Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°1
15 Octobre 2012

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de page de l'énoncé : 1. Durée 1h30.

NB : *Ce sujet contient 5 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.* **Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.**

Exercice 1

1) Mettre le nombre complexe $z = \dfrac{2}{1-i}$ sous forme algébrique.
2) Donner le module et l'argument de z. En déduire les racines carrées de z sous forme exponentielle.
3) Calculer les racines carrées de z sous forme algébrique.
4) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$.

Exercice 2

NB : Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.
1) Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Que vaut $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^7$?
2) Linéariser $\cos^5(\theta)$, c'est-à-dire l'exprimer en fonction des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.
3) Exprimer $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$ à l'aide de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 3

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $S(\theta) = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \sin(4\theta)$.
1) Calculer $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + e^{3i\theta} + e^{4i\theta}$ pour θ dans $\mathbb{R}$.
2) Que vaut $S(\theta)$ pour $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$?
3) Montrer que $S(\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)\sin(5\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ pour $\theta \notin \{2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
4) **Question bonus :** En déduire toutes les solutions $\theta \in \mathbb{R}$ de l'équation $S(\theta) = 0$.

Exercice 4

Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

1) $u_n = \dfrac{-2n^3 + n}{4n^3 - 7n^2 + 3}$ 2) $v_n = \dfrac{\log(n) + \cos(3\sqrt{n})}{\sqrt{n} + (-1)^{n^2}}$

3) $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$ 4) $x_n = \dfrac{2^n((-1)^n + 2)}{n^4}$

Exercice 5

Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.
1) Quel est le domaine de définition de f ?
2) On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.
   b) Montrer que (u_n) est croissante.
   c) En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.
3) On définit la suite (v_n) par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_n$.
   b) Montrer que (v_n) converge et calculer sa limite.