Les nombres complexes

I. Introduction

La règle des signes

Soit a et b $\in \mathbb{R}_+$

- ❖ $0 = a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b)$

  $\Rightarrow \quad -(a.b) = a.(-b)$

  Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif.
- ❖ $0 = (-a).(b + (-b)) = (-a).b + (-a).(-b) = -(a.b) + (-a).(-b)$

  $\Rightarrow \quad a.b = (-a).(-b)$

  Le produit d'un négatif et d'un négatif est positif.

Dans $\mathbb{R}$, un carré est toujours positif.
L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de racine.

On appelle i une racine carrée de -1 : $i^2 = -1$

On définit l'ensemble des nombres complexes comme :

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \ \mid \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

- ❖ x est la partie réelle de z, notée : $x = \Re(z)$
- ❖ y est la partie imaginaire de z, notée : $y = \Im(z)$

II. Operations sur $\mathbb{C}$

- ❖ $z = x + iy = 0 \iff x = y = 0$
- ❖ $z + z' = (x + iy).(x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- ❖ $z.z' = (x + iy).(x' + iy') = x.x' - y.y' + i(x.y' + x'.y)$
- ❖ $x + iy = x' + iy' \iff x = x'$ et $y = y'$
- ❖ $(x + iy).(x - iy) = x^2 + y^2$
- ❖ Si $x + iy \neq 0$: $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$

III. Deux formules à connaître

Somme de puissances

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \neq 0$:

$b^{n+1} - a^{n+1} = (b - a)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \ldots\ldots + b^1a^{n-1} + a^n)$

$= (b-a)\ \sum_{k=0}^{n} b^{n-k}a^k = (b-a)\ \sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}$

avec $a^0 = b^0 = 1$.

$n = 0 : b - a = (b - a) \times 1$

$n = 1 : b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$

$n = 2 : b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$

...

Conséquence : pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \geq 0$,

$$z^{n+1} - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + \ldots\ldots + z^n)$$

Démonstration :

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \neq 0$:
$b^{n+1} - a^{n+1} = (b - a)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \ldots\ldots + b^1a^{n-1} + a^n)$

Posons $S = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \ldots\ldots + b^1a^{n-1} + a^n$. On a :

$(b - a)S = bS - Sa$

$= (b^{n+1} + b^na + b^{n-1}a^2 + \ldots\ldots + ba^n) - (b^na + b^{n-1}a^2 + \ldots\ldots + ba^n + a^{n+1})$

$= b^{n+1} - a^{n+1}$

Le binôme de Newton

Pour tous nombres complexes a et b et tout nombre entier $n \neq 0$:

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k . b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} . b^k$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $k! = 1 \times 2 \times \ldots \times k$.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$$

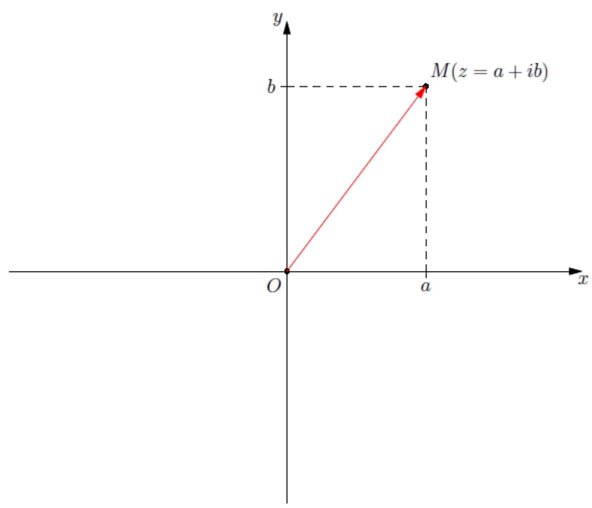
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2.b + 3a.b^2 + b^3$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5.b + 15a^4.b^2 + 20a^3.b^3 + 15a^2.b^4 + 6a.b^5 + b^6$$

