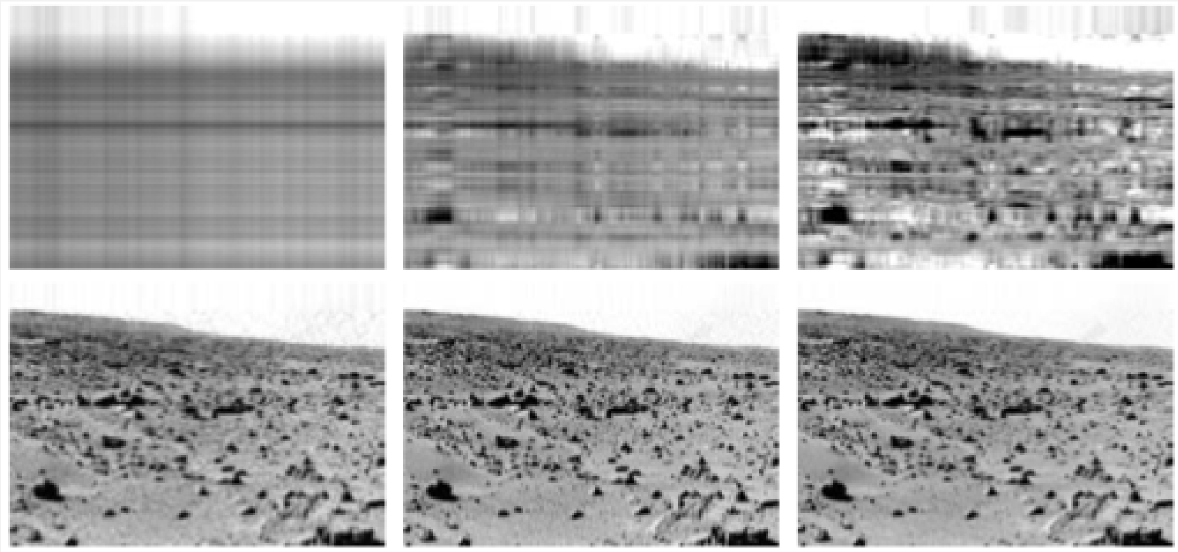
Algèbre linéaire – espaces vectoriels – matrices

Applications de l'algèbre linéaire

Indispensable, dans les domaines suivants :

- statistiques (analyse et compression de données, Big Data)
- cryptographie
- géométrie
- ...

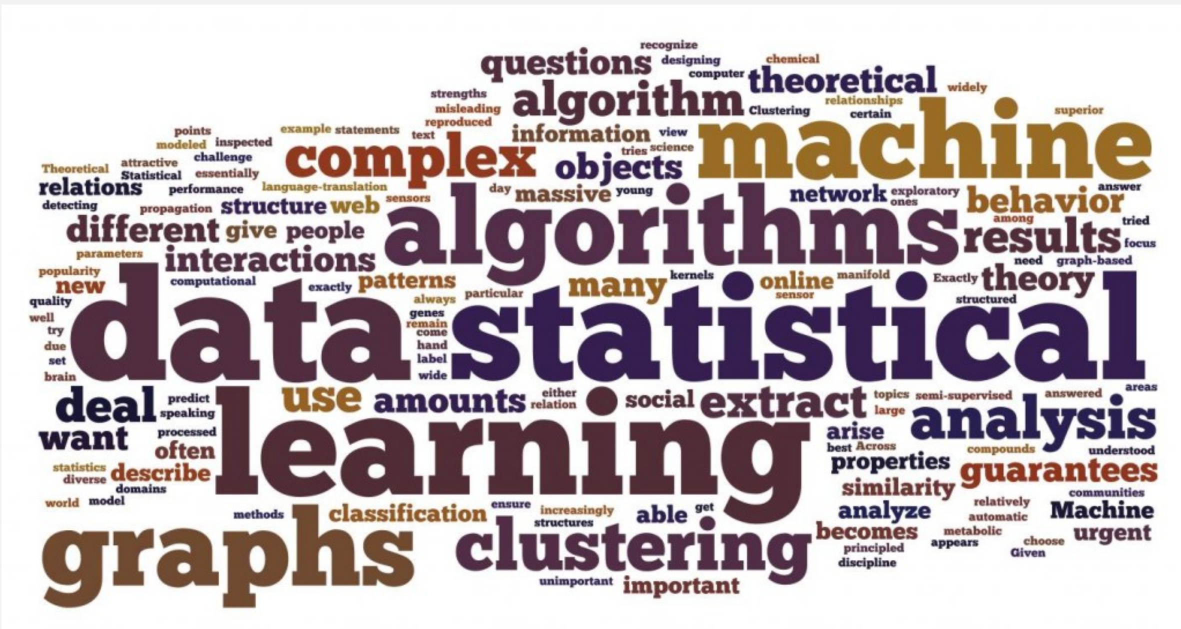
Applications de l'algèbre linéaire : compression de données



Images de la planète mars, à divers degrés de compression réalisées grâce à l'Analyse en Composantes Principales (de rangs respectifs 1, 4, 10, 40, 80, 100)

Algèbre linéaire – espaces vectoriels – matrices

Applications de l'algèbre linéaire : analyse de données



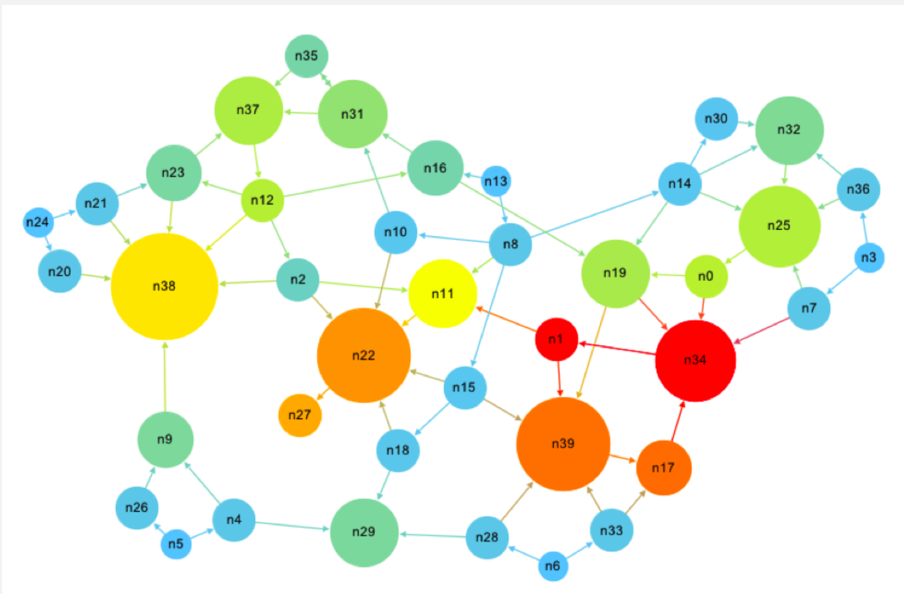
Le *machine learning*, la théorie mathématique à l'oeuvre dans le *Big Data*

