Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères
75270 Paris cedex 06

Licence L1 2009-2010

Mathématiques et Calculs 1

Contrôle Continu n°2 - 24/11/09

Durée : 01h30

Le sujet comporte une page. Il est composé d'un exercice et d'un problème indépendants. Il sera tenu compte de la rédaction et de la clarté des réponses. Chaque résultat doit être justifié. On pourra admettre le résultat d'une question non traitée. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice.

1) Représenter le plan complexe et placer les points A et B d'affixe $z_A = -1/3$ et $z_B = 1 + 2i$.
(Échelle conseillée : 6 cm pour 1 unité).

2) Soit M un point d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Exprimer la distance AM en fonction de z et z_A.

3) Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier z pour que le point M appartienne au cercle de centre A et de rayon 1 ? On note dans la suite $\mathcal{C}$ ce cercle.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = \dfrac{1}{27}$.
b) Représenter les solutions de cette équation dans le plan complexe.

5) a) Déterminer graphiquement lesquelles de ces solutions appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.
b) Prouver votre résultat par le calcul.

Problème.

On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \ln\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

Données : $e = \exp(1) \simeq 2,72$ et $e^{-1} = \exp(-1) \simeq 0,37$.

Partie I.

1) f est-elle continue ? Donner son domaine de dérivabilité.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

3) Donner le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites en 0 et en $+\infty$.

4) Représenter la courbe de f en faisant apparaître les tangentes horizontales et verticales.
(Échelle conseillée : 6 cm pour 1 unité).

5) En justifiant soigneusement, montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On notera encore f la fonction prolongée.

6) f est-elle dérivable en 0 ?

Partie II.

7) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0,2$ admet au moins une solution dans $[0, e^{-1}]$.
b) Déterminer graphiquement le nombre de solutions dans $\mathbb{R}^+$ de l'équation $f(x) = 0,2$.

8) Rappeler la valeur de $f(0)$ et $f(e^{-1})$. En déduire qu'il existe un réel $x_0 \in]0, e^{-1}[$ tel que $f'(x_0) = 1$.