Prova Esame 11-09-2019

- Esercizio 1

Clienti da rifornire: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5
Depositi da costruire ≤ 2, Tre possibili zone di costruzione.
A ogni deposito è associato un costo di costruzione e una capacità massima.
Per ogni cliente è associata una richiesta e un costo di trasporto dal deposito per soddisfare la richiesta. (costo per unità di merce).
Si vuole minimizzare il costo Totale (costruzione + Trasporti)

Funzione obiettivo: $\min \left\{ \sum_j C_j Y_j + \sum_j \sum_i t_{ij} x_{ij} \right\}$

dove: C_j : costo di costruzione del j-esimo deposito

Y_j : variabile binaria: 1 se il deposito j è stato costruito, 0 altrimenti

t_{ij} : costo di trasporto dal deposito j verso il cliente i

x_{ij} : quantità di merce trasportata dal deposito j verso il cliente i

[Somme su Tutti i depositi per Tutti i clienti]

Vincoli:

$\sum_j Y_j \leq 2$ Vincolo sul numero di depositi

$\sum_j x_{ij} Y_j = r_i \quad \forall i$ La somma di tutta la merce trasportata dai depositi attivi (j) deve soddisfare la richiesta del cliente i

$\sum_i x_{ij} \leq q_j Y_j \quad \forall j$ La somma della merce trasportata dal deposito j deve essere minore o uguale alla sua capacità (somma per tutti i clienti)

Esercizio 2

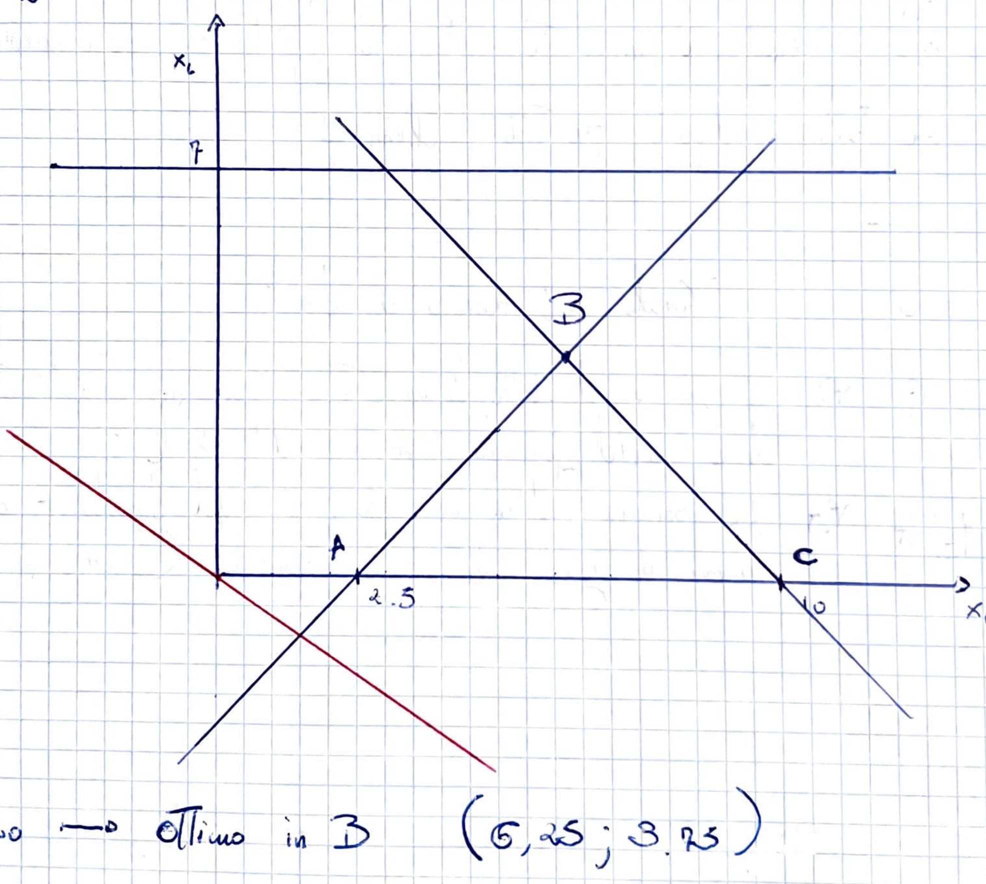
Due prodotti: A e B. Il Totale della produzione non deve superare le 10 Tonnellate. La produzione di A deve superare la produzione di B di 2.5 Tonnellate e la produzione di B deve essere al più di 7 tonnellate. I profitti di A e B sono nel rapporto di 2/3. Si vuole massimizzare il profitto.

Funzione obiettivo: $\max\{2x_1 + 3x_2\}$

dove: $x_1 \mapsto$ Tonnellate di prodotto A
$x_2 \mapsto$ Tonnellate di prodotto B

Vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1 - x_2 = 2.5 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0$$



Simplesso $\rightarrow$ Ottimo in B $(6,25 ; 3.75)$

$\mathcal{L} = 2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 6.25 + 3 \cdot 3.75 = 12.5 + 11.75 = 24.25$

Esercizio 9

$$\begin{cases} \max \{16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4\} \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Calcolo dei pesi effettivi (guadagno/costo)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \to 16/5 = 3.2 \\ x_2 \to 22/7 = 3.1 \\ x_3 \to 12/4 = 3 \\ x_4 \to 8/3 = 2.6 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4$$

S_0 : $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 0$ $\quad f = 16 + 22 + 6 = 44$

S_0

$x_3 = 1$ | $x_3 = 0$

$4 + 5 + 7x_2 = 14$

$x_2 = 5/7$

$x_3 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5/7$ — $S_2 = 43.7$

$x_3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_4 = 2/3$ — $S_1 = 43.3$

$5 + 7 + 3x_4 = 14 \to x_4 = 2/3$

From S_2: $x_2 = 1$ | $x_2 = 0$

$x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_1 = 3/5$ — $S_6 = 43.6$

$x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_1 = 1$, $x_4 = 1$ — $S_5 = 36$ LB

From S_1: $x_4 = 0$ | $x_4 = 1$

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$ — $S_3 =$ LB

$3 + 5 + 7x_2 = 14$

$x_4 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6/7$ — $S_4 = 42.85$

From S_6: $x_1 = 1$ | $x_1 = 0$

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ → Infeasible

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ — $S_9 = 42$ LB → Ottimo

From S_4: $x_2 = 0$ | $x_2 = 1$

12

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ — $S_7 = 24$ LB

LB

$3 + 7 + 5x_1 = 14$

$x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 4/5$ — $S_8 = 42.8$

12 8+6+22

From S_8: $x_1 = 1$ | $x_1 = 0$

Infeasible

$x_4 = 1$, $x_2 = 1$ — $S_9 = 30$

Esercizio 4

$\max \{100 x_1 + 150 x_2\}$ $\quad$ $10 x_1 + 15 x_2$

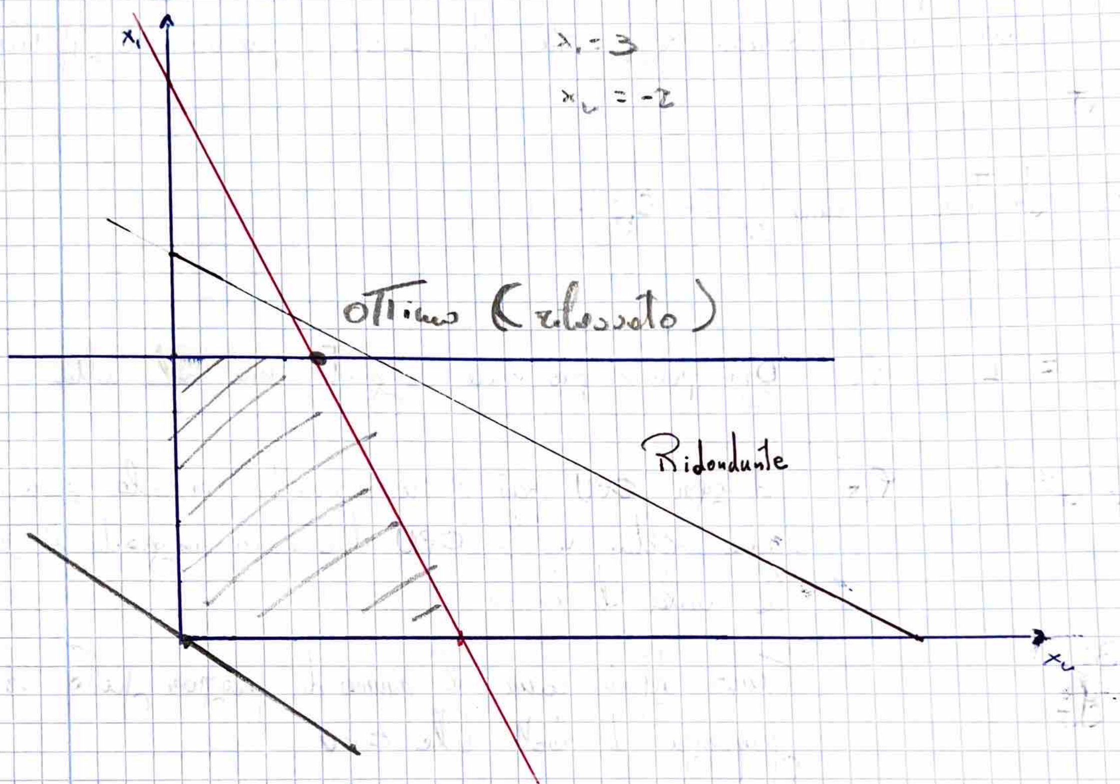
$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ 15 x_1 + 30 x_2 \leq 200 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$2x_1 + x_2 \leq 10$

