

Les nombres complexes



- Introduction
- Opérations sur \mathbb{C}
- Deux formules à connaître
- Les nombres complexes représentés dans le plan
- Représentation de l'addition des complexes
- Conjugaison
- Module d'un nombre complexe
- Racines carrées des nombres complexes
- L'équation du second degré
- Argument
- Écriture trigonométrique des nombres complexes
- Représentation de la multiplication
- Représentation de la division
- Formule de De Moivre
- Exponentielle complexe
- Racines des nombres complexes
- Trigonométrie
- Le théorème fondamental de l'algèbre



Pourquoi les nombres complexes ?

Indispensables, notamment via l'analyse de Fourier, en :

- ▶ physique
- ▶ traitement du signal
- ▶ statistiques
- ▶ traitement des images (algorithmes de Instagram, de Photoshop, etc...)
- ▶ ...



Start-up traitement de l'image / stats fondées par des anciens doctorants de Paris Descartes : <http://web.cornis.fr>, <http://snips.net>, www.cyclop.io,...

The screenshot shows the homepage of cornis, a company focused on R&D services. It features a banner with the text "PRESTATION DE R&D DÉVELOPPER DES SOLUTIONS ADAPTÉES À VOS BESOINS". Below the banner, there's a section titled "Les technologies du spatial au service de l'éolien" with some small text and icons.

The screenshot shows the homepage of snips, described as "A POCKET BRAIN FOR YOUR DAILY LIFE". It features a large image of two smartphones displaying various apps, and a sign-up form with fields for "E-mail" and "City".

The screenshot shows the homepage of CYCLOP, featuring a red background with a large circular logo in the center. Below the logo, there's text about the app's purpose and how it uses algorithms to turn pictures into digital artworks. A "Subscribe" button and a "Your email..." input field are at the bottom.



La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad 0 &= a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b) \\ &\Rightarrow -(a.b) = a.(-b) \end{aligned}$$

Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad 0 &= (-a).(b + (-b)) = (-a).b + (-a).(-b) = -(a.b) + (-a).(-b) \\ &\Rightarrow a.b = (-a).(-b) \end{aligned}$$

Le produit d'un négatif et d'un négatif est positif

Dans \mathbb{R} , un carré est toujours positif

L'équation $X^2 + 1 = 0$ n'a pas de racine.



On appelle i une racine carrée de -1 : $i^2 = -1$

On définit l'ensemble des **nombres complexes** comme :

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

- ▶ x est la **partie réelle** de z , notée : $x = \Re(z)$
- ▶ y est la **partie imaginaire** de z , notée : $y = \Im(z)$



- $z = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- $z \cdot z' = zz' = (x + iy) \cdot (x' + iy') = x \cdot x' - y \cdot y' + i(x \cdot y' + x' \cdot y)$
- $x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$
- $(x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$
- Si $x + iy \neq 0$: $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}$
- ... donc $\frac{x' + iy'}{x + iy} = \frac{(x' + iy')(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} + i \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}$



Exercices

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $(5 + 6i) + (3 - 2i)$
2. $(4 - \frac{1}{2}i) - (3 - \frac{5}{2}i)$
3. $(3 + 2i)(5 - 3i)$
4. $(1 - \frac{i}{3})(2 + 6i)$
5. $2(4 + i)$
6. i^3
7. i^4
8. $\frac{1}{2+3i}$
9. $\frac{2+2i}{2-i}$
10. $\frac{3-5i}{3+2i}$



Somme de puissances

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \neq 0$;

$$\begin{aligned} b^{n+1} - a^{n+1} &= (b-a)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \dots + b^1a^{n-1} + a^n) \\ &= (b-a) \sum_{k=0}^n b^{n-k}a^k = (b-a) \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k} \end{aligned}$$

avec $a^0 = b^0 = 1$.

$$n = 0 : \quad b - a = (b - a) \times 1$$

$$n = 1 : \quad b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$$

$$n = 2 : \quad b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$$

Conséquence : pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \geq 0$,

$$z^{n+1} - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^n)$$

et donc, si $z \neq 1$,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Somme de puissances : démonstration

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \neq 0$;

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \dots + b^1a^{n-1} + a^n)$$

Posons $S = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \dots + b^1a^{n-1} + a^n$. On a :

$$(b-a)S = bS - Sa$$

$$\begin{aligned} &= (b^{n+1} + b^n a + b^{n-1}a^2 + \dots + ba^n) \\ &\quad - (b^n a + b^{n-1}a^2 + \dots + ba^n + a^{n+1}) \end{aligned}$$

$$= b^{n+1} - a^{n+1}$$

Le binôme de Newton

Pour tous nombres complexes a et b et tout nombre entier $n \neq 0$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$.

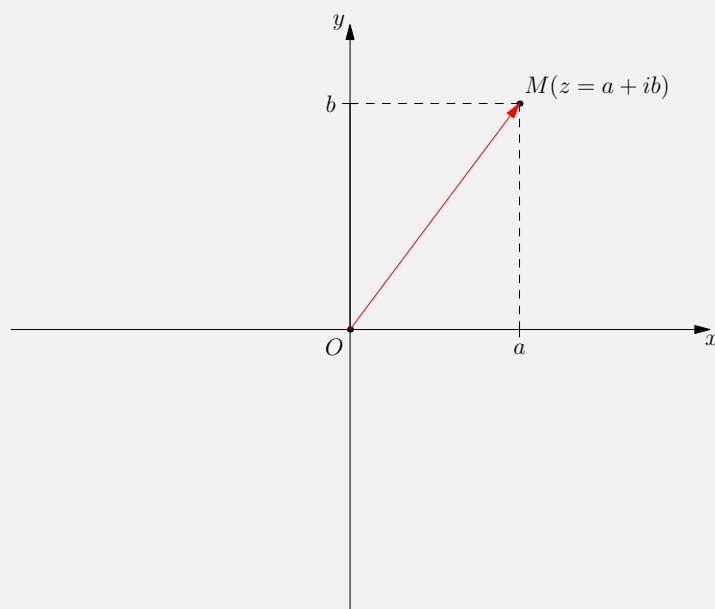
- ▶ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ▶ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- ▶ $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