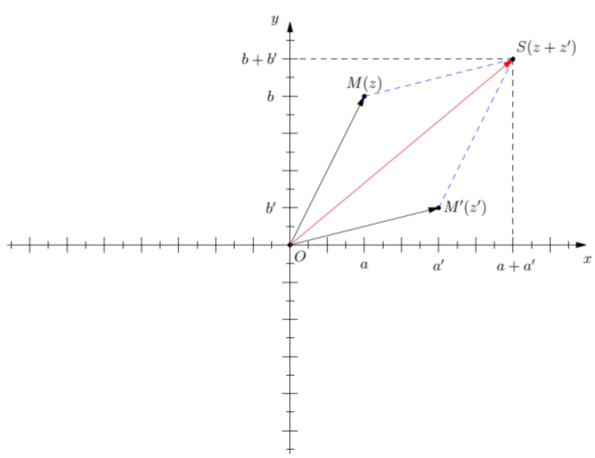
IV. Les nombres complexes représentés dans le plan

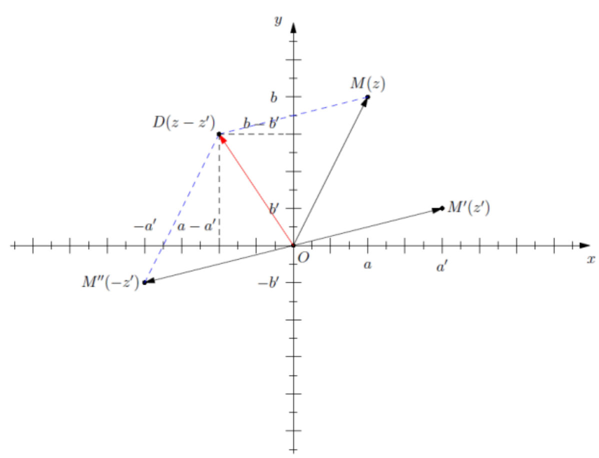
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Le nombre complexe z s'appelle l'affixe du point M de coordonnées (a, b) dans le plan.



V. Représentation de l'addition des complexes



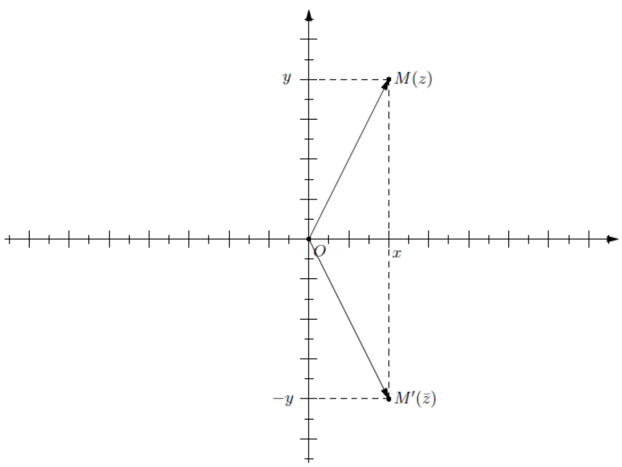


VI. Conjugaison

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre :

$$\bar{z} = x - iy$$



Conjugué : règles de calcul

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

- $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ et $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z + \bar{z} = 0$
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{(\bar{z})} = z$, $\overline{(z_1.z_2)} = \bar{z}_1.\bar{z}_2$

VII. Module d'un nombre complexe

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$, $|x| \leq |z|$, $|y| \leq |z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$

$|z.z'|^2 = (z.z').(z.z') = (z.z').(\bar{z}.\bar{z}') = (z.\bar{z}).(z'.\bar{z}') = |z|^2.|z'|^2$

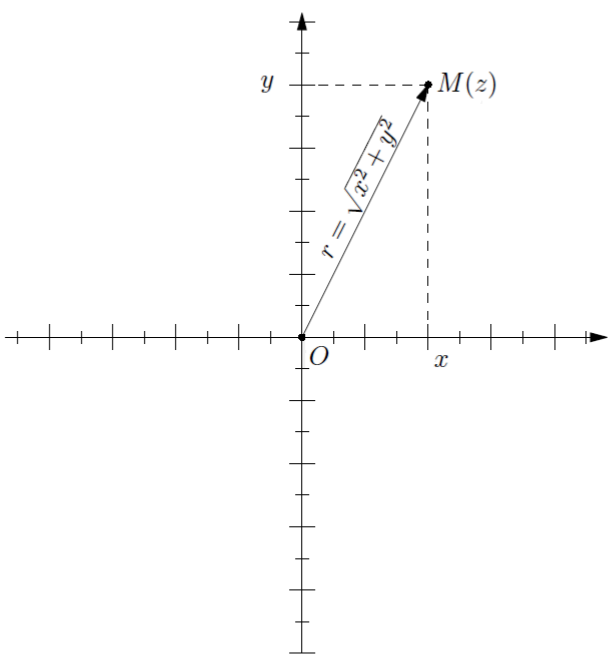
$|z + z'|^2 = (z + z').(z + z') = z.\bar{z} + z.\bar{z}' + z'.\bar{z} + z'.\bar{z}'$

