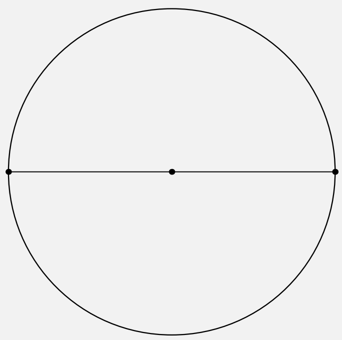
Suites

- Introduction
- Exemple : cercle et polygones
- Exemple : évolution temporelle en écologie
- Les ensembles de nombres
- Définitions
- Limite d'une suite
- Unicité de la limite
- Suites bornées
- Suites divergentes
- Sommes et produits de suites
- Comparaison de suites
- Valeurs absolues
- Suites arithmétiques
- Suites géométriques
- Suites monotones
- Suites adjacentes
- Suites extraites
- Suites récurrentes
- Croissance comparée (1)

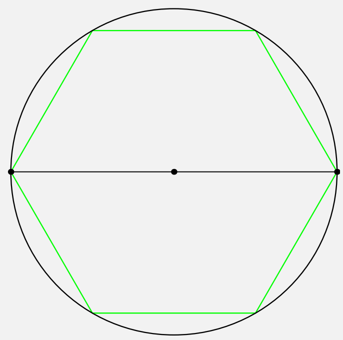
Les suites : outils mathématiques utilisés notamment comme :

- modèle pour la proximité infinitésimale (via les *limites*)
- modèle pour les évolutions temporelles

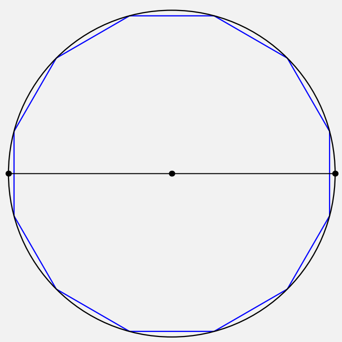
π



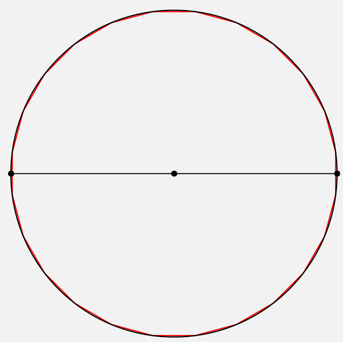
π = périmètre du cercle/diamètre du cercle



périmètre de l'hexagone/diamètre du cercle $= 3$



périm. du dodécagone/diam. du cercle $= 3,105828541$



périm. pour 24 côtés/diam. du cercle $= 3,132628613$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{périmètre pour } n \text{ côtés}}{\text{diamètre du cercle}}$$

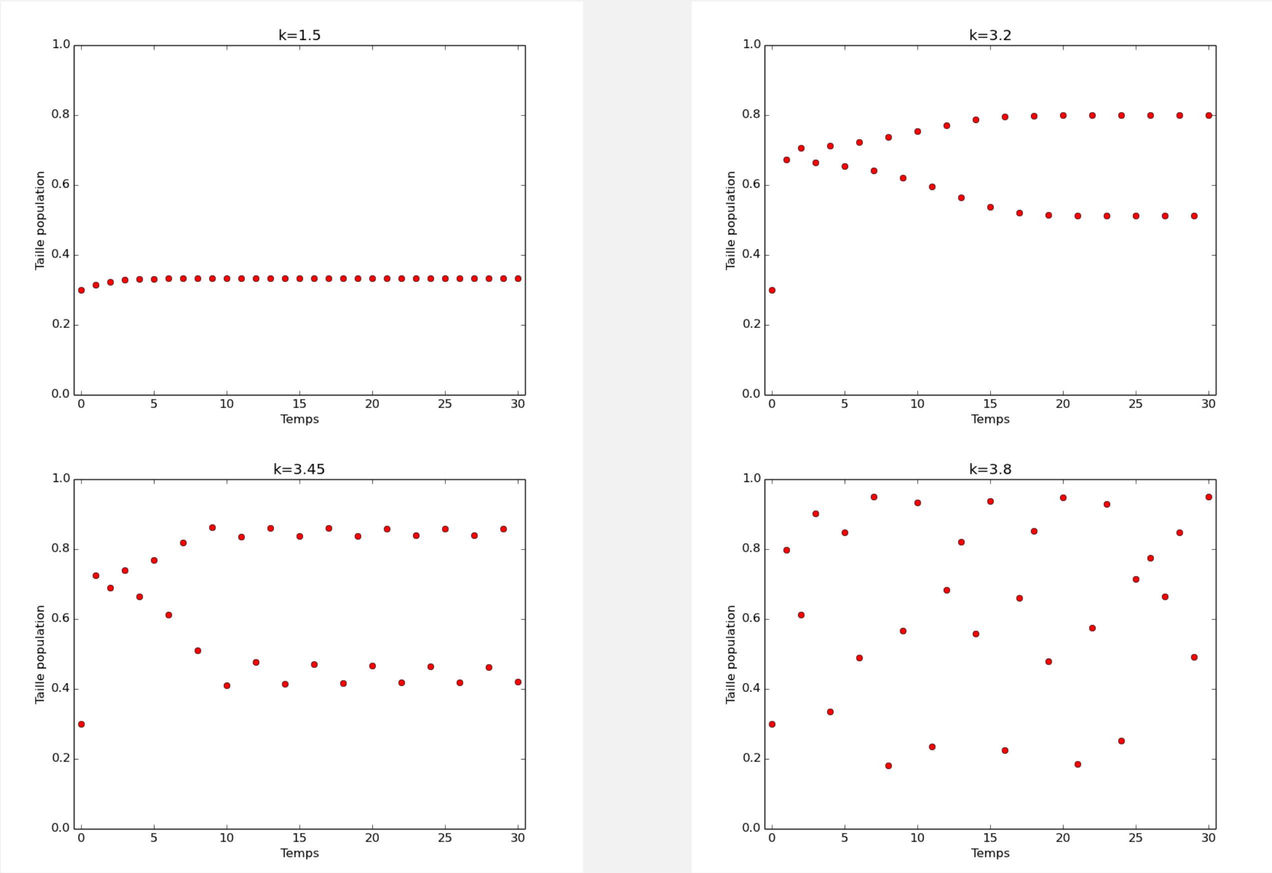
$\pi =$ 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 -
169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 -
628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 -
844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 -
701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 -
975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 -
145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 -
249 141 273 724 587 006 606 315 588 174 881 520 920 962 -
829 254 091 715 364 367 892 590 360 011 330 530 548 820 -
466 521 384 146 951 941 511 609 433 057 270 365 759 591 -
953 092 186 117 381 932 611 793 105 118 548 074 462 379 -
962 749 567 351 885 752 724 891 227 938 183 011 949 129 -
833 673 362 440 656 643 086 021 394 946 395 224 737 190 -
702 179 860 943 702 770 539 217 176 293 176 752 384 674 -
818 467 669 405 132 000 568 127 145 263 560 . . .