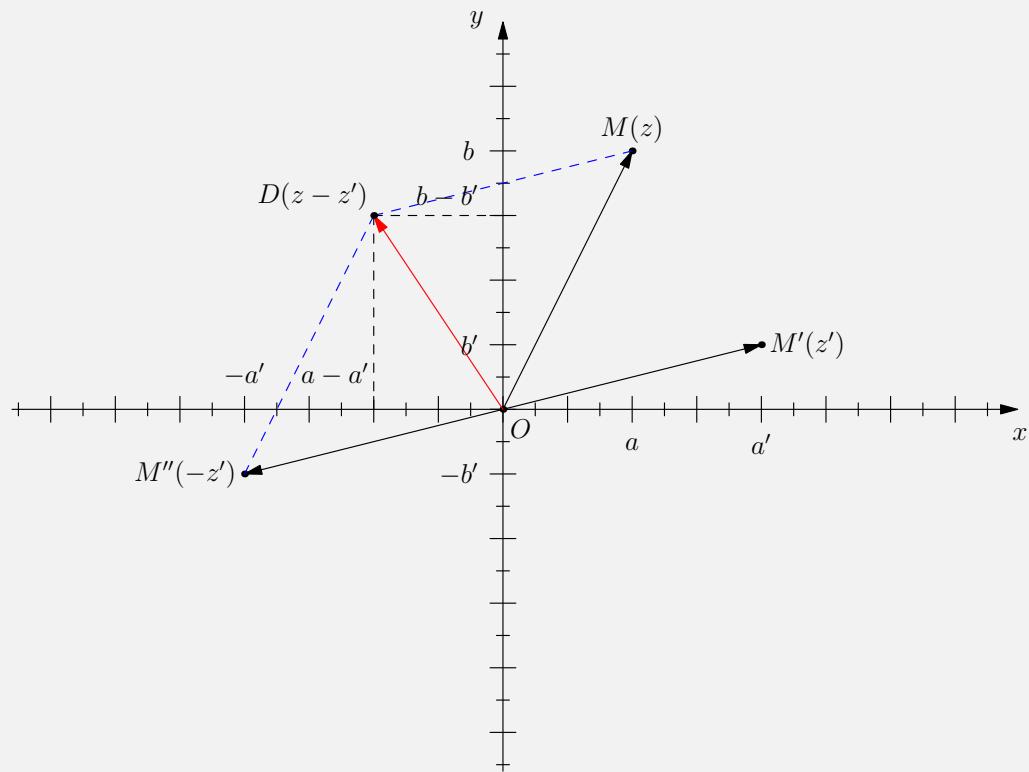
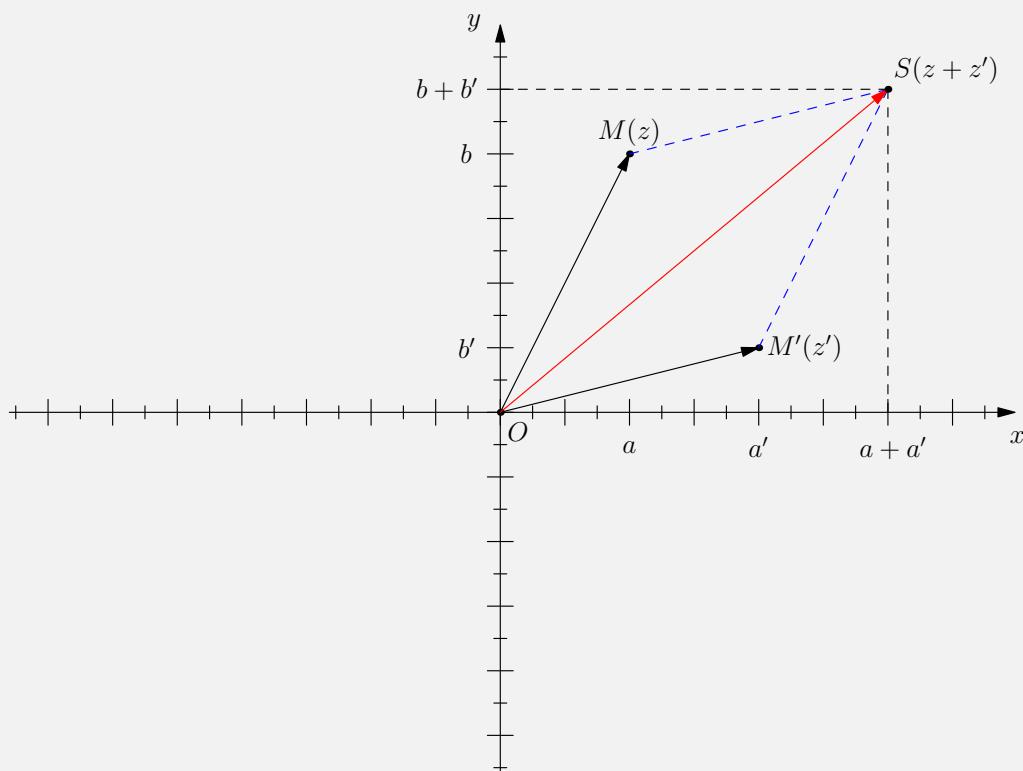
Exercice : Soit $z = 2 - i$. Mettre z^4 , puis $1 + z + z^2 + z^3$ sous la forme $x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.



Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Le nombre complexe z s'appelle **l'affixe** du point M de coordonnées (a, b) dans le plan.

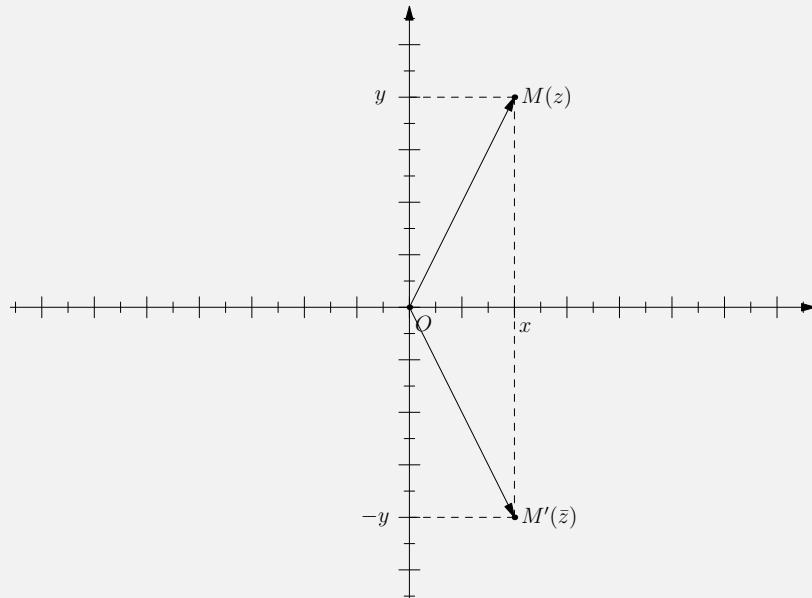




Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

On appelle **nombre complexe conjugué de z** , le nombre :

$$\bar{z} = x - iy$$



Conjugué : règles de calcul

$$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy$$

- ▶ $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ et $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$
- ▶ $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- ▶ $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- ▶ $z \in i\mathbb{R} \iff z + \bar{z} = 0$
- ▶ $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{(z)} = z, \quad \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- ▶ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

