Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : **Corrigé du contrôle continu** n°3
12 janvier 2015

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 2h30.

NB : *Ce sujet contient 8 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.* **Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.**
VEUILLEZ INSCRIRE VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE DANS LA CASE "OBSERVATIONS".

On rappelle les développements limités suivants. Ils sont donnés au voisinage de 0, où n et p sont des entiers quelconques et a un réel quelconque.

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p+1}\right) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+2}\right) \\
\mathrm{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)...(a-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

On rappelle également le théorème des accroissements finis :

Soit f une fonction définie de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. On suppose que

- f est continue sur $[a,b]$ (intervalle fermé)
- f est dérivable sur $]a,b[$ (intervalle ouvert)

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Exercice 1.

1) Donner sous forme algébrique les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = 1 - i$.

2) Donner sous forme exponentielle et sous forme algébrique les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$.

Solution de l'exercice 1.

1) Il s'agit de calculer les racines carrées du nombre complexe $1 - i$. On résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 &=& 1 \\ 2ab &=& -1 \\ a^2 + b^2 &=& \sqrt{2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a^2 &=& \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ 2ab &=& -1 \\ b^2 &=& \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \\ 2ab &=& -1 \\ b &=& \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{array}\right.$$

Comme $2ab < 0$, a et b sont de signes opposés. Les deux racines carrées de $1 - i$ sont donc

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

2) Les solutions sont les racines quatrièmes de l'unité. Formes exponentielles :

$$\left\{e^{i\frac{2k\pi}{4}},\ k\in\{0,1,2,3\}\right\}=\left\{e^{i0},\ e^{i\frac{\pi}{2}},\ e^{i\pi},\ e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\}$$

Formes algébriques : $\{1,\ i,\ -1,-i\}$.

Exercice 2.

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llcll}
1) & \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}-2x & ; & 2) & \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}-x}{\ln x}\\
3) & \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} & ; & 4) & \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\exp(x)-\cos(x)-\sin(x)}{x^2}\\
5) & \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arctan}(5x)}{\exp(2x)-1} & ; & 6) & \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\sin(\frac{x^2}{2})-1+\cos(x)}
\end{array}$$

Solution de l'exercice 2.

1)

$$\sqrt{4x^2+1}-2x=\frac{4x^2+1-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}.$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}+2x=+\infty$$

on a

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=0.$$

2)

$$\frac{e^{3x}-x}{\ln x}=\frac{e^{3x}}{\ln x}\left(1-\frac{x}{e^{3x}}\right).$$

Par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{\ln x}=+\infty\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{3x}}=0,$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}-x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{\ln x}\left(1-\frac{x}{e^{3x}}\right)=+\infty.$$

3) On a le développement limité au voisinage de 0

$$\cos(x)-1=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

donc

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}+o(1)$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

4) On effectue un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 du numérateur.

$$\exp(x)-\cos(x)-\sin(x)=1+x+\frac{x^2}{2}-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-x+o(x^2)=x^2+o(x^2).$$

Donc

$$\frac{\exp(x)-\cos(x)-\sin(x)}{x^2}=1+o(1)$$

soit

$$\lim_{x\to0}\frac{\exp(x)-\cos(x)-\sin(x)}{x^2}=1.$$

5) On effectue un développement limité à l'ordre 1 du numérateur et du dénominateur.

$$\operatorname{Arctan}(5x)=5x+o(x)\quad\text{et}\quad\exp(2x)-1=2x+o(x)$$

d'où au voisinage de 0

$$\frac{\operatorname{Arctan}(5x)}{\exp(2x)-1}\sim\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$$

donc

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arctan}(5x)}{\exp(2x)-1}=\frac{5}{2}.$$

6) On détermine le premier terme non nul des développement limité du numérateur et du dénominateur pour obtenir un équivalent en 0.

$$\ln(1+x) - \sin(x) = x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Par composition,

$$\sin(\tfrac{x^2}{2}) - 1 + \cos(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

D'où au voisinage de 0

$$\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\sin(\frac{x^2}{2}) - 1 + \cos(x)} \sim \frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^4}{24}} \sim -\frac{12}{x^2}$$

Donc,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\sin(\frac{x^2}{2}) - 1 + \cos(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{12}{x^2} = -\infty.$$

Exercice 3.

