$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + o(u^n)$$

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \frac{u^6}{6!} + \cdots + (-1)^p \frac{u^{2p}}{(2p)!} + o(u^{2p})$$

$$\operatorname{ch}(u) = 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^6}{6!} + \cdots + \frac{u^{2p}}{(2p)!} + o(u^{2p})$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + \cdots + (-1)^{(n-1)} \frac{u^n}{n} + o(u^n)$$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \cdots + u^n + o(u^n)$$

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots + (-1)^p \frac{u^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(u^{2p+1})$$

$$\operatorname{sh}(u) = u + \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \cdots + \frac{u^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(u^{2p+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$$

$$+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$$

⚠ u est "petit" : u tend vers 0 pour x tend vers 0 ⚠

Maths

Révision sur les DL

Exercice 1

$$\begin{cases} f(x) = 1 + 3x - x^2 + o(x^2) \\ g(x) = 2x - x^2 - x^3 + o(x^3) \end{cases}$$

1) $f(x)g(x) = (1+3x-x^2+o(x^2))(2x-x^2-x^3+o(x^3))$
$= 2x - x^2 - x^3 + 6x^2 - 3x^3 - 2x^3 + o(x^3)$
$= 2x + 5x^2 - 6x^3 + o(x^3)$

2) $f(g(x)) = f(2x - x^2 + o(x^2))$
$= 1 + 3(2x - x^2 + o(x^2)) - (2x - x^2 + o(x^2))^2 + o(x^2)$
$= 1 + 6x - 7x^2 + o(x^2)$

3) $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{2x - x^2 - x^3 + o(x^3)}{1 + 3x - x^2 + o(x^2)}$

$= (2x - x^2 - x^3 + o(x^3))(1 - (3x - x^2) + (3x - x^2)^2 + o(x^2))$
$= (2x - x^2 - x^3 + o(x^3))(1 - 3x + 10x^2 + o(x^2))$
$= 2x - 7x^2 + 22x^3 + o(x^3)$

Exercice 2

1) $\cos(2x) - e^{x^2} = 1 - \dfrac{4x^2}{2} + \dfrac{16x^4}{24} + o(x^4) - \left(1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)\right)$
$= 1 - 2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 - 1 - x^2 - \dfrac{1}{2}x^4 + o(x^4)$
$= -3x^2 + \dfrac{1}{6}x^4 + o(x^4)$

2) $\dfrac{1}{1 + x(x+1)} = 1 - (x(x+1)) + x^2(x+1)^2 + o(x^2)$
$= 1 - x + o(x^2)$

3) $\sin(x^2)\,\mathrm{ch}(3x) = \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right)\left(1 + \frac{9x^2}{2} + \frac{81x^4}{24} + o(x^5)\right)$

$= x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{9x^4}{2} + \frac{81x^6}{24} + o(x^6)$

$= x^2 + \frac{9}{2}x^4 + \frac{77}{24}x^6 + o(x^6)$

4) $\frac{\ln(1-x)}{1+2x} = \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)\right)$

$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x^3 - 4x^3 + o(x^3)$

$= -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{10}{3}x^3 + o(x^3)$

5) $\frac{(e^x - 1)^2}{1+x^2} = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2\left(1 - x^2 + o(x^2)\right)$

$= \left(x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)\right)\left(1 - x^2 + o(x^2)\right)$

$= x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 - x^4 + o(x^4)$

$= x^2 + x^3 - \frac{5}{12}x^4 + o(x^4)$

6) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = (\sin x)^2 \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^2$

$= \frac{1}{x^2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{60}\right)x^6 + o(x^6)\right)$

$= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45}x^4 + o(x^4)$

7) $\frac{\mathrm{ch}(x^2)}{1+x^2+x^4} = \left(1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\left(1 - x^2 - x^4 + (x^2+x^4)^2 + o(x^4)\right)$