$= |z|^2 + 2\Re(z.\bar{z}') + |z'|^2$

$\leq |z|^2 + 2|z|.|z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$

Attention : Ne pas confondre module d'un nombre complexe avec valeur absolue.
La notation est la même mais :

- Si $z \in \mathbb{R}$, $(z = x)$ $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $|z^2| = z^2$
- Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $(z = x + iy,\ y \neq 0)$
  - $|z^2| = |(x + iy)^2| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$
  - $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \neq |z^2|$



VIII. Racine carrée des nombres complexes

Proposition : Tout nombre complexe a deux racines carrées opposées.

Exemple : trouver la racine carrée de $3 + 4i$

On cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = 3 + 4i$

- $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 + 4i$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy \quad\;\;\; = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

D'où les deux solutions : (x, y) = (2, 1) et (x, y) = (-2, -1).

Pour trouver la racine d'un nombre complexe a + ib,

on pose : $(x + iy)^2 = a + ib$

- $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy \quad\;\;\; = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) permettent de calculer x^2 et y^2.
L'équation (2) permet de trouver le signe de x et y.

IX. L'équation du second degré

$az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$$

$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

Les racines sont donc les nombres complexes z, tels que $z + \frac{b}{2a}$ soit une racine carrée de $\frac{\Delta}{4a^2}$.

Quand a, b et c sont réels, on a les solutions (complexes) suivantes :

Si $\Delta > 0$, les deux racines sont :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

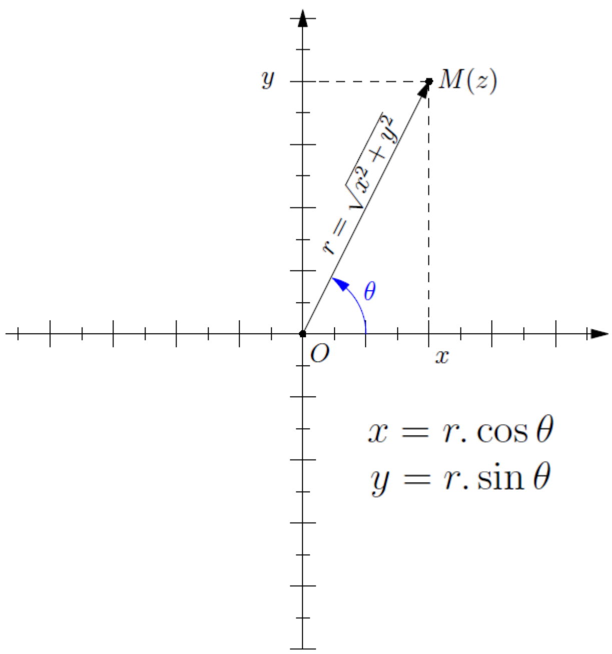
Si $\Delta < 0$, les deux racines sont :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, il y a une racine double :

$$z = -\frac{b}{2a}$$

X. Argument



On appelle argument du nombre complexe $z = x + iy$, la seule solution θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, du système :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Notation : $\theta = \arg(z)$

XI. Écriture trigonométrique des nombres complexes

Un nombre complexe peut s'écrire de deux manières :

1. algébrique : $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \theta < 2\pi$

Remarque : Le choix $0 \leq \theta < 2\pi$ est un choix arbitraire, on peut tout aussi bien choisir : $-\pi \leq \theta < \pi$ ou …

Exemples

❖ $z = 1 + i \qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Donc :

$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

❖ $z = 3 + i\sqrt{3} \qquad r = |z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Donc :

$z = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

❖ $z = 1 - i\sqrt{3} \qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Donc :

