Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et calculs : Contrôle continu n° 3

11 janvier 2011

L1 : Licence sciences et technologies
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 2h30.

Documents et calculatrices sont interdits.

L'usage des téléphones portables est interdit dans les salles d'examen

Exercice 1.

1. Mettre sous la forme $a + i\,b$ les nombres complexes suivants : $\dfrac{3+6\,i}{3-4\,i}$ et $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$
2. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $3 + 3\,i$ et $-1 - \sqrt{3}\,i$.
3. Calculer $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000}$

Exercice 2. On considère la suite u_n définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_n & = & \sqrt{2u_{n-1}+1} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 1$
2. On **suppose** que u_n converge vers une limite ℓ.
   Justifier, avec précision, que ℓ vérifie alors : $\ell = \sqrt{2\ell+1}$ et que $\ell \geq 1$.
3. ℓ étant défini par la relation de la question 2., montrer l'égalité :
$$u_n - \ell = 2\,\frac{u_{n-1}-\ell}{\sqrt{2u_{n-1}+1}+\sqrt{2\ell+1}}$$
   En déduire que : $|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}|u_{n-1}-\ell|$; puis que : $|u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \ell|$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. À quelles conditions la suite a^n est-elle convergente et, dans les cas où elle converge, quelle est sa limite ?
5. Montrer que la suite u_n est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer le développement limité de $\arctan x$ à l'ordre 5, au voisinage de 0.
3. En déduire le développement limité de f, à l'ordre 2, au voisnage de 0.
4. Déduire du développement limité de f, trouvé à la question précédente, qu'en 0, f peut être prolongée en une fonction dérivable telle que $f(0) = -\dfrac{1}{3}$ et $f'(0) = 0$

Exercice 4. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On considère les deux sous-ensemble suivants :

$$F = \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y \text{ et } x = -z\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

…/…

2. Déterminer une base de F et donner sa dimension.
3. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de F et calculer une base de G.

Exercice 5. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs : $\vec{u} = (1,\, 2,\, 0)$ et $\vec{v} = (0,\, 1,\, 1)$ et le sous-espace vectoriel G engendré par le vecteur : $\vec{w} = (1,\, 1,\, 1)$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Soit x et y deux réels tels que : $0 < x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction logarithme sur l'intervalle $[x,\, y]$, montrer que :

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y$$

On justifiera soigneusement que ce théorème s'applique dans les conditions citées.

Exercice 7. Soit le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ 2x + y + z & = & 2 \\ x + 2y + z & = & 1 \end{array}\right.$$

1. Écrire le système sous forme matricielle. On appellera A la matrice du système.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Combien le système admet-il de solutions ?
4. Résoudre le système.