Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et calculs : Contrôle continu n°1
18 Octobre 2010

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Documents et calculatrices sont interdits.

L'usage des téléphones portables est interdit dans les salles d'examen

NB : *Ce sujet contient 4 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement. La question marquée (*) est une question bonus.*

Exercice 1

Soit x un réel. Pour un entier naturel n, on considère la somme $S_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$

1. Calculer la somme $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ comme somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. Exprimer $S_n(x)$ à l'aide de $\Re(T_n(x))$
3. En déduire la valeur de $S_n(x)$

Exercice 2

On considère les polynômes $P(X) = X^2 - 2X + 2$ et $Q(X) = X^4 - 2X^2 + 2$

1. Calculer les racines de P
2. Montrer que ces racines s'écrivent :
$$\{\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}} \; ; \; \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\}$$
3. En déduire que celles de Q s'écrivent :
$$\{2^{1/4}\, e^{\frac{i\pi}{8}} \; ; \; 2^{1/4}e^{-\frac{i\pi}{8}} \; ; \; -\, 2^{1/4}\, e^{\frac{i\pi}{8}} \; ; \; -2^{1/4}e^{-\frac{i\pi}{8}}\}$$
4. Ecrire les racines carrées de $(1+i)$ et de $(1-i)$ sous forme algébrique.
5. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$
6. (*) Ecrire une factorisation de $Q(X)$ en polynômes du second degré, à coefficients réels.

.../...

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite l
4. Quelle est la valeur de l ?

Exercice 4

Soit $a \geq 0$ et (u_n) la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n^2 + 1 \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est 2.
3. On suppose $a \leq 2$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $\quad u_n \leq 2$.
   En déduire que (u_n) est convergente.
4. On suppose $a > 2$. Montrer que (u_n) diverge.