TD #2 — 1. 10. 2012

Suite arithmétique : (u_n) suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0 est la suite de terme général

$$u_n = u_0 + nr$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \end{cases}$$

Suite géométrique : (u_n) suite géométrique de raison r et de terme initial u_0 est la suite de terme général

$$u_n = u_0 \times r^n$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \cdot r \\ u_0 \end{cases}$$

Exercice 1 :

a) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{-\pi u_n}{\sqrt{17}} \\ u_0 = 3 \end{cases}$ géométrique $r = \dfrac{-\pi}{\sqrt{17}}$

$$u_n = 3 \cdot \left(\frac{-\pi}{\sqrt{17}}\right)^n$$

b) $\begin{cases} u_{n+1} = 1 - u_n \\ u_0 = 0 \end{cases}$ Calcul des premiers termes :
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$, etc.

(u_n) n'est pas une suite arithmétique car $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant.
" " géométrique car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constant (et même pas défini).

$$\begin{cases} u_n = 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \\ u_n = 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$ **or** $u_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$

Preuve par récurrence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la propriété : P_n $u_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$.
Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = 0 = \dfrac{1-(-1)^0}{2}$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que P_{n+1} est vraie.

P_{n+1} $\quad u_{n+1} = 1 - u_n$

Par hypothèse de récurrence, $u_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ Donc $u_{n+1} = 1 - \frac{1-(-1)^n}{2}$

$$u_{n+1} = \frac{2 - 1 + (-1)^n}{2}$$

$$u_{n+1} = \frac{1 + (-1)^n}{2} \qquad (-1)^n = (-1) \times (-1) \times \ldots n(-1) = -(-1)^{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que $u_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 \\ u_0 = 1 \end{cases}$ $\quad u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1$, etc

practice proving by récurrence

(u_n) est la suite constante à 1.

$u_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0$, $u_n = 1 + 0 \cdot n$

(u_n) est une suite géométrique de raison $r = 1$, $u_n = 1 \times (1)^n$

d) $\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}(3 - 2u_n) = -\frac{3}{2} + u_n \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$

suite arithmétique de raison $r = -\frac{3}{2}$.

$$u_n = -\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}$$

Exercice 2 :

1. (t_n) arithmétique $\quad r = 10 \quad t_{1000} = 0$

$t_n = t_0 + nr \qquad t_{1000} = 0 = t_0 + (10)(1000)$

$t_n = t_0 + 10n \qquad 0 = t_0 + 10\,000$

$t_n = -10\,000 + 10n. \qquad t_0 = -10\,000$

2) (u_n) $u_0 = -2$ $u_{10} = 118$ arithmétique

$u_n = u_0 + nr$

$u_n = -2 + nr$ $\quad u_{10} = 118 = -2 + (10)r$

$$\frac{118+2}{10} = r$$

Donc $u_n = -2 + 12n$. $\quad r = 12$

3) (v_n) géométrique $v_0 = 3$ $v_5 = -96$

$v_n = v_0 \cdot r^n$ $\quad v_5 = -96 = 3 \cdot r^5$

$v_n = 3 \cdot r^n$

$$\frac{-96}{3} = r^5$$

$$-32 = r^5$$

$$\sqrt[5]{-32} = r$$

Donc $v_n = 3 \cdot (-2)^n$ $\quad r = -2$

4) (w_n) géométrique $r = -2$ $w_5 = 320$

$w_n = w_0 \cdot r^n$ $\quad w_5 = 320 = w_0 \cdot (-2)^5$

$w_n = w_0 \cdot (-2)^n$

$$\frac{320}{-32} = w_0$$

Donc

$w_n = (-10)(-2)^n$ $\quad -10 = w_0$

Exercice 3

$x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ pour tout n.