Soient $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \ln(1+x)$.

1) Calculer le développement limité du produit $f \times g$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

2) Calculer le développement limité de $\dfrac{1}{1+f(x)g(x)}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Solution de l'exercice 3.

1) Par produit, $f(x)g(x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

2) On compose avec le développement limité de

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3)$$

(obtenu en remplaçant x par $-y$ dans le DL de $\frac{1}{1-x}$). Par composition, en remplaçant y par $x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3$,

$$\frac{1}{1+f(x)g(x)} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 + o(x^3).$$

Exercice 4.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1) Démontrer par récurrence que la propriété $P(n)$: "$u_n > 0$ et $v_n > 0$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.a) Montrer, sans démonstration par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2$.

2.b) En déduire que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.c) En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

3) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers deux limites finies que l'on appellera ℓ_1 et ℓ_2.

4) Montrer que $\ell_1 = \ell_2$. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes ?

Solution de l'exercice 4.

1) Initialisation ok.

Hérédité : on suppose $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$ car la fonction racine est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$ d'après les propriétés de la somme. D'où la proposition $P(n+1)$.

2.a) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2$

2.b) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2 \geqslant 0$ donc $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$.

Comme $u_0 \leqslant v_0$, on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

2.c) En utilisant l'inégalité $u_n \leqslant v_n$, on obtient :

$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{u_n u_n} = u_n$ donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant \dfrac{v_n + v_n}{2} = v_n$ donc (v_n) est décroissante.

3) (u_n) est croissante. De plus, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ (car (v_n) est décroissante), donc (u_n) est majorée par v_0. La suite (u_n) converge donc vers une limite finie notée ℓ_1.

De même, (v_n) est décroissante et $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$, donc (v_n) est minorée par u_0. La suite (v_n) converge donc vers une limite finie notée ℓ_2.

4) On a $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donc en passant à la limite $\ell_2 = \dfrac{\ell_1 + \ell_2}{2}$ soit $\ell_1 = \ell_2$.

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissantes et décroissantes, telles que $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$, elles sont donc adjacentes.

Exercice 5.

1) Soit $k \geqslant 2$ un entier. En appliquant le théorème des accroissements finis (*cf préambule*) à la fonction $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $[k-1, k]$, montrer que

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}.$$

2) Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

2.a) En considérant $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) est croissante.

2.b) A l'aide de l'inégalité de la question 1, montrer que $u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

2.c) Montrer que la suite (u_n) est convergente *(on ne demande pas de calculer la limite)*.

Solution de l'exercice 5.

1) La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[k-1, k]$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c \in]k-1, k[$ tel que $\dfrac{-1}{k} - \dfrac{-1}{k-1} = \dfrac{1}{c^2}$

Or $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{c^2} \leqslant \dfrac{1}{(k-1)^2}$, d'où $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{(k-1)^2}$

2.a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.

2.b)

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\
&\leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \quad \text{(d'après l'inégalité de la question 1)} \\
&\leqslant 1 - \frac{1}{n} \quad \text{(somme télescopique)}
\end{aligned}$$

2.c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 d'après la question 2.b, donc elle converge.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On notera également f ce prolongement.
3) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ possède au moins une solution dans l'intervalle $]0, \sqrt{\pi}[$.
4) L'objectif de cette question est de montrer que cette solution est unique.

4.a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

4.b) On pose $h(x) = x\cos(x) - \sin(x)$.
Calculer h', donner son signe, et montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $h(x) \leqslant 0$

4.c) On pose $g(x) = x^2\cos(x^2) - \sin(x^2)$. Montrer que pour tout $x \in [0, \sqrt{\pi}]$, $g(x) \leqslant 0$.

4.d) En déduire que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution dans l'intervalle $]0, \sqrt{\pi}[$.

Solution de l'exercice 6.

1) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

2) f est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si f admet une limite finie en 0. On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

(limite connue, ou dérivée en 0 de $y \mapsto \sin(y)$).

