Mathématiques et calculs : Contrôle continu n°1
17 Octobre 2011
Durée : 1h30

Exercice 1

1) Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-i$

2) En déduire le module et l'argument de $z=\frac{z_1}{z_2}$.

3) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Correction exercice 1

1) $|z_1|=\left|\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{|\sqrt{6}-i\sqrt{2}|}{|2|}=\frac{\sqrt{\sqrt{6^2}+(-\sqrt{2^2})}}{\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$

Rappel : pour avoir l'argument on factorise le nombre complexe par le module, on identifie ensuite les angles remarquables dans la parenthèse. La partie réelle corresponds au cosinus et la partie imaginaire au sinus (se reporter à un tableau des angles remarquables).

$$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}i)=\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{2}}-\frac{1}{2}i)=\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i)=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)$$

On a donc cos $\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{1}{2}$.

L'angle correspondant est $-\frac{\pi}{6}$ donc un argument de z_1 est $\theta=-\frac{\pi}{6}$.

$|z_2|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

On factorise z_2 par $\sqrt{2}$ on a donc :

$$z_2=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i)=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}i)=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$$

On a donc $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'angle correspondant est $-\frac{\pi}{4}$ donc un argument de z_2 est $\theta=-\frac{\pi}{4}$.

2) On sait que $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ donc $|z|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

On sait que $arg(\frac{z_1}{z_2})=arg(z_1)-arg(z_2)$ donc

$$arg(z)=-\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$$

3) On a $z=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ où $\cos\frac{\pi}{12}$ est la partie réelle de z et $\sin\frac{\pi}{12}$ est la partie imaginaire de z or $z=\frac{z_1}{z_2}$, calculons donc z et isolons la partie imaginaire et la partie réelle.

$$z=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2\mathrm{i}}=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(2+2\mathrm{i})}{2^2-(2\mathrm{i})^2}=\frac{2\sqrt{6}+i2\sqrt{6}-i2\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})}{8}$$

$$z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

On a donc la partie réelle égale à $\cos\frac{\pi}{12}$ et la partie réelle égale à $\sin\frac{\pi}{12}$.

Donc $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 2

Déterminer les racines carrées complexes de Z = $-8-6i$.

Correction exercice 2

On pose $Z=z^2$ et $z=x+iy$.
Donc $z^2=(x+iy)^2=x^2+i2\mathrm{xy}-y^2=-8-6\mathrm{i}$
La partie réelle corresponds donc a x^2-y^2 et la partie imaginaire corresponds à $2\mathrm{xy}$
Donc $x^2-y^2=-8$ et $2\mathrm{xy}=-6$
De plus $|Z|=|z^2|=x^2+y^2$
On a donc $x^2+y^2=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10$

On obtient donc un système à 3 équations :

$$\begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ 2\mathrm{xy}=-6 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ xy=-3 \\ y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 3 \end{cases}$$

Étant donné que les signes de x et y peuvent être négatifs ou positifs il y'a 4 possibilités de couples {(1;3),(1;-3),(-1;3),(-1;-3)} or il n'y a que 2 racines carrées, pour savoir quels couples choisir, on regarde la 2ème ligne du système d'équation et on remarque que le produit x y est négatif, donc les couples sont ceux ou les signes de x et y sont opposés.
Les couples sont donc $x=1, y=-3\ et\ x=-1, y=3$.
Les racines carrées complexes de Z sont donc $z_1=1-3\mathrm{i}$ et $z_2=-1+3\mathrm{i}$

Exercice 3

Soit $z=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1) Calculer z^2 sous la forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2) En déduire la forme exponentielle de z.
3) En déduire $\cos(\frac{3\pi}{8})$.

Correction exercice 3

1) $z=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

On utilise l'identité remarquable (a+b)²= a²+2ab+b² avec a= $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ *b=* $i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ *sans oublier que* $i^2=-1$ *quand on simplifie l'équation.*

$z^2=(\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}})^2$

$z^2=2-\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}-2$

$z^2=-2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{(2-\sqrt{2}).(2+\sqrt{2})}$

On utilise l'identité remarquable (a+b)(a-b)=a²-b² avec a= 2 et b= $\sqrt{2}$

$z^2=-2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}$

$z^2=-2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{4-2}$

$z^2=-2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$

On a z² sous forme algébrique, maintenant pour passer à la forme exponentielle il faut calculer son module et son argument.

$|z^2|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$

On factorise z² par son module pour trouver son argument.

