Université Paris-Descartes.
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Contrôle continu 1
Correction

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Exercice 1

1. On a :

$$\begin{aligned} F^c &= \{3,4,5\}, \\ G^c &= \{1,4,5\}, \\ H^c &= \{1,2,3,5\}, \\ F\cap G^c &= \{1,2\}\cap\{1,4,5\} = \{1\} \text{ et} \\ G\cap F^c &= \{2,3\}\cap\{3,4,5\} = \{3\}. \end{aligned}$$

2. D'après la question 1, on a :

$$\begin{aligned} F\Delta G &= \{1\}\cup\{3\} = \{1,3\} \text{ et} \\ H\Delta E &= (H\cap E^c)\cup(H^c\cap E) \\ &= (H\cap\emptyset)\cup H^c \\ &= \emptyset\cup H^c \\ &= \{1,2,3,5\}. \end{aligned}$$

3. D'une part,

$$\begin{aligned} \emptyset\Delta E &= (\emptyset\cap E^c)\cup(\emptyset^c\cap E) \\ &= (\emptyset\cap\emptyset)\cup(E\cap E) \\ &= \emptyset\cup E \\ &= E. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\emptyset\Delta\emptyset = (\emptyset\cap E)\cup(E\cap\emptyset) = \emptyset\cup\emptyset = \emptyset.$$

4. On rappelle que $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$ (loi de Morgan). Donc,

$$\begin{aligned} (A\cup B)\cap(A\cap B)^c &= (A\cup B)\cap(A^c\cup B^c) \\ &= (A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\cup(B\cap B^c) \\ &= \emptyset\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\cup\emptyset \\ &= (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B) \\ &= A\Delta E. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Juste des calculs.

2. En premier lieu, u est une suite à termes strictement positifs, donc minorée. En second lieu, soit $n\in\mathbb{N}^*$; on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \leqslant 1.$$

La suite u est donc décroissante. Etant décroissante et minorée, u est convergente. En troisième lieu, il a été établi en cours que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0.$$

3. La suite v est à termes strictement positifs. Pour établir qu'elle est croissante, il est donc suffisant de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{n^n (n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1.$$

   Ainsi, la suite v est croissante.

4. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\tilde{v}_n = \frac{1}{v_n}$. La suite v étant croissante, $\tilde{v}$ est décroissante. Etant de plus minorée, $\tilde{v}$ est convergente ; nous noterons l sa limite.

   D'autre part, on déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\tilde{v}_n}{\tilde{v}_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \iff \tilde{v}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tilde{v}_{n+1}.$$

   Or, on démontre (cf. cours sur les D.L.) que :

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

   Ainsi, nécessairement :

$$l = el \iff l(1 - e) = 0 \iff l = 0.$$

   En conclusion,

$$\lim_{n \to \infty} v_n = \infty.$$

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} u_n^2 - u_n + 1 = \frac{1}{4}\left(u_n^2 - 4u_n + 4\right) = \frac{1}{4}\left(u_n - 2\right)^2 \geqslant 0.$$

   La suite u est donc croissante.

2. Supposons que la suite u est convergente. Si on note l sa limite, nécessairement :

$$l = \frac{1}{4} l^2 + 1 \iff (l - 2)^2 = 0 \iff l = 2.$$

3. On se propose de montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2$.

   - **R.I.** Par hypothèse $a \leqslant 2$. Or, $u_0 = a$; l'inégalité est donc vraie au rang initial.
   - **"Hérédité".** Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \leqslant 2$. On a :

$$u_n \leqslant 2 \Longrightarrow \frac{1}{4} u_n^2 \leqslant 1 \Longrightarrow u_{n+1} \leqslant 2.$$

     L'inégalité est donc toujours vraie au rang $n + 1$.

     Ainsi, la suite u est majorée. De plus, d'après la question 1, elle est croissante. En conclusion, elle est convergente.

4. La suite u étant croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 = a > 2$. Or, nous avons montré à la question 2 que le seul "candidat" à la limite est 2. Donc, nécessairement, la suite u est divergente.

Exercice 4

1. Traité en TD.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'une part, on obtient par changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] &= (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^3 - \sum_{k=2}^{n} k^3 - 1 \\ &= (n+1)^3 + \sum_{k=2}^{n} k^3 - \sum_{k=2}^{n} k^3 - 1 = (n+1)^3 - 1.\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] &= \sum_{k=1}^{n} \left(3k^2 + 3k + 1\right) \\ &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n &\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n\right] \\ &\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n+1}{3}\left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}\right] \\ &\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat démontré à la question 1.