3) La fonction prolongée f est continue sur l'intervalle $[0, \sqrt{\pi}]$, $f(0) = 1$ et $f(\sqrt{\pi}) = \dfrac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$. Comme $\frac{1}{2}$ est compris entre 0 et 1, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in]0, \sqrt{\pi}[$ tel que $f(c) = \frac{1}{2}$.

4.a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. On a

$$f'(x) = \frac{2x\cos(x^2)x^2 - 2x\sin(x^2)}{x^4} = \frac{2(x^2\cos(x^2) - \sin(x^2))}{x^3}.$$

4.b) $h(x) = x\cos(x) - \sin(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x)$

$h' \leqslant 0$ l'intervalle $[0, \pi]$.

Donc h est décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$ et $h(0) = 0$, donc pour tout $x \in [0, \pi]$, $h(x) \leqslant 0$.

4.c) $g(x) = h(x^2)$. Pour tout $x \in [0, \sqrt{\pi}]$, $x^2 \in [0, \pi]$, et donc d'après la question précédente $g(x) = h(x^2) \leqslant 0$.

4.d) $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ donc pour tout $x \in [0, \sqrt{\pi}]$, $f'(x) \leqslant 0$. On en déduit que f est décroissante sur l'intervalle $[0, \sqrt{\pi}]$ et donc l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution

IMPRECISION : Il aurait fallu montrer que f est strictement décroissante pour conclure rigoureusement, et donc remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.

Exercice 7.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

1) Soit $F = \{(x, y, z) \in E \mid 3x + 2y - z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit $\mathcal{G} = \{(2, 0, 5), (2, 0, 7), (0, 1, 0)\}$.

2.a) Montrer que $\mathcal{G}$ est une famille libre.

2.b) Donner la dimension de l'espace vectoriel E.

2.c) Montrer que $\mathcal{G}$ est une base de E.

Solution de l'exercice 7.

1) Le vecteur nul $(0, 0, 0) \in F$ car ses coordonnées vérifient l'équation $3x + 2y - z = 0$.

Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que $u + \alpha v \in F$. On a

$$3(x_1 + \alpha x_2) + 2(y_1 + \alpha y_2) - (z_1 + \alpha z_2) = \underbrace{3x_1 + 2y_1 - z_1}_{= 0 \text{ car } u \in F} + \alpha \underbrace{(3x_2 + 2y_2 - z_2)}_{= 0 \text{ car } v \in F} = 0$$

donc les coordonnées vérifient l'équation $3x + 2y - z = 0$, donc $u + \alpha v \in F$. Ainsi, F est bien un sous-espace vectoriel de E.

2.a) Soient α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha(2, 0, 5) + \beta(2, 0, 7) + \gamma(0, 1, 0) = (0, 0, 0).$$

On a alors le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha + 2\beta & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \\ 5\alpha + 7\beta & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -\beta \\ \gamma & = & 0 \\ 2\beta & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{array}\right.$$

$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ est l'unique solution du système, la famille de vecteurs $\mathcal{G}$ est donc bien libre.

2.b) $E = \mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

2.c) $\mathcal{G}$ est une famille libre de cardinal 3 dans l'espace vectoriel E de dimension 3, c'est donc une base de E.

Exercice 8.

1) Soient A une matrice de dimension $n \times m$ et B une matrice de dimension $p \times q$.

Sous quelle condition le produit AB a-t-il un sens ?

2) Soient A et B les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.a) Calculer le produit AB.

2.b) Calculer la matrice inverse de A *(on admettra que A est inversible)*.

2.c) Résoudre le système suivant en le mettant sous forme matricielle :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - z & = & 2 \\ 4x + y - 2z & = & 3 \\ -5x - 3y - 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

Solution de l'exercice 8.

1) Le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B, soit $m = p$.

2.a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 14 \\ -12 & -37 \end{pmatrix}$

2.b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -18 & 7 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

2.c) Forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice A de la question précédente. La solution du système est

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -18 & 7 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 6 \end{pmatrix}$$