Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, 2008-2009, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Corrigé du partiel n° 2

Exercice 1.

1. On calcule la dérivée de f : $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   Quand $x \in [0, \pi]$ $\dfrac{x}{2} \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$. Sur cet intervalle, la fonction sinus est positive ; la dérivée de f est donc négative et f est décroissante, et même strictement décroissante puisque le sinus ne s'annule qu'en 0. Dans ces conditions, puisque la fonction f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que f est une bijection entre l'intervalle de départ et l'intervalle d'arrivée I.

   On a $f(0) = 1$ et $f(\pi) = 0$, donc l'intervalle d'arrivée I est l'intervalle $[0,\, 1]$.

2. Théorème des accroissements finis : Soit h une fonction définie et continue sur un intervalle fermé $[a,\, b]$, dérivable sur l'intervalle ouverf $]a,\, b[$, il existe alors $c \in]a,\, b[$ tel que :

$$h(b) - h(a) = (b - a)\, h'(c)$$

   On applique ce théorème pour x et y quelconques dans l'intervalle $[0,\, \pi]$, il existe donc $z \in]0,\, \pi[$ tel que :

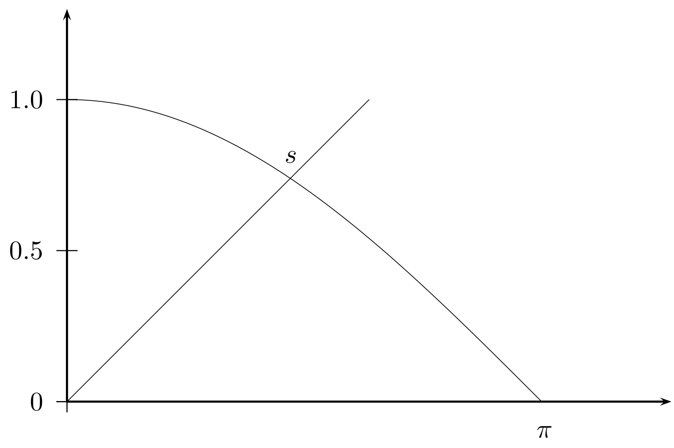
$$f(x) - f(y) = (x - y)\, f'(z) = (x - y)\Big(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{z}{2}\right)\Big)$$

   La valeur absolue de la fonction sinus est toujours plus petite que 1. On obtient alors l'inégalité suivante :

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|\Big| -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{z}{2}\right)\Big| \leq \frac{1}{2}|x - y| \quad \forall x, y \in [0,\, \pi]$$

3. Soit la fonction g, définie sur $[0,\, \pi]$ par $g(x) = f(x) - x$; étudier les solutions de l'équation $f(x) = x$ revient à chercher où la fonction g s'annule. On a : $g(0) = 1$ et $g(\pi) = -\pi$. La fonction g est continue et prend des valeurs positives et négatives à chaque bout de l'intervalle, elle s'annule donc entre les deux bornes de cet intervalle, il existe donc $s \in [0,\, \pi]$ tel que $g(s) = 0$, soit $f(s) = s$.

   De plus, $g'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1$. La dérivée g' est donc strictement négative, la fonction g est alors strictement décroissante et la solution s est donc unique.



4. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, la fonction f étant continue on a, d'après un théorème du cours :

$$f(l) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = l$$

   D'après la question précédente, la solution de l'équation $f(x) = x$ étant unique on a $l = s$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, d'après la question 3- $f(s) = s$; en appliquant l'inégalité démontrée à la question 2-, on trouve :

$$|u_{n+1} - s| = |f(u_n) - f(s)| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - s|$$

Si on utilise la même inégalité pour $|u_n - s| = |f(u_{n-1}) - f(s)|$, on trouve :

$$|u_{n+1} - s| = |f(u_n) - f(s)| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - s| \leq \frac{1}{2^2}\,|u_{n-1} - s|$$

D'où, par itérations successives :

$$|u_{n+1} - s| = |f(u_n) - f(s)| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - s| \leq \frac{1}{2^2}\,|u_{n-1} - s| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - s|$$

Comme $\dfrac{1}{2^{n+1}}|u_0 - s|$ a pour limite 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite s.