Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Mathématiques et Calcul 1

Contrôle continu n°3 — 8 janvier 2019
durée: 2h30

Tout document interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même prévus à titre d'horloge, sont également interdits.

MERCI DE BIEN INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE

Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et de $v = 1 - i$.

(2) En déduire le module et l'argument de $\frac{u}{v}$.

Exercice 2.

Trouver les racines complexes du polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\operatorname{Arctan}(\cos x) - \pi}{\tan x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+x) - \sin(x^2)}{x^3}$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\ln(\operatorname{ch} x)}}{x}$

Exercice 4.

(1) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1+\exp(t)}$.

(2) Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+\exp(\frac{1}{x})}$. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ sa courbe représentative admet une asymptote dont on donnera l'équation, et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exercice 5. Étant donnés 3 nombres réels x_1, x_2, x_3, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = x_1\cos(4t) + x_2\cos(2t) + x_3.$$

(1) On suppose qu'il existe des valeurs de x_1, x_2 et x_3 telles que $f(t) = \cos^4(t)$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\}$. Écrire sous forme matricielle le système linéaire vérifié par les inconnues x_1, x_2 et x_3.

(2) Déterminer les valeurs de x_1, x_2 et x_3 en résolvant le système linéaire de la question 1 par la méthode du pivot de Gauss.

(3) Retrouver le résultat de la question 2 en linéarisant $\cos^4(t)$ à l'aide de la formule d'Euler.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$.

(1) Trouver le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.

(2) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer f'.

(3) À l'aide du théorème des accroissement finis, montrer que

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leqslant \frac{1}{k \ln k}.$$

(4) En déduire que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

(5) En déduire un encadrement de $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$, puis un équivalent de u_n.

Que vaut $\lim_{n \to +\infty} u_n$?

Exercice 7. Soient a et b deux réels strictement positifs. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et les récurrences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}.$$

(1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Exprimer $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que $v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

(3) Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que (u_n) est décroissante.

(4) Montrer de même que (v_n) est croissante.

(5) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, puis qu'elles ont la même limite (notée L).

(6) Exprimer $u_{n+1}v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n. En déduire l'expression explicite de L en fonction de a et b.

(7) En déduire que $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (inégalité des 3 moyennes).

Exercice 8. Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ des réels tous distincts. On note $D = \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ et on considère l'espace vectoriel E des fonctions définies sur D. On considère également le polynôme $Q_0 = (X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n)$.

(1) Quel est le degré de Q_0 ?

(2) Montrer que $F = \left\{ x \mapsto \frac{P(x)}{Q_0(x)},\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(3) Montrer que F est de dimension n et exhiber une base de F.

(4) Soit $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, où $b_i(x) = \frac{1}{x - a_i}$. Calculer, pour tout j, $\lim_{x \to a_j} (x - a_j) f(x)$.

(5) En déduire que $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, puis que c'est une base de F.

(6) Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall x \in D, \quad \frac{x^n}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x - a_i}.$$