Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°2
17 Novembre 2014

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h30.

NB : *Ce sujet contient 4 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.* **Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.**
VEUILLEZ INSCRIRE VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE.

On rappelle la définition des fonctions suivantes.

$$\mathrm{ch}(x) \ : \ x \ \mapsto \ \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad ; \qquad \mathrm{sh}(x) \ : \ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{\ln(1+x)}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\ln(1+\frac{2}{x^2})$

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2-1}-x)$

5) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{\ln(x)-\ln(2)}{x^2-3x+2}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to1} (x-1)^{x^2-2x+1}$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = 3\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x^2}{2} + x + 2$.

(1) Rappeler le domaine de définition de la fonction Arctan ainsi que sa limite en $+$ et $-$ l'infini.
(2) Justifier que la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
(3) Calculer $f(-2)$ et $f(2)$.
(4) En déduire qu'il existe $\alpha \in \,]-2,\ 2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
(5) La fonction f s'annule-t-elle sur $[0,\ 2]$?

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f \ : \ x \ \longmapsto \ 1 - e^{-e^x} \ = \ 1 - \exp\big(-\exp(x)\big)$$

(1) Donner les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
(2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle est strictement croissante.
(3) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I que l'on déterminera.
(4) Donner une expression explicite de f^{-1}, la réciproque de f. (On résoudra l'équation $f(x) = y$).
(5) Rappeler la formule de la dérivée de la réciproque et l'utiliser pour calculer la dérivée de f^{-1}.

Exercice 4. On considère l'application suivante

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (x-2)^2\cos\left(\frac{1}{x-2}\right). \end{array}$$

(1) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition puis qu'elle est prolongeable par continuité en 2. On notera f son prolongement continu.
(2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f' sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Que vaut $f'(2)$? .
(3) f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?