Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Mathématiques et Calcul : Contrôle continu n°2
18 Novembre 2013

L1 : Licence Sciences et Technologies,
mention Mathématiques, Informatique et Applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

NB : *Ce sujet contient 4 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.*

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

On rappelle les développements limités suivants. Ils pourront être utilisés au cours de ce contrôle continu. Ils sont donnés au voisinage de 0 (n et p sont des entiers quelconques).

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right)$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right)$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$$

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{3} + 2$.

1) Donner le domaine de définition de la fonction f et montrer qu'elle est continue sur ce domaine.
2) Calculer $f\left(-\sqrt{3}\right)$ et $f\left(\sqrt{3}\right)$.
3) En déduire que f s'annule sur l'intervalle $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$.
4) La fonction f s'annule-t-elle sur l'intervalle $\left]0, \sqrt{3}\right[$?

Exercice 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Donner un développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 3 des fonctions suivantes

   a) $\mathrm{sh}(x) + \dfrac{1}{1+x}$ *b)* $e^x\cos(2x)$

   c) $\ln(1+x+x^2)$ *d)* $\dfrac{\ln(1+x)}{1-4x}$

2) Donner un développement limité au voisinage de 0 de

   a) $\dfrac{1}{3-6x+3x^2}$ à l'ordre 2 *b)* $\dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 4

   c) $\tan(x)$ à l'ordre 3 *d)* $\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2

3) Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{1-\cos(x)}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x)-e^{x-x^2}}{x^3}$

4) On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+\mathrm{sh}(x))}{\sin(x)}$.
   À l'aide d'un développement limité, montrer que f est prolongeable par continuité en $x=0$.

Exercice 3 Déterminer les limites suivantes à l'aide d'une limite d'un taux d'accroissement.

1) $\lim_{x \to -2} \dfrac{e^x - e^{-2}}{x^2 + x - 2}$

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{x}$

3) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sin(\ln(x))}{x - 1}$

Exercice 4 On considère la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}(x)$.

1) Rappeler l'ensemble de définition de f et l'expression de la dérivée de la fonction f.

2) On se fixe un réel $x > 0$. Montrer qu'il existe c dans $]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = \dfrac{1}{1+c^2}$.

3) En déduire que pour tout $x > 0$,
$$\frac{1}{1+(x+1)^2} \leqslant f(x+1) - f(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

4) En déduire la limite
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(f(x+1) - f(x) \right).$$