Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Contrôle continu n° 3

16 janvier 2012

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique, puis trigonométrique, le nombre complexe : $z = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}\cdot$
Calculer z^3.

Solution

$z = \dfrac{-4(1-i\sqrt{3})}{4} = -1+i\sqrt{3} = 2\Big(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$z^3 = 8e^{i\frac{6\pi}{3}} = 8$

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $u_0 > 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(u_n + \dfrac{a}{u_n}\Big)\cdot$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$
2. Montrer que : $u_{n+1}^2 - a = \dfrac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}\cdot$
3. Montrer que pour $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Solution

1. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$
   (i) $u_0 > 0$ par l'énoncé
   (ii) Si pour $0 \leq k \leq n \quad u_k > 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(u_n + \dfrac{a}{u_n}\Big) > 0$ puisque $a > 0$.
2. $u_{n+1}^2 - a = \dfrac{1}{4}\Big(u_n + \dfrac{a}{u_n}\Big)^2 - a = \dfrac{1}{4}\Big(u_n^2 + 2a + \Big(\dfrac{a}{u_n}\Big)^2 - 4a\Big) = \dfrac{1}{4}\Big(u_n^2 - 2a + \Big(\dfrac{a}{u_n}\Big)^2\Big) = \dfrac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}\cdot$
3. D'après la question précédente, $u_n^2 - a$ est un carré donc positif ; comme u_n et a sont positifs, on en conclut que $u_n \geq \sqrt{a}$.
   Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on montre soit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, soit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
   (i) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 : \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}\Big(1 + \dfrac{a}{u_n^2}\Big) \leq \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$ puisque, d'après ce qui précède, $u_n^2 \geq a$.
   (ii) $u_{n+1} - u_n \leq 0 : \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a}{u_n} - u_n\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a-u_n^2}{u_n}\Big) \leq 0$, toujours d'après la question précédente.
4. On a montré que la suite était décroissante et qu'elle était minorée par $\sqrt{a}$, elle est donc convergente vers une limite ℓ.
   On a, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \sqrt{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad \ell \neq 0, \quad \ell = \dfrac{1}{2}\Big(\ell + \dfrac{a}{\ell}\Big), \quad$ soit : $\ell^2 - a = 0$ et on choisit la racine positive : $\ell = \sqrt{a}$.

Exercice 3.

1. Quel est le développement limité en 0, à l'ordre 5, de la fonction $\cos x$. En déduire le développement limité en 0, à l'ordre 5, de $1-\cos x$.
2. Quel est le développement limité en 0, à l'ordre 4, de la fonction e^x ; en déduire le développement limité en 0, à l'ordre 5, de $x(e^x-1)$.
3. Calculer le développement limité en 0, à l'ordre 3, de la fonction $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x(e^x-1)}\cdot$
4. En déduire que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Quelle est la valeur du prolongement en 0 ?

Solution

1. D'après le cours : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \circ(x^5)$

   D'où : $1-\cos x = x^2\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4!} + \circ(x^3)\Big)$

   D'après le cours : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \circ(x^4)$

   D'où : $x(e^x-1) = x^2\Big(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^3}{4!} + \circ(x^3)\Big)$

   On a donc : $f(x) = \Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4!} + \circ(x^3)\Big)\dfrac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \circ(x^3)}$

   Il faut calculer le développement de : $\dfrac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}}$

   D'après le cours : $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \circ(u^3)$ avec $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^3}{4!}$

   $$\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}} = 1 - \Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}\Big) + \Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}\Big)^2 - \Big(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}\Big)^3 + \circ(x^3)$$

   En ne gardant que les puissances inférieures ou égales à 3 :

   $$\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!}} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{8} + \circ(x^3) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \circ(x^3)$$

   $$f(x) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \circ(x^3)\Big)\Big(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \circ(x^3)\Big) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + \circ(x^3)$$

2. $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\cancel{f'(0) = -\frac{1}{4}}$

Exercice 4. Soit la fonction f, définie par : $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)\cdot$

1. Quel est le domaine de définition de cette fonction ? Quelle est la valeur de $f(0)$?
2. Calculer la dérivée f' de cette fonction.
3. Déduire des questions précédentes que, pour $-1 < x < 1$, f s'écrit facilement en fonction de $\arctan(x)$.

Solution

1. La fonction arcsinus est définie entre -1 et 1 ; on doit donc avoir : $-1 < \dfrac{2x}{1+x^2} < 1$, soit les deux inégalités :
   (i) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0$
   (ii) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$

   Les deux étant vérifiées pour tout x, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. $f(0) = \arcsin(0) = 0$.

