Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°2
Lundi 27 Novembre 2017

Correction et barème

Devoir noté sur 24 points

**Exercice 1** Sur 6 points

Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x}$ ; 2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x}$ ;

3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}$ ; 4) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln(x)\exp(-\frac{1}{x})$ ;

5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}$ ; 6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x}$ .

**Correction**

1) $\displaystyle\frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x}=\frac{x^3+\underset{x\to+\infty}{o}(x^3)}{x^5+\underset{x\to+\infty}{o}(x^5)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^2}\underset{x\to+\infty}{\to}0.$

2) $\displaystyle\frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x}=\frac{4x+\underset{x\to0}{o}(x)}{-x+\underset{x\to0}{o}(x)}\underset{x\to0}{\to}-4.$

3) $\displaystyle\frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}=\frac{\frac{\sin(2x)}{x}}{\frac{\tan(3x)}{x}}\underset{x\to0}{\to}\frac{2\sin'(0)}{3\tan'(0)}=\frac{2}{3}.$

- On peut aussi appliquer directement la règle de l'Hôpital, ce qui revient au même calcul.
- On peut aussi utiliser le fait que $\sin(2x)\underset{x\to0}{\sim}2x$ et $\tan(3x)\underset{x\to0}{\sim}3x$, d'où $\displaystyle\frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{2x}{3x}\underset{x\to0}{\to}\frac{2}{3}.$

4) En posant $y=\frac{1}{x}$, on obtient $\displaystyle\ln(x)\exp(-\frac{1}{x})=\ln\left(\frac{1}{y}\right)\exp(-y)=\frac{-\ln y}{\exp y}\underset{y\to+\infty}{\to}0$ par croissance comparée ($\ln y=o(y)$ et $y=o(\exp y)$ donc $\ln y=o(\exp y)$).

5) En posant $f(x)=(1+3x)^{\frac{1}{3}}$ on a $\displaystyle\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x}\underset{x\to0}{\to}f'(0)=3.\frac{1}{3}=1.$

6) Comme $\sqrt{1+x^2}-1\underset{x\to0}{\to}0$ et $\sin h\underset{h\to0}{\sim}h$, on a $\displaystyle\frac{\sin\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\frac{f(x)-f(1)}{x}$ avec $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, donc la limite vaut $f'(0)=0$.

Une autre solution : on pose $g(x)=\sin(\sqrt{1+x^2}-1)$ et on a $\displaystyle\frac{\sin\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x}=\frac{g(x)-g(0)}{x}\underset{x\to0}{\to}g'(0)$ avec $g'(x)=\frac{x}{1+x^2}.\cos(\sqrt{1+x^2}-1)$ et donc $g'(0)=0$.

**Exercice 2** Sur 5 points

On considère la fonction
$$f : x \longmapsto \mathrm{sh}(x) \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(1) Donner le domaine de définition $D_f$ de $f$. Justifier que $f$ est continue et dérivable sur $D_f$.
(2) Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0. On notera encore $f$ la fonction prolongée.
(3) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
(4) $f$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur de $f'(0)$.

**Correction**

(1) sh et arctan sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Par composition et produit de fonctions usuelles continues et dérivables sur leur ensemble de définition, $f$ est continue et dérivable sur $D_f$.
(2)
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \mathrm{sh}(x) \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$
car $\mathrm{sh}(0) = 0$ et arctan est bornée entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (théorème des gendarmes, ou produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0).
(3) Pour $x \neq 0$, $f$ est dérivable et on a :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{ch}(x) \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) + \mathrm{sh}(x) \times -\frac{2}{x^3} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \\ &= \mathrm{ch}(x) \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) - \mathrm{sh}(x) \times \frac{2}{x^3} \times \frac{x^4}{x^4+1} = \mathrm{ch}(x) \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2x\,\mathrm{sh}(x)}{x^4+1}. \end{aligned}$$
(4) Formons le taux d'accroissement entre 0 et $x \neq 0$:
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\mathrm{sh}(x) \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} \cdot \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
$$\text{Or } \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x - 0} = \mathrm{sh}'(0) = \mathrm{ch}(0) = 1$$
$$\text{et } \lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$
Donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{\pi}{2}$.

**Exercice 3** Sur 7 points

On considère l'application $f$ définie pour tout $x \in ]-4, +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{1}{\ln(x+5)}.$$

(1) Montrer que $f$ est strictement décroissante.

(2) Montrer que $f$ réalise une bijection de $]-4, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa réciproque que l'on notera $g$.

(3) Calculer la dérivée de $g$ en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque. Vérifier le résultat par le calcul direct de la dérivée de $g$.

(4) Montrer que pour tout $x > 0$,
$$-\frac{1}{5} < -\frac{1}{(x+5)\ln^2(x+5)} < 0$$
(on rappelle pour cette question que $\exp(1) < 5$, ce qui implique que $\ln(5) > 1$).