x_1, x_2 intere

$x_1 = 3$

$x_2 = -2$



Ottimo: $(2,5 ; 5) \to S_0 = 100$

$x_1 \leq 2$ $\quad$ $x_1 \geq 3$

$(2, 5)$ $\quad$ $(3, 4)$

$S_1 = 95$ LB $\quad$ $S_2 = 90$ LB

Ottimo

La soluzione ottima del problema intero è:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 5 \\ z = 95 \end{cases}$$

Esercizio 2

Due prodotti → Sono richieste due risorse

Per il prodotto A : $4R_1 + 8R_2$

Per il prodotto B : $7R_1 + 10R_2$

$\begin{cases} R_1 \text{ disponibile in } 28 \\ R_2 \text{ disponibile in } 85 \end{cases}$

$A/B \leq 1/3$

La produzione di B deve superare quella di A (almeno 1)

Rapporto di vendita: $A/B = 4/1$

$\max \{ 4x_1 + x_2 \}$ $\quad x_i$ qta di prodotto i

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \leq 28 \\ 8x_1 + 10x_2 \leq 85 \\ 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_2 - x_1 \geq 1 \end{cases}$$

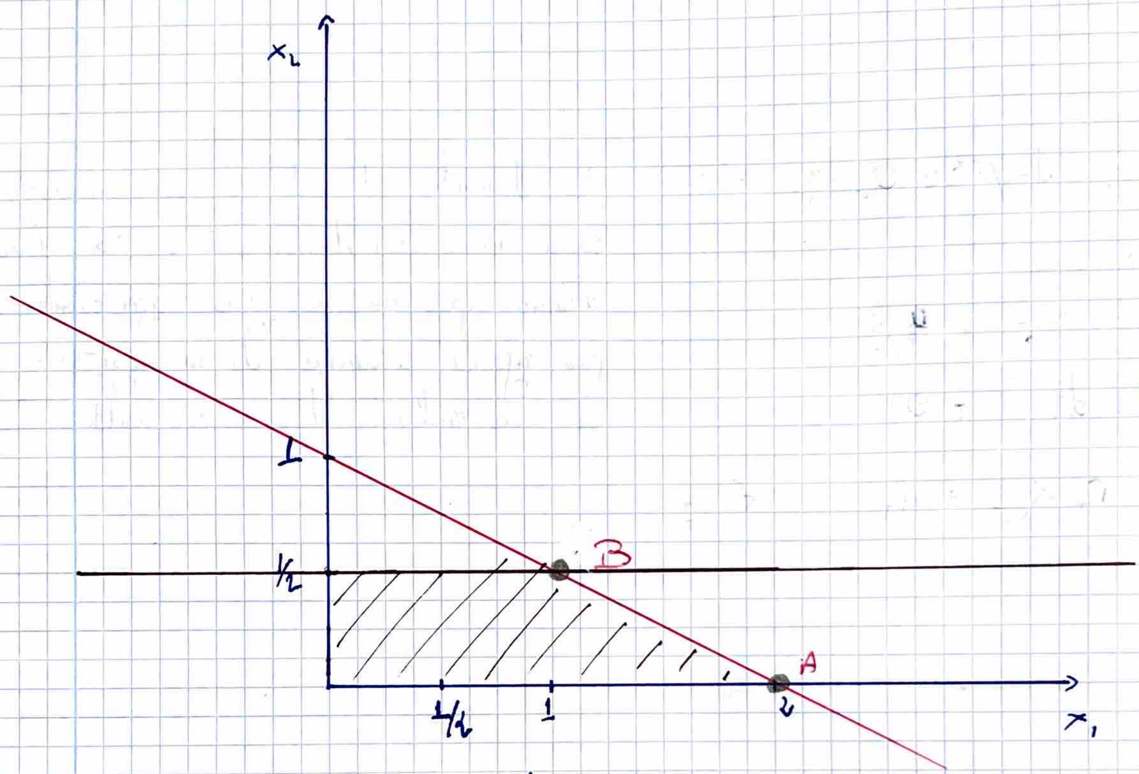
Simplesso + grafico (solite cose)

Esercizio 2

$$\max \{4x_1 + 8x_2\}$$

$$\begin{cases} 2x_2 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Simplesso + grafico



Riscriviamo per utilizzare il simplesso:

$$\begin{cases} 2x_2 + y_1 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + y_2 = 2 \end{cases}$$

	x_1	x_2	y_1	y_2	$-z$	b
y_1	0	2	1	0	0	1
y_2	1	2	0	1	0	2
$-z$	4	8	0	0	1	0

Prima soluzione basica ammissibile:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases} \qquad z = 0$$

Nuova variabile entrante: x_2

Variabile uscente: y_1 (minimo dei rapporti)

	x_1	x_2	y_1	y_2	$-z$	b
x_2	0	1	1/2	0	0	1/2
y_2	1	0	-1	1	0	1
$-z$	4	0	-4	0	1	-4

Variabile entrante x_1, Variabile uscente y_2

	x_1	x_2	y_1	y_2	$-z$	b
x_2	0	1	1/2	0	0	1/2
x_1	1	0	-1	1	0	1
$-z$	0	0	0	-4	1	-8

Soluzione ottima per:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1/2 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \qquad z = 8$$

Dal grafico possiamo individuare un'altra soluzione ottima:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad z = 8$$

Prova Esame 14-06-2021 Test A

Esercizio 1 (Da rifare → Lezione 18)

Distribuzione in 4 città (A, B, C, D) a partire da 3 centri di distribuzione (1, 2, 3). Si vuole valutare l'apertura di un quarto centro.
Costo di apertura del nuovo centro: 1000, la domanda deve essere almeno pari a 600, deve servire almeno due città.
Si vuole minimizzare il costo di trasporto.

Funzione obiettivo:

$$\min\left\{\sum_{i,j} t_{ij}\, x_{ij} + 1000\cdot z\right\}$$

Vincoli

$$\begin{cases} \sum_j x_{ij} \le d_i & \forall i \\ \sum_i x_{ij}\cdot y_{ij} \ge r_j & \forall j \\ \cancel{\sum_j x_{4j}\cdot z \ge 600\cdot z} & \text{(Andava bene)} \\ \sum_j y_{4j} \ge 2\cdot z \\ z\in\{0,1\},\ y_{ij}\in\{0,1\} \end{cases}$$

La somma delle uscite di ogni deposito deve essere minore o uguale alla disponibilità totale del deposito. La somma delle quantità dirette verso una città deve soddisfare la richiesta.

→ Stesso discorso di prima

x_{ij} → frigoriferi trasportati dal deposito i verso la città j

y_{ij} → variabile binaria: alta se il deposito i serve la città j

z → variabile binaria: alta se il deposito 4 viene aperto

$$\sum_j x_{4j} \le 0 + M z$$

$$\sum x_{4j} \ge 600 + M(z-1)$$

Se $z=1$ viene $x \le +\infty$ e quindi non ci sono problemi e poi $x \ge 600$.
Se $z=0$ per il primo vincolo si avrebbe $x \le 0$ per il secondo $x \ge -\infty$ e quindi non avremmo comunque problemi

Non lo avevo messo. Si doveva inserire

Prova Esame 14-06-2021 Test B

Esercizio 1

Tre nuove celle per la produzione di due attrezzi.
Budget di 230 k€
Si vuole massimizzare il guadagno.

max { 2· vendita - apertura celle - 2· costi di produzione }

$$2\cdot\left[\sum_i x_i \cdot r_i\right] \qquad \left[\sum_j c_j y_j\right] \qquad 2\left[\sum_{i,j} p_{ij}\cdot d_{ij}\right]$$

x_i : prezzo di vendita di attrezzo i $\quad i = 1, 2$
r_i : richiesta di attrezzi i $\quad i = 1, 2$

c_j : costo di apertura di cella j $\quad j = 1, 2, 3$
y_j : variabile binaria alta se la cella j viene aperta

p_{ij} : quantità di attrezzi i prodotti nella cella j

d_{ij} : costo di produzione di un attrezzo i nella cella j

Vincoli:

$\sum c_j y_j + 2\sum p_{ij} \cdot d_{ij} \leq 230{,}000$ Vincolo di budget

$\sum_i p_{ij} \leq q_j y_j \quad \forall j$ Quantità di attrezzi prodotti in cella j

$\sum_j p_{ij} y_j \geq r_i \quad \forall i$ Gli attrezzi ~~...~~ prodotti di tipo i devono soddisfare la domanda

Esercizio 3

Sbagliato ?