Applications de l'algèbre linéaire : transmission de messages et cryptographie

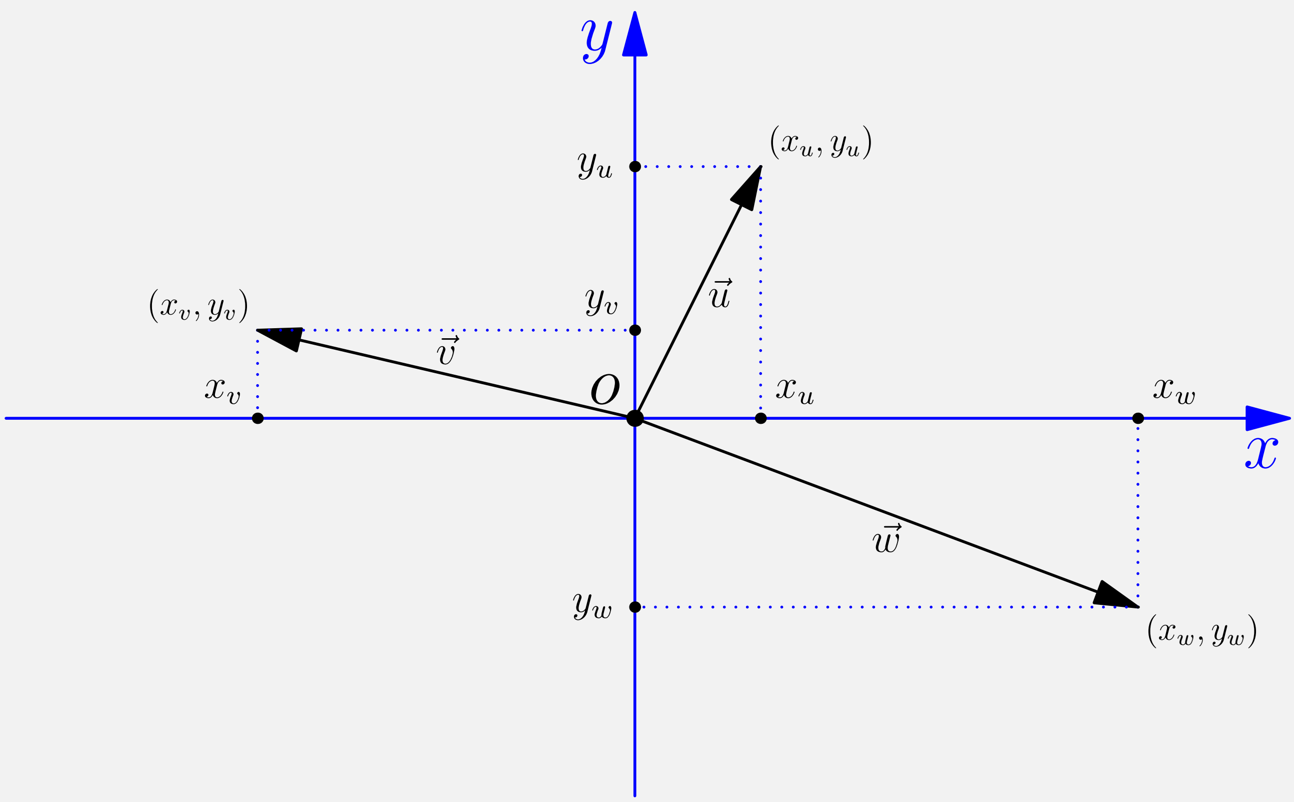
L'algèbre linéaire est au coeur de la *code de Hamming*, premier code correcteur véritablement efficace

Algèbre linéaire – espaces vectoriels – matrices

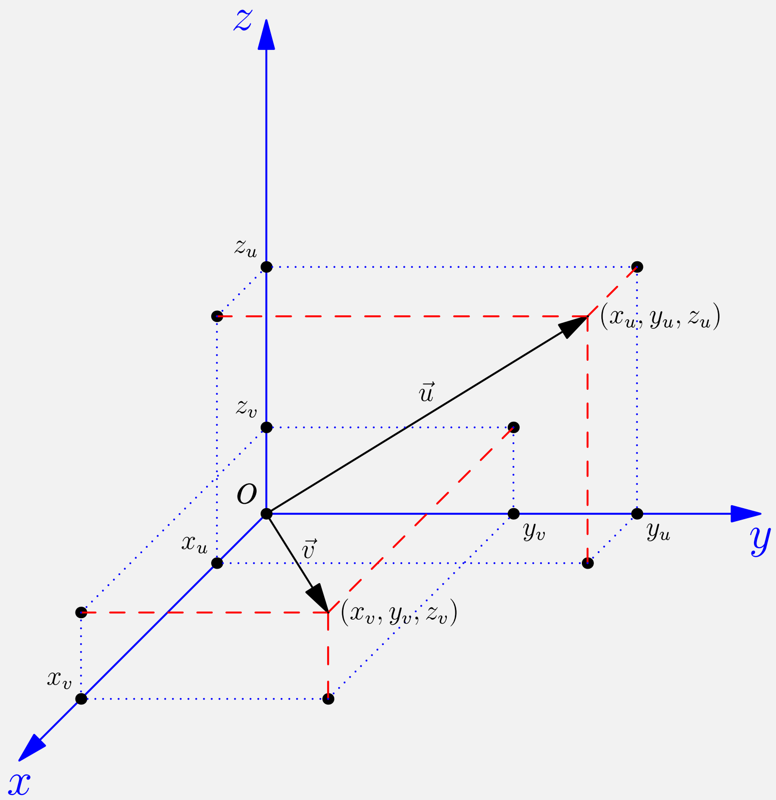
Applications de l'algèbre linéaire : algorithme PageRank de Google



