Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Mathématiques et Calcul 1

Contrôle continu n°3 — 8 janvier 2019
durée: 2h30

Exercice 1.

(1) Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et de $v = 1 - i$.

$|u| = \dfrac{\sqrt{6+2}}{2} = \sqrt{2}$ et $u = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ donc $\arg u \equiv -\dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi)$.

$v = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $|v| = \sqrt{2}$ et $\arg v \equiv -\dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$.

(2) En déduire le module et l'argument de $\frac{u}{v}$.

$\left|\dfrac{u}{v}\right| = \dfrac{|u|}{|v|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ et $\arg\left(\dfrac{u}{v}\right) \equiv \arg u - \arg v \equiv -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{12} \quad (2\pi)$.

Exercice 2.

Trouver les racines complexes du polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$.

On remarque que $P(1) = 0$, donc on peut factoriser $X - 1$ dans P et obtenir

$$P = (X-1)(X^2 - 2X + 2).$$

Il reste donc à résoudre l'équation du second degré $z^2 - 2z + 2 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4.2 = -4 = (2i)^2$ et les solutions sont $\frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$.

L'ensemble des racines de P est donc $\{1, 1+i, 1-i\}$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{Arctan}(\cos x) - \pi}{\tan x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x) - \sin(x^2)}{x^3}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\ln(\operatorname{ch} x)}}{x}$

(1) Posons $f(x) = 4\operatorname{Arctan}(\cos x)$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -4\sin(x).\frac{1}{1+\cos^2 x}$. Or

$$\frac{f(x) - \pi}{\tan x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} . \frac{x}{\tan x},$$

avec $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0) = 0$ par définition de $f'(0)$ et $\frac{x}{\tan x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ puisque $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Conclusion: $\dfrac{4\operatorname{Arctan}(\cos x) - \pi}{\tan x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \times 1 = 0$.

(2) Quand $x \to 0$, on a

$$\begin{aligned} x\ln(1+x) - \sin(x^2) &= x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x^2 + o(x^3)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} - x^2 + o(x^3) \\ &= -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+x)-\sin(x^2)}{x^3} = -\dfrac{1}{2}$.

(3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geqslant 1$ donc $\ln \operatorname{ch} x \geqslant 0$ donc $\sqrt{\ln \operatorname{ch} x}$ est bien défini. Par ailleurs,

$$\sqrt{\ln(\operatorname{ch} x)} = \sqrt{\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} = \sqrt{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{|x|}{\sqrt{2}}\sqrt{1+o(1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{|x|}{\sqrt{2}}$$

donc $\dfrac{\sqrt{\ln(\operatorname{ch} x)}}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{|x|}{x\sqrt{2}}$, quantité qui n'admet pas de limite quand $x \to 0$ (la limite en 0^+ vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et la limite en 0^- vaut $-\frac{1}{\sqrt{2}}$).

Conclusion: $\frac{\sqrt{\ln(\operatorname{ch} x)}}{x}$ n'admet pas de limite quand $x \to 0$.

Exercice 4.

(1) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1+\exp(t)}$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\exp(t)} &= \frac{1}{2+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)} \\
&= \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{12}+o(t^3)\right)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{12}\right) + \left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^3 + o(t^3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{12}+\frac{t^2}{4}+\frac{2t^3}{8}-\frac{t^3}{8}+o(t^3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^3}{24}o(t^3)\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{t}{4}+\frac{t^3}{48}+o(t^3).
\end{aligned}$$

(2) Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+\exp(\frac{1}{x})}$. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ sa courbe représentative admet une asymptote dont on donnera l'équation, et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

En posant $t = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{48x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de f admet donc au voisinage de $+\infty$ une asymptote (droite horizontale) d'équation $y = \frac{1}{2}$, et la courbe représentative de f est, au voisinage de $+\infty$, en-dessous de son asymptote (car $-\frac{1}{4x} < 0$).

On peut aussi dire que la courbe représentative de f admet donc au voisinage de $+\infty$ une courbe asymptote d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x}$ (il s'agit d'une branche d'hyperbole) et la courbe représentative de f est, au voisinage de $+\infty$, au-dessus de son asymptote (car $\frac{1}{48x^3} > 0$).

Exercice 5. Étant donnés 3 nombres réels x_1, x_2, x_3, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = x_1 \cos(4t) + x_2 \cos(2t) + x_3.$$

(1) On suppose qu'il existe des valeurs de x_1, x_2 et x_3 telles que $f(t) = \cos^4(t)$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\}$. Écrire sous forme matricielle le système linéaire vérifié par les inconnues x_1, x_2 et x_3.

En identifiant $f(t) = \cos^4(t)$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\}$, on obtient

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
f(0) & = & \cos^4(0) & = & 1^4 & = & 1 & = & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & 0^4 & = & 0 & = & & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\
f\left(\frac{\pi}{4}\right) & = & \cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) & = & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 & = & \frac{1}{4} & = & - & x_1 & & & + & x_3
\end{array}$$

ce qui nous donne le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

(2) Déterminer les valeurs de x_1, x_2 et x_3 en résolvant le système linéaire de la question 1 par la méthode du pivot de Gauss.

