Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°3
Mardi 10 Janvier 2017

On rappelle les développements limités suivants. Ils pourront être utilisés au cours de ce contrôle continu. Ils sont donnés au voisinage de 0 (n et p sont des entiers positifs quelconques).

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 1 On considère les polynômes $P(X) = X^2 - 2X + 2$ et $Q(X) = X^4 - 2X^2 + 2$.

(1) Calculer les racines de P dans $\mathbb{C}$, sous forme algébrique.
(2) Montrer que ces racines s'écrivent :

$$\{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}; \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\}.$$

(3) En déduire les racines de Q.

Exercice 2 Calculer les limites suivantes :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$
(2) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x}{(\sin(x))^2}$
(3) $\displaystyle\lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 3
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 9, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n + 2u_{n+1}}{3}.$$

(1) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

(2) Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
  (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{9}$.
  (b) Montrer que la suite (w_n) est positive.
  (c) Donner le terme général de (w_n) ainsi que sa limite.

(3) Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), puis montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

(4) On considère désormais la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \frac{u_n+3v_n}{2}$.
  (a) Montrer que la suite (t_n) est constante.
  (b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 4

(1) Citer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$.

(2) On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \arcsin(t). \end{array}$$

(a) Quelle est la dérivée de f ?

(b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arcsin sur l'intervalle $[0, x]$ pour $x \in]0, 1[$, démontrer l'inégalité :

$$\forall x \in]0,1[, \qquad \arcsin(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 5

Soit $f\ :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

(1) Donner le développement limité de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 4.

(2) Déterminer le développement limité de f au voisinage de 0, à l'ordre 2.

(3) Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et donner la valeur de $f(0)$.

(4) Monter que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

Exercice 6 On considère le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & -3 \\ -2x & + & 3y & - & z & = & 5 \end{array} \right.$$

(1) Mettre le système sous forme matricielle $AX = B$.

(2) Calculer l'inverse de la matrice A.

(3) Résoudre ainsi le système.

Exercice 7 Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-x-2y, 2x-4y). \end{array}$$

(1) Monter que f est une application linéaire.

(2) Donner $A_0 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

(3) Soit $\mathcal{B}' = \{\vec{u_1} = (-2, 1); \vec{u_2} = (2, 1)\}$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(4) Donner $A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.