Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Mathématiques et Calcul 1

Contrôle continu n°1 — 16 octobre 2017

Correction et barème

Devoir noté sur 25 points (+ 1 point bonus)

Exercice 1 Sur 4 points On définit les deux nombres complexes u et v suivants :

$$u = (1+i)^{13} \quad \text{et} \quad v = (1-i\sqrt{3})^7.$$

1) Mettre u sous forme exponentielle.
2) Mettre v sous forme exponentielle.
3) Calculer le module de u/v.
4) Donner l'argument de u/v, représenté dans $[0, 2\pi[$.

Correction

(1) 1 point

$$u = (1+i)^{13} = \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{13} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{13} = (\sqrt{2})^{13}\ e^{i\frac{13\pi}{4}}$$

(2) 1 point

$$v = (1-\sqrt{3}i)^7 = \left(2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^7 = \left(2e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)^7 = 2^7\ e^{-i\frac{7\pi}{3}}$$

(3) 1 point

$$\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|} = \frac{\left|(\sqrt{2})^{13}\ e^{i\frac{13\pi}{4}}\right|}{\left|2^7\ e^{-i\frac{7\pi}{3}}\right|} = \frac{(\sqrt{2})^{13}}{2^7} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(4) 1 point

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{u}{v}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{(\sqrt{2})^{13}\ e^{i\frac{13\pi}{4}}}{2^7\ e^{-i\frac{7\pi}{3}}}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{e^{i\frac{13\pi}{4}}}{e^{-i\frac{7\pi}{3}}}\right) = \operatorname{Arg}\left(e^{i\left(\frac{13\pi}{4}+\frac{7\pi}{3}\right)}\right) = \operatorname{Arg}\left(e^{i\frac{67\pi}{12}}\right) = \operatorname{Arg}\left(e^{i\frac{19\pi}{12}}\right) = \frac{19}{12}\pi$$

Exercice 2 Sur 6 points (+ 1 point bonus) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par u_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}.$$

1) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors quelle est sa limite, ℓ ?
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3) a) Montrer par récurrence que si $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   b) En déduire que si $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$ alors la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.
4) a) Montrer par récurrence que si $u_0 > 2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
   b) En déduire, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que si $u_0 > 2$ alors la suite (u_n) est divergente.

Correction

(1) 1 point Si la suite (u_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors par passage à la limite quand $n \to \infty$ dans l'équation

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$$

on déduit que ℓ vérifie l'équation

$$\ell = 1 + \frac{\ell^2}{4} \iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \iff (\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell = 2$$

Donc si la suite (u_n) possède une limite ℓ alors celle-ci est égale à 2.

(2) 1 point Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n^2}{4} - u_n = \frac{u_n^2 - 4u_n + 4}{4} = \frac{(u_n - 2)^2}{2} \geqslant 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

(3) (a) 1 point On a $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$ par conséquent notre récurrence est bien initialisée au rang $n = 0$. Maintenant supposons que pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, nous avons $0 \leqslant u_n \leqslant 2$, alors nous avons également

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4} \leqslant 1 + \frac{2^2}{4} = 2$$

Par conséquent la propriété est bien héréditaire et la récurrence est verifiée.

(b) 1 point Si $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$, alors la suite (u_n) est croissante et majorée par 2, par conséquent celle-ci est convergente. De plus, grâce à la question 1) nous savons que sa limite est $\ell = 2$.

(4) (a) 1 point On a $u_0 > 2$ par conséquent notre récurrence est bien initialisée au rang $n = 0$. Maintenant supposons que pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n > 2$, alors nous avons également

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4} > 1 + \frac{2^2}{4} = 2$$

Par conséquent la propriété est bien héréditaire et la récurrence est verifiée.

(b) 1 point + 1 point bonus pour une démonstration complète de la divergence Supposons que $u_0 > 2$ et que (u_n) converge. D'après la première question, nous savons que l'unique limite vers laquelle peut converger (u_n) est $\ell = 2$. Or, comme $u_0 > 2$, nous en déduisons que (u_n) ne peut pas être croissante sur $\mathbb{N}$, comme cela a été démontré à la question 2). Donc ceci est absurde, et si $u_0 > 2$ alors (u_n) diverge.

Exercice 3 Sur 4 points Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $z = 1 + e^{i\theta}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n = e^{\frac{in\theta}{2}} 2^n \cos^n(\frac{\theta}{2})$
2) Pour $\theta \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, prouver que $|\cos(\frac{\theta}{2})| < \frac{1}{2}$.
3) En déduire que pour $\theta \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = |z^n|$ est convergente et donner sa limite.

Correction

(1) 1 point

$$\begin{aligned} z^n &= \left(1 + e^{i\theta}\right)^n \\ &= \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\right)^n \\ &= \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos(\tfrac{\theta}{2})\right)\right)^n \\ &= e^{\frac{in\theta}{2}} 2^n \cos^n(\tfrac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

(2) 1,5 point $\forall \theta \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, on a $\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent, comme la fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, on déduit que

$$0 = \cos(\tfrac{\pi}{2}) \leqslant \cos(\tfrac{\theta}{2}) < \cos(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}$$

et donc que

$$\forall \theta \in \left] \frac{2\pi}{3}, \pi \right], \quad |\cos(\tfrac{\theta}{2})| < \tfrac{1}{2}.$$

(3) 1,5 point $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} a_n &= |z^n| \\ &= \left| \mathrm{e}^{\frac{in\theta}{2}} 2^n \cos^n(\tfrac{\theta}{2}) \right| \\ &= \left| \mathrm{e}^{\frac{in\theta}{2}} \right| \; |2^n \cos^n(\tfrac{\theta}{2})| \\ &= |2\cos(\tfrac{\theta}{2})|^n. \end{aligned}$$