$z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

Moyen mnémotechnique

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

XII. Représentation de la multiplication

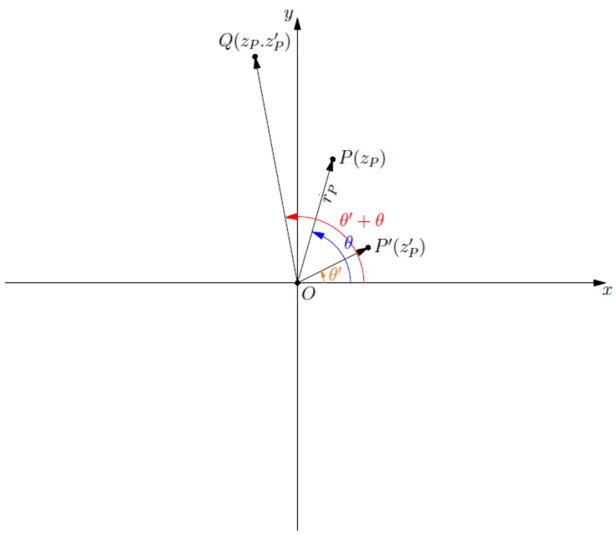
Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$zz' = rr'\,[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')]$

$\quad = rr'\,[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$

Règle : Pour multiplier deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- On multiplie les modules.
- On additionne les arguments.



XIII. Représentation de la division

Si $z \neq 0$, $\quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{r.(\cos\theta - i\ \sin\theta)}{r^2}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\ (\cos\theta - i\ \sin\theta)$$

$\forall z \neq 0$, $z' \in \mathbb{C}$:

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}\ (\cos(\theta' - \theta) + i \sin(\theta' - \theta))$$

Règle : Pour diviser deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- On divise les modules.
- On soustrait l'argument du dénominateur de l'argument du numérateur.

XIV. Formule de De Moivre

Puissance entière d'un nombre complexe.

Si $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = \underbrace{z.z...z}_{\text{n-fois}}$$

$$= \underbrace{r.r...r}_{\text{n-fois}} \underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta).(\cos\theta + i\sin\theta)...(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{n-fois}}$$

$$= r^n.(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Si $n \in \mathbb{Z}^*_-$, $\quad -n \in \mathbb{N}$

$$z^n.z^{-n} = z^n.\left(r^{-n}.(\cos(-n\theta) + i\ \sin(-n\theta))\right) = 1$$

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{r^{-n}.(\cos(-n\theta) + i\ \sin(-n\theta))}$$

$$= r^n.(\cos(-n\theta) - i\ \sin(-n\theta))$$

$$= r^n.(\cos(n\theta) - i\ \sin(n\theta))$$

Formule de De Moivre :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad (\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\ \sin(n\theta)$$

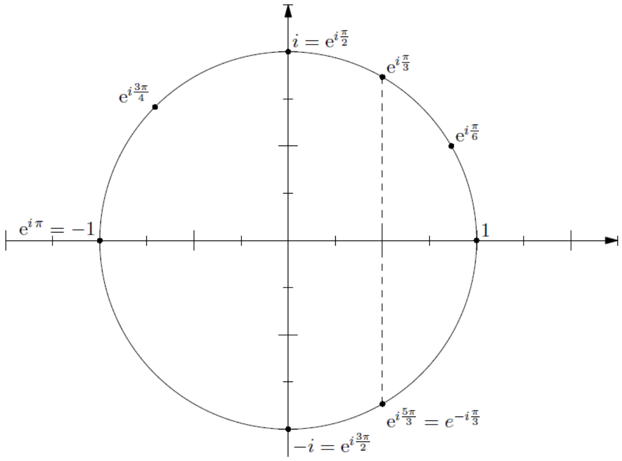
XV. Exponentielle complexe

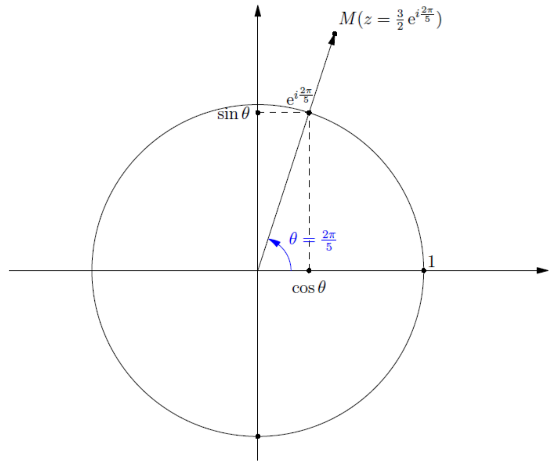
Théorème : Il existe une fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$ (notée e^z $\forall z \in \mathbb{C}$) qui vérifie :

1. $\forall z, z' \in \mathbb{C}$: $e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$
2. Si $x \in \mathbb{R}$, e^x est l'exponentielle réelle
3. L'application : $\begin{array}{rcl} [0, 2\pi[& \mapsto & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est une bijection sur l'ensemble des complexes de module 1.