$= \left(1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\left(1 - x^2 + o(x^4)\right)$

$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

8) $\ln(2-x^2) = \ln\left(2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$

$= \ln 2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

9) $e^{1+2x} = e \times e^{2x} = e\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)$

$= e + 2ex + 2ex^2 + \frac{4}{3}ex^3 + o(x^3)$

Exercice 3

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) + e^{-x} - \cos(x^2) - \frac{\sin(x^3)}{6}}{1 - ch(x^2)}$$

1) $\ln(x) :]0,+\infty[\longrightarrow \ln(1+x) :]-1,+\infty[$

$ch(x^2) = 1$ pour $x = 0 \longrightarrow 1 - ch(x^2) = 0$ pour $x = 0$

$Df =]-1,+\infty[\,/\, \{0\}$

2) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$= \frac{7}{24}x^4 + o(x^4)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{(7/24)x^4 + o(x^4)}{(-x^4/2) + o(x^4)} = \frac{(7/24) + o(1)}{(-1/2) + o(1)} \longrightarrow -7/12$

Donc, f admet un prolongement par continuité en posant

$f(0) = -7/12$

Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 1ère année, 2013-2014, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Révision sur les développements limités

exactement la même chose donné au CC2 2013

On rappelle les développements limités suivants. Ils pourront être utilisés au cours de ce contrôle continu. Ils sont donnés au voisinage de 0.

$$\begin{array}{lcl|lcl}
\exp(u) & = & 1+u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^n}{n!}+o(u^n) & \frac{1}{1-u} & = & 1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n) \\
\cos(u) & = & 1-\frac{u^2}{2}+\cdots+(-1)^p\frac{u^{2p}}{(2p)!}+o\left(u^{2p}\right) & \sin(u) & = & u-\frac{u^3}{6}+\cdots+(-1)^p\frac{u^{2p+1}}{(2p+1)!}+o\left(u^{2p+1}\right) \\
\mathrm{ch}(u) & = & 1+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^{2p}}{(2p)!}+o\left(u^{2p}\right) & \mathrm{sh}(u) & = & u+\frac{u^3}{6}+\cdots+\frac{u^{2p+1}}{(2p+1)!}+o\left(u^{2p+1}\right) \\
\ln(1+u) & = & u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{u^n}{n}+o(u^n) & & &
\end{array}$$

Exercice 1 Soit f et g deux fonctions dont les développements limités en 0 sont données par $f(x)=1+3x-x^2+o(x^2)$ et $g(x)=2x-x^2-x^3+o(x^3)$. Déterminer un développement limité en 0 de

(1) $f(x)\times g(x)$ à l'ordre 3.

(2) $f(g(x))$ à l'ordre 2.

(3) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ à l'ordre 3.

Exercice 2 Donner le développement limité au voisinage de 0 de

(1) $\cos(2x)-e^{x^2}$ à l'ordre 4.
(2) $\dfrac{1}{1+x(x+1)}$ à l'ordre 2.
(3) $\sin(x^2)\,\mathrm{ch}(3x)$ à l'ordre 6.
(4) $\dfrac{\ln(1-x)}{1+2x}$ à l'ordre 3.
(5) $\dfrac{(e^x-1)^2}{1+x^2}$ à l'ordre 4.
(6) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4.
(7) $\dfrac{\mathrm{ch}(x^2)}{1+x^2+x^4}$ à l'ordre 4.

8) $\ln(2-x^2)$ à l'ordre 4.

9) e^{1+2x} à l'ordre 3

Exercice 3 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)+e^{-x}-\cos(x^2)-\frac{\sin(x^3)}{6}}{1-\mathrm{ch}(x^2)}$$

(1) Donner l'ensemble de définition de f.
(2) Effectuer un développement limité à l'ordre 4 du numérateur de f au voisinage de 0.
(3) Est-ce que la fonction f admet un prolongement par continuité en 0. Si oui, lequel?