Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Contrôle continu n° 3

11 janvier 2010

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2 . Durée 2h 30.

Tout document est interdit.
Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont interdits.

Exercice 1. Donner les développements limités en 0,

1. à l'ordre 2 pour la fonction $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$.
2. à l'ordre 3, pour la fonction $g(x) = e^{\sin x}$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Vérifier que $u_n^2 - u_n - 1 \leq 0$ et en déduire que : $u_n \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \forall n \geq 0$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3.

1. Mettre le nombre complexe $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$ sous la forme : $z = \mathfrak{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z)$ et calculer $\bar{z}$.
2. Mettre le nombre complexe $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ sous forme trigonométrique et donner son conjugué.

Exercice 4.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction arctangente et où est-elle dérivable ?
2. Quelle est la dérivée de $\arctan x$? et que vaut $\arctan 1$?
3. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis que :

$$\forall a_, b \in \mathbb{R},\ a < b, \quad \frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$$

4. En choisissant des valeurs appropriées pour a et b, montrer que :
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

.../...

Exercice 5. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère la partie :

$$F = \{\vec{u} = (x, y, z) \mid x + 2y = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Donner une base de F.

Exercice 6.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{v_1} = (0,1,1,1)$, $\vec{v_2} = (1,0,1,1)$, $\vec{v_3} = (1,1,0,1)$, $\vec{v_4} = (1,1,1,0)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{v} = (1,1,1,1)$ sur cette base.

Exercice 7. Calculer le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

1. Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   et D son déterminant.

   (a) Calculer D et montrer que M est inversible.

   (b) Inverser M par la méthode du pivot de Gauß et vérifier votre calcul en calculant MM^{-1}.

2. On considère l'application : $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + y + z, x + y + z)$$

   (a) Montrer que f est linéaire.

   (b) Calculer la matrice M_f de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$

   (c) Montrer que f est bijective et calculer la bijection réciproque.

Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Corrigé du contrôle continu n° 3

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Exercice 1.

1. On sait par le cours qu'au voisinage de 0, le développement limité à l'ordre 2 de $\cos x$ est :
   $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$
   Celui de $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ est :
   $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$
   En multipliant les deux, on obtient :
   $\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} = (\cos x)\cdot(1+x)^{-1} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$
2. En 0, le développement limité à l'ordre 3 de $\sin x$ est :
   $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$
   Celui de e^x est :
   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$
   Puisque $\sin 0 = 0$, on peut composer les deux développements limités :
   $e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3\varepsilon(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)$

Exercice 2.

1. La fonction associée à cette suite récurrente est : $x \longmapsto \sqrt{x+1}$; c'est une fonction croissante. On sait par le cours que la suite sera croissante si $u_1 \geq u_0$.
   $u_1 = \sqrt{u_0+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \geq 1 = u_0$. La suite est donc croissante.
2. (a) Par récurrence : $u_0^2 - u_0 - 1 = -1 \leq 0$. Supposons que pour $1 \leq k \leq n, \quad u_k^2 - u_k - 1 \leq 0$.
   Au rang $n+1$: $u_{n+1}^2 - u_{n+1} - 1 = u_n + 1 - \sqrt{u_n+1} - 1 = u_n - \sqrt{u_n+1}$
   Or $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$ puisque $u_0 \geq 0$ et que la suite est croissante. Donc :
   $$u_n - \sqrt{u_n+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_n^2 \leq u_n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n^2 - u_n - 1 \leq 0$$
   Ce qui est l'hypothèse de récurrence.
   (b) Un trinôme du second degré, dont le coefficient du terme de degré deux est positif, sera négatif pour x compris entre les racines. Les racines de $x^2 - x - 1$ sont : $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Donc, puisque $u_n \geq 0$, $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. La suite est croissante d'après 1. ; elle est majorée d'après 2. Toute suite croissante et majorée est convergente, donc la suite est convergente.
   Puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est continue, la limite ℓ de cette suite vérifie :
   $$\sqrt{\ell+1} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - \ell - 1 = 0$$
   ℓ est donc la racine positive de cette équation : $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3.

1. On multiplie le numérateur et le dénominateur de z par le conjugué du dénominateur :
$z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{|1+i|^2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} - i\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
$\bar{z} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
2. $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = i$
Donc : $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3 = i^3 = -i = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = e^{i\,\frac{3\pi}{2}}$
$\overline{\left(\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2}\right)^3} = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - i\,\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = e^{-i\,\frac{3\pi}{2}}$

Exercice 4.

1. La fonction arctangente est la fonction réciproque de la fonction tangente, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$
3. La fonction arctangente est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc le théorème des accroissements finis s'applique sur tout intervalle de $\mathbb{R}$:
$$\forall a,b \in \mathbb{R}, a<b \quad \exists c \in]a,b[\text{ tel que : } \quad \arctan b - \arctan a = (b-a)\arctan'(c) = (b-a)\frac{1}{1+c^2}$$
Puisque $a<c<b$, on a : $\dfrac{1}{1+b^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < \dfrac{1}{1+a^2}$.
On a donc :
$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ a<b, \quad \frac{b-a}{1+b^2} \le \arctan b - \arctan a \le \frac{b-a}{1+a^2}$$
4. Puisque $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, si on prend $a=1$ et $b=\dfrac{4}{3}$, en utilisant la question 3., on a :
$$\frac{\frac{1}{3}}{1+(\frac{4}{3})^2} \le \arctan\left(\frac{4}{3}\right) - \arctan 1 \le \frac{\frac{1}{3}}{1+1^2}$$
Soit :
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \le \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

Exercice 5.

1. Un sous-espace vectoriel est une partie d'un espace vectoriel, non vide et stable pour les deux opérations.
F est non vide car le vecteur $\vec{0}$ lui appartient : $\vec{0} = (0,0,0)$, $0+2\times 0 = 0$ et $0+0+0=0$.
Stabilité : $\forall \vec{u},\vec{v} \in F,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha\cdot\vec{u}+\vec{v} \in F$
$\vec{u} = (x_1,y_1,z_1) \quad \vec{v} = (x_2,y_2,z_2) \in F \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1+2y_1 = 0 & \text{et} \quad x_1+y_1+z_1 = 0 \\ x_2+2y_2 = 0 & \text{et} \quad x_2+y_2+z_2 = 0 \end{cases}$
$\alpha\cdot\vec{u}+\vec{v} = (\alpha x_1+x_2, \alpha y_1+y_2, \alpha z_1+z_2)$
Alors : $\begin{cases} \alpha x_1+x_2+2(\alpha y_1+y_2) & = & \alpha(x_1+2y_1)+x_2+2y_2 & = & 0 \\ \alpha x_1+x_2+\alpha y_1+y_2+\alpha z_1+z_2 & = & \alpha(x_1+y_1+z_1)+x_2+y_2+z_2 & = & 0 \end{cases}$ donc : $\alpha\cdot\vec{u}+\vec{v} \in F$
2. Si un vecteur $\vec{u} = (x,y,z) \in F$, on a nécessairement : $x+2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2y$
On doit aussi avoir : $x+y+z=0$.
Compte tenu de l'égalité précédente, on doit avoir : $-2y+y+z=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=y$.
Tout vecteur non nul de la forme $(-2y,y,y)$ est donc un générateur de F, par exemple : $(-2,1,1)$.
Comme tout vecteur non nul est libre, $(-2,1,1)$ est une base de F.

