Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Licence 1ère année, 2016, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD 5 : Fonctions usuelles et développements limités

Exercice 1. Calculer

(1) a) $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right)$ b) $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right)$

(2) a) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$ b) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$ c) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$

Exercice 2. Écrire sous forme d'expression algébrique

a) $\sin(\operatorname{Arccos} x)$ b) $\cos(\operatorname{Arcsin} x)$ c) $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ d) $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes

$$(E_1) \qquad \sin x = \frac{1}{3}$$

$$(E_2) \qquad \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}$$

Exercice 4. La notation $\operatorname{sgn}(x)$ désigne 1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$. Montrer que

$$(1) \qquad \forall x \in [-1,1], \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$$

Exercice 5. Démontrer les inégalités suivantes

$$(1) \qquad \forall a \in \,]-1,1[\setminus\{0\}, \quad |\operatorname{Arcsin} a| < \frac{|a|}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$(2) \qquad \forall a > 0, \quad \operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2}$$

Exercice 6.

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{3} + 2$.

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et montrer qu'elle est continue sur ce domaine.

(2) Calculer $f\left(-\sqrt{3}\right)$ et $f\left(\sqrt{3}\right)$.

(3) En déduire que f s'annule sur l'intervalle $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$.

(4) La fonction f s'annule-t-elle sur l'intervalle $\left]0, \sqrt{3}\right[$?

Exercice 7. Calculer les limites suivantes si elles existent

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x)$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x))$

Exercice 8.

(1) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$. Étudier la limite de (S_n).

Exercice 9.

(1) Montrer que
$$\forall x \in [0,1], \quad \operatorname{Arcsin}\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)\,.$$

(2) Montrer que
$$\forall x \geqslant 0, \quad \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{Arccos}\frac{1}{\operatorname{ch} x}\,.$$

Exercice 10.

(1) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\operatorname{sh}(x) \geqslant x$.

(2) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\operatorname{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

(3) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\operatorname{sh}(x) \geqslant x + \dfrac{x^3}{6}$.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

(E_1) $\operatorname{sh} x = 2$
(E_2) $\operatorname{th} x = 3$
(E_3) $\operatorname{ch} x = 1$

Exercice 12. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$, on a
$$\left(\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}\right)^n = \frac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)}\,.$$

Exercice 13.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}\,.$$

Exercice 14.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) Calculer, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y \neq \frac{1}{x}$,
$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y\,.$$

Exercice 15.

(1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$ (on pourra calculer g'').

(3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad 1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

Exercice 16.

1) Retrouver l'expression de la dérivée de Arcsin.
2) En utilisant la formule de Taylor, calculer le développement limité de Arcsin à l'ordre 2 en 0.

Exercice 17.

1) A partir de la dérivée de sin et cos, retrouver l'expression de la dérivée de tan.
2) En déduire la dérivée de Arctan.
3) Calculer le développement limité à l'ordre 3 de Arctan au voisinage de 0.

Exercice 18.

1) Soit f et g deux fonctions dont les développements limités en 0 sont donnés par $f(x) = 1 + x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = 1 + 2x + 4x^2 + o(x^3)$. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f \times g$.

2) Soit f et g deux fonctions dont les développements limités en 0 sont donnés par $f(x) = x + 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = 1 - x + 3x^2 + o(x^2)$. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f \times g$.

Exercice 19.

Soit f et g deux fonctions dont les développements limités en 0 sont donnés par $f(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 1 + x + 3x^2 + o(x^2)$. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exercice 20.

Soit f et g deux fonctions dont les développements limités en 0 sont donnés par $f(x) = 1 + x + 2x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 1 + 3x^2 + o(x^2)$. Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{g}$.

Exercice 21.

1) Rappeler le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 4, et le développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0, à l'ordre 4.

2) En déduire le développement limité de $\ln(\cos x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

Exercice 22.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^\alpha$.

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de f a pour formule

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\cdot(1+x)^{\alpha-n}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité d'ordre n de f en 0.

3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de $\frac{1}{(1+x)^2}$.

