Université René Descartes - Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 1ère année, 2011-2012, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

Devoir d'entraînement sur les développements limités

NB : *Ce devoir a pour but de compléter la feuille de TD6. Il s'agit d'un devoir d'entraînement* ***facultatif****. Un corrigé détaillé sera distribué ultérieurement pour permettre une* ***correction autonome****.*

Développement limité de la fonction tangente

Le but de ce devoir est d'établir le développement limité de la fonction tangente en zéro de plusieurs manières différentes. Pour guider les calculs, on rappelle le développement limité de tangente en 0 à l'ordre 8 :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)}$$

Exercice 1 : Préambule

On rappelle que la fonction tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(1) Préciser quel est l'ensemble de définition D de tan.
(2) Justifier que tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
(3) Démontrer que

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Correction de l'exercice 1 :

(1) Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$, donc le quotient $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est défini pour tous les réels x tels que $\cos x \neq 0$. Or

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \quad [2\pi] \iff x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Donc $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(2) sin et cos sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $D \subset \mathbb{R}$) et cos ne s'annule pas sur D, donc $x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.

(3) En appliquant la formule de dérivation d'un quotient on a :

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a bien $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Par ailleurs,

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Exercice 2 : Développement limité de tan **par la formule de Taylor**

On pose $f(x) = \tan(x)$.

(1) Calculer la dérivée seconde f'' et la dérivée troisième $f^{(3)}$ de f (on utilisera l'expression $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pour simplifier les calculs).
(2) Appliquer la formule de Taylor pour obtenir le développement limité de tan en 0 à l'ordre 3.
(3) Déterminer également le développement limité de tan en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.

Correction de l'exercice 2 :

(1) On calcule les dérivées successives :

$$f(x) = \tan(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$f''(x) = (\cos^{-2})'(x) = -2 \times (-\sin x) \times (\cos x)^{-3} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{2\cos^4 x + 6\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} = \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

(2) Pour appliquer la formule de Taylor en 0 à l'ordre 3 il faut calculer $f^{(k)}(0)$ pour $k = 0, 1, 2$ et 3. D'après la question précédente, on trouve

$$f(0) = 0 \ ; \quad f'(0) = 1 \ ; \quad f''(0) = 0 \ ; \quad f^{(3)}(0) = 2.$$

La formule de Taylor en 0 à l'ordre 3 est

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

soit ici

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

(3) On calcule les valeurs des dérivées en $\frac{\pi}{4}$. Comme $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \ ; \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \ ; \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \ ; \quad f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 + 4 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 16.$$

Ainsi, la formule de Taylor donne

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

soit

$$f(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

Exercice 3 : Développement limité du quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$

(1) Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 5 des fonctions sin et cos.

(2) Rappeler le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ en 0 à l'ordre 5.

(3) Développement limité à l'ordre 5 en 0 du quotient $\dfrac{1}{\cos x}$: En utilisant le fait que $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ est la composée de $x \mapsto \cos x - 1$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, démontrer que

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

(4) En déduire le développement limité de tan en 0 à l'ordre 5.

Correction de l'exercice 3 :

(1) D'après les formules du cours

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

(2) On a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5).$$

(3) Comme
$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$
et
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5),$$
d'après la règle de composition des développements limités,
$$\frac{1}{1+(\cos x - 1)} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^4 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^5 + o(x^5).$$
On développe ensuite les expressions ci-dessus en ne gardant que les monômes de degré inférieur à 5. On remarque alors que seul les deux premiers termes $\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$ et $\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2$ contiennent des monômes de degré inférieur à 5. Ainsi
$$\frac{1}{\cos x} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5)$$
et, en développant le carré,
$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^5).$$
Au final,
$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

(4) Comme $\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$ et que
$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$
et
$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5),$$
d'après la règle de multiplication des développements limités,
$$\tan x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4\right) + o(x^5).$$
On développe ensuite le produit ci-dessus en regroupant les termes selon leur degré (et en "mettant dans le $o(x^5)$" les termes de degré strictement supérieur à 5).
$$\tan x = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5).$$
Comme $\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{25-10+1}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$, on a bien
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Exercice 4 : Développement limité par intégration

On détermine maintenant le développement limité de la fonction tangente en intégrant les développements limités de sa dérivée.