$x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ $\quad z_n = x_n + iy_n$

Pour tout n, calculer z_{n+1} en fonction de z_n, et en déduire les termes généraux (x_n) et (y_n) ainsi que les limites de ces deux suites.

$$z_{n+1} = x_{n+1} + i y_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} + i\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)$$

$$= \frac{x_n - y_n + i x_n + i y_n}{2}$$

$$= \frac{x_n + i y_n + (i x_n + i y_n)}{2}$$

$$z_{n+1} = \frac{z_n + i z_n}{2}$$

$z_0 = x_0 + i y_0$

$z_0 = 1 + i(0)$

$\boxed{z_0 = 1}$

(z_n) est donc une suite géométrique à valeurs complexes de raison $r = \frac{1+i}{2}$.

$$\boxed{z_{n+1} = \left(\frac{1+i}{2}\right) z_n}$$

Et comme $z_0 = 1$, $\boxed{z_n = 1 \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n}$

$x_n = Re(z_n)$ et $y_n = Im(z_n)$

Déterminons la forme exponentielle de $\frac{1+i}{2}$. $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc $z_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} e^{i\frac{\pi}{4} n}$

$x_n = Re(z_n) = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ $\quad y_n = Im(z_n) = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

On a l'encadrement, $-\frac{1}{(\sqrt{2})^n} < x_n \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ on $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = 0$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

Exercice 6 :

a) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{2^k} = 5 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 10\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Exercice 3. 2.10.2012

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2} & x_0 = 1 \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} & y_0 = 0 \end{cases}$$

On definit $z_n = x_n + iy_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$n \in \mathbb{N}$ $\quad z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$

$$z_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} + i\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)$$

$$= \frac{x_n - y_n + i(x_n + y_n)}{2}$$

$$= x_n \frac{(1+i)}{2} + y_n \frac{(-1+i)}{2} = i\left(\frac{1+i}{2}\right)$$

(*)

$$= \frac{1+i}{2}(x_n + iy_n)$$

$$= \frac{1+i}{2} z_n$$

(*) or $x_n = z_n - iy_n$ donc $= \frac{1+i}{2}(z_n - iy_n) + y_n\left(\frac{-1+i}{2}\right)$

$$= \left(\frac{1+i}{2}\right) z_n + y_n \left(\cancel{\frac{-i+1}{2}}\right) + y_n \left(\cancel{\frac{-1+i}{2}}\right)$$

$$= \frac{1+i}{2} z_n$$

$z_{n+1} = \left(\frac{1+i}{2}\right) z_n \qquad z_0 = x_0 + iy_0 = 1$ suite géometrique

donc $(z_n)_n$ suite géometrique de raison $\frac{1+i}{2}$ et de premier terme 1.

$$z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \times 1 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\| \qquad x_n, y_n \in \mathbb{R}.$

$x_n + iy_n$

Find form trig. of $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ $\quad \left|\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4}\right)$

$\text{Arg} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

donc $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}\right)^n$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^n} e^{\frac{ni\pi}{4}} = \underbrace{\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}^n}}_{x_n} + i \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}^n}}_{y_n}.$$

Donc $x_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}^n}$ et $y_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}^n}$

Maintenant, on cherche les limites de x_n et y_n.

Exercice 4 :

a) $u_n = (-3)^n + 3^n$

$u_0 = 2$ $\quad u_1 = -3+3 = 0$ $\quad u_2 = 9+9 = 18$ $\quad u_3 = -27+27 = 0$, etc.

- si n pair, $n = 2k \in \mathbb{N}$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$u_n = (-3)^n + 3^n = (-3)^{2k} + 3^{2k}$$
$$= ((-3)^2)^k + 3^{2k}$$
$$= 2 \times 3^{2k}$$
$$= 2 \times 3^n$$

- si n impair, $n = 2k+1 \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$

$$u_n = (-3)^{2k+1} + 3^{2k+1} = (-3)((-3)^{2k}) + 3 \cdot 3^{2k}$$
$$= -3(3^{2k}) + 3 \cdot 3^{2k} = 0.$$

$$u_n = (-3)^n + 3^n = \begin{cases} 2 \times 3^n \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \quad \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

- (u_n) non-majorée
- (u_n) minorée $u_n \geq 0$
- (u_n) ni croissante, ni decroissante.
- (u_n) non-convergente.

Bruno Galerne
bruno.galerne@parisdescartes.fr

$\boxed{\text{Suite croissante } \underline{\text{et}} \text{ majorée = CONVERGENTE w/ limite.}}$

b) $u_n = \dfrac{n+1000}{n+2012}$ $\quad u_0 = \dfrac{1000}{2012}$ $\quad u_1 = \dfrac{1001}{2013}$ $\quad u_2 = \dfrac{1002}{2014}$, etc.

Minorée parce que la suite est positive. donc (u_n) est minorée par 0.

