Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

PARIS DESCARTES

Mathématiques et Calculs 1 : Contrôle continu n°1
20 octobre 2009

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1 h 30.

NB : *Ce sujet contient quatre exercices. Le plus grand soin doit être accordé à la rédaction des réponses, qui sera largement prise en compte dans l'appréciation des copies. Toute réponse doit être justifiée. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.*

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Exercice 1 On définit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et pour A et B appartenant à $\mathcal{P}(E)$, on pose :

$$A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

1. On pose $F = \{1, 2\}$, $G = \{2, 3\}$ et $H = \{4\}$. Déterminer F^c, G^c, H^c, puis $F \cap G^c$ et $F^c \cap G$.
2. En déduire $F\Delta G$ et $H\Delta E$.
3. Déterminer $\emptyset\Delta E$ et $\emptyset\Delta\emptyset$.
4. Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B).$$

Exercice 2 On définit, pour $n \geq 1$, les suites de terme général

$$u_n = \frac{2^n}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^n}{n!}.$$

1. Calculer u_n et v_n pour $n = 1, \ldots, 4$ (On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible).
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée. En déduire qu'elle est convergente et donner sa limite.
3. Calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, et après simplification, montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 2$. *(Indication : on pourra utiliser la formule du binôme de Newton.)*
4. En déduire que la suite (v_n) est croissante et que $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 3 Soit $a \geq 0$ et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2 + 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que, si (u_n) converge, alors sa limite est 2.
3. On suppose que $a \leq 2$. Montrer par récurrence que $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On suppose que $a > 2$. Montrer que la suite (u_n) diverge.

Exercice 4 Le but est de montrer par deux méthodes différentes que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1. Démontrer ce résultat par récurrence.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3 \right) = (n+1)^3 - 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3 \right) = 3 \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

Retrouver le résultat de la première question.