La suite (a_n) est donc géométrique de raison $|2\cos(\frac{\theta}{2})|$, et comme $|2\cos(\frac{\theta}{2})| < 1$ d'après la question 2), on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Exercice 4 Sur 4 points

1) Donner les solutions **sous forme exponentielle** de l'équation

$$(z^9 - i)(z^2 + 4) = 0.$$

2) Donner les solutions **sous forme algébrique** de l'équation

$$z^3 + z^2 = (-1 + i)z.$$

Correction

(1) 1,5 point Le premier facteur a 9 racines (les racines 9-ièmes de i), et le deuxième facteur a pour racines $z = 2i$ et $z = -2i$ (racines carrées de -4). Les 11 solutions sont donc $z_0, z_1, \ldots, z_{10}$, avec :

- $z_k = \exp\left\{ i\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9} \right) \right\}, \quad k \in \{0, \ldots, 8\}$,
- $z_9 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \; z_{10} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

(2) 2,5 points On trouve la solution évidente $z_1 = 0$ et on factorise. On calcule alors les solutions de

$$z^2 + z + 1 - i = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4(1 - i) = -3 + 4i$. Toute racine $x + iy$ de Δ vérifie

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = 5, \end{cases}$$

ce qui conduit à $x^2 = 1$ et $y = \frac{2}{x}$, donc les deux racines de Δ sont $1 + 2i$ et $-1 - 2i$. Par conséquent, les deux autres solutions de l'équation sont

$$z_2 = \frac{-1 + (1 + 2i)}{2} = i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{-1 - (1 + 2i)}{2} = -1 - i.$$

Exercice 5 Sur 7 points

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan complexe d'affixe z_n, où la suite (z_n) est définie par $z_0 = 1$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \frac{3z_n}{4} + i\frac{\sqrt{3}z_n}{4}.$$

1) Montrer que la suite (z_n) est géométrique et donner sa raison.
2) Mettre z_1 sous forme exponentielle.
3) En déduire pout tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de z_n en fonction de n.

4) Donner, pour tout n, l'expression de la longueur du segment OA_n (le point O étant l'origine du repère, c'est-à-dire le point d'affixe 0). En déduire la limite de cette longueur lorsque n tend vers l'infini. *(On rappelle qu'étant donnés deux points du plan complexe A et B d'affixes respectifs z_A et z_B, la longueur du segment AB est donnée par $|z_B - z_A|$.)*
5) Démontrer à l'aide du théorème de Pythagore que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
6) Sur une figure, tracer dans le plan complexe les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6, en utilisant seulement la valeur des arguments des (z_i) (pour $i = 1, 2, \ldots, 6$) et la propriété montrée à la question 5. On codera sur la figure les éléments remarquables (distances égales, angles égaux, angles droits) utilisés pour la construction.

Correction

(1) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n = z_1 z_n,$$

donc (z_n) est une suite géométrique de raison $z_1 = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$. 1 point

(2)

$$z_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$$ 1 point

(3) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = z_0(z_1)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{6}}.$$ 1 point

(4) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n et l'affixe du point A_n, on en déduit que la distance OA_n est égale à

$$OA_n = |z_n| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

De plus, comme $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$ on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} OA_n = 0.$$ 1,5 point

(5) La démonstration se fait à l'aide du théorème de Pythagore :

- $OA_n^2 = |z_n|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n}$
- $OA_{n+1}^2 = |z_{n+1}|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2(n+1)}$
-

$$\begin{aligned} A_nA_{n+1} &= |z_{n+1} - z_n| \\ &= \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n - z_n\right| \\ &= \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i - 1\right| |z_n| \\ &= \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| |z_n| \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

et donc $A_nA_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n}$

Nous déduisons des trois calculs précédents que

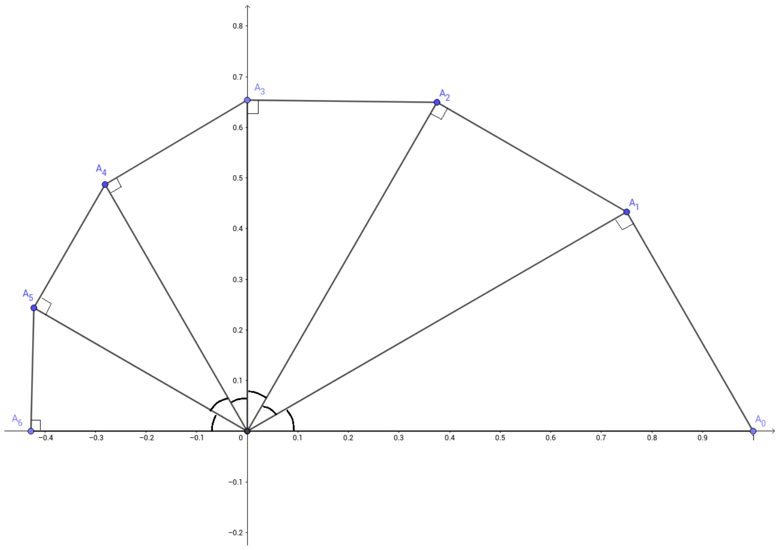
$$OA_{n+1}^2 + A_nA_{n+1}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2(n+1)} + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} = OA_n^2$$

et donc, grâce au théorème de Pythagore, que OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}. 1 point

(6) En remarquant que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \arg z_n = \arg\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{\frac{in\pi}{6}}\right) = \frac{n\pi}{6}$$

et en prenant en compte les angles droits, nous obtenons la figure suivante (construite de gauche à droite):



1,5 point