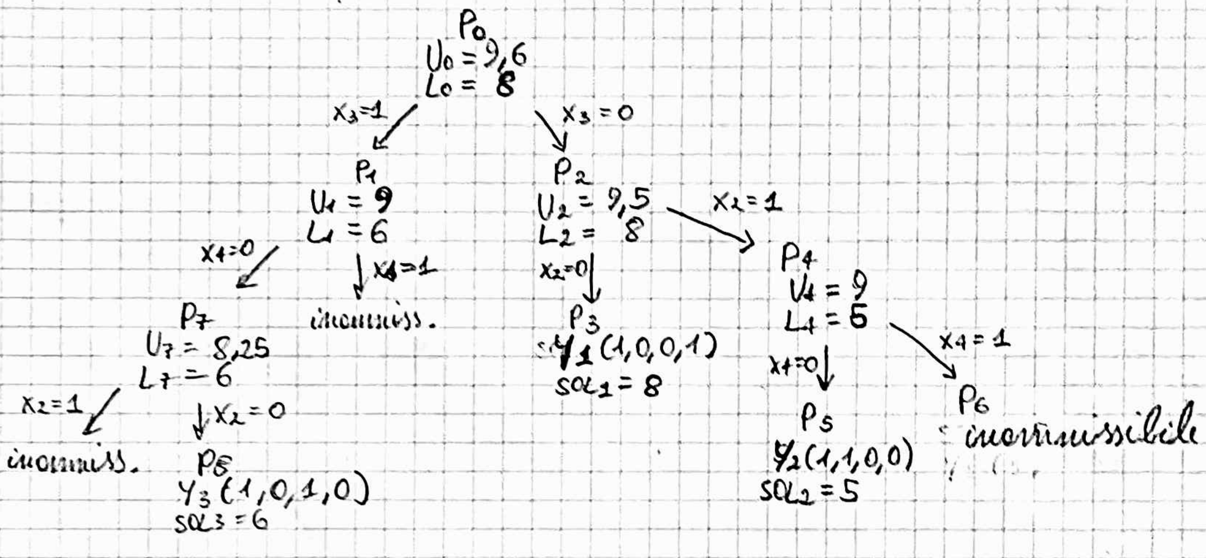
P_4: $x_2 = 1 = x_1$
$x_3 = 0$
$x_4 = \frac{4}{6}$

P_5: $x_2 = 1 = x_1$
$x_4 = 0 = x_3$

P_6: $x_4 = x_2 = 1$
non è possibile

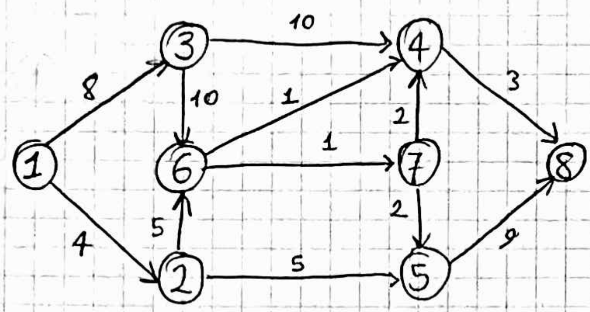
P_7: $x_3 = 1 = x_1$
$x_4 = 0 \quad x_2 = \frac{3}{4}$

P_8: $x_3 = x_1 = 1$
$x_2 = x_4 = 0$



La soluzione ottima è $Y_1(1, 0, 0, 1)$ che restituisce $z = 8$.

Esercizio 4:



$Q = [1]$ $\quad P[1] = 0$

$Q = [3,2]$ $\quad P[2] = P[3] = 1$

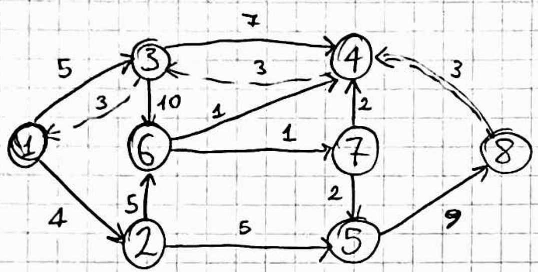
$Q = [2,4,6]$ $\quad P[4] = P[6] = 3$

$Q = [4,6,5]$ $\quad P[5] = 2$

$Q = [6,5,8]$ $\quad P[8] = 4$

cammino aumentante: $1 \to 3 \to 4 \to 8$

$\delta = 3$ $\quad$ flusso $= 3$



$Q = [1]$ $\quad P[1] = 0$

$Q = [3,2]$ $\quad P[2] = P[3] = 1$

$Q = [2,4,6]$ $\quad P[4] = P[6] = 3$

$Q = [4,6,5]$ $\quad P[5] = 2$

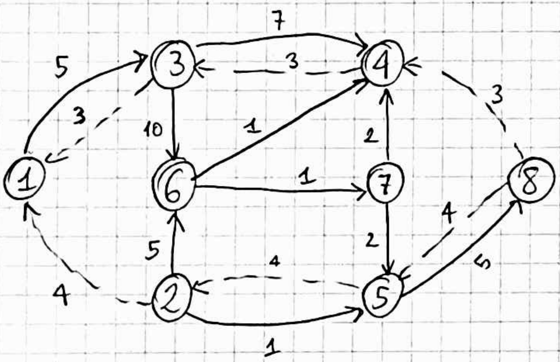
$Q = [6,5]$

$Q = [5,7]$ $\quad P[7] = 6$

$Q = [7,8]$ $\quad P[8] = 5$

cammino aumentante: $1 \to 2 \to 5 \to 8$

$\delta = 4$ $\quad$ flusso $= 7$



$Q = [1]$ $\quad P[1] = 0$

$Q = [3]$ $\quad P[3] = 1$

$Q = [6,4]$ $\quad P[6] = P[4] = 3$

$Q = [4,7]$ $\quad P[7] = 6$

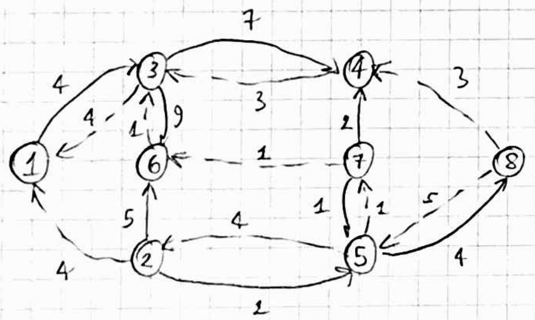
$Q = [7]$

$Q = [5]$ $\quad P[5] = 7$

$Q = [8]$ $\quad P[8] = 5$

cammino aument.: $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 5 \to 8$

$\delta = 1$ $\quad$ flusso $= 8$



$Q = [1]$ $\quad P[1] = 0$

$Q = [3]$ $\quad P[3] = 1$

$Q = [6,4]$ $\quad P[6] = P[4] = 3$

$Q = [4]$

$Q = []$

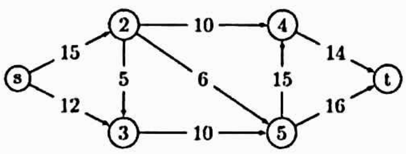
$V_s = \{1,3,6,4\}$ $\quad$ flusso $= 8$

Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di LM in Ingegneria Informatica
Insegnamento di Ricerca Operativa, docente Maurizio Boccia
Prova d'esame del 21-06-2021

Test A

Esercizio 1:
La WaterSystem deve pianificare per la prossima settimana la manutenzione di N impianti di irrigazione. Per ogni impianto i sono previste O_i ore di lavoro. Per eseguire le manutenzioni la ditta utilizza K idraulici indipendenti. Ogni idraulico j ha una disponibilità di D_j ore settimanali, un costo orario di c_j e un costo fisso di chiamata f_j da pagarsi una-tantum nella settimana, se si utilizza l'idraulico. Ogni manutenzione deve essere eseguita da un solo idraulico.
Si formuli il problema con un modello di programmazione lineare con l'obiettivo di minimizzare i costi totali per eseguire tutte le manutenzioni. Se descriva chiaramente il significato delle variabili e dei vincoli presenti nel modello.

Esercizio 2:
Sia dato il seguente grafo orientato pesato



Si determini il valore del cammino minimo che collega il vertice s al vertice t, applicando l'algoritmo che si ritiene più opportuno. Si illustrino i passaggi intermedi effettuati.

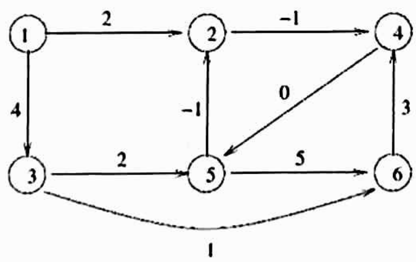
Esercizio 3:
Un lanificio produce filato di tipo standard e di tipo speciale utilizzando 3 diverse macchine, le cui produzioni orarie sono le seguenti:

macchina A: 3 matasse standard e 1 speciale
macchina B: 2 matasse standard e 2 speciali
macchina C: 2 matasse standard e 1 speciale

Il mercato richiede almeno 60 matasse standard e 40 di tipo speciale al giorno. I costi orari delle due macchine sono: 90 euro per la A, 80 euro per B, 60 euro per C.

1) Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera di costo minimo.
2) Individuare una soluzione basica ammissibile eseguendo la prima fase dell'algoritmo del simplesso in due fasi.
3) Dire se la soluzione così ottenuta è ottima o meno.

Esercizio4:
dato il grafo in figura, calcolare l'arborescenza dei cammini minimi dal nodo 1 a tutti gli altri nodi.



Prove d'esame del 21/06/2021 Test A

Esercizio 1:

impianti $\overset{I}{\overbrace{\{i_1, i_2, \dots, i_N\}}}$ da manutenere

$\forall i$, sono previste O_i ore di lavoro

K idraulici $\{j_1, j_2, \dots, j_K\} = J$

$\forall j$, la disponibilità in ore/settimana è pari a D_j, il costo orario è c_j e il costo fisso di chiamata è f_j

Obiettivo: minimizzare i costi totali per eseguire tutte le manutenzioni.

x_{ij} → numero di ore erogate durante la settimana dall'idraulico j per l'impianto i.

y_j → variabile binaria che indica se l'idraulico j è stato utilizzato durante la settimana

$$\min \sum_{j\in J} c_j \sum_{i\in I} x_{ij} + \sum_{j\in J} f_j y_j$$

$\sum_{j\in J} x_{ij} = O_i \quad \forall i \in I$ → rispettare le ore di lavoro previste

$\sum_{i\in I} x_{ij} \leq D_j y_j \quad \forall j \in J$ → rispettare il limite di ore di lavoro dell'idraulico (se l'idraulico j viene impiegato)

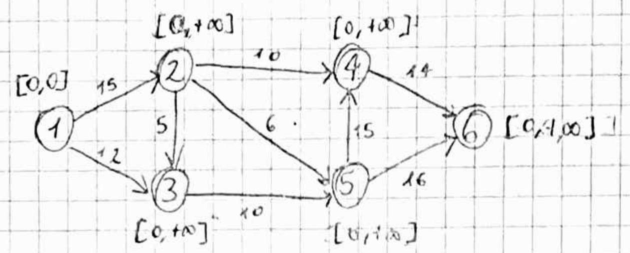
$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J$

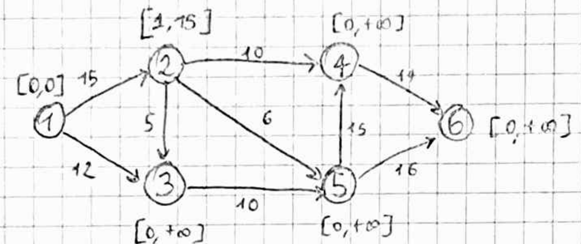
$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J$

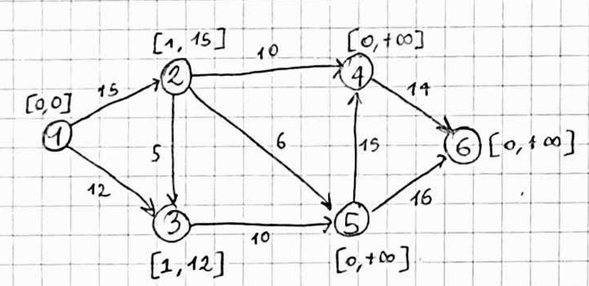
Esercizio 2:

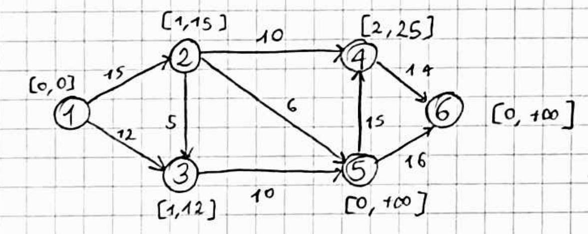
Il grafo è aciclico e ha archi con costi non negativi.
I nodi sono già ordinati topologicamente.
Possiamo usare il seguente algoritmo:

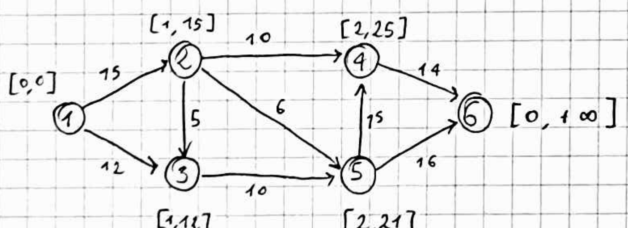
etichette [predecessore, costo]

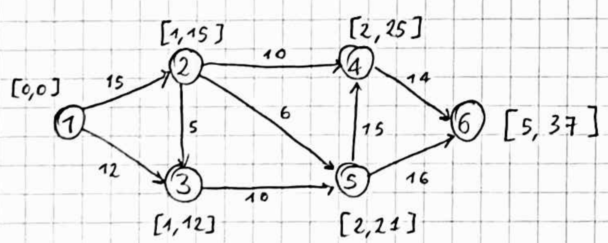












cammino minimo: 1 → 2 → 5 → 7   costo = 37

Esercizio 3:

2 Tipi di filato: standard e speciale

3 macchine: A, B, C

produzioni orarie (matasse / ora)

	standard	speciale
A	3	1
B	2	2
C	2	1

richieste giornaliere (matasse / giorno):

standard	speciale
60	40

costi orari:

A	90 €
B	80 €
C	60 €

1) $\min\ 90X_A + 80X_B + 60X_C$ $\qquad X_A, X_B, X_C \rightarrow$ ore di lavorazione

$$3X_A + 2X_B + 2X_C = 60$$
$$X_A + 2X_B + X_C = 40$$
$$X_A, X_B, X_C \leq 24$$
$$X_A, X_B, X_C \geq 0$$

2) riscrivo il modello:

$$\min z = 90X_A + 80X_B + 60X_C$$
$$3X_A + 2X_B + 2X_C + h_1 = 60$$
$$X_A + 2X_B + X_C + h_2 = 40$$
$$X_A + Y_1 = 24$$
$$X_B + Y_2 = 24$$
$$X_C + Y_3 = 24$$
$$X_A, X_B, X_C \geq 0$$

$$W = h_1 + h_2$$
$$h_1 = 60 - 3X_A - 2X_B - 2X_C$$
$$h_2 = 40 - X_A - 2X_B - X_C$$

$$h_1 + h_2 = 100 - 4X_A - 4X_B - 3X_C$$
$$-4X_A - 4X_B - 3X_C - W = -100$$

	x_A	x_B	x_C	y_1	y_2	y_3	h_1	h_2	$-w$	$-z$	b
y_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	24
y_2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	24
y_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	24
h_1	3	2	2	0	0	0	1	0	0	0	60
h_2	1	2	1	0	0	0	0	1	0	0	40
$-w$	-4	-4	-3	0	0	0	0	0	1	0	-100
$-z$	90	80	60	0	0	0	0	0	0	1	0

	x_A	x_B	x_C	y_1	y_2	y_3	h_1	h_2	$-w$	$-z$	b
y_1	0	$-2/3$	$-2/3$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	4
y_2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	24
y_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	24
x_A	1	$2/3$	$2/3$	0	0	0	$1/3$	0	0	0	20
h_2	0	$4/3$	$1/3$	0	0	0	$-1/3$	1	0	0	20
$-w$	0	$-4/3$	$-1/3$	0	0	0	$4/3$	0	1	0	-20
$-z$	0	20	0	0	0	0	-30	0	0	1	-1800

	x_A	x_B	x_C	y_1	y_2	y_3	h_1	h_2	$-w$	$-z$	b
y_1	0	0	$-1/2$	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	14
y_2	0	0	$-1/4$	0	1	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	9
y_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	24
x_A	1	0	$1/2$	0	0	0	$1/2$	$-1/2$	0	0	10
x_B	0	1	$1/4$	0	0	0	$-1/4$	$3/4$	0	0	15
$-w$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	2	0	0	0
$-z$	0	0	-5	0	0	0	-25	-15	0	1	-21000

h_1 e h_2 sono fuori base.
La soluzione ammissibile è quindi:

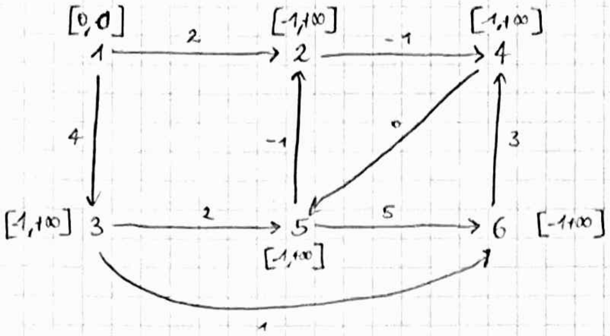
$$(x_A = 10,\ x_B = 15,\ y_1 = 14,\ y_2 = 9,\ y_3 = 24)$$

con valore di f.o.: $z = 21'000$

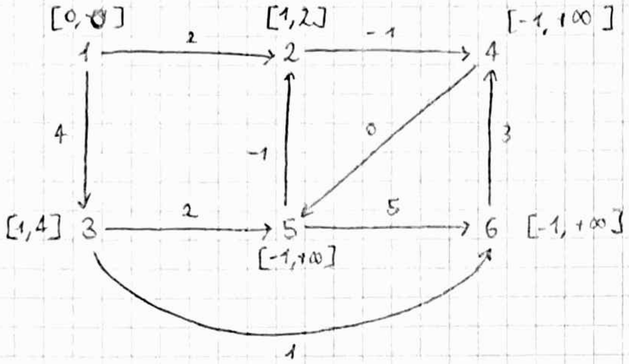
La f.o. è a minimizzare, per cui la soluzione trovata non è ottima.

Esercizio 4 :

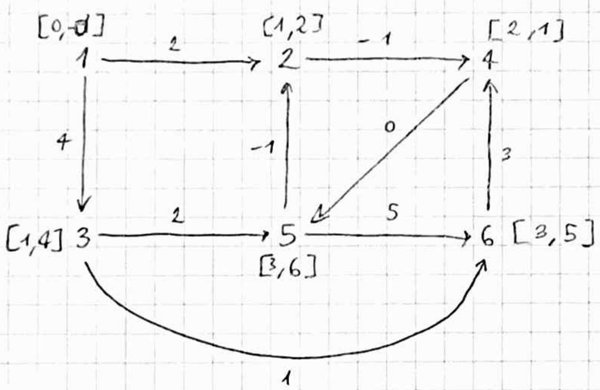
Bellman - Ford



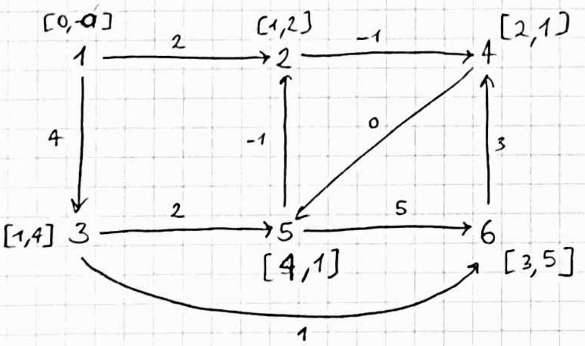
k = 1



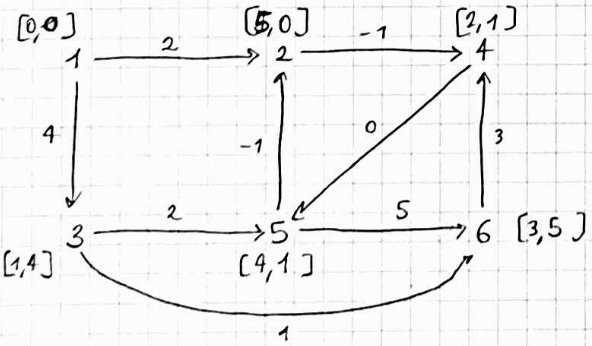
K = 2

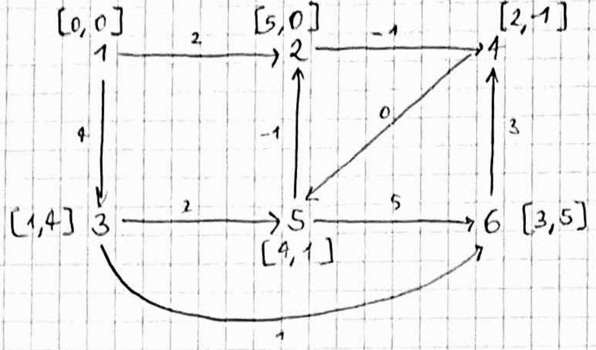


K = 3

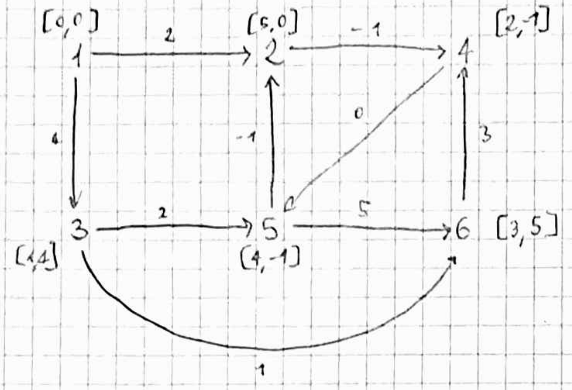


k = 4





K = 5



K = 6

Condizione d'uscita

$\Downarrow$

ciclo a costo totale negativo

Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di LM in Ingegneria Informatica
Insegnamento di Ricerca Operativa, docente Maurizio Boccia
Prova d'esame del 21-06-2021

Test B

Esercizio 1:
La Mec3000 deve scegliere le lavorazioni da realizzare, su una unica macchina. Ciascuna lavorazione j richiede l'utilizzo di un utensile, $u(j) \in U$ dove U è l'insieme di tutti gli utensili disponibili. Ogni lavorazione una volta effettuata comporta un profitto p_j. Lavorazioni diverse possono utilizzare lo stesso utensile. Il magazzino utensili della macchina può ospitare al più K utensili.
Si scriva un modello di programmazione lineare intera per scegliere le lavorazioni (ed i relativi utensili) che massimizzano il profitto. Si descrivano chiaramente i significati delle variabili e dei vincoli presenti nel modello.

Esercizio 2:
Sia dato il problema dello zaino con uno zaino di capacità pari a 36 e con otto oggetti con i seguenti valori e pesi.

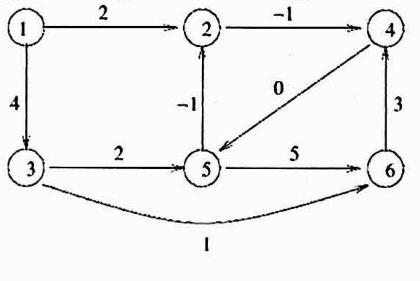
	1	2	3	4	5	6	7	8
v_i	29	11	19	3	9	11	3	5
p_i	20	16	25	4	18	22	2	4

Si calcoli un upper bound per il sottoinsieme delle soluzioni ammissibili del problema che sicuramente non contengono gli oggetti 2 e 5 e che sicuramente contengono gli oggetti 7 e 8. Si ricavi da tale calcolo anche una soluzione ammissibile del problema dello zaino e, se necessario, si effettui il branching del sottoinsieme della regione ammissibile considerato.

Esercizio 3:
Un'azienda effettua due servizi di consegna, normale (A) e rapida (B). Vincoli di mercato impongono che il servizio B sia prodotto in misura pari almeno al doppio di quella di A. Vincoli di distanza impongono che si possano effettuare al massimo 6 consegne di tipo B al giorno. Il personale disponibile è pari a 20 unità. Per una consegna di A si impegnano 2 addetti. Per una consegna di B si impegnano 3 addetti. Il ricavo unitario di B è il doppio di quello di A. Si vuole determinare la produzione giornaliera che massimizza il ricavo totale. Con riferimento al problema descritto:

a) si scriva il modello di programmazione lineare del problema;
b) si disegni il dominio di ammissibilità del problema e la funzione obiettivo;
c) si indichi, per ciascuno dei vertici del dominio, la composizione della soluzione basica ammissibile ad esso associata e si evidenzino eventuali s.b.a. degeneri;
d) si risolva il problema con l'algoritmo del simplesso;
e) si verifichi la correttezza della soluzione trovata risolvendo il problema mediante analisi grafica.

Esercizio 4: (TEST 4)
Verificare la presenza di cicli negativi nel grafo sotto, utilizzando l'algoritmo di Bellman-Ford a partire dal nodo 1.



Prova d'esame del 21/06/2021: Test B

Esercizio 1:

$$\max \sum_{j \in J} y_j p_j$$

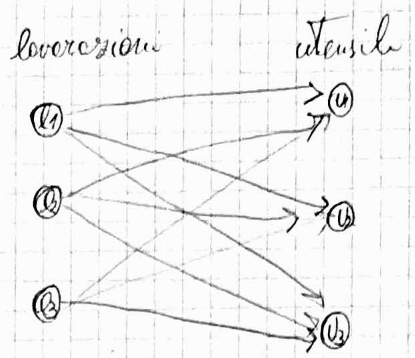
$$\sum_{u \in U} x_{ju} \leq y_j \quad \forall j \in J$$

$$\sum_{j \in J} x_{ju} \leq z_u \quad \forall u \in U$$

$$x_{ju} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, u \in U$$

$$\sum_{u \in U} z_u \leq K$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J$$
$$z_u \in \{0,1\} \quad \forall u \in U$$



grafo Totalmente connesso

Esercizio 2:

capacità = 36

	1	2	3	4	5	6	7	8
V_i	29	11	19	3	9	11	3	5
P_i	20	16	25	4	18	22	2	4
V_i/P_i	1.45	≈0,68	0.76	0.75	0.5	0.5	1.5	1.25

UB delle soluzioni in cui: $x_2 = 0, x_5 = 0, x_7 = 1, x_8 = 1$

calcolare anche una sol. ammissibile.

variabili	V_i/P_i
7	1.5
1	1.45
8	1.25
3	0.76
4	0.75
2	≈ 0.68
5	0.5
6	0.5

$UB(x_2 = 0, x_5 = 0, x_7 = 1, x_8 = 1) =$
$= 29 + \frac{10}{25} \cdot 19 + 3 + 5 = 44.6$

la soluzione corrispondente è:
$y = (x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = \frac{10}{25}, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0,$
$x_7 = 1, x_8 = 1)$

ponendo $x_3 = 0$ otteniamo la seguente sol. ammiss:

$y_1 = (x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0, x_7 = x_8 = 1)$
con valore $SOL_1 = 37$

Esercizio 3:

A: consegna normale
B: consegna rapida

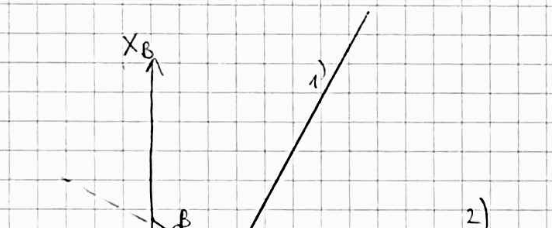
$B \geq 2A$
massimo 6B al giorno
personale = 20
per A ci vogliono 2 addetti
per B ci vogliono 3 addetti

ricavo B = 2 ricavo A

max ricavo totale/giorno

$$\begin{aligned} \max\ & x_A + 2x_B \\ & 2x_A - x_B \leq 0 \\ & x_B \leq 6 \\ & 2x_A + 3x_B \leq 20 \\ & x_A, x_B \geq 0 \text{ e intere} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & z = x_A + 2x_B \\ & 2x_A - x_B + y_1 = 0 \\ & x_B + y_2 = 6 \\ & 2x_A + 3x_B + y_3 = 20 \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{aligned}$$

(probabilmente risolverò il problema senza il vincolo di interezza)



B è il vertice ottimo.

