UNIVERSITÉ
PARIS DESCARTES
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mise à niveau ES

2016

Table des matières

1

Trigonométrie

Introduction

Ce chapitre est inspiré du cours X Maths 1ère S

xmaths.free.fr/1S/cours/cours.php ?nomcours=1Strigcours&amp ;page=01

1.1 Cours

1.1.1 Angles orientés

Remarque
On considère le cercle de centre O et de rayon 1 que l'on appelle cercle trigonométrique. Le périmètre de ce cercle est 2π. On considère la droite graduée Δ tangente au cercle au point I de coordonnées $(1, 0)$. Pour un réel x repéré sur Δ on considère le point M que l'on obtiendrait sur le cercle par "enroulement" de la droite sur le cercle.

On dit que M est l'image sur le cercle du réel x.

Par convention, l'enroulement se fait dans le sens inverse des aiguilles d'une montre appelé sens trigonométrique.

Exemple
Le périmètre du cercle de rayon 1 étant égal à 2π

- le point correspondant à π est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, un demi-cercle à partir de I,
- le point correspondant à $\frac{\pi}{2}$ est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, la moitié d'un demi-cercle à partir de I,
- le point correspondant à $\frac{\pi}{3}$ est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, le tiers d'un demi-cercle à partir de I,

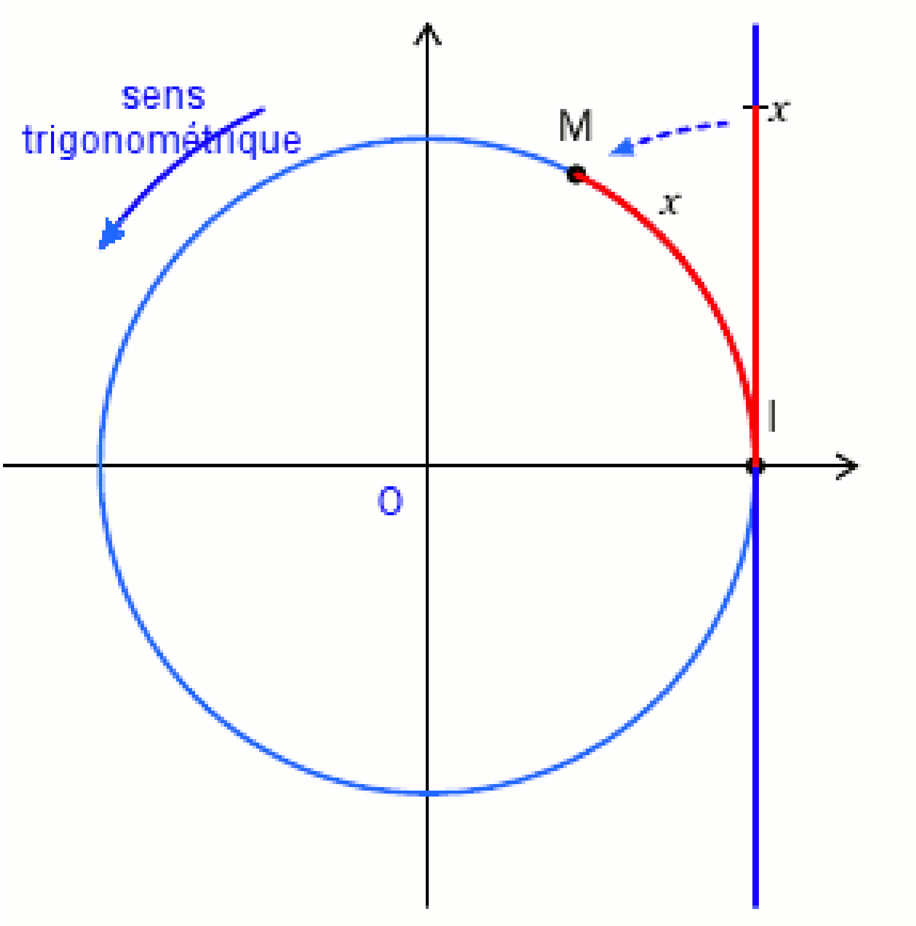

FIGURE 1.1 – cercle trigonométrique

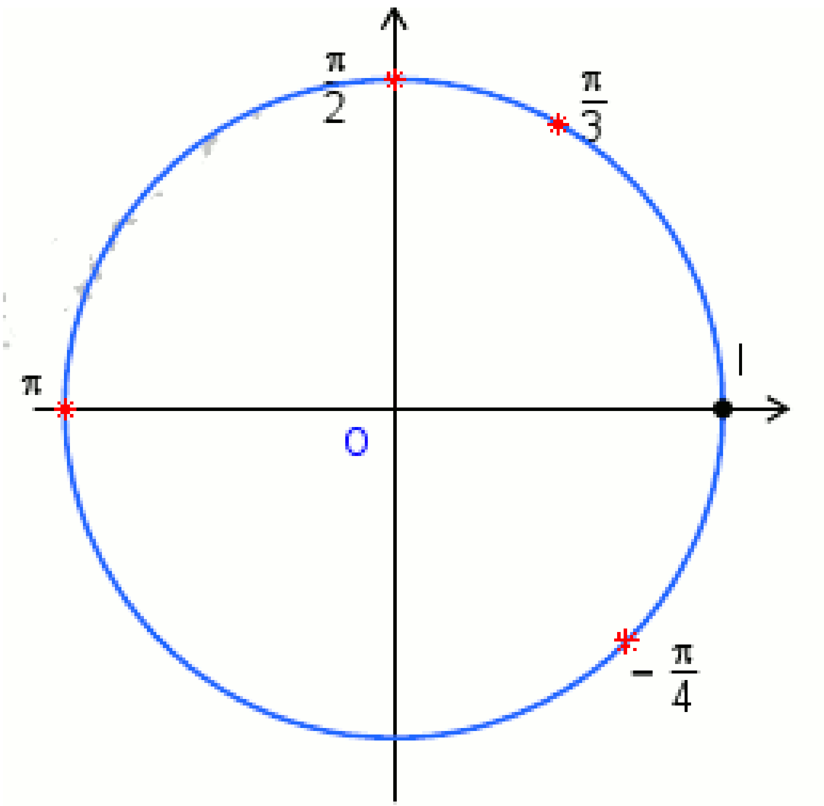

FIGURE 1.2 – Exemples

– le point correspondant à $-\frac{\pi}{4}$ est obtenu en parcourant, dans le sens inverse du sens trigonométrique, le quart d'un demi-cercle à partir de I,

.

Correspondances

degrés	360°	180°	90°	60°	45°	30°	0°
radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

1.1.2 Angles orientés, suite

Définition

On considère sur le cercle trigonométrique, le point M image su réel x.

On dit que x est une mesure en radians de l'angle orienté noté couramment $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

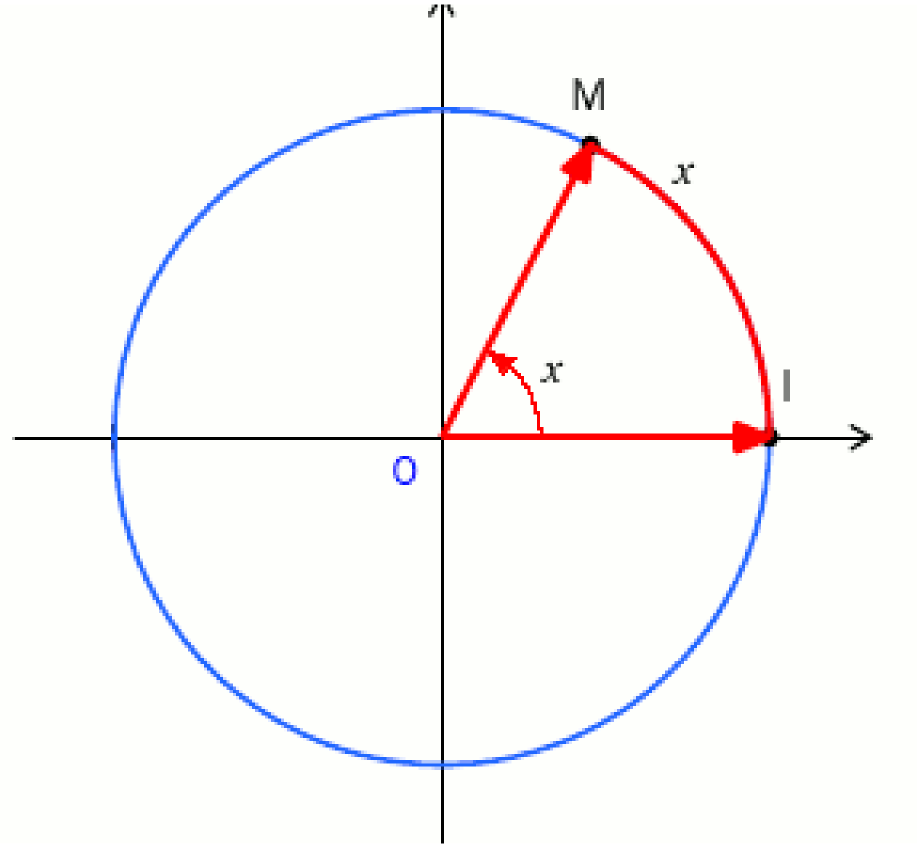

Figure 1.3 – mesure d'angle orienté

Définition

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ etl $\vec{v}$ déterminent un angle orienté noté $(\vec{u}, \vec{v})$.

En considérant un cercle trigonométrique, on définit une mesure x en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Propriété

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté et x une mesure en radians de $(\vec{u}, \vec{v})$. L'ensemble des mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des réels $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ a une et une seule mesure dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, cette mesure est appelée mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$