Exercice 6.

1. Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, pour montrer que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ est une base, il suffit de montrer que ces vecteurs sont libres. Soit : $\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_3 + \delta \cdot \vec{v}_4 = \vec{0}$.

   On obtient un système de quatre équations : $\begin{cases} \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

   En retranchant la 1re de la 2e et la 4e de la 3e, on obtient : $\alpha = \beta$ et $\gamma = \delta$.

   En reportant ces résultats dans la 1re et la 3e, on obtient respectivement : $\alpha + 2\gamma = 0$ et $2\alpha + \gamma = 0$, donc finalement : $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

   Par conséquent, n'importe quelle équation donne : $3\alpha = 0$ et finalement : $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Le système de vecteurs est donc libre.

2. Si on additionne ces quatre vecteurs, on obtient : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = (3, 3, 3, 3)$.

   Alors : $(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_2 + \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_3 + \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_4$. Les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ sur la nouvelle base sont donc toutes égales à $\frac{1}{3}$.

Exercice 7. On effectue les transformations élémentaires suivantes : $L_2 - 2L_1 \rightsquigarrow L_2$ et $L_3 + L_1 \rightsquigarrow L_3$. On obtient alors la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Puis on effectue : $L_3 \rightsquigarrow L_3 + 2L_2$ et on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -17 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin on permutte les deux dernières colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

La matrice est donc de rang 3. (On pouvait aussi calculer le déterminant et voir qu'il n'est pas nul).

Exercice 8.

1. (a) On exécute les opérations élémentaires : $C_2 \rightsquigarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \rightsquigarrow C_3 - 2C_1$ et on développe le déterminant obtenu par rapport à sa première ligne :

   $$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

   Comme $D \neq 0$, la matrice M est inversible.

   (b) On pose :

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   On effectue les opérations élémentaires : $L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_1$:

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On effectue maintenant : $L_1 \rightsquigarrow L_1 + 2L_3$ et $L_2 \rightsquigarrow -L_2 + 3L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Enfin : $L_1 \rightsquigarrow L_1 - L_2$, puis on multiplie L_3 par -1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

On a donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On vérifie par le calcul que $MM^{-1} = I_3$.

2. (a) Une application est linéaire si elle vérifie pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ et tout réel α : $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ et $f(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot f(\vec{u})$.
On pose : $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{aligned} f(\vec{u}+\vec{v}) &= \Big((x_1+x_2)+(y_1+y_2)+2(z_1+z_2), 2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2), (x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)\Big) \\ &= \Big(x_1+y_1+2z_1, 2x_1+y_1+z_1, x_1+y_1+z_1\Big) + \Big(x_1+y_2+2z_2, 2x_2+y_2+z_2, x_2+y_2+z_2\Big) \\ &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot \vec{u}) &= \Big(\alpha x_1 + \alpha y_1 + 2\alpha z_1, 2\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1, \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1\Big) \\ &= \Big(\alpha(x_1+y_1+2z_1), \alpha(2x_1+y_1+z_1), \alpha(x_1+y_1+z_1)\Big) \\ &= \alpha\Big(x_1+y_1+2z_1, 2x_1+y_1+z_1, x_1+y_1+z_1\Big) \\ &= \alpha \cdot f(\vec{u}) \end{aligned}$$

(b) La matrice M_f de f par rapport à la base canonique est obtenue en mettant en colonnes les coordonnées des images de chaque vecteur de cette base par f :
$f\big((1,0,0)\big) = (1,2,1)$, $f\big((0,1,0)\big) = (1,1,1)$, $f\big((0,0,1)\big) = (2,1,1)$, ce qui donne la matrice M de la première partie.

(c) Puisqu'on a vu que la matrice M est inversible, l'application f est bijective et sa matrice est la matrice M^{-1}. On a donc :

$$f^{-1}(x,y,z) = (y-z, -x-y+3z, x-z)$$

Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Examen de 2^e session

8 juin 2010

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 1. *Durée : 1h30*

Tout document est interdit.
Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont interdits.

Exercice 1. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par la relation : $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{1+3\,u_{n-1}}$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer que u_n est positif quel que soit $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Calculer $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Exercice 2.

1. Donner une développement limité à l'ordre 4 au voisinage de zéro, pour la fonction : $x \longmapsto e^x$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 pour la fonction
$$f\ : x \longmapsto f(x) = e^x + e^{-x}$$
3. Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} - 1\right)$$

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux familles de vecteurs suivantes :

1. $\vec{u_1} = (0, 1, 3), \vec{u_2} = (2, 0, -1),\ \vec{u_3} = (2, 0, 1)$
2. $\vec{v_1} = (1, 2, 3),\ \vec{v_2} = (-2, 3, 1),\ \vec{v_3} = (0, 7, 7)$

Ces deux familles sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 4. Monter que la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est inversible et calculer son inverse.

Exercice 5. Soit le nombre complexe $z = i\left(\dfrac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right)$.

1. Pourquoi doit-on avoir : $\alpha \neq 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$?
2. Montrer que z est un nombre réel.

Exercice 6.

1. Citer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f\ :\ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arcsin(t) \end{array}$
   (a) Quelle est la dérivée de f ?
   (b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arcsin sur l'intervalle $[0, x]$ pour $x \in]0, 1[$, démontrer l'inégalité :
$$\forall x \in]0,1[\quad \arcsin x \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et calculs : Contrôle continu n°1
18 Octobre 2010

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Documents et calculatrices sont interdits.

L'usage des téléphones portables est interdit dans les salles d'examen

NB : *Ce sujet contient 4 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement. La question marquée (*) est une question bonus.*

Exercice 1

Soit x un réel. Pour un entier naturel n, on considère la somme $S_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$

1. Calculer la somme $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ comme somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. Exprimer $S_n(x)$ à l'aide de $\Re(T_n(x))$
3. En déduire la valeur de $S_n(x)$

Exercice 2

On considère les polynômes $P(X) = X^2 - 2X + 2$ et $Q(X) = X^4 - 2X^2 + 2$

1. Calculer les racines de P
2. Montrer que ces racines s'écrivent :

$$\{\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}} \; ; \; \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\}$$

3. En déduire que celles de Q s'écrivent :

$$\{2^{1/4}\, e^{\frac{i\pi}{8}} \; ; \; 2^{1/4}e^{-\frac{i\pi}{8}} \; ; \; -\, 2^{1/4}\, e^{\frac{i\pi}{8}} \; ; \; -2^{1/4}e^{-\frac{i\pi}{8}}\}$$

4. Ecrire les racines carrées de $(1+i)$ et de $(1-i)$ sous forme algébrique.
5. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$
6. (*) Ecrire une factorisation de $Q(X)$ en polynômes du second degré, à coefficients réels.