Monotonie ? $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1+1000}{n+1+2012} - \dfrac{n+1000}{n+2012}$

$$= \frac{(n+1+1000)(n+2012) - (n+1000)(n+1+2012)}{(1+n+2012)\cdot(n+2012)}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1000)(n+2012)} + (n+2012) - \cancel{(n+1000)(n+2012)} - (n+1000)}{(n+2013)(n+2012)}$$

$$= \frac{1012}{(n+2013)(n+2012)} > 0$$

(u_n) est croissante. (elle n'est pas décroissante).

$$u_n = \frac{n\left(1+\frac{1000}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2012}{n}\right)} = \frac{1+\frac{1000}{n}}{1+\frac{2012}{n}}$$

with $\frac{1000}{n} \to 0$ and $\frac{2012}{n} \to 0$: on en déduit que (u_n) converge vers 1.

Comme (u_n) est croissante, (u_n) est majorée par sa valeur limite $l = 1$ $\forall n,\ u_n \leq 1$.

c) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ Minorée pq (u_n) est à valeurs positives, donc (u_n) est minorée par 0.

Monotonie ? $u_0 = \dfrac{2^0}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$

$u_1 = \dfrac{2}{1!} = 2$ $\quad (u_n)$ n'est pas décroissante car $u_0 < u_1$

$u_2 = \dfrac{4}{2} = 2$ $\quad u_3 = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

(u_n) n'est pas croissante car $u_3 > u_4$.

$$u_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}^{n \text{ termes}}}{\underset{2}{1} \times \underset{1}{2} \times \underset{<1}{3} \times \dots \times (n-1) \times \underset{<1}{n}} \leq 2$$

Donc (u_n) est majorée par 2

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \times 2^n}{(n+1) \cdot n!} = \frac{2}{n+1} u_n$$

$\forall n \geq 1$, $\frac{2}{n+1} \leq 1$, donc $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} \leq u_n$

(u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$

(u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, et minorée, donc elle converge.

d) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

(u_n) est donc minorée par $u_0 = 1$.

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1 + \tfrac{1}{2} \\ u_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \\ u_3 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \end{aligned}\right\} \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$u_n = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2$$

Donc (u_n) converge vers 2.
Comme (u_n) est croissante, elle est majorée par sa limite $l = 2$.

Minorée + majorée = bornée

4.10.2012

Exercice 5 :

a) FAUX $u_n = (-2)^n$ (u_n) n'est pas minorée

when n is odd, (u_n) tends vers $-\infty$, MAIS

quand n est paire, (u_n) tends vers $+\infty$.

Alors pas de limite.

b) FAUX $u_n = (-1)^n$ $-1 \leq u_n \leq 1$ donc (u_n) est bornée.

(u_n) n'est pas convergente.

Si (u_n) converge vers ℓ alors toutes les suites extraites de (u_n) convergent également vers ℓ.

c) VRAI

d) VRAI On utilise la définition de la convergence avec $\varepsilon = \ell > 0$. Alors on a un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \ell$

Soit $\forall n \geq N$, $0 \leq u_n \leq 2\ell$

En particulier, (u_n) est positive à partir du rang N.

e) FAUX. $u_n = -\frac{1}{n+1}$ est croissante et converge vers 0.

f) FAUX $u_n = (-1)^n$ Alors $|u_n| = 1$ est convergente mais (u_n) ne l'est pas.

g) FAUX à cause du signe de la limite.

$u_n = -1$ alors $|u_n| = 1$ converge vers 1.

Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

h) FAUX $\left.\begin{array}{l} u_n = (-1)^n \\ v_n = -(-1)^n \end{array}\right\}$ n'ont pas de limite. $u_n + v_n = 0$ a une limite.

i) VRAI (u_n) tend vers ℓ Les limites s'additionnent :

(u_{n+1}) tend vers ℓ. $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad , r \neq 1$$

exercice 6 : continued

b)

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 3^{2k} = 3 \sum_{k=0}^{n} (3^2)^k$$

$$= 3 \sum_{k=0}^{n} 9^k$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1-9^{n+1}}{1-9} \right) \quad \text{OR} \quad = 3 \cdot \left(\frac{9^{n+1}-1}{9-1} \right)$$

when r is greater than 1.

$$= 3 \cdot \left(\frac{9^{n+1}-1}{8} \right) = \frac{3}{8} (9^{n+1}-1)$$

c)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1+4^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} + \frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{3}}$$

$$= \left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] \cdot \frac{3}{2} + \left[1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right] \cdot -\frac{3}{1}$$

$$= \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) - 3\left(1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 3 + 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$$

$$= 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right)$$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$ $\qquad \cos(k\theta) = Re(e^{ik\theta})$