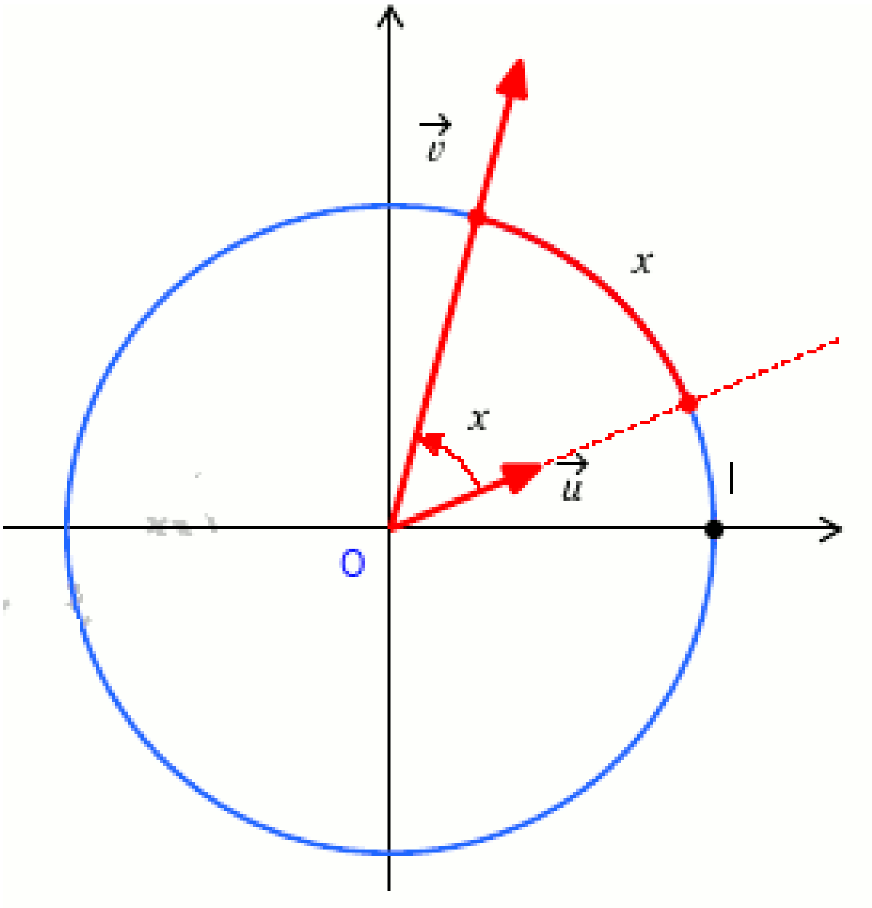

FIGURE 1.4 – angle orienté

1.1.3 Sinus-Cosinus

Définition
On dit qu'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est direct lorsque $(\vec{i},\vec{j}) = +\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct, si M est le point du cercle trigonométrique image du réel x,

- l'abscisse de M est appelée cosinus de x, elle est notée $\cos x$ ou $\cos(x)$,
- l'ordonnée de M est appelée sinus de x, elle est notée $\sin x$ ou $\sin(x)$,

Propriété
Pour tout réel x on a : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$; $-1 \leq \sin(x) \leq 1$; $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