. . . / . . .

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite l
4. Quelle est la valeur de l ?

Exercice 4

Soit $a \geq 0$ et (u_n) la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n^2 + 1 \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est 2.
3. On suppose $a \leq 2$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0, \quad u_n \leq 2$.
   En déduire que (u_n) est convergente.
4. On suppose $a > 2$. Montrer que (u_n) diverge.

Université René Descartes - Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pres 75270 Paris cedex 06

Licence 1ère année, 2010-2011, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Contrôle continu 2

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2) Etudier la parité de f.
3) Etudier la dérivabilité de f en 0.
4) Démontrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$.

Exercice 2

Le but de l'exercice est d'étudier la bijection réciproque de la fonction tangente.

1) Montrer que la fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est dérivable et strictement croissante. Déterminer ses limites en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
2) En déduire que tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On note arctan sa bijection réciproque.
3) Calculer la dérivée de la fonction arctan.
4) Montrer que, pour tout x non nul, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Exercice 3

1) Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}$.
Indication : utiliser le théorème des accroissements finis appliqué à $y \mapsto \ln(y)$ sur l'intervalle $[x, x+1]$.
2) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

3) Montrer que les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ et $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+x}$ sont monotones.
4) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
5) Déterminer les limites en l'infini de $\ln(f)$ et $\ln(g)$, puis de f et g.

Exercice 4

Soit $f\ :\ [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = e^{-x} - \sin(x).$$

1) Justifier par des opérations élémentaires sur les fonctions que f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis calculer sa dérivée. En déduire que f définit une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[e^{-\frac{\pi}{2}} - 1, 1]$.
2) Justifier qu'il existe un et un seul α dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

On pose $g(x) = x + \dfrac{1}{2}f(x)$.

3) Justifier que g est deux fois dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et calculer g' et g''.
4) Montrer que g' est croissante et positive, puis en déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$|g'(x)| \leqslant 1 - e^{-\frac{\pi}{2}} < 1.$$

5) A l'aide du théorème des accroissements finis, déduire de la question 4) que pour tout x et y dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ tels que $x \neq y$,

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

6) Vérifier que α est une solution de l'équation $g(x) = x$, puis déduire de la question 5) que α est l'unique solution appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$ (Indication : on pourra raisonner par l'absurde).

Question bonus) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= g(u_n)\ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

a) Calculer u_1 et montrer que la suite (u_n) est décroissante.
b) En déduire que (u_n) converge vers α.

Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Corrigé du contrôle continu n° 3

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Exercice 1.

1. On sait par le cours qu'au voisinage de 0, le développement limité à l'ordre 2 de $\cos x$ est :
   $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$
   Celui de $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ est :
   $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$
   En multipliant les deux, on obtient :
   $\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} = (\cos x)\cdot(1+x)^{-1} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$
2. En 0, le développement limité à l'ordre 3 de $\sin x$ est :
   $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$
   Celui de e^x est :
   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$
   Puisque $\sin 0 = 0$, on peut composer les deux développements limités :
   $e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3\varepsilon(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)$

Exercice 2.

1. La fonction associée à cette suite récurrente est : $x \longmapsto \sqrt{x+1}$; c'est une fonction croissante. On sait par le cours que la suite sera croissante si $u_1 \geq u_0$.
   $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \geq 1 = u_0$. La suite est donc croissante.
2. (a) Par récurrence : $u_0^2 - u_0 - 1 = -1 \leq 0$. Supposons que pour $1 \leq k \leq n$, $\quad u_k^2 - u_k - 1 \leq 0$.
   Au rang $n+1$: $u_{n+1}^2 - u_{n+1} - 1 = u_n + 1 - \sqrt{u_n+1} - 1 = u_n - \sqrt{u_n + 1}$
   Or $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$ puisque $u_0 \geq 0$ et que la suite est croissante. Donc :
   $$u_n - \sqrt{u_n+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_n^2 \leq u_n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n^2 - u_n - 1 \leq 0$$
   Ce qui est l'hypothèse de récurrence.

   (b) Un trinôme du second degré, dont le coefficient du terme de degré deux est positif, sera négatif pour x compris entre les racines. Les racines de $x^2 - x - 1$ sont : $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Donc, puisque $u_n \geq 0$, $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. La suite est croissante d'après 1. ; elle est majorée d'après 2. Toute suite croissante et majorée est convergente, donc la suite est convergente.
   Puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est continue, la limite ℓ de cette suite vérifie :
   $$\sqrt{\ell + 1} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - \ell - 1 = 0$$
   ℓ est donc la racine positive de cette équation : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3.

1. On multiplie le numérateur et le dénominateur de z par le conjugué du dénominateur :
   $z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})}{|1+i|^2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} - i\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
   $\bar{z} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
2. $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = i$
   Donc : $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3 = i^3 = -i = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = e^{i\,\frac{3\pi}{2}}$
   $\overline{\left(\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2}\right)^3} = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = e^{-i\,\frac{3\pi}{2}}$

Exercice 4.

1. La fonction arctangente est la fonction réciproque de la fonction tangente, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
   $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$
3. La fonction arctangente est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc le théorème des accroissements finis s'applique sur tout intervalle de $\mathbb{R}$:
   $$\forall a,b \in \mathbb{R}, a<b \quad \exists c \in]a,b[\text{ tel que : } \quad \arctan b - \arctan a = (b-a)\arctan'(c) = (b-a)\frac{1}{1+c^2}$$
   Puisque $a<c<b$, on a : $\dfrac{1}{1+b^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < \dfrac{1}{1+a^2}$.
   On a donc :
   $$\forall a,b \in \mathbb{R},\ a<b, \quad \frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$$
4. Puisque $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, si on prend $a=1$ et $b=\dfrac{4}{3}$, en utilisant la question 3., on a :
   $$\frac{\frac{1}{3}}{1+(\frac{4}{3})^2} \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) - \arctan 1 \leq \frac{\frac{1}{3}}{1+1^2}$$
   Soit :
   $$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

Exercice 5.