On résout le système comme vu en cours :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \rightsquigarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \end{array}\right) \qquad L_2 \rightsquigarrow -\frac{1}{2} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \qquad L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{array}\right) \qquad L_3 \rightsquigarrow \frac{1}{2} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{array}\right) \qquad L_1 \rightsquigarrow L_1 - L_2 - L_3$$

La solution (unique) du système est donc $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{8}$.

(3) Retrouver le résultat de la question 2 en linéarisant $\cos^4(t)$ à l'aide de la formule d'Euler.

Par la formule d'Euler, nous avons

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Par ailleurs, la formule du binôme nous donne

$$(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a b^3 + b^4 = a^4 + 4a^4 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\cos^4(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2^4}\left(e^{4it}+4e^{2it}+6+4e^{-2it}+e^{-4it}\right) \\
&= \frac{1}{2^4}\left((e^{4it}+e^{-4it})+4(e^{2it}+e^{-2it})+6\right) \\
&= \frac{1}{2^4}\left(2\cos(4t)+8\cos(2t)+6\right) \\
&= \frac{1}{8}\cos(4t)+\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{3}{8},
\end{aligned}$$

ce qui correspond bien à la solution trouvée à la question précédente.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$.

(1) Trouver le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.
Pour que $f(x)$ soit défini, on doit avoir $x > 0$ pour que $\ln x$ soit défini, mais également $\ln x > 0$ (c'est-à-dire $x > 1$) pour que $\ln(\ln x)$ soit défini. On a donc $D_f =]1, +\infty[$.

(2) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer f'.
On a $f = g \circ h$, avec $h = \ln$ qui est bien dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et $g = \ln$ qui est bien dérivable sur $h(\mathcal{D}_f) =]0, +\infty[$. Conclusion: f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = h'(x).g'(h(x)) = \frac{1}{x}.\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}.$$

(3) À l'aide du théorème des accroissement finis, montrer que

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leqslant \frac{1}{k\ln k}.$$

Pour tout $k \geqslant 2$, la fonction f est continue sur $[k, k+1]$, dérivable sur $]k, k+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]k, k+1[$ tel que $\frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k} = f'(c)$, c'est-à-dire $\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) = \frac{1}{c\ln c}$. Or comme $\ln$ est croissante,

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \frac{1}{c\ln c} \leqslant \frac{1}{k\ln k},$$

d'où l'on déduit grâce à l'égalité précédente que

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leqslant \frac{1}{k\ln k}.$$

(4) En déduire que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

Si l'on somme pour $k = 2, 3, \ldots, n$ l'inégalité obtenue à la question 3, les termes centraux en $\ln(\ln k)$ se compensent dans la somme pour $k = 3, 4, \ldots n$ et il reste exactement

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

(5) En déduire un encadrement de $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$, puis un équivalent de u_n.

Que vaut $\lim_{n\to+\infty} u_n$?

L'inégalité précédente se réécrit

$$\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k},$$

ou encore

$$u_n + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{2\ln 2} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(2) \leqslant u_n.$$

On en déduit (en isolant les deux inégalités de cette double inégalité) que

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(2) \leqslant u_n \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(2) - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + \frac{1}{2\ln 2}.$$

De chaque côté, le terme qui s'ajoute à $\ln(\ln(n+1))$ est borné (car $\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \to 0$), donc négligeable devant $\ln(\ln(n+1))$ (qui tend vers l'infini) :

$$\ln(\ln(n+1)) + o(\ln(\ln(n+1))) \leqslant u_n \leqslant \ln(\ln(n+1)) + o(\ln(\ln(n+1)))$$

et en divisant par $\ln(\ln(n+1))$ on obtient

$$1 + o(1) \leqslant \frac{u_n}{\ln(\ln(n+1))} \leqslant 1 + o(1).$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{u_n}{\ln(\ln(n+1))} \to 1$, c'est-à-dire que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n+1)).$$

On peut alors remarquer (bonus) que

$$\ln(\ln(n+1)) = \ln\left(\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})\right) = \ln(\ln n + o(1)) = \ln\ln n + \ln(1+o(1)) \sim \ln\ln n,$$

et donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\ln n$ (qui est un équivalent plus simple que le précédent).

À partir de l'équivalent, ou bien de l'inégalité $\ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(2) \leqslant u_n$, on déduit directement que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 7. Soient a et b deux réels strictement positifs. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et les récurrences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}.$$

(1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation: $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ par hypothèse sur a et b

Hérédité: si $u_n > 0$ et $v_n > 0$, alors $u_n + v_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$, et de plus $\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} > 0$ donc $v_{n+1} > 0$.