$z^2=4[\frac{-2\sqrt{2}}{4}+i\frac{2\sqrt{2}}{4}]=4[\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}]$

On a la partie réelle qui est égale au cosinus d'un angle et la partie imaginaire égale au sinus d'un angle.

$\cos(\theta)=\frac{-\sqrt{2}}{2}\ et \sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *L'angle correspondant est* $\frac{3\pi}{4}$ *(se référer au cercle trigonométrique)*

Donc $arg(z^2)=\frac{3\pi}{4}$

La forme exponentielle de z² est donc $4e^{i3\frac{\pi}{4}}$

2) $z=\sqrt{z^2}=\sqrt{4e^{\frac{i3\pi}{4}}}=2e^{\frac{i3\pi}{8}}$

3)

On sait maintenant que l'argument de z est $\frac{3\pi}{8}$, et l'on veut la valeur du cosinus de $\frac{3\pi}{8}$, or cette valeur n'est d'autre que la partie réelle de z divisée par le module de z (à savoir 2).

$$\cos(\frac{3\pi}{8})=\frac{\Re(z)}{|z|}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 4

Soit (Un) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{\frac{u^2{}_n+4}{3}}, \forall n\geq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n\geq 0,(u_n)\geq 0.$
2) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n=u^2{}_n-2$ est géométrique et préciser sa raison.
3) Calculer v_n en fonction de v_0 . En déduire la limite de (v_n) puis celle de (u_n) .

Correction exercice 4

1) On utilise la récurrence .
Soit la proposition P(n) : $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\geq 0$
Initialisation : au rang n=0 $U_0\geq 0$ donc P(0) est vraie.
Hérédité : Supposons $U_n\geq 0$ pour un certain n :

$$(U_n)^2\geq 0\Leftrightarrow(U_n)^2+4\geq 0\Leftrightarrow\frac{((U_n)^2+4)}{3}\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{(\frac{((U_n)^2+4)}{3})}\geq 0$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\geq 0$

2) $V_n=(U_n)^2-2$

$$V_{(n+1)}=(U_{(n+1)})^2-2=\frac{((U_n)^2+4)}{3}-2=\frac{((U_n)^2-2)}{3}=\frac{V_n}{3}$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison 1/3.

3) $V_0=(U_0)^2-2=-2$

$$V_n=-2.(\frac{1}{3})^n=-(\frac{2}{3^n})$$

Donc $\lim V_n=0$ quand $n\to+\infty$
$V_n=(U_n)^2+2 \Leftrightarrow (U_n)^2=V_n+2$
Donc $\lim (U_n)^2=2$ quand $n\to+\infty$
D'où $\lim U_n=\sqrt{2}$ quand $n\to+\infty$

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{2\mathrm{u}_n}, \forall n\geq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n\geq 0, u_n>0.$
2) Montrer que $\forall n\geq 0, u_n\leq 2$.
3) Montrer que (u_n) est croissante (on pourra considérer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$).
4) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Correction exercice 5

1) On utilise la récurrence :
Soit la propriété P(n) : $U_n>0, \forall n\geq 0$
Initialisation : au rang n=0 $U_0=1$ donc P(0) est vraie.
Hérédité : Supposons $U_n>0$ pour un certain n :
$2\mathrm{U}_n>0 \Leftrightarrow \sqrt{2\mathrm{U}_n}>0 \Leftrightarrow U_{(n+1)}>0$
Donc par récurrence $\forall n\in\mathbb{N}, 0<U_n$

2)On utilise la récurrence :
Soit la propriété P(n) : $U_n\leq 2, \forall n\geq 0$
Initialisation : au rang n=0 $U_0=1$ donc P(0) est vraie.
Hérédité : Supposons $U_n\leq 0$ pour un certain n :
$2\mathrm{U}_n\leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2\mathrm{U}_n}\leq 0 \Leftrightarrow U_{(n+1)}\leq 0$
Donc par récurrence $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\leq 2$

3) $\dfrac{U_{(n+1)}}{U_n}=\dfrac{\sqrt{2\mathrm{U}_n}}{U_n}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{U_n}\right)}$

$0<U_n\leq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{U_n} \Leftrightarrow 1\leq\dfrac{2}{U_n} \Leftrightarrow \dfrac{U_{(n+1)}}{U_n}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{U_n}\right)}\geq 1$

Donc $\dfrac{U_{(n+1)}}{U_n}\geq 1$ c'est-à-dire (U_n) est croissante $\forall n\in\mathbb{N}$

4) $\forall n\in\mathbb{N}, (U_n)$ est croissante et majorée par 2.
Donc $\forall n\in\mathbb{N}, (U_n)$ converge.