Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Mathématiques et Calcul : Examen de rattrapage
Lundi 15 juin 2015

L1 : Licence Sciences et Technologies,
mention Mathématiques, Informatique et Applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

On rappelle les développements limités suivants. Ils sont donnés au voisinage de 0 (n et p sont des entiers positifs quelconques).

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)
\end{aligned}
$$

Exercice 1. a) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, n un entier positif et $S = \sum_{k=0}^{n} z^k$. Exprimer S sous la forme d'un quotient.

b) Mettre sous la forme trigonométrique (c'est à dire sous la forme $\rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0, \theta \in \mathbb{R}$) le nombre complexe $q = -2 - 2i$.

c) Toujours pour $q = -2 - 2i$, mettre sous la forme algébrique (c'est à dire sous la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$) le nombre complexe

$$\frac{13}{4095}\left(q^0 + q^1 + \cdots + q^7\right).$$

<u>*Indication*</u> : $2^{12} = 4096$.

Réponse. 1+2+2 points
a) $S = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ b) $z = 2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$. c) $\frac{13}{4095}\left(q^0 + q^1 + \cdots + q^7\right) = 2i - 3$ □

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{6}u_n^2 + \dfrac{3}{2}$.
a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $0 < u_n < 3$.

b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Réponse. 3+4 points a) rec. b) On a

$$\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2} - x = \frac{1}{6}(x-3)^2,$$

donc la seule limite possible est 3 et la suite est croissante. □

Exercice 3. Calculer les nombres suivants :

$$x = \sin(\arcsin(\frac{1}{3})) \quad y = \arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4})) \quad z = \arccos(\sin(\frac{5\pi}{6})) \quad t = \arccos(\cos(-\frac{5\pi}{6}))$$

Réponse. 2+2+2+2 points $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{\pi}{4}$, $z = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{5\pi}{6}$. □

Exercice 4. a) Donner l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) Donner l'ensemble de définition et les limites, en $+\infty$ et en $-\infty$, de la fonction

$$g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

c) Calculer la dérivée de g. En déduire que

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Réponse. 2+3+6 points a) $D = \mathbb{R}^*$, $f' = -\frac{1}{1+x^2}$. b) $D = \mathbb{R}^*$, $\lim_{\pm\infty} = \pm\frac{\pi}{2}$. c) $g' = 0$, dc g constante, donc égale à ses limites. □

Exercice 5. Donner le développement limité au voisinage de 0 de :

a) $a(x) = \dfrac{1}{2-4x+6x^2}$ à l'ordre 2 *b)* $b(x) = \dfrac{e^x}{1-2x}$ à l'ordre 3

c) $c(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$ à l'ordre 3 *d)* $d(x) = e^x \sin(x)$ à l'ordre 3

Réponse. 3+3+3+3 points

$$\frac{1}{2-5x+x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-2x+3x^2} = \frac{1}{2}(1+2x-3x^2+(2x-3x^2)^2+o(x^2)) = \frac{1}{2}(1+2x+x^2+o(x^2))$$

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1-2x} &= (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))(1+2x+4x^2+8x^3+o(x^3))\\ &= 1+3x+(4+2+\frac{1}{2})x^2+(8+4+1+\frac{1}{6})x^3+o(x^3)\\ &= 1+3x+\frac{13}{2}x^2+\frac{79}{6}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)} = (x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^2))(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\begin{aligned}e^x\sin(x) &= (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\\ &= x+x^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)\\ &= x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\end{aligned}$$

□

Exercice 6. Donner les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :

$$f(x)=\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2} \qquad g(x)=\frac{e^{x^2}+\ln(1+x)-1-\sin(x)}{x^2} \qquad h(x)=\frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Réponse. 3+3+3 points. $\lim f = 1$, $\lim g = \frac{1}{2}$, $\lim h = \frac{1}{4!}+\frac{1}{8}=\frac{4}{4!}=\frac{1}{6}$ □

Exercice 7. Soit $\mathcal{B}=\{\vec{u}_1=(1,1),\vec{u}_2=(1,2)\}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & (x\,,y) & \longmapsto & (x-y\,,2x+y)\end{array}$$

a) Montrer que f est linéaire.

b) Donner la matrice $M_{f,\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0=\{\vec{e}_1=(1,0),\vec{e}_2=(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

d) Donner la matrice de passage $P=M_{Id,\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$ de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

e) Donner la matrice P^{-1} puis la matrice $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

Réponse. 3+3+3+3+6(=3+3) points

a) $f(\alpha u+\beta v)=\ldots$ b) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ c) liberté d) $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ e) On a $P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned}M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} &= P^{-1}M_{f,\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}P\\ &= \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3 & -6\\ 3 & 5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□