Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, 2008-2009, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Examen du 9 janvier 2009
Durée 1 h 30

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont interdits.

Exercice 1 Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 + x^3 \cos(\frac{1}{x^2}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

(1) Calculer la limite de f en 0. En déduire que f est continue en 0, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en 0.

(3) Calculer la dérivée de f pour $x \neq 0$; montrer que f' n'est pas continue en 0 (pour cela on pourra considérer les suites $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ et $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}$).

Exercice 2

(1) Déterminer le rang de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) Calculer le déterminant de la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice M^{-1} existe-t-elle ?

(3) Mettre le système suivant sous forme matricielle et calculer ses solutions.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z & = & 1 \\ -x + 3y + 2z & = & 3 \\ 4x + y & = & 6 \end{cases}$$

(4) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2), de matrice M dans la base $\{1, X, X^2\}$. Calculer : $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$ et en déduire $f(1+X-X^2)$.

(5) Calculer $f(1+X)$ et $f(1-X)$ et écrire la matrice de f dans la base $\{1+X, 1-X, X^2\}$ (On ne demande pas de démontrer que $\{1+X, 1-X, X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$).

Exercice 3

(1) Soit a et b deux nombres réels et $M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \cos b \\ 0 & \sin a & \sin b \end{pmatrix}$.

Montrer que $\det M(a,\, b) = \sin(b{-}a)$. À quelles conditions la matrice $M(a,b)$ est-elle inversible ?

(2) On pose $D(a,b) = \det M(a,b)$. Donner le développement de limité de $D(2a+a^2, a+a^3)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0