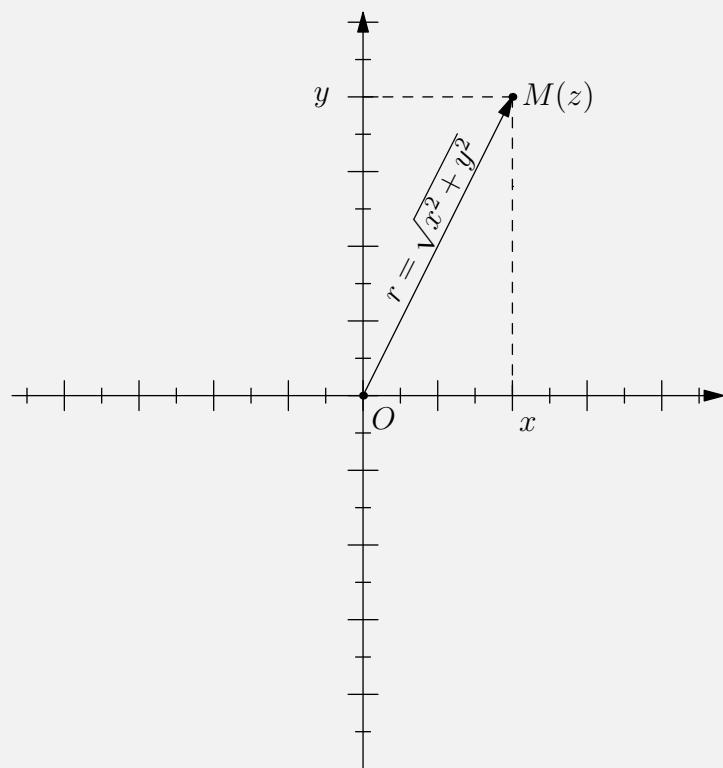
Exercice : a) Calculer $\overline{2 + 3i}$. b) Résoudre $z + 2\bar{z} = 0$.



On appelle **module** du nombre complexe z , le nombre **réel** :

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$, $|x| \leq |z|$, $|y| \leq |z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$; $|1/z| = 1/|z|$; $|z/z'| = |z|/|z'|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$



Proposition : Tout nombre complexe a deux racines carrées opposées.

Exemple : trouver les racines carrées de $3 + 4i$

On cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = 3 + 4i$

- $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 + 4i$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 3 \\ 2xy &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{cases}$$

D'où les deux solutions : $(x, y) = (2, 1)$ et $(x, y) = (-2, -1)$



Pour trouver les racines d'un nombre complexe $a + ib$,
on pose : $(x + iy)^2 = a + ib$

- $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= a & (1) \\ 2xy &= b & (2) \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) permettent de calculer x^2 et y^2

L'équation (2) permet de trouver le signe de x et y (2 solutions possibles)

Exercice : Trouver les racines carrées des nombres complexes $4 + 3i$ et -4 .



$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0 \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

Les racines sont donc les nombres complexes z , tels que

$z + \frac{b}{2a}$ soit une racine carrée de $\frac{\Delta}{4a^2}$



Quand a , b et c sont **réels**, on a les solutions (complexes) suivantes :

Si $\Delta > 0$, les deux racines sont :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta < 0$, les deux racines sont :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

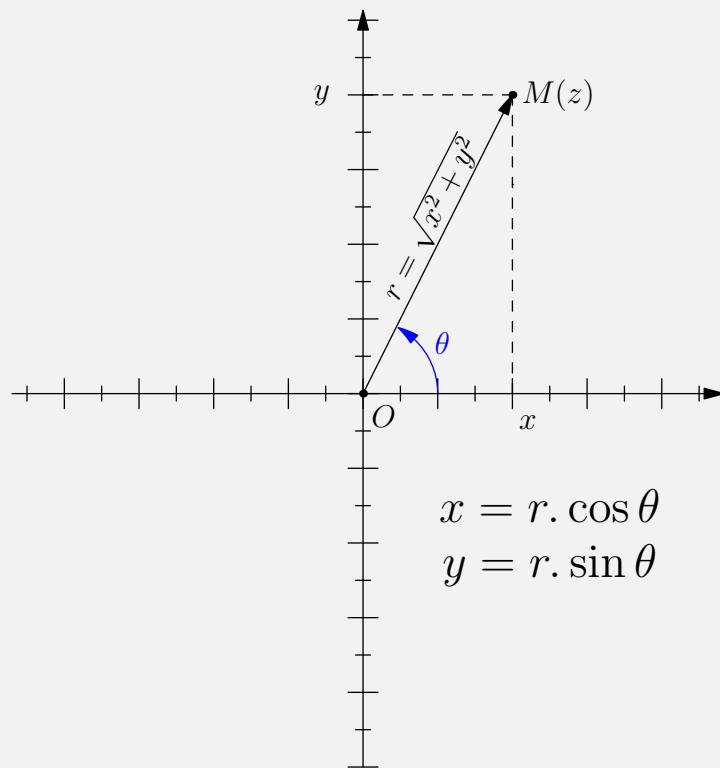
Si $\Delta = 0$, il y a une racine double :

$$z = -\frac{b}{2a}$$

Exercice : Résoudre dans \mathbb{C} les équations

$$2z^2 - 2z + 1 = 0 \quad z^2 + 2z + 5 = 0.$$





$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$



On appelle **argument** du nombre complexe $z = x + iy$, la seule solution θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, du système :

$$\begin{cases} \cos \theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow z = x + iy = |z| \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Notation : $\theta = \arg(z)$



Un nombre complexe peut s'écrire de deux manières :

1. algébrique : $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

2. trigonométrique :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r = |z| \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \theta = \arg(z) < 2\pi$$



Exemples

► $z = 1 + i \quad r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Donc :

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

► $z = 3 + i\sqrt{3} \quad r = |z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Donc :

$$z = 2\sqrt{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

► $z = 1 - i\sqrt{3} \quad r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Donc :

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right)$$



Moyen mnémotechnique

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Exercice : Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

1. $z_1 = -3 + 3i$
2. $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$
3. $z_3 = 3\sqrt{3} - 3i$
4. $z_4 = 8i$
5. $z_5 = -2$