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{Re(e^{ik\theta})}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} Re\left(\frac{e^{ik\theta}}{2^k}\right)$

$$= Re\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{2^k}\right)$$

On pose $\displaystyle Z = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}}$

$$= \frac{1-\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}} = \frac{\left(1-\frac{e^{i(n+1)\theta}}{2^{n+1}}\right)\left(1-\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)}{\left(1-\frac{\cos\theta}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sin\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\frac{e^{-i\theta}}{2} - \frac{e^{-i(n+1)\theta}}{2^{n+1}} + \frac{e^{in\theta}}{2^{n+2}}}{1-\cos\theta + \frac{\cos^2\theta}{4} + \frac{\sin^2\theta}{4}} = \frac{1-\frac{e^{i\theta}}{2} - \frac{e^{-i(n+1)\theta}}{2^{n+1}} + \frac{e^{in\theta}}{2^{n+2}}}{\frac{5}{4}-\cos\theta}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k} = Re(Z)$

$$= \frac{1-\frac{\cos\theta}{2} - \frac{\cos((n+1)\theta)}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n\theta)}{2^{n+2}}}{\frac{5}{4}-\cos\theta}$$

Exercice 7:

1) $(u_n) = \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2}, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$ $\qquad v_n = u_{n+1} - u_n$

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} - u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} - v_n) = -\frac{1}{2} v_{n-1}$$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \cancel{u_3} - \cancel{u_2} + \ldots + u_{n+1} - \cancel{u_n}$

$= u_{n+1} - u_0$

or

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{+1} - u\ ) = \sum_{k=0}^{n} u_{+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=1}^{n+1} u_j - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} - u_0$$

$v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0 \qquad v_0 = u_1 - u_0$

$= 1$

Donc $v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Now we search l'expression de (u_n)

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = u_{n+1} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = u_n$$

3) Prove that (u_n) converge.

$$u_n = \frac{2}{3}\left(1 - \underbrace{\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}}_{\text{tend vers } 0}\right)$$

$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Donc la limite de (u_n) est $\frac{2}{3}$.

Exercice 8:

1)

$$(u_n) = \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{0^2+12}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{15}$$

2) $v_n = u_n^2 - 4 \qquad u_n = \frac{1}{2}\sqrt{(u_{n-1})^2+12}$

$$v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{(u_n)^2+12}\right)^2 - 4 = \frac{1}{4}\left[(u_n)^2+12\right] - 4$$

$v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n^2 - 4)$

$= \frac{1}{4} v_n$

Donc v_n est géométrique et la raison est $\frac{1}{4}$.

$v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^n (-4)$

3) d'où $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = 0$ parce que $\left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Trouver la limite de (u_n)

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n^2 - 4 = 0$ parce que $v_n = u_n^2 - 4$ et v_n tend vers 0.

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n^2 = 4$

Comme la suite (u_n) est positive la seule limite possible est 2 et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 2$.

Exercice 9:

1) a. $\frac{2^n}{n^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ parce que $2^n > n^3$

$\ln \frac{2^n}{n^3} = n \ln 2 - 3 \ln n$

$= \underbrace{n}_{\to +\infty} \Big(\underbrace{\ln 2}_{\ln 2 > 0} - \underbrace{\frac{3 \ln n}{n}}_{\to 0} \Big)$

Donc $\frac{2^n}{n^3}$ tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{n \to \infty} \ln(u_n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n) = +\infty$.

b. $\frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}$ $\quad \log\left(\frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right) = \log(\log n)^2 - \frac{1}{2}\log(n)$

$= \log n \left(\frac{\log(\log n)^2}{\log n} - \frac{1}{2} \right)$

pour $n \geq 2$ $\quad = \underbrace{(\log n)}_{\to +\infty} \left(\underbrace{\frac{2 \log(\log n)}{\log n}}_{\to 0} - \frac{1}{2} \right)$

$\left(\frac{\log u}{u}\right) \to 0$

Donc $\frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}$ tend vers 0.

d. $\frac{2^n}{n!} \xrightarrow[+\infty]{n} 0$

c. $\frac{2^{\log(n)}}{n^{\log(3)}} = \frac{\left(e^{\ln 2}\right)^{\ln(n)}}{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln 3}} = \frac{e^{(\ln 2)(\ln n)}}{e^{(\ln 3)(\ln n)}} = e^{-\underbrace{(\ln 3 - \ln 2)}_{>0} \ln(n)}$

tend vers 0 quand $n \to \infty$.

