

## Feuille de TD n° 4 : Dérivabilité d'une fonction numérique

**Exercice 1.** Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrer chaque assertion correcte et donner un contre-exemple pour chaque assertion fausse.

- (1) Une fonction continue en  $x_0$  est dérivable en  $x_0$ .
- (2) Une fonction dérivable en  $x_0$  est continue en  $x_0$ .
- (3) Une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  a une dérivée continue sur  $I$ .
- (4) Si deux fonctions ont leurs dérivées égales sur un intervalle ouvert, alors elles sont égales sur cet intervalle.
- (5) Si les nombres dérivés d'une fonction à gauche et à droite existent en un point, alors la fonction est dérivable en ce point.
- (6) Si une fonction paire est dérivable, alors sa dérivée est impaire.
- (7) Une fonction ayant sa dérivée paire est toujours impaire.

**Exercice 2.** Calculer  $f'(x_0)$  en utilisant la définition du nombre dérivé dans chacun des cas suivants :

$$(1) f(x) = \sqrt{2+x} \quad (2) f(x) = x^3 + 3x \quad (3) f(x) = \frac{x}{x+1} \quad (4) f(x) = |x|.$$

**Exercice 3.** Calculer, lorsqu'elle est définie, la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} (1) f(x) = \sin(\cos x) & (2) f(x) = \exp(2x \ln(x)) & (3) f(x) = \sqrt{1+x^2+2x^4} \\ (4) f(x) = \frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)} & (5) f(x) = x^2 \exp\left(-\frac{1}{2x^2}\right) & (6) f(x) = \tan(\sqrt{1-x^2}) \\ (7) f(x) = \frac{\exp(\frac{1}{x})-1}{\exp(\frac{1}{x})+1} & (8) f(x) = \ln(1+\sqrt{1+\cos x}) & (9) f(x) = (1+x)^{x^2} \end{array}$$

**Exercice 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ .

- (1) Pour tout  $x \neq 1$ , donner une expression de  $P_n(x)$  sous forme de fraction rationnelle.
- (2) En déduire une expression sous forme de fraction rationnelle de la somme  $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$  pour tout  $x \neq 1$ .

**Exercice 5.** Calculer la dérivée  $n$ -ième des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} (1) f(x) = \sin(x) & (2) f(x) = x^k \text{ pour } k \in \mathbb{N}, & (3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ (4) f(x) = \ln(1-x), & (5) f(x) = \frac{\exp(x)}{x} & (6) f(x) = x \exp(2x). \end{array}$$

**Exercice 6.**

- (1) Déterminer si les applications suivantes sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

$$(1) f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq -1, \\ -4x & \text{si } x > -1. \end{cases} \quad (2) f(x) = e^{|x|} \quad (3) f(x) = x|x|$$

- (2) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que l'application suivante soit dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 2, \\ (ax+b)^2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

**Exercice 7.** Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$  pour tout  $x \neq 0$ . Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $f$  la fonction prolongée. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , mais que  $f'$  n'est pas continue en 0.

**Exercice 8.** Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x} & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\ (4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\exp(x) - \exp(2)}{x^2 + x - 6} & (5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(1+x)}{x^2 - x - 2} & (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\exp(x) - 1} \end{array}$$

**Exercice 9.** On considère l'application  $f : ]-\frac{1}{3}, +\infty[ \rightarrow ]\frac{2}{3}, +\infty[$   
 $x \mapsto \frac{2x+1}{3x+1}$

- (1) Montrer que  $f$  est strictement décroissante.
- (2) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]-\frac{1}{3}, +\infty[$  dans  $]\frac{2}{3}, +\infty[$ . Déterminer sa réciproque, notée  $f^{-1}$ .

- (3) Calculer la dérivée de  $f^{-1}$  en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque. Vérifier le résultat par le calcul direct de la dérivée de  $f^{-1}$ .

**Exercice 10.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

- (1) Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
- (2) Calculer l'expression des dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
- (3) Calculer  $f'(0)$  à l'aide du taux d'accroissement, puis montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ . En déduire que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa dérivée est continue.
- (4) Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $x \neq 0$ ,  $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$  où  $P_n$  est un polynôme de degré  $2n - 2$  et dont le coefficient dominant vaut  $n!$ .
- (5) Soit  $n \geq 1$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x}$  existe et le calculer. En déduire que  $f^{(n)}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  puis en déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Exercice 11.** Soit  $g$  une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle  $[a, b]$  telle que  $g(a) = g(b) = 0$ . Soit  $x_0 \in ]a, b[$ , et on pose  $A = \frac{2g(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}$ . Montrer qu'il existe  $\alpha \in ]a, b[$  tel que  $A = g''(\alpha)$ . (Indication : on pourra étudier la fonction  $g_1$  définie par  $g_1(x) = g(x) - \frac{A}{2}(x - a)(x - b)$ .)

**Exercice 12.** Montrer les encadrements suivants à l'aide du théorème des accroissements finis :

- (1)  $\frac{1 - \exp(-x)}{x} < 1$  pour  $x > 0$ ,
- (2)  $|\sin(x)| \leq |x|$  pour  $x \in \mathbb{R}$ ,
- (3)  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$  pour  $x > 0$ .

**Exercice 13.** Le but de l'exercice est d'étudier la bijection réciproque de la fonction tangente.

- (1) Montrer que la fonction  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable et strictement croissante. Déterminer ses limites en  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .
- (2) En déduire que  $\tan$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $\arctan$  sa bijection réciproque.
- (3) Calculer la dérivée de la fonction  $\arctan$ .
- (4) Montrer que, pour tout  $x$  non nul,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2} \quad \left( \text{avec } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \right)$$

**Exercice 14.** Soient  $x$  et  $y$  réels avec  $0 < x < y$ .

- (1) Montrer que  $x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$ .
- (2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y$ . De l'étude de  $f$ , déduire que pour tout  $\alpha$  de  $]0, 1[$ ,  

$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$

Interprétation géométrique ?

**Exercice 15.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $]a, b[$  et valeurs réelles. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

- (1) Soit  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f'(x_0) = 0$ , alors  $x_0$  est un extremum local.
- (2) Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .

**Exercice 16.**

- (1) Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $]a, b[$  s'annulant en  $n + 1$  points distincts. Montrer qu'il existe un point  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(x_0) = 0$ . (Indication : on procédera par récurrence.)
- (2) En déduire qu'il n'existe pas de polynôme  $P_n$  de degré  $n - 1$  dont la courbe représentative coupe plus de  $(n + 1)$  fois la courbe représentative de l'exponentielle. (On posera  $f(x) = e^x - P_n(x)$  et on raisonnera par l'absurde.)