Exemple : évolution temporelle en écologie

p_n = taille (en fraction de la taille maximale) de la population de la génération n pour une espèce donnée (bactérie, insecte, . . .)

Dynamique : $$p_{n+1} = kp_n(1-p_n)$$

k : taux combiné de reproduction et d'épuisement des ressources



Les ensembles de nombres utilisés en mathématiques sont :

- Les entiers naturels :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$$
- Les entiers relatifs :
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n \cdots\}$$
- Les nombres rationnels :
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \quad | \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q \neq 0\}$$
- Les nombres réels :
$$\mathbb{R}$$
- Les nombres complexes :
$$\mathbb{C} = \{a + i.b \quad | \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \dots \qquad u_n = n$

$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \dots \qquad u_n = 2n$

$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,\ u_4 = 9,\ \dots \qquad u_n = 2n+1$

$u_1 = \frac{1}{1},\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3},\ u_4 = \frac{1}{4},\ u_5 = \frac{1}{5},\ \dots \qquad u_n = \frac{1}{n}$

$u_0 = 0,\ u_1 = \frac{\sin(1)}{2},\ u_2 = \frac{\sin(2)}{5},\ u_3 = \frac{\sin(3)}{10},\ \dots \qquad u_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}$

Suites Définitions

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \rightarrow & u_n \end{array}$$

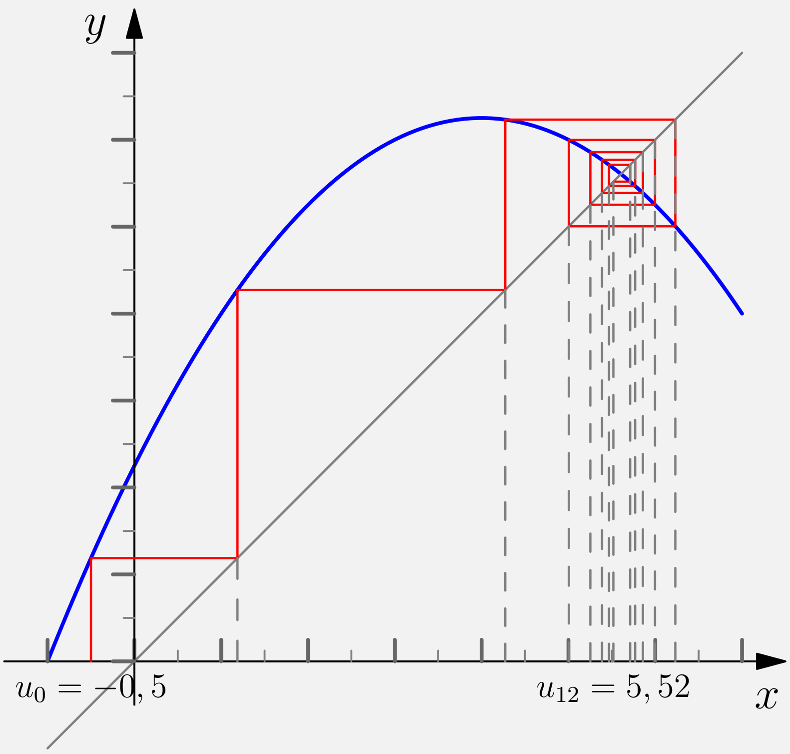
Remarque : On note u_n les éléments de la suite, plutôt que $u(n)$; on « numérote » chaque élément de la suite : u_0 : premier élément, u_1 : deuxième élément, ..., u_n : $n+1$-ième élément, etc.

$$u_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4}$$

$u_1 = \frac{(u_0+1)(9-u_0)}{4} = 1,19$	$u_7 = \frac{(u_6+1)(9-u_6)}{4} = 5,86$
$u_2 = \frac{(u_1+1)(9-u_1)}{4} = 4,27$	$u_8 = \frac{(u_7+1)(9-u_7)}{4} = 5,39$
$u_3 = \frac{(u_2+1)(9-u_2)}{4} = 6.23$	$u_9 = \frac{(u_8+1)(9-u_8)}{4} = 5,77$
$u_4 = \frac{(u_3+1)(9-u_3)}{4} = 5,01$	$u_{10} = \frac{(u_9+1)(9-u_9)}{4} = 5,47$
$u_5 = \frac{(u_4+1)(9-u_4)}{4} = 6$	$u_{11} = \frac{(u_{10}+1)(9-u_{10})}{4} = 5,71$
$u_6 = \frac{(u_5+1)(9-u_5)}{4} = 5,25$	$u_{12} = \frac{(u_{11}+1)(9-u_{11})}{4} = 5,52$

Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



Limite

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel, on dit que

u_n a pour limite L si :

