Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Corrigé du contrôle continu n° 3

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Exercice 1.

1. On sait par le cours qu'au voisinage de 0, le développement limité à l'ordre 2 de $\cos x$ est :
   $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$
   Celui de $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ est :
   $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$
   En multipliant les deux, on obtient :
   $\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} = (\cos x)\cdot(1+x)^{-1} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$
2. En 0, le développement limité à l'ordre 3 de $\sin x$ est :
   $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$
   Celui de e^x est :
   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$
   Puisque $\sin 0 = 0$, on peut composer les deux développements limités :
   $e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3\varepsilon(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)$

Exercice 2.

1. La fonction associée à cette suite récurrente est : $x \longmapsto \sqrt{x+1}$; c'est une fonction croissante. On sait par le cours que la suite sera croissante si $u_1 \geq u_0$.
   $u_1 = \sqrt{u_0+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \geq 1 = u_0$. La suite est donc croissante.
2. (a) Par récurrence : $u_0^2 - u_0 - 1 = -1 \leq 0$. Supposons que pour $1 \leq k \leq n, \quad u_k^2 - u_k - 1 \leq 0$.
   Au rang $n+1$: $u_{n+1}^2 - u_{n+1} - 1 = u_n + 1 - \sqrt{u_n+1} - 1 = u_n - \sqrt{u_n+1}$
   Or $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$ puisque $u_0 \geq 0$ et que la suite est croissante. Donc :
   $$u_n - \sqrt{u_n+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_n^2 \leq u_n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n^2 - u_n - 1 \leq 0$$
   Ce qui est l'hypothèse de récurrence.

   (b) Un trinôme du second degré, dont le coefficient du terme de degré deux est positif, sera négatif pour x compris entre les racines. Les racines de $x^2 - x - 1$ sont : $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Donc, puisque $u_n \geq 0$, $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. La suite est croissante d'après 1. ; elle est majorée d'après 2. Toute suite croissante et majorée est convergente, donc la suite est convergente.
   Puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est continue, la limite ℓ de cette suite vérifie :
   $$\sqrt{\ell+1} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - \ell - 1 = 0$$
   ℓ est donc la racine positive de cette équation : $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3.

1. On multiplie le numérateur et le dénominateur de z par le conjugué du dénominateur :
$z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{|1+i|^2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} - i\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
$\bar{z} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
2. $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = i$
Donc : $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3 = i^3 = -i = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = e^{i\,\frac{3\pi}{2}}$
$\overline{\left(\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2}\right)^3} = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = e^{-i\,\frac{3\pi}{2}}$

Exercice 4.

1. La fonction arctangente est la fonction réciproque de la fonction tangente, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$
3. La fonction arctangente est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc le théorème des accroissements finis s'applique sur tout intervalle de $\mathbb{R}$:
$$\forall a,b \in \mathbb{R}, a<b \quad \exists c \in]a,b[\text{ tel que : } \quad \arctan b - \arctan a = (b-a)\arctan'(c) = (b-a)\frac{1}{1+c^2}$$
Puisque $a<c<b$, on a : $\dfrac{1}{1+b^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < \dfrac{1}{1+a^2}$.
On a donc :
$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ a<b, \quad \frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$$
4. Puisque $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, si on prend $a=1$ et $b=\dfrac{4}{3}$, en utilisant la question 3., on a :
$$\frac{\frac{1}{3}}{1+(\frac{4}{3})^2} \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) - \arctan 1 \leq \frac{\frac{1}{3}}{1+1^2}$$
Soit :
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

Exercice 5.

1. Un sous-espace vectoriel est une partie d'un espace vectoriel, non vide et stable pour les deux opérations.
F est non vide car le vecteur $\vec{0}$ lui appartient : $\vec{0} = (0,0,0)$, $0 + 2\times 0 = 0$ et $0+0+0=0$.
Stabilité : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in F,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha\cdot\vec{u} + \vec{v} \in F$
$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in F \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2y_1 = 0 & \text{et} \quad x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ x_2 + 2y_2 = 0 & \text{et} \quad x_2 + y_2 + z_2 = 0 \end{cases}$
$\alpha\cdot\vec{u} + \vec{v} = (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2)$
Alors : $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + 2(\alpha y_1 + y_2) & = & \alpha(x_1 + 2y_1) + x_2 + 2y_2 & = & 0 \\ \alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2 + \alpha z_1 + z_2 & = & \alpha(x_1 + y_1 + z_1) + x_2 + y_2 + z_2 & = & 0 \end{cases}$ donc : $\alpha\cdot\vec{u} + \vec{v} \in F$
2. Si un vecteur $\vec{u} = (x,y,z) \in F$, on a nécessairement : $x + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2y$
On doit aussi avoir : $x+y+z=0$.
Compte tenu de l'égalité précédente, on doit avoir : $-2y + y + z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = y$.
Tout vecteur non nul de la forme $(-2y, y, y)$ est donc un générateur de F, par exemple : $(-2,1,1)$.
Comme tout vecteur non nul est libre, $(-2,1,1)$ est une base de F.