(5) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que
$$f(x) - f(y) < \frac{1}{5}(y - x) \qquad \text{pour tous } x, y \text{ tels que } y > x \geqslant 0.$$

**Correction**

(1) $x \mapsto \ln(x+5)$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]-4,+\infty[$, donc $f$ est dérivable sur $]-4,+\infty[$ et
$$\forall x > -4, \quad f'(x) = -\frac{\frac{1}{x+5}}{\ln^2(x+5)} = -\frac{1}{(x+5)\ln^2(x+5)} < 0$$
donc $f$ est strictement décroissante sur $]-4,+\infty[$.

(2) On calcule
$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} \frac{1}{\ln(x+5)} = +\infty, \quad \text{et}$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$
$f$ est continue, strictement décroissante donc $f$ réalise une bijection de $]-4,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Calcul de $g$ : soit $y > 0$.
$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{1}{y}\right) - 5$$
donc $g(y) = \exp\left(\frac{1}{y}\right) - 5$ pour tout $y > 0$.

(3) $g$ étant la fonction réciproque de $f$, on peut écrire pour tout $y > 0$:
$$g'(y) = \frac{1}{f'og(y)} = -(g(y)+5)\ln^2(g(y)+5) = -\exp\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}.$$
En dérivant directement l'expression $g(y) = \exp\left(\frac{1}{y}\right) - 5$, on trouve également
$$g'(y) = -\frac{1}{y^2}\exp\frac{1}{y}.$$

(4) $-\dfrac{1}{(x+5)\ln^2(x+5)} < 0$ a déjà été démontré plus haut (pour $x > -4$, donc valable pour $x > 0$) et $x > 0 \Rightarrow \ln^2(x+5) > \ln^2(5) > 1$ (car ln est croissante et $\ln(5) > 1$) et
$$x+5 > 5 \Rightarrow \frac{1}{(x+5)\ln(x+5)^2} < \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{(x+5)\ln(x+5)^2} > -\frac{1}{5}.$$

(5) Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $f$ entre $x$ et $y$ $(0 \leqslant x < y)$. La fonction $f$ est continue, dérivable sur $]-4,+\infty[$ donc continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$, donc il existe $c \in ]x,y[$ tel que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) > -\dfrac{1}{5}$ d'après 4), car $c > x \geqslant 0$.

On en déduit que $f(y) - f(x) > -\frac{1}{5}(y-x)$ et finalement $f(x) - f(y) < \frac{1}{5}(y-x)$.

**Exercice 4** Sur 6 points

On considère la fonction $f$ définie pour tout $x \geqslant 0$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$, ainsi que la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n+4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,4]$.
(2) Montrer que pour tout $x \in [0,4]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$.
(3) En déduire que pour tout $x \in [0,4]$,
$$|f(x) - f(4)| \leqslant \frac{3}{4}|x-4|,$$
puis que
$$|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 4|$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(4) Déduire de l'inégalité précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 4|,$$
puis que la suite $(u_n)$ converge vers une limite que l'on précisera.

**Correction**

(1) On montre la propriété par récurrence sur $n$ :
- Initialisation: $u_0 = 0 \in [0;4]$
- Hérédité : supposons $u_n \in [0;4]$; alors
$$0 \leqslant u_n \leqslant 4 \Rightarrow 4 \leqslant 3u_n + 4 \leqslant 16 \Rightarrow 2 \leqslant \sqrt{3u_n+4} \leqslant 4 \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

(2) Sur $[0,+\infty[$ la fonction $x \mapsto 3x+4$ est dérivable et strictement positive, donc comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et dérivable sur $]0,+\infty[$, par composition $f$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$.

Pour $x \geqslant 0$, on a $\sqrt{3x+4} \geqslant 2$ (la fonction $x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est croissante) donc $\dfrac{1}{\sqrt{3x+4}} \leqslant 1/2$ et par conséquent $f'(x) \leqslant \dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$. Comme par ailleurs $f'(x) > 0$, on en déduit que
$$\forall x \in [0,4], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}.$$

(3) Appliquons le théorème des accroissements finis à $f$ entre $x$ et 4, pour $x < 4$ : $f$ est continue sur $[0,4]$, dérivable sur $]0;4[$ donc il existe $c \in ]0,4[$ tel que $f(x) - f(4) = f'(c).(x-4)$, c'est-à-dire
$$\forall x \in [0,4[, \quad \frac{|f(x) - f(4)|}{|x-4|} = |f'(c)| \leqslant \frac{3}{4} \text{ d'après la question précédente,}$$
ou de manière équivalente $\forall x \in [0,4], \quad |f(x) - f(4)| \leqslant \dfrac{3}{4}|x-4|$.
En posant $x = u_n$ ($u_n \in [0,4]$ d'après la question 1), on a $f(u_n) = u_{n+1}$ donc on en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 4|.$$

(4) On montre la propriété demandée par récurrence :
- Initialisation : $|u_0 - 4| = \left(\frac{3}{4}\right)^0 |u_0 - 4|$;
- Hérédité : supposons la propriété vraie au rang $n$, c'est-à-dire $|u_n - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 4|$. Alors grâce à la question précédente, on obtient
$$|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 4| \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 4| = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} |u_0 - 4|.