2. On a à dériver une fonction composée $f \circ g$ avec : $f(x) = \arcsin(x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}\cdot$

   $(f\circ g)'(x) = g'(x)f'\big(g(x)\big)$.

   $$g'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} = 2\left(\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}\right) = 2\left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right)$$

$$f'\big(g(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} = \left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| = \frac{1+x^2}{|1-x^2|}$$

$$g'(x)f'\big(g(x)\big) = \frac{1-x^2}{|1-x^2|}\frac{2}{1+x^2}$$

3. Pour $-1 < x < 1$ on a : $1-x^2 > 0$; donc : $\dfrac{1-x^2}{|1-x^2|} = 1$.

   Alors : $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ et $f(x) = K + 2\arctan(x)$. Comme $f(0) = 0$, $K = 0$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot$

1. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Justifier le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x, x+1]$.
3. Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x, x+1]$ et en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

4. En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\cos\left(\frac{1}{1+x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot$

.../...

Solution

1. f est composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\cdot$
2. Si $x > 0$, la fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à f sur cet intervalle.
3. En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[x, x+1]$, on obtient :

$$\exists c \in]x, x+1[\quad \text{tel que} \quad \left|\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = (x+1-x)\left(\frac{1}{c^2}\right)\left(\sin\left(\frac{1}{c}\right)\right)$$

   Puisque $c \in]x, x+1[$, $\quad c > x$ et $\dfrac{1}{c^2} < \dfrac{1}{x^2}$ et, le sinus étant une fonction bornée par 1, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

4. D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|x\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{x}$$

   et donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\cos\left(\frac{1}{1+x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les familles de vecteurs suivantes :

i. $\mathcal{F}_1 = \{\vec{u}_1 = (1, -1, -2), \quad \vec{u}_2 = (1, 0, -1), \quad \vec{u}_3 = (-5, 3, 7)\}$

ii. $\mathcal{F}_2 = \{\vec{v}_1 = (1, -1, -2), \quad \vec{v}_2 = (1, 0, -1), \quad \vec{v}_3 = (6, 4, -2)\}$

Si l'une de ces deux familles (ou les deux) est (ou sont) une (des) bases $\mathbb{R}^3$, calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ dans cette base.
Dans le cas contraire, quelle relation y a-t-il entre les vecteurs de la famille ?

Solution

i. Au choix : $\det \mathcal{F}_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

$\mathcal{F}_1$ est libre et elle est génératrice puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, c'est donc une base.

Ou bien on calcule $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{u}_3 = \vec{0}$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 5\gamma & = & 0 \\ -\alpha + 3\gamma & = & 0 \\ -2\alpha - \beta + 7\gamma & = & 0 \end{cases}$$

La 2^e équation donne : $\alpha = 3\gamma$ que l'on reporte dans la 1^{re} : $\beta - 2\gamma = 0$ et dans la 3^e : $-\beta + \gamma = 0$. Donc : $\alpha = \beta = \gamma = 0$ le système est libre et forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour trouver les coordonnées de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dans la base $\mathcal{F}_1$, il faut résoudre les systèmes :

$$(I)\begin{cases} \alpha + \beta - 5\gamma & = & 1 \\ -\alpha + 3\gamma & = & 0 \\ -2\alpha - \beta + 7\gamma & = & 0 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} \alpha + \beta - 5\gamma & = & 0 \\ -\alpha + 3\gamma & = & 1 \\ -2\alpha - \beta + 7\gamma & = & 0 \end{cases}$$

La même méthode que précédemment donne : $\vec{e}_1 = -3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

ii. $\det \mathcal{F}_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

La famille $\mathcal{F}_2$ est liée et : $\vec{v}_3 = -4\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2$, par exemple.

Exercice 7. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant de A. La matrice A est-elle inversible ?

Solution

On remplace la 2^e ligne par la 2^e moins la 1^{re} et la 3^e par la 3^e plus la 1^{re} et on développe par rapport à la 1^{re} colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Dans le déterminant 3×3, on remplace la 2^e colonne par la 2^e moins la 1^{re} et la 3^e par la 3^e plus la 1^{re} et on développe par rapport à la 1^{re} ligne :

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -24$$

Le déterminant étant non-nul, la matrice est inversible.

Exercice 8. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y & = & 1 \\ -x + 2y + z & = & -1 \\ 2x + 2y + 3z & = & 1 \end{cases}$$

1. Mettre ce système sous forme matricielle : $AX = B$.
2. Calculer l'inverse de la matrice A par la méthode du pivot de Gauss.
3. Calculer les solutions de ce système.

Solution

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_2 \leftsquigarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftsquigarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftsquigarrow 4L_2 - L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftsquigarrow L_2 - L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftsquigarrow L_1 + L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

3. On a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$