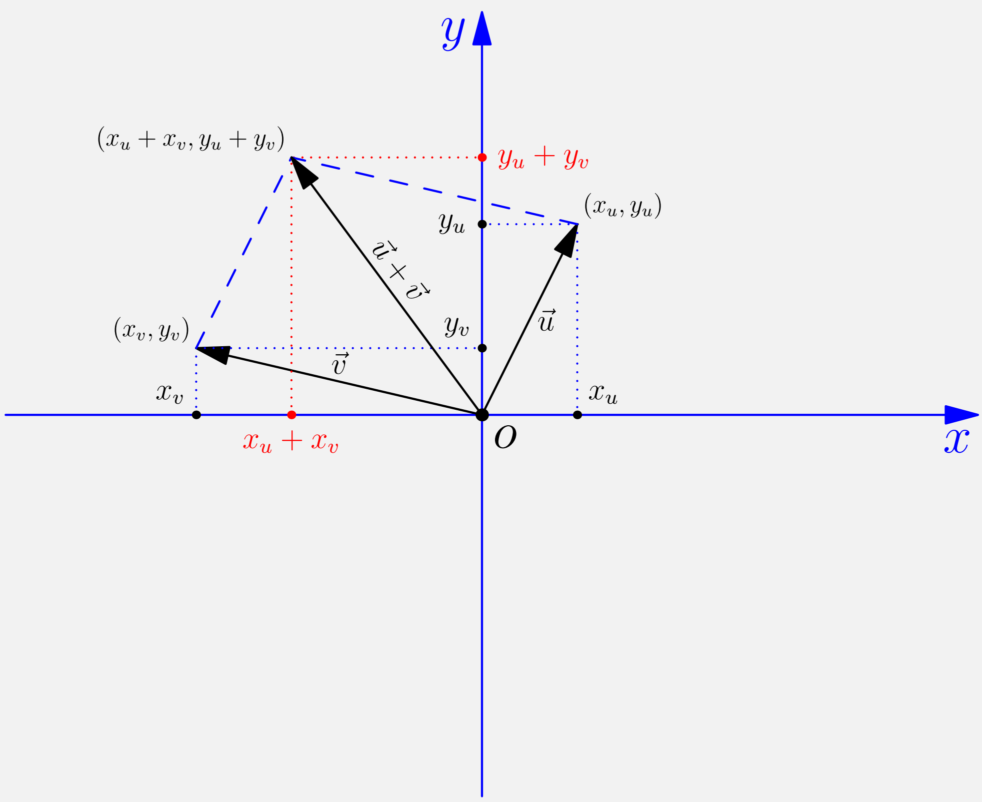
PageRank : 95% d'algèbre linéaire, 3% de probabilités, 2% de cuisine interne

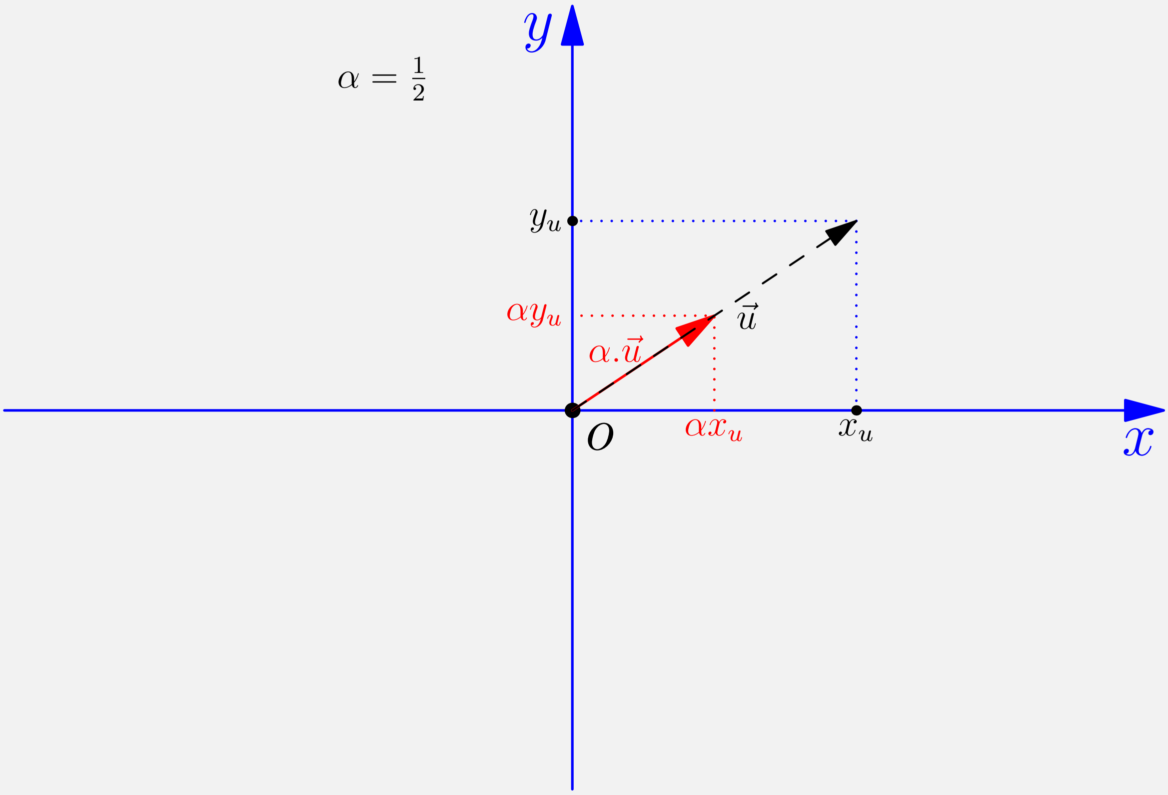

y
x
O
y_u
(x_u, y_u)
$\vec{u}$
x_u
y_v
(x_v, y_v)
$\vec{v}$
x_v
x_w
$\vec{w}$
y_w
(x_w, y_w)

Vecteurs de l'espace



Somme de vecteurs





Espace vectoriel, définition

Un ensemble E, muni d'une addition (notée $+$: pour $\vec{u}, \vec{v} \in E$, $\vec{u} + \vec{v}$ est un élément de E) et d'une multiplication externe (notée avec un point : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in E$, $\alpha.\vec{u}$ est un élément de E) par des nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si les deux opérations vérifient :

Espace vectoriel, définition

Propriété de l'addition

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \quad : \qquad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \quad : \qquad \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$
- $\exists \vec{0} \in E \quad : \quad \forall \vec{u} \in E \; : \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$
- $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E$ (noté : $-\vec{u}$) tel que : $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} = \vec{0}$

Espace vectoriel, définition

Propriétés de la multiplication externe

- $\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; : \alpha.\big(\beta.\vec{u}\big) = \alpha\beta.\big(\vec{u}\big)$
- $\forall \vec{u} \in E \; : 1.\vec{u} = \vec{u}$

Espace vectoriel, définition

Relation de l'addition et de la multiplication externe

- $\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ : (\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ : \alpha.\big(\vec{u} + \vec{v}\big) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$

Les espaces vectoriels de type $\mathbb{R}^n$

- $n = 1$: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.
- $n = 2$: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,;\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des couples de réels, muni de :
  - l'addition : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
  - la multiplication externe : $\alpha.(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$
- $n = 3$: $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,;\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des triplets de réels, muni de :
  - l'addition : $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$
  - la multiplication externe : $\alpha.(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
- n quelconque : $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,;\, x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des n-uplets de réels, muni de :
  - l'addition : $(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$
  - la multiplication externe : $\alpha.(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels

$\mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \; ; \; n \in \mathbb{N}, a_0 \in \mathbb{R}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$

Exemples : $1 + 2X + 4X^2 \in \mathbb{R}[X]$, $2 - 3X \in \mathbb{R}[X]$, $5 \in \mathbb{R}[X]$

$\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel si on le munit de :

- l'addition :
  $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_nX^n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n$
- la multiplication externe :
  $\alpha.(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n) = \alpha a_0 + \alpha a_1X + \cdots + \alpha a_nX^n$

Sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel de E, si :

- $\vec{0} \in F$
- $\vec{u}, \vec{v} \in F \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in F$ (stabilité par addition)
- $\vec{u} \in F,\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha.\vec{u} \in F$ (stabilité par multiplication externe)