(1) En partant de la formule de Taylor à l'ordre 1 $\tan x = x + o(x)$, déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 0 de $\frac{\tan x}{x}$ et en déduire le développement limité en 0 à l'ordre de 2 de $\tan^2 x$.

(2) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la dérivée $\tan'$ de tan, puis, en intégrant ce dernier développement limité, établir le développement limité en 0 à l'ordre 3 de tan.

(3) A partir du résultat de la question précédente (c'est-à-dire le développement limité $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$), établir comme précédemment le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\tan^2$, puis le développement limité en 0 à l'ordre 5 de tan.

(4) Réitérer ces opérations pour obtenir le développement limité en 0 à l'ordre 7 de la fonction tangente.

Correction de l'exercice 4 :

(1) **Remarque :** En appliquant la règle usuel du produit de développements limités, $\tan x = x + o(x)$ donne $\tan^2 x = x^2 + o(x) = o(x)$, ce qui n'est pas très intéressant... Ici, on utilise le fait que le terme constant du développement limité soit nul pour gagner un ordre en passant au carré (mais en général ce n'est pas possible !)

Comme $\tan x = x + o(x)$, on a

$$\frac{\tan x}{x} = 1 + o(1).$$

En appliquant la règle usuel du produit de développements limités,

$$\frac{\tan^2 x}{x^2} = 1 + o(1),$$

soit

$$\tan^2 x = x^2 + o(x^2).$$

(2) Comme $\tan' x = 1 + \tan^2(x)$ on a

$$\tan' x = 1 + x^2 + o(x^2).$$

D'après la règle d'intégration des développements limités, on en déduit que

$$\tan x = \tan(0) + x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

soit $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

(3) Comme précédemment,

$$\frac{\tan x}{x} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2),$$

d'où

$$\frac{\tan^2 x}{x^2} = \left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^2 + o(x^2),$$

soit,

$$\frac{\tan^2 x}{x^2} = 1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2).$$

On en déduit le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\tan^2$

$$\tan^2 x = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Ainsi, comme $\tan' x = 1 + \tan^2(x)$, on a

$$\tan' x = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

En intégrant ce développement limité, on obtient

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

(4) On reprend une par une les étapes de la question précédente. D'après la question (3),

$$\frac{\tan x}{x} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + o(x^4),$$

d'où

$$\frac{\tan^2 x}{x^2} = \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4\right)^2 + o(x^4).$$

En développant, on obtient

$$\frac{\tan^2 x}{x^2} = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{15}\right)x^4 + o(x^4)$$

soit

$$\frac{\tan^2 x}{x^2} = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{17}{45}x^4 + o(x^4).$$

Ainsi on obtient le développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\tan^2$

$$\tan^2 x = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + o(x^6).$$

Comme $\tan' x = 1 + \tan^2(x)$, on a

$$\tan' x = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + o(x^6).$$

En intégrant ce développement limité, on obtient

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7).$$

Exercice 5 : Application à un calcul de limite

Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3 x}{x^5} = 2.$$

Correction de l'exercice 5 :

Vu le dénominateur, on va chercher un développement limité à l'ordre 5 du numérateur. On a

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

d'où

$$\tan(2x) = 2x + \frac{8}{3}x^3 + \frac{64}{15}x^5 + o(x^5).$$

Il reste à déterminer un développement limité de $\tan^3 x$. D'après la règle de multiplication des développements limités,

$$\tan^3 x = \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right)^3 + o(x^5),$$

d'où, en développant,

$$\tan^3 x = x^3 + 3 \times \frac{1}{3}x^5 + o(x^5),$$

soit

$$\tan^3 x = x^3 + x^5 + o(x^5).$$

Ainsi, en additionnant les différents développements limités, on a

$$\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3 x = (2-2)x + \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3} - 2\right)x^3 + \left(\frac{64}{15} - \frac{4}{15} - 2\right)x^5 + o(x^5),$$

soit

$$\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3 x = 2x^5 + o(x^5).$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3 x}{x^5} = 2.$$