1.1.4 Sinus-Cosinus, suite

Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

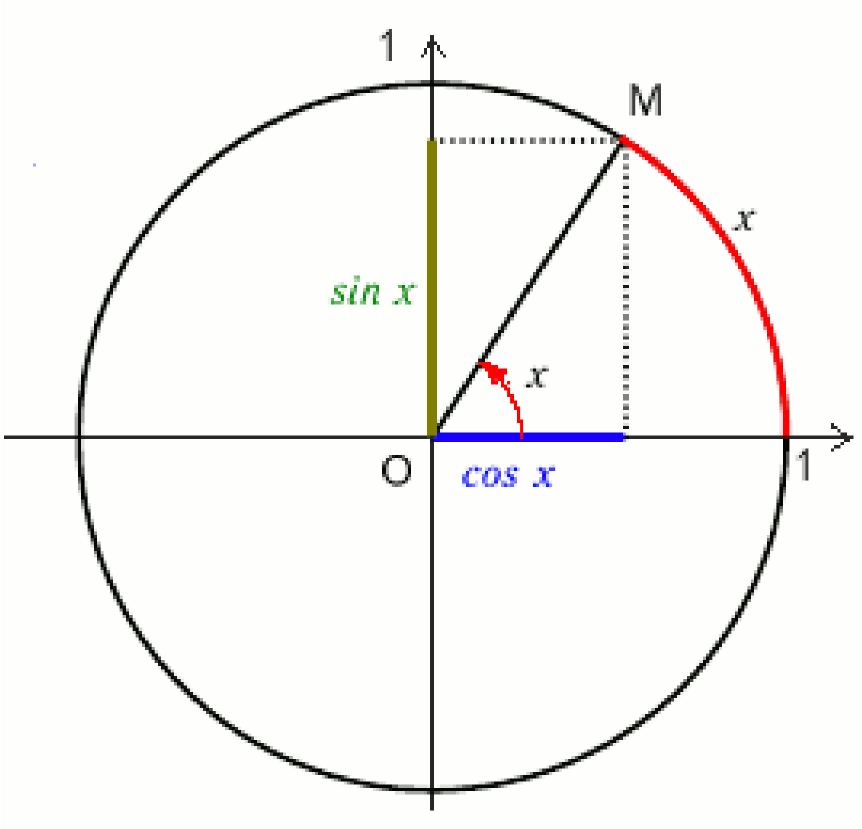

FIGURE 1.5 – Sinus, cosinus d'un angle

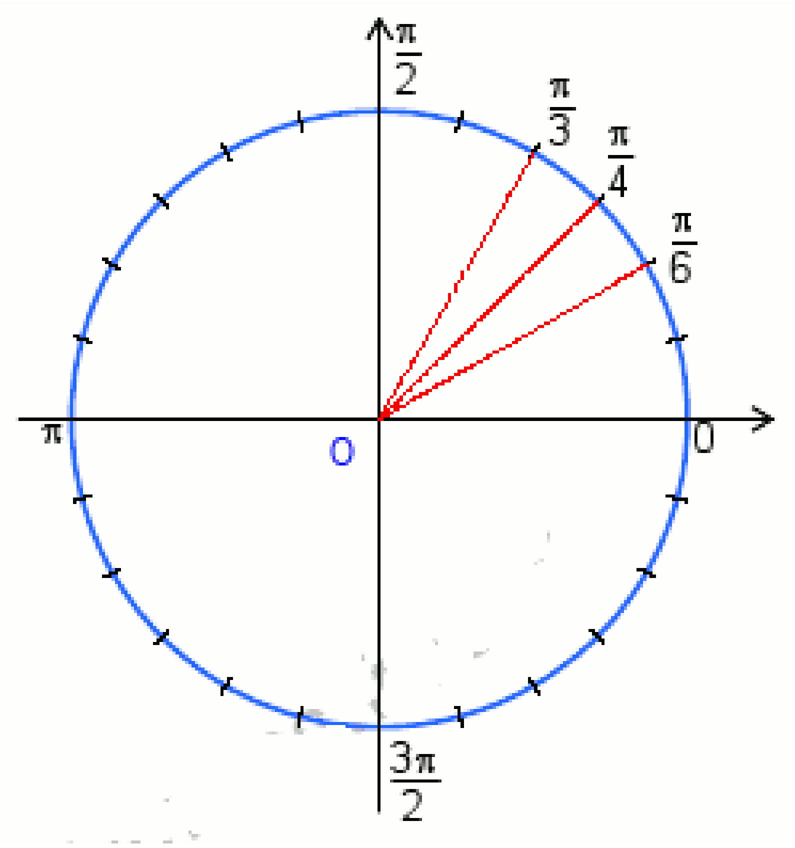

FIGURE 1.6 – mesures d'angles particulières

Définition

On appelle fonction cosinus, la fonction cos : $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x)\end{array}\right.$.

On appelle fonction sinus, la fonction sin : $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x)\end{array}\right.$.

Complément
Pour l'étude des propriétés de ces fonctions voir le chapitre fonctions du cours (ma)Thématique de pré-rentrée.

1.1.5 Propriétés

Propriété : Formules d'addition
Pour tout couple de réels (a, b), on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \quad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+)\sin(b)\cos(a), \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

Propriété : Formules de duplication
Pour tout réel a, on a :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

1.2 Exercices

1.2.1 Exercice 1

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à

$0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{2},\ -\pi,\ 2\pi,\ \frac{13\pi}{3},\ -\frac{121\pi}{2}$.

1.2.2 Exercice 2

Donner les valeurs de

$\cos(0)$, $sin(0)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(\pi)$, $\sin(\pi)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$,

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(2\pi)$, $\sin(2\pi)$.

1.2.3 Exercice 3

Pour chaque question, une seule réponse est juste

1. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ est égal à $(i)\ -\frac{1}{2}$, $(ii)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(iii)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ est égal à $(i)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(ii)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(iii)\ \frac{1}{2}$
3. En utilisant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on trouve $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ égal à : $(i)\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $(ii)\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $(iii)\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$
4. Si $x \in [\pi,\ 2\pi]$ et $\cos(x) = \frac{1}{2}$ alors : $(i)\ x = \frac{\pi}{3}$, $(ii)\ x = \frac{11\pi}{6}$, $(iii)\ x = \frac{5\pi}{3}$
5. $2x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ équivaut à : $(i)\ 2x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$, $(ii)\ x \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]$

1.2.4 Exercice 4

1. x est un réel tel que $0 \leq x \leq \pi$ et $\cos(x) = \frac{1}{3}$. Calculer la valeur de $\sin(x)$.
2. x est un réel tel que $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{1}{4}$. Calculer la valeur de $\cos(x)$.

1.2.5 Exercice 5

Donner en fonction de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$ les valeurs de $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin(x + 3\pi)$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

