Université Paris-Descartes.
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et calculs : Contrôle continu n°1
12 Octobre 2015

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Exercice 1

1) Ecrire sous la forme exponentielle les nombres complexes $(1+i)$ et $(1-i)$

2) Montrer que $Z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = 2$

CORRECTION :

1) $1+i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$1-i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

2) $Z = \dfrac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^9}{(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^7} = 2e^{i(\frac{9\pi+7\pi}{4})} = 2e^{i4\pi} = 2$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : (on donnera les solutions sous forme algébrique)

(E_1) $z^2 + \sqrt{2}z - i \ = \ 0$

(E_2) $z^4 - 8z^2 + 25 \ = \ 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (on donnera les solutions sous forme exponentielle)

(E_3) $(z^5-1)(z^3+8i) \ = \ 0$

CORRECTION :

(E_1) $z^2 + \sqrt{2}z - i \ = \ 0.$
Le calcul du discriminant donne $\Delta = 2+4i$. On pose alors $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= 2 \\ 2xy &= 4 \\ x^2+y^2 &= 2\sqrt{5} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 &= 1+\sqrt{5} \\ y^2 &= \sqrt{5}-1 \\ xy &> 0 \end{cases} \Longrightarrow \delta \ = \ \pm\Big(\sqrt{1+\sqrt{5}} + i\sqrt{\sqrt{5}-1}\Big)$$

soit

$$z = \frac{1}{2}\Big(-\sqrt{2} + \sqrt{1+\sqrt{5}} + i\sqrt{\sqrt{5}-1}\Big) \text{ ou } \frac{1}{2}\Big(-\sqrt{2} - \sqrt{1+\sqrt{5}} - i\sqrt{\sqrt{5}-1}\Big)$$

(E_2) $z^4 - 8z^2 + 25 \ = \ 0$
On résoud en z^2. Le discriminant donne $\Delta = 64 - 100 = -36$ donc

$$z^2 \ = \ 4 \pm i3$$

ensuite on écrit $z = x + iy$ et on obtient

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = \ 4 \\ 2xy & = \ 3 \text{ (resp.} -3) \\ x^2 + y^2 & = \ 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 & = \ \frac{9}{2} \\ y^2 & = \ \frac{1}{2} \\ xy & > \ 0 \text{ (resp. } < 0) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(3+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(3-i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(3+i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(3-i) \right\}$$

1. [(E_3)] $(z^5 - 1)(z^3 + 8i) \ = \ 0$
On résoud $z^5 = 1$ ou $z^3 = 2^3 e^{-i\frac{\pi}{2}}$. On obtient par la formule du cours

$$\left\{ e^{i\frac{2k\pi}{5}}, \ k \in \{0, \ldots, 4\} \right\} \bigcup \left\{ 2e^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{2\ell\pi}{3}}, \ell \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

Exercice 3

On cherche à calculer pour $a, b \in \mathbb{R}$, $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(a + kb)$

1) Montrer que $Z = S + iT$ avec $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} sin(a + kb)$.

2) Montrer que $Z = e^{i(a + \frac{nb}{2})} \left(2cos\left(\frac{b}{2}\right) \right)^n$

3) En déduire que $S = 2^n cos^n \left(\frac{b}{2}\right) cos\left(a + n\frac{b}{2}\right)$

CORRECTION :

1) ok.

2) $Z \ = \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ib})^k 1^{n-k} e^{ia} \ = \ e^{ia}(1 + e^{ib})^n \ = \ e^{ia} \left(e^{ibn/2}(e^{-ib/2} + e^{ib/2})^n \right) \ = \ e^{i(a+nb/2)} \left(2cos(b/2) \right)^n \ = \ 2^n e^{i(a+nb/2)} \left(cos(b/2) \right)^n$

3) $S = Re(Z)$

Exercice 4

1) Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

a) $u_n = \sqrt{n^2 e^{2n} + 2} - ne^n$ b) $v_n = \dfrac{\cos n - n^3}{1 + n^2 \log n + n^3}$ c) $w_n = \dfrac{3^n + 2n^2}{2^n + 3n^3}$.

2) Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2 - 5^k}{3^k}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$.

CORRECTION

1) Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

$$\begin{array}{lrcll} \text{a)} & u_n = \sqrt{n^2e^{2n}+2} - ne^n & = & \dfrac{2}{\sqrt{n^2e^{2n}+2}+ne^n} & \to 0. \\ \text{b)} & v_n = \dfrac{\cos n - n^3}{1+n^2\log n + n^3} & = & \dfrac{n^{-3}\cos n - 1}{n^{-3}+n^{-1}\log n + 1} & \to -1 \\ \text{c)} & w_n = \dfrac{3^n+2n^2}{2^n+3n^3} & = & \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \dfrac{1+3^{-n}2n^2}{1+2^{-n}3n^3} & \to +\infty \end{array}$$

2) Calculer $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2-5^k}{3^k}$ $\quad$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$.

$$S_n \;=\; 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{5^k}{3^k} \;=\; 3\big(1-\frac{1}{3^{n+1}}\big) - \frac{3}{2}\big(\frac{5^{n+1}}{3^{n+1}} - 1\big) \;=\; \frac{9}{2} + \frac{5}{2}\big(\frac{5}{3}\big)^n - \frac{1}{3^n} \;=\; \frac{9}{2} + \frac{5^n}{3^n}\Big(-\frac{5}{2} + \frac{1}{5^n}\Big)$$

on en déduit que

$$\lim S_n \;=\; -\infty$$

Soit $a > 0$, on considère la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{5}u_n^2 + \dfrac{6}{5} \\ u_0 &= a. \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 0$.

2) Dans le cas où on suppose que la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs possibles de ℓ.

3) <u>**On suppose que** $0 < a < 2$ **:**</u>
Montrer par récurrence sur n que $u_n < 2$, puis montrer que la suite est croissante. En déduire qu'elle converge et donner sa limite.

4) <u>**On suppose que** $a > 3$ **:**</u>
Montrer par récurrence sur n que $u_n > 3$, puis montrer que la suite est croissante. En déduire que dans ce cas, la suite tend vers $+\infty$.

CORRECTION

1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 0$.
u_0 est positif et tous les autres termes sont définis comme la somme de termes positifs.

2) Dans le cas où on suppose que la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs possibles de ℓ.
On résoud

$$\ell = \frac{1}{5}\ell^2 + \frac{6}{5} \Leftrightarrow \ell^2 - 5\ell + 6 = 0 \Leftrightarrow (\ell-3)(\ell-2) = 0$$

3) <u>**On suppose que** $0 < a < 2$ **:**</u>
Montrer par récurrence sur n que $u_n < 2$, puis montrer que la suite est croissante. En déduire qu'elle converge et donner sa limite.
On a $u_0 < 2$ puis

$$u_n < 2 \underset{\text{car positif}}{\Rightarrow} u_n^2 < 4 \;\Rightarrow\; u_n^2 + 6 < 10 \;\Rightarrow\; u_{n+1} < 2.$$

Ainsi

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}(\underbrace{u_n - 3}_{<0})(\underbrace{u_n - 2}_{<0}) \;>\; 0$$

Donc u_n croissante et majorée, donc convergente. Comme $u_n < 2$ la limite ne peut pas être 3. $\lim u_n = 2$.

4) **On suppose que $a > 3$:**
Montrer par récurrence sur n que $u_n > 3$, puis montrer que la suite est croissante. En déduire que dans ce cas, la suite tend vers $+\infty$.
On a $u_0 > 3$ puis
$$u_n > 3 \Rightarrow u_n^2 > 9 \ \Rightarrow \ u_n^2 + 6 > 15 \ \Rightarrow \ u_{n+1} > 3.$$
donc
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}(\underbrace{u_n - 3}_{>0})(\underbrace{u_n - 2}_{>0}) \ > \ 0$$
donc u_n croissante. Cependant, $u_n \geq u_0 > 3$ implique que $\lim u_n \geq u_0 > 3$ et comme les seules limites possibles de u_n sont 3 et 2, on a que $\lim u_n = +\infty$.