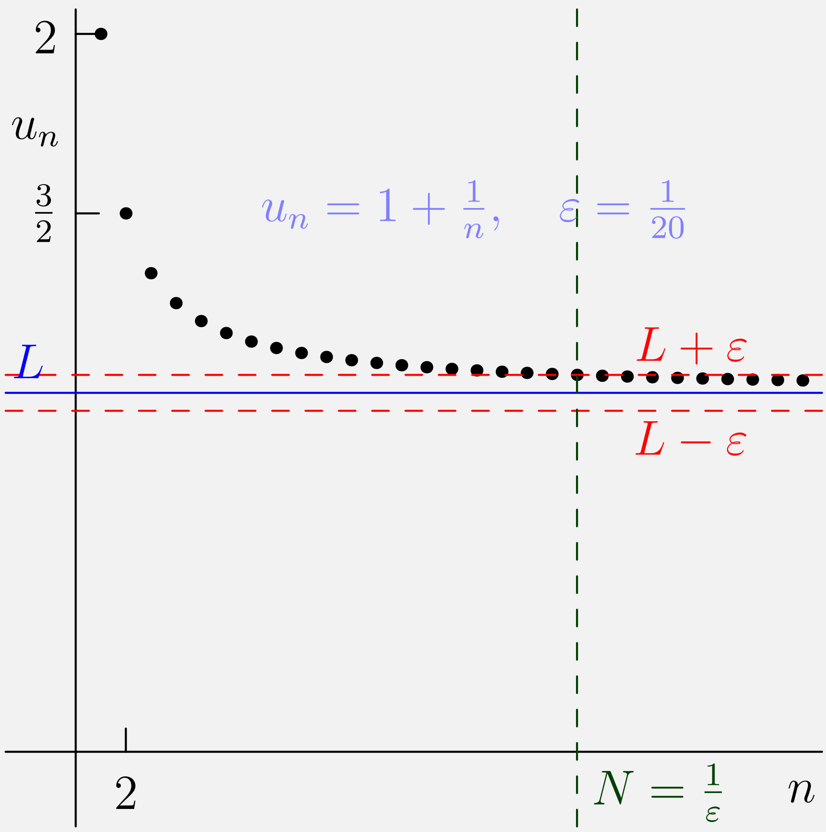
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$

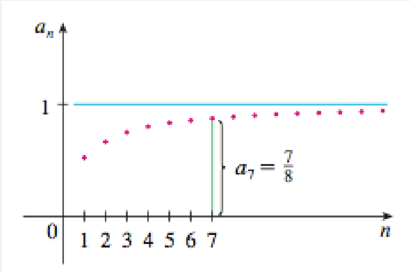
On dit aussi : u_n converge vers L

$$|u_n - L| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leq u_n - L \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$$

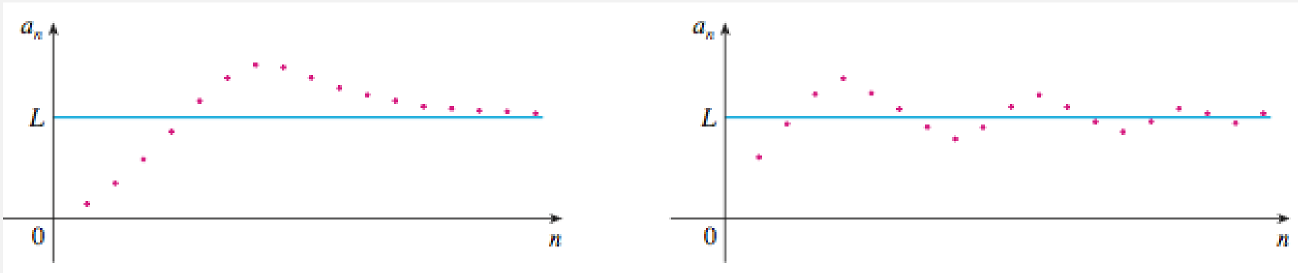
Limite



Exemples de suites convergentes



La suite $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$



Suites a_n convergentes non monotones

Unicité de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Théorème : Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite L, cette limite est unique.

- S’il y a 2 limites différentes L et L' : $\quad |L - L'| > 0$
- pour $0 < \varepsilon = \frac{|L-L'|}{3}$

  $$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{si } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - L'| \leq \varepsilon$$
- $|L - L'| = |L - u_n + u_n - L'| \leq |L - u_n| + |u_n - L'| \leq \frac{2|L-L'|}{3}$

Exercice

Rappel : Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel, on dit que

u_n a pour limite L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{n}$
2. $v_n = 2 - \frac{1}{n^2}$
3. $w_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$
4. $x_n = \frac{n+1}{n}$

Suites bornées

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq M$
- minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \geq m$
- bornée si : $\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_n| \leq C$

Proposition : bornée $\iff$ (majorée et minorée)

Exercice : Dire si les suites suivantes sont majorées, minorées, bornées :

1. $u_n = 2n$
2. $v_n = -3n + 6$
3. $w_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$
4. $x_n = (-1)^n$
5. $y_n = n^2$
6. $z_n = n^2 \times (-1)^n$

Propriété des suites convergentes

Proposition : Une suite convergente est bornée

- Pour $\varepsilon = 1 \quad \exists N : \quad n \geq N, \quad |u_n - L| \leq 1$
- $|u_n| = |u_n - L + L| \leq |u_n - L| + |L| \leq 1 + |L|$
- Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers inférieurs à N, l'ensemble $\{|u_0|, |u_1|, \cdots |u_{N-1}|\}$ a donc un plus grand élément : $M = \max_{0 \leq i \leq N-1} |u_i|$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{array}{llll} \text{soit :} & n < N & \text{et} & |u_n| \leq M \\ \text{soit :} & n \geq N & \text{et} & |u_n| \leq 1 + |L| \end{array}$ dans tous les cas :

$$|u_n| \leq \max(M, 1 + |L|)$$

Une suite qui ne converge pas est dite divergente

Exemples :

$$u_n = (-1)^n$$

$u_0 = 1, \quad u_n = -1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \quad \ldots, \quad u_{2p} = 1, \quad u_{2p+1} = -1, \quad \ldots$

Supposons que $\lim_{n \to \infty} u_n = L$

- Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N : \quad |u_n - L| \leq \frac{1}{2}$
- Pour $n = 2p \geq N$:

$$2 = |u_{2p} - u_{2p+1}| = |u_{2p} - L + L - u_{2p+1}|$$

$$\leq |u_{2p} - L| + |u_{2p+1} - L| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Conséquence : une suite bornée n'est pas forcément convergente !

