Université René Descartes - Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 1ère année, 2012-2013, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n° 3 :
Limites - Continuité

Exercice 1
1) Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions définies par les formules suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+2x}{4-3x}},\ g(x) = \sqrt{x^2+3x-4},\ h(x) = \ln(2x+5)$$

2) Pour chacune des fonctions suivantes, décrire le domaine D de définition naturel, puis détailler les opérations algébriques et les compositions en jeu pour justifier la continuité de la fonction sur D.
a) $f(x) = \sqrt{x^3-2}$; b) $g(x) = \ln\left\{(x-1)^2(x+2)^4\right\}$; c) $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-3}$;

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes quand elles existent.

$$a)\ \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1),\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2},\quad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4},\quad e)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2},\quad f)\ \lim_{x\to+\infty}x+\sqrt{x}\sin(x)$$

Exercice 3
1) a - En utilisant la définition de la dérivée en 0 de la fonction $f(y) = \ln(1+y)$, montrer que

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

b - En déduire $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
2) a - Déterminer la limite suivante $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.
b - En déduire $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

Exercice 4 Déterminer les limites suivantes quand elles existent.

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1},\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)},\quad c)\ \lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\tan x,\quad d)\ \lim_{x\to+\infty}x\sin x,\quad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

Exercice 5
1) Etudier les limites suivantes:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1},\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x},\quad ,c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\tan 5x},\quad d)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}},\quad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.$$

2) Etudier les limites suivantes en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\lambda x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad b)\ \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-\lambda}-\frac{1}{(x-2)^2}\right),\qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\lambda x+1}{x^2-1}$$

Exercice 6 Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle I:

1) $x^7 - x^2 + 1 = 0,\quad I = [-2,\ 0]$.

2) $\sqrt[3]{x^3+6x+1} - 3x = 2,\quad I = \mathbb{R}$.

3) $\tan x = \frac{3}{2}x,\quad I =]\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}[$.

4) $e^x - 3\sqrt{x} = 0,\quad I = [0,1]$.

5) $x + \sin x = \frac{1}{x^2+4},\quad I = [0,\pi]$.

Exercice 7 Vrai ou faux? Donner une preuve ou un contre-exemple.
1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Si $f(a) = 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que f soit croissante sur $[a, c]$.
2) Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.
3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f atteint sa borne inférieure sur $\mathbb{R}$.
4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, alors $f(\mathbb{R})$ est un segment.
5) Soit $f[a, b] \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée.

Exercice 8 Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Montrer que P admet une racine réelle.

Exercice 9 Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2$.
1) Calculer $P(-1)$ et $P(1)$. En déduire que P possède au moins une racine dans $[-1, 1]$.
2) P possède-t-il une racine dans $[0, 1]$?

Exercice 10 Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$.
Montrer que P admet 3 zéros réels et encadrer chacun d'eux par deux entiers relatifs consécutifs.

Exercice 11 Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue.
1) En étudiant l'application g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$, montrer que f admet au moins un point fixe (*i.e.* un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$).
2) On suppose de plus que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout $x \neq y$ dans $[a, b]$. Montrer que f admet un seul point fixe.

Exercice 12 Soit $\alpha > 0$ et la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}$.
1) Etudier la continuité de f sur son intervalle de définition.
2) Pour quels paramètres α la fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 0?

Exercice 13 Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^{1/x}$
1) Etudier la continuité de f sur son intervalle de définition.
2) La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 0?

Exercice 14 Soit f la fonction partie entière : $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & x & \to & \lfloor x \rfloor \end{array}$
On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
1) Tracer la courbe de f. En quels points est-elle continue? Parmi ses points de discontinuité, en quels points est-elle continue à gauche? continue à droite?
2) Etudier la continuité de la fonction $\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 \end{array}$ et tracer la courbe de g.

Exercice 15 On considère la fonction $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$.
1) Soient les suites $u_n = \frac{1}{2\pi(n+1)}$ et $v_n = \frac{1}{2\pi(n+1/4)}$. Que valent $f(u_n)$ et $f(v_n)$?
2) Que peut-on en déduire pour la limite de f en 0^+?

Exercice 16 On rappelle que tout réel est limite d'une suite de rationnels, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
1) Montrer que si f est nulle sur $\mathbb{Q}$, alors f est identiquement nulle.
2) Si f et g sont égales sur $\mathbb{Q}$, que peut-on dire de f et g?

Exercice 17 On s'intéresse aux fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous x et y réels.
1) Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(n) = an$ pour tout n entier naturel, puis pour tout n entier relatif.
2) Montrer que $f(x) = ax$ pour pour tout x rationel, puis pour tout x réel (on rappelle que tout réel est limite d'une suite de rationnels).
3) Déterminer toutes les fonctions continues $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(x + y) = g(x)g(y)$ pour tous x et y réels (indication: commencer par démontrer que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x réel, puis on examiner le cas où f s'annule).