Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Examen du 11 juin 2013 *(durée : 1h30)*

L1 : Licence sciences et technologies, mention mathématiques, informatique et applications

Les documents, calculatrices, téléphones portables ne sont pas autorisés

---

Exercice 1. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(2a_n+b_n), \quad a_1=4 \\ b_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(a_n+2b_n), \quad b_1=1 \end{cases}$$

1. i. Calculer $a_{n+1}-b_{n+1}$ et montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>b_n$ et que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.
   ii. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   iii. En déduire que les deux suites sont convergentes et ont même limite.
2. i. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)$ et en déduire la valeur de b_n en fonction de n.
   ii. Calculer la limite commune des deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution

1. i. $a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{1}{3}\Big(2a_n+b_n-a_n-2b_n\Big)=\dfrac{1}{3}\Big(a_n-b_n\Big)$
   On en déduit : $a_n-b_n=\dfrac{1}{3}\Big(a_{n-1}-b_{n-1}\Big)=\dfrac{1}{3^2}\Big(a_{n-2}-b_{n-2}\Big)=\cdots=\dfrac{1}{3^{n-1}}\Big(a_1-b_1\Big)=\dfrac{1}{3^{n-2}}>0$
   Alors : $a_n>b_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.
   ii. $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3}\Big(2a_n+b_n\Big)-a_n=\dfrac{1}{3}\Big(b_n-a_n\Big)=-\dfrac{1}{3^{n-1}}<0$ la suite (a_n) est décroissante.
   $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{3}\Big(a_n+2b_n\Big)-b_n=\dfrac{1}{3}\Big(a_n-b_n\Big)=\dfrac{1}{3^{n-1}}>0$ la suite (b_n) est croissante.
   iii. On a donc : $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots<a_n<\cdots<a_2<a_1$. La suite (a_n) est décroissante et minorée par b_1 elle est donc convergente ; (b_n) est croissante et majorée par a_1 elle est donc convergente. De plus : $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, les deux limites sont donc égales.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_3-b_2)+(b_2-b_1)=b_n-b_1.$
   Or $b_{k+1}-b_k=\dfrac{1}{3^{k-1}}$ donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3^{k-1}}=\frac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{1-\frac{1}{3}}=b_n-b_1$, d'où : $b_n=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3^{n-2}}$.
   On a donc : $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{5}{2}$.

Exercice 2.

1. Calculer le module et l'argument, compris entre 0 et 2π, du nombre complexe : $z=(1+i\sqrt{3})^{20}$.
2. Mettre le nombre complexe $z=\dfrac{4-3i}{i-1}$ sous la forme : $z=a+ib$.
3. Montrer que si un nombre complexe est de module 1, on a : $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$.
   Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1, tels que : $z_1z_2+1\neq 0$. Montrer que le nombre $Z=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

Solution

1. $1+i\sqrt{3}=2\Big(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   D'où : $z=2^{20}e^{i\frac{20\pi}{3}}=2^{20}e^{i\frac{(18+2)\pi}{3}}=2^{20}e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On a donc : $|z|=2^{20}$ et l'argument demandé est : $\dfrac{2\pi}{3}$.

2. $z = \dfrac{4-3i}{i-1} = \dfrac{(4-3i)(-i-1)}{(-1)^2+1^2} = -\dfrac{1}{2}(7+i)$.

3. Si le module de z est 1, on a : $z\overline{z} = 1$; d'où : $\overline{z} = \dfrac{1}{z}\cdot$

$\overline{Z} = \dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \dfrac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}} = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = Z \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot$ En déduire le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ et sa limite en zéro.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 en zéro de la fonction exponentielle e^x. En déduire le développement à l'ordre 4 en zéro de e^x+e^{-x} et trouver un équivalent en zéro à la fonction : $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} - 1$. Quelle est la limite de f en zéro ?

Solution

1. En zéro, on a : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)$, d'où : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \circ(x^2)$

On a :

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \exp\Big(\frac{\ln(1+x)}{x}\Big) = \exp\Big(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\Big) = e\exp\Big(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\Big)\\ &= e\Big(1+(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3})+\frac{1}{2}(-\frac{x}{2})^2+\circ(x^2)\Big) = e\Big(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}+\circ(x^2)\Big)\end{aligned}$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0}\Big((1+x)^{\frac{1}{x}}\Big) = e$.

2. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \circ(x^4)$.

$e^x + e^{-x} = \Big(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}\Big)+\Big(1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}\Big)+\circ(x^4) = 2+x^2+\dfrac{x^4}{12}+\circ(x^4)$.

On en déduit : $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{12}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; soit $E = \{(x,y,z) \mid x+2y-3z=0\}$, $\vec{a} = (1,2,-3)$ et $F = \mathrm{Vect}(\vec{a})$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de E.
2. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Solution

1. Soit $\vec{u} = (x,y,z)$, $\vec{v} = (x',y',z') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\vec{u}+\lambda\vec{v} = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$ alors : $x+\lambda x'+2(y+\lambda y')-3(z+\lambda z') = x+2y-3z+\lambda(x'+2y'-3z') = 0$. Donc $\vec{u}+\lambda\vec{v} \in E$ et E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
$\vec{u} = (x,y,z) \in E \iff x = -2y+3z \iff \vec{u} = (-2y+3z, y, z) = y(-2,1,0)+z(3,0,1)$.
Les vecteurs $(-2,1,0)$ et $(3,0,1)$ engendrent donc E.
Ils sont indépendants : $\alpha(-2,1,0)+\beta(3,0,1) = (0,0,0) \iff \alpha = \beta = 0$.
Donc ils forment une base de E qui est de dimension 2.
2. $\vec{a} \notin E$ puisque : $1+2\times 2-3\times(-3) = 14 \neq 0$, donc : $E \cap F = \{0\}$. De plus $\dim(F) = 1$; on a donc : $\dim(E)+\dim(F) = 3$, donc : $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -x+2y-z &= 1\\ -4x+5y-3z &= 2\\ -2x+2y-z &= 3\end{cases}$$

1. Donner la matrice A de ce système.

2. Calculer le déterminant de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse A^{-1}.
4. Calculer les solutions du système.

Solution

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. On remplace la première ligne par la différence entre la première et la troisième :
$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$
3. Le déterminant de A étant non-nul, la matrice A est inversible. Calcul de l'inverse par la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 - L_3 \mapsto L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_2 + 4L_1 \mapsto L_2 \\ L_3 + 2L_1 \mapsto L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad 3L_3 - L_2 \mapsto L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$2L_2 - L_3 \mapsto L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4. La solution du système est donc :
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exercice 6.

1. Quels sont le domaine de définition et la dérivée de la fonction : $x \longmapsto \arcsin(x)$.
2. Citer le théorème des accroissements finis avec toutes ses hypothèses.
3. Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ \arcsin(x) < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Solution

1. Voir le cours
2. Voir le cours
3. Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction arcsin est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis :
$\exists c \in]0,x[$ tel que : $\arcsin(x) - \arcsin(0) = x \arcsin'(c) = \dfrac{x}{\sqrt{1-c^2}} < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ puisque $0 < c < x$. D'où le résultat.