$\max \{x_1 + x_2\}$

$$\begin{cases} x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1 - x_2 \geq -3 \end{cases}$$

Dovevo mettere y_2 non h_2

Quindi poi : $w = h_1 + h_2$

Simplesso:

Trasformiamo il sistema

$$\begin{cases} x_2 - y_1 + h_1 = 1 & h_1 = 1 - x_2 + y_1 \\ x_1 - 2x_2 + h_2 = 0 & h_2 = -x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 - y_2 + h_3 = -3 & h_3 = -x_1 + x_2 + y_2 \end{cases}$$

$w = \min\{h_1 + h_2 + h_3\} = -2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 - 2$

	x_1	x_2	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	$-z$	$-w$	b
h_1	0	1	-1	0	1	0	0	0	0	1
h_2	1	-2	0	0	0	1	0	0	0	0
h_3	1	-1	0	-1	0	0	1	0	0	-3
$-z$	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$-w$	-2	2	1	1	0	0	0	0	+1	2

2-6 = -4

1   1-2   2

Sbagliata la var entrante

Provare a far uscire h_2

Variabile entrante : x_1 , Variabile uscente : h_3

	x_1	x_2	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	$-z$	$-w$	b
x_2	0	1	-1	0	1	0	0	0	0	1
h_2	1	0	-2	0	2	1	0	0	0	2
h_3	1	0	-1	-1	1	0	1	0	0	-2
$-z$	1	0	1	0	1	0	0	1	0	-1
$-w$	-2	0	3	1	-2	0	0	0	1	0

Fase di degenere

	x_1	x_2	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	$-z$	$-w$	b
h_1	0	1	-1	0	1	0	0	0	0	1
h_2	0	-1	0	1	0	1	-1	0	0	3
x_1	1	-1	0	-1	0	0	1	0	0	-3
$-z$	0	2	0	1	0	0	-1	1	0	3
$-w$	0	0	1	-1	0	0	2	0	1	-4

↓

Var entrante

Nuova variabile entrante → y_2

Nuova variabile uscente → h_2

	x_1	x_2	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	$-z$	$-w$	b
h_1	0	$\boxed{1}$	-1	0	1	0	0	0	0	1
y_2	0	~~-1~~	0	1	0	1	-1	0	0	3
x_1	1	~~-2~~	0	0	0	1	0	0	0	0
$-z$	0	3	0	0	0	-1	0	1	0	0
$-w$	0	-1	1	0	0	1	1	0	1	-1

Variabile entrante → x_2

Variabile uscente → h_1

	x_1	x_2	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	$-z$	$-w$	b
x_2	0	1	-1	0	1	0	0	0	0	1
y_2	0	0	-1	1	1	1	-1	0	0	4
x_1	1	0	-2	0	2	1	0	0	0	2
$-z$	0	0	3	0	-3	-1	0	1	0	-3
~~$-w$~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~

Possiamo ora ignorare la funzione ausiliaria w e le variabili ausiliarie h_i

	x_1	x_2	y_1	y_2	$-z$	b
x_2	0	1	-1	0	0	1
y_2	0	0	-1	1	0	4
x_1	1	0	-2	0	0	2
$-z$	0	0	3	0	1	-3

Esercizio 9

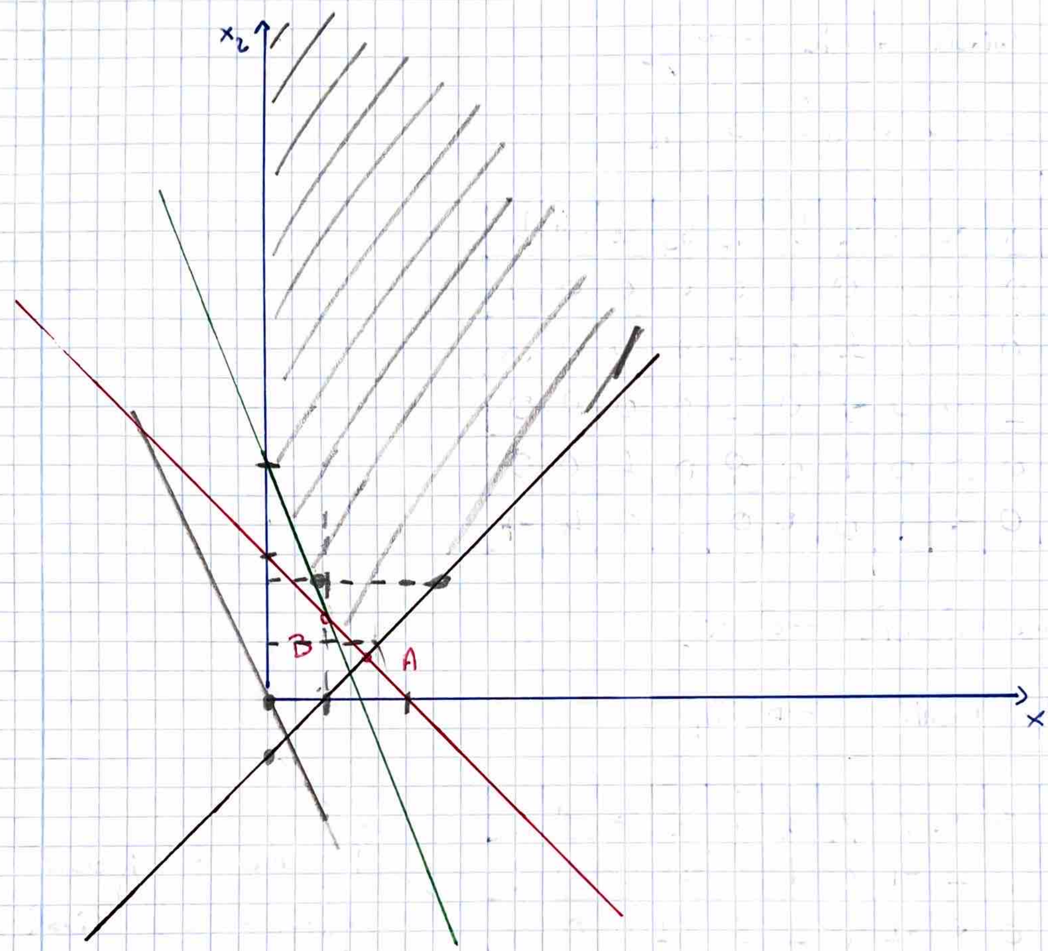
$\min \{2x_1 + x_2\}$ $\qquad x_1 = 1 \; , \; x_2 = -2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ e intere} \end{cases}$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \; ; \; x_1 = 1 \; ; \; x_2 = 3/2$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 5/2 \; ; \; x_2 = 0 \quad x_1 = 5/2$

$x_2 = 0 \, , \; x_1 = 1 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = -1$



Valutiamo l'ottimo del problema rilassato

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \rightarrow -5x_1 + 8 = -2x_1 + 5 \Rightarrow x_1 = 1 \; , \; x_2 = 3/2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \rightarrow 2(x_2 + 1) + 2x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4} \; ; \; x_1 = 7/4$$

$x_1 = x_2 + 1$

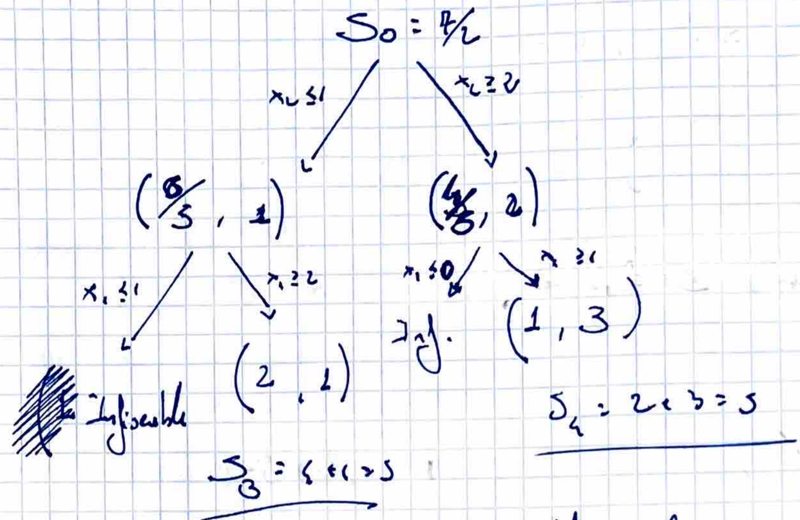
$2 + 3/2 = 7/2$

$$\Rightarrow \min\{2x_1 + x_2\} = \min \begin{Bmatrix} 2 \cdot 1 + 3/2 \\ 2 \cdot 7/4 + 3/4 \end{Bmatrix} = 7/2 \quad (x_1 = 1 \; ; \; x_2 = 3/2)$$

Vertice B

$7/2 + \frac{3}{4} = \frac{14+3}{4} = 17/4$

Branch and Bound



Ottimi del problema.

