Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Licence 1ère année, 2016, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD numéro 2 :
Suites

Exercice 1.

Ces suites sont-elles arithmétiques ? géométriques ? Le cas échéant, préciser leur raison. Dans tous les cas, calculer leur terme général u_n.

$$a)\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{\pi u_n}{\sqrt{17}} \\ u_0 = 3 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_{n+1} = 1 - u_n \\ u_0 = 0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad d)\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}(3 - 2u_n) \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 2. Donner l'expression du terme général des suites suivantes :

1) (t_n) suite arithmétique de raison 10 telle que $t_{1000} = 0$.
2) (u_n) suite arithmétique telle que $u_0 = -2$ et $u_{10} = 118$.
2) (v_n) suite géométrique réelle telle que $v_0 = 3$ et $v_5 = -96$.
3) (w_n) une suite géométrique de raison -2 telle que $w_5 = 320$.

Exercice 3.

Soient (x_n) et (y_n) les deux suites définies par

$$x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

pour tout n, et dont les termes initiaux sont $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

On définit la suite à valeur complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$. Pour tout n, calculer z_{n+1} en fonction de z_n et en déduire les termes généraux de (x_n) et (y_n) ainsi que les limites de ces deux suites.

Exercice 4.

Les suites suivantes sont-elles majorées ? minorées ? croissantes ? décroissantes ? convergentes ?

$$a)\ u_n = (-3)^n + 3^n \qquad b)\ u_n = \frac{n+1000}{n+2012} \qquad c)\ u_n = \frac{2^n}{n!} \qquad d)\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases}$$

Exercice 5.

Parmi les énoncés suivants, déterminer et prouver ceux qui sont vrais, donner un contre exemple pour les autres.

a) Toute suite non minorée tend vers $-\infty$.
b) Toutes suite bornée est convergente.
c) Toute suite convergente est bornée.
d) Si (u_n) tend vers $l > 0$, alors (u_n) est positive ou nulle à partir d'un certain rang.
e) Toute suite croissante tend vers $+\infty$.
f) Si la suite $(|u_n|)$ converge alors la suite (u_n) converge aussi.
g) Si la suite (u_n) converge vers une limite l, alors $(|u_n|)$ converge vers la même limite.
h) Si les suites (u_n) et (v_n) n'ont pas de limite, alors $(u_n + v_n)$ n'a pas de limite.
i) Si la suite (u_n) converge, alors la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.
j) Si la suite (u_n) vérifie que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, alors la suite (u_n) converge.

Exercice 6.

Calculer les sommes suivantes :

$$a)\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{2^k}\qquad b)\sum_{k=0}^{n}3^{2k+1}\qquad c)\sum_{k=0}^{n}\frac{1+4^k}{3^k}\qquad d)\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(k\theta)}{2^k}$$

Exercice 7.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et

$$u_{n+1}=\frac{u_n+u_{n-1}}{2}\ ,\ \forall n\geqslant 1.$$

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et donner sa raison.

2) Écrire $\sum_{k=0}^{n}v_k$ en fonction des éléments de la suite (u_n), et en déduire l'expression de (u_n).

3) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 8.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\ ,\forall n\geqslant 0\end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n=u_n^2-4$ est géométrique.

3) En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice 9.

1) Rappeler les limites des suites suivantes :

$$a)\ \frac{2^n}{n^3}\qquad b)\ \frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\qquad c)\ \frac{2^{\log(n)}}{n^{\log(3)}}\qquad d)\ \frac{2^n}{n!}$$

2) Ces suites convergent-elles ? Si c'est la cas, donner leur limite.

$$a)\ u_n=n+\cos(n)\qquad b)\ u_n=\tfrac{4n+\sin(n)}{n^3}\qquad c)\ u_n=\tfrac{3n+5}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$d)\ u_n=\tfrac{(n+1)(2+(-1)^n)}{n+3}\qquad f)\ u_n=\tfrac{n-\log n}{n+\log n}\qquad g)\ u_n=(-1)^n+\tfrac{2}{n}$$

$$h)\ u_n=\sqrt{n-2}-\tfrac{n}{2}\qquad i)\ u_n=\tfrac{2^n}{n\log n}\qquad j)\ u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}$$

Exercice 10.

Parmi les énoncés suivants, déterminer ceux qui sont vrais et donner un contre exemple pour les autres.

1) Si $u_n\leqslant v_n$ pour tout n, (u_n) converge vers l et (v_n) est décroissante, alors (v_n) converge vers l.