On a donc montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.

(2) Exprimer $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que $v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

En réduisant au même dénominateur on obtient, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \\ &= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}. \end{aligned}$$

Le résultat obtenu est positif (le numérateur est un carré, le dénominateur est positif d'après la question 1), donc $v_{n+1} \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

(3) Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n et v_n. En déduire que (u_n) est décroissante.
On a, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$ avec $v_n - u_n \leqslant 0$ pour $n \geqslant 1$ (question 2), donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

(4) Montrer de même que (v_n) est croissante.
On a, pour tout $n \geqslant 0$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} - v_n = \frac{2u_n v_n - v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n},$$

et cette quantité est positive si $n \geqslant 1$ (question 2), donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

(5) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, puis qu'elles ont la même limite (notée L).
La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge. La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par u_1 (car $v_n \leqslant u_n \leqslant u_1$) donc converge. Si l'on appelle U et V les limites respectives, de $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ on tire en passant à la limite que $2U = U + V$, c'est-à-dire $U = V$.

(6) Exprimer $u_{n+1}v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n. En déduire l'expression explicite de L en fonction de a et b.
On a $u_{n+1}v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} . \dfrac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} = u_n v_n$, donc $u_n v_n = u_0 v_0 = ab$ (la suite est constante). En passant à la limite dans cette égalité, on obtient $L^2 = ab$, soit $L = \sqrt{ab}$.

(7) En déduire que $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ (inégalité des 3 moyennes).
Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers L, on a $L \leqslant u_1$. De même, comme $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et converge vers L, on a $v_n \geqslant v_1$. En remplaçant, dans l'inégalité $v_1 \leqslant L \leqslant u_1$ les termes u_1 et v_1 par leur expression en fonction de a et b, on obtient exactement

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 8. Soient $a_1, a_2, \dots a_n$ des réels tous distincts. On note $D = \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ et on considère l'espace vectoriel E des fonctions définies sur D. On considère également le polynôme $Q_0 = (X - a_1)(X - a_2)\dots(X - a_n)$.

(1) Quel est le degré de Q_0 ?
Le terme dominant de Q_0 est X^n, donc Q_0 est de degré n.

(2) Montrer que $F = \left\{ x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q_0(x)},\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
On a clairement $F \neq \emptyset$ et $F \subset E$. Par ailleurs, soient $f_1 = \frac{P_1}{Q_0}$, $f_2 = \frac{P_2}{Q_0} \in F$

et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, alors $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = \dfrac{\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2}{Q_0} \in F$ car $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \in \mathbb{R}_{n_1}[X]$ ($\mathbb{R}_{n_1}[X]$ est un espace vectoriel).
Conclusion: F est un sous-espace vectoriel de E.

(3) Montrer que F est de dimension n et exhiber une base de F.

Posons $f_i(x) = \frac{x^{i-1}}{Q_0(x)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On a clairement $f_i \in F$, et $(f_i)_{i \leqslant 1 \leqslant n}$ est par construction génératrice de F puisque $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}\left((X^{i-1})_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)$.

Par ailleurs, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$, alors
$$\forall x \in D, \quad Q_0(x) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1} = 0,$$
ce qui n'est possible que si $\alpha_i = 0$ pour tout i (un polynôme non nul ne peut avoir un nombre infini de racines).

Conclusion: $(f_i)_{i \leqslant 1 \leqslant n}$ est une famille libre (et génératrice de F), donc c'est une base de F, qui est donc de dimension n.

(4) Soit $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, où $b_i(x) = \dfrac{1}{x - a_i}$. Calculer, pour tout j, $\displaystyle\lim_{x \to a_j} (x - a_j) f(x)$.

Si $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i(x)$, alors
$$(x - a_j) b_i(x) = \frac{x - a_j}{x - a_i} \underset{x \to a_j}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \text{ (car on a alors } a_i \neq a_j) \end{cases}$$
Par addition des limites, on a donc $\displaystyle\lim_{x \to a_j} (x - a_j) f(x) = \lambda_j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$.

(5) En déduire que $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, puis que c'est une base de F.

De la question précédente, on déduit que si $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0$, alors $\lambda_j = 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$. Ceci montre exactement que $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.
Comme par ailleurs F est de dimension n et que les b_i sont des éléments de F (en effet $b_i(x) = \dfrac{P_i(x)}{Q_0(x)}$, avec $P_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} (X - a_j) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$), on en déduit que $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de F.

(6) Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que
$$\forall x \in D, \quad \frac{x^n}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x - a_i}.$$

Posons $g(x) = \dfrac{x^n}{Q_0(x)} - 1$. On a $g(x) = \frac{P(x)}{Q_0(x)}$, où $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (les termes en X^n se compensent). Par conséquent, $g \in F$ et comme $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de F, on peut trouver $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, c'est-à-dire
$$\forall x \in D, \quad \frac{x^n}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} - 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x - a_i}.$$