Une suite qui ne converge pas est dite divergente

Exemples :

$$u_n = \sqrt{n+1}$$

$u_0 = \sqrt{1}, \quad u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{3}, \quad u_3 = \sqrt{4}, \quad \ldots$

- Soit $A \in \mathbb{R}, \quad A \geq 0$
- $\exists N \in \mathbb{N} : \quad A^2 - 1 \leq N$
- Alors pour $n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N : \quad A \leq \sqrt{n+1} = u_n$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ A \geq 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad A \leq u_n$$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ A \leq 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad A \geq u_n$$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

1. $u_n = 4n$
2. $v_n = -2n + 5$
3. $w_n = 2n^2$
4. $x_n = -7n^3$

Limites et opérations

Soit 2 suites, u_n et v_n, convergentes, de limites respectives L et L'.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty}(\lambda u_n) = \lambda L$
- $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = L + L'$
- $\lim_{n\to\infty}(u_n . v_n) = L.L'$
- Si $L \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{L}$

Limites infinies et opérations

- $\lim_{n\to\infty} u_n = \pm\infty \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0^+ \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0^- \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{\log(n+2)} \qquad ; \qquad v_n = \frac{1}{\sin(1/n)}.$$

Limites des polynômes 1

Proposition : $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 0 \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$

Exemples : $\lim n^3 = +\infty \qquad \lim \frac{1}{n^2} = 0$

Limites des polynômes 2

Rappel : $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 0 \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$

Conséquence 1 :

$$\lim_{n\to\infty} a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_k > 0 \\ -\infty & \text{si } a_k < 0 \end{cases}$$

- $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 =$
  $a_k n^k \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} n^{-1} + \frac{a_{k-2}}{a_k} n^{-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_k} n^{-k+1} + \frac{a_0}{a_k} n^{-k}\right)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{k-1}}{a_k} n^{-1} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{k-2}}{a_k} n^{-2} = 0 \ldots$
- donc $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} n^{-1} + \frac{a_{k-2}}{a_k} n^{-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_k} n^{-k+1} + \frac{a_0}{a_k} n^{-k} = 1$

Limites des fractions rationnelles

Rappel : $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 0 \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$

Conséquence 2 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_\ell n^\ell + b_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{b_\ell n^\ell}$$

- $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 =$
  $a_k n^k \underbrace{\left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} n^{-1} + \frac{a_{k-2}}{a_k} n^{-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_k} n^{-k+1} + \frac{a_0}{a_k} n^{-k}\right)}_{\text{tend vers 1}}$
- $b_\ell n^\ell + b_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + b_1 n + b_0 =$
  $b_\ell n^\ell \underbrace{\left(1 + \frac{b_{\ell-1}}{b_\ell} n^{-1} + \cdots + \frac{b_1}{b_\ell} n^{-\ell+1} + \frac{b_0}{b_\ell} n^{-\ell}\right)}_{\text{tend vers 1}}$

Rappels :

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 0 \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_\ell n^\ell + b_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{b_\ell n^\ell}$

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

1. $u_n = 4n^2 + 3n + 5$
2. $v_n = -2n^3 + n^2 - 4n + 1$
3. $w_n = \dfrac{4n^2 + 3n + 5}{-2n^3 + n^2 - 4n + 1}$
4. $x_n = \dfrac{n^5 + 3n^4 + n^2 - n - 2}{-3n^4 + n^3 - 7n - 5}$
5. $y_n = \dfrac{4n^3 + 5}{-n^3 + 4n^2 - n + 8}$
6. $z_n = \dfrac{4n^2 + 7n - 6}{-n^2 + 4n + 2}$

Limites et opérations

Exercice

Soit une suite u_n qui converge vers $L \neq 0$.

Montrer que : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad u_n \neq 0$

- Si $L > 0$: $\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, |u_n - L| < \frac{L}{2}$.

  Or $|u_n - L| \geq L - u_n$, donc

  $$u_n \geq L - |u_n - L| \geq L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} > 0.$$

- Si $L < 0$: soit $v_n = -u_n$: converge vers $-L > 0$, donc par ce qui précède, $\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad v_n > 0$; càd $u_n < 0$

Limites et inégalités

Soit 2 suites, u_n et v_n.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \quad$ et si $\quad u_n$ et $v_n \quad$ convergent,

  $$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$

  En particulier : si u_n converge et si $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq a$

  $$\lim_{n\to\infty} u_n \geq a$$

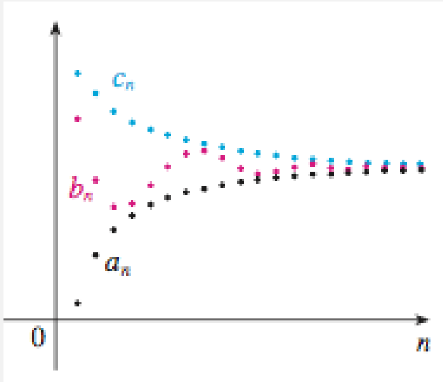
Attention : même si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > a, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n \geq a$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} > 0, \quad$ mais $\quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Limites et inégalités

Soit 3 suites, a_n, b_n et c_n.

- si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq b_n \leq c_n$
- si a_n et c_n convergent
- si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$



Alors :

$$b_n \text{ converge et } \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Soient $u_n = \dfrac{-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to\infty} w_n$$

$\hookrightarrow$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3n+6+(-1)^n}{5n+5}$
2. $v_n = \dfrac{\sin(n\pi/6)}{n^2}$
3. $w_n = \dfrac{n^3+2n^2((-1)^n+4)+5n-1}{3n^3+n^2+4n+1}$
4. $z_n = \dfrac{n^4-5n^3((-1)^n+4\sin(n\pi/8))+5n^2-6n-7}{3n^5+n^4+4n^3+n^2+n+1}$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$v_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+\sqrt{1}}$$
$$v_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$
$$v_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3+\sqrt{1}} + \frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}}$$
$$v_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \frac{1}{4+\sqrt{3}} + \frac{1}{4+\sqrt{4}}$$

....

- $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n+\sqrt{k} \leq n+\sqrt{n}$
- Donc : $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n} = w_n$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\leq n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

$$n+1 \text{ lignes} \qquad \left\{ \begin{array}{llllll} k=0 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=1 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{1}} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=2 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{2}} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=3 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{3}} & \leq & \frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k=n & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

$$\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \quad \leq \quad v_n \quad \leq \quad \frac{n+1}{n}$$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

- $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$
- Donc : $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n} = w_n$
- $u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, donc : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$
- $w_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, donc : $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 1$$

Limites et inégalités

Attention : si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} w_n$ la conclusion est fausse !

$$u_n = -2 - \frac{1}{n}, \quad v_n = (-1)^n, \quad w_n = 2 + \frac{1}{n}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$
- u_n et w_n convergent :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -2 \qquad \lim_{n\to\infty} w_n = 2$$

- mais : v_n ne converge pas !

