Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Mathématiques et Calcul 1

Examen 2e session — 11 juin 2018

durée: 1h30

Tout document interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même prévus à titre d'horloge, sont également interdits.

On rappelle les développements limités suivants au voisinage de 0 (n est un entier positif quelconque) :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

Les 5 exercices sont indépendants.

Exercice 1. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{Arctan}\, x > \frac{x}{1+x^2}.$$

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. On pose

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = 0\}.$$

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Déterminer une base de F.

(3) Montrer que $F \oplus \mathrm{Vect}(X^3) = E$.

Exercice 3. Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

(1) Calculer $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

(2) On pose $w = z + \bar{z}$. Montrer que $w = z + z^{-1}$, puis déduire de la question précédente que $w + w^2 = 1$.

(3) En déduire l'expression exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 4. Soient α, β deux réels éléments de $[0,1]$ et tels que $\alpha + \beta \geqslant 1$. On définit deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \leqslant v_0$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha) v_n \\ v_{n+1} = \beta v_n + (1-\beta) u_n. \end{array} \right.$$

(1) Montrer que $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique et calculer sa raison. En déduire une expression explicite de $v_n - u_n$ en fonction de $u_0, v_0, n, \alpha, \beta$.

(2) En déduire que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n.

(3) En déduire que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

(4) À quelle condition sur α et β les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes ? Lorsque cette condition est vérifiée, donner, à l'aide du résultat de la question 1, l'expression explicite de leur limite.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\operatorname{ch} x}}{\cos x - \operatorname{ch} x}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln\sqrt{1+3x^3} - \ln 2}{\tan(x-1)}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{xe^{-x} - x^{-1}e^x + e^x \operatorname{Arctan} x}{\operatorname{ch} x}$