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

- $F = \{(x, y, 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$: sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
  - $\vec{0} = (0, 0, 0) \in F$
  - $(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0 + 0) = (x + x', y + y', 0)$
  - $\alpha.(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, \alpha 0) = (\alpha x, \alpha y, 0)$
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + 2y - z = 0\}$: sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
  - $\vec{0} = (0, 0, 0) \in G$
  - $\vec{u} = (x, y, z) \in G$, $\vec{v} = (x', y', z') \in G \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$ avec $(x + x') + 2(y + y') - (z + z') = x + 2y - z + x' + 2y' - z' = 0 + 0 = 0$ $\Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in G$
  - $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x, y, z) \in G \quad \Rightarrow \quad \alpha.\vec{u} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ avec $\alpha x + 2\alpha y - \alpha z = \alpha(x + 2y - z) = \alpha \times 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{u} \in G$

Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x = y\}$ OUI
  - $\vec{0} \in F$, • $\vec{u} = (x, y) \in F$, $\vec{v} = (x', y') \in F \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$ avec $x + x' = y + y' \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in F$
  - $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x, y) \in F \quad \Rightarrow \quad \alpha.\vec{u} = (\alpha x, \alpha y)$ avec $x = y \quad \Rightarrow \quad \alpha.\vec{u} \in F$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x + y = 1\}$ NON car $(0, 0) \notin G$
- $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 2x - 5y = 0\}$ OUI
  - $\vec{0} \in H$, • $\vec{u} = (x, y) \in H$, $\vec{v} = (x', y') \in H \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$ avec $2(x + x') - 5(y + y') = 2x - 5y + 2x' - 5y' = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in H$
  - $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x, y) \in H \quad \Rightarrow \quad \alpha.\vec{u} = (\alpha x, \alpha y)$ avec $2\alpha x - 5\alpha y = \alpha(2x - 5y) = \alpha \times 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{u} \in H$
- $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2 - y = 0\}$ NON car $(1, 1) \in I$ mais $2.(1, 1) \notin I$

Exercice : Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$?

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 2x - 3y = 0\}$
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2 - 2y + z^3 = 0\}$
- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 2x + 4y - 7z = 0\}$
- $K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x + 3y - 5z + 2t = 4\}$

Combinaisons linéaires

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$, une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_i$ (ou combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$) tout vecteur $\vec{v}$ de la forme :

$$\vec{v} = \alpha_1.\vec{u}_1 + \alpha_2.\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\vec{u}_i \quad \left(\alpha_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\right)$$

Partie génératrice

Proposition : Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

Alors l'ensemble F de toutes les combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$, est un sous-espace vectoriel de E.

On note $F = \text{Vect}\big(\mathcal{F}\big)$, on dit que F est **engendré** par $\mathcal{F}$, ou que $\mathcal{F}$ est une **partie génératrice** de F.

Exemple : soit $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$ (vecteurs de $E = \mathbb{R}^3$). Alors :

$$\text{Vect}\big(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}\big) = \{x.\vec{u}_1 + y\vec{u}_2\,;\, x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice :

- Montrer que $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1 = (1, 0, 0),\, \vec{u}_2 = (0, 1, 0),\, \vec{u}_3 = (0, 0, 3)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\mathcal{G} = \{\vec{u}_1 = (2, 0),\, \vec{u}_2 = (1, 1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$.
- La famille $\mathcal{H} = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 0),\, \vec{u}_2 = (-1, 1, 0)\}$ est-elle génératrice dans $\mathbb{R}^3$?

Familles libres

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre, si :

$$\alpha_1.\vec{u}_1 + \alpha_2.\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{u}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

On dit aussi : les vecteurs $\vec{u}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sont linéairement indépendants.

Un famille qui n'est pas libre est dite liée.

Familles libres

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u} = (2, 0, 3, 0), \vec{v} = (0, -1, 0, 0), \vec{w} = (5, -2, 0, 0)$$

La famille $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est libre :

en effet, si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$
Alors on a :

$$\left\{\begin{array}{lcll} 2\alpha + 5\gamma & = & 0 & \text{(première coord. de } \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}) \\ -\beta - 2\gamma & = & 0 & \text{(deuxième coord. de } \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}) \\ 3\alpha & = & 0 & \text{(troisième coord. de } \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}) \end{array}\right.$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Familles libres

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2, \vec{v}(X) = X(X-1), \vec{w}(X) = (X-1)^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

La famille $\mathcal{F}$ est libre.

En effet, soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :
$\alpha.\vec{u}(X) + \beta.\vec{v}(X) + \gamma.\vec{w}(X) = \vec{0}$
Alors :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \gamma & = & 0 & (\text{car } \alpha.\vec{u}(0) + \beta.\vec{v}(0) + \gamma.\vec{w}(0) = 0) \\ \alpha & = & 0 & (\text{car } \alpha.\vec{u}(1) + \beta.\vec{v}(1) + \gamma.\vec{w}(1) = 0) \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma & = & 0 & (\text{car } \alpha.\vec{u}(2) + \beta.\vec{v}(2) + \gamma.\vec{w}(2) = 0) \end{array}\right.$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
$\hookrightarrow$ ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est **libre**.

Familles libres

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit la famille de vecteurs :
$\vec{u} = (1, -1), \vec{v} = (1, 3), \vec{w} = (2, 5)$.

La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Cherchons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$
En prennent la première puis la deuxième composante, cela équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 \\ -\alpha + 3\beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

Le triplet $\quad \alpha = -\frac{1}{4}, \beta = -\frac{7}{4}, \gamma = 1 \quad$ est solution
$\hookrightarrow$ donc la famille est **liée**.

De plus, $\vec{w} = \frac{1}{4}.\vec{u} + \frac{7}{4}\vec{v}$: quand une famille est liée, on peut exprimer des vecteurs de la famille comme combinaison linéaire des autres.

Familles libres

Exemple

Soit la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}(X) = X^2 + 1\,, \vec{v}(X) = X^2 - 1\,, \vec{w}(X) = X^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $\mathcal{F}$ est-elle **libre** ou **liée** ?

On remarque que $\vec{u}(X) + \vec{v}(X) - 2\vec{w}(X) = \vec{0}$.

$\hookrightarrow$ donc la famille $\mathcal{F}$ est **liée**.

Algèbre linéaire – espaces vectoriels – matrices
Familles libres

Familles libres

Remarques

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1\leq i\leq n}$ une famille libre dans un espace vectoriel E.

- $\forall i\ (1 \leq i \leq n),\quad \vec{u}_i \neq \vec{0}$ *(sinon $1.\vec{u}_i = \vec{0}$)*
- Si $i \neq j,\quad \vec{u}_i \neq \vec{u}_j$ *(sinon $1.\vec{u}_i - 1.\vec{u}_j = \vec{0}$)*

Exercice :

- La famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1 = (4, 0, 0),\ \vec{u}_2 = (0, 2, 0),\ \vec{u}_3 = (0, 0, 3)\}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
- La famille $\mathcal{G} = \{\vec{u}_1 = (2, 0),\ \vec{u}_2 = (1, 1)\}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^2$?
- La famille $\mathcal{H} = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 0),\ \vec{u}_2 = (-1, 1, 0),\ \vec{u}_3 = (0, 1, 0)\}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Base d'un espace vectoriel : définition

On appelle base d'un espace vectoriel, une famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice.