Théorème : Soient u_n et v_n des suites telles que pour tout n,

$$u_n \leq v_n.$$

Alors

$$\lim u_n = +\infty \implies \lim v_n = +\infty$$

et

$$\lim v_n = -\infty \implies \lim u_n = -\infty.$$

Exercice : Prouver ce théorème.

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 + (-1)^n$
2. $v_n = -n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 2n - 1 + \cos(2\pi n/7)$

Limites et valeurs absolues

Proposition : Si $\lim_{n\to\infty} u_n = L, \quad \lim_{n\to\infty} |u_n| = |L|$

$$\big||u_n| - |L|\big| \leq |u_n - L|$$

Attention : si $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |L|$, la suite u_n peut ne pas être convergente !

$$u_n = (-1)^n$$

Théorème : Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $|v_n|$ converge vers 0, alors $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$

- Soient $u_n = -|v_n|$ et $w_n = |v_n|$
- on a $u_n \leq v_n \leq w_n$
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to\infty} w_n$

$\hookrightarrow$ donc u_n converge vers 0

Théorème : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

- $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$
- $0 \leq |u_n.v_n| \leq M.|v_n|$
- puisque $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

Attention : si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = L \neq 0$, c'est faux !

$u_n = (-1)^n$ est bornée, $\quad v_n = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ est convergente,

mais : $u_n.v_n = (-1)^n.2$ ne converge pas !

Exemple

Trouver la limite de la suite $u_n = \big(\cos(n)\big)\sin\big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$

- La suite $(-1)^n$ est bornée, la suite $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 ;
  donc la suite $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge vers 0
- donc la suite $\sin\big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$ converge aussi vers 0 puisque $\sin 0 = 0$
- La suite $\cos(n)$ est bornée et la suite $\sin\big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$ converge vers 0 , donc la suite u_n converge vers 0

Exercice : Trouver la limite de la suite
$v_n = \big((1+\frac{1}{n})\cos(2\pi n/3)\big)\big(\frac{(-1)^n}{n^{4/3}}\big)$

Exemples importants

Suite arithmétique

Soit a et r deux nombres réels, la suite $u_n = a + nr$ s'appelle une suite arithmétique de terme initial a et de raison r.

Proposition : Si $r > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
Si $r < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$
Si $r = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$

- Si $r > 0$, soit $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}: \quad N > \frac{A-a}{r}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \quad u_n = a + nr \geq A$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

Exemples importants

Somme d'une suite arithmétique

$$S = \sum_{k=0}^{n} a + kr = \frac{(n+1)(2a+nr)}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & S & = & a & + & a+r & + & a+2r & +\cdots+ & a+(n-1)r & + \; a+nr \\ + & S & = & a+nr & + & a+(n-1)r & + & a+(n-2)r & +\cdots+ & a+r & + \; a \\ & 2S & = & 2a+nr & + & 2a+nr & + & 2a+nr & +\cdots+ & 2a+nr & + \; 2a+nr \end{array}$$

$$2S = (n+1)(2a+nr)$$

Si $a = 0$ et $r = 1$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$, a^n n'est pas convergente

Si $a > 1$: $a = 1 + h, \quad h > 0$

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + n.h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k}_{>0} \geq 1 + n.h$$

Rappel

Pour tous nombres (entiers,..., réels, complexes) a et b et tout nombre entier $n \neq 0$:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p . b^{n-p} = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} . b^p$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a.b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2.b + 3\,a.b^2 + b^3$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6\,a^5.b + 15\,a^4.b^2 + 20\,a^3.b^3 + 15\,a^2.b^4 + 6\,a.b^5 + b^6$$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$, a^n n'est pas convergente

Si $|a| < 1$ et $a \neq 0$, $\frac{1}{|a|} > 1$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty$ $\lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$

Si $a = 0$, $a^n = 0$: $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$, a^n n'est pas convergente

Si $a < -1$, $|a| > 1$, $\lim_{n\to\infty} |a|^n = +\infty$ a^n n'est pas bornée

Si $a = -1$, $a^n = (-1)^n$

Rappel

Proposition : Une suite convergente est bornée

- Pour $\varepsilon = 1 \quad \exists N : \quad n \geq N, \quad |u_n - L| \leq 1$
- $|u_n| = |u_n - L + L| \leq |u_n - L| + |L| \leq 1 + |L|$
- Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers inférieurs à N, l'ensemble $\{|u_0|, |u_1|, \cdots |u_{N-1}|\}$ a donc un plus grand élément : $M = \max_{0 \leq i \leq N-1} |u_i|$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{array}{llll} \text{soit :} & n < N & \text{et} & |u_n| \leq M \\ \text{soit :} & n \geq N & \text{et} & |u_n| \leq 1 + |L| \end{array}$ dans tous les cas :

$$|u_n| \leq \max(M, 1 + |L|)$$

Exemples importants

Somme d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

$$S = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\begin{array}{llcccccccccccc} & S & = 1 & + & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \cdots & + & a^n & & \\ - & S.a & = & & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \cdots & + & a^n & + & a^{n+1} \\ & S - S.a & = 1 & & & & & & & & & & & - & a^{n+1} \end{array}$$

$$S(1-a) = 1 - a^{n+1}$$

Exemples importants

Somme d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

$$S = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Si $|a| < 1$, $\quad u_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{1 - a}$$

Exercice : Soit $a \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$. Montrer que pour tous $0 \leq m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^{n} a^k = a^m \times \frac{1 - a^{n-m+1}}{1 - a}.$$

Exercice : Montrer que

$$0.99999999 \cdots\cdots = 1.$$

Qu'en déduisez-vous ?

Exercice : Donner la limite de $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right)^n$.

Exercice : Soit

$$u_n = 2^n \qquad v_n = 6^n.$$

Donner les limites de u_n, de v_n, de $u_n v_n$ et de $u_n + v_n$. Donner ensuite la limite de u_n / v_n pour en déduire la limite de $u_n - v_n$.