Composizione delle soluzioni:

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3
A	=0	>0	>0	=0	>0
B	>0	>0	>0	=0	=0
C	>0	>0	=0	>0	=0
O	=0	=0	=0	>0	>0

↳ soluzione degenere

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
y_1	2	-1	1	0	0	0	0
→ y_2	0	1	0	0	0	0	6
y_3	2	3	0	0	1	0	20
$-z$	1	2	0	0	0	1	0

↑

	x_1	x_B	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
y_1	2	0	1	0	0	0	6
x_B	0	1	0	0	0	0	6
y_3	2	0	0	0	1	0	2
$-z$	1	0	0	0	0	1	-12

	x_1	x_B	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
y_1	0	0	1	0	-1	0	4
x_B	0	1	0	0	0	0	6
x_1	1	0	0	0	$1/2$	0	1
$-z$	0	0	0	0	$-1/2$	1	-14

soluz. ottima:

$y = (x_1 = 1, x_B = 6, y_1 = 4, y_2 = y_3 = 0)$

$z = 14$

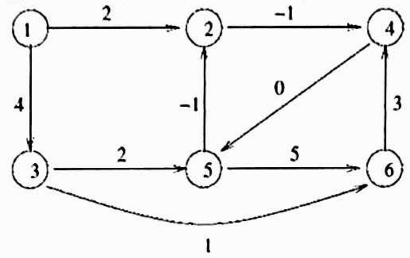
Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di LM in Ingegneria Informatica
Insegnamento di Ricerca Operativa, docente Maurizio Boccia
Prova d'esame del 21-06-2021

Test C

Esercizio 1:
La vostra azienda assembla due tipi di laptop, standard e lusso, che vende ottenendone guadagni unitari rispettivamente pari a 300 euro e 500 euro. Sapendo che ciascun laptop dei due tipi contiene rispettivamente 1 hard-disk e un kit base il primo, 2 hard-disk e un kit premium il secondo, e che le scorte in magazzino sono di 120 hard-disk, 60 kit base e 50 kit premium:

- si formuli il problema di massimizzazione del guadagno;
- si disegni il dominio di ammissibilità del problema e la funzione obiettivo;
- si indichi, per ciascuno dei vertici del dominio, la composizione della soluzione basica ammissibile ad esso associata;
- si risolva graficamente il problema, individuando il vertice ottimo;
- si risolva il problema analiticamente utilizzando l'algoritmo del simplesso.

Esercizio 2: (TEST A)
Verificare la presenza di cicli negativi nel grafo sotto, utilizzando l'algoritmo di Bellman-Ford a partire dal nodo 1.



Esercizio 3:
La WaterSystem deve pianificare per la prossima settimana la manutenzione di N impianti di irrigazione. Per ogni impianto i sono previste O_i ore di lavoro. Per eseguire le manutenzioni la ditta utilizza K idraulici indipendenti. Ogni idraulico j ha una disponibilità di D_j ore settimanali, un costo orario di c_j e un costo fisso di chiamata f_j da pagarsi una-tantum nella settimana, se si utilizza l'idraulico. Ogni manutenzione deve essere eseguita da un solo idraulico.
Si formuli il problema con un modello di programmazione lineare con l'obiettivo di minimizzare i costi totali per eseguire tutte le manutenzioni. Si descrivano chiaramente i significati delle variabili e dei vincoli presenti nel modello.

Esercizio 4:
Si risolva il seguente problema di PLI utilizzando il metodo del branch and Bound. Si riporti l'albero di Branch and Bound ottenuto: a fianco di ciascun nodo, ove possibile, si indichino le coordinate del punto di ottimo del rilassamento continuo e i valori di lower e upper bound.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 5x_1 + 8x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 6, \\
& 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
& x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \quad \text{interi}
\end{aligned}
$$

Prova d'esame del 21/06/2021: Test C

Esercizio 1:

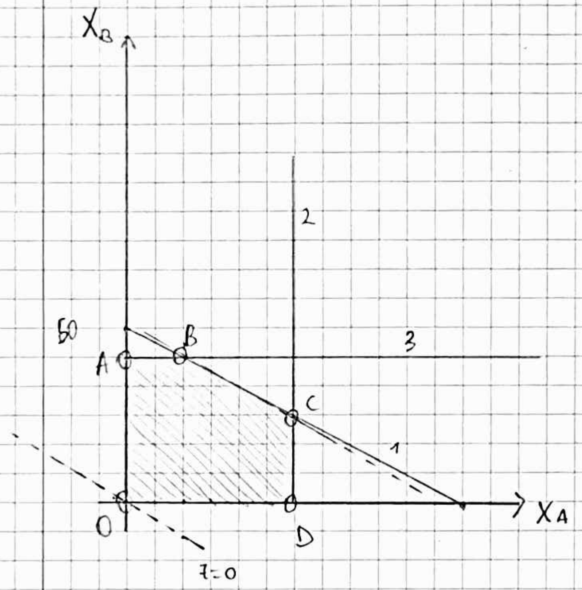
laptop standard → 300€
laptop lusso → 500€

	h.d	Kit base	Kit premium
A (standard)	1	1	
B (lusso)	2		1
	120	60	50

$$\max \ 300 x_A + 500 x_B$$
1) $x_A + 2x_B \le 120$
2) $x_A \le 60$
3) $x_B \le 50$
$x_A, x_B \ge 0$

→

$$\max z = 300 x_A + 500 x_B$$
$x_A + 2x_B + y_1 = 120$
$x_A + y_2 = 60$
$x_B + y_3 = 50$
$x_A, x_B \ge 0$



C sembra essere il vertice migliore.

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3
A:	=0	>0	>0	>0	=0
B:	>0	>0	=0	>0	=0
C:	>0	>0	=0	>0	=0
D:	>0	=0	>0	=0	>0
O:	=0	=0	>0	>0	>0

Nessun vertice rappresenta una soluzione degenere.

Imposto il Simplesso:

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
y_1	1	2	1	0	0	0	120
y_2	1	0	0	1	0	0	60
→ y_3	0	1	0	0	1	0	50
$-z$	300	500	0	0	0	1	0
		↑					

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
y_1	1	0	1	0	-2	0	20
y_2	1	0	0	1	0	0	60
x_B	0	1	0	0	1	0	50
$-z$	300	0	0	0	-500	1	-25000

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_A	1	0	1	0	-2	0	20
y_2	0	0	-1	1	2	0	40
x_B	0	1	0	0	1	0	50
$-z$	0	0	-300	0	100	1	-31'000

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_A	1	0	0	1	0	0	60
y_3	0	0	$-1/2$	$1/2$	1	0	20
x_B	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	0	30
$-z$	0	0	-250	-50	0	1	-33'000

Soluzione finale: $(x_A = 60, x_B = 30, y_1 = y_2 = 0, y_3 = 20)$

con $z = 33'000$

$\downarrow$

vertice C

Esercizio 3:

x_{ij} → variabile binaria che indica se l'idraulico j è stato assegnato all'impianto i

y_j → l'idraulico j è stato chiamato → = 1
altrimenti = 0.

$$\min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K} O_i c_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{K} f_j y_j$$

$\sum_{j=1}^{K} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1,..,N$ → solo un idraulico per impianto

$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K} x_{ij} = N$ → tutti gli impianti devono essere manutenuti

$\sum_{i=1}^{N} O_i x_{ij} \leq D_j y_j \quad \forall j = 1,..,K$ → l'ammontare di ore erogate da un singolo idraulico deve essere inferiore alla disponibilità in ore dell'idraulico stesso.

$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1,..,N, \forall j = 1,..,K$

$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j = 1,..,K$

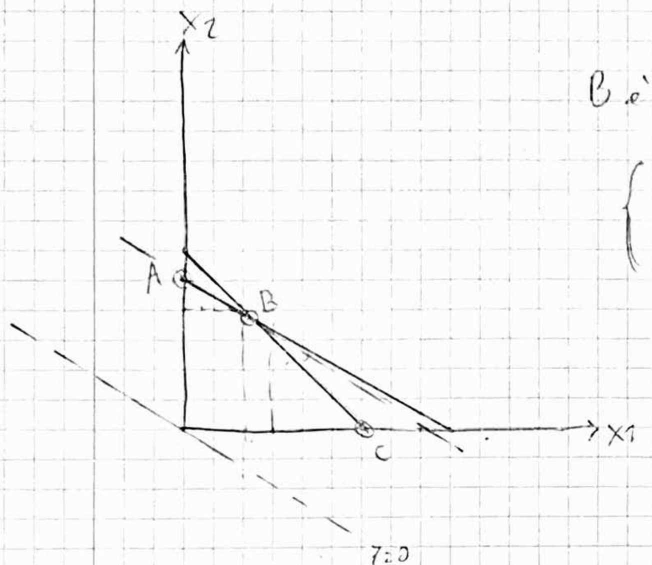
Esercizio 4 :

$\max z = 5x_1 + 8x_2$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$5x_1 + 9x_2 \leq 45$

$x_1, x_2 \geq 0$ e interi



B è il vertice ottimo del problema rilassato.

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_2 \\ 30 - 5x_2 + 9x_2 = 45 \end{cases}$$

$4x_2 = 15$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{15}{4} \\ x_1 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$U_0 = 41{,}25$
$(9/4,\ 15/4)$

$x_1 \leq 2$ → $U_1 = 41{,}\overline{1}$ $(2, 35/9)$

$x_1 \geq 3$ → $U_2 = 39$ $(3, 3)$ $LB = 39$

$x_2 \geq 4$ → $U_3 = 41$ $(1{,}8, 4)$

$x_2 \leq 3$ → $U_4 = 34$ $(2, 3)$ stop

$x_1 \leq 1$ → $U_5 \cong 40{,}5$ $(1, 4{,}44)$

$x_1 \geq 2$ → infeas.

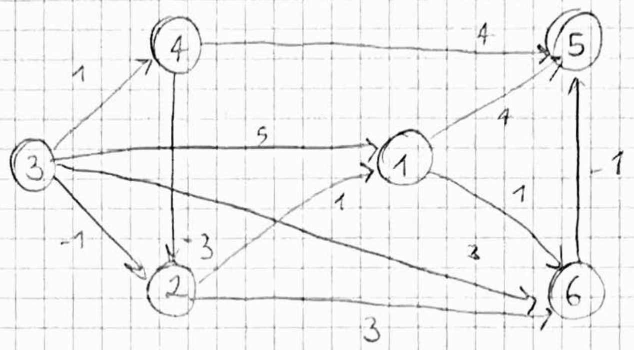
$x_2 \leq 4$ → $U_6 = 37$ $(1, 4)$ stop

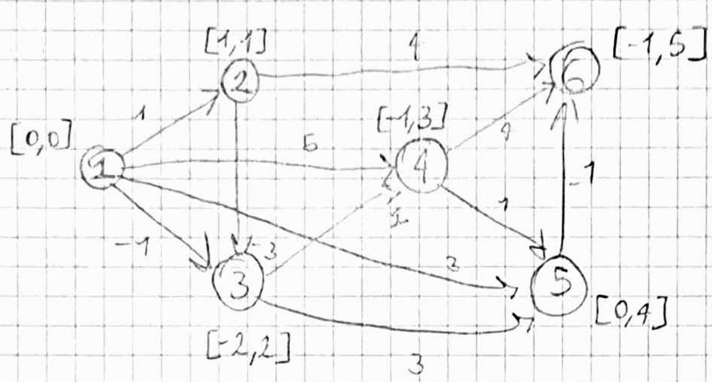
$x_2 \geq 5$ → $U_7 = 40$ $(0, 5)$ $LB = 40$

soluzione ottima : $(0,5)$ con $z = 40$

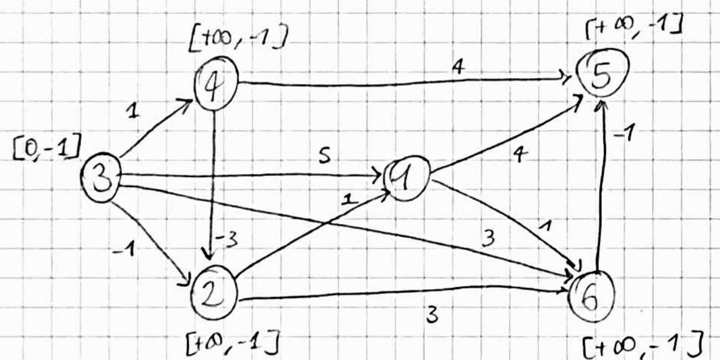
Prova del 17/01/2019:

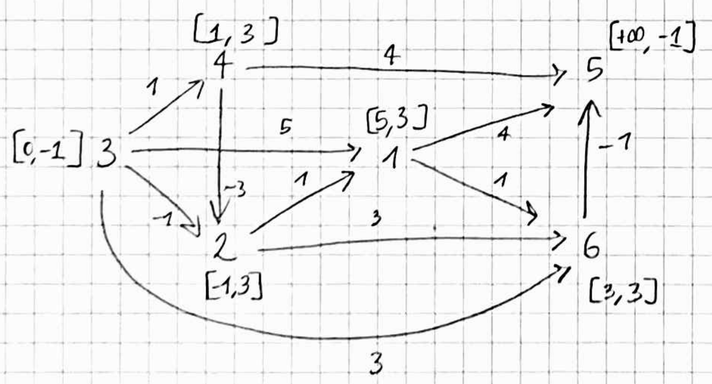
Esercizio 5:



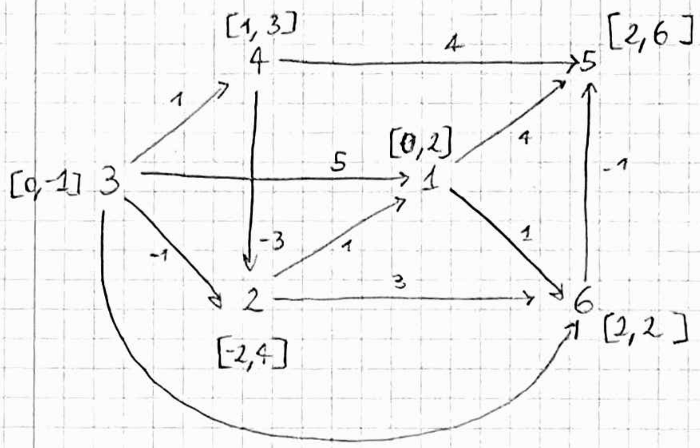


Prova con Bellman-Ford:

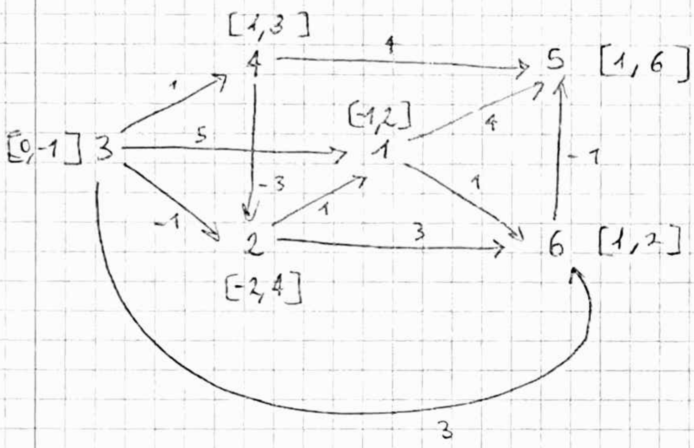




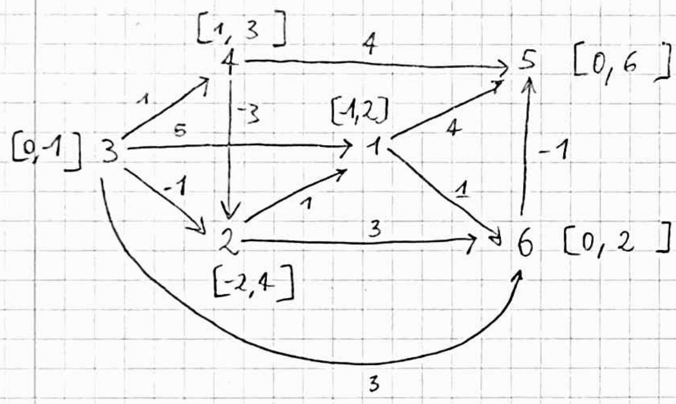
K=1



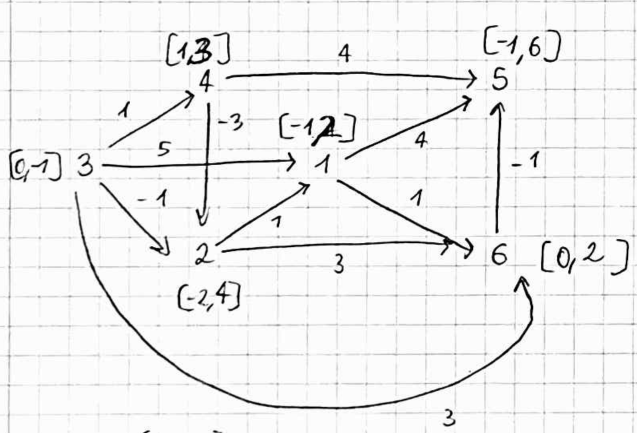
K = 2



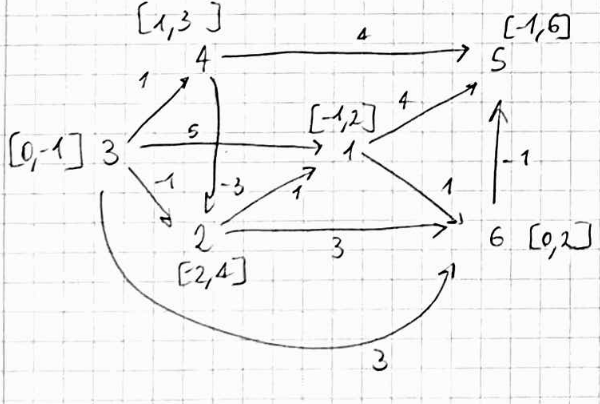
K = 3



K = 4



K = 5



K = 6

stop.

Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di Ricerca Operativa (M. Boccia)
Prova d'esame del 11-09-2019

Esercizio1:
Una compagnia di distribuzione deve rifornire i suoi clienti C1, C2, C3, C4 e C5 che sono dislocati in località diverse di una regione. Per ottimizzare il rifornimento, la compagnia vuole costruire un numero di depositi non superiore a due disponendo di tre possibili zone dove costruirli. A seconda della zona in cui vengono costruiti, i tre possibili depositi hanno un costo di costruzione e una capacità massima diversi. La tabella che segue riporta questi costi in migliaia di euro e queste capacità in tonnellate.

	Costo costruzione	Capacità massima
Deposito 1	*10000*	*180*
Deposito 2	*15000*	*230*
Deposito 3	*13000*	*500*

Il quantitativo di merce (in tonnellate) richiesto da ciascun cliente è riportato nella tabella che segue insieme ai costi (in migliaia di euro) del trasporto di una unità di merce da ciascuno dei possibili depositi a ciascun cliente.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Richiesta	*91*	*170*	*135*	*153*	*110*
Deposito 1	*15*	*13*	*27*	*9*	*7*
Deposito 2	*12*	*21*	*34*	*21*	*3*
Deposito 3	*7*	*10*	*2*	*17*	*12*

Costruire un modello lineare che rappresenti il problema descritto per soddisfare esattamente la richiesta minimizzando il costo complessivo e supponendo che non ci siano limitazioni sulle quantità massime di merci trasportabili.

Esercizio 2:
Un'azienda produce due prodotti A e B. Vincoli tecnologici impongono che la produzione totale sia al massimo di 10 tonnellate. Vincoli di mercato impongono invece che la produzione di A deve superare la produzione di B di esattamente 2.5 tonnellate e che la produzione di B sia al massimo pari a 7 tonnellate. I profitti unitari di A e B sono nel rapporto 2/3. Si vuole conoscere il piano di produzione che massimizza il profitto totale. Con riferimento al problema descritto:

a) si formuli il problema come problema di programmazione lineare
b) si disegni il dominio di ammissibilità del problema e una linea di livello della funzione obiettivo
c) si indichi, per ciascuno dei vertici del dominio, la composizione della soluzione basica ammissibile ad esso associata
d) si risolva graficamente il problema, individuando il vertice ottimo.

Esercizio 3:
A partire dal modello dell'esercizio 2,

a) si eliminino eventuali vincoli ridondanti
b) si risolva il problema analiticamente con l'algoritmo del simplesso e il metodo del bigM
c) si effettui, analiticamente e graficamente, l'analisi di stabilità al variare del termine noto sulla produzione di A rispetto a B.

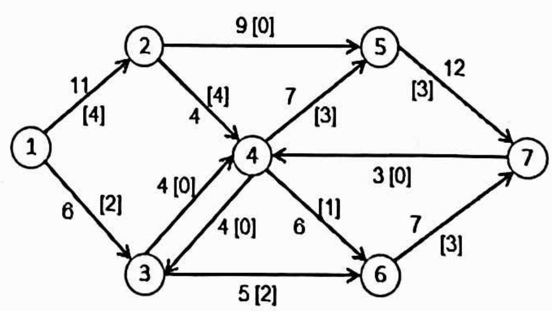
Esercizio 4:
Una banca di investimenti dispone di 14 milioni di euro e investe primariamente in quattro tipi di investimento (numerati 1, 2, 3, 4). La seguente tabella indica, per ogni investimento, il ritorno netto e il capitale da investire.

Investimento	1	2	3	4
Ritorno netto	16	22	12	8
Capitale da investire	5	7	4	3

Si formuli un modello di PLI per risolvere il problema di scegliere gli investimenti da effettuare in modo da massimizzare il ritorno totale (gli investimenti possono essere scelti o non scelti, ma non è possibile effettuare un investimento parziale). Si risolva il modello mediante un algoritmo di Branch-and-Bound.

Esercizio 5:

1. Si determini il valore del massimo flusso dal vertice 1 al vertice 7 della rete riportata in figura a partire dalla configurazione dei flussi fornita ed utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Si indichi l'algoritmo di visita utilizzato ad ogni iterazione per il calcolo del cammino aumentate.
2. Si indichi il taglio di capacità minima.
3. Si scriva il modello del massimo flusso per una coppia origine destinazione.



Prova d'esame del 11/09/2019:

Esercizio 1:

clienti: C1, C2, C3, C4, C5
3 possibili zone
massimo due depositi

	COSTO COSTRUZ.	CAPACITA' MASSIMA
DEPOSITO 1	10.000	180
DEPOSITO 2	15.000	230
DEPOSITO 3	13.000	500

in Tonnellate

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
RICHIESTA	91	170	135	153	110	in Tonnellate
DEPOSITO 1	15	13	27	9	7	costo di trasporto in K€/Tonnellata
DEPOSITO 2	12	21	34	21	3	
DEPOSITO 3	7	10	2	17	12	

Obiettivo: minimizzare costo complessivo

HP: non ci sono limitazioni sulle quantità massime di merci trasportabili

$$\min \sum_{K=1}^{5} \sum_{i=1}^{3} c_{ik} X_{ik} + \sum_{i=1}^{3} f_i Y_i$$

1) $\sum_{K=1}^{5} X_{ik} \leq M Y_i \quad \forall i = 1,2,3 \rightarrow$ se almeno un $X_{ik} > 0 \Rightarrow Y_i = 1$
(vincolo di variable upper bound)

2) $\sum_{i=1}^{3} X_{ik} = r_K \quad \forall K = 1,..,5 \rightarrow$ soddisfacimento delle richieste

3) $\sum_{K=1}^{5} X_{ik} \leq Q_i \quad \forall i = 1,..,3 \rightarrow$ vincolo di capacità massima

$$X_{ik} \geq 0 \quad \forall i = 1,..,3 \quad \forall K = 1,..,5$$

Possiamo unire il vincolo 1 e 3:

$$\sum_{K=1}^{5} X_{ik} \leq Q_i Y_i \quad \forall i = 1,2,3$$

Esercizio 2.3:

due prodotti : A e B

produzione totale di massimo 10 tonnellate

la produzione di A deve superare la produzione di B di esattamente 2.5 tonnellate

La produzione di B deve essere di al massimo 7 tonnellate.

I profitti unitari di A e B sono in rapporto $\frac{2}{3}$

obiettivo: massimizzare il profitto totale

a) $\max \quad 2x_A + 3x_B$

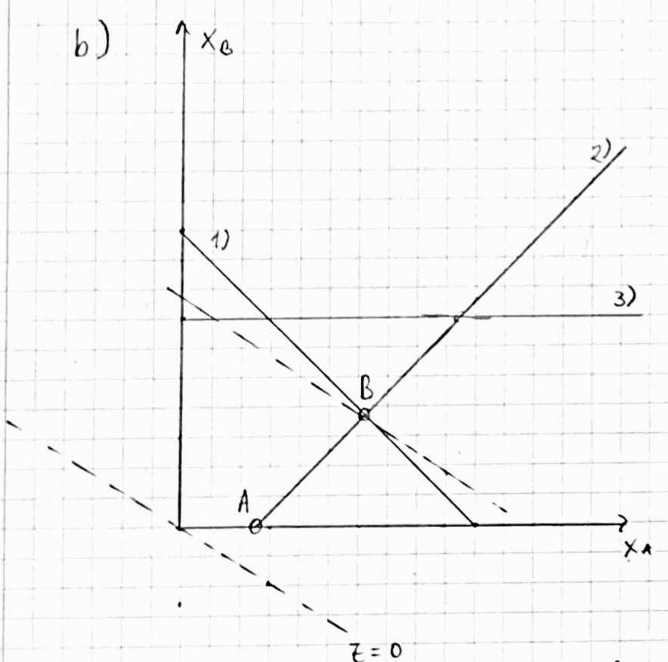
1) $x_A + x_B \leq 10$ → massimo 10 tonnellate

2) $x_A - x_B = 2.5$ → pred. A supera di 2.5 tonnellate la pred. B

3) $x_B \leq 7$ → massimo 7 tonnellate

$x_A, x_B \geq 0$

b)



	x_A	x_B	y_1	h_2	y_3
A :	>0	$=0$	>0	$=0$	>0
B :	>0	>0	$=0$	$=0$	>0

il vertice ottimo è B

$$\max \quad 2x_A + 3x_B$$
$$x_A + x_B + y_1 = 10$$
$$x_A - x_B + h_2 = 2.5$$
$$x_B + y_3 = 7$$

il vincolo 3 è ridondante →

$$\max \quad 2x_A + 3x_B$$
$$x_A + x_B + y_1 = 10$$
$$x_A - x_B + h_2 = 2.5$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

Imposto il problema per risolverlo con il metodo del big-M:

$$\max \quad 2X_A + 3X_B - M h_2$$
$$X_A + X_B + Y_1 = 10$$
$$X_A - X_B + h_2 = 2.5$$
$$X_A, X_B \geq 0$$

$h_2 = 2.5 - X_A + X_B$

↓

corrisponde a un'operazione di pivoting

quindi:

$$\max \quad 2X_A + 3X_B - M h_2 =$$
$$= 2X_A + 3X_B - 2.5M + MX_A - MX_B =$$
$$= (2+M)X_A + (3-M)X_B - 2.5M$$

da cui:

$$\max z = (2+M)X_A + (3-M)X_B - 2.5M$$
$$X_A + X_B + Y_1 = 10$$
$$X_A - X_B + h_2 = 2.5$$
$$X_A, X_B \geq 0$$

	X_A	X_B	Y_1	h_2	$-z$	b
Y_1	1	1	1	0	0	10
→ h_2	1	-1	0	1	0	2.5
$-z$	2+M	3-M	0	0	1	2.5M

↑

	X_A	X_B	Y_1	h_2	$-z$	b
→ Y_1	0	2	1	-1	0	7.5
X_A	1	-1	0	1	0	2.5
$-z$	0	5	0	-(2+M)	1	-5