1.2.6 Exercice 6

Dans chaque équation, l'inconnue x est une mesure d'angle en radian. Résoudre ces équations dans $\mathbb{R}$ et représenter leurs solutions par des points du cercle trigonométrique :

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2. $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$
3. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$
5. $\cos(2x) = \cos(3x)$
6. $\cos(x) = \sin(2x)$

1.2.7 Exercice 7

Résoudre chacune des inégalités suivantes dans l'intervalle $[0,\ 2\pi[$. La résolution sera fondée sur l'observation du cercle trigonométrique.

1. $\sin(x) < \frac{1}{2}$
2. $2\cos(x) + \sqrt{2} < 0$
3. $\cos(x) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin(x)\cos(x) < 0$

1.3 Quiz

1. **Question à choix multiple**

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$$

- ☐ 0
- ☐ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $\dfrac{1}{2}$

- ☐ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. Question à choix multiple

$\cos\left(-\dfrac{163\pi}{4}\right) =$

- ☐ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- ☐ $-\dfrac{1}{2}$
- ☐ $\dfrac{1}{2}$

3. Question à choix multiple

En utilisant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on trouve $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ égal à :

- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

4. Question à choix multiple

x est un réel tel que $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}$ et $\sin(x) = \frac{1}{3}$, alors la valeur de $\cos(x)$.

- ☐ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- ☐ $\dfrac{2}{3}$
- ☐ $-\dfrac{2}{3}$
- ☐ $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

5. Question à choix multiple

La résolution de l'équation $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ avec $x \in [-\pi, \pi[$ donne :

- ☐ $x = \dfrac{\pi}{3}$
- ☐ $x = -\dfrac{\pi}{3}$
- ☐ $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6}$
- ☐ $x = \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$
- ☐ $x = -\dfrac{\pi}{6}$

6. Question à choix multiple

La résolution de l'inéquation $\cos(x) > -\dfrac{1}{2}$ avec $x \in [-\pi,\, \pi[$ donne :

- ☐ $x \in \left]-\dfrac{2\pi}{3},\, \dfrac{2\pi}{3}\right[$
- ☐ $x \in \left]-\dfrac{\pi}{3},\, \dfrac{\pi}{3}\right[$
- ☐ $x \in \left]-\dfrac{\pi}{6},\, \dfrac{\pi}{6}\right[$
- ☐ $x \in \left[-\pi,\, -\dfrac{2\pi}{3}\right[\bigcup \left]\dfrac{2\pi}{3},\, \pi\right[$

2

Nombres complexes

Introduction

Ce chapitre est inspiré du cours de l'Insa :

http ://tice.insa-lyon.fr/emaths/pages/fr/contents/04-Les nombres complexes/8-A - Définition d'un nombre complexe/index.html

2.1 Cours

2.1.1 Premières notions

2.1.1.1 Introduction

Définition
On appelle nombre complexe, ou simplement complexe, tout nombre z qui s'écrit sous la forme $z = x + iy$, avec x et y réels, où i est un nombre vérifiant la relation $i^2 = -1$.

