Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°1
13 Octobre 2014

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h30.

NB : *Ce sujet contient 5 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.* **Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.**
VEUILLEZ INSCRIRE VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE.

Exercice 1 Soit x un réel non multiple de 2π. Pour un entier naturel n, on considère la somme $T_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

(1) Calculer la somme $K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. 2 pts (**1 pour la formule de la somme géométrique, 1 pour la factorisation par le demi angle et l'utilisation de la formule d'Euler**)

$$K_n(x) = \frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}} = \frac{-e^{\frac{ix(n+1)}{2}}(e^{\frac{ix(n+1)}{2}} - e^{-\frac{ix(n+1)}{2}})}{-e^{\frac{ix}{2}}(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}})} = \frac{e^{\frac{inx}{2}} 2i\sin(\frac{x(n+1)}{2})}{2i\sin(\frac{x}{2})} = e^{\frac{inx}{2}} \frac{\sin(\frac{x(n+1)}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

(2) Exprimer $T_n(x)$ à l'aide de $\mathrm{Re}(K_n(x))$. 1 pt

$$T_n(x) = 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = 1+2\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)-2 = 2\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)-1 = 2\mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx})-1 = 2\mathrm{Re}(K_n(x))-1$$

(3) En déduire la valeur de $T_n(x)$ 0.5 pt

$$T_n(x) = 2\cos(\frac{xn}{2})\frac{\sin(\frac{x(n+1)}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} - 1$$

Exercice 2 Considérons le nombre complexe $m = \sqrt{3} + i$.

(1) Calculer le module et l'argument de m. 1 pt (**0.5 pour le module et 0.5 pour l'argument**)
$|m| = 2$ et $\arg(m) = \pi/6$

(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = m$ (où l'inconnue est z). On écrira le résultat sous la forme exponentielle. 1 pt

pour tout $k \in \{0,1,2\}, z_k = 2^{1/3}e^{i(\pi/18+2k\pi/3)}$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

(E_1) $z^6 = e^{i2k\pi}$ (On donnera les solutions sous forme trigonométrique) 1 pt (**remarque : nous avons oublié de préciser ce qu'est k, soyez souple dans la correction s'ils utilisent le meme k dans la formule**)
$|z^6| = 1 \Rightarrow$ et $\forall m \in \{0,1,2,3,4,5\}, z_k = e^{i\pi(k+m)/3} = e^{i\pi m/3}$

(E_2) $\quad z^4 = \dfrac{1}{1+i\sqrt{3}}$ $\qquad$ (On donnera les solutions sous forme trigonométrique) 2 pts (**0.5 pour le conjugué, 1 pour la forme exponentielle et 0.5 pour la formule**)
$|z^4| = 1/2 \Rightarrow$ et $\forall k \in \{0,1,2,3\}, z_k = 2^{-1/4}e^{-i(\pi/12+2k\pi/4)}$

(E_3) $\quad z^2-3+4i=0$ $\qquad$ (On donnera les solutions sous forme algébrique) 2 pts (**1 pour le système et 1 pour conclure**)
On a $z^2 = 3-4i$. On cherche donc les racines de $3-4i$ en posant le système vu en cours et on obtient les racines suivantes :
$z_1 = 2-i$ et $z_2 = -2+i$

Exercice 4
Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

1 pt a) $u_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{1-n} = \dfrac{2n^2(1-3/(2n)+1/n^2)}{-n(1-1/n)} = -2n\dfrac{1-3/(2n)+1/n^2}{1-1/n} \longrightarrow -\infty$,

1 pt b) $v_n = \sqrt{n^2+1}-n = \dfrac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \longrightarrow 0$

1 pt c) $w_n = \dfrac{1}{3+(-1)^n2^{-n}\log(n)} \longrightarrow \dfrac{1}{3}$ car $|(-1)^n2^{-n}\log(n)| \leqslant \dfrac{\log(n)}{2^n} \longrightarrow 0$

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n+2}, \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

(1) Montrer que $u_n > 0$, pour tout $n \geqslant 0$. 1 pt
Récurrence immédiate.

(2) 1 pt On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Montrer que sa limite est égale à

$$\alpha = -1+\sqrt{2}.$$

On résout $\alpha = \frac{1}{\alpha+2}$*, et donc* $\alpha^2+2\alpha-1=0$*. La seule racine positive est alors* $\alpha = -1+\sqrt{2}$.

(3) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, 2 pts

$$|u_{n+1}-\alpha| = \frac{|u_n-\alpha|}{(u_n+2)(\alpha+2)},$$

et en déduire que 1 pt

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|.$$

Comme $\alpha = \frac{1}{\alpha+2}$*, on a*

$$|u_{n+1}-\alpha| = \left|\frac{1}{u_n+2} - \frac{1}{\alpha+2}\right| = \frac{|u_n-\alpha|}{(u_n+2)(\alpha+2)},$$

u_n+2 *et* $\alpha+2$ *étant positifs. Comme* $u_n+2>2$ *et* $\alpha+2 = 1+\sqrt{2} > 1$*, on en déduit*

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|.$$

(4) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, 1 pt

$$|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0-\alpha|.$$

Par récurrence immédiate.

(5) Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. 0.5 pt
Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$*,* $1/2^n \to 0$*, et donc* $u_n \to \alpha$.