1. Un sous-espace vectoriel est une partie d'un espace vectoriel, non vide et stable pour les deux opérations.
   F est non vide car le vecteur $\vec{0}$ lui appartient : $\vec{0} = (0,0,0)$, $0+2\times 0 = 0$ et $0+0+0=0$.
   Stabilité : $\forall \vec{u},\vec{v} \in F,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha\cdot\vec{u}+\vec{v} \in F$
   $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1) \quad \vec{v} = (x_2,y_2,z_2) \in F \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1+2y_1 = 0 & \text{et} \quad x_1+y_1+z_1 = 0 \\ x_2+2y_2 = 0 & \text{et} \quad x_2+y_2+z_2 = 0 \end{cases}$
   $\alpha\cdot\vec{u}+\vec{v} = (\alpha x_1+x_2, \alpha y_1+y_2, \alpha z_1+z_2)$
   Alors : $\begin{cases} \alpha x_1+x_2+2(\alpha y_1+y_2) & = & \alpha(x_1+2y_1)+x_2+2y_2 & = & 0 \\ \alpha x_1+x_2+\alpha y_1+y_2+\alpha z_1+z_2 & = & \alpha(x_1+y_1+z_1)+x_2+y_2+z_2 & = & 0 \end{cases}$ donc : $\alpha\cdot\vec{u}+\vec{v} \in F$
2. Si un vecteur $\vec{u} = (x,y,z) \in F$, on a nécessairement : $x+2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2y$
   On doit aussi avoir : $x+y+z=0$.
   Compte tenu de l'égalité précédente, on doit avoir : $-2y+y+z=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=y$.
   Tout vecteur non nul de la forme $(-2y,y,y)$ est donc un générateur de F, par exemple : $(-2,1,1)$.
   Comme tout vecteur non nul est libre, $(-2,1,1)$ est une base de F.

Exercice 6.

1. Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, pour montrer que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ est une base, il suffit de montrer que ces vecteurs sont libres. Soit : $\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_3 + \delta \cdot \vec{v}_4 = \vec{0}$.

   On obtient un système de quatre équations : $\begin{cases} \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

   En retranchant la 1^re de la 2^e et la 4^e de la 3^e, on obtient : $\alpha = \beta$ et $\gamma = \delta$.

   En reportant ces résultats dans la 1^re et la 3^e, on obtient respectivement : $\alpha + 2\gamma = 0$ et $2\alpha + \gamma = 0$, donc finalement : $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

   Par conséquent, n'importe quelle équation donne : $3\alpha = 0$ et finalement : $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Le système de vecteurs est donc libre.

2. Si on additionne ces quatre vecteurs, on obtient : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = (3,3,3,3)$.

   Alors : $(1,1,1,1) = \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_2 + \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_3 + \frac{1}{3} \cdot \vec{v}_4$. Les coordonnées du vecteur $(1,1,1,1)$ sur la nouvelle base sont donc toutes égales à $\frac{1}{3}$.

Exercice 7. On effectue les transformations élémentaires suivantes : $L_2 - 2L_1 \rightsquigarrow L_2$ et $L_3 + L_1 \rightsquigarrow L_3$. On obtient alors la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Puis on effectue : $L_3 \rightsquigarrow L_3 + 2L_2$ et on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -17 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin on permutte les deux dernières colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

La matrice est donc de rang 3. (On pouvait aussi calculer le déterminant et voir qu'il n'est pas nul).

Exercice 8.

1. (a) On exécute les opérations élémentaires : $C_2 \rightsquigarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \rightsquigarrow C_3 - 2C_1$ et on développe le déterminant obtenu par rapport à sa première ligne :

   $$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

   Comme $D \neq 0$, la matrice M est inversible.

   (b) On pose :

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   On effectue les opérations élémentaires : $L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_1$:

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On effectue maintenant : $L_1 \rightsquigarrow L_1 + 2L_3$ et $L_2 \rightsquigarrow -L_2 + 3L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Enfin : $L_1 \rightsquigarrow L_1 - L_2$, puis on multiplie L_3 par -1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

On a donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On vérifie par le calcul que $MM^{-1} = I_3$.

2. (a) Une application est linéaire si elle vérifie pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ et tout réel α : $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ et $f(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot f(\vec{u})$.
   On pose : $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{aligned} f(\vec{u}+\vec{v}) &= \Big((x_1+x_2)+(y_1+y_2)+2(z_1+z_2), 2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2), (x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)\Big) \\ &= \Big(x_1+y_1+2z_1, 2x_1+y_1+z_1, x_1+y_1+z_1\Big) + \Big(x_1+y_2+2z_2, 2x_2+y_2+z_2, x_2+y_2+z_2\Big) \\ &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot \vec{u}) &= \Big(\alpha x_1 + \alpha y_1 + 2\alpha z_1, 2\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1, \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1\Big) \\ &= \Big(\alpha(x_1+y_1+2z_1), \alpha(2x_1+y_1+z_1), \alpha(x_1+y_1+z_1)\Big) \\ &= \alpha\Big(x_1+y_1+2z_1, 2x_1+y_1+z_1, x_1+y_1+z_1\Big) \\ &= \alpha \cdot f(\vec{u}) \end{aligned}$$

   (b) La matrice M_f de f par rapport à la base canonique est obtenue en mettant en colonnes les coordonnées des images de chaque vecteur de cette base par f :
   $f\big((1,0,0)\big) = (1,2,1)$, $f\big((0,1,0)\big) = (1,1,1)$, $f\big((0,0,1)\big) = (2,1,1)$, ce qui donne la matrice M de la première partie.

   (c) Puisqu'on a vu que la matrice M est inversible, l'application f est bijective et sa matrice est la matrice M^{-1}. On a donc :

$$f^{-1}(x,y,z) = (y-z, -x-y+3z, x-z)$$

Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et calculs : Contrôle continu n° 3
11 janvier 2011

L1 : Licence sciences et technologies
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 2h30.

Documents et calculatrices sont interdits.

L'usage des téléphones portables est interdit dans les salles d'examen

Exercice 1.

1. Mettre sous la forme $a + i\,b$ les nombres complexes suivants : $\dfrac{3+6\,i}{3-4\,i}$ et $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$
2. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $3+3\,i$ et $-1-\sqrt{3}\,i$.
3. Calculer $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000}$

Exercice 2. On considère la suite u_n définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_n & = & \sqrt{2u_{n-1}+1} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 1$
2. On **suppose** que u_n converge vers une limite ℓ.
   Justifier, avec précision, que ℓ vérifie alors : $\ell = \sqrt{2\ell+1}$ et que $\ell \geq 1$.
3. ℓ étant défini par la relation de la question 2., montrer l'égalité :
   $$u_n - \ell = 2\,\frac{u_{n-1}-\ell}{\sqrt{2u_{n-1}+1}+\sqrt{2\ell+1}}$$
   En déduire que : $|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}|u_{n-1}-\ell|$; puis que : $|u_n-\ell| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \ell|$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. À quelles conditions la suite a^n est-elle convergente et, dans les cas où elle converge, quelle est sa limite ?
5. Montrer que la suite u_n est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer le développement limité de $\arctan x$ à l'ordre 5, au voisinage de 0.
3. En déduire le développement limité de f, à l'ordre 2, au voisnage de 0.
4. Déduire du développement limité de f, trouvé à la question précédente, qu'en 0, f peut être prolongée en une fonction dérivable telle que $f(0) = -\dfrac{1}{3}$ et $f'(0) = 0$

Exercice 4. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On considère les deux sous-ensemble suivants :

$$F = \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y \text{ et } x = -z\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

.../...