↑

→

	X_A	X_B	Y_1	h_2	$-z$	b
X_B	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3,75
X_A	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	6,25
$-z$	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}-M$	1	-42,5

soluzione: $X_A = 6,25 \quad X_B = 3,75 \quad Y_1 = h_2 = 0 \quad z = 42,5$

la soluzione è quindi il vertice B

Esercizio 4 :

disponibilità = 14 (milioni)

investimento	1	2	3	4	1	2	3	4
ritorno netto	16	22	12	8	3.2	~3.14	3	2,6
capitale da investire	5	7	4	3				

obiettivo: max ritorno

$$\max \sum_{i=1}^{4} x_i r_i$$ → ritorno netto

$$\sum_{i=1}^{4} c_i x_i \leq 14$$

↓ capitale associato all'investimento,

$x_i \geq 0$ e intera $\forall i = 1, \dots, 4$

Knapsack problem:

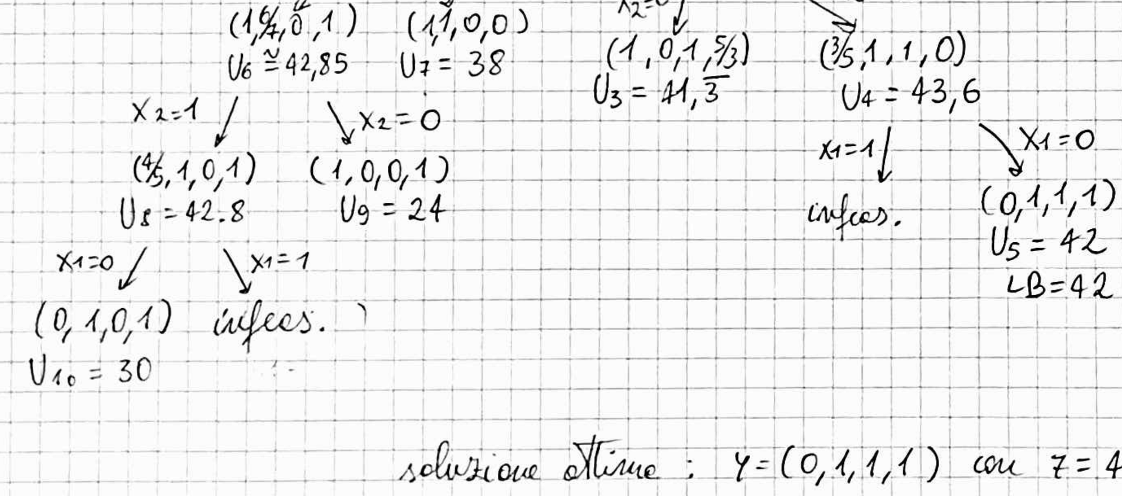
	convenienza
1	3.2
2	~3.14
3	3
4	2.6

soluzione ottima (rilassata):

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = \frac{1}{2} \quad x_4 = 0$

$z = 16 + 22 + 6 = 44$

soluzione ammissibile: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$ con $z = 38$



soluzione ottima: $y = (0,1,1,1)$ con $z = 42$

Esercizio 5:

Algoritmo di Ford-Fulkerson (Edmonds-Karp)

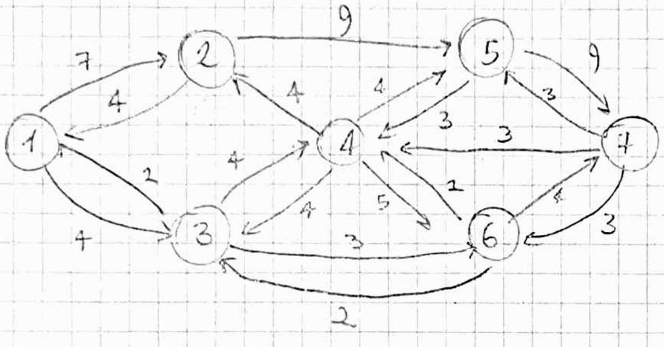
1. $p_i = \begin{cases} -1 & \forall i \neq s \\ 1 & \forall i = s \end{cases}$ $\quad Q = \{s\}$

2. IF $Q = \emptyset$ THEN STOP
ELSE estrai primo elemento i da Q

3. IF $(i,t) \in A(x)$ THEN $p_i = t$, STOP

4. $\forall (i,j) \in A(x)$
IF $p_j = -1$ THEN $p_j = i$, aggiungi j in Q
Torna al passo 2

flusso = 6



$Q = [1]$

$Q = [2,3]$ $\quad P[2,3] = 1$

$Q = [3,5]$ $\quad P[5] = 2$

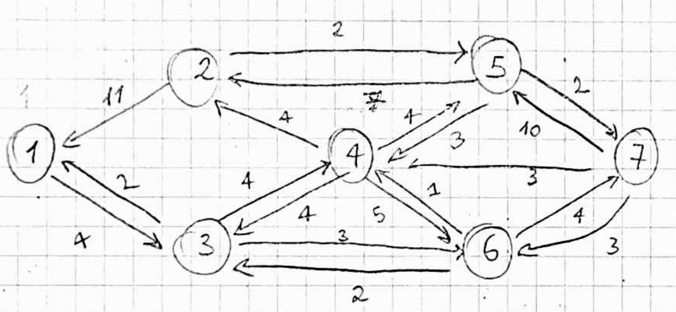
$Q = [5,4,6]$ $\quad P[4,6] = 3$

$Q = [4,6,7]$ $\quad P[7] = 5$

STOP

$1 \to 2 \to 5 \to 7 \quad \delta = 7$

flusso = 13



$Q = [1]$

$Q = [3]$ $\quad P[3] = 1$

$Q = [4,6]$ $\quad P[4] = P[6] = 3$

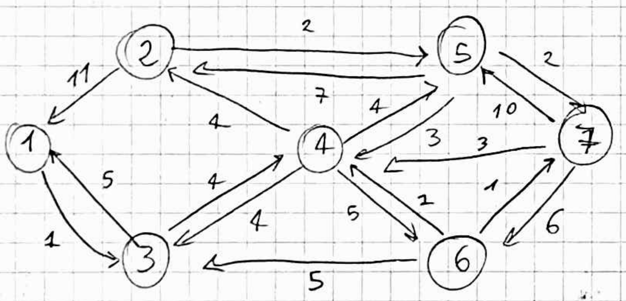
$Q = [6,5,2]$ $\quad P[5,2] = 4$

$Q = [5,2,7]$ $\quad P[7] = 6$

STOP

$1 \to 3 \to 6 \to 7 \quad \delta = 3$

flusso = 16



$Q = [1]$

$Q = [3]$ $\quad P[3] = 1$

$Q = [4]$ $\quad P[4] = 3$

$Q = [2,5,6]$ $\quad P[2,5,6] = 4$

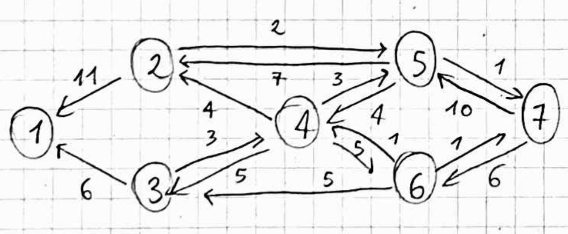
$Q = [5,6]$

$Q = [6,7]$ $\quad P[7] = 5$

STOP

$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7 \quad \delta = 1$

flusso = 17



Q [1]

Q [ ]

STOP

flusso massimo = 17 $\quad$ Taglio minimo: $V_s = \{1\}$

Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di Ricerca Operativa (M. Boccia)
Prova d'esame del 14-06-2019

Esercizio1:
E' necessario allocare 10 processi su 4 CPU da rispettivamente 1.33, 2, 2.66 e 4 GHz. Il numero di operazioni elementari dei processi (espresso in BI, che indica un miliardo di operazioni elementari) è il seguente:

processo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
BI	1.1	2.1	3	1	0.7	5	3	1.4	3.2	0.9

Scrivere il modello in programmazione lineare intera che consenta di allocare i processi alle CPU in modo da minimizzare il tempo totale di completamento dei processi.

Esercizio 2:
Un'azienda produce due prodotti A e B. Per la loro produzione vengono utilizzate due risorse (R1 ed R2) disponibili in quantità limitata di 28 kg e 85 kg, rispettivamente. Per la produzione di una unità di A sono necessari 4 kg di R1 e 8 kg di R2. Per la produzione di una unità di B sono necessari 7 kg di R1 e 10 kg di R2. Vincoli tecnologici impongono che il rapporto tra la produzione di A e la produzione di B sia almeno pari ad 1/3. Inoltre, vincoli di mercato impongono che la produzione di B deve superare la produzione di A di almeno 1 unità. I prezzi di vendita unitari dei prodotti A e B sono nel rapporto 4/1. Con riferimento al problema descritto:
a) si scriva il modello di programmazione lineare del problema che massimizza il ricavo dell'azienda;
b) si disegni il dominio di ammissibilità del problema e la funzione obiettivo;
c) si indichi, per ciascuno dei vertici del dominio, la composizione della s.b.a. ad esso associata;
d) si risolva graficamente il problema, individuando il vertice ottimo e calcolandone le coordinate e il valore di f.o.

Esercizio 3:
Si eliminino eventuali vincoli ridondanti dal modello dell'esercizio n.2
a) si risolva il problema con l'algoritmo del simplesso.
b) si identifichino le matrici B e B-1 relative alla soluzione ottima ottenuta al p.to a).
c) si effettui analiticamente e graficamente l'analisi di stabilità della sol. ott. ottenuta al punto (a) su un vincolo a scelta.

Esercizio 4:
Si consideri il seguente problema di PLI:

Max $z = 100\ x1 + 150\ x2$
s.a. $8\ x1 + 4\ x2 \le 40$
$15\ x1 + 30\ x2 \le 200$
$x2 \le 5$
$x1 \ge 0,\ x2 \ge 0$ (intere)

Si risolva il problema tramite il metodo B&B e l'ausilio dell'analisi grafica utilizzando una strategia Depth First.

Esercizio 5:
a) Si scriva il modello del massimo flusso per una generica coppia o-d.
b) Si determini il massimo flusso da 1 a 7 per la rete in figura 1 utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson e identificando correttamente il taglio minimo.

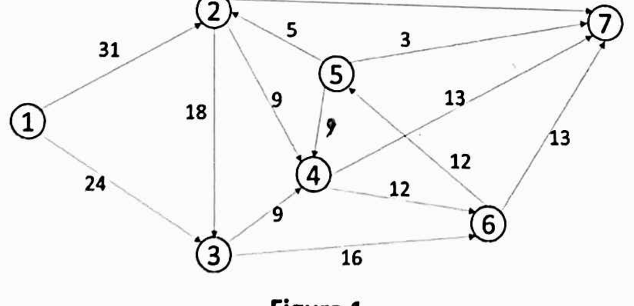


Figura 1

Prova del 14/06/2019:

Esercizio 1:

10 processi

4 CPU

↳ 1.33 2 2.66 4 GHz

Processo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bi	1.1	2.1	3	1	0.7	5	3	1.4	3.2	0.9

obiettivo: minimizzare il tempo totale di completamento dei processi.

ogni processo può essere eseguito da un unico processore.

Costruisco una matrice C, in cui ogni elemento C_{ij} è il tempo impiegato dal processore i per eseguire completamente il processo j.

X_{ij} → variabile che indica se al processore i è stato assegnato il processo j

$$\min \max \left(\sum_{j=1}^{10} X_{ij} C_{ij} \quad \forall i = 1,..,4 \right)$$

quindi:

$$\min T$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{ij} C_{ij} \leq T \quad \forall i = 1,..,4$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_{ij} = 1 \quad \forall j = 1,..,10$$

$$X_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1,..,4 \text{ e } j = 1,..,10$$

Esercizio 2 e 3

	R_1	R_2
disponibilità (Kg)	28	85
A	4	8
B	7	10

$\frac{A}{B} \geq \frac{1}{3}$ $\quad A \geq \frac{1}{3} X_B \quad 3X_A \geq X_B \rightarrow 3X_A - X_B \geq 0$

$-3X_A + X_B \leq 0$

$B \geq A + 1$

$\frac{\text{prezzo } A}{\text{prezzo } B} = \frac{4}{1}$ $\quad$ direttiva: massimizzare il ricavo

Imposto il modello:

$$\max \; 4X_A + X_B$$

1) $4X_A + 7X_B \leq 28$

2) $8X_A + 10X_B \leq 85$

3) $3X_A - X_B \geq 0$

4) $-X_A + X_B \geq 1$

$X_A, X_B \geq 0$

$\rightarrow$

$\max \; 4X_A + X_B$

$4X_A + 7X_B + Y_1 = 28$

(superfluo) $8X_A + 10X_B + Y_2 = 85$

$-3X_A + X_B + Y_3 = 0$

$-X_A + X_B - Y_4 + h_4 = 1$

$X_A, X_B \geq 0$

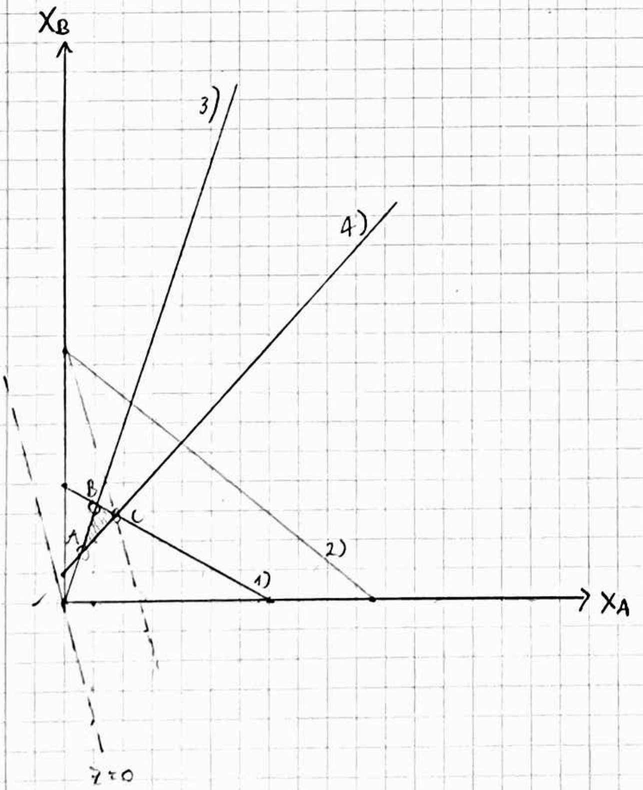
$\downarrow$

$\max z = 4X_A + X_B$

$4X_A + 7X_B + Y_1 = 28$

$-3X_A + X_B + Y_2 = 0$

$-X_A + X_B - Y_3 + h = 1$



	X_A	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	h
A:	>0	>0	>0	=0	=0	=0
B:	>0	>0	=0	=0	>0	=0
C:	>0	>0	=0	>0	=0	=0