2) Si $u_n\leqslant v_n$ pour tout n, (u_n) croissante, (v_n) décroissante alors (u_n) et (v_n) convergent.

3) Si $u_n\leqslant v_n$, (u_n) croissante, (v_n) décroissante, et (u_n-v_n) tend vers 0, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

4) Si $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$, (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) converge.

Exercice 11.

Dans chacun des cas qui suivent, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

1) $u_n=-\dfrac{1}{n+1}$ et $v_n=\dfrac{1}{n+3}$, $n\in\mathbb{N}$.

2) $u_n=1-\dfrac{1}{n}$ et $v_n=1+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 12.

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 2y_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 2 \\ y_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3y_n}{5} \end{cases} \quad \text{, pour } n \in \mathbb{N}.$$

1) On considère la suite (w_n) définie par $w_n = y_n - x_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (w_n) est géométrique, convergente et déterminer sa limite.

2) Montrer que la (x_n) est croissante et que la suite (y_n) est décroissante.

3) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite que nous noterons L.

4) Calculer $x_n + y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de L.

Exercice 13.

Le but de cet exercice est de définir et de calculer le nombre

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$$

où apparaissent une infinité de fois les symboles $\sqrt{}$, 1 et $+$, et uniquement ces symboles.

Pour ce faire, on considère la suite (ϕ_n) définie par :

$$\begin{cases} \phi_0 = 1 \\ \phi_{n+1} = \sqrt{\phi_n + 1} \end{cases}$$

pour tout $n \geqslant 0$.

1) Écrire ϕ_n avec les symboles $\sqrt{}$, 1 et $+$ pour les premiers termes de la suite.

2) Montrer que la suite (ϕ_n) est croissante.

3) Montrer par récurrence sur n que $\phi_n \leqslant 2$ pour tout n.

4) En déduire que la suite (ϕ_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 14.

Soit a un réel et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

pour tout $n \geqslant 0$.

1) Montrer que (u_n) est croissante.

2) Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est nécessairement 1.

3) On suppose $a \in [0, 1]$. Montrer par récurrence que $u_n \leqslant 1$. En déduire que (u_n) est convergente.

4) On suppose $a > 1$. Montrer que (u_n) diverge.

5) On suppose $a < 0$. Calculer u_1. Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 15.

On considère la suite (u_n) suivante

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

1 Montrer par récurrence que pour tout n, $u_n > 0$ et que donc la suite est bien définie.

2 Montrer que pour tout n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

3 En déduire que la suite converge. (On montrera par récurrence que la suite (u_n) décroit.)

4 On note α la limite de la suite (u_n). En utilisant le fait que u_n et u_{n+1} ont même limite, monter que

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right).$$

5 En déduire la valeur de la limite de la suite (u_n).

Exercice 16.

1) Que peut-on dire de la convergence d'une suite (u_n) qui vérifie $\lim nu_n = 0$?
2) Que peut-on dire de la convergence d'une suite (u_n) qui vérifie $\lim nu_n = 1$?
3) Que peut-on dire de la convergence d'une suite (u_n) qui vérifie $\lim nu_n = +\infty$?

Exercice 17.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère la fonction $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ que l'on suppose continue et monotone et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [a, b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1) On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Que dire de sa convergence ?
2) Etudier la convergence de la suite suivante :

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 5}.$$

3) On suppose que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.

4) Etudier la convergence de la suite suivante :

$$u_0 = 0.5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$

5) Les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles ?

Exercice 18.

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

1) Montrer que (u_n) est croissante.
2) Observer que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. Peut-on en déduire quelque chose ?
3) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
4) En déduire que (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 19. Donner les limites des suites suivantes :

(1) $a_n = n^4(1/3)^n$

(2) $b_n = \dfrac{3^n - 6^n}{n^5}$

(3) $c_n = \dfrac{6^n + n^2}{n!}$

(4) $d_n = \dfrac{2^n - n^2}{\sqrt{n}}$

(5) $e_n = \dfrac{3^n + \sqrt{n}}{4^n}$

(6) $u_n = (4n^3 + 2n + 5)e^{-2n}$

(7) $v_n = \dfrac{5^n}{n! + 3n}$

(8) $w_n = \dfrac{4n^2 5^n + 6n - 2}{-n^3 5^n + n - 6\sqrt{n} + 2}$

(9) $t_n = \dfrac{n^3 4^n - n^3 6^n + 1}{n^3 2^n + n^2 - 5}$