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, avec :

$$\vec{e}_1 = (1,0) \text{ et } \vec{e}_2 = (0,1),$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha.\vec{e}_1 + \beta.\vec{e}_2 = \vec{0}$, alors :

$$\begin{cases} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{cases}$$

- $\mathcal{B}$ est génératrice : si $\vec{u} = (x_u, y_u), \quad x_u, y_u \in \mathbb{R}$

$$\text{et : } \vec{u} = x_u.\vec{e}_1 + y_u.\vec{e}_2$$

Base d'un espace vectoriel

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, avec :

$$\vec{u}_1 = (1,2) \text{ et } \vec{u}_2 = (-2,3),$$

est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha.\vec{u}_1 + \beta.\vec{u}_2 = \vec{0}$, alors :

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta & = & 0 \\ 2\alpha + 3\beta & = & 0 \end{cases}$$

  Donc : $\alpha = \beta = 0$
- $\mathcal{B}$ est génératrice : si $\vec{v} = (x_v, y_v)$, alors :

$$\vec{v} = \frac{3x_v + 2y_v}{7} \cdot \vec{u}_1 + \frac{-2x_v + y_v}{7} \cdot \vec{u}_2$$

Base d’un espace vectoriel

Exemple

Dans l’espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, $\mathbb{R}_3[X]$, la famille $\mathcal{B} = \{\vec{f}_0(X), \vec{f}_1(X), \vec{f}_2(X), \vec{f}_3(X)\}$ avec :

$$\vec{f}_0(X) = 1,\ \vec{f}_1(X) = X,\ \vec{f}_2(X) = X^2,\ \vec{f}_3(X) = X^3$$

est une base.

- $\mathcal{B}$ est libre : si $\alpha_0.\vec{f}_0(X) + \alpha_1.\vec{f}_1(X) + \alpha_2.\vec{f}_2(X) + \alpha_3.\vec{f}_3(X) = \vec{0}$, alors :
$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 = 0$$
donc : $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$
- $\mathcal{B}$ est génératrice puisque tout polynôme de degré au plus 3, s’écrit :
$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3$$

Exercice :

- Montrer que $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1 = (-1, 0, 0),\ \vec{u}_2 = (0, 4, 0),\ \vec{u}_3 = (0, 0, 2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\mathcal{G} = \{\vec{u}_1 = (2, 0),\ \vec{u}_2 = (1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $\mathcal{H} = \{\vec{u}_1 = (1, 0),\ \vec{u}_2 = (-2, 1),\ \vec{u}_3 = (1, 1)\}$ n’est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

La famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ où :

$$\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ième position}}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$

On l'appelle base canonique de $\mathbb{R}^n$

La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$: démonstration

Montrons que la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$ où :

$$\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ième position}}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$

- Libre : Si $\alpha_1 \vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}$, alors pour tout i, en considérant la $i$ème composante de $\alpha_1 \vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{e}_n$, on a : $\alpha_i \times 1 = 0$, donc $\alpha_i = 0$
- Génératrice : soit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $\vec{x} = x_1.\vec{e}_1 + \cdots + x_n.\vec{e}_n$.

Unicité de l'écriture dans une base

Proposition : Soit une base $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}_{1 \leq i \leq n}$ une base d'un espace vectoriel E.

Tout vecteur $\vec{u} \in E$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \vec{a}_i$$

Les scalaires α_i s'appellent les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$

Écriture dans une base : exemples

- Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Quelles sont les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$?
  On remarque que $\vec{v} = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 + z.\vec{e}_3$, donc, par unicité, les coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$ sont x, y, z.
- Soit $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1 = (1,0,0), \vec{f}_2 = (1,1,0), \vec{f}_3 = (1,1,1)\}$ (base de $\mathbb{R}^3$). Soit $\vec{w} = (4,5,2) \in \mathbb{R}^3$. Quelles sont les **coordonnées** de $\vec{w}$ dans $\mathcal{C}$?
  Posons $\vec{w} = \alpha.\vec{f}_1 + \beta.\vec{f}_2 + \gamma.\vec{f}_3$. On a :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = & 4 \\ \beta + \gamma & = & 5 \\ \gamma & = & 2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ coordonnées de $\vec{w}$ dans $\mathcal{C}$: $\alpha = -1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$

Exercice :

- On a vu que $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1 = (-1,0,0),\ \vec{u}_2 = (0,4,0),\ \vec{u}_3 = (0,0,2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (1,1,1)$ dans $\mathcal{F}$.
- On a vu que $\mathcal{G} = \{\vec{u}_1 = (2,0),\ \vec{u}_2 = (1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (3,1)$ dans $\mathcal{G}$.

Dimension d'un espace vectoriel

Théorème : Si un espace vectoriel possède une partie génératrice à n éléments, toute partie ayant au moins $n+1$ éléments est liée.

(Théorème admis)

Corollaire : Dans un espace vectoriel, E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre s'appelle la dimension de l'espace vectoriel E.

Notation : $\dim E$

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ a n éléments, (donc toutes ses autres bases aussi), donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Démonstration du corollaire

Vocabulaire : cardinal d'une famille = nombre de vecteurs dans la famille.

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de cardinal n_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de cardinal n_2.

$\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ génératrice, donc : $n_1 \leq n_2$

$\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ génératrice, donc : $n_2 \leq n_1$

$$n_1 = n_2$$

Dimension d'un espace vectoriel

Théorème : Si un espace vectoriel possède une partie génératrice à n éléments, toute partie ayant au moins $n+1$ éléments est liée.

(Théorème admis)

Corollaire : Dans un espace vectoriel, E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Ce nombre s'appelle la dimension de l'espace vectoriel E.

Notation : $\dim E$

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ a n éléments, (donc toutes ses autres bases aussi), donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Propriétés des bases d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
- Toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.
- Toute famille contenant moins de n vecteurs n'est pas génératrice.

Autre expression :

- Une base est une famille libre de cardinal maximal
- Une base est une partie génératrice de cardinal minimal

Dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$: conséquence

Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (1,1,0), \vec{e}_3 = (1,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Libre : Si $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = \vec{0}$, alors en travaillant composante par composante,

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ \beta+\gamma & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$

- Génératrice : INUTILE !

$\mathcal{B}$ est libre et de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice :

- Montrer que $\mathcal{G} = \{\vec{u}_1 = (-1,1),\ \vec{u}_2 = (1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1 = (2,2,0),\ \vec{u}_2 = (0,-3,0),\ \vec{u}_3 = (0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\mathcal{H} = \{\vec{u}_1 = (1,1),\ \vec{u}_2 = (-2,4),\ \vec{u}_3 = (-1,1)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $F \neq \{\vec{0}\}$ un sous-espace vectoriel de E.