C sembra essere il vertice ottimo.

$$\begin{cases} 4x_A + 7x_B = 28 \\ -x_A + x_B = 1 \end{cases} \rightarrow x_B = 1 + x_A \Rightarrow 4x_A + 7 + 7x_A = 28$$

$$\downarrow$$

$$11 x_A = 21$$

$$\hookrightarrow x_A = \frac{21}{11}$$

$$\Downarrow$$

$$x_B = \frac{32}{11}$$

Per cui: $C = \left(\frac{21}{11}, \frac{32}{11}\right) = (\simeq 1{,}90 ; \simeq 2{,}90)$ in cui $z = 10{,}5455$

Imposto la Tabella per il simplesso. Seguirò il metodo delle due fasi:

$\max z = 4x_A + x_B$

$\min W = h = 1 + x_A - x_B + y_3 \rightarrow x_A - x_B + y_3 - W = -1$

$4x_A + 7x_B + y_1 = 28$

$-3x_A + x_B + y_2 = 0$

$-x_A + x_B - y_3 + h = 1$

$x_A, x_B, y_1, y_2, y_3, h \geq 0$

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	h	$-W$	$-z$	b
y_1	4	7	1	0	0	0	0	0	28
y_2	-3	1	0	1	0	0	0	0	0
→ h	-1	1	0	0	-1	1	0	0	1
$-W$	1	-1	0	0	1	0	1	0	-1
$-z$	4	1	0	0	0	0	0	1	0
		↑							

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	h	$-W$	$-z$	b
→ y_1	11	0	1	0	7	-7	0	0	21
y_2	-2	0	0	1	1	-1	0	0	-1
x_B	-1	1	0	0	-1	1	0	0	1
$-W$	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$-z$	5	0	0	0	1	-1	0	1	-1
	↑								

	x_A	x_B	y_1	y_2	y_3	$-z$	b
x_A	1	0	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{7}{11}$	0	$\frac{21}{11}$
y_2	0	0	$\frac{2}{11}$	1	$\frac{25}{11}$	0	$\frac{31}{11}$
x_B	0	1	$\frac{1}{11}$	0	$-\frac{4}{11}$	0	$\frac{32}{11}$
$-z$	0	0	$-\frac{5}{11}$	0	$-\frac{24}{11}$	1	$-\frac{116}{11}$

soluzione:

$x_A = \frac{21}{11}$ $x_B = \frac{32}{11}$ $y_1 = 0$ $y_2 = \frac{31}{11}$ $y_3 =$

$z = \frac{116}{11} = 10{,}5455$

C è, quindi, il vertice ottimo.

Esercizio 4:

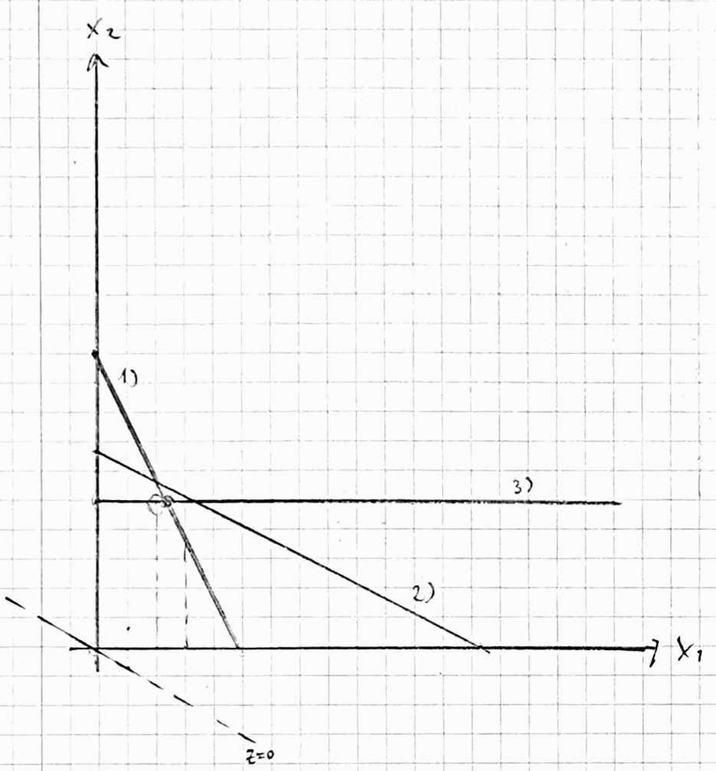
$\max\ z = 100 x_1 + 150 x_2 = 10 x_1 + 15 x_2$

$8 x_1 + 4 x_2 \leq 40$

$15 x_1 + 30 x_2 \leq 200$

$x_2 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$ e interi



$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 40 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 8x_1 + 20 = 40 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 2.5 = \frac{5}{2} \\ x_2 = 5 \end{cases}$

$Y_0 = (2.5, 5)$

$U_0 = 100$

$U_0 = 100$
$Y_0 = (2.5, 5)$

$x_1 \leq 2$: $U_1 = 95$, $Y_1 = (2, 5)$, $LB = 95$

$x_1 \geq 3$: $U_2 = 90$, $(3, 4)$

La soluzione ottima è $Y_1 = (2, 5)$ con $z = 95$

Esercizio 5:

Modello di massimo flusso (generale)

$\max f$

$$\sum_{j \in S^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in S^-(i)} x_{ji} = \begin{cases} f & \forall i = o \\ 0 & \forall i \in N - \{o, d\} \\ -f & \forall i = d \end{cases}$$

$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

Modello particolare:

$\max f$

$x_{12} + x_{13} = f$

$x_{27} + x_{24} + x_{23} - x_{12} - x_{52} = 0$

$x_{34} + x_{36} - x_{13} - x_{23} = 0$

$x_{47} + x_{46} - x_{24} - x_{34} - x_{54} = 0$

$x_{65} + x_{67} - x_{46} - x_{36} = 0$

$+x_{27} + x_{57} + x_{47} + x_{67} = +f$

$0 \leq x_{12} \leq 31$

$0 \leq x_{13} \leq 24$

$0 \leq x_{23} \leq 18$

$0 \leq x_{24} \leq 9$

$0 \leq x_{27} \leq 12$

$0 \leq x_{34} \leq 9$

$0 \leq x_{36} \leq 16$

$0 \leq x_{46} \leq 12$

$0 \leq x_{47} \leq 13$

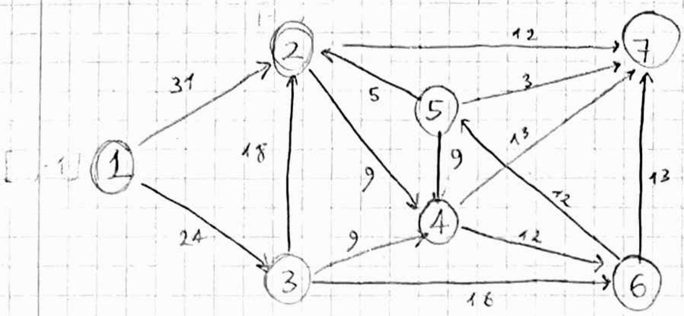
$0 \leq x_{52} \leq 5$

$0 \leq x_{54} \leq 9$ (non c'è scritto sul grafo)

$0 \leq x_{57} \leq 3$

$0 \leq x_{65} \leq 12$

$0 \leq x_{67} \leq 13$



flusso = 0 K = 1

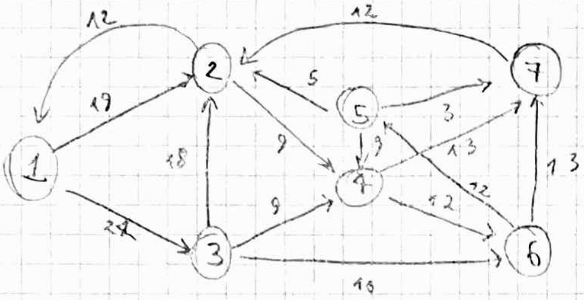
Q = [1]

Q = [2, 3] P[2] = P[3] = 1

Q = [3, 4, 7] P[4] = P[7] = 2

STOP

1 → 2 → 7 δ = 12



flusso = 12 K = 2

Q = [1]

Q = [2, 3] P[2] = P[3] = 1

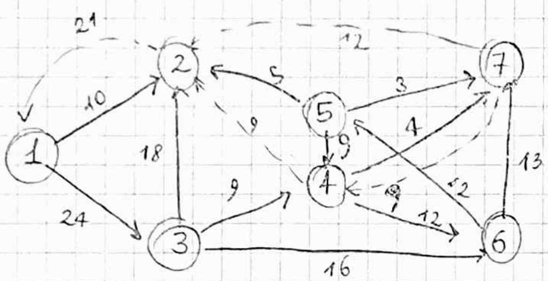
Q = [3, 4] P[4] = 2

Q = [4, 6] P[6] = 3

Q = [6, 7] P[7] = 4

STOP

1 → 2 → 4 → 7 δ = 9



flusso = 21 K = 3

Q = [1]

Q = [2, 3] P[2] = P[3] = 1

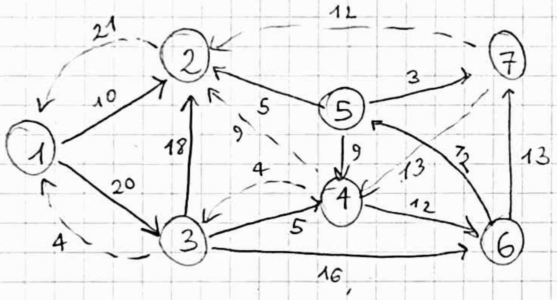
Q = [3]

Q = [4, 6] P[4] = P[6] = 3

Q = [6, 7] P[7] = 4

STOP

1 → 3 → 4 → 7 δ = 4



flusso = 25 K = 4

Q = [1]

Q = [2, 3] P[2] = P[3] = 1

Q = [3]

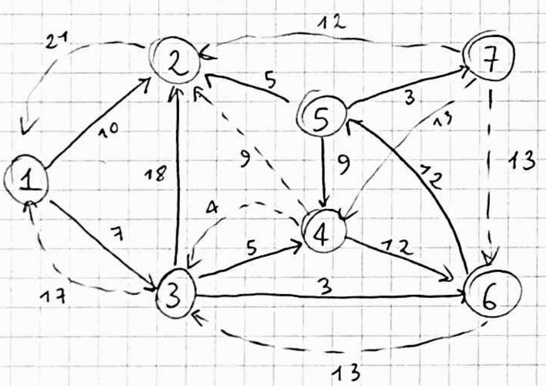
Q = [4, 6] P[4] = P[6] = 3

Q = [6]

Q = [7] P[6] = 7

1 → 3 → 6 → 7

STOP δ = 13



flusso = 38 K = 5

Q = [1]

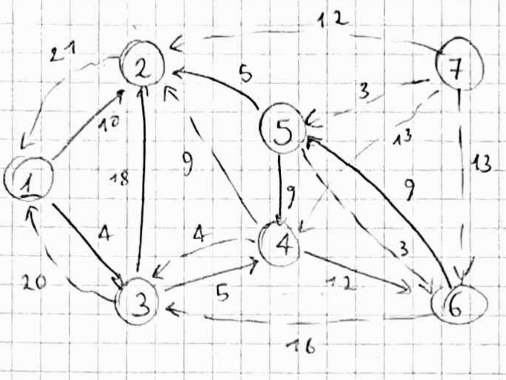
Q = [2, 3] P[2] = P[3] = 1

Q = [3]

Q = [4, 6] P[4] = P[6] = 3

Q = [6]

Q = [5] P[5] = 6



Q = [7]   P[7] = 5

STOP

1 → 3 → 6 → 5 → 7 $\delta = 3$

flusso = 41   K = 6

Q = [1]

Q = [2, 3]   P[2] = P[3] = 1

Q = [3]

Q = [4]   P[4] = 3

Q = [6]   P[6] = 4

Q = [5]   P[5] = 6

Q = []

STOP

flusso finale = 41

Taglio minimo : $V_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $V_t = \{7\}$

Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di Ricerca Operativa (M. Boccia)
Prova d'esame del 16-05-2019

Esercizio1: NO
Sia data una macchina a capacità unitaria (può eseguire un lavoro per volta) che deve effettuare tre lavori aventi tempo di processamento p1= 2, p2= 3, p3= 4. Formulare il problema di scheduling che consenta di determinare la sequenza che minimizza la media dei tempi di completamento dei lavori, tenendo conto che, se il primo lavoro precede il secondo, l'inizio del terzo lavoro deve aspettare un tempo $\Delta 3= 2$ dopo il termine del secondo lavoro, mentre, se il terzo lavoro precede il primo, l'inizio del secondo deve attendere un tempo $\Delta 2= 3$ dopo il termine del primo lavoro.

Esercizio 2: NO
Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + x_2 + 2x_3 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$. Si esegua una iterazione del metodo del gradiente a partire dal punto A= $[-1\ 0\ 2]^T$. Si controlli la condizione di arresto dell'algoritmo.

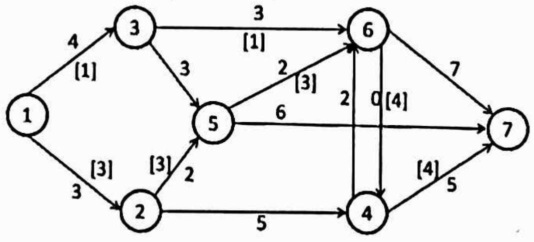
Esercizio 3:
Risolvere il seguente problema di PL utilizzando l'algoritmo del simplesso in due fasi:

$$\begin{array}{llll} \min & Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & & \\ & x_1 \quad -2x_2 \quad +2x_3 & = & 3 \\ & 3x_1 \quad +x_2 \quad -3x_3 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. & & \end{array}$$

Esercizio 4:
Si risolva il seguente problema di zaino mediante il metodo di Branch-and-Bound adottando una strategia di esplorazione dell'albero di tipo best first. Si consideri come figlio di sinistra il nodo corrispondente al sottoproblema con vincolo $x_i = 0$, dove la variabile x_i è la variabile che assume valore frazionario nella soluzione del rilassamento lineare.