Exemples importants

Suites u_n telles que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha < 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

- $\left|\frac{u_n}{u_0}\right| = \left|\frac{\cancel{u_1}}{u_0}\right|\left|\frac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_1}}\right|\left|\frac{\cancel{u_3}}{\cancel{u_2}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{\cancel{u_{n-1}}}\right| = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| < \alpha^n$
- $|u_n| < \alpha^n |u_0|$
- $\alpha < 1, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$

Exemples importants

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$
- $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1} \leq \frac{|a|}{N} < \frac{1}{2}$
- $\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \prod_{k=N+1}^{k=n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.2^N$
- $|u_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n.2^N.|u_N|$ or $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

1. $u_n = 3^n$
2. $v_n = (0.5)^n$
3. $w_n = 2^n + 5^n$
4. $x_n = 2^n - 5^n$
5. $y_n = 2^n - \dfrac{5^n}{n!}$
6. $z_n = (-0.2)^n - 5^n$
7. $t_n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2^n + 1}$

Quelques définitions

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$
- décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$

Pour étudier la croissance (ou la décroissance) d'une suite, on calcule

$$u_{n+1} - u_n$$

et on étudie le signe de la différence.

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \\ &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) < 0$$

u_n est décroissante.

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, pour étudier la croissance de u_n, on peut calculer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la suite est croissante
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, la suite est décroissante

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = ne^{-\frac{1}{n!}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\,e^{-\frac{1}{(n+1)!}}}{ne^{-\frac{1}{n!}}}$$
$$= \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}}$$
$$= \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{n}{(n+1)!}} > 1$$

La suite u_n est donc croissante

Exercice : Donner la monotonie des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3}{n+5}$
2. $v_n = \dfrac{n}{n^2+1}$
3. w_n définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + w_n^2$
4. x_n définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n^2}$.

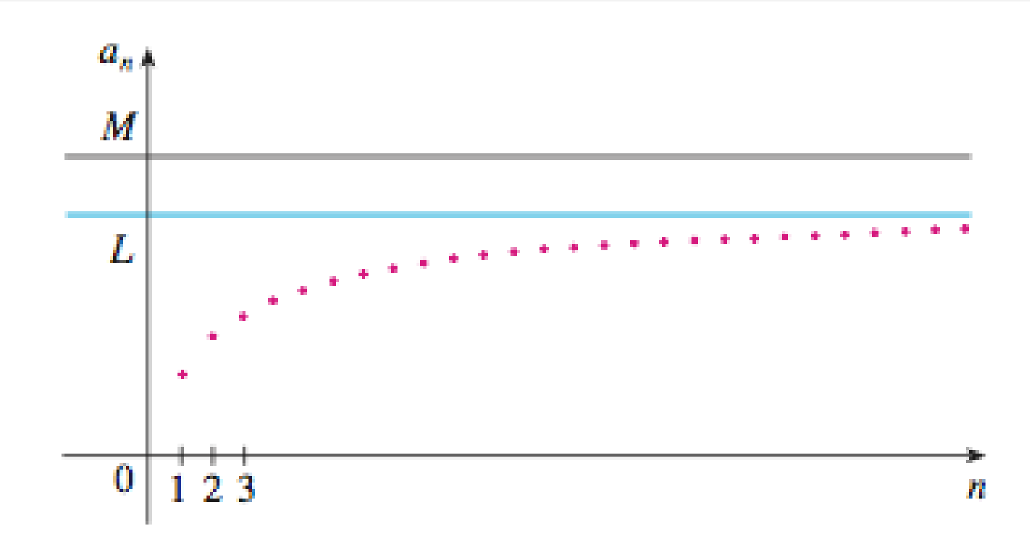
Exercice : Soit u_n définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de u_n.
2. Montrer que pour tout n, $u_n > n^2$.
3. Donner la limite de u_n.

Limites et monotonie

Théorème :

- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.
- Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.



Suite a_n croissante et majorée

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est majorée :

  $A \subset \mathbb{R}$ donc A admet une borne supérieure L.
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad L - \varepsilon < u_N \leq L$
- La suite est croissante, donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N : \quad L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L + \varepsilon$

$$|u_n - L| \leq \varepsilon$$

$\hookrightarrow$ la suite u_n a pour limite L

Rappel

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel, on dit que

u_n a pour limite L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$

On dit aussi : u_n converge vers L

$$|u_n - L| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leq u_n - L \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$$

Rappel

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel, on dit que

u_n a pour limite L si :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$

On dit aussi : u_n converge vers L

$$|u_n - L| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leq u_n - L \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$$

Exemple

$$u_0 = 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$$

$u_1 = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{\frac{1}{4}+1}{2} = \frac{5}{8}$

$u_3 = \frac{89}{128}$

...

Exemple

$u_0 = 0,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$

- Montrons que pour tout n, $u_n \in [0,1]$:
  - Vrai pour $n = 0$.
  - Si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $\frac{0^2+1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} \leq \frac{1^2+1}{2}$, càd $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.
  - Donc c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\hookrightarrow$ u_n est majorée

- u_n est croissante : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$
- Donc u_n converge vers une limite L
- $u_{n+1} \longrightarrow L$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2} \longrightarrow \dfrac{L^2+1}{2}$, donc $L = \dfrac{L^2+1}{2}$, càd $(L-1)^2 = 0$
- Donc $L = 1$.

u_n converge vers 1

Exemple

$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

- u_n est croissante : pour tout n,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

- Montrons que pour tout $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$:

$1! = 1 = 2^{1-1}$ et pour $n \geq 2$, $n! = 2 \times 3 \times \cdots \times n \geq 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{n-1}$

- Donc pour tout n,

$$u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{2^\ell} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3$$

- Donc u_n converge vers une limite L

u_n converge

(*vous verrez plus tard que* $L = e$)

Exemple

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$u_1 = 1$

$u_2 = 1 + \frac{1}{2^2}$

$u_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$

$u_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$

$u_5 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$

....

Exemple

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ $\quad u_n$ est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
  3. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
  4. $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
  5. $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ $\quad u_n$ est majorée

u_n est convergente

Exercice : Soit v_n définie par $v_0 = 1/2$ et $v_{n+1} = v_n - v_n^2$.

1. Quelle est la monotonie de v_n ?
2. Montrer que pour tout n, $0 \leq v_n \leq 1$.
3. Montrer que v_n converge et donner sa limite.