Prova Esame 16-06-2021 Test A

Esercizio 1

Budget di 1000000 €, 6 Tipi di azioni categorizzate come T/N
A ogni azione è associato un guadagno.
Si vuole investire almeno metà del capitale in azioni europee e al max il 30% in azioni di Tipo T.
Per azione 5 al più a 10000 oppure superiore a 150000.
Tra 4000 e 400000 per tutti gli altri.
Si vuole massimizzare il guadagno.

Definiamo:
- x_i : quantità di denaro investita per azione i
- g_i : % di guadagno associata a investimento i

$$\max \left\{ \sum_i x_i \cdot g_i \right\}$$

Vincoli:

- $\sum_i x_i \leq b$ — Il totale degli investimenti deve rispettare il budget
- $\sum_i x_i \cdot y_i \geq b/2$ — Il totale degli investimenti in azioni europee ($y_i = 1$) deve essere pari almeno a metà del capitale
- $\sum_i x_i \cdot t_i \leq 30\% \cdot b$ — Il totale degli investimenti in azioni di Tipo T ($t_i = 1$) deve essere inferiore al 30% del budget
- $\begin{cases} x_i \leq 400000 \\ x_i \geq 4000 \end{cases} \forall i \setminus \{5\}$ — Si vuole investire tra 4000 e 400000 per ogni azione meno che per $i=5$

- $x_5 \leq 10000 + M \cdot z$ — M è una quantità sufficientemente alta.
- $x_5 \geq 150000 - M(1-z)$ — Se $z=0$ viene attivato il primo vincolo in quanto il secondo sarebbe $x_5 \geq -M$.

Nel caso in cui $z=1$, viene attivato il secondo vincolo e il primo risulterebbe pari a $x_5 \leq M$. Possiamo ipotizzare $M=b$.

Esercizio 2

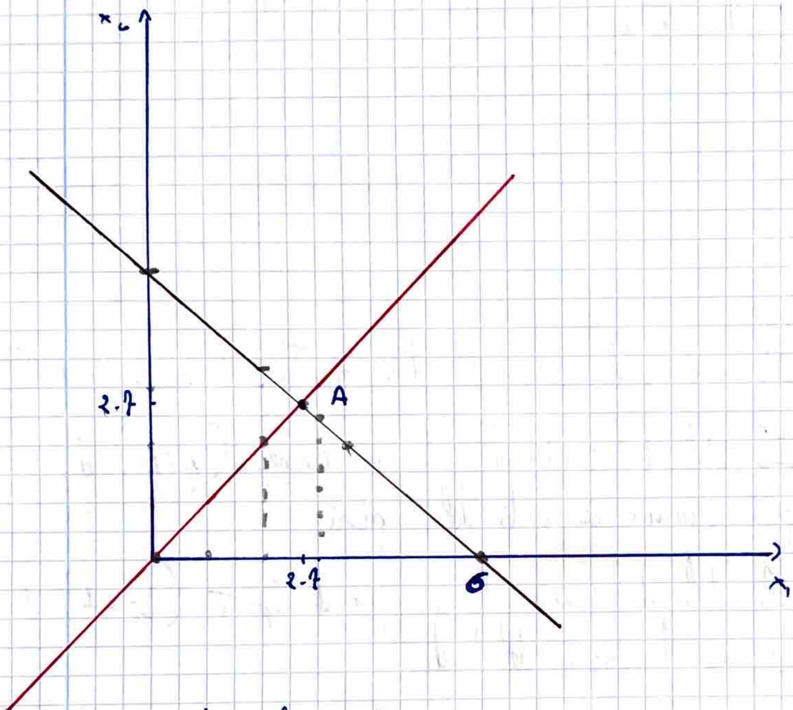
Capitale di 90, due possibili appuntamenti (15 e 18 di costo)
Le prime obbligazioni (15 di costo) rendono 2, mentre le altre rendono 3 (costo 18). Le prime obbligazioni devono essere acquistate in numero almeno pari alle seconde.
Si vuole massimizzare il guadagno.

$$\max\{2x_1 + 3x_2\}$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{60}{18} = \frac{30}{9}\frac{10}{3} = 3.3$

$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{90}{18} = 5$

$$\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 \le 90 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Valutiamo il problema rilassato

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 15x_1 + 18x_2 = 90 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ (15+18)\,x_1 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2.7 \\ x_2 = 2.7 \end{cases}$$

$$\max\begin{Bmatrix} (2+3)\cdot 2.7 \\ 2\cdot 6 \end{Bmatrix} = 5\cdot 2.7 = 13.6 \Rightarrow \text{Vertice A}: (2.7\,;\,2.7)$$

Branch and Bound

$(2.7, 2.7)$
$S_0 = 13.6$

$x_1 \le 2$ / \ $x_1 \ge 3$

$(2, 2)$ $S_1 = 10$ LB

$(3, 2.5)$ $S_2 = 13.5$

$S_2 = 13.5$

$(3;\ 2.5)$

$x_2 \leq 2$ $\qquad$ $x_2 \geq 3$

$(3.6,\ 2)$ $\qquad$ Infeasable

$S_3 = 13.2$

$x_1 \leq 3$ $\qquad$ $x_1 \geq 4$

$(3,\ 2)$ $\qquad$ Infeasable

$S_4 = 12$ LB

Ottimo per $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ $\qquad Z = 12$

Esercizio 3

$\max\{7x_1 + 3x_2 + 2x_3\}$

s.T.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Applicando il Simplesso a due fasi.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 - y_1 + h_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + h_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} h_1 &= 2x_1 - x_2 + x_3 + y_1 \\ h_2 &= -x_1 - x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Prima fase.

Definizione nuova funzione obiettivo:

$\min\{w\}$; $w = h_1 + h_2 = x_1 - 2x_2 + y_1$

	x_1	x_2	x_3	y_1	h_1	h_2	$-z$	$-w$	b
h_1	-2	1	-1	-1	1	0	0	0	0
h_2	1	1	1	0	0	1	0	0	0
$-z$	7	3	2	0	0	0	1	0	0
$-w$	1	-2	0	1	0	0	0	1	0

Funzione a minimizzare → Coeff ≥ 0

Variabile entrante : x_2

Variabile uscente : h_1

	x_1	x_2	x_3	y_1	h_1	h_2	$-z$	$-w$	b
x_2	-2	1	-1	-1	1	0	0	0	0
h_2	3	0	2	1	-1	1	0	0	0
$-z$	13	0	5	3	-3	0	1	0	0
$-w$	-3	0	-2	-1	2	0	0	1	0

Traccia Esame 14-06-2021 Test A [Rifatto]

Es 1

4 città → A, B, C, D

3 centri di distribuzione + 1 da valutare.

Si hanno richieste, costi di apertura e costi di trasporto.

A ogni centro è associata una disponibilità massima

Minimizzare i costi.

$$\min \left\{ \sum t_{i,j} \cdot x_{i,j} + f_a y_a \right\}$$

dove f_a è il costo di apertura del centro 4 e $t_{i,j}$ è il costo di trasporto per un'unità di merce dal centro i verso la città j, $x_{i,j}$ è la quantità di merce trasportata dal magazzino i alla città j

s.t.

$\sum_i x_{i,j} = r_j \quad \forall j$ la somma di tutte le uscite dei vari magazzini i deve coprire la richiesta della città j

$\sum_j x_{i,j} \leq d_i \quad \forall i$ la somma di tutte le uscite da un generico centro deve essere inferiore della sua disponibilità

$\sum_j x_{4,j} \geq 600 - M(1-y)$

$\sum x_{4,j} \leq M y$

Se viene aperto $\sum \geq 600$, se non viene aperto $\sum \leq 0$.

