Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Corrigé de l'examen de 2$^{\text{e}}$ session

---

Exercice 1.

1. Par récurrence. $u_0 = 1 > 0$, si on suppose que : $\forall k \quad 0 \le k \le n, \quad u_k \ge 0$, alors :
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+3u_n} \ge 0$$
2. Tous les termes étant positifs, on peut calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1+3u_n} \le 1$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \le u_n$ et la suite est donc décroissante.
3. Théorème du cours : toute suite décroissante et minorée converge ; cette suite est décroissante et minorée par 0, elle converge donc.
4. Puisque la suite est convergente et que la fonction associée : $f = \dfrac{x}{1+3x}$ est continue pour $x \ge 0$, la limite ℓ vérifie l'équation :
$$\ell = \frac{\ell}{1+3\ell}$$
dont l'unique solution est : $\ell = 0$

Exercice 2.

1. Par le cours on sait que : $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$.
2. D'après la première question, le développement limité de e^{-x}, à l'ordre 4 en 0 est :
$e^{-x} = 1 + \dfrac{-x}{1!} + \dfrac{(-x)^2}{2!} + \dfrac{(-x)^3}{3!} + \dfrac{(-x)^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) = 1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$
On peut additionner deux développement limités, donc :
$e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + \dfrac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x)$
3. En utilisant le développement limité trouvé à la question précédente, on écrit :
$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} - 1 = \frac{2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x) - 2}{x^2} - 1 = \frac{x^2}{12} + x^2\varepsilon(x)$$
Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} - 1\right) = 0$

Exercice 3.

1. On écrit la combaison linéaire nulle suivante : $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{u}_3 = \vec{0}$
Soit : $\alpha(0, 1, 3) + \beta(2, 0, -1) + \gamma(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$, ce qui donne le système d'équations :
$$\begin{cases} 2\beta + 2\gamma & = & 0 \\ \alpha & = & 0 \\ 3\alpha - \beta + \gamma & = & 0 \end{cases}$$
$\alpha = 0$, le système d'équations se resoud en ajoutant la première à deux fois la troisième, ce qui donne $4\gamma = 0$ et donc, $\beta = 0$. Le système est libre.
2. La combinaison linéaire nulle donne le système d'équations :
$$\begin{cases} \alpha - 2\beta & = & 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 7\gamma & = & 0 \\ 3\alpha + \beta + 7\gamma & = & 0 \end{cases}$$
En soustrayant la deuxième équation de la troisième, on retrouve la première équation. Le système de vecteurs est donc lié.
Si on donne, arbitrairement, la valeur 2 à α et 1 à β, on trouve -1 pour γ. La relation de dépendance linéaire entre les trois vecteurs est donc : $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Exercice 4. On calcule le déterminant de la matrice : $\det(A) = 2 \neq 0$, la matrice est donc inversible.
Le plus simple est d'inverser le système :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

On obtient le système : $\begin{cases} y+z &= X \\ x+z &= Y \\ x+y &= Z \end{cases}$

On soustrait la troisième équation de la deuxième : $z - y = Y - Z$ et on soustrait cette dernière équation de la première, on obtient : $2z = X + Y - Z$

En reportant dans les autres équations, on obtient de même : $2y = X - Y + Z$
$2x = -X + Y + Z$

L'inverse de la matrice A est donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit le nombre complexe $z = i\left(\dfrac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right)$.

1. Si pour $k \in \mathbb{Z}$, $\quad \alpha = 2k\pi, \quad e^{i\alpha} = 1$: z ne serait alors pas défini.
2. Un nombre complexe est réel si, et seulement si, il est égal à son conjugué.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= -i\left(\frac{1+e^{-i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}}\right) \\ &= -i\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}}\left(\frac{1+e^{-i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}}\right) \\ &= -i\left(\frac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1}\right) \\ &= i\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right) \\ &= z \end{aligned}$$

z est donc réel.

Exercice 6.

1. Théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$: soit f une fonction définie est ***continue*** sur l'intervalle ***fermé*** $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et ***dérivable*** sur l'intervalle ***ouvert*** $]a,b[$, il existe alors $c \in]a,b[$, tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

2. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arcsin(t) \end{array}$

   (a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in [0,1[$.

   (b) $\forall x \in [0,1[$, la fonction arcsin est continue sur l'intervalle $[0,x]$ et dérivable sur l'intervalle $]0,x[$, le théorème des accroissements finis s'applique donc : $\exists c \in]0,x[$, tel que :

$$\arcsin(x) - \arcsin(0) = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

   Puisque $c \in]0,x[, \quad \sqrt{1-c^2} > \sqrt{1-x^2}$.
   De plus $x < 1$ et $\arcsin(0) = 0$, donc :

$$\arcsin(x) = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$