Soit : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$

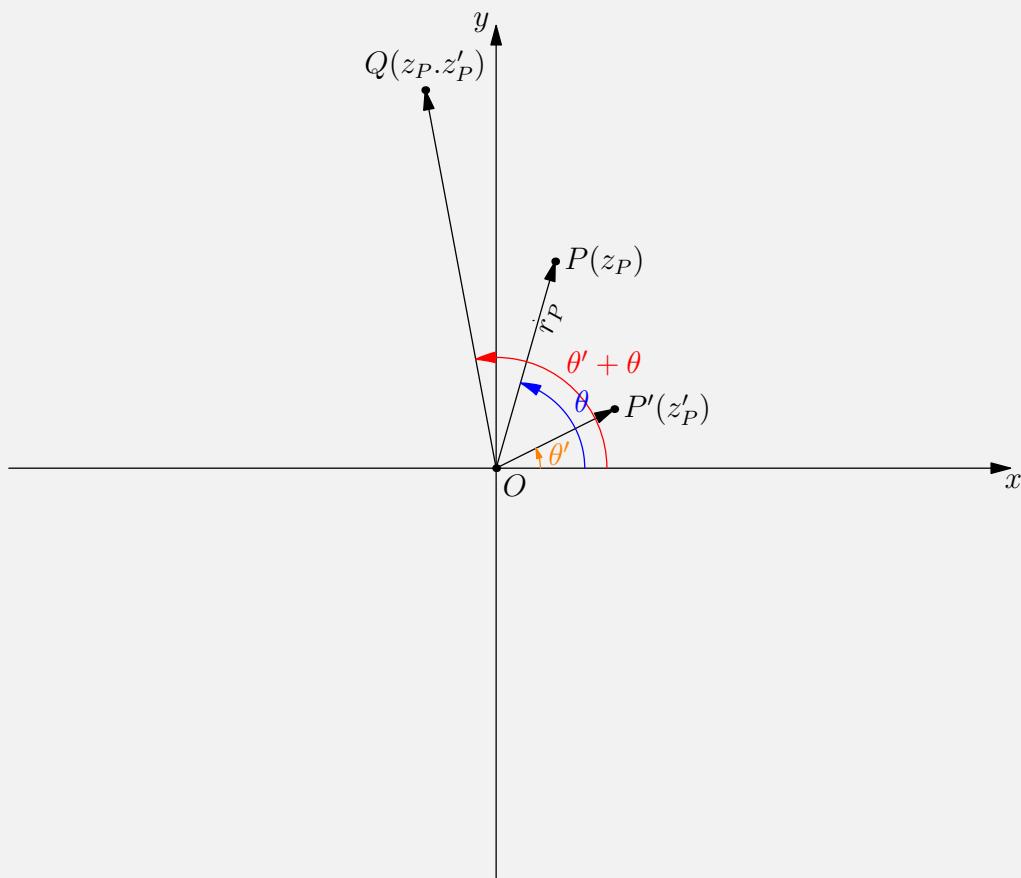
$$\begin{aligned} zz' &= rr' [(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')] \\ &= rr' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')] \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

Règle : Pour multiplier deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- ▶ On multiplie les modules
- ▶ On additionne les arguments





- $$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{r \cdot (\cos \theta - i \sin \theta)}{r^2} = \frac{r \cdot (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))}{r^2}$$
 $\hookrightarrow \arg(z^{-1}) = -\arg(z)$
- $$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r} (\cos(\theta' - \theta) + i \sin(\theta' - \theta))$$
 $\hookrightarrow \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)$

Règle : Pour diviser deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- On divise les modules
- On soustrait l'argument du dénominateur de l'argument du numérateur

Puissance entière d'un nombre complexe.

Si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{z.z \dots z}_{n\text{-fois}} \\ &= \underbrace{r.r \dots r.}_{n\text{-fois}} \underbrace{(\cos \theta + i \sin \theta).(\cos \theta + i \sin \theta) \dots (\cos \theta + i \sin \theta)}_{n\text{-fois}} \\ &= r^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \end{aligned}$$



Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $-n \in \mathbb{N}$

$$z^n \cdot z^{-n} = z^n \cdot (r^{-n} \cdot (\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta))) = 1$$

$$\begin{aligned} z^n &= \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{r^{-n} \cdot (\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta))} \\ &= r^n \cdot (\cos(-n\theta) - i \sin(-n\theta)) \\ &= r^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n \arg(z)$$



Ecriture trigonométrique et racine carrée

On vient de voir

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \implies z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

→ z admet pour racines carrées $\pm \sqrt{r}(\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2))$.

Exercice :

1. Mettre sous la forme trigonométrique le nombre complexe $\Delta = 1 + i\sqrt{3}$.
2. Trouver un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.
3. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $\frac{z^2}{4} + z - i\sqrt{3} = 0$