2. Déterminer une base de F et donner sa dimension.
3. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de F et calculer une base de G.

Exercice 5. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs : $\vec{u} = (1,\, 2,\, 0)$ et $\vec{v} = (0,\, 1,\, 1)$ et le sous-espace vectoriel G engendré par le vecteur : $\vec{w} = (1,\, 1,\, 1)$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Soit x et y deux réels tels que : $0 < x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction logarithme sur l'intervalle $[x,\, y]$, montrer que :

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y$$

On justifiera soigneusement que ce théorème s'applique dans les conditions citées.

Exercice 7. Soit le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ 2x + y + z & = & 2 \\ x + 2y + z & = & 1 \end{array} \right.$$

1. Écrire le système sous forme matricielle. On appellera A la matrice du système.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Combien le système admet-il de solutions ?
4. Résoudre le système.

Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Examen de 2^{e} session

7 juin 2011

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 1. *Durée : 1h30*

Tout document est interdit.
Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont interdits.

Exercice 1. Effectuer les calculs suivants :

1. $(2+3i)(1-3i)$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$ et du nombre complexe de module 3 et d'argument $-\dfrac{5\pi}{6}$
3. $\dfrac{2+3i}{1-3i}$

Exercice 2. Soit $a>0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & > & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que : $u_{n+1}^2 - a = \dfrac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$
2. Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 3. En utilisant un développement limité, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2)-1}$$

Exercice 4. On considère les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\vec{e_1} = (1,1,1) \quad \vec{e_2} = (-1,1,0) \quad \vec{e_3} = (1,0,-1)$$

1. Montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (1,0,0)$ dans cette base.

Exercice 5. Montrer que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6.

1. Citer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arcsin(t) \end{array}$
   (a) Quelle est la dérivée de f ?
   (b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arcsin sur l'intervalle $[0,x]$ pour $x \in]0,1[$, démontrer l'inégalité :

$$\forall x \in]0,1[\quad \arcsin x \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Mathématiques et calculs : Contrôle continu n°1
17 Octobre 2011

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de page de l'énoncé : 1 . Durée 1h30.
Correction

Exercice 1
1) Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = 1 - i.$$

2) En déduire le module et l'argument de $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
3) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Correction de l'exercice 1 :
1)
$$|z_1| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \arg(z_1) = -\frac{\pi}{6}.$$
$$|z_2| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}.$$
2)
$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1 \quad \text{et} \quad \arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{12}.$$
3) On détermine la forme algébrique de $z = \cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})$. On trouve
$$z = (\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}) + i(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})$$
D'où
$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 2
Déterminer les racines carrées complexes de $z = -8 - 6i$.

Correction de l'exercice 2 :
On cherche $\omega = x + iy$ tel que $\omega^2 = z$. Ici $2xy = -6$ donc x et y sont de signes contraires. Les deux racines sont $\omega_1 = 1 - i3$ et $\omega_2 = -1 + i3$.

Exercice 3
Soit $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.
1) Calculer z^2 sous la forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2) En déduire la forme exponentielle de z.
3) En déduire $\cos(\frac{3\pi}{8})$.

Correction de l'exercice 3 :

1) Les réponses sont :

$$z^2 = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$$

$$z^2 = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$|z^2| = 4 \quad \text{et} \quad \arg(z^2) = \frac{3\pi}{4}.$$

2) z est une racine carrée de z^2 donc

$$z = 2e^{i\frac{3\pi}{8}} \quad \text{ou} \quad z = -2e^{i\frac{3\pi}{8}}.$$

Comme $\cos(\frac{3\pi}{8}) > 0$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$, on en déduit que

$$z = 2e^{i\frac{3\pi}{8}}.$$

3)

$$\cos(\frac{3\pi}{8}) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2+4}{3}}\ , \forall n \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$.

2) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 2$ est géométrique et préciser sa raison.

3) Calculer v_n en fonction de v_0. En déduire la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

Correction de l'exercice 4 :

1) On démontre par récurrence la propriété (P_n) : $u_n \geqslant 0$.

– Initialisation : $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc (P_0) est vraie.

– Hérédité : On suppose que (P_n) est vraie pour un certain $n \geqslant 0$. Alors,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2+4}{3}}$$

est bien défini puisque $\dfrac{u_n^2+4}{3} \geqslant 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. De plus $u_{n+1} \geqslant 0$ car la fonction racine carrée est positive.

Donc, par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$.

2) On a

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 2 = \frac{u_n^2+4}{3} - 2 = \frac{u_n^2-2}{3} = \frac{1}{3}v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

3) (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $v_0 = u_0 - 2 = -2$ d'où

$$v_n = -\frac{2}{3^n}.$$

On en déduit que (v_n) tend vers 0, et donc que $u_n^2 = v_n + 2$ tend vers 2. Comme $u_n \geqslant 0$, on a $u_n = \sqrt{u_n^2}$, d'où (u_n) tend vers $\sqrt{2}$ (par continuité de la fonction racine carrée...) .

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}\ , \forall n \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 0$.

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant 2$.

3) Montrer que (u_n) est croissante (on pourra considérer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$).

4) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Correction de l'exercice 5 :

1) On démontre par récurrence la propriété (P_n) : $u_n > 0$.

- Initialisation : $u_0 = 1 > 0$ donc (P_0) est vraie.
- Hérédité : On suppose que (P_n) est vraie pour un certain $n \geqslant 0$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{2u_n} > 0$ donc (P_{n+1}) est vraie.

Donc, par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 0$.

2) On démontre par récurrence la propriété (P_n) : $u_n \leqslant 2$.

- Initialisation : $u_0 = 1 \leqslant 2$ donc (P_0) est vraie.
- Hérédité : On suppose que (P_n) est vraie pour un certain $n \geqslant 0$. Alors, $2u_n \leqslant 4$, et, comme la fonction racine carrée est croissante,
$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{4} = 2,$$
et donc (P_{n+1}) est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant 2$.

3) On peut considérer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ car pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 0$ et en particulier $u_n \neq 0$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{2}{u_n}}.$$
Or, d'après la question 2), $u_n \leqslant 2$, donc $\sqrt{\frac{2}{u_n}} \geqslant 1$. Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$, ce qui montre que (u_n) est croissante.