2) a. $u_n = n + \cos(n) = n\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)$ ($\frac{\cos n}{n} \to 0$)

Comme $|\cos n| < 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

Donc $\lim_{n\to\infty} (n + \cos(n)) = n = +\infty$

b. $u_n = \frac{4n + \sin(n)}{n^3}$ converge vers 0.

c. $u_n = \frac{3n+5}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\cancel{n}(3 + \frac{5}{n})}{\cancel{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$ ($\frac{5}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \to 1$) $= 3$ quand $n \to +\infty$.

d. $u_n = \frac{(n+1)(2 + (-1)^n)}{n+3}$ les termes pair ont une limite ℓ_1 et les termes impaires ont une limite ℓ_2, donc (u_n) n'a pas de limite.

(peut pas avoir plus qu'un limite).

pour $n=2p$ $\quad u_{2p} = \dfrac{3(2p+1)}{2p+3} \xrightarrow[p \to \infty]{} 3$

La sous-suite des termes paires converge vers 3.

$n = 2p+1$ $\quad u_{2p+1} = \dfrac{1(2p+1+1)}{2p+1+3} \xrightarrow[p \to \infty]{} 1$

La sous-suite des termes impaires converge vers 1.

Donc, pas de limite.

f. $u_n = \dfrac{n - \log n}{n + \log n} = \dfrac{\cancel{n}\left(1 - \frac{\log n}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1 + \frac{\log n}{n}\right)}$

$= \dfrac{1 - \underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\to 0}}$

$= \dfrac{1}{1} = 1.$

g. $u_n = (-1)^n + \underbrace{\dfrac{2}{n}}_{\to 0}$

two limites $\qquad$ donc, pas de limite.

h. $u_n = \underbrace{\sqrt{n} - 2}_{\to 0} - \underbrace{\dfrac{n}{2}}_{\to +\infty} = 0 - \infty$

$= -\infty$

$u_n = n\left[\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}}_{\to 0} - \frac{1}{2}\right] \longrightarrow -\infty$

i. $u_n = \dfrac{2^n}{n \log n} \longrightarrow +\infty$

j. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} \cdot \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \dfrac{n+1 - (n+2)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$

Donc (u_n) tend vers 0.

Exercice 10:

1) FAUX (v_n) ne converge pas vers l.

$u_n = 0$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ Mais $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1 \neq 0$.

2) VRAI $u_0 \leq u_n \leq v_n$

Donc (v_n) est minorée par u_0 et croissante, donc elle converge

De même pour (u_n). (majorée par v_0).

3. VRAI. D'après 2), (u_n) et (v_n) convergent vers l et l' respectivement.

$$\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to\infty} u_n - \lim_{n\to\infty} v_n$$

$$= l - l'$$ Donc par hypothèse, on a $l - l' = 0$

$$\Rightarrow l = l.$$

4. FAUX $v_n = (-1)^n$, $u_n = -1$, $w_n = 1$

Alors toutes les hypothèses sont vérifiées mais (v_n) ne converge pas.

Exercice 11:

1) $u_n = \frac{n^{1000}}{1,001^n}$ Par croissance comparée, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

2) $n \geq 1$ $v_n = \inf \{k \in \mathbb{N}^*, k^k \geq n\}$

$v_1 = 1$ $v_2 = 2$ $v_3 = 2$ $v_4 = 2$ $v_5 = 3$, $v_6 = 3$, ..., $v_{27} = 3$

$v_{28} = 4$, ...

Exercice 12:

1)

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}} \qquad (\phi_n) = \begin{cases} \phi_0 = 1 \\ \phi_{n+1} = \sqrt{\phi_n + 1} \end{cases}$$

$\phi_0 = 1$

$\phi_1 = \sqrt{1 + \phi_0} = \sqrt{2}$

$\phi_2 = \sqrt{1 + \phi_1} = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, etc.