Formule de Moivre :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$



► Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

► Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on définit

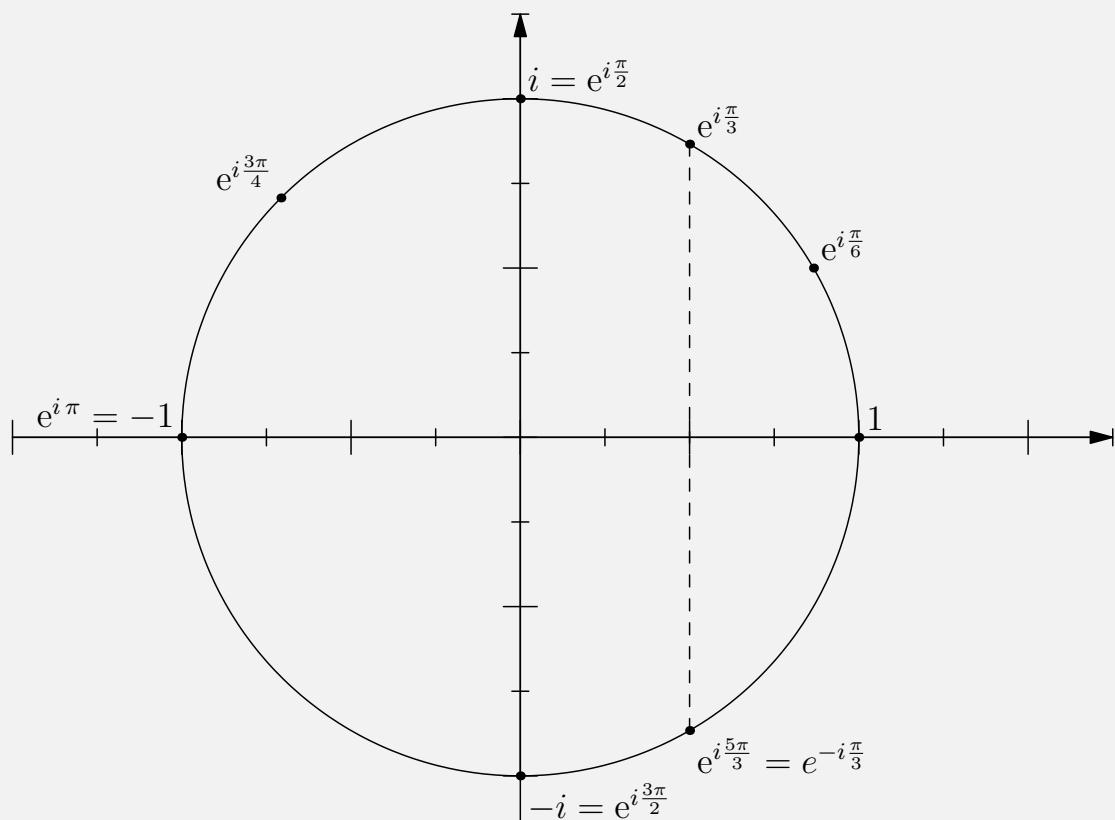
$$e^z = e^x e^{iy}.$$

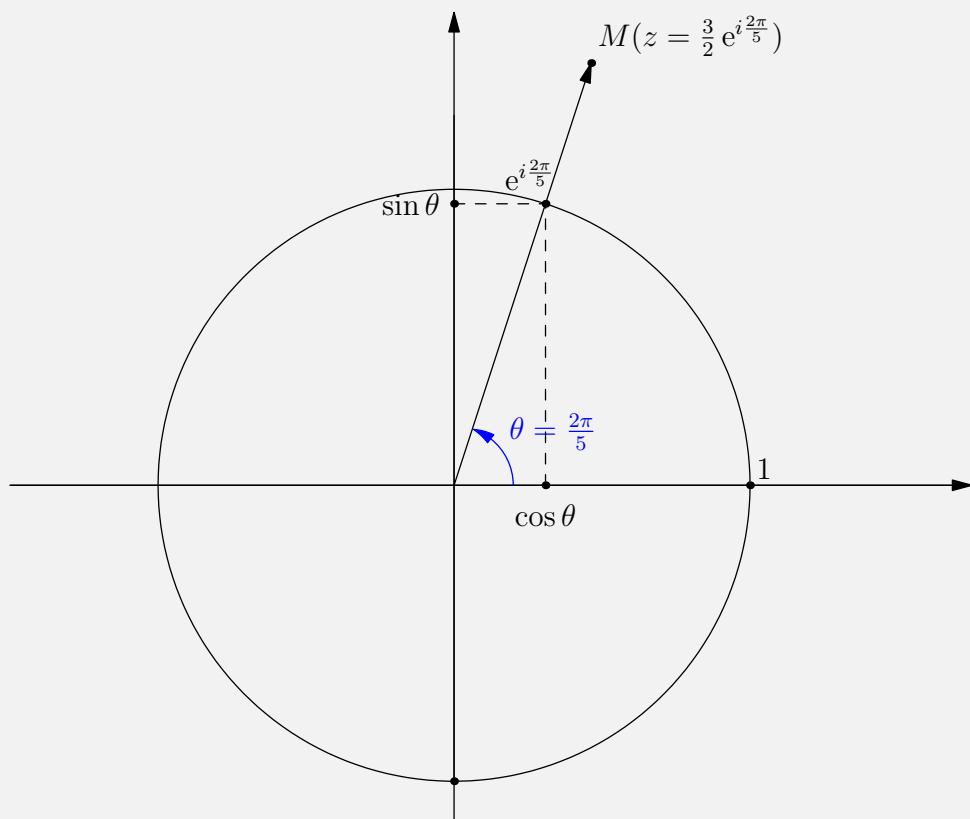
$$e^z e^{z'} = e^{z+z'} \quad ; \quad 1/e^z = e^{-z} \quad ; \quad e^z / e^{z'} = e^{z-z'} \quad ; \quad (e^z)^n = e^{nz}$$

$$\hookrightarrow e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \qquad 1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$$

$$e^{i\theta} / e^{i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Les nombres complexes de module 1





On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$
3. exponentielle : $z = r.e^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$

- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$

Racine n -ième d'un nombre complexe

Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **racine n -ième** de z , le nombre complexe :

$$a = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

tel que :

$$z = a^n$$



$$z = a^n$$

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que : $0 \leq k \leq n - 1$



Théorème : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, tout nombre complexe $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, non-nul, a n racines n -ièmes :

$$a_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$0 \leq k \leq n-1$$



Racines n -ièmes de l'unité

Si $z = 1$: $r = 1, \theta = 0$.

Les nombres complexes :

