Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°2

17 Novembre 2014

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.

NB : *Ce sujet contient 5 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.* **Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.**
VEUILLEZ INSCRIRE VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE.

On rappelle la définition des fonctions suivantes.

$$\mathrm{ch}(x) \; : \; x \;\mapsto\; \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad ; \qquad \mathrm{sh}(x) \; : \; x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

BAREME SUR 23 pts (la note sera ramenée sur 20 sans changement).

Exercice 1 6pts

Attention! Les résultats donnés directement sans calcul seront comptés comme faux! Il est facile de tricher pour cet exercice, alors dans le doute...

Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = -1$ 1pt

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 3$ 1pt

dont 0.5 pour un calcul correct et 0.5 pour une limite correcte.

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\ln(1+\frac{2}{x^2}) = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+2u)}{u} = \frac{2}{1+2\times 0} = 2$ 1pt

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2-1}-x) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}+1} = -\frac{1}{2}$ 1pt

dont 0.5 pour avoir pensé à multiplier par la quantité conjuguée et 0.5 pour une limite correcte.

5) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x)-\ln(2)}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{\ln(x)-\ln(2)}{x-2}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$ 1pt

dont 0.5 pour avoir factoriser le polynôme et 0.5 pour une limite correcte.

6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (x-1)^{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \exp\big(\underbrace{(x-1)^2\ln(x-1)}_{\to 0}\big) = 1$ 1pt

dont 0.5 si l'élève met sous forme exponentielle et 0.5 pour une limite correcte et justifiée.

Exercice 2 5 pts

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x^2}{2} + x + 2$.

(1) Rappeler le domaine de définition de la fonction Arctan ainsi que sa limite en + et − l'infini. 1pt

(2) Justifier que la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction est continue en tant que somme de fonctions continues. 0.5 pt

(3) Calculer $f(-2)$ et $f(2)$.
On a

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3\,\mathrm{Arctan}(-\sqrt{3}) + 2 - 2 + 2 = -\pi + 2 < 0 \quad \text{0.5 pt} \\ f(2) &= 3\,\mathrm{Arctan}(1/\sqrt{3}) + 2 + 2 + 2 = \pi/2 + 6 > 0 \quad \text{0.5 pt} \end{aligned}$$

(4) En déduire qu'il existe $\alpha \in]-2,\ 2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Comme f est continue et $f(-2) < 0$ et $f(2) > 0$ alors par le TVI on a le résultat. 1 pt
On mettra 0 si toutes les hypothèses ne sont pas citées.

(5) La fonction f s'annule-t-elle sur $[0,\ 2]$?
On étudie la fonction sur $[0,\ 2]$. f est croissante sur $[0,\ 2]$ car

$$f'(x) = \sqrt{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} + x + 1 > 0$$

ou bien car on dit que f est la somme de fonctions croissantes. Or

$$f(0) = 3\,\mathrm{Arctan}(-1/\sqrt{3}) + 2 = -\frac{\pi}{2} + 2 > 0$$

donc f ne s'annule pas.
1.5 pt dont 0.5 pour le calcul de $f(0)$, 0.5 pour la croissance de f et 0.5 pour la conclusion.

Exercice 3 5.5 pts
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f\ :\ x \longmapsto 1 - e^{-e^x} = 1 - \exp\big(-\exp(x)\big)$$

(1) Donner les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
On a

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{-\infty} f(x) & = & 1 - e^0 \ = \ 0 \quad \text{0.5 pt} \\ \lim\limits_{+\infty} f(x) & = & 1 - e^{-\infty} \ = \ 1 \quad \text{0.5 pt} \end{array}$$

(2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle est strictement croissante.
f est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. On trouve que

$$f'(x) \ = \ e^x e^{-e^x} > 0.$$

donc f est strictement croissante. 1 pt dont 0.5 pour le calcul et 0.5 pour les justifications.

(3) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I que l'on déterminera.
Comme f est continue et strictement croissante, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $I = [0, 1]$.
1 pt dont 0.5 pour citer les hypothèses et 0.5 pour le bon intervalle I.

(4) Donner une expression explicite de f^{-1}, la réciproque de f.
On pose

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & = & y \\ \Leftrightarrow & 1 - e^{-e^x} & = & y \\ \Leftrightarrow & e^{-e^x} & = & 1 - y \\ \Leftrightarrow & e^x & = & -\ln(1-y) \\ \Leftrightarrow & x & = & \ln(-\ln(1-y)) \ = \ f^{-1}(y) \end{array}$$

1 pt

(5) Rappeler la formule de la dérivée de la réciproque et l'utiliser pour calculer la dérivée de f^{-1}.
On calcule $(f^{-1}(x))'$.

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1}(x))' & = & \big(f'(f^{-1}(x))\big)^{-1} \\ & = & \exp(-\ln(-\ln(1-x))) \cdot \exp(e^{\ln(-\ln(1-x))}) \\ & = & \dfrac{-1}{\ln(1-x)}\dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

1.5 pt dont 0.5 pour le rappel de la formule de la dérivée de f^{-1}.

Exercice 4 6.5pts

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-2)^2\cos\left(\frac{1}{x-2}\right). \end{array}$$

(1) 1pt pour la justification correcte de la continuité (par composition puis par produit de fcts continues)

1pt pour le prlgmt par continuité avec $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ et pour poser $f(2) = 0$.

(2) 1pt pour justification de la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$ et le calcul :

$f'(x) = 2(x-2)\cos\left(\frac{1}{x-2}\right) + \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$, pour $x \neq 2$.

1pt pour le calcul de $f'(2) = 0$ par la définition du nombre dérivé.

(3) 1.5pt pour dire que f' n'a pas de limite en 2 et que donc elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

1 pt BONUS pour ceux qui justifieront que la fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'est pas continue en 0 en exhibant deux suites du type

$$u_n = 2 + \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \qquad ; \qquad v_n = 2 + \frac{1}{-\pi/2 + 2n\pi}$$