Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Mathématiques et Calcul 1 : examen de rattrapage
Mardi 14 juin 2016

Durée : **1h30.**

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

On rappelle les développements limités suivants. Ils sont donnés au voisinage de 0 (n et p sont des entiers positifs quelconques).

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o\left(x^{2p}\right)\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o\left(x^{2p+1}\right)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

Barème uniforme : 2 points/question (l'exercice 1 en comportant 3), sauf : Exercice 2 (2) c) sur 3 points et Exercice 2 (3) c) sur 4 points.

Exercice 1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants

$$z_1=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3, \qquad z_2=-1-i\sqrt{3}, \qquad z_3=\frac{1}{1+i\tan(\theta)}$$

où $\theta\in]-\pi/2,\pi/2[$.

Solution.

- On a
$$z_1=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=\left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^3=i^3=-i$$
donc son module est 1 et un de ses argument est $-\pi/2$.
- On a $|z_2|=\sqrt{1+3}=2$ et $z_2=2(-1/2-i\sqrt{3}/2)=2e^{-i\pi/3}$ donc son module est 2 et un de ses argument est $-\pi/3$.
- On a
$$z_3=\cos(\theta)\frac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\cos(\theta)\frac{1}{e^{i\theta}}=\cos(\theta)e^{-i\theta}.$$
De plus, comme $\theta\in]-\pi/2,\pi/2[$, $\cos(\theta)>0$, donc le module est $\cos(\theta)$ et un de ses argument est $-\theta$.

□

Exercice 2.

(1) Soit $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 4x + 3\right)$.

a) Donner les racines de l'équation $f(x) = 0$.
b) Factoriser $f(x)$.
c) Donner le signe de $f(x)$ et fonction de x.

(2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n^2 + \dfrac{3}{4}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$.
b) Montrer que (u_n) est croissante.
c) Etudier la convergence de (u_n).

(3) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n^2 + \dfrac{3}{4}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $v_n \geq 4$.
b) Montrer que (v_n) est croissante.
c) Donner $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Solution.

(1) $\Delta = 1/4$, racines $r = \frac{1 \pm 1/2}{1/2} = \frac{1/2 \text{ ou } 3/2}{1/2} = 1$ ou 3. Donc $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x-3)$ et $f(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}\backslash[1,3]$, strictement négative sur $]1,3[$ et nulle en 1 et 3.

(2) a) Récurrence.
b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) \geq 0$ donc (u_n) croissante.
c) (u_n) est croissante et majorée par 1 donc converge vers une limite $\ell \leq 1$. Comme u_{n+1} tend vers ℓ, $\ell = \frac{1}{4}\ell^2 + \frac{3}{4}$ donc $f(\ell) = 0$, donc $\ell = 1$ ou 3, mais $\ell \leq 1$, donc $\ell = 1$.

(3) a) Récurrence.
b) $v_{n+1} - v_n = f(v_n) \geq 0$ donc (v_n) croissante.
c) (v_n) est croissante donc tend vers une limite finie ou $+\infty$. Si converge vers une limite L, comme v_{n+1} tend vers L, $L = \frac{1}{4}L^2 + \frac{3}{4}$ donc $f(L) = 0$, donc $L = 1$ ou 3, mais $L \geq 4$ car pour tout n, $v_n \geq 4$, ce qui est impossible. Donc $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

□

Exercice 3.

(1) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = e^{2x} - 2\sin(x) - \cos(\sqrt{2}x)$.

(2) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

(3) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$.

(4) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - x}{x^2}$.

Solution.

(1) $f(x) = 3x^2 + o(x^2)$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 3$

(3) $\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)} = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^2))(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

$\square$

Exercice 4. Soit $\mathscr{B} = \{\vec{u}_1 = (1, -1), \vec{u}_2 = (3, 2)\}$. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x + 3y) \end{array}$$

a) Montrer que f est linéaire.

b) Donner la matrice $M_{f,\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0}$ de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

d) Donner la matrice de passage $P = M_{Id,\mathscr{B},\mathscr{B}_0}$ de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$.

e) Donner la matrice P^{-1}.

f) Donner la matrice $M_{f,\mathscr{B},\mathscr{B}}$ de f dans la base $\mathscr{B}$.

Solution. a) $f(\alpha u + \beta v) = \ldots$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ c) liberté d) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e) On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ f) On a

$$\begin{aligned} M_{f,\mathscr{B},\mathscr{B}} &= P^{-1} M_{f,\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0} P \\ &= \begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6/5 & -17/5 \\ -2/5 & 14/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$