Université René Descartes - Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 1ère année, 2016, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n° 3 : Limites - Continuité

Exercice 1. 1) Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions définies par les formules suivantes

$$a)\ f(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{4-3x}}, \quad b)\ g(x) = \sqrt{x^2+3x-4}, \quad c)\ h(x) = \ln(2x+5).$$

2) Pour chacune des fonctions suivantes, décrire le domaine D de définition naturel, puis détailler les opérations algébriques et les compositions en jeu pour justifier la continuité de la fonction sur D.

$$a)\ f(x) = \sqrt{x^3-2}, \quad b)\ g(x) = \ln\left((x-1)^2(x+2)^4\right), \quad c)\ h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-3}.$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes quand elles existent.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1), \quad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}, \quad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}, \quad e)\ \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, \quad f)\ \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x}\sin(x).$$

Exercice 3.

1) a - En utilisant la définition de la dérivée en 0 de la fonction $f(y) = \ln(1+y)$, montrer que $\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$.

b - En déduire $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

2) a - Déterminer la limite suivante $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

b - En déduire $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes quand elles existent.

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}, \quad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}, \quad c)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\tan x, \quad d)\ \lim_{x\to+\infty} x\sin x, \quad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

Exercice 5.

1) Etudier les limites suivantes.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \quad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}, \quad c)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}, \quad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}.$$

2) Etudier les limites suivantes en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \left(\lambda x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad b)\ \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-\lambda} - \frac{1}{(x-2)^2}\right), \quad c)\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+\lambda x+1}{x^2-1}.$$

Exercice 6. Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle I.

1) $x^7 - x^2 + 1 = 0, \quad I = [-2,\ 0]$.

2) $\sqrt[3]{x^3+6x+1} - 3x = 2, \quad I = \mathbb{R}$.

3) $\tan x = \frac{3}{2}x, \quad I =]\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}[$.

4) $e^x - 3\sqrt{x} = 0, \quad I = [0, 1]$.

5) $x + \sin x = \frac{1}{x^2+4}, \quad I = [0, \pi]$.

Exercice 7. Vrai ou faux ? Donner une preuve ou un contre-exemple.
1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Si $f(a) = 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que f soit croissante sur $[a, c]$.
2) Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.
3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f atteint sa borne inférieure sur $\mathbb{R}$.
4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, alors $f(\mathbb{R})$ est un segment.
5) Soit $f[a, b] \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée.

Exercice 8. Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Exercice 9. Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2$.
1) Calculer $P(-1)$ et $P(1)$. En déduire que P possède au moins une racine dans $[-1, 1]$.
2) P possède-t-il une racine dans $[0, 1]$?

Exercice 10. Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$. Montrer que P admet 3 zéros réels et encadrer chacun d'eux par deux entiers relatifs consécutifs.

Exercice 11. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x)| = |g(x)| \neq 0.$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$. Est-ce encore vrai si l'on enlève l'hypothèse "différent de 0" ?

Exercice 12. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue.
1) En étudiant l'application g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$, montrer que f admet au moins un point fixe (*i.e.* un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$).
2) On suppose de plus que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout $x \neq y$ dans $[a, b]$. Montrer que f admet un seul point fixe.

Exercice 13. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right); \quad b)\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Exercice 14. Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^{1/x}$.
1) Etudier la continuité de f sur son intervalle de définition.
2) La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

Exercice 15. On considère la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $]0, +\infty[$.
1) Soient les suites $u_n = \frac{1}{2\pi(n+1)}$ et $v_n = \frac{1}{2\pi(n+1/4)}$. Que valent $f(u_n)$ et $f(v_n)$?
2) Que peut-on en déduire pour la limite de f en 0^+ ?

Exercice 16. On rappelle que tout réel est limite d'une suite de rationnels, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
1) Montrer que si f est nulle sur $\mathbb{Q}$, alors f est identiquement nulle.
2) Si f et g sont égales sur $\mathbb{Q}$, que peut-on dire de f et g ?

Exercice 17. On s'intéresse aux fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous x et y réels.
1) Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(n) = an$ pour tout n entier naturel, puis pour tout n entier relatif.
2) Montrer que $f(x) = ax$ pour pour tout x rationnel, puis pour tout x réel (Indication : On rappelle que tout réel est limite d'une suite de rationnels).
3) Déterminer toutes les fonctions continues $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(x + y) = g(x)g(y)$ pour tous x et y réels (Indication : Commencer par démontrer que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x réel, puis on examiner le cas où f s'annule).