Ultimo punto: var binaria $w_{i,j}$ alta se i serve j, bassa altrimenti

Es 3

3 leghe composte da: ~~[illegible]~~ stagno, zinco, rame.
Vogliamo massimizzare i guadagni

$$\max \left\{ \sum p_i x_i \right\}$$

s.t.

$$\sum_i r_{i,j} \cdot x_i \leq d_j \qquad \forall j$$

i indice di lega
j indice di materiale

Traccia Esame 14-06-2021 Test B

Es 1

Due Tipologie di attrezzi. Budget di 250K, orizzonte Temporale di due anni.
Tre possibili celle di produzione: costo di produzione + capacità produttiva e costo di acquisto.
Domanda annuale dei due attrezzi e costo di vendita.
Si vuole massimizzare il profitto.

$$\max \left\{ 2 \cdot \sum_i p_i \, q_i - \left[2 \sum_{i,j} c_{i,j} \, x_{ij} + \sum_j d_j \, y_j \right] \right\}$$

c_{ij} costo di produzione di attrezzo i in cella j
x_{ij} quantità di attrezzo i prodotto in cella j
p_i profitto di vendita di attrezzo i
q_i Totale di vendite di attrezzo i

≤ ? Boh

$$\sum_j x_{ij} \cdot y_j = r_i \qquad \forall i$$

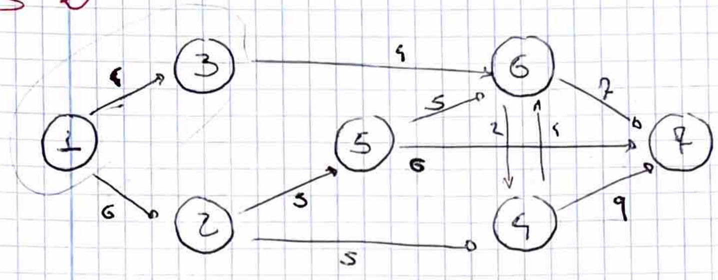
$$\sum_i x_{ij} \le d_j \cdot y_j \qquad \forall j$$

$$\sum_j d_j \, y_j \le 25000 - \sum_{i,j} 2 \cdot c_{ij} \cdot x_{i,j}$$

Il costo di produzione di attrezzo i in cella j moltiplicato per il numero di attrezzi i prodotti in cella j fatto per due anni (moltiplicato per due) e sommato al costo di apertura della cella deve essere non superiore alla massima disponibilità economica

Ambiguità; la Traccia parla di budget per le celle devo considerare anche i costi di produzione?

Es 2



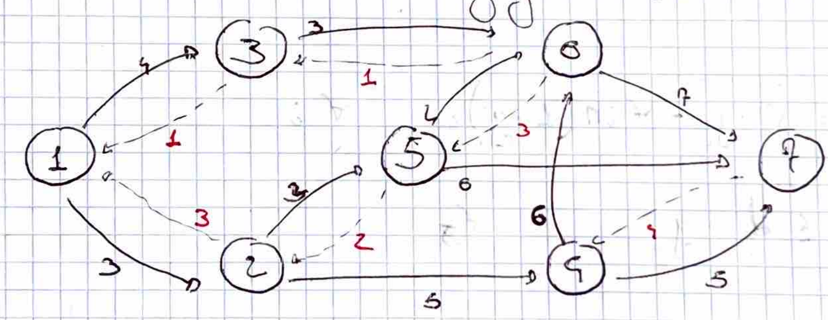
Modello:

$$\max \varphi$$

s.t.

$$\begin{cases} \sum_{j\in\delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{j\in\delta^-(i)} x_{ji} = \begin{cases} \varphi & \text{se } i = s \\ 0 & \text{altrimenti} \\ -\varphi & \text{se } i = d \end{cases} \\ x_{ij} \le u_{ij} \end{cases}$$

Volendo applica F-F. consideriamo il grafo residuo della Traccia

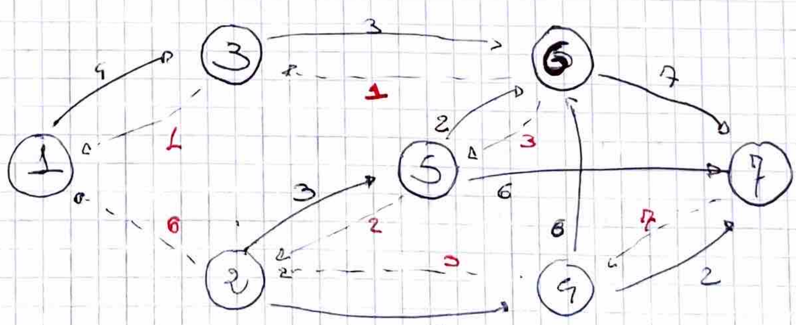


Percorso aumentante:

$Q_1 = \{1\}$; $Q_2 = \{\underset{1}{2}, \underset{1}{3}\}$, $Q_3 = \{\underset{1}{3}, \underset{2}{4}, \underset{2}{5}\}$; $Q_4 = \{\underset{3}{6}, \underset{2}{4}, \underset{2}{5}\}$, $Q_5 = \{4, 5, 6, \underset{4}{7}\}$

1 → 2 → 4 → 7

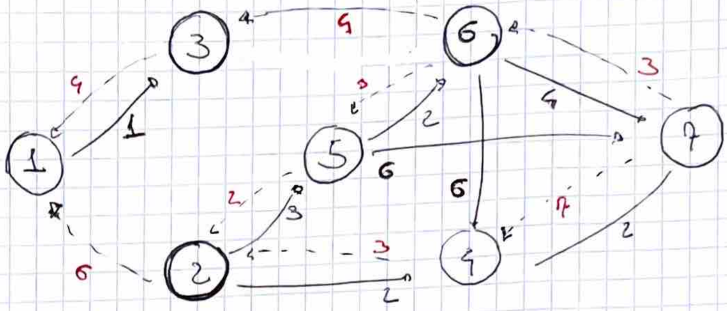
bn = 3



$Q_1 = \{1\}$; $Q_2 = \{3\}$; $Q_3 = \{6\}$; $Q_4 = \{7\}$

1 → 3 → 6 → 7

bn = 3



$Q_1 = \{1\}$; $Q_2 = \{3\}$; $Q_3 = \phi$

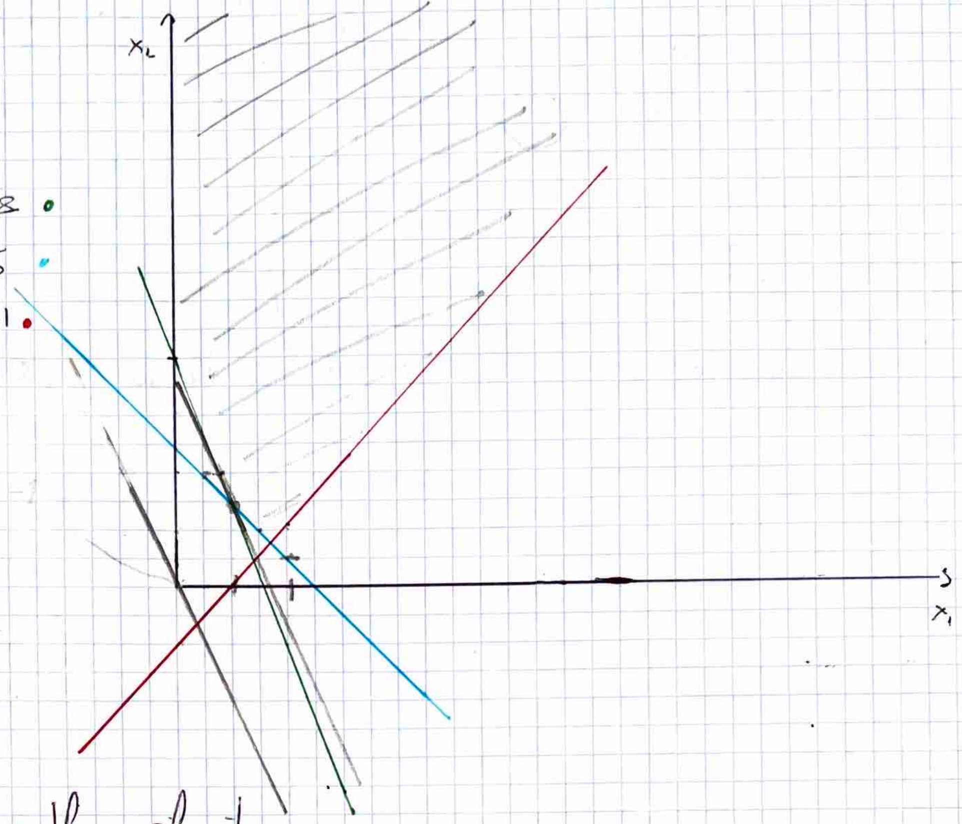
Taglio minimo : $\{1, 3\}$ → Max flusso : 10

Es. 4

min $2x_1 + x_2$

s.t.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \end{cases}$$



Valuto il minimo del problema rilassato.
Valuto la funzione obiettivo nei vertici

I) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 = 8 - 5x_1 \\ 2x_1 + 8 - 5x_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3/2 \end{cases}$

$\rightarrow S_0 = 2 + 3/2 = 7/2$ (min ottimo)

II) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - 1 \\ 2x_1 + 2x_1 - 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7/4 \\ x_2 = 0.75 \end{cases}$

$S_1 = 2 \cdot 7/4 + 3/4 = \frac{14+3}{4} = 17/4$

Partendo da S_0:

$S_1 = 2 + 2 = 4$

$(1, 2)$

$(1, 3/2)$

$x_2 \leq 1 \rightarrow (3/2, 1)$ $\qquad$ $x_2 \geq 2 \rightarrow (4/3; 2)$

$(3/2, 1)$: $x_1 \leq 1 \rightarrow$ Infeasible $(1; 3/2)$ $\qquad$ $x_1 \geq 2 \rightarrow (2, 1) \rightarrow$ inf.