4) (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge. Sa limite l vérifie
$$l = \sqrt{2l} \quad \Leftrightarrow \quad l^2 = 2l \text{ et } l \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad l(l-2l) = 0 \text{ et } l \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad l = 0 \text{ ou } l = 2.$$
Ainsi (u_n) ne peut converger que vers 0 ou 2. Mais comme (u_n) est croissante et $u_0 = 1 > 0$, (u_n) ne peut pas converger vers 0. En conclusion, (u_n) converge vers $l = 2$.

Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Mathématiques et Calcul : Contrôle continu n°2
21 Novembre 2011

L1 : Licence Sciences et Technologies,
mention Mathématiques, Informatique et Applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée : 1h30.

NB : *Ce sujet contient 5 exercices. Il n'est pas nécessaire de le traiter entièrement pour obtenir la note maximale. Chaque résultat doit être démontré clairement.*

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^3-5x+6}\right)$$

2)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)$$

3)
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-3x+2}\right)$$

4)
$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\exp(x)-\exp(3)}{x^2-4x+3}\right)$$

Exercice 2

Soient deux réels a et b. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ ax^2+bx+1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

1) Déterminer pour quels réels a et b la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Calculer la dérivée de f sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

3) Déterminer pour quels réels a et b la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

On considère la fonction $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 2\,x-2+\cos(x)\end{array}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(\pi)$. Que peut-on en déduire pour l'équation $f(x)=0$?

2) Calculer la dérivée de f. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution dans $[0,\pi]$, notée α.

4) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $F(x)=(x+\alpha-2)\,(x-\alpha)+\sin(x)-\sin(\alpha)$. En étudiant les variations de la fonction F, montrer que $F\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Le but de l'exercice est d'étudier la bijection réciproque de la fonction tangente hyperbolique :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ & x & \to & \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{array}$$

1) Montrer que la fonction tangente hyperbolique est dérivable et strictement croissante. Déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

2) En déduire que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. On note Argth sa bijection réciproque.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.

4) Calculer la dérivée de la fonction Argth.

Exercice 5

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$.
On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b]$.

Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} h: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - pg(x) \end{array}.$$

2) Montrer que h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et que $h(a) = h(b)$.

3) En déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, puis que

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4) On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ où l est un nombre réel. Montrer que

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = l.$$

5) *Application.* Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{Arccos}\, x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Contrôle continu n° 3
16 janvier 2012

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique, puis trigonométrique, le nombre complexe : $z = \dfrac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$.
Calculer z^3.

Solution

$z = \dfrac{-4(1 - i\sqrt{3})}{4} = -1 + i\sqrt{3} = 2\Big(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$z^3 = 8e^{i\frac{6\pi}{3}} = 8$

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $u_0 > 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(u_n + \dfrac{a}{u_n}\Big)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$
2. Montrer que : $u_{n+1}^2 - a = \dfrac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$.
3. Montrer que pour $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Solution

1. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$
   (i) $u_0 > 0$ par l'énoncé
   (ii) Si pour $0 \leq k \leq n \quad u_k > 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(u_n + \dfrac{a}{u_n}\Big) > 0$ puisque $a > 0$.
2. $u_{n+1}^2 - a = \dfrac{1}{4}\Big(u_n + \dfrac{a}{u_n}\Big)^2 - a = \dfrac{1}{4}\Big(u_n^2 + 2a + \Big(\dfrac{a}{u_n}\Big)^2 - 4a\Big) = \dfrac{1}{4}\Big(u_n^2 - 2a + \Big(\dfrac{a}{u_n}\Big)^2\Big) = \dfrac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$.
3. D'après la question précédente, $u_n^2 - a$ est un carré donc positif ; comme u_n et a sont positifs, on en conclut que $u_n \geq \sqrt{a}$.
   Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on montre soit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, soit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
   (i) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$: $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}\Big(1 + \dfrac{a}{u_n^2}\Big) \leq \dfrac{1}{2}(1 + 1) = 1$ puisque, d'après ce qui précède, $u_n^2 \geq a$.
   (ii) $u_{n+1} - u_n \leq 0$: $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a}{u_n} - u_n\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a - u_n^2}{u_n}\Big) \leq 0$, toujours d'après la question précédente.
4. On a montré que la suite était décroissante et qu'elle était minorée par $\sqrt{a}$, elle est donc convergente vers une limite ℓ.
   On a, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \sqrt{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad \ell \neq 0, \quad \ell = \dfrac{1}{2}\Big(\ell + \dfrac{a}{\ell}\Big)$, soit : $\ell^2 - a = 0$ et on choisit la racine positive : $\ell = \sqrt{a}$.

Exercice 3.

1. Quel est le développement limité en 0, à l'ordre 5, de la fonction $\cos x$. En déduire le développement limité en 0, à l'ordre 5, de $1-\cos x$.
2. Quel est le développement limité en 0, à l'ordre 4, de la fonction e^x ; en déduire le développement limité en 0, à l'ordre 5, de $x(e^x-1)$.
3. Calculer le développement limité en 0, à l'ordre 3, de la fonction $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x(e^x-1)}$.
4. En déduire que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Quelle est la valeur du prolongement en 0 ?

Solution

1. D'après le cours : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \circ(x^5)$

   D'où : $1-\cos x = x^2\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4!} + \circ(x^3)\Big)$

   D'après le cours : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \circ(x^4)$

   D'où : $x(e^x-1) = x^2\Big(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^3}{4!} + \circ(x^3)\Big)$

   On a donc : $f(x) = \Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4!} + \circ(x^3)\Big)\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\circ(x^3)}$

   Il faut calculer le développement de : $\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}}$

   D'après le cours : $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \circ(u^3)$ avec $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^3}{4!}$

   $\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}} = 1 - \Big(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^3}{4!}\Big) + \Big(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^3}{4!}\Big)^2 - \Big(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^3}{4!}\Big)^3 + \circ(x^3)$

   En ne gardant que les puissances inférieures ou égales à 3 :

   $\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^3}{8} + \circ(x^3) = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{12} + \circ(x^3)$

   $f(x) = \Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4!} + \circ(x^3)\Big)\Big(1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{12} + \circ(x^3)\Big) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^3}{48} + \circ(x^3)$
2. $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\cancel{f'(0) = -\frac{1}{4}}$

Exercice 4. Soit la fonction f, définie par : $f(x) = \arcsin\Big(\dfrac{2x}{1+x^2}\Big)$.

1. Quel est le domaine de définition de cette fonction ? Quelle est la valeur de $f(0)$?
2. Calculer la dérivée f' de cette fonction.
3. Déduire des questions précédentes que, pour $-1 < x < 1$, f s'écrit facilement en fonction de $\arctan(x)$.

Solution

1. La fonction arcsinus est définie entre -1 et 1 ; on doit donc avoir : $-1 < \dfrac{2x}{1+x^2} < 1$, soit les deux inégalités :
   (i) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0$
   (ii) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$

   Les deux étant vérifiées pour tout x, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. $f(0) = \arcsin(0) = 0$.
2. On a à dériver une fonction composée $f \circ g$ avec : $f(x) = \arcsin(x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

   $(f \circ g)'(x) = g'(x) f'\big(g(x)\big)$.