Fondamental : Égalité de deux complexes
Soient z et z' deux complexes. On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, x', y et y' réels. On définit l'égalité de deux complexes de la façon suivante :

$(z = z)'$ si et seulement si $\quad \{(x = x')$ et $(y = y')\}$.

Par conséquent chaque complexe admet une seule écriture de la forme $z = x + iy$, avec x et y réels, qui est appelée son écriture algébrique.

Syntaxe : Notation
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Remarque
Tout nombre réel est un nombre complexe.

2.1.1.2 Parties réelle et imaginaire

Définition
Soit z un nombre complexe. Il existe donc un unique couple de réels (x, y) tels que $z = x + iy$.

x est appelé la **partie réelle** de z et y est la **partie imaginaire** de z. On note : $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$

Fondamental
Soient z et z' deux complexes. D'après ce qui précède, on a l'équivalence suivante :

$(z = z)'$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z'))$ et $(\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z'))$.

Définition
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un **imaginaire pur**.

Remarque
Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un réel.

Exemple
i et $5i$ sont des imaginaires purs mais $1 + i$ n'est pas un imaginaire pur.

2.1.1.3 Image et affixe

Définition
Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est appelé **plan complexe**.

Au nombre complexe $z = x + iy$, x et y réels on associe le point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. On notera $M(x; y)$ le point de coordonnées $(x; y)$.

Inversement, au point $M(x; y)$, on associe le complexe $z = x + iy$. On établit ainsi une correspondance entre les nombres complexes et les points du plan.

$M(x; y)$ est l'image du nombre complexe $z = x + iy$ et $z = x + iy$ est l'affixe du point $M(x; y)$.

On notera alors $M(z)$ le point d'affixe z. On en déduit la propriété **fondamentale** suivante :

Fondamental
Deux points sont confondus si et seulement si leurs affixes sont égales.

2.1.2 Opérations

2.1.2.1 Addition des complexes

Introduction
Soient z_1 et z_2 deux complexes d'écriture algébriques $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. On a alors $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$.
En appliquant les règles du calcul algébrique usuelles, on obtient : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
C'est ainsi que l'on définit l'addition des complexes.

Définition : l'addition des complexes
Soient z_1 et z_2 deux complexes d'écriture algébrique $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Alors $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Cette opération a les mêmes propriétés que l'addition des réels, à savoir :

$\mathcal{P}_1$: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (commutativité)

$\mathcal{P}_2$: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (associativité)

$\mathcal{P}_3$: $0 + z = z + 0 = z$ (0 est l'élément neutre de l'addition des complexes)

$\mathcal{P}_4$: Soit $z = x + iy$. On pose $-z = (-x) + i(-y)$. Alors $z + (-z) = 0$. (tout nombre complexe admet un opposé pour l'addition).

Remarque
Avec les notations précédentes, la soustraction dans $\mathbb{C}$ se fait de la façon suivante :

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Exemple
Si $z = 3 + 2i$ et $z' = -5 + 7i$ alors $z + z' = -2 + 9i$ et $z - z' = 8 - 5i$.

2.1.2.2 Multiplication des complexes

Introduction
Soient z_1 et z_2 deux complexes d'écriture algébrique $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. On a alors $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$.
En appliquant les règles du calcul algébrique usuelles, on obtient :

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

C'est ainsi que l'on définit la multiplication des complexes.

Définition : Multiplication des complexes
Soient z_1 et z_2 deux complexes d'écriture algébrique $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Alors $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Cette opération a les mêmes propriétés que la multiplication des réels, à savoir :

$\mathcal{P}_1$: $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (commutativité)

$\mathcal{P}_2$: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (associativité)

$\mathcal{P}_3$: $1.z = z.1 = z$ (1 est l'élément neutre dela multiplication des complexes)

$\mathcal{P}_4$: Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors il existe un unique complexe z' tel que $zz' = 1$. z' est appelé **l'inverse** de z et noté $\frac{1}{z}$.

Exemple
1. Si $z = 3 + 2i$ et $z' = -5 + 7i$, alors $zz' = -29 + 11i$.
2. Si $z = 3 - 7i$, alors $\frac{1}{z} = \frac{3}{58} + i\frac{7}{58}$.

2.1.2.3 complexe conjugué

Définition : Nombre complexe conjugué
Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $z = x + iy$ avec x et y réels. On appelle **conjugué** de z, le complexe, noté $\overline{z}$,défini par $\overline{z} = x - iy$.

Remarque
Les points $M(z)$ et $N(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

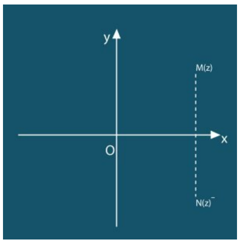

FIGURE 2.1 – conjugaison

Remarque
On a $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Théorème
Soit z un nombre complexe. On a alors les équivalences suivantes :
- z réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- z imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

2.1.3 Module et argument

2.1.3.1 Module d'un nombre complexe

Définition : Module
Soit $z = x + iy$ un complexe, avec x et y réels. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. Soit M le point d'affixe z.

Le module du nombre complexe z, noté $|z|$, est égal à la distance OM.