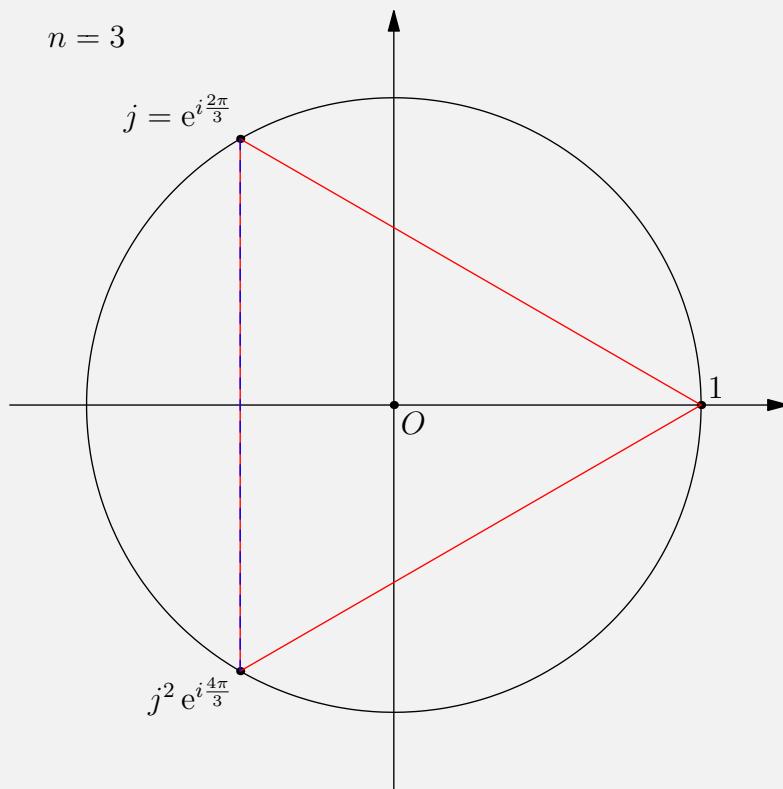
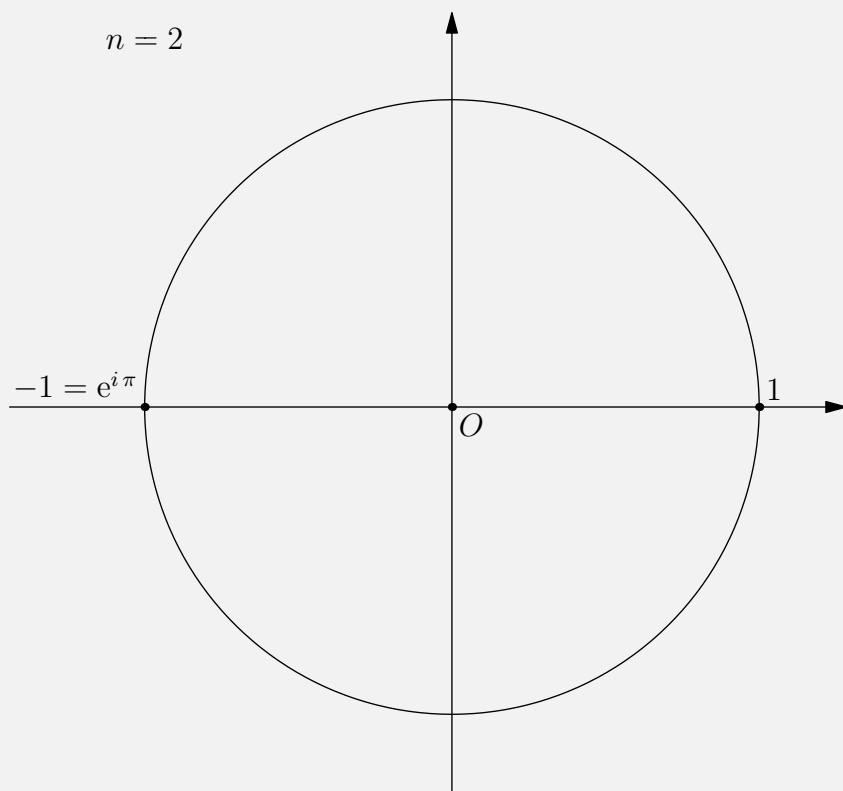
$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$$

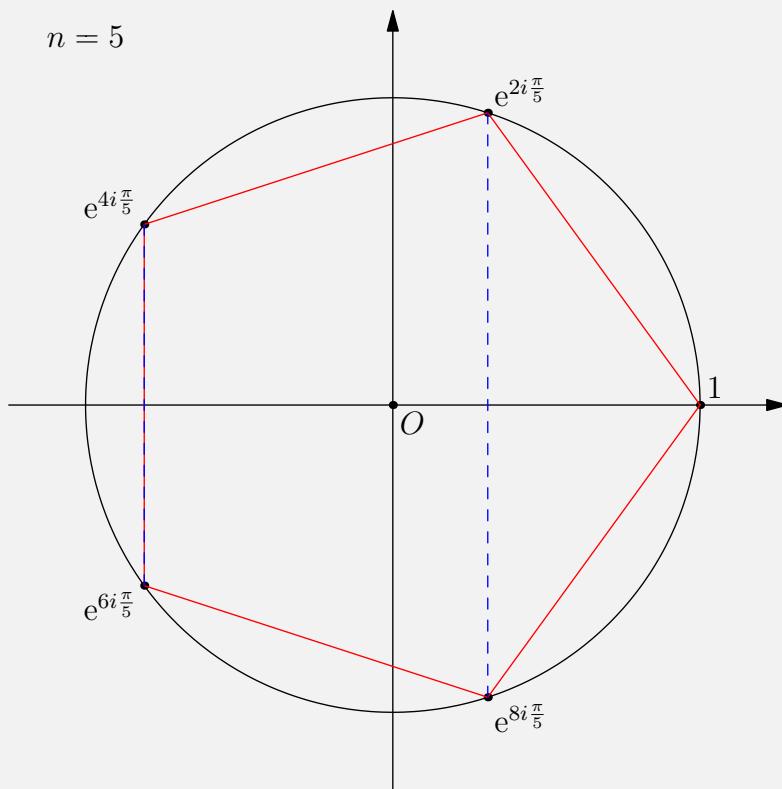
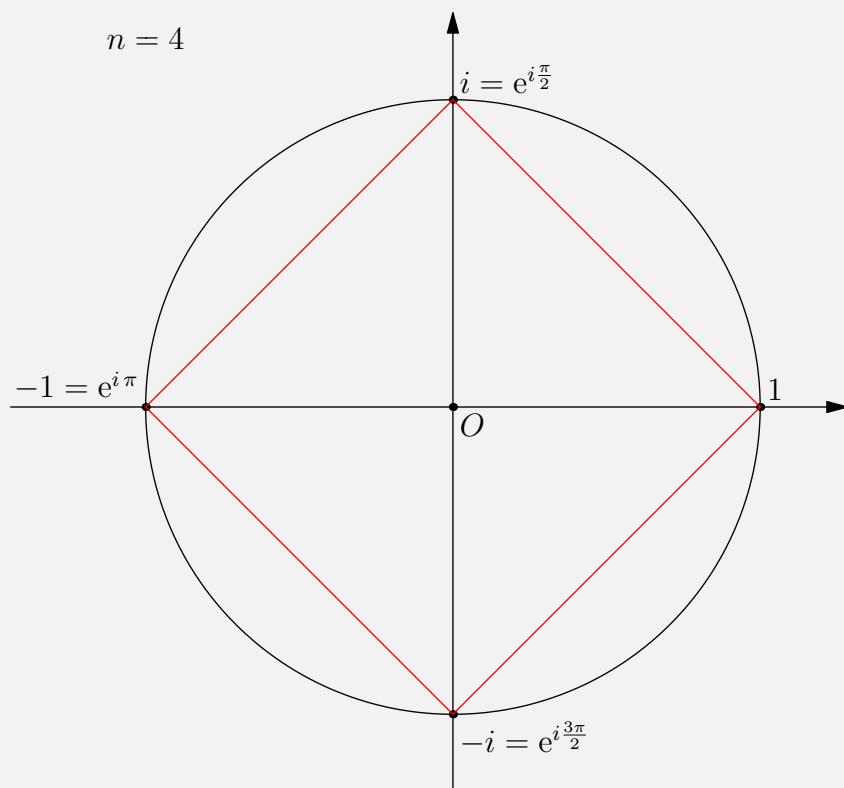
$$0 \leq k \leq n-1$$