- Toute famille libre de F est libre dans E.
- Soit p le nombre de vecteurs d'une famille de cardinal maximal libre, $\mathcal{B}$, de F :
  1. $\mathcal{B}$ est une base de F
  2. $p \leq n$
  3. Si $p = n$, $\mathcal{B}$ est une base de E et $F = E$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème : Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, de dimension n :

1. $\dim F \leq \dim E$
2. $\dim F = \dim E \quad \Rightarrow \quad F = E$

Dimension d'un sous-espace vectoriel : exemple

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = 0\} = \{(x, y, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$
Alors $\dim F = 2$

En effet, si $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0),\, \vec{e}_2 = (0, 1, 0)\}$, alors

1. $\mathcal{B}$ est libre
2. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F :

$$(x, y, 0) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

Exercice :

- Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x = 2y,\ z = 0\} = \{(2y, y, 0)\,;\, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\mathcal{G} = \{\vec{u} = (2, 1, 0)\}$ est une famille libre d'élément(s) de F.
- Montrer que $\mathcal{G}$ est une base de F.
- Donner la dimension de F.

Exercice :

- Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x = 2y + 3z\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1 = (2, 1, 0),\ \vec{u}_2 = (3, 0, 1)\}$ est une famille libre d'élément(s) de G.
- Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de G.
- Donner la dimension de G.

Théorème de la base incomplète

Théorème : Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$

Théorème de la base incomplète : exercice

Soit $\mathcal{L}$ la famille libre de $E = \mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{L} = \{\vec{f}_1 = (2, 0, 0), \vec{f}_2 = (2, -1, 0)\}.$$

Compléter $\mathcal{L}$ en une base de E.

Pour $\vec{f}_3 = (0, 0, 1)$, la famille $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ est libre, de cardinal 3, c'est donc une base de E.

Exercice :

- Soit $\mathcal{L}$ la famille de $E = \mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{L} = \{\vec{f}_1 = (2, 1, 0), \vec{f}_2 = (2, 2, 0)\}.$$

  Montrer que $\mathcal{L}$ est libre.

- Compléter $\mathcal{L}$ en une base de E.

Rang d'une famille de vecteurs

Soit une famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq p}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n.

On appelle, rang de la famille $\mathcal{F}$, noté $\text{rg}(\mathcal{F})$, la dimension du sous-espace vectoriel F engendré par $\mathcal{F}$.

Proposition : Le rang d'une famille libre est son cardinal.

Proposition : Si une famille a pour rang son cardinal, alors elle est libre.

Rang et bases

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors on a équivalence entre :

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E,

(ii) $\mathcal{F}$ est libre,

(iii) $\mathcal{F}$ est génératrice dans E,

(iv) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = n$.

Algèbre linéaire – espaces vectoriels – matrices | Rang d'une famille de vecteurs

Rang d'une famille de vecteurs

Proposition : On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs si :

- On permute les vecteurs
- On multiplie l'un d'entre eux par un réel non-nul.
- On ajoute à l'un d'entre eux une combinaison linéaire des autres.
- On supprime un vecteur nul.

Rang d'une famille de vecteurs

Calcul

Calculer le rang de la famille de vecteurs :
$$\vec{u} = (1, 2, 3),\ \vec{v} = (0, 2, 1),\ \vec{w} = (2, 6, 7)$$

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} & = & (1,2,3) \\ \vec{v} & = & (0,2,1) \\ \vec{w} & = & (2,6,7) \end{array}$$

On remplace $\vec{w}$ par $\vec{w} - 2\vec{u} - \vec{v}$:

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} & = & (1,2,3) \\ \vec{v} & = & (0,2,1) \\ \vec{w} - 2\vec{u} - \vec{v} & = & (0,0,0) \end{array}$$

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ libre, donc $\mathrm{rg}\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big) = 2$

Exercice : Calculer le rang de la famille de vecteurs :
$$\vec{u} = (1, 3, 2),\ \vec{v} = (1, 1, 1),\ \vec{w} = (2, 4, 3)$$

Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On pose : $F_1 + F_2 = \{\vec{u} \in E \mid \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{u}_2 \in F_2\}$

Proposition : $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Somme de ss-ev : exemple 1

Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$F_1 = \{(x, 0, 0)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$$

et

$$F_2 = \{(0, y, 0)\,;\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Alors

$$F_1 + F_2 = \{(x, y, 0)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

Somme de ss-ev : exemple 2

Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$G_1 = \{(x, y, 0) \,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

et

$$G_2 = \{(0, y, 0) \,;\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Alors

$$G_1 + G_2 = \{(x, y, 0) \,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

Exercice : Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$F_1 = \{(x, 2x, 0) \,;\, x \in \mathbb{R}\}$$

et

$$F_2 = \{(0, y, z) \,;\, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que

$$F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$$

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Théorème : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = F_1 + F_2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. La décomposition de tout $\vec{u} \in E$ en somme $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$ est unique.
2. $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

Dans ce cas, on dit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ou que E est somme directe de F_1 et F_2.

Notation : $E = F_1 \bigoplus F_2$

Démonstration

• Soit E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$, avec décomposition unique pour tout $\vec{u} \in E$.

Somme de ss-ev : exemple de condition d'unicité

Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$G_1 = \{(x, y, 0) \,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

et

$$G_2 = \{(0, z, z) \,;\, z \in \mathbb{R}\}.$$

Alors

$$G_1 \cap G_2 = \{(0, 0, 0)\}$$

Exercice : Soit, dans $E = \mathbb{R}^4$,

$$F_1 = \{(x, y, 0, 0) \,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

et

$$F_2 = \{(0, 0, z, t) \,;\, z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que

$$F_1 \bigoplus F_2 = \mathbb{R}^4$$

Exercice : Soit, dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$F_1 = \{(x, 2x, x)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$$

et

$$F_2 = \{(0, y, z)\,;\, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que

$$F_1 \bigoplus F_2 = \mathbb{R}^3$$

Existence d'un supplémentaire

Théorème : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p d'un espace vectoriel E de dimension n.

Alors : F admet au moins un supplémentaire G dans E et :

$$E = F \bigoplus G \quad \Rightarrow \quad \dim E = \dim F + \dim G$$

Proposition : Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration :

- Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G :
  $H \cap F = H \cap (F \cap G) = \{\vec{0}\}$ donc : $F + G = F \bigoplus H$
- $\dim(H) = \dim(G) - \dim(F \cap G)$ donc :
  $$\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(H) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F \cap H)$$

Matrices

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels (ou complexes) :

un tableau de np nombres réels (ou complexes) rangés en n lignes et p colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ i & \pi & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e & -6 & \frac{7}{2} & \sqrt{3} \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -8 \\ \sin\left(\frac{15\pi}{8}\right) & 0 & 0 & 18 \\ 1\,250 & e^{19} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $n = 1$: $(1 \quad \sqrt{2} \quad 34 \quad \pi)$ matrice ligne

Si $p = 1$: $\begin{pmatrix} e \\ -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ matrice colonne

Notation : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ = ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels

Écriture indexée

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'élément situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne, est noté : a_{ij}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

Matrice diagonale

Si A est une matrice carrée ($n = p$),

les coefficients a_{ii}, $1 \leq i \leq n$, s'appellent les coefficients diagonaux de la matrice.

