Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°2
Lundi 14 Novembre 2016

L1 : Licence sciences et technologies
Mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Ce sujet contient 4 exercices. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

INDIQUEZ VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE !

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 4.$$

(1) Déterminer le domaine de continuité de f.

(2) Calculer

$$f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

(3) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $\mathbb{R}_+$.

(4) Montrer que cette solution est unique.

Exercice 2

En utilisant par exemple la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$, $\quad n \in \mathbb{N}_*$.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{\ln^2(x-1)}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x}$. -1

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x + \sin x}$. $\frac{1}{3}$

$y \to 0 \quad \frac{\sin y}{y}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

(1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$.

(2) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note encore f la fonction prolongée.

(3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

(4) Montrer que f est dérivable en 0.

(5) Est-ce que f' est continue en 0 ?

Exercice 4

On considère l'application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow]-2, +\infty[$ définie par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3.$$

(1) Montrer que f est strictement décroissante.

(2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-2, +\infty[$ et déterminer sa réciproque qu'on notera g.

(3) Calculer la dérivée de g en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque. Vérifier le résultat par le calcul direct de la dérivée de g.

(4) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$-\frac{1}{3} < -\frac{1}{(x+3)\ln^2(x+3)} < 0$$

(on rappelle pour cette question que $\exp(1) < 3$, ce qui implique que $\ln(3) > 1$).

(5) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$g(x) - g(y) < \frac{1}{3}(y - x) \quad \text{pour tout } y > x > 0.$$

$x < y$.

a Sait que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$

$f'(c) = \frac{-1}{(x+3)\ln^2(x+3)}$ $\quad \frac{1}{3} + \frac{1}{(x+3)\ln^2(x+3)} = \frac{(x+3)\ln^2(x+3)+3}{3(x+3)\ln^2(x+3)} \geq 0.$

$-\frac{1}{3} + \frac{1}{(x+3)\ln^2} = \frac{-(x+3)\ln^2()+3}{3(x+3)\ln^2()} \leq 0.$

$\frac{1}{3} \geqslant \frac{-1}{(x+3)\ln^2(x+3)}$

$\frac{1}{3}(y-x) \geqslant f'(c)(y-x)$

$\frac{1}{3}(y-x) \geqslant g(x) - g(y)$