$(4/3; 2)$: $x_1 \geq 1 \rightarrow (1, 2)$ $\qquad$ $x_1 \leq 0 \rightarrow (0, 4)$ $\qquad$ ottimi

Traccia Esame 22/07/2019

Es 1

7 centri di domanda. 5 possibili zone di apertura con relativo costo fisso.
Si vuole che nessun centro sia distante più di 30 minuti
Vogliamo minimizzare i costi.

$$\min \left\{ \sum_i f_i \cdot y_i \right\}$$

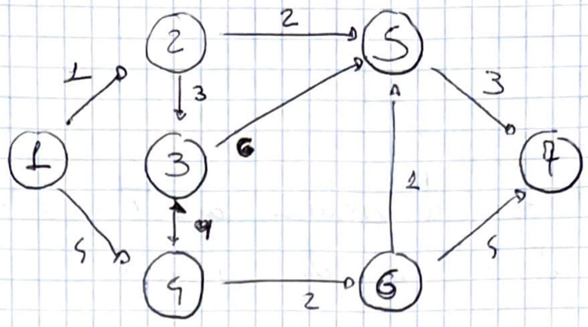
Basandoci sulle Tabelle si ha:

$$\begin{cases} y_3 + y_4 \geq 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 + y_5 \geq 1 \\ y_1 + y_4 + y_5 \geq 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 1 \\ y_2 + y_3 + y_4 \geq 1 \\ y_1 + y_5 \geq 1 \end{cases}$$

Per la seconda parte:

$$y_2 \leq y_3 + y_4$$

Es 7



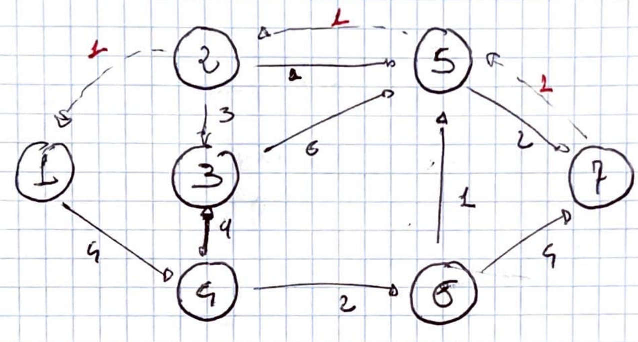
F.F.

$Q_1 = \{1\}$ $\quad Q_2 = \{2_1, 4_1\}$ $\quad Q_3 = \{5_2, 3_2, 4_1\}$, $\quad Q_4 = \{3_2, 5_2, 6_4\}$

$Q_5 = \{7_5, 4\}$

$1 \to 2 \to 5 \to 7$

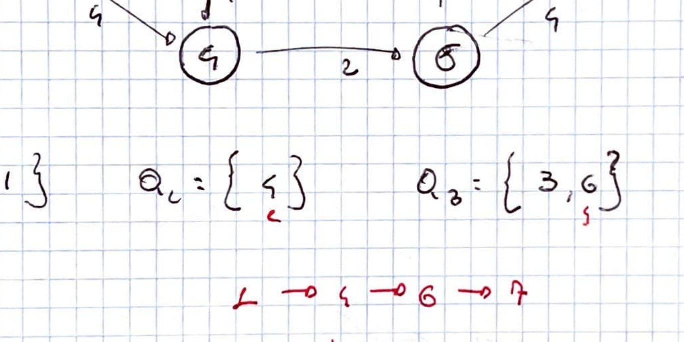
$b_n = 1$



$Q_1 = \{1\}$ $\quad Q_2 = \{4_1\}$ $\quad Q_3 = \{3, 6_4\}$ $\quad Q_4 = \{3, 7_6\}$

$1 \to 4 \to 6 \to 7$

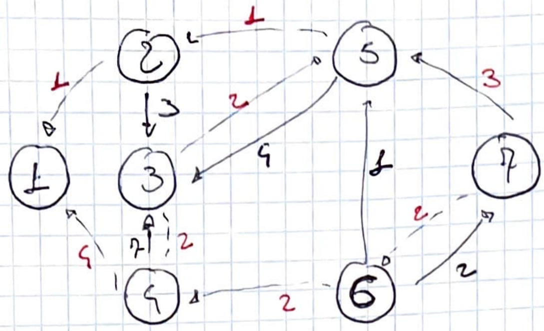
$b_n = 2$



$Q_2 = \{4_1\}$; $\quad Q_3 = \{3\}$ $\quad Q_4 = \{5\}$ $\quad Q_5 = \{7\}$

$1 \to 4 \to 3 \to 5 \to 7$

$b_n = 2$



$Q_1 = \{1\}$ $\quad Q_2 = \emptyset$

Taglio minimo : $\{1\}$

Flusso massimo : 5

Traccia Esame 16-01-2020

Es 1

Tre centri di produzione e cinque centri di smistamento.
Capacità produttive e capacità di immagazzinamento note. Distanze tra i centri note con costo di trasporto.
Vogliamo minimizzare i costi.

$$\min \left\{ \sum x_{ij} \cdot d_{ij} \cdot 3 \right\}$$

x_{ij} quantità di merce trasportata dal centro di produzione i al centro di smistamento j
d_{ij} distanza tra il centro di produzione i e il centro di smistamento j
3 costo fisso di trasporto per km

s.t.

$$\sum_j x_{ij} \leq P_i \qquad \forall i$$
$$\sum_i x_{ij} = r_j \qquad \forall j$$

La somma delle produzioni di un singolo centro non può essere superiore alla sua massima capacità produttiva (I) e la somma di tutti gli invii al centro di smistamento deve essere pari alla richiesta del centro stesso.

[bis] $f_i = 1000 \quad \forall i \qquad P_i = 2500 \quad \forall i$

$$\min \left\{ 3 \sum x_{ij} d_{ij} + \sum f_i \, y_i \right\}$$

s.t.

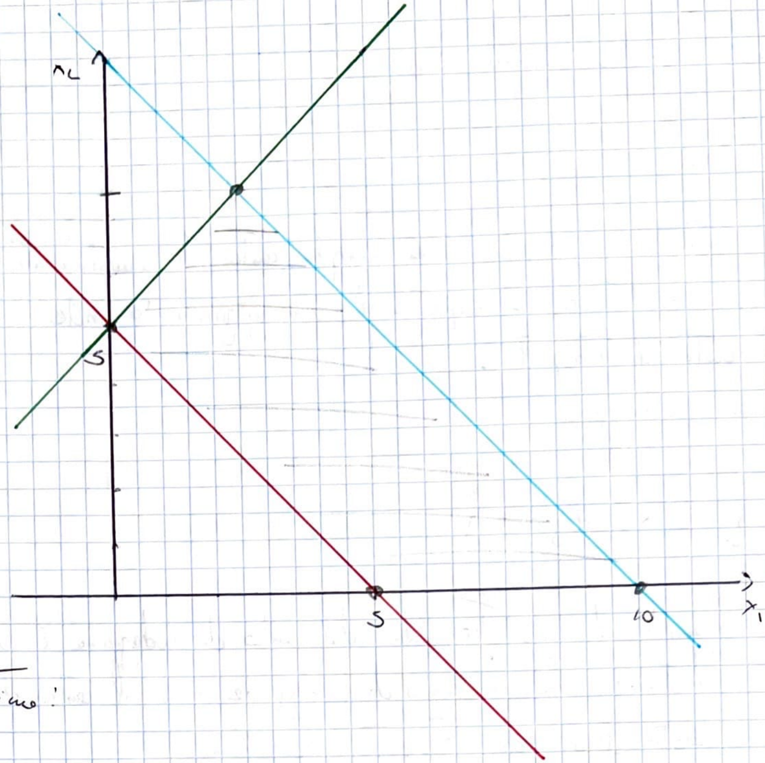
$$\sum_j x_{ij} \leq P_i \cdot y_i \qquad \forall i$$
$$\sum_i x_{ij} \cdot y_i = r_j \qquad \forall j$$

Es 2

$$\max \{ x_1 + 10 x_2 \}$$

s.t.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$



Possibili soluzioni ottime:

$(0, 5)$
$(5, 0)$
$(10, 0)$
$\Big\} \to$ Degeneri

$(5/2, 15/2) \to$ ottimo

Simplesso (dalle tabelle)

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	h	$-z$	b
x_2	-1	1	0	0	1	0	0	5
y_2	2	0	0	1	-1	0	0	5
y_1	-2	0	1	0	2	-1	0	0
$-z$	11	0	0	0	-10	-11	1	-50

Var entrante x_1, var uscente y_2

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	h	z	b
x_2	0	+1	0	1/2	1/2	0	0	15/2
x_1	1	0	0	1/2	-1/2	0	0	5/2
y_1	0	0	1	2	-1	-1	0	5
	0	0	0	-11/2	-4.5	-11	1	-155/2

Lo ottimo: $z = 155/2$

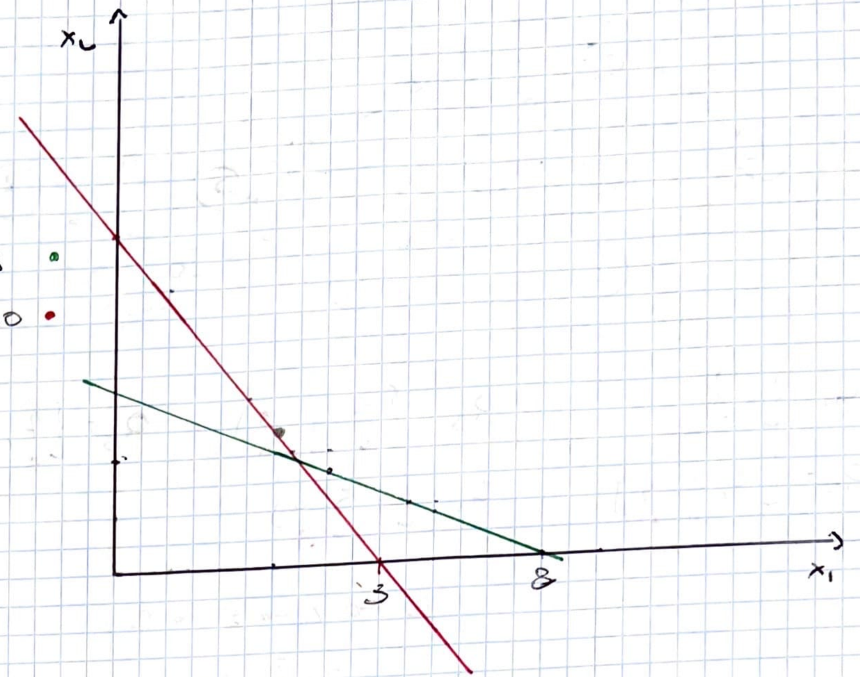
$x_1 = 5/2$, $x_2 = 15/2$, $y_2 = 5$

Es 3

$\min \{x_1 + x_2\}$

s.t.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 16 \\ 6x_1 + 3x_2 \geq 30 \end{cases}$$



S_0:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 16 \\ 6x_1 + 3x_2 = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x_2 = 16 - 2x_1 \\ 6x_1 + 16 - 2x_1 = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 7/2 \\ x_2 = 9/5 \end{cases}$$

$$S_0 = 7/2 + 9/5 = \frac{35+18}{10} = 53/10$$

S_0
- $x_1 \leq 3$: $(3 ; 12/5)$, $S_1 = 3 + 12/5$
  - $x_2 \leq 2$: $(10/3 ; 2)$ Inf.
  - $x_2 \geq 3$: $(15/6, 3)$, $S_3 = 15/6 + 3$
    - $x_1 \leq 3$: $(3, 3)$ S_4 UB = 6
    - Inf.
- $x_1 \geq 4$: $(4, 8/5)$, $S_2 = 4 + 8/5$
  - $x_2 \leq 1$: $(11/2 ; 1)$
  - $x_2 \geq 2$: $(4 ; 2)$ S_6 UB = 6

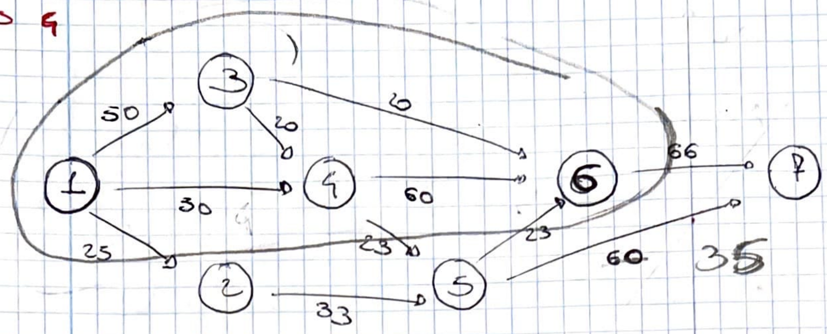
Ottimi per S_4 e S_6

S_4: $(3, 3)$

S_6: $(4, 2)$

S_3
- $x_1 \leq 5$: S_7 $(5, 1)$ Inf
- $x_1 \geq 6$: $(6, \cancel{4}5)$ > 8
  - $x_2 \leq 0$: $(8, 0)$ 8
  - $x_2 \geq 1$: $(6, 1)$ 7

Es 4

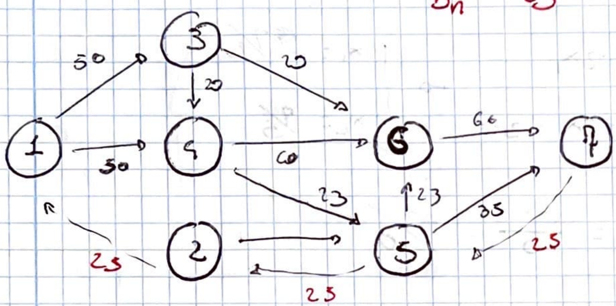


$Q_1 = \{1\}$ $\quad$ $Q_3 = \{\underset{1}{3}, \underset{1}{4}, \underset{2}{5}\}$ $\quad$ $Q_5 = \{\underset{5}{7}, \underset{3}{6}\}$

$Q_2 = \{\underset{1}{2}, \underset{1}{3}, \underset{1}{4}\}$ $\quad$ $Q_4 = \{\underset{1}{4}, \underset{2}{3}, \underset{3}{6}\}$

$1 \to 2 \to 5 \to 7$ $\qquad$ $66 + 23 + 25$

$b_n = 25$

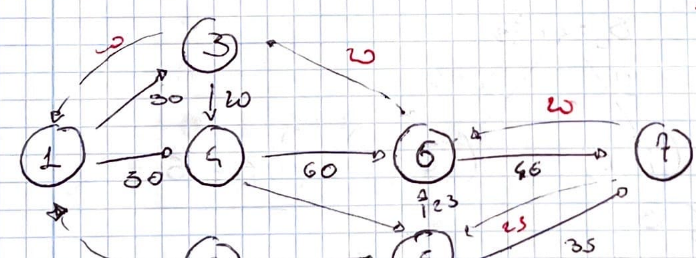


$Q_1 = \{1\}$ $\quad$ $Q_3 = \{\underset{3}{6}, \underset{1}{4}\}$ $\quad$ $Q_5 = \{\underset{6}{7}\}$

$Q_2 = \{3, 4\}$ $\quad$ $Q_4 = \{\underset{3}{6}\}$

$1 \to 3 \to 6 \to 7$

$b_n = 20$

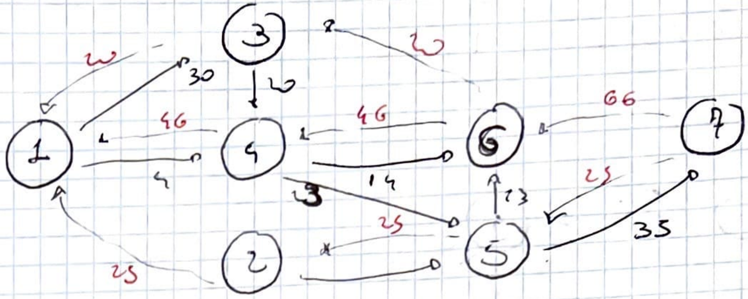


$Q_1 = \{1\}$ $\quad$ $Q_3 = \{\underset{1}{4}\}$ $\quad$ $Q_5 = \{\underset{6}{7}\}$