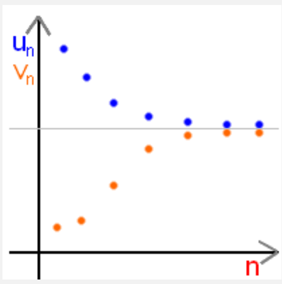
Exercice : Soit v_n définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{1+v_n^2}$.

1. Montrer que pour tout n, $0 < v_n \leq 1$.
2. Quelle est la monotonie de v_n ?
3. Montrer que v_n converge et donner sa limite.

Suites adjacentes

Théorème : Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

1. v_n est croissante et u_n est décroissante
2. $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$



Alors :

1. les deux suites u_n et v_n convergent
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$

Deux suites qui vérifient ces hypothèses sont dites adjacentes

Suites adjacentes

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geq 0 \quad u_n$ est donc croissante
- $\forall n \in \mathbb{N},$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)!(n+1)} \leq 0 \end{aligned}$$

  v_n est décroissante
- $v_n - u_n = \frac{1}{n!n} \geq 0 \quad$ et $\quad v_n - u_n \to 0, \quad$ quand $\quad n \to \infty$

Suites adjacentes

Démonstration

- On a $u_n - v_n$ décroissante et tendant vers 0, donc positive, donc on a le classement :
$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n \leq \ldots \leq u_n \leq \cdots \leq u_2 \leq u_1 \leq u_0$$
- v_n est majorée par u_0, comme elle est croissante, elle converge vers L
- u_n est minorée par v_0, comme elle est décroissante, elle converge vers L'

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0, \quad L = L'$

Exercice : Dans chaque cas suivant, dire si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Dans l'affirmative, donner leur limite commune.

1. $u_n = -\dfrac{1}{n+1} \qquad v_n = \dfrac{1}{n+3}$
2. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \qquad v_n = 1 + \sin(\dfrac{\pi}{2n+2})$
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n+1} \qquad v_n = \dfrac{n+3}{n}$
4. $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1} \qquad v_n = \dfrac{2n}{n+3}$

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut construire plusieurs suites à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- La suite des termes de rang pair : $v_n = u_{2n}$
- La suite des termes de rang impair : $w_n = u_{2n+1}$
- La suite des termes de rang multiple de 3 : $a_n = u_{3n}$
- ...

La construction repose sur deux moyens :

1. on choisit certains termes de la suite
2. on ne revient pas en arrière

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

On appelle suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $v_n = u_{\varphi(n)}$

Exemples :

- $\varphi(n) = 2n$: suite des termes de rang pair : $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n}$
- $\varphi(n) = 2n+1$: suite des termes de rang pair : $w_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n+1}$
- $\varphi(n) = 3n$: suite des termes de rang multiple de 3 : $a_n = u_{\varphi(n)} = u_{3n}$

Proposition : Soit$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers L.

Toute suite v_n extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite L.

(Proposition admise)

Cette proposition est utile pour montrer qu'une suite ne converge pas.

Exemple : $u_n = (-1)^n$

Si u_n converge vers L, toute suite extraite de u_n converge aussi vers L

- La suite extraite $v_n = u_{2n} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$
- La suite extraite $w_n = u_{2n+1} = -1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = -1$

Proposition : Soit u_n une suite ; on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L$$

Démonstration.

1. $\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L$
2. $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = L$

1. Les suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont extraites de la suite u_n qui converge vers L, elles convergent donc aussi vers L
2. - v_n et w_n convergent vers L, donc :

$$\forall \varepsilon, \quad \exists N_1 \text{ et } \exists N_2 :$$

$$\forall n \geq N_1,\ |v_n - L| \leq \varepsilon, \text{ et } \forall n \geq N_2,\ |w_n - L| \leq \varepsilon$$

   donc pour $N = \max\{N_1, N_2\}$,

$$\forall \varepsilon, \quad \exists N : \quad \forall n \geq N,\ |v_n - L| \leq \varepsilon, \text{ et } |w_n - L| \leq \varepsilon$$

   - Soit $n > 2N \quad$ (donc $\quad n \geq 2N+1$) :
     - Si n est pair, $n = 2p$ et $p > N$ donc :
       $|u_n - L| = |u_{2p} - L| = |v_p - L| \leq \varepsilon$
     - Si n est impair, $n = 2p+1$ et $p \geq N$ donc :
       $|u_n - L| = |u_{2p+1} - L| = |w_p - L| \leq \varepsilon$

Exercices (difficiles) :

1. Soit u_n une suite et $x_n = u_{2n}$, $y_n = u_{2n+1}$, $z_n = u_{3n}$ 3 suites extraites de u_n. Montrer que si ces 3 suites sont convergentes, alors u_n est convergente.

2. Soit u_n une suite telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, la suites extraite u_{kn} est convergente. Peut-on dire que u_n est convergente ? (penser à la suite u_n qui vaut 1 lorsque n est premier et 0 sinon)

Suites récurrentes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I :

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Une suite récurrente est définie

1. par son terme initial : u_0
2. et par son terme général : $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple

Suite arithmétique

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x + r$

Proposition : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + nr$

- Pour $n = 0$, $\quad u_0 = u_0 + 0 \times r \qquad$ Vrai pour $n = 1$
- Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = a + nr$ (hypothèse de récurrence)
- Calculons : $u_{n+1} = u_n + r = (a + nr) + r = a + (n+1)r$

Exemple

Suite géométrique

Une suite géométrique, de terme initial a et de raison q, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n.q$

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x.q$

Proposition : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a.q^n$

- Pour $n = 0$, $\quad u_0 = u_0.q^0$
- etc.

