Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Licence 1ère année, 2017-2018, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°1 : Nombres complexes et géométrie du plan

Exercice 1. Mettre sous la forme algébrique $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$ les nombres complexes suivants:

(1) $z_1 = (1-3i)(1+3i)$

(2) $z_2 = 3 + \dfrac{2}{i}$

(3) $z_3 = (1+i)(2-i)(3+i)$

(4) $z_4 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{1-i}{2-5i}$

(5) $z_5 = \dfrac{e^{2i\theta} + e^{4i\theta}}{1 - e^{6i\theta}}$ où θ n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2.
1) Donner le module et un argument des nombres complexes suivants :
$(a)\, 2+2i$ $(b)\, i^{95}$ $(c)\, \sqrt{3}+3i$ (d) $e^{e^{i\alpha}}$ (e) $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

2) Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :
$(a)\, (1+i)^5$ $(b)\, \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ $(c)\, (1-\sqrt{3}\,i)^4$

3) Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire module et l'argument de $w = uv$ et $z = \frac{u}{v}$.

Exercice 3.
(1) Donner sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines carrées de i.
(2) Donner sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines carrées de $-i$.
(3) Donner sous forme trigonométrique les racines quatrièmes de i.
(4) Calculer sous forme algébrique les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
(5) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$, puis les racines quatrièmes de i sous forme algébrique.

Exercice 4. On note $j = e^{2i\pi/3}$.
(1) Mettre j et j^2 sous la forme $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.
(2) Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.
(3) Factoriser le polynôme $z^3 - 1$.
(4) En déduire les racines réelles et complexes du polynme $z^3 - 1$.

Exercice 5. Calculer les racines carrées de 1, i, $3+4i$, $8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 6. Pour chacune des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes, déterminer si elle est injective :

(1) $f_1 : z \mapsto z$
(2) $f_2 : z \mapsto \mathrm{Re}(z)$
(3) $f_3 : z \mapsto z^2$
(4) $f_4 : z \mapsto z^3$
(5) $f_5 : z \mapsto iz + 1$
(6) $f_6 : z \mapsto (1+3i)\,\mathrm{Re}(z) + 4\,\mathrm{Im}(z)$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

(E_1) $z^2 - 1 + 2i = 0$

(E_2) $(z^7 - 1)(z^3 + 1/27) = 0$ (donner les solutions sous forme trigonométrique)

(E_3) $z^2 + \sqrt{3}z - i = 0$

(E_4) $z^4 + z^3 - 2z = 0$

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

(1) $S = \sum_{k=0}^{32} \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k$

(2) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

(3) $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$

Exercice 9.

(1) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
(2) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ puis calculer $\cos(\pi/5)$ et $\cos(2\pi/5)$.
(3) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^4(\theta)$ et $\sin^4(\theta)$ (c'est-à-dire les exprimer en fonction des $\cos(k\theta), \sin(k\theta)$).

Exercice 10.

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1)\ \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad (E_2)\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ , \qquad (E_3)\ \sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 1\ .$$

(2) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes :

$$(I_1)\ \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad (I_2)\ \cos^2(x) \geqslant \cos(2x) + \frac{3}{4}\ .$$

Exercice 11.

(1) Calculer : $S = 1 + e^{2i\pi/5} + e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} + e^{8i\pi/5}$.
(2) En déduire la valeur de : $R = 1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(6\pi/5) + \cos(8\pi/5)$, puis celle de $\cos(2\pi/5)$.

Exercice 12.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$. Que vaut le module de z ?
(2) Combien de solutions complexes a l'équation $z^{11} = -1$? Combien de solutions réelles ?
(3) Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

$$\mathbb{U}_3 = \{z \in \mathbb{C}, \quad z^3 = 1\} \qquad \mathbb{U}_6 = \{z \in \mathbb{C}, \quad z^6 = 1\} \qquad \mathbb{U}_8 = \{z \in \mathbb{C}, \quad z^8 = 1\}$$

Exercice 13. Soit $n \geqslant 1$. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z-2)^n = (z+2)^n$.

Exercice 14. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. On note M_1 (resp. M_2) le point d'affixe z_1 (resp. z_2).

(1) Quelle(s) condition(s) géométrique(s) doivent vérifier les points M_1 et M_2 pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit réel?
(2) Quelle(s) condition(s) géométrique(s) doivent vérifier les points M_1 et M_2 pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit imaginaire pur?

Exercice 15. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer les ensembles E, F, G des points $M(x,y)$ d'affixes z tels que :

(1) E : $|(1-i)z + 2i| = 9$
(2) F : $|((z+1)/(z-1+i\sqrt{3})| = 1$
(3) G : $(1+iz)/(1-iz)$ soit de module 1.

Donner pour chacun des ensembles une interprétation géométrique.

Exercice 16. Soit $j = e^{2i\pi/3}$.

(1) Montrer que $\bar{j} = j^2$.
(2) Soient $z_0 = 1 + i, \quad z_1 = jz_0, \quad z_2 = j^2 z_0$.
On note M_0, M_1, et M_2 les points d'affixes z_0, z_1 et z_2 respectivement.
Montrer que $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral.
(3) Soient A, B, et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b, c.
Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = -j$ ou $\frac{c-a}{b-a} = -\bar{j}$.
(4) En déduire que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $aj^2 + bj + c = 0$ ou $aj + bj^2 + c = 0$.