Université Paris-Descartes.
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs : Partiel n^{o}3
Janvier 2008

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 4. Durée 2 h.

NB : *Ce sujet contient cinq questions à choix multiples et deux exercices. Pour chaque question du questionnaire à choix multiples, cinq réponses sont proposées : deux réponses sont exactes et trois réponses sont fausses. L'étudiant répondra en cochant, sur la feuille de réponse jointe à l'énoncé, les deux cases des réponses qu'il pense correctes. Les points ne seront accordés que si les deux réponses correctes, et elles seules, ont été cochées. Aucun point ne sera accordé si une seule réponse, même correcte, est cochée. La feuille de réponse ne doit pas être raturée.*

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Question 1

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A : A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

B : Il existe des réels u et v tels que $A^2 + uA + vI = 0$.

C : L'ensemble des solutions du système

$$A.X = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

D : $\det({}^tA) = -5$.

E : Le système

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

n'a pas de solution.

Question 2

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où θ est un nombre réel.

A : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$M^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

B : ${}^tM = M^{-1}$ et $\det(M) = 1$.

C : M est la matrice dans la base canonique de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y, -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$$

D et E →

D : Le système

$$A.X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

n'a pas de solution.

E : M est inversible et $M^{-1} = M$.

Question 3

Soient A, B, C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A : $\det(A) = 45$.

B : $\det(BC) = 1$.

C : $\det(CB) = 1$.

D : $\det(B) = 0$.

E : $\det(A^{-1}) = 0$.

Question 4

Soient

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - t = 0\} \\ F & = & \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 0 \text{ et } y + z + t = 0\} \end{array}$$

deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

A : La famille de vecteurs $\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^4$ est une base de E.

B : Le vecteur $(-1, 1, -1, 0)$ appartient à $E \cap F$.

C : La famille de vecteurs $\{(0, -1, 0, 1), (3, 0, 3, 0)\}$ de F est libre dans F.

D : $\dim(E) = \dim(F) = 2$

E : E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Question 5

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

A : Il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{G} \cup \mathcal{L}$.

B : Pour que $\mathcal{L}$ engendre E, il suffit qu'elle possède n éléments.

C : Si $\mathcal{L}$ possède au plus $n - 1$ éléments, alors $\text{Vect}(\mathcal{L}) = E$.

D : $\mathcal{G}$ possède au moins $n + 1$ éléments.

E : $\mathcal{B}$ est stable par combinaison linéaire.

Remarque : Les exercices suivants nécessitent des réponses rédigées avec le plus grand soin. Une grande partie de la note portera sur la qualité et la clarté de la rédaction.

Exercice 1

On considère la fonction f, définie pour $x \neq 0$ par :

$$f(x) = (1 - x + x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

1. Rappeler le développement limité en 0, à l'ordre 3, de la fonction $u \mapsto \log(1 + u)$.
2. Montrer qu'au voisinage de 0, on peut écrire :

$$\frac{1}{x} \log(1 - x + x^2) = -1 + \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + x^2 \varepsilon(x)$$

   avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.
3. En déduire le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0, et qu'on peut prolonger par continuité f en 0.
4. Montrer que la fonction prolongée est dérivable en 0 et que sa dérivée en 0 vaut $\frac{1}{2e}$.

Exercice 2

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs suivants :

$$a_1 = (1, 0, 1, 1, 1), \quad a_2 = (2, 1, 3, 0, 2), \quad a_3 = (1, -1, 1, 1, 1).$$

1. Montrer que a_1, a_2 et a_3 forment une base de E.
2. Compléter cette famille pour obtenir une base de $\mathbb{R}^5$.
3. En déduire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^5$.

Nom. :

Prénom :

Numéro carte étudiant :

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					