Propriété
Soit $z = x + iy$ un complexe, avec x et y réels.

$\mathcal{P}_1 : |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$

$\mathcal{P}_2 : |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire)

$\mathcal{P}_3 : |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$\mathcal{P}_4 : |\dfrac{z_1}{z_2}| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (avec $z_2 \neq 0$)

$\mathcal{P}_5 : |z^n| = |z|^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

$\mathcal{P}_6 : |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

2.1.3.2 Argument d'un nombre complexe non nul

Définition
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$. Soit M le point d'affixe z.

Toute mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM})$ est appelée un **argument** de z.

Tout complexe **non nul** admet donc une infinité d'arguments qui diffèrent entre-eux d'un multiple de 2π. Si θ est un argument de z, alors tout autre argument est de la forme $\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. On note $\arg(z)=\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

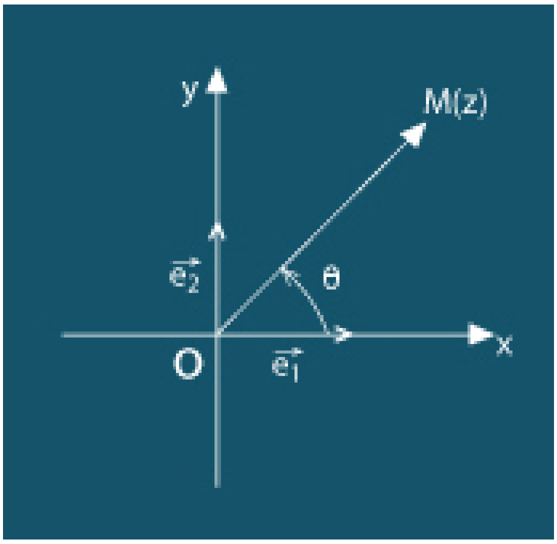

FIGURE 2.2 – argument d'un nombre complexe

Remarque
D'autres notations existent telles que :

$\arg z=\theta \,\text{modulo}\, 2\pi$ ou $\arg z=\theta\,(2\pi)$

mais nous ne les utiliserons pas dans le cadre de ce cours.

Exemple
$\arg(1)=0+2k_1\pi$ avec $k_1\in\mathbb{Z}$

$\arg(-2)=\pi+2k_2\pi$ avec $k_2\in\mathbb{Z}$

$\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k_3\pi$ avec $k_3\in\mathbb{Z}$

2.1.3.3 Argument d'un nombre complexe non nul, suite

Propriété
$\mathcal{P}_1$: $\arg(-z)=\arg(z)+\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$\mathcal{P}_2$: $\arg(\overline{z})=-\arg(z)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$\mathcal{P}_3$: $\arg(-\overline{z})=\pi-\arg(z)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Fondamental : Egalité
Soient z et z' deux complexes non nuls. Alors, on a l'équivalence suivante :

$(z=z')$ si et seulement si $|z|=|z'|$ et $\arg(z)=\arg(z')+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

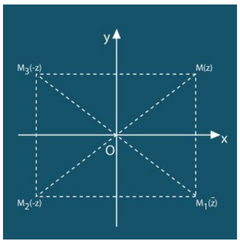

FIGURE 2.3 – arguments

2.1.4 Ecriture trigonométrique

2.1.4.1 Introduction

Soit $z = x + iy$, avec x et y réels, un complexe **non nul**. On pose : $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Nous avons vu que l'on a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, z étant non nul, nous avons $|z| > 0$ et nous pouvons écrire
$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on note $N\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ et $M(x, y)$. On a $(\vec{e}_1; \overrightarrow{ON}) = (\vec{e}_1; \overrightarrow{OM}) = \arg(z) + 2k\pi = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Notons (x_N, y_N) les coordonnées de N : $x_N = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $y_N = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et ainsi N est un point du cercle trigonométrique.

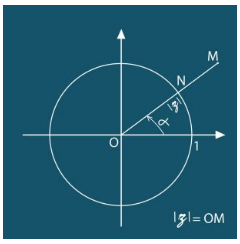

FIGURE 2.4 – argument

On a donc : $x_N = \cos(\alpha)$ et $y_N = \sin(\alpha)$. Finalement : $z = |z|(x_N + iy_N) = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$. On peut en déduire le théorème suivant :

Théorème : Théorème et définition
Soit z un nombre complexe non nul tel que $r = |z|$ et $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$. Cette écriture est appelée l'**écriture trigonométrique** du complexe z.

Réciproquement, si z est un complexe non nul tel que$z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, avec r un réel strictement positif, alors $r = |z|$ et $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.1.4.2 Introduction, suite

Exemple : Exercice corrigé
Soit $z = (\sqrt{3} - 2)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$. Calculer $|z|$ et $\arg(z)$.

Correction : On remarque que $\sqrt{3}-2<0$. Donc $z=(2-\sqrt{3})\left(-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=(2-\sqrt{3})\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}+\pi\right)\right)$.

Finalement : $z=(2-\sqrt{3})\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)$. On a alors l'écriture trigonométrique de z, d'où : $|z|=2-\sqrt{3}$ et $\arg(z)=\frac{6\pi}{5}[2\pi]$

Remarque
Soit z un nombre complexe **non nul** tel que : $z=x+iy$ et $z=r(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ avec r réel strictement positif. Soit M le point du plan d'affixe z. Alors le couple $(x;y)$ constitue les coordonnées cartésiennes du point M, alors que le couple $(r;\alpha)$ constitue les coordonnées polaires du point M.