$\max z = 10\, x_1 + 12\, x_2 + 5\, x_3 + 7\, x_4 + 9x_5$
s.a.
$5\, x_1 + 8\, x_2 + 6\, x_3 + 2\, x_4 + 7\, x_5 \leq 14$
$x_i=\{0,1\}$ per $i = 1,\ldots,5$

Esercizio 5:
a) Si scriva il modello del massimo flusso per una coppia origine destinazione.
b) Si determini il massimo flusso dal vertice 1 al vertice 7 della rete riportata in figura. Si parta dalla soluzione iniziale fornita, in cui i pesi degli archi sono i valori capacità residua e i valori tra parentesi quadre sono i valori di flusso.



Esercizio 6:
Un'azienda di prodotti alimentari deve trasportare un carico di merce da un proprio centro di distribuzione a diversi magazzini localizzati in una data area geografica. I magazzini e il centro di distribuzione, coincidente con il nodo A, sono collegati tramite la rete stradale rappresentata tramite la seguente matrice, nella quale vengono riportate le distanze per ogni coppia origine – destinazione.

	A	B	C	D	E	F
A	0	21	35	38	70	55
B	21	0	13	29	62	22
C	35	13	0	34	48	20
D	38	29	34	0	15	27
E	70	62	48	15	0	32

Si vuole raggiungere ogni nodo della rete distributiva senza farvi ritorno, minimizzando il percorso totale e tornando al nodo di partenza. In particolare, descrivendo i passi necessari, occorre:
1) trovare una soluzione del problema di TSP con un algoritmo greedy;
2) effettuare una iterazione dell'algoritmo 2-opt per migliorare la soluzione calcolata al punto 1.

Prova d'esame del 16/05/2019:

Esercizio 3:

$$\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3$$
$$3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\downarrow$

$$\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$W = h_1 + h_2 = 3 - x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6 - 3x_1 - x_2 + 3x_3 + y_2$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + h_1 = 3$$
$$3x_1 + x_2 - 3x_3 - y_2 + h_2 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, y_2, h_1, h_2 \geq 0$$

$W = 9 - 4x_1 + x_2 + x_3 + y_2$

$-4x_1 + x_2 + x_3 + y_2 - W = -9$

	x_1	x_2	x_3	y_2	h_1	h_2	$-W$	$-z$	b
h_1	1	-2	2	0	1	0	0	0	3
→ h_2	3	1	-3	-1	0	1	0	0	6
$-W$	-4	1	1	1	0	0	1	0	-9
$-z$	3	2	4	0	0	0	0	1	0

↑

	x_1	x_2	x_3	y_2	h_1	h_2	$-W$	$-z$	b
→ h_1	0	$-7/3$	3	$1/3$	1	$-1/3$	0	0	1
x_1	1	$1/3$	-1	$-1/3$	0	$1/3$	0	0	2
$-W$	0	$7/3$	-3	$-1/3$	0	$4/3$	1	0	-1
$-z$	0	1	7	1	0	-1	0	1	-6

↑

	x_1	x_2	x_3	y_2	h_1	h_2	$-W$	$-z$	b
x_3	0	$-\frac{7}{9}$	1	$1/9$	$1/3$	$-1/9$	0	0	$1/3$
x_1	1	$-4/9$	0	$-\frac{2}{9}$	$1/3$	$2/9$	0	0	$7/3$
$-W$	0	0	0	0	1	1	1	0	0
$-z$	0	$\frac{58}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$-7/3$	$-2/9$	0	1	$-\frac{25}{3}$

	x_1	x_2	x_3	y_2	$-z$	b
x_3	0	$-7/9$	1	$1/9$	0	$1/3$
x_1	1	$-4/9$	0	$-2/9$	0	$7/3$
$-z$	0	$\frac{58}{9}$	0	$2/9$	1	$-\frac{25}{3}$

soluzione ottima

$x_1 = \frac{7}{3}$ $x_2 = 0$ $x_3 = \frac{1}{3}$

$y_2 = 0$ $h_1 = h_2 = 0$

Esercizio 1 :

$$\max\ z = 10x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5$$
$$5x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 7x_5 \leq 14$$
$$x_i = \{0,1\} \quad \forall i = 1,\dots,5$$

convenienza	variabile (indice)
3.5	4
2	1
1.5	2
≈ 1.28	5
$0.8\overline{3}$	3

soluzione rilassata

$x_4 = 1 \qquad x_3 = x_5 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{7}{8}$

$U_0 = 27.5$

ponendo $x_2 = 0$ otteniamo : $LB_0 = 17$

$U_0 = 27,5$

$(1, \frac{7}{8}, 0, 1, 0)$

$x_2 = 0$ → $U_1 = 26$, $(1,0,0,1,1)$, $LB_1 = 26$

$x_2 = 1$ → $U_2 = 27$, $(\frac{4}{5}, 1, 0, 1, 0)$

- $x_1 = 0$ → $U_3 = 24,1429$, $(0,1,0,1,\frac{4}{7})$
- $x_1 = 1$ → $U_4 = 25,5$, $(1,1,0,\frac{1}{2},0)$, stop : $U_4 < LB_1$

soluzione ottima : $(1,0,0,1,1)$ con $z = 26$

Esercizio 5 :

a) Scrivo prima il modello generale :

$$\max f$$

$$\sum_{j \in S^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in S^-(i)} x_{ji} = \begin{cases} f & \forall i = 1 \\ 0 & \forall i = 2, \dots, 6 \\ -f & \forall i = 7 \end{cases}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$$

↳ capacità dell'arco

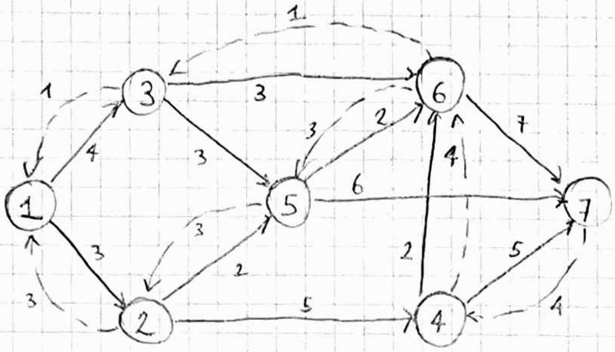
Scrivo il modello particolare :

$$\max f$$

$$x_{13} + x_{12} = f$$
$$x_{36} + x_{35} - x_{13} = 0$$
$$x_{25} + x_{24} - x_{12} = 0$$
$$x_{56} + x_{57} - x_{35} - x_{25} = 0$$
$$x_{46} + x_{47} - x_{64} - x_{24} = 0$$
$$x_{67} - x_{36} - x_{56} = 0$$
$$x_{67} + x_{57} + x_{47} = f$$

$$0 \le x_{12} \le 6$$
$$0 \le x_{13} \le 5$$
$$0 \le x_{24} \le 5$$
$$0 \le x_{25} \le 5$$
$$0 \le x_{35} \le 3$$
$$0 \le x_{36} \le 4$$
$$0 \le x_{46} \le 2$$
$$0 \le x_{47} \le 9$$
$$0 \le x_{56} \le 5$$
$$0 \le x_{57} \le 6$$
$$0 \le x_{64} \le 4$$
$$0 \le x_{67} \le 7$$

b)



flusso = 4 K = 1

Q = [1]

Q = [2, 3] P[2] = P[3] = 1

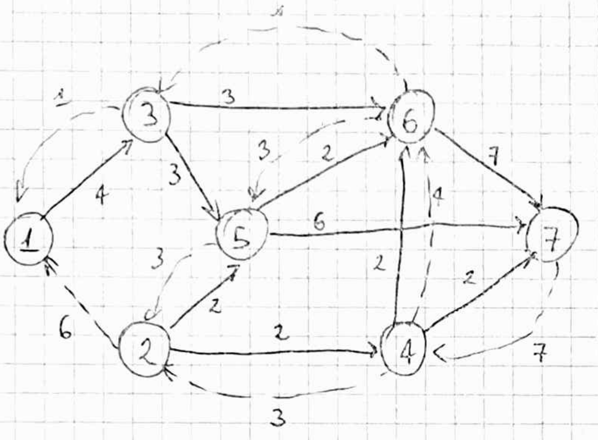
Q = [3, 4, 5] P[4] = P[5] = 2

Q = [4, 5, 6] P[6] = 3

Q = [5, 6, 7] P[7] = 4

STOP

1 → 2 → 4 → 7 δ = 3



flusso = 7 K = 2

Q = [1]

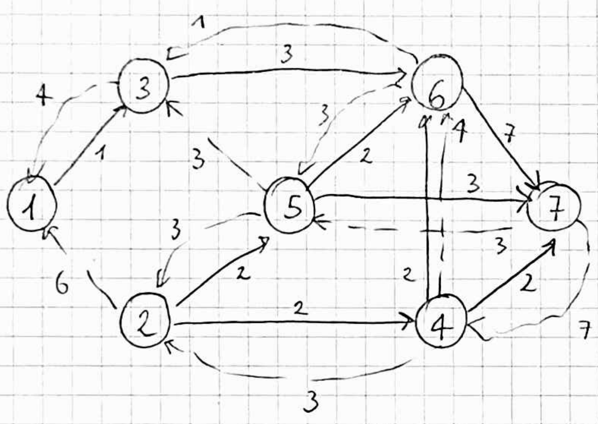
Q = [3] P[3] = 1

Q = [5, 6] P[5] = P[6] = 3

Q = [6, 7] P[7] = 5

STOP

1 → 3 → 5 → 7 δ = 3



flusso = 10 K = 3

Q = [1]

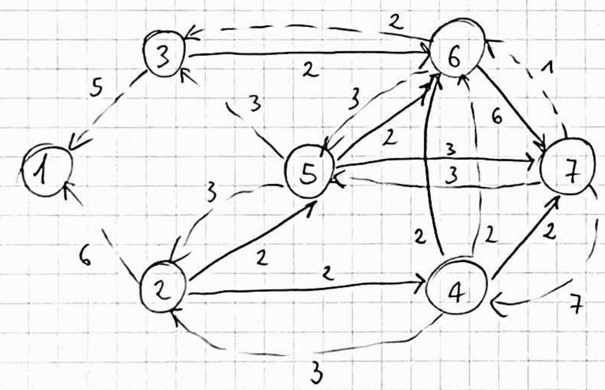
Q = [3] P[3] = 1

Q = [6] P[6] = 3

Q = [7] P[7] = 6

STOP

1 → 3 → 6 → 7 δ = 1



flusso = 11 K = 4

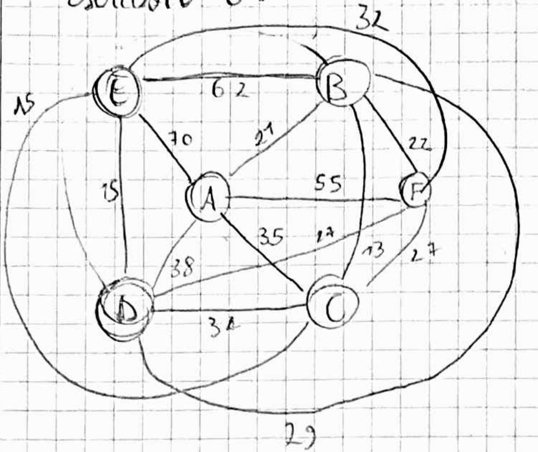
Q = [1]

Q = [ ]

STOP

Taglio min: $V_s = \{1\}$ $V_t = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Esercizio 6:



grafo totalmente connesso:

TSP greedi:

1. $Q = [A]$ $i = A$ $PATH = [\ ]$
2. se la lunghezza di $Q \neq 6$
3. $\forall j \in \delta^+(i)$ e non presente in Q

   argmin $= \{C_{ij}\}$

   (dove C_{ij} è il costo associato all'arco (i,j))
4. inserisci argmin in Q
5. inserisci (i,j) in PATH
6. GOTO 2

In sostanza, considerando di trovarsi sul nodo i, si considerano tutti gli archi che partono a pianeti non visitati e si sceglie quello a costo minimo.

$Q = [A]$ $PATH = [\ ]$

$Q = [A,B]$ $PATH = [(A,B)]$

$Q = [A,B,C]$ $PATH = [(A,B),(B,C)]$

$Q = [A,B,C,F]$ $PATH = [(A,B),(B,C),(C,F)]$

$Q = [A,B,C,F,D]$ $PATH = [(A,B),(B,C)(C,F),(F,D)]$

$Q = [A,B,C,F,D,E]$ $PATH = [(A,B),(B,C),(C,F),(F,D),(D,E)]$

costo totale: $21 + 13 + 20 + 27 + 15 = 96$

2) Credo che la soluzione sia già ottima.

Università degli Studi di Napoli Federico II – Corso di Ricerca Operativa (M. Boccia)
Prova d'esame del 22-07-2019

Esercizio1:

Secondo i dati ISTAT, la provincia di Torino può essere suddivisa in 7 centri di domanda 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Un'azienda ha individuato 5 punti A, B, C, D ed E, nei quali potrebbero essere costruiti nuovi ipermercati per soddisfare la domanda dei sette centri. Tale impresa è interessata a soddisfare la domanda sopramenzionata in modo tale che i clienti non percorrano più di 30 minuti di auto per raggiungere almeno uno dei centri di vendita. Nella tabella seguente viene indicato il tempo auto necessario per raggiungere un punto di offerta da un punto di domanda.
L'apertura dei centri vendita costa rispettivamente (in milioni di euro): A = 310, B = 250, C = 260, D = 330, E = 280.
Scrivere il modello in programmazione lineare intera che minimizza i costi di apertura dei centri vendita, garantendo il fatto che tutti i punti di domanda vengano serviti .

	A	B	C	D	E
1	41	33	24	29	58
2	25	12	22	58	41
3	21	43	34	54	18
4	21	42	39	26	18
5	11	23	24	29	53
6	47	23	19	16	31
7	37	47	51	26	19

Esercizio 2:

Si consideri il problema dell'esercizio 1. Si supponga che l'azienda ritenga attivabile il centro B solo se almeno uno dei centri C o D sia attivato. Come cambia il modello di programmazione lineare intera?