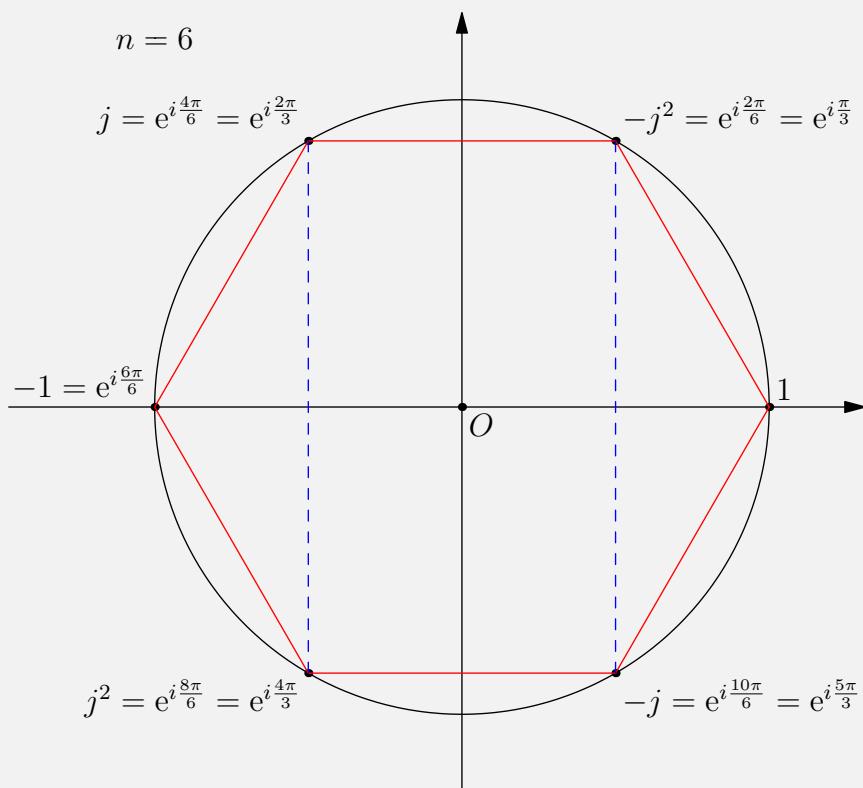
s'appellent les racines n -ièmes de l'unité.

Pour $0 \leq k \leq n-1, \omega_k^n = 1$

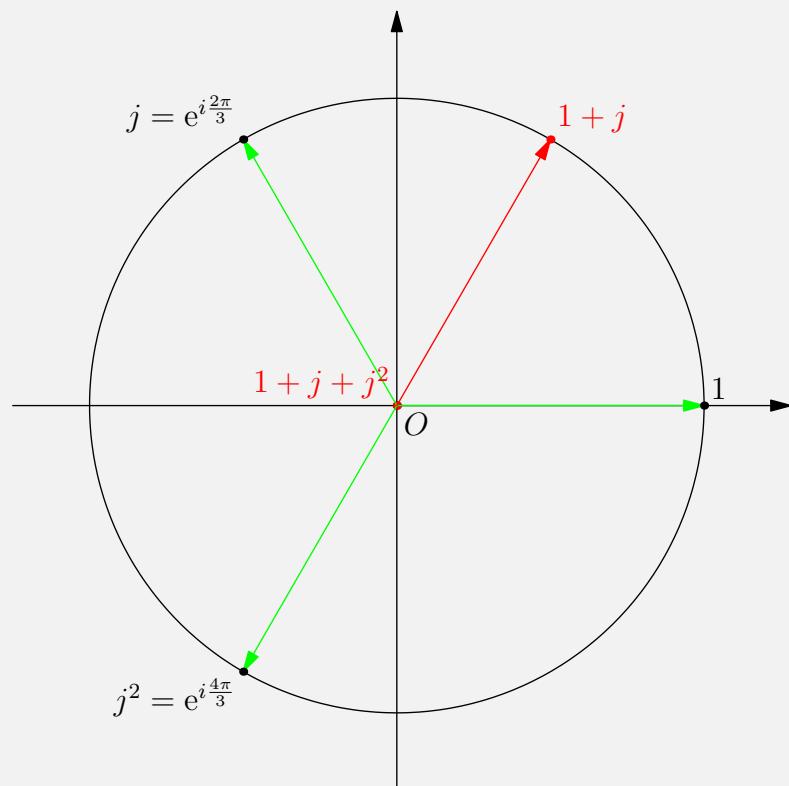








Somme des racines n -ièmes de l'unité



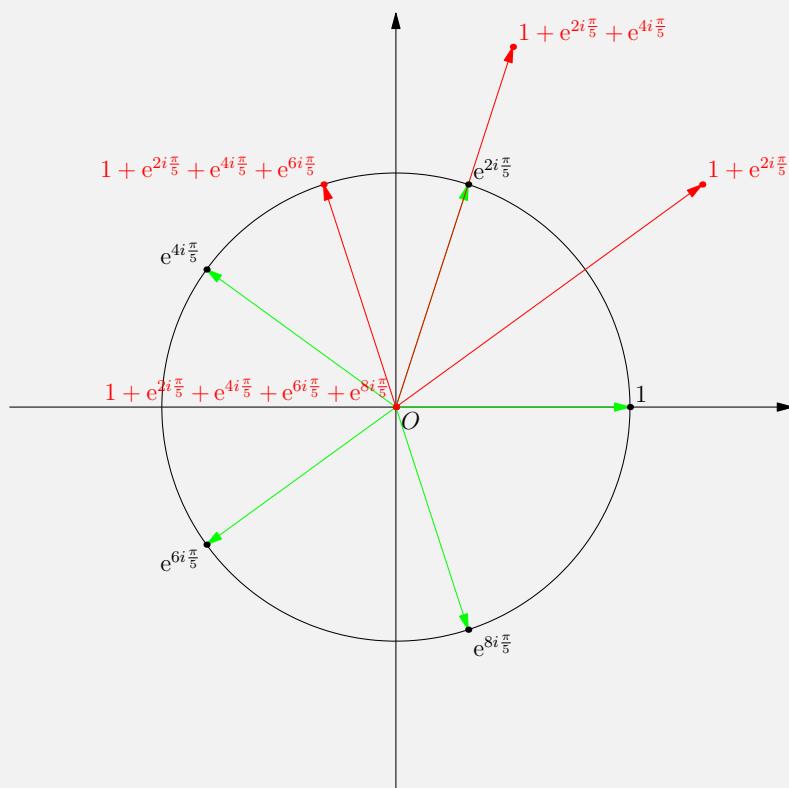
Pour $n = 3$:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + (e^{i\frac{2\pi}{3}})^2 = \frac{1 - (e^{i\frac{2\pi}{3}})^3}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

Pour n quelconque :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = \frac{1 - (e^{i\frac{2\pi}{n}})^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle



Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ et a et b deux racines n -ièmes de z .

$$a^n = b^n = z$$

Soit :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 \Leftrightarrow a = b \cdot \omega_k$$

Où ω_k , $(0 \leq k \leq n-1)$ est une racine n -ièmes de l'unité.