Théorème admis

Les nombres complexes de module 1





On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique : $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi[$
3. exponentielle : $z = r.e^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi[$

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$

XVI. Racines des nombres complexes

Racine n-ième d'un nombre complexe

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle racine n-ième de z, le nombre complexe :

$$a = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

tel que : $z = a^n$

$$z = a^n$$
$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = \varrho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

$$\begin{cases} \varrho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varrho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta+2k\pi}{n} \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que : $0 \le k \le n-1$

Théorème : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, non-nul, a n racines n-ièmes :

$$a_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\ \sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$0 \le k \le n-1$$

Racine n-ième de l'unité

Si $z = 1$: $r = 1$, $\theta = 0$.

Les nombres complexes :

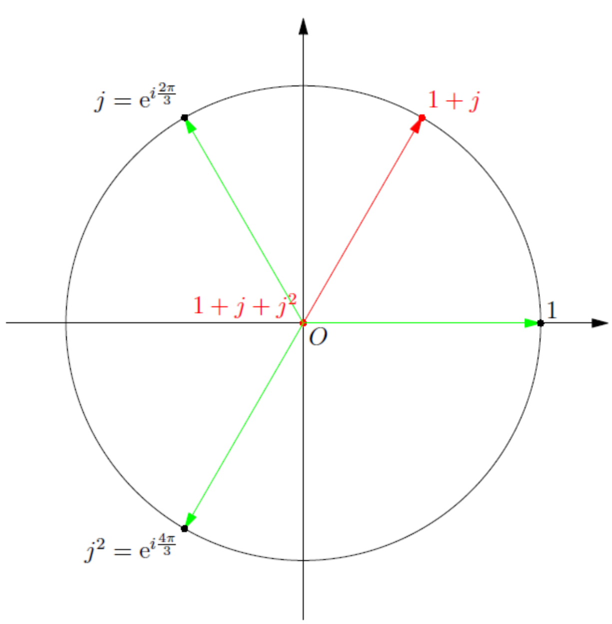
$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\ \sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$0 \le k \le n-1$$

S'appellent les racines n-ième de l'unité.

Pour $0 \le k \le n-1$, $\omega_k^n = 1$

Somme des racines n-ièmes de l'unité



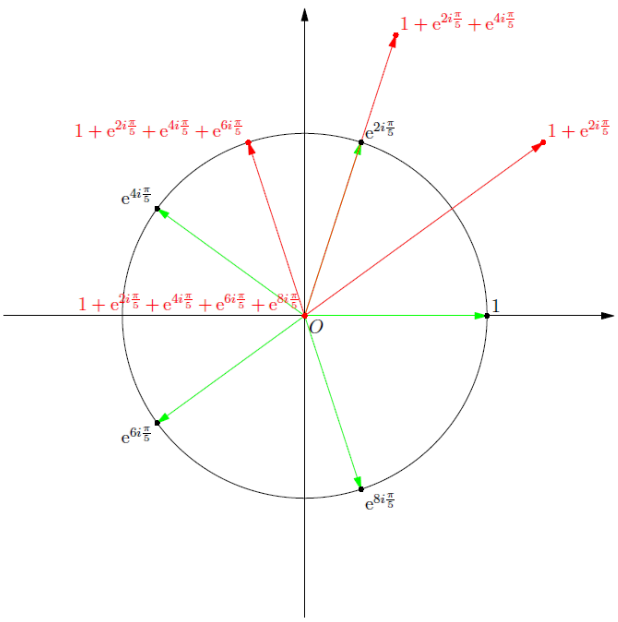
Pour n= 3 :

$$1+e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{4\pi}{3}}=1+e^{i\frac{2\pi}{3}}+(e^{i\frac{2\pi}{3}})^2=\frac{1-(e^{i\frac{2\pi}{3}})^3}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}=0$$

Pour n quelconque :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}=\sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\frac{2\pi}{n}})^k=\frac{1-(e^{i\frac{2\pi}{n}})^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=0$$

La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ et a et b deux racines n-ièmes de z.

$$a^n = b^n = z$$

Soit : $$\left(\frac{a}{b}\right)^n=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=b.\omega_k$$

Où ω_k, $(0 \leq k \leq n-1)$ est une racine n-ièmes de l'unité.