8.10.2012

2) $\begin{cases} \varnothing_0 = 1 \\ \varnothing_{n+1} = \sqrt{1+\varnothing_n} \end{cases}$ $(\varnothing_n)$ est une suite récurrente de la forme

$\varnothing_{n+1} = f(\varnothing_n)$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$

Monotonie des suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$

- on regarde si f est croissante.
- si f est croissante, alors (u_n) est monotone (croissante ou décroissante).

On regarde l'ordre des deux premiers termes :

si $u_0 \leq u_1$, alors (u_n) est croissante.

Si $u_0 \geq u_1$, alors (u_n) est décroissante.

f est définie sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $]-1, +\infty[$. $f([-1, +\infty[) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$ donc la suite récurrente est bien définie.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $\forall\, x \in]-1, +\infty[$, et ≥ 0.

Donc f est croissante (méthode alternative : f est croissante en tant que composée de deux fonctions croissantes : $x \longmapsto x+1$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$).

On en déduit que la suite $(\varnothing_n)$ est monotone.

$\varnothing_0 = 1 \leq \varnothing_1 = \sqrt{2}$ donc $\underline{(\varnothing_n) \text{ est croissante.}}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n : $\varnothing_n \leq 2$.

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $\varnothing_0 = 1 \leq 2$ donc P_n est vraie.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un certain rang n.

Montrons que P_{n+1} est vraie.

$\varnothing_{n+1} = \sqrt{1+\varnothing_n}$ Par hypothèse de récurrence $\varnothing_n \leq 2$ et $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est croissante, donc $\sqrt{1+\varnothing_n} \leq \sqrt{1+\ } = \sqrt{3}$ soit $\varnothing_{n+1} \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{2}$

donc P_{n+1} est vraie.

On a montré par récurrence que $\varnothing_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) ϕ_n est croissante et majorée, donc elle est convergente.
Elle converge vers une limite ℓ.

$\ell = \sqrt{\ell + 1}$ $\ell^2 = \ell + 1$ et $\ell \geq 0$

$x^2 - x - 1 = 0$ $\Delta = 5$ $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Or $x_1 < 0$, donc on a $\ell = x_2 = \underbrace{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}_{\text{Nombre d'or}}$.

Exercice 13 :

1) $u_n = \begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$ pour tout $n \geq 0$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} u_n^2 + \frac{1}{2} - u_n$
$= g(u_n)$

avec $g(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} - x$

Objectif : on veux $g \geq 0$. $\Delta = 1 - \frac{4}{2(2)} = 0$

donc $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 \geq 0$

Donc $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 0 \Longrightarrow u_{n+1} \geq u_n$

$\Longrightarrow (u_n)$ croissante.

2) On suppose que $u_n \longrightarrow \ell$, donc converge.

$g(u_n) = u_{n+1} - u_n \xrightarrow[+\infty]{n} 0$

Or g est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc $g(u_n) \xrightarrow[\infty]{n} g(\ell)$

Par unicité (unique) de la limite : $g(\ell) = 0$ $\frac{1}{2}(\ell - 1)^2 = 0$

donc $\ell = 1$

3) $a \in [0, 1]$ Montrons que $u_n \leq 1$.

Preuve par récurrence : On pose P_n : "$u_n \leq 1$".

Initialisation :

P_0 : "$u_0 = a \leq 1$" vrai car $a \in [0, 1]$.

Hérédité : $n \in \mathbb{N}$, Supposons P_n vrai : $u_n \leq 1$.

(u_n) est croissante, donc $u_n \geq u_0 = a \geq 0$

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2}$. Or $0 \leq u_n \leq 1$, $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, 1]$.

Donc $u_n^2 \leq 1$.

Donc $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

P_{n+1} est vrai, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

(u_n) est croissante et majorée par 1 donc (u_n) converge.

4) On suppose $a > 1$.

On raissone par l'absurde.

On suppose que (u_n) converge, $u_n \longrightarrow \ell$

d'après 2), $u_n \to \ell = 1$

$u_0 = a > 1$ donc $u_0 > \ell$ ce qui est absurde.

Or $(u_n) \nearrow$, donc $u_n \geq u_0 = a > 1$.

$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $1 \geq a > 1$ ABSURDE.

Donc (u_n) diverge.

5) On suppose $a < 0$ $u_1 = \frac{|a|^2}{2} + \frac{1}{2} \geq 0$

Si $|a| \leq 1$, alors u_n converge vers 1.

Si $|a| > 1$, alors u_n diverge.