Exercice 6.

1. Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, pour montrer que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ est une base, il suffit de montrer que ces vecteurs sont libres. Soit : $\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_3 + \delta \cdot \vec{v}_4 = \vec{0}$.

   On obtient un système de quatre équations : $\begin{cases} \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

   En retranchant la 1^re^ de la 2^e^ et la 4^e^ de la 3^e^, on obtient : $\alpha = \beta$ et $\gamma = \delta$.

   En reportant ces résultats dans la 1^re^ et la 3^e^, on obtient respectivement : $\alpha + 2\gamma = 0$ et $2\alpha + \gamma = 0$, donc finalement : $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

   Par conséquent, n'importe quelle équation donne : $3\alpha = 0$ et finalement : $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Le système de vecteurs est donc libre.

2. Si on additionne ces quatre vecteurs, on obtient : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = (3,3,3,3)$.

   Alors : $(1,1,1,1) = \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_2 + \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_3 + \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_4$. Les coordonnées du vecteur $(1,1,1,1)$ sur la nouvelle base sont donc toutes égales à $\frac{1}{3}$.

Exercice 7. On effectue les transformations élémentaires suivantes : $L_2 - 2L_1 \rightsquigarrow L_2$ et $L_3 + L_1 \rightsquigarrow L_3$. On obtient alors la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Puis on effectue : $L_3 \rightsquigarrow L_3 + 2L_2$ et on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -17 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin on permutte les deux dernières colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

La matrice est donc de rang 3. (On pouvait aussi calculer le déterminant et voir qu'il n'est pas nul).

Exercice 8.

1. (a) On exécute les opérations élémentaires : $C_2 \rightsquigarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \rightsquigarrow C_3 - 2C_1$ et on développe le déterminant obtenu par rapport à sa première ligne :

   $$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

   Comme $D \neq 0$, la matrice M est inversible.

   (b) On pose :

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   On effectue les opérations élémentaires : $L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_1$:

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On effectue maintenant : $L_1 \rightsquigarrow L_1 + 2L_3$ et $L_2 \rightsquigarrow -L_2 + 3L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Enfin : $L_1 \rightsquigarrow L_1 - L_2$, puis on multiplie L_3 par -1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

On a donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On vérifie par le calcul que $MM^{-1} = I_3$.

2. (a) Une application est linéaire si elle vérifie pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ et tout réel α : $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ et $f(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot f(\vec{u})$.
On pose : $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{aligned} f(\vec{u}+\vec{v}) &= \Big((x_1+x_2)+(y_1+y_2)+2(z_1+z_2), 2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2), (x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)\Big) \\ &= \Big(x_1+y_1+2z_1, 2x_1+y_1+z_1, x_1+y_1+z_1\Big) + \Big(x_1+y_2+2z_2, 2x_2+y_2+z_2, x_2+y_2+z_2\Big) \\ &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot \vec{u}) &= \Big(\alpha x_1 + \alpha y_1 + 2\alpha z_1, 2\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1, \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1\Big) \\ &= \Big(\alpha(x_1+y_1+2z_1), \alpha(2x_1+y_1+z_1), \alpha(x_1+y_1+z_1)\Big) \\ &= \alpha\Big(x_1+y_1+2z_1, 2x_1+y_1+z_1, x_1+y_1+z_1\Big) \\ &= \alpha \cdot f(\vec{u}) \end{aligned}$$

(b) La matrice M_f de f par rapport à la base canonique est obtenue en mettant en colonnes les coordonnées des images de chaque vecteur de cette base par f :
$f\big((1,0,0)\big) = (1,2,1)$, $f\big((0,1,0)\big) = (1,1,1)$, $f\big((0,0,1)\big) = (2,1,1)$, ce qui donne la matrice M de la première partie.

(c) Puisqu'on a vu que la matrice M est inversible, l'application f est bijective et sa matrice est la matrice M^{-1}. On a donc :

$$f^{-1}(x,y,z) = (y-z, -x-y+3z, x-z)$$