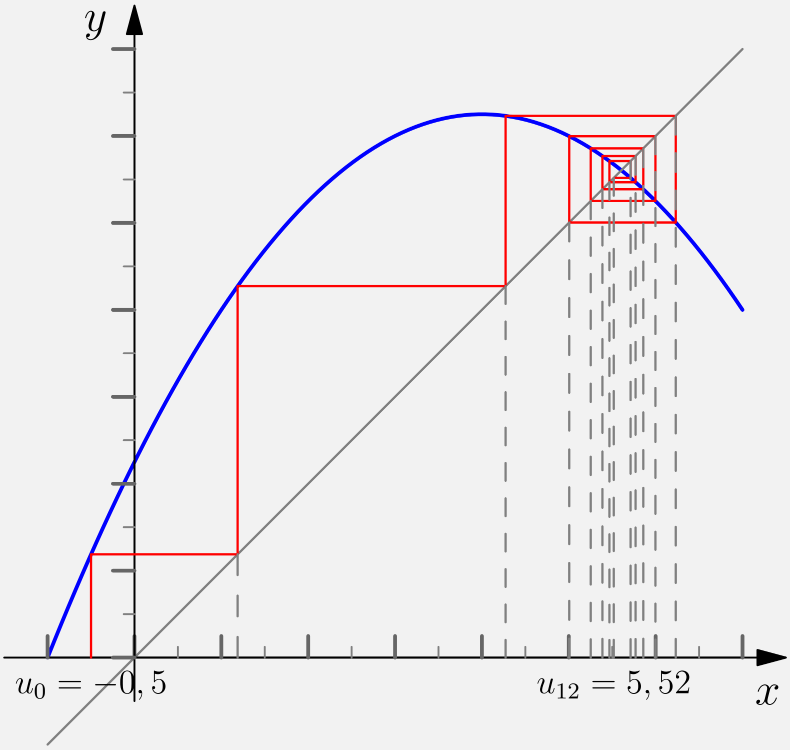
Exercice : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 2$ et

$$v_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \qquad u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}.$$

1. Montrer que la suite $s_n = u_n + v_n$ est constante.
2. Montrer que la suite $d_n = u_n - v_n$ est géométrique et donner sa formule en fonction de n.
3. En déduire les formules de u_n et v_n en fonction de n, puis que ces suites sont adjacentes et donner leur limite.

Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



Propriétés des suites récurrentes

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est croissante si :

$$\forall x,\ x' \in \mathbb{R}, \quad x \geq x' : \quad f(x) \geq f(x')$$

Soit une u_n une suite récurrente définie par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante.}$$

1. Si $u_1 \geq u_0$, alors la suite u_n est croissante
2. Si $u_1 \leq u_0$, alors la suite u_n est décroissante
3. Si $u_1 = u_0$, alors la suite u_n est constante

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante et } u_1 \geq u_0$$

- La proposition est vraie pour $n = 0$
- Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} \geq u_n$ (hypothèse de récurrence)
- La fonction f est croissante, donc :

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \Rightarrow \quad u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$$

Théorème : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et u_n une suite définie par récurrence par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Si u_n est convergente vers $L \in I$
2. Si f est continue

Alors L vérifie : $f(L) = L$

Exercice : Soit u_n définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$. Donner la seule limite possible de u_n.

Exemple

Si la suite $u_0 = -\frac{1}{2}$, $\quad u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4}$ est convergente,

$$\text{sa limite } L \text{ vérifie : } L = \frac{(L+1)(9-L)}{4}$$

On doit donc résoudre l'équation :

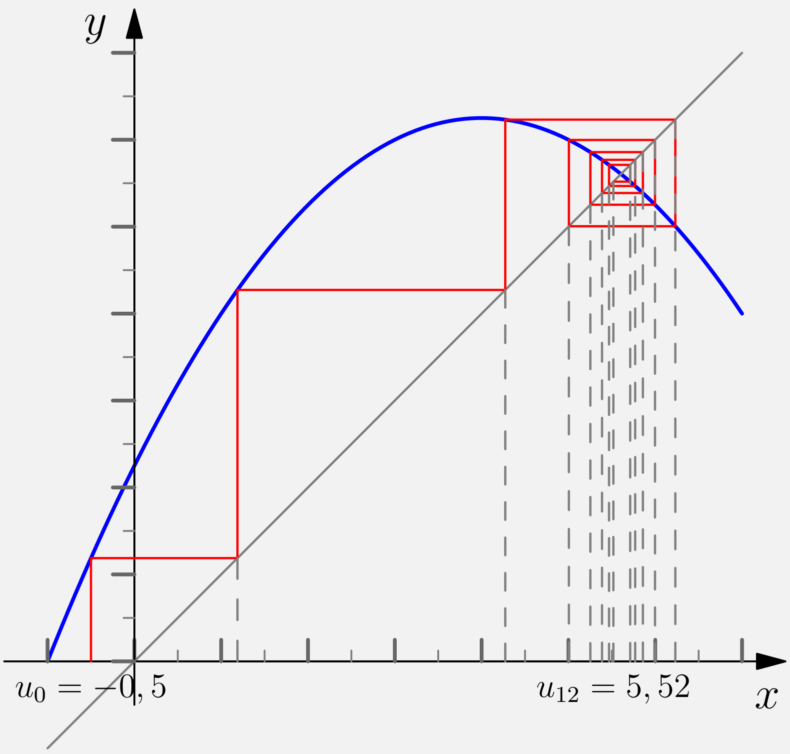
$$x = \frac{(x+1)(9-x)}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 9 = 0$$

Les deux racines sont : $x_1 = 2 - \sqrt{13} \quad x_2 = 2 + \sqrt{13}$

$$L = 2 + \sqrt{13} = 5,605551275\cdots$$

Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



Exercice : Soit $f(x) = x - x^3$ et u_n définie par $u_0 = 4/10$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout n, $0 < u_n < 1$.
2. Montrer que u_n est décroissante.
3. u_n converge-t-elle ? Si oui, donner la limite.

- $\lambda > 1 \implies \forall \alpha > 0,\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda^n}{n^\alpha} = +\infty$
- $|\lambda| < 1 \implies \forall \alpha > 0,\quad \lim_{n\to\infty} n^\alpha \lambda^n = 0$

Exercice : Donner les limites des suites suivantes :

1. $a_n = n^2 (1/2)^n$
2. $b_n = \dfrac{3^n}{n^5}$
3. $u_n = (4n^2 + 3n + 5)e^{-n}$
4. $v_n = \dfrac{5^n}{-2n^3 + n^2 - 4n + 1}$
5. $w_n = \dfrac{4n^2 5^n + 3n + 5}{-2n^3 5^n + n^2 - 4n + 1}$
6. $z_n = \dfrac{4n^2 5^n - 7n 3^n - 6}{-n^2 2^n + 4n + 2}$
7. $t_n = \dfrac{n^3 4^n - n^2 5^n + 6}{n^3 2^n + n + 1}$