Une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$, s'appelle une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices triangulaires

Soit A une matrice carrée.

Si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, on dit que A est triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, on dit que A est triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Somme des matrices

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \text{ et } B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$

On définit la somme des matrices A et B comme la matrice :

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 7 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$$

Multiplication des matrice par des scalaires

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$

On définit la matrice $\alpha.A$ comme la matrice :

$$\alpha.A = \alpha.\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} = \left(\alpha a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$

$$(-2).\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -14 \\ 0 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

Théorème : Avec l'addition et la multiplication externe, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$ (abréviation pour $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$) des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel de dimension np.

Le vecteur $\vec{0}$ de cet espace vectoriel est la matrice dont tous les coefficient sont nuls.

Produit de 2 matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices :

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \text{ et } B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$$

On définit la matrice produit de A et B, comme la matrice :

$$A \times B = AB = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}}$$

où :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Produit de 2 matrices

Exemple

Soient : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Attention : Le produit de deux matrices A et B n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Cas des matrices carrées

Une matrice est carrée si $n = p$:

le produit de 2 matrices carrées de même taille est toujours possible.

Attention : Le produit des matrices n'est pas commutatif, en général :

$$\text{Si } A, B \in \mathcal{M}_n \text{ (abréviation pour } \mathcal{M}_{n,n}\text{)}, \quad AB \neq BA$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -6 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\neq \begin{pmatrix} 8 & 15 & 11 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice : Les produits suivants sont-ils possibles ? Si oui, les faire.

- $A \times B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
- $A \times B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
- $A \times B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$
- $A \times B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Règles de calcul pour la multiplication 1

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $C, D \in \mathcal{M}_{p,r}$

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

$$\text{Si } n = p,\ (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

D'une manière générale, la formule du binôme ne s'applique pas aux matrices

Règles de calcul pour la multiplication 2

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $B \in \mathcal{M}_{p,r}$, $C \in \mathcal{M}_{r,s}$

$$A(BC) = (AB)C = ABC$$

Le produit matriciel n'est pas commutatif, mais il est **associatif**.

Matrice identité

Dans $\mathcal{M}_n$ on appelle matrice identité, la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Notation : I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Proposition : Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$,

$$I_n \times A = A \times I_p = A.$$

Puissances d'une matrice carré

Pour $A \in \mathcal{M}_n$, les puissances A^k ($k \in \mathbb{N}$) de A sont définies par

- $A^0 = I_n$
- $A^{k+1} = A \times A^k = A^k \times A$

Ainsi, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A \ldots$

Question : pourrait-on ainsi définir les puissances d'une matrice non carré ?

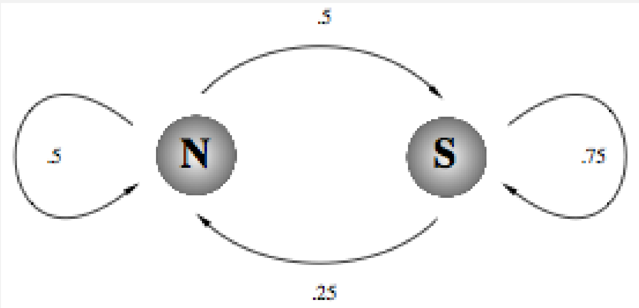
Exercice : Montrer que si $A = I_n$ (matrice identité), alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = I_n$.

Exercice :

1. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calculer A^2 et A^3.
2. Pour $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer B^2 et B^3.

Exercice : On considère des particules vivant sur 2 sites N et S, telles que à chaque seconde,

- 50% des particules situées en N migrent vers S,
- 25% des particules situées en S migrent vers N.



On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et S_k les nombres de particules situées respectivement en N et S à l'instant k.

$\hookrightarrow$

1. Exprimer, pour tout k, la relation entre (N_{k+1}, S_{k+1}) et (N_k, S_k).
2. Exprimer cette relation à l'aide de la matrice $T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.75 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que pour tout k, $\begin{pmatrix} N_k \\ S_k \end{pmatrix} = T^k \begin{pmatrix} N_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$
4. On donne les valeurs suivantes des puissances de T.

$$T^2 = \begin{pmatrix} .375 & .312 \\ .664 & .687 \end{pmatrix} \qquad T^3 = \begin{pmatrix} .344 & .328 \\ .656 & .671 \end{pmatrix}$$

$$\dots\ T^6 = \begin{pmatrix} .333 & .333 \\ .667 & .667 \end{pmatrix}$$

Quelle intuition en tirez-vous quant à la répartition des particules entre N et S au bout d'une longue durée ?

Matrices inversibles

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible,

s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Notation : $B = A^{-1}$

Matrices inversibles

Proposition : Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible :

1. Son inverse A^{-1} est unique.
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
3. Si $B \in \mathcal{M}_n$ est inversible : $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Matrices inversibles

Règles élémentaires

Pour calculer l'inverse d'une matrice, on peut :

- Permuter des lignes
- Multiplier une ligne par un nombre non nul
- Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres
- Ces opérations peuvent également se faire sur les colonnes. Attention : uniquement sur les lignes, ou uniquement sur les colonnes, pas de mélange dans le traitement dune même matrice.

On appelle ces règles : règles élémentaires

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

Soit à calculer l'inverse de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

On écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Règle du jeu : Transformer la matrice de gauche en la matrice de droite, en n'appliquant que des règles élémentaires.

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right) \begin{pmatrix} 2 & 20 & -5 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -32 & 11 \end{pmatrix}$$

Déterminant et inverse d'une matrice 2 × 2

Proposition : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2 × 2. On pose

$$\det A = ad - bc$$

Alors :

- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$
- Dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Proposition : Soit $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Remarque : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Exercice : 1) Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Inverser la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Inverser la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

On appelle système linéaires de n équations à p inconnues, un système du type :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

La matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ s'appelle la matrice du système.

Le n-uplet $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ est le second membre du système.

