Université René Descartes - Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Licence 1ère année, 2012-2013, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n°5 : Fonctions usuelles

Exercice 1 Écrire sous forme d'expression algébrique

$$1)\ \sin(\operatorname{Arccos} x),\quad 2)\ \cos(\operatorname{Arcsin} x),\quad 3)\ \sin(3\operatorname{Arctan} x),\quad 4)\ \cos(\operatorname{Arctan} x),\quad 5)\ \tan(\operatorname{Arcsin} x).$$

Exercice 2 Calculer

$$1)\ \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right),\qquad 2)\ \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right),\qquad 3)\ \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right).$$

Exercice 3 Résoudre les équation suivantes

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}, \operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{Arctan} x = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}.$$

Exercice 4 Montrer que

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = sgn(x)\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5 Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \text{ si } 0 < a < 1.$$
$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \text{ si } a > 0.$$

Exercice 6 Calculer :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty}(x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

Exercice 7 Les réels x et y étant liés par

$$x = \ln(\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})),$$

calculer $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ en fonction de y.

Exercice 8 Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Exercice 9

(1) Montrer que $\forall x \neq 0$,

$$\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

(2) Calculer alors la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x).$$

Exercice 10

(1) Montrez que : $\forall x \in [0,1]$,
$$\operatorname{Arcsin}\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1).$$
(2) Montrez que $\forall x \geqslant 0$,
$$\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{Arccos}\frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$
(3) Montrez que $\forall x \geqslant 0$,
$$\operatorname{sh}(x) \geqslant x.$$
(4) Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}^+$,
$$\operatorname{ch}(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 11 Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}).$$
(1) Quel est l'ensemble de définition de f?
(2) En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de f.

Exercice 12 On considère la fonction numérique f telle que :
$$f(x) = (x^2-1)\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1},$$
et on appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
(1) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?
(2) Exprimer, sur $\mathcal{D}\setminus\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.
(3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g.
(4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(1) $\operatorname{ch} x = 2$,
(2) $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2})$.

Exercice 14 Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$, on a
$$\left(\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}\right)^n = \frac{1+\operatorname{th}(nx)}{1-\operatorname{th}(nx)}.$$

Exercice 15 Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(kx) = \frac{\operatorname{ch}(nx/2)\operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}.$$

Exercice 16 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(a+kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(a+kb).$$

Exercice 17 Soit $p \in \mathbb{N}$.
(1) Vérifier que
$$\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan} p = \operatorname{Arctan}\frac{1}{p^2+p+1}.$$
(2) Étudier la convergence de
$$S_n = \sum_{p=0}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{p^2+p+1}.$$

Exercice 18

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{Arctan} x + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}.$$
(2) Calculer, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq \frac{1}{x}$,
$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y.$$