$Q_2 = \{\underset{1}{3}, \underset{1}{4}\}$ $\quad$ $Q_4 = \{\underset{4}{6}\}$

$1 \to 4 \to 6 \to 7$

$b_n = 46$



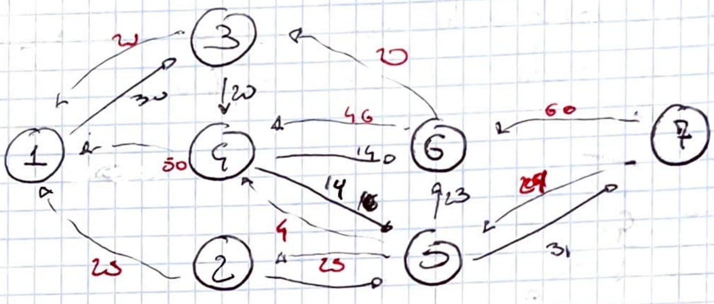
$Q_1 = \{1\}$ ~~$Q_4 = \{6\}$~~ $Q_3 = \{4\}$ $Q_5 = \{6, 7\}$

$Q_2 = \{3, 4\}$ ~~$Q_3 = \phi$~~ $Q_4 = \{5, 6\}$

~~Taglio min: $\{1, 3, 4, 6\}$~~

$1 \to 4 \to 5 \to 7$

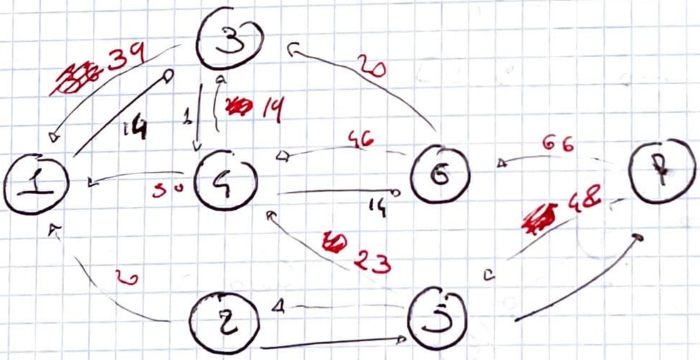
$b_1 = 4$



$Q_1 = \{1\}$ $Q_3 = \{4\}$ $Q_3 = \{6, 7\}$

$Q_2 = \{3\}$ $Q_4 = \{5\}$

$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7$ $b_1 = 19$



$Q_1 = \{1\}$ $Q_3 = \{4\}$ $Q_3 = \phi$

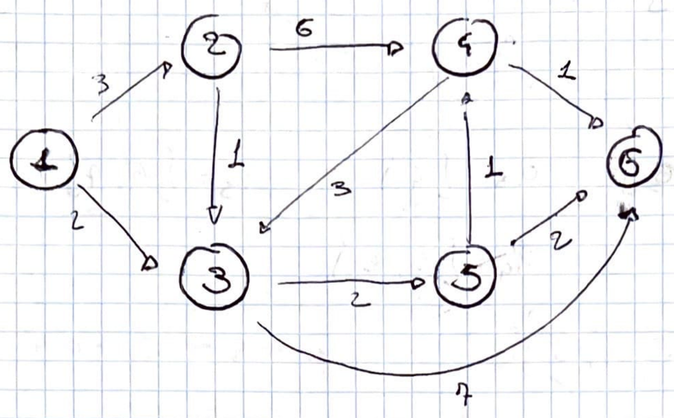
$Q_2 = \{3\}$ $Q_4 = \{6\}$

Taglio minimo: $\{1, 3, 4, 6\}$

Flusso max = 119

Teoria Esame 14/06/2021 Test A

Es 4

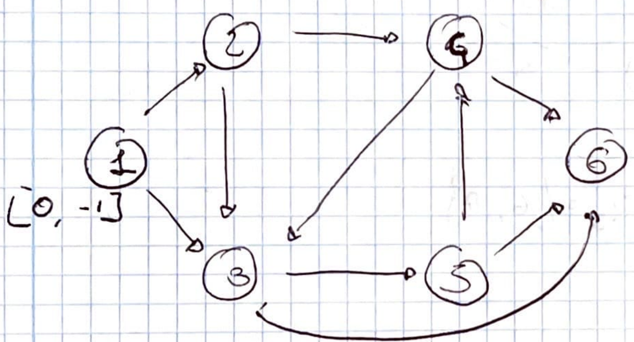


Dijkstra → Possiamo usarlo poiché non ci sono cicli a somma negativa nè archi con costo negativo

↓

Label Setting

I

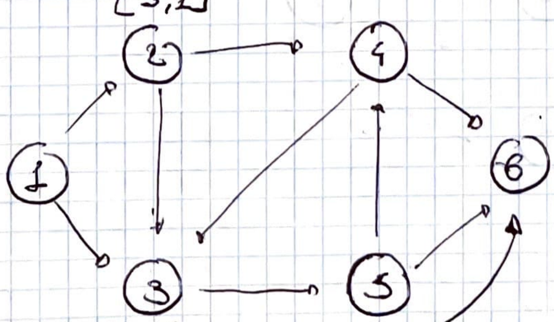


$S = \{1\}$

$d(3) = d(1) + 2 = 2 \rightarrow [2, 1]$

$d(2) = d(1) + 3 = 3 \rightarrow [3, 1]$

II)

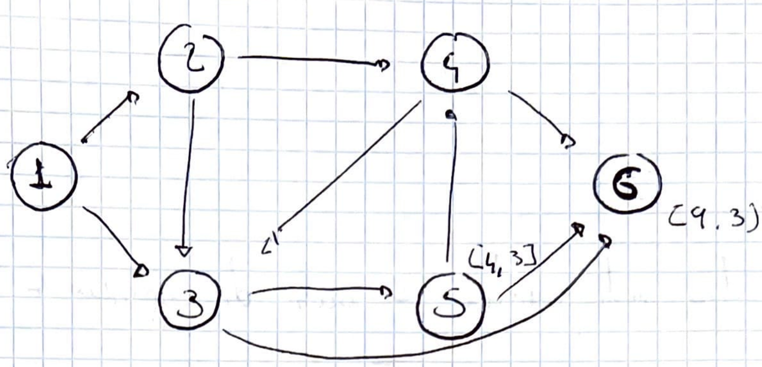


Valuto 3 (distanza minima)

$S = \{1, 3\}$

$d(5) = d(3) + 2 = 4 \rightarrow [4, 3]$

$d(6) = d(3) + 7 = 9 \rightarrow [9, 3]$

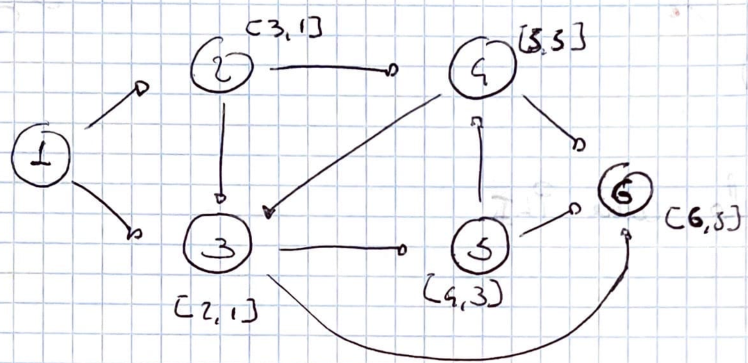


Stella uscente da 5:

$S = \{1, 3, 5\}$

$d(4) = 4 + 1 = 5 \rightarrow [5, 5]$

$d(7) = 4 + 2 = 6 \rightarrow [6, 5]$ → Migliore quindi sostituisco



Valuto 4:

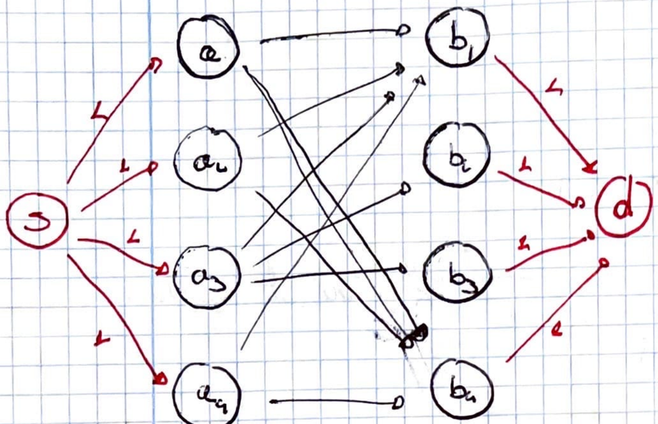
$S = \{1, 3, 5, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l} d(6) = 5 + 1 = 6 \\ d(3) = 5 + 3 = 8 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Nessuna etichetta si può migliorare.

Es 2

Grafo bipartito.

Risolvibile aggiungendo due nodi simbolici e archi di capacità 1



Flusso:

max d quantità di flusso dell'arco

s.t.

$$\sum_{j\in\delta^+(i)} x_{ij} - \sum_{j\in\delta^-(i)} x_{ji} = \begin{cases} d & i=s \\ 0 & \text{altrimenti} \\ -d & i=d \end{cases}$$

Se vogliamo risolverlo come PLI

$$\max \sum_{i,j} x_{i,j}$$

sT

$$\sum_{j} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{i} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j$$