Esercizio 3:

Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered} Max\, x_1 + 5x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 5x_1 - 2x_2 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

a) si risolva il problema con l'algoritmo del simplesso e il metodo delle due fasi;
b) si verifichi il risultato ottenuto nel punto (a), risolvendo graficamente il problema, disegnando il dominio di ammissibilità e le linee di livello della funzione obiettivo.

Esercizio 4:

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera e lo si risolva con il metodo del Branch and Bound. Si risolvano in maniera grafica i rilassamenti lineari dei problemi corrispondenti ai singoli nodi dell'albero di enumerazione.

$$\begin{gathered} Max\, x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \leq 11 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ (intere)} \end{gathered}$$

Esercizio 5:

Si consideri il progetto i cui dati sono riportati in tabella.

Attività	Durata	Attività precedenti
A	2	-
B	3	-
C	4	-
D	6	A, B
E	2	B, C
F	3	A, D
G	4	D, E
H	5	E

a) Determinare la durata minima del progetto, il cammino critico, i tempi di inizio al più presto ed al più tardi di tutte le attività.
b) Per ogni attività non critica, indicare di quanto debba aumentare la durata dell'attività affinchè questa diventi critica.

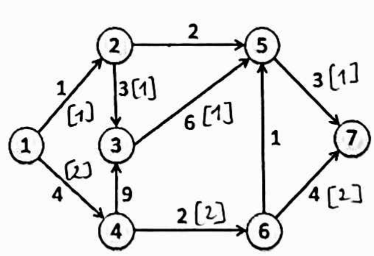
Esercizio 6:

Sia dato un problema di massimo flusso e il problema di taglio minimo associato. Sia $U^* \subset V$ un sottoinsieme di nodi che definisce un taglio minimo del grafo e sia $(i,j) \in A$ un arco del grafo facente parte del taglio (cioè $i \in U^*, j \in V \backslash U^*$) con capacità $m_{ij} > 0$. Si dica, motivando le risposte, se è vero che per ogni δ con $(0 \leq \delta \leq m_{ij})$:

a) L'incremento di δ della capacità dell'arco (i,j) implica un incremento di δ del valore ottimo del problema del massimo flusso;
b) Il decremento di δ della capacità dell'arco (i,j) implica un decremento di δ del valore ottimo del problema del massimo flusso.

Esercizio 7:

Dato il grafo capacitato rappresentato nella figura seguente con sorgente al nodo 1 e destinazione al nodo 7, trovare il massimo flusso partendo dalla soluzione iniziale ($x_{12} = 1, x_{14} = 2, x_{23} = 1, x_{35} = 1, x_{46} = 2, x_{57} = 1, x_{67} = 2$).



Prova d'esame del 22/07/2019:

Esercizio 1:

7 centri di domanda

5 punti : A, B, C, D, E

non più di 30 minuti da uno dei centri

	A	B	C	D	E
1	41	33	24	29	58
2	25	12	22	58	41
3	21	43	31	54	18
4	21	42	39	26	18
5	11	23	24	29	53
6	47	23	19	16	31
7	37	41	51	26	19
costi ap.	310	250	260	330	280

← ogni elemento è un c_{ij}

obiettivo : minimizzare i costi di apertura

$$\min \sum_{i=A}^{E} f_i Y_i$$

vincolo di impl. logica (se $X_{ij} = 1 \Rightarrow Y_j = 1$)

$$\sum_{i=1}^{7} X_{ij} \leq 7 Y_j \qquad \forall j = A, \dots, E$$

$$\forall i=1,\dots,7 \ \forall j = A,\dots,E \quad c_{ij} X_{ij} - 30 \leq 58 Z_{ij}$$ → se $c_{ij} X_{ij} \geq 30 \Rightarrow Z_{ij} = 1$

$$\forall i = 1,\dots,7 \quad \sum_{j=A}^{E} Z_{ij} \leq \sum_{j=A}^{E} X_{ij} - 1$$ → almeno uno dei punti a cui il centro di domanda afferisce

$$\sum_{j=A}^{E} X_{ij} \geq 1 \qquad \forall i = 1,\dots,7$$ → deve esserci almeno un punto aperto a cui afferisce il centro i

$X_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i=1,\dots,7 \ \forall j = A,\dots,E$

$Y_j = \{0,1\} \quad \forall j = A,\dots,E$

$Z_{ij} = \{0,1\} \quad \forall i = 1,\dots,7 \ \forall j = A,\dots,E$

Esercizio 2:

$$Y_B \leq Y_C + Y_D$$

Esercizio 3:

$\max\ x_1 + 5x_2$

1) $x_1 - x_2 \leq 3$

2) $5x_1 - 2x_2 = 8$

3) $-x_1 + 3x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\longrightarrow$

$\max z = x_1 + 5x_2$

$\min W = h_2 + h_3$

$x_1 - x_2 + y_1 = 3$

$5x_1 - 2x_2 + h_2 = 8$

$-x_1 + 3x_2 - y_3 + h_3 = 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$W = h_2 + h_3 = 8 - 5x_1 + 2x_2 + 1 + x_1 - 3x_2 + y_3 =$$
$$= 9 - 4x_1 - x_2 + y_3$$
$$\downarrow$$
$$-4x_1 - x_2 + y_3 - W = -9$$

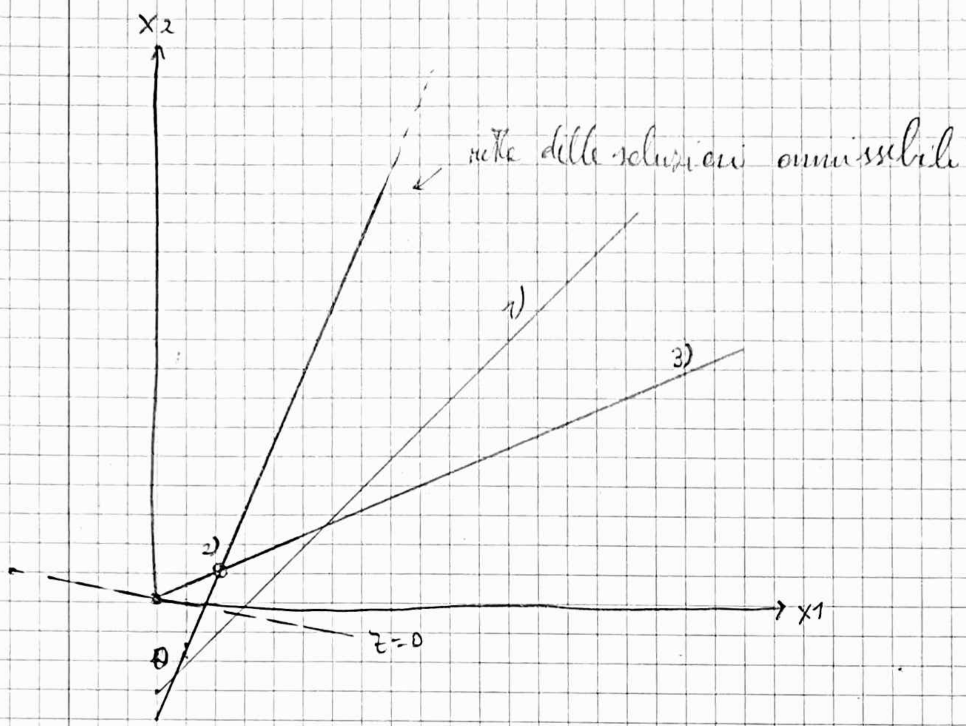
Imposto la Tabella:

	x_1	x_2	y_1	h_2	y_3	h_3	$-W$	$-z$	b
y_1	1	-1	1	0	0	0	0	0	3
→ h_2	5	-2	0	1	0	0	0	0	8
h_3	-1	3	0	0	-1	1	0	0	1
$-W$	-4	-1	0	0	1	0	1	0	-9
$-z$	1	5	0	0	0	0	0	1	0
	↑								

	x_1	x_2	y_1	h_2	y_3	h_3	$-W$	$-z$	b
y_1	0	$-\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$7/5$
x_1	1	$-\frac{2}{5}$	0	$1/5$	0	0	0	0	$8/5$
→ h_3	0	$\frac{13}{5}$	0	$1/5$	-1	1	0	0	$13/5$
$-W$	0	$-\frac{13}{5}$	0	$4/5$	1	0	1	0	$-\frac{13}{5}$
$-z$	0	$\frac{27}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	1	$-\frac{8}{5}$
		↑							

	x_1	x_2	y_1	h_2	y_3	h_3	$-W$	$-z$	b
y_1	0	0	1	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{3}{13}$	0	0	2
x_1	1	0	0	$\frac{3}{13}$	$-\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	0	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{13}$	$-\frac{5}{13}$	$\frac{5}{13}$	0	0	1
$-W$	0	0	0	1	0	1	1	0	0
$-z$	0	0	0	$-\frac{8}{13}$	$\frac{27}{13}$	$-\frac{27}{13}$	0	1	-7

	X_1	X_2	Y_1	Y_3	$-Z$	b
Y_1	0	0	1	$-\frac{3}{13}$	6	2
X_1	1	0	0	$-\frac{2}{13}$	0	2
X_2	0	1	0	$-\frac{5}{13}$	0	1
$-Z$	0	0	0	$\frac{27}{13}$	1	-7



Esercizio 4:

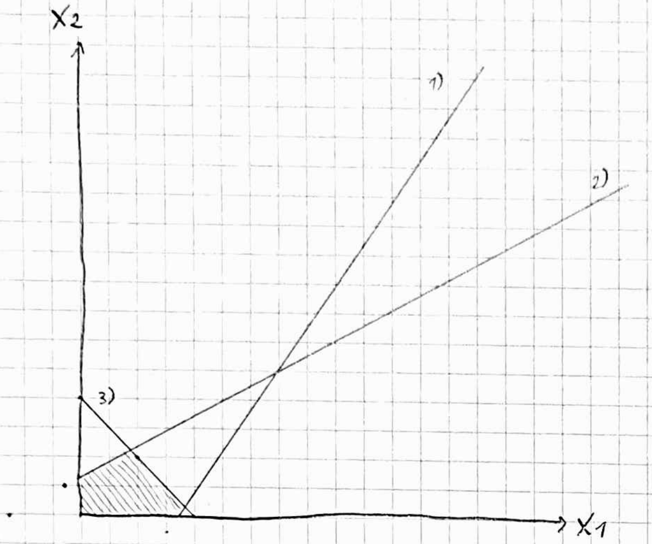
max $x_1 + 3x_2$

1) $4x_1 - 2x_2 \le 11$

2) $-2x_1 + 4x_2 \le 5$

3) $x_1 + x_2 \le 4$

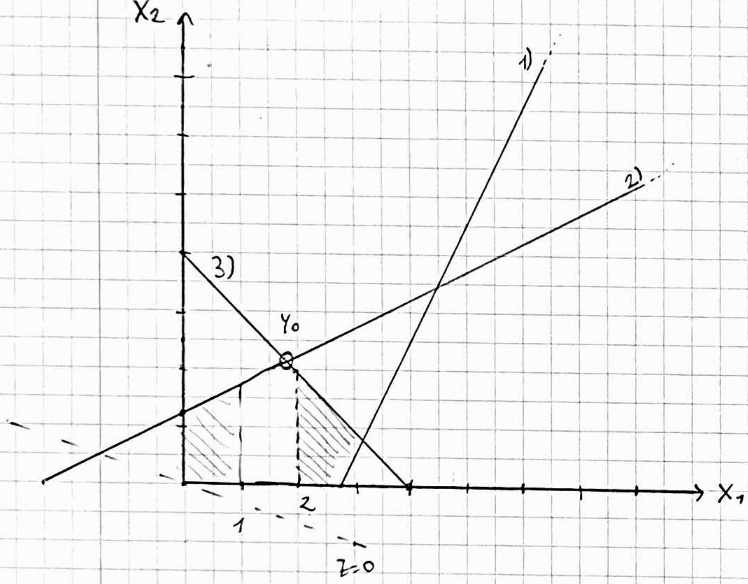
$x_1, x_2 \ge 0$ e intere



$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -8 + 2x_2 + 4x_2 = 5 \\ x_1 = 4 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_2 = 13 \to x_2 = \frac{13}{6} \\ x_1 = 4 - \frac{13}{6} = \frac{24-13}{6} = \frac{11}{6} \end{cases}$$

$y_0 = \left(\frac{11}{6}, \frac{13}{6}\right)$



$U_0 = 8.\bar{3}$
$\left(\frac{11}{6}, \frac{13}{6}\right)$

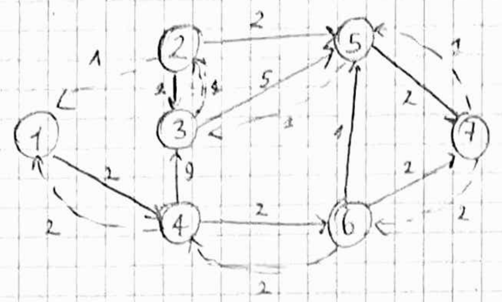
$x_1 \le 3$ → $U_1 = 6.25$ $\left(1, \frac{7}{4}\right)$

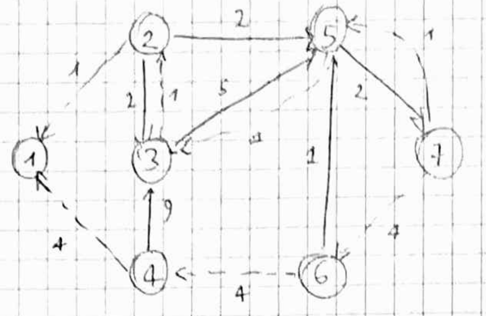
$x_1 \ge 4$ → $U_2 = 8$ $(2,2)$ LB=8

sol. ottima: $y = (2,2)$

$z = 8$

Esercizio 7 :





$f = 3$ $K = 1$

$Q = [1]$

$Q = [4]$ $P[4] = 1$

$Q = [3, 6]$ $P[3] = P[6] = 4$

$Q = [6, 5]$ $P[5] = 3$

$Q = [5, 7]$ $P[7] = 6$

STOP

$1 \to 4 \to 6 \to 7$ $\delta = 2$

$f = 5$ $K = 2$

$Q = [1]$

$Q = [\,]$

$V_s = \{1\}$ $V_t = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$