Écriture matricielle d'un système

On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Le système : $$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

S'écrit : $A.X = B$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Si la matrice A du système est carrée inversible, le système a alors une seule solution :

$$A.X = B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}.B$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

Soit à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x - y + 2z & = & 5 \\ 3x + 2y + z & = & 10 \\ 2x - 3y - 2z & = & -10 \end{array}\right.$$

Écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

La solution est : $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

Exercice : Résoudre

$$\begin{cases} x+y+z & = & 2 \\ x-y+2z & = & 1 \\ 3x+y+5z & = & -1 \end{cases}$$

Application linéaire

Soit : E un espace vectoriel de dimension p et F un espace vectoriel de dimension n

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si :

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $\forall \vec{x} \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha.\vec{x}) = \alpha.f(\vec{x})$

Proposition : Une application f entre deux espaces vectoriels E et F est linéaire si, et seulement si :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

Dans ce cas, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

Application linéaire

Exemples

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z, x-2z) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y+2z) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

Exercice : Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, y+1) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, z^2) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y, y-z) \end{array}$$

Matrice d'une application linéaire

Soit

- E un espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B}_E = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p\}$ une base de E.
- F un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_F = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$ une base de F.
- $f\ :\ E \longrightarrow F$ une application linéaire.

$$\forall \vec{x} \in E, \quad f(\vec{x}) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j.\vec{a}_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j.f(\vec{a}_j)$$

$$\forall j, (1 \leq j \leq p),\ f(\vec{a}_j) \in F \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha_{ij}, (1 \leq i \leq n)\ : f(\vec{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\vec{b}_i$$

Matrice d'une application linéaire

La matrice : $A = \left(\alpha_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ s'appelle la matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}_E = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p\}$ et $\mathcal{B}_F = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$ (ou seulement matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}_E$ si $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_E$).

$$M_{(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\vec{a}_1) & f(\vec{a}_2) & \cdots & f(\vec{a}_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{array}$$

Important : Les nombres α_{ij} dépendent :

- de l'application linéaire f.
- des bases choisies dans les espaces vectoriels E et F.

Matrice d'une application linéaire

Proposition : Soit $A = M_{(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)}$. Si $\vec{x} \in E$ a pour coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}_E$, alors $f(\vec{x})$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = AX$ dans $\mathcal{B}_F$.

Matrice d'une application linéaire

Soit $E = F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonique et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z, x-2z) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = (1,0,1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = (1,1,0) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = (0,1,-2) = \vec{e}_2 - 2.\vec{e}_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \end{array}$$

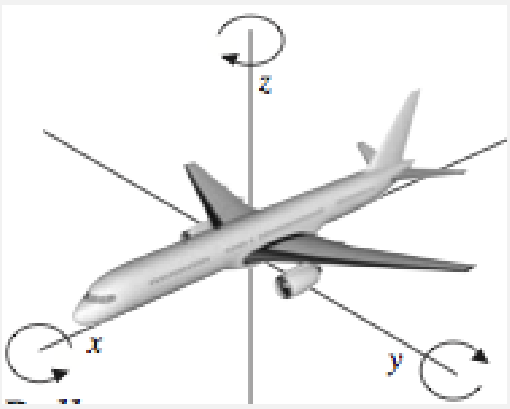
Exercice : Montrer que les applications suivantes sont linéaires et donner leurs matrices dans les bases canoniques.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y, 2x-y+z) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-3y+z, x+y+z) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x-3y) \end{array}$$

Composées d'applications linéaires



Le moteur de bord d'un avion réalise des composées d'applications linéaires (les 3 rotations autours de ses axes) à chaque instant

Composée d'applications/produit de matrices

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$

et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.

Théorème : $M_{(g\circ f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G)} = M_{(g,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G)}M_{(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)}$

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique : $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

Donner les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \\ &= \alpha_1(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \alpha_2(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \\ &= (2\alpha_1 + 3\alpha_2)\vec{e}_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)\vec{e}_2\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &=& 2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &=& 3 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E

Si un vecteur $\vec{x} \in E$ s'écrit comme le vecteur colonne X dans $\mathcal{B}$ et le vecteur colonne X' dans $\mathcal{B}'$ il existe une matrice P telle que :

$$X = PX'$$

Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$.
Soit une nouvelle base de E : $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$

On appelle matrice de changement de base ou matrice de passage, de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice P suivante :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} \vec{a}'_1 & \vec{a}'_2 & \cdots & \vec{a}'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{array}
\end{array}$$

Remarque 1 : cette matrice est la matrice $M_{(Id,\mathcal{B}',\mathcal{B})}$.

Remarque 2 : donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est l'inverse de P.

Exercice : Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la matrice canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1 = (1,3), \vec{v}_2 = (2,-1)\}$.

- Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$
- Donner la matrice de passage $P = M_{Id,\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
- Donner la matrice de passage $Q = M_{Id,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$

Exercice : Soit $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,1), \vec{u}_2 = (2,3)\}$ et $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1 = (1,3), \vec{v}_2 = (2,-1)\}$.

- Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$
- Donner la matrice de passage $P = M_{Id,\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
- Donner la matrice de passage $Q = M_{Id,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$

Matrice de passage

Exemple 1

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ sa base canonique.

Soit : $P_0 = 1 - X,\ P_1 = 1 + X,\ P_2 = X^2 - X^3,\ P_3 = X^2 + 2X^3$

Exercice : $\mathcal{B}' = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ est une base de E.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage

Théorème : Si $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n,

- La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (c'est à dire ayant pour colonne i les coordonnées du vecteur $\vec{a}'_i$ sur la base $\{\vec{a}_j\}_{(1 \leq j \leq n)}$) est la matrice :
- $P = M_{id,\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, d'inverse $P^{-1} = M_{id,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$
- Si X est la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur $\vec{x} \in E$ et X' est la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ du même vecteur $\vec{x}$:

$$X = PX' \quad \text{et} \quad X' = P^{-1}X$$

Matrice de passage

Exemple 2

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Soit
$\vec{e}'_1 = (2, -1, 1) \quad \vec{e}'_2 = (1, 2, -1) \quad \vec{e}'_3 = (1, 1, -3)$.

1 : Montrer que $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et son inverse est : } P^{-1} = \left(\frac{1}{13}\right)\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

2 : Trouver les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (2, 3, 4)$ dans la base $\mathcal{B}'$

3 : Quel est le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(1, 2, -1)$ dans la base $\mathcal{B}'$?

Matrice de passage

Effet sur une matrice

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ une nouvelle base de E

Soit $M = M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ la matrice d'une application linéaire f de E dans E dans la base $\mathcal{B}$

Proposition : Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice :

$$M' = P^{-1}MP$$

est la matrice $M_{f,\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$ de l'application f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice : Soit $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,2), \vec{u}_2 = (2,3)\}$ et $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1 = (1,1), \vec{v}_2 = (1,-1)\}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire
2. Donner sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$
3. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$
4. Donner la matrice de passage $P = M_{Id,\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$ de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$
5. En déduire la matrice $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ de f dans la base $\mathcal{B}'$
6. Donner la matrice de passage $Q = M_{Id,\mathcal{B}',\mathcal{B}_0}$ de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}'$
7. En déduire la matrice $M_{f,\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$ de f dans la base $\mathcal{B}'$

Rang d'une matrice

On appelle rang d'une matrice M (noté rg(M)) :

- Le rang du système de vecteurs colonnes de M.
- Le rang du système de vecteurs lignes M.

Pour calculer le rang d'une matrice, on applique les règles élémentaires au système de vecteurs lignes pour la transformer en une matrice triangulaire supérieure. Le rang est le nombre de pivots non nuls.

(pivot = terme de la matrice à gauche et en dessous duquel il n'y a que des zéros (ou rien))

Proposition :

- $\text{rg}(M) \leq$ nombre de lignes de M
- $\text{rg}(M) \leq$ nombre de colonnes de M
- Une matrice carrée de dimension n est de rang n si et seulement si elle est inversible.

Exercice : Calculer les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$