Théorème : On obtient les n racines n -ièmes d'un nombre complexe en multipliant l'une d'entre elles par les n racines n -ièmes de l'unité.



Exemple : soit à calculer les racines 7-ièmes de $z = \frac{3}{2} e^{i \frac{5\pi}{12}}$

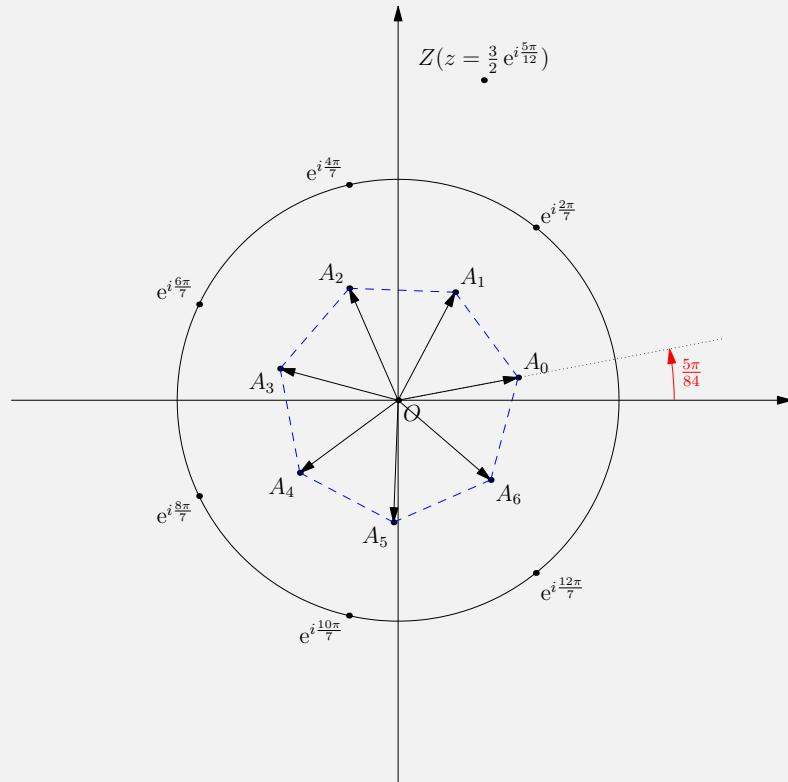
On doit trouver a tel que $a^7 = z$.

$$|a| = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} \quad a_0 = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i \frac{5\pi}{7 \times 12}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i \frac{5\pi}{84}}$$



Les autres racines sont obtenue en multipliant a_0 par les six racines 7-ièmes de l'unité (différentes de 1) :

- $a_1 = a_0 e^{i \frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i \frac{29\pi}{84}}$
- $a_2 = a_0 e^{i \frac{4\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84} + \frac{4\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i \frac{53\pi}{84}}$
- $a_3 = a_0 e^{i \frac{6\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84} + \frac{6\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i \frac{77\pi}{84}}$
- $a_4 = a_0 e^{i \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84} + \frac{8\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i \frac{101\pi}{84}}$
- $a_5 = a_0 e^{i \frac{10\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84} + \frac{10\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i \frac{125\pi}{84}}$
- $a_6 = a_0 e^{i \frac{12\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i(\frac{5\pi}{84} + \frac{12\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i \frac{149\pi}{84}}$



Exercice : Donner les trois racines cubiques du même nombre complexe $Z = 1 + i$.

$$z \in \mathbb{C} \quad z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$$\Re(z) = \cos \theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\Im(z) = \sin \theta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$



Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

Transformation de $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$ en une somme des sinus et cosinus des multiples de θ .

→ utilité :

primitives des fonctions $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$: inconnues

primitives des fonctions $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$: connues



Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned} 2^3 \cos^3 \theta &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\ &= e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \\ &= (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ &= 2\cos 3\theta + 6\cos \theta \end{aligned}$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

- ▶ On écrit : $2^n \cos^n \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$
- ▶ On développe $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$ avec la formule du binôme
- ▶ On regroupe chaque $e^{ki\theta}$ avec son conjugué $e^{-ki\theta}$



Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned} (2i)^3 \sin^3 \theta &= (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3 \\ &= e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta} \\ &= (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= 2i\sin 3\theta - 6i\sin \theta \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$$

Exercice : Linéariser $\cos^4 \theta$ et $\sin^4 \theta$.



Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$\cos n\theta = \Re((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$$

$$\sin n\theta = \Im((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$$



Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + i \sin 4\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^4 \\ &= (\cos \theta)^4 + 4i(\cos \theta)^3 \sin \theta \\ &\quad + 6i^2 (\cos \theta)^2 (\sin \theta)^2 + 4i^3 (\cos \theta) (\sin \theta)^3 \\ &\quad + i^4 (\sin \theta)^4\end{aligned}$$

$$\cos 4\theta = (\cos \theta)^4 - 6(\cos \theta)^2 (\sin \theta)^2 + (\sin \theta)^4$$

$$\sin 4\theta = 4(\cos \theta)^3 \sin \theta - 4 \cos \theta (\sin \theta)^3$$

Exercice : Calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.



$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Théorème de d'Alembert

Théorème : Tout polynôme non-constant à coefficients complexes a au moins une racine complexe.

Corollaire : Tout polynôme de degré $n \geq 1$, à coefficients complexes, a n racines complexes.

Exemple : Le polyome

$$z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1$$

a pour racines $j, j^2, i, -i$.

Exercice : Soit $P(z) = z^3 - 3z^2 + 2z$ et $Q(z) = z^3 + z - 2$. Donner les racines complexes de P et Q (indication : on commencera par chercher les éventuelles racines évidentes $0, 1, -1, \dots$ et **factoriser**).