4) Donner le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{\sqrt{1+y}}$. En déduire le développement limité d'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis le développement limité d'ordre 5 en 0 de $\operatorname{Arcsin} x$.

Exercice 23. Donner le développement limité au voisinage de 0 de

1) $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3.
2) $\ln(1 + x(x-1))$ à l'ordre 3.
3) $\frac{\sin x}{1+3x}$ à l'ordre 3.
4) $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6.
5) $\frac{\sin^2 x}{1-x^2}$ à l'ordre 4.
6) $\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}$ à l'ordre 5.
7) $\operatorname{sh}(x^2)\operatorname{ch}(x)$ à l'ordre 3.

Exercice 24. Calculer le développement limité au voisinage de 0 de

1) $\dfrac{3x^2+3x+2}{1+x^2}$ à l'ordre 4. 2) $\dfrac{3x+1}{2+3x+x^2}$ à l'ordre 2.

Exercice 25.

1) Calculer le développement limité au voisinage de 0 de à l'ordre 4 de $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x^2+x^4}$.

2) En déduire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 de $(1+x)^{\frac{1}{1-x^2+x^4}}$.

Exercice 26. Calculer les développements limités de

1) $\ln(\frac{1}{1+x})$ en 0, à l'ordre 3.
2) $\exp(\sin x)$ en 0, à l'ordre 4.
3) $\ln(4 - 8x + x^2)$ en 0, à l'ordre 4.

Exercice 27. Vrai ou faux ?

1) Si f admet un développement limité d'ordre k au voisinage de 0, alors f' admet un développement limité d'ordre $(k-1)$ au voisinage de 0.

2) Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 - f_2 \sim g_1 - g_2$.

3) Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

4) Si f possède un développement limité au voisinage de a à l'ordre n, alors f possède un développement limité au voisinage de a à l'ordre k pour tout $k \leqslant n$.

5) Si $f \in \mathcal{C}^n([-1,1])$, alors quand $x \to 0$, on a

$$f(x) = f(0) + xf^{'}(0) + \frac{x^2}{2}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

6) f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.

7) f est deux fois dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 28.

Déterminer les limites suivantes si elles existent.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{\operatorname{sh} x - \operatorname{Arcsin} x}$ 3) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos \dfrac{1}{x}\right)^{x \ln x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 - \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2} - 1 + \sin^2 x)}{x^2}$

Exercice 29.

1) Calculer le développement limité de $e^{\frac{x \sin x}{2}} - e^{1-\cos x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

2) En calculant le développement limité de $\frac{x \sin x}{2} - (1 - \cos x)$ au voisinage de 0 à un ordre suffisant, déterminer la limite en 0 de

$$\frac{e^{\frac{x \sin x}{2}} - e^{1-\cos x}}{\frac{x \sin x}{2} - (1 - \cos x)}.$$

Exercice 30.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)\ .$$

1) Effectuer un développement limité de f en 0, à l'ordre 3.

2) En déduire l'équation de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(0, f(0))$.

3) Étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point. Que peut-on dire du point de coordonnées $(0, f(0))$?

Exercice 31. Soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 - \cos x}\ .$$

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Donner le développement limité de f en 0, à l'ordre 2.

3) Calculer la limite de f en 0. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 32.

Si une fonction est n fois dérivable en 0, alors elle admet un développement limité à l'ordre n en 0. Nous allons montrer que la réciproque est fausse. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x^2}), \quad \forall x \neq 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) En utilisant $|f(x)| \leqslant |x|^3$, montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 33.

On considère la fonction f définie par $f(t) = t \operatorname{Arcsin}(t) + \sqrt{1 - t^2} - 1$.

(1) Donner le domaine de définition de f. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, et $f(1)$.

(2) Étudier la parité de f.

(3) Justifier que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer sa dérivée.

(4) Étudier les variations de f.

(5) L'équation $(E) : t \operatorname{Arcsin} t + \sqrt{1 - t^2} = \frac{3}{2}$ admet-elle des solutions ? Si oui, combien ?

(6) Donner le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0.