Propriété
Soit z un nombre complexe **non nul** tel que : $z=x+iy$ avec x et y deux réels (Ecriture algébrique), et $z=r(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ avec r réel strictement positif (Ecriture trigonométrique). On peut donc facilement passer d'une écriture à l'autre. En effet :
- Si on connaît l'écriture algébrique $z=x+iy$, alors on peut déduire le module et l'argument grâce aux relations suivantes :
  $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos(\alpha)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin(\alpha)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
- Réciproquement, si on connaît l'écriture trigonométrique $z=r(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ avec r réel strictement positif, alors on peut déduire les parties réelles et imaginaires grâce aux relations suivantes : $x=r\cos(\alpha)$ et : $y=r\sin(\alpha)$.

Exemple
Soit $z=1+i$, alors $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ et $z=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Avec les notations ci-dessus, nous cherchons α tel que : $\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nous pouvons choisir $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Ainsi, $z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Exemple
Soit $z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Nous obtenons $z=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\frac{1}{2}+2i\frac{\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$.

2.1.4.3 Argument et opérations

Fondamental : argument d'un produit
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors : $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$.

Théorème que nous reprenons sous la forme : l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments, modulo 2π.

Propriété
Pour tous complexes non nuls z et z', pour tout entier naturel n :

$\mathcal{P}_1$: $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\mathcal{P}_2$: $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\mathcal{P}_3$: $\arg\left(z^n\right)=n\arg(z)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Exemple : Exemple d'application
Calculons $z = (1+i\sqrt{3})^5$. On commence par écrire $z_0 = 1+i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

- $|z_0| = 2$
- $\left\{ \begin{array}{lcl} \cos(\alpha) & = & \frac{1}{2} \\ \sin(\alpha) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \iff \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Donc $z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Sachant que $z = z_0^5$, on déduit que

- $|z| = |z_0|^5 = 2^5 = 32$
- $\arg(z) = 5\arg(z_0) + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k, k' \in \mathbb{Z}$

2.1.5 Notation exponentielle, formules de Moivre et d'Euler

2.1.5.1 Notation exponentielle

Définition
Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Attention
Cette écriture est une **convention** et ne cherchez aucun lien avec l'exponentielle d'un réel. Nous verrons par la suite, en observant certaines règles de calcul, des similitudes pouvant expliquer ce choix.

Remarque
Nous savons que tout nombre complexe z non nul, de module $r > 0$ et dont θ est un argument, s'écrit $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Compte tenu de la définition ci-dessus, on obtient une nouvelle écriture de z, dite écriture exponentielle, qui est : $z = re^{i\theta}$.

Exemple
$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Dans cet exemple, on a les trois écritures possibles d'un nombre complexe non nul : algébrique, trigonométrique et exponentielle.

A l'aide de cette nouvelle notation, on peut traduire plus facilement certaines propriétés des nombres complexes.

Propriété
Pour tout réels θ, θ_1, θ_2 et pour tout entier naturel n :

$\mathcal{P}_1$: $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\mathcal{P}_2$: $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$, en particulier, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

$\mathcal{P}_3$: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, (avec la convention : $\left(e^{i\theta}\right)^0 = 1$.

2.1.5.2 Notation exponentielle, suite

Remarque
On rappelle que pour tous réels x et y, et pour tout entier naturel n, on a :

$\mathcal{P}_1 \,:\, e^x e^y = e^{x+y}$

$\mathcal{P}_2 \,:\, \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, en particulier, $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$

$\mathcal{P}_3 \,:\, (e^x)^n = e^{nx}$.

La similitude de ces trois propriétés avec celles que nous venons d'énoncer, permet de comprendre l'utilisation, pour les complexes, de la notation exponentielle.

Conseil : Conseil pratique
Pour faire le produit, le quotient de deux complexes non nuls, l'élévation d'un complexe à une puissance n entier naturel, il est souvent plus simple d'utiliser leurs écritures exponentielles que leur écriture algébrique. Mais pour effectuer des sommes et des différences, il est plus simple d'utiliser la forme algébrique.

Exemple
Soit $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Calculer le quotient $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ de deux façons différentes et déduisons en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

- A l'aide des écritures exponentielles, on obtient : $Z = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$
- A l'aide des écritures algébriques, on obtient : $Z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$.

En comparant ces deux écritures, on obtient : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2.1.5.3 Formule de Moivre

Syntaxe
Pour tout réel θ et pour tout entier naturel n, on a : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Cette formule peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exemple
Exprimons $\cos(3\theta)$ à l'aide de puissances de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

D'après la formule de Moivre, on a : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$.

On développe le premier membre avec la **formule du binôme de Newton** puis on identifie les parties réelles et imaginaires :

$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) + 3\cos(\theta)(i\sin(\theta))^2 + (i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i\left(3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)\right)$.

D'où, $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ et de $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$..

2.1.5.4 Formules d'Euler

Syntaxe

Pour tout réel θ, on a : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Exemple

Exprimons $\cos^3(\theta)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$.

On utilise de nouveau la **formule du binôme de Newton** :

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left[(e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right].
\end{aligned}$$

Donc, $\cos^3(\theta) = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + 3\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right] = \dfrac{1}{4}\left(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)\right)$.

On dit alors que l'on a **linéarisé** $\cos^3(\theta)$.

Remarque

Cette technique sera utilisée lorsqu'on voudra calculer des primitives de fonctions du type $\cos^p(x)$, $\sin^q(x)$, $\cos^p(x)\sin^q(x)$, avec p et q entiers naturels.

