Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Mathématiques et Calcul : Contrôle continu n°2
12 Novembre 2012

L1 : Licence Sciences et Technologies,
mention Mathématiques, Informatique et Applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2 . Durée 1h30.

NB : *Ce sujet contient 5 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.*

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan x-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+2x-3}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2

On considère le polynôme $P(x)=12x^3+3x^2-6x-2$.

1) Calculer $P(-1)$ et $P(1)$.
2) En déduire que P s'annule sur l'intervalle $]-1,1[$.
3) Le polynôme P admet-il des racines sur l'intervalle $]-1,0[$?

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $I=]-2,+\infty[$ par

$$f(x)=2-\frac{5}{x+2}.$$

1) Justifier que f est dérivable sur I et montrer que f est strictement croissante sur I.
2) En déduire que f réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera.
3) Déterminer la bijection réciproque de f, notée f^{-1}.
4) Calculer l'expression de la dérivée de f^{-1} en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{12x^2+4}-4}{x-1}$.

1) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en $x=1$ et préciser la valeur en 1 du prolongement de f.
3) On note toujours f ce prolongement défini sur $\mathbb{R}$. Cette fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) Préciser l'ensemble de définition de f et justifier que f est dérivable sur cet ensemble.

2) Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2} \exp\left(\frac{1}{c}\right).$$

3) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

4) A l'aide des questions précédentes, déterminer la limite

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$$