Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Contrôle continu n°1
14 Octobre 2013

L1 : Licence Sciences et Technologies,
mention Mathématiques, Informatique et Applications

Correction succincte (Noté sur 24)

Exercice 1 $\boxed{4}$

1) $\boxed{1}$ En passant à la forme conjuguée, on obtient $a = \frac{4}{1+\sqrt{3}i} = 1 - \sqrt{3}i$.
2) $\boxed{1.5}$ **(0.5 pour le module, 0.5 l'argument, 0.5 la forme trigo.)** $a = 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2e^{-i\pi/3}$.
3) $\boxed{1.5}$ **(1 pour la forme trigo, 0.5 la forme algèbrique.)** $a^4 = 16e^{-i4\pi/3} = 16(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

Exercice 2 $\boxed{5}$

1) $\boxed{0.5}$ $\omega + \frac{1}{\omega} = e^{i2\pi/5} + e^{-i2\pi/5} = 2\cos(2\pi/5)$.
2) $\boxed{1}$ C'est la somme des racines 5ièmes de l'unité, donc $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
3) $\boxed{1.5}$ En remplaçant dans l'équation, et en mettant $\frac{1}{\omega^2}$ en facteur, on a
$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) - 1 = \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} + 2 + \omega + \frac{1}{\omega} - 1 = \frac{1}{\omega^2}\left(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4\right) = 0\,,$$
par la question précédente.
4) $\boxed{2}$ **(0.5 pour résoudre $x^2+x-1=0$, 0.5 pour le bon signe du cosinus, 1 pour le sinus.)**
On résout $x^2 + x - 1 = 0$, ce qui donne $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$, on déduit que
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \text{et } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}},$$
par la formule $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$, le sinus de $\pi/5$ étant > 0.

Exercice 3 $\boxed{4}$

(E_1) $\boxed{2}$ **(1 pour la méthode, 1 pour le calcul)** On cherche z sous la forme $z = a + ib$. Cela conduit au système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 &=& -2, \\ 2ab &=& 1, \\ a^2 + b^2 &=& \sqrt{5}. \end{array}\right.$$
On en déduit que les solutions sont
$$\left\{ Z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}; Z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \right\}.$$
(E_2) $\boxed{2}$ **(1 pour la méthode, 1 pour le calcul)** On calcule le discriminant :
$$\Delta = -2 + i\,.$$
On a calculé les racines de Δ à la question précédente. On en déduit que les solutions sont :
$$\left\{ \frac{-1+Z_1}{2}; \frac{-1+Z_2}{2} \right\}.$$

Exercice 4 $\boxed{6}$

1) a) $u_n = \dfrac{-3\left(1-\dfrac{4}{3n^2}\right)}{1+\dfrac{1}{n^2}} \to -3$ $\boxed{0.5}$

b) $v_n = \dfrac{n^2}{\log n} \cdot \dfrac{1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}}{1-\dfrac{2}{\log n}} \to +\infty$ $\boxed{1}$

c) $w_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot \dfrac{1-\dfrac{2}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{n^3}{2^n}} \to 0$ $\boxed{0.5}$

2) a) $f(x) = x^3 + 3\log(x) \xrightarrow[x \to 0_+]{} -\infty$ $\boxed{0.5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0_+} g(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}}{e^{-y}} = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\dfrac{1+y}{y^2}\right) e^y = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{e^y}{y} = +\infty$ $\boxed{1}$

3) $\boxed{1.5}$ **(0.5 s'ils comprennent que cela revient à chercher la limite en zéro, 0.5 s'ils écrivent que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et 0.5 s'ils parviennent à trouver $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$)**

Oui, h est prolongeable par continuité en zéro, car

$$h(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 + x\dfrac{x}{\sin x}}{1+\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \,.$$

4) $\boxed{1}$ **(0.5 pour le calcul de la somme et 0.5 pour la limite)** $S_n = \dfrac{3}{4}\left(1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n+1}\right) \to \dfrac{3}{4}$.

Exercice 5 $\boxed{5}$

1) $\boxed{1}$ **(0.5 pour la continuité et 0.5 pour la croissance)**

Les fonctions $x \mapsto x-1$ et exp sont continues et croissantes sur $\mathbb{R}$, donc il en est de même de f.

2) $\boxed{0.5}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$.

3) Comme $\lim u_n = l$ et comme f est continue en l, on a $f(l) = l$ $\boxed{0.5}$. De plus, avec la propriété admise, on a nécessairement $l = 1$ $\boxed{0.5}$.

Rq : S'ils passent de $\lim u_n = l$ à $\lim f(u_n) = f(l)$ sans mentionner la continuité de f, alors ne pas mettre le demi-point correspondant. Aussi, s'ils n'utilisent pas la fonction f, mais retrouvent $\lim u_{n+1} = \lim e^{u_n - 1} = e^{l-1}$ par composition des limites (en détaillant les étapes), alors mettre ce demi-point.

4) • Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété (P_n) : "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$" est vraie.

⋆ **Initialisation :** $u_0 = 1/2$ donc (P_0) est vraie.

⋆ **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (P_n) est vraie, i.e. $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Comme f est croissante, il vient $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$, c'est-à-dire $e^{-1} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ donc (P_{n+1}) est vraie.

⋆ **Conclusion :** Le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. $\boxed{1}$

(0.5 si la récurrence est bien rédigée et 0.5 si le raisonnement est correct)

• La suite (u_n) est croissante majorée donc converge $\boxed{0.5}$. Avec 3), on obtient $\lim u_n = 1$ $\boxed{0.5}$.

5) Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers un nombre l. Comme elle est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$. En passant à la limite, il vient $l \geqslant u_0 > 1$ ce qui contredit 3). Ainsi, (u_n) diverge et comme elle est croissante, on a nécessairement $\lim u_n = +\infty$. $\boxed{0.5}$