2.1.6 Equation du second degré à coefficients réels

2.1.6.1 Racines carrées d'un réel

Définition

Soit a un réel. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = a$ sont appelées racines carrées du réel a. On distingue alors trois cas suivant le signe de a :

1. $a > 0$
   $z^2 = a \iff z^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 \iff (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) \iff z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$.
   On a alors deux racines réelles opposées : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
2. $a < 0$
   $z^2 = a \iff z^2 - (i\sqrt{-a})^2 = 0 \iff (z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) \iff z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$.
   On a alors deux racines imaginaires pures conjuguées : $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.
3. $a = 0$
   $z^2 = 0 \iff z = 0$.
   On a alors une seule racine carrée : 0.

Exemple

Les racines carrées de (-1) sont $-i$ et i.

2.1.6.2 Résolution de l'équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes

Théorème
Soit l'équation $ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation. On distingue alors trois cas :

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet pour solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

  Dans ce cas, on a donc **deux réelles distinctes**, pouvant se noter $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet **une solution unique** $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet pour solutions $x_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

  Dans ce cas, on a donc **deux réels complexes conjugués**, pouvant se noter $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple
Trouvons les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

On trouve le discriminant $\Delta = -3$. Cette équation n'a pas de racine réelle, mais elle admet deux racines complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Par convention, on note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On a alors $x_2 = \overline{j}$ et le trinôme $P(x) = x^2 + x + 1$ peut donc se factoriser en $(x-j)(x-\overline{j})$.

2.1.7 Interprétation géométrique

2.1.7.1 Interprétation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

Théorème
Soient a et b deux complexes distincts d'images respectives A et B. Alors

$|b-a| = AB$ et $\arg(b-a) = (\vec{e}_1; \overrightarrow{AB}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Théorème
Soient a, b et b trois complexes distincts d'images respectives A, B et C . Alors $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2.2 Exercices

2.2.1 Modules et argument

Déterminer le module et un argument des complexes ci-dessous :

1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$,
2. $z_2 = -3\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$,
3. $z_3 = -2\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)$,
4. $z_4 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$,
5. $z_5 = 1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ où θ est un réel quelconque,
6. $z_6 = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^7$,
7. $z_7 = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2010}$.

2.2.2 Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

1. $z^2 + z + 1 = 0$,
2. $z^3 = 1$,
3. $z^3 - (1 - 2\sin(\theta))z^2 + (1 - 2\sin(\theta))z - 1 = 0$ où θ est un réel quelconque,
4. $z^2 = -5 - 12i$,
5. $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$,
6. $(-4-2i)z^2 + (7-i)z + 1 + 3i = 0$,
7. $z^{12} = -1$,
8. $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (on cherchera une solution sous la forme $\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ et on en déduira les valeurs decos $\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

2.2.3 Ensembles du plan complexe

Déterminer et représenter les ensembles suivants :

1. E_1 l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + 1 + i| = \sqrt{2}$,
2. E_2 l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 2| = |z|$,
3. E_3 l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant que $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur,
4. E_4 l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant que $\dfrac{1+iz}{1-iz}$ est de module 1.

2.3 Quiz

1. Question à choix multiple

Soit le nombre complexe $-3 - 5i$, alors son conjugué est égal à

- ☐ $-3+5i$
- ☐ $3+5i$
- ☐ $3-5i$

2. Question à choix multiple

Soit le nombre complexe $z = 3-4i$, alors $\dfrac{1}{z}$ est égal à

- ☐ $\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$
- ☐ $-\dfrac{3}{7} - \dfrac{4}{7}i$
- ☐ $\dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i$

3. Question à choix multiple

Soit le nombre complexe $z = 2+i$, alors $z\overline{z}$ est égal à :

- ☐ 3
- ☐ 5
- ☐ $\sqrt{5}$

4. Question à choix multiple

$(11-3i)^2$ est égal à :

- ☐ $112-66i$
- ☐ $130-66i$
- ☐ $130+66i$

5. Question à choix multiple

Soit $z = 2-i$ et $z' = 3+5i$, alors $\dfrac{z}{z'}$ est égal à :

- ☐ $\dfrac{1}{34} - \dfrac{13}{34}i$
- ☐ $\dfrac{11}{16} + \dfrac{13}{16}i$
- ☐ $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{5}i$

6. Question à choix multiple

Le conjugué de $1+z$ est :

- ☐ $1-z$
- ☐ $1+\overline{z}$
- ☐ $1-\overline{z}$

7. Question à choix multiple

Le nombre $\sqrt{3} - i$ est égal au :

- ☐ nombre complexe de module 2 et d'argument $-\dfrac{\pi}{6}$
- ☐ nombre complexe de module 4 et d'argument $-\dfrac{\pi}{6}$
- ☐ nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{11\pi}{6}$
- ☐ nombre complexe de module 2 et d'argument $-\dfrac{\pi}{3}$

8. Question à choix multiple

Si z_1 est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{6}$ et z_2 le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\dfrac{\pi}{3}$ alors :

- ☐ $z_1 z_2$ est le nombre complexe de module 5 et d'argument $-\dfrac{\pi}{6}$
- ☐ $\dfrac{z_1}{z_2}$ est le nombre complexe de module $\dfrac{2}{3}$ et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $-z_1^2$ est le nombre complexe de module 4 et d'argument $\dfrac{4\pi}{3}$

9. Question à choix multiple

L'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$ admet comme ensemble solution dans $\mathbb{C}$:

- ☐ $\mathcal{S} = \emptyset$
- ☐ $\mathcal{S} = \{-2 - 3i,\ -2 + 3i\}$
- ☐ $\mathcal{S} = \{2 - 3i,\ 2 + 3i\}$
- ☐ $\mathcal{S} = \{2 - i\sqrt{3},\ 2 + i\sqrt{3}\}$