Théorème : On obtient les n racines n-ièmes d'un nombre complexe en multipliant l'une d'entre elles par les n racines n-ièmes de l'unité.

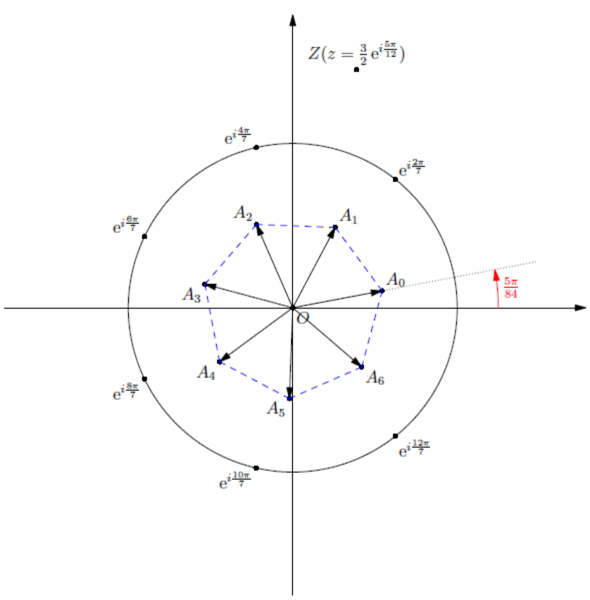
Exemple : soit à calculer les racines 7-ièmes de $z=\frac{3}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

On doit trouver a tel que $a^7 = z$

$$|a|=\sqrt[7]{\frac{3}{2}} \qquad a_0=\sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{5\pi}{7\times 12}}=\sqrt[7]{\frac{3}{2}}e^{i\frac{5\pi}{84}}$$

Les autres racines sont obtenues en multipliant a0 par les six racines 7-ièmes de l’unité (différentes de 1) :

- $a_1 = a_0 e^{i\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{29\pi}{84}}$
- $a_2 = a_0 e^{i\frac{4\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{53\pi}{84}}$
- $a_3 = a_0 e^{i\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{6\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{77\pi}{84}}$
- $a_4 = a_0 e^{i\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{8\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{101\pi}{84}}$
- $a_5 = a_0 e^{i\frac{10\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{10\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{125\pi}{84}}$
- $a_6 = a_0 e^{i\frac{12\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84}+\frac{12\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{149\pi}{84}}$



XVII. Trigonométrie

$z \in \mathbb{C}$ $\qquad z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$$\Re(z) = \cos\theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\Im(z) = \sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

Transformation de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ en une somme des sinus et cosinus des multiples de θ.

↪ utilité :

Primitives des fonctions $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$: inconnues
Primitives des fonctions $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$: connues

$$\begin{aligned} 2^3\cos^3\theta &= \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^3 \\ &= e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \\ &= \left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}\right) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ &= 2\cos 3\theta + 6\cos\theta \end{aligned}$$

$$\cos^3\theta = \tfrac{1}{4}\cos 3\theta + \tfrac{3}{4}\cos\theta$$

- ❖ On écrit : $2^n\cos^n\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$.
- ❖ On développe $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$ avec la formule du binôme.
- ❖ On regroupe chaque $e^{ki\theta}$ avec son conjugué $e^{-ki\theta}$.

$$\begin{aligned} (2i)^3\sin^3\theta &= \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3 \\ &= e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta} \\ &= \left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}\right) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= 2i\sin 3\theta - 6i\sin\theta \end{aligned}$$

$$\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

Calcul des sinus et cosinus de nθ

$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$\cos n\theta = \Re((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$

$\sin n\theta = \Im((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$

$\cos 4\theta + i\sin 4\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$
$= (\cos\theta)^4 + 4i(\cos\theta)^3\sin\theta + 6i^2(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + 4i^3(\cos\theta)(\sin\theta)^3 + i^4(\sin\theta)^4$

$\cos 4\theta = (\cos\theta)^4 - 6(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + (\sin\theta)^4$

$\sin 4\theta = 4(\cos\theta)^3\sin\theta - 4\cos\theta(\sin\theta)^3$

XVIII. Le théorème fondamental de l'algèbre

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$

Théorème de d'Alembert

Théorème : Tout polynôme non-constant à coefficients complexes a au moins une racine complexe.

Corollaire : Tout polynôme de degré $n \geq 1$, à coefficients complexes, a n racines complexes.

Exemple : Le polynôme $z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1$ a pour racines j, j^2, i, $-i$.