   $g'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2} = 2\Big(\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}\Big) = 2\Big(\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Big)$

$f'\big(g(x)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} = \left|\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right| = \dfrac{1+x^2}{|1-x^2|}$

$g'(x)f'\big(g(x)\big) = \dfrac{1-x^2}{|1-x^2|}\,\dfrac{2}{1+x^2}$

3. Pour $-1 < x < 1$ on a : $1-x^2 > 0$; donc : $\dfrac{1-x^2}{|1-x^2|} = 1$.

   Alors : $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ et $f(x) = K + 2\arctan(x)$. Comme $f(0) = 0$, $K = 0$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Justifier le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x, x+1]$.
3. Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x, x+1]$ et en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \frac{1}{x^2}$$

4. En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\cos\left(\dfrac{1}{1+x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

.../...

Solution

1. f est composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.
2. Si $x > 0$, la fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à f sur cet intervalle.
3. En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[x, x+1]$, on obtient :

$$\exists c \in]x, x+1[\quad \text{tel que} \quad \left|\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = (x+1-x)\left(\frac{1}{c^2}\right)\left(\sin\left(\frac{1}{c}\right)\right)$$

   Puisque $c \in]x, x+1[$, $\quad c > x$ et $\dfrac{1}{c^2} < \dfrac{1}{x^2}$ et, le sinus étant une fonction bornée par 1, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \frac{1}{x^2}$$

4. D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|x\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \frac{1}{x}$$

   et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\cos\left(\dfrac{1}{1+x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = 0$

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les familles de vecteurs suivantes :

i. $\mathcal{F}_1 = \{\vec{u}_1 = (1, -1, -2), \quad \vec{u}_2 = (1, 0, -1), \quad \vec{u}_3 = (-5, 3, 7)\}$

ii. $\mathcal{F}_2 = \{\vec{v}_1 = (1, -1, -2), \quad \vec{v}_2 = (1, 0, -1), \quad \vec{v}_3 = (6, 4, -2)\}$

Si l'une de ces deux familles (ou les deux) est (ou sont) une (des) bases $\mathbb{R}^3$, calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ dans cette base.
Dans le cas contraire, quelle relation y a-t-il entre les vecteurs de la famille ?

Solution

i. Au choix : $\det \mathcal{F}_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

$\mathcal{F}_1$ est libre et elle est génératrice puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, c'est donc une base.

Ou bien on calcule $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{u}_3 = \vec{0}$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \alpha+\beta-5\gamma & = & 0 \\ -\alpha+3\gamma & = & 0 \\ -2\alpha-\beta+7\gamma & = & 0 \end{cases}$$

La 2^e^ équation donne : $\alpha = 3\gamma$ que l'on reporte dans la 1^re^ : $\beta - 2\gamma = 0$ et dans la 3^e^ : $-\beta + \gamma = 0$. Donc : $\alpha = \beta = \gamma = 0$ le système est libre et forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour trouver les coordonnées de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dans la base $\mathcal{F}_1$, il faut résoudre les systèmes :

$$(I)\begin{cases} \alpha+\beta-5\gamma & = & 1 \\ -\alpha+3\gamma & = & 0 \\ -2\alpha-\beta+7\gamma & = & 0 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} \alpha+\beta-5\gamma & = & 0 \\ -\alpha+3\gamma & = & 1 \\ -2\alpha-\beta+7\gamma & = & 0 \end{cases}$$

La même méthode que précédemment donne : $\vec{e}_1 = -3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

ii. $\det \mathcal{F}_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

La famille $\mathcal{F}_2$ est liée et : $\vec{v}_3 = -4\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2$, par exemple.

Exercice 7. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant de A. La matrice A est-elle inversible ?

Solution

On remplace la 2^e^ ligne par la 2^e^ moins la 1^re^ et la 3^e^ par la 3^e^ plus la 1^re^ et on développe par rapport à la 1^re^ colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Dans le déterminant 3×3, on remplace la 2^e^ colonne par la 2^e^ moins la 1^re^ et la 3^e^ par la 3^e^ plus la 1^re^ et on développe par rapport à la 1^re^ ligne :

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -24$$

Le déterminant étant non-nul, la matrice est inversible.

Exercice 8. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x-y & = & 1 \\ -x+2y+z & = & -1 \\ 2x+2y+3z & = & 1 \end{cases}$$

1. Mettre ce système sous forme matricielle : $AX = B$.
2. Calculer l'inverse de la matrice A par la méthode du pivot de Gauss.
3. Calculer les solutions de ce système.

Solution

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_2 \leftsquigarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftsquigarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftsquigarrow 4L_2 - L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftsquigarrow L_2 - L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftsquigarrow L_1 + L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

3. On a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Examen de 2e session (11 juin 2012)

Corrigé

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Exercice 1. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \sqrt{a_n b_n}, \quad a_0 = a \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}(a_n+b_n), \quad b_0 = b \end{array}\right. \qquad 0 < a < b$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geq a_n$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que les deux suites sont convergentes et ont même limite.

Solution

1. Les deux suites sont à termes positifs puisque $0 < a < b$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \geq 0$$

2. D'après 1., $b_n \geq a_n$, donc :
   (a) $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n a_n} = a_n$; la suite a_n est croissante.
   (b) $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n) \leq \frac{1}{2}(b_n+b_n) = b_n$; la suite b_n est décroissante.
3. On a le classement : $0 < a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0 = b$.
   La suite a_n est croissante et majorée par b et la suite b_n est décroissante et minorée par a, ces deux suites sont donc convergentes respectivement par ℓ et ℓ'.
   Les limites vérifient : $\ell' = \frac{1}{2}(\ell + \ell')$, on en déduit : $\ell = \ell'$.

Exercice 2.

1. Citer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur l'intervalle $[a,b]$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$. *(Remarque : seules les réponses donnant toutes les hypothèses et la conclusion seront prises en compte pour la correction.)*
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$, montrer les inégalités :

$$x < \frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < y$$

Solution

1. Soit une fonction f à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a,b[$; il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.
2. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction définie par : $x \longmapsto \ln x$ est continue et dérivable, elle vérifie donc les hypothèses du théorème des accroissements finis sur tout intervalle $[x,y]$ contenu dans $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\ln(y) - \ln(x) = (y-x)\frac{1}{c} \quad \text{avec} \quad 0 < x < c < y$$

   Donc : $0 < x < c = \dfrac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < y$.

Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Examen du 11 juin 2013 *(durée : 1h30)*

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Les documents, calculatrices, téléphones portables ne sont pas autorisés

---

Exercice 1. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(2a_n+b_n), \quad a_1=4 \\ b_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(a_n+2b_n), \quad b_1=1 \end{cases}$$

1. i. Calculer $a_{n+1}-b_{n+1}$ et montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>b_n$ et que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.
   ii. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   iii. En déduire que les deux suites sont convergentes et ont même limite.
2. i. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)$ et en déduire la valeur de b_n en fonction de n.
   ii. Calculer la limite commune des deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution

1. i. $a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{1}{3}\big(2a_n+b_n-a_n-2b_n\big)=\dfrac{1}{3}\big(a_n-b_n\big)$
   On en déduit : $a_n-b_n=\dfrac{1}{3}\big(a_{n-1}-b_{n-1}\big)=\dfrac{1}{3^2}\big(a_{n-2}-b_{n-2}\big)=\cdots=\dfrac{1}{3^{n-1}}\big(a_1-b_1\big)=\dfrac{1}{3^{n-2}}>0$
   Alors : $a_n>b_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.
   ii. $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3}\big(2a_n+b_n\big)-a_n=\dfrac{1}{3}\big(b_n-a_n\big)=-\dfrac{1}{3^{n-1}}<0$ la suite (a_n) est décroissante.
   $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{3}\big(a_n+2b_n\big)-b_n=\dfrac{1}{3}\big(a_n-b_n\big)=\dfrac{1}{3^{n-1}}>0$ la suite (b_n) est croissante.
   iii. On a donc : $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots<a_n<\cdots<a_2<a_1$. La suite (a_n) est décroissante et minorée par b_1 elle est donc convergente ; (b_n) est croissante et majorée par a_1 elle est donc convergente. De plus : $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, les deux limites sont donc égales.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_3-b_2)+(b_2-b_1)=b_n-b_1$.
   Or $b_{k+1}-b_k=\dfrac{1}{3^{k-1}}$ donc : $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{3^{k-1}}=\dfrac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{1-\frac{1}{3}}=b_n-b_1$, d'où : $b_n=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3^{n-2}}$.
   On a donc : $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{5}{2}$.

Exercice 2.

1. Calculer le module et l'argument, compris entre 0 et 2π, du nombre complexe : $z=(1+i\sqrt{3})^{20}$.
2. Mettre le nombre complexe $z=\dfrac{4-3i}{i-1}$ sous la forme : $z=a+ib$.
3. Montrer que si un nombre complexe est de module 1, on a : $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$.
   Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1, tels que : $z_1z_2+1\neq 0$. Montrer que le nombre $Z=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

Solution

1. $1+i\sqrt{3}=2\Big(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   D'où : $z=2^{20}e^{i\frac{20\pi}{3}}=2^{20}e^{i\frac{(18+2)\pi}{3}}=2^{20}e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On a donc : $|z|=2^{20}$ et l'argument demandé est : $\dfrac{2\pi}{3}$.

2. $z = \dfrac{4-3i}{i-1} = \dfrac{(4-3i)(-i-1)}{(-1)^2+1^2} = -\dfrac{1}{2}(7+i)$.

3. Si le module de z est 1, on a : $z\overline{z} = 1$; d'où : $\overline{z} = \dfrac{1}{z}\cdot$

   $\overline{Z} = \dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \dfrac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}} = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = Z \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot$ En déduire le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ et sa limite en zéro.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 en zéro de la fonction exponentielle e^x. En déduire le développement à l'ordre 4 en zéro de $e^x + e^{-x}$ et trouver un équivalent en zéro à la fonction : $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} - 1$. Quelle est la limite de f en zéro ?

Solution

1. En zéro, on a : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)$, d'où : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \circ(x^2)$

   On a :

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \exp\Big(\frac{\ln(1+x)}{x}\Big) = \exp\Big(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\Big) = e\exp\Big(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\Big)\\ &= e\Big(1 + (-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}) + \frac{1}{2}(-\frac{x}{2})^2 + \circ(x^2)\Big) = e\Big(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + \circ(x^2)\Big)\end{aligned}$$

   On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0}\Big((1+x)^{\frac{1}{x}}\Big) = e$.

2. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \circ(x^4)$.

   $e^x + e^{-x} = \Big(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}\Big) + \Big(1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}\Big) + \circ(x^4) = 2 + x^2 + \dfrac{x^4}{12} + \circ(x^4)$.

   On en déduit : $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{12}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; soit $E = \{(x,y,z) \mid x + 2y - 3z = 0\}$, $\vec{a} = (1,2,-3)$ et $F = \mathrm{Vect}(\vec{a})$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de E.
2. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Solution

1. Soit $\vec{u} = (x,y,z)$, $\vec{v} = (x',y',z') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $\vec{u} + \lambda\vec{v} = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$ alors : $x + \lambda x' + 2(y+\lambda y') - 3(z+\lambda z') = x + 2y - 3z + \lambda(x' + 2y' - 3z') = 0$. Donc $\vec{u} + \lambda\vec{v} \in E$ et E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   $\vec{u} = (x,y,z) \in E \iff x = -2y + 3z \iff \vec{u} = (-2y+3z, y, z) = y(-2,1,0) + z(3,0,1)$.

   Les vecteurs $(-2,1,0)$ et $(3,0,1)$ engendrent donc E.

   Ils sont indépendants : $\alpha(-2,1,0) + \beta(3,0,1) = (0,0,0) \iff \alpha = \beta = 0$.

   Donc ils forment une base de E qui est de dimension 2.

2. $\vec{a} \notin E$ puisque : $1 + 2\times 2 - 3\times(-3) = 14 \neq 0$, donc : $E \cap F = \{0\}$. De plus $\dim(F) = 1$; on a donc : $\dim(E) + \dim(F) = 3$, donc : $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -x + 2y - z &= 1\\ -4x + 5y - 3z &= 2\\ -2x + 2y - z &= 3\end{cases}$$

1. Donner la matrice A de ce système.

2. Calculer le déterminant de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse A^{-1}.
4. Calculer les solutions du système.

Solution

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. On remplace la première ligne par la différence entre la première et la troisième :
$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$
3. Le déterminant de A étant non-nul, la matrice A est inversible. Calcul de l'inverse par la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 - L_3 \mapsto L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 + 4L_1 \mapsto L_2 \\ L_3 + 2L_1 \mapsto L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad 3L_3 - L_2 \mapsto L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$2L_2 - L_3 \mapsto L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4. La solution du système est donc :
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exercice 6.

1. Quels sont le domaine de définition et la dérivée de la fonction : $x \longmapsto \arcsin(x)$.
2. Citer le théorème des accroissements finis avec toutes ses hypothèses.
3. Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, \ \arcsin(x) < \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

Solution

1. Voir le cours
2. Voir le cours
3. Pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction arcsin est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis :
$\exists c \in]0, x[$ tel que : $\arcsin(x) - \arcsin(0) = x \arcsin'(c) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - c^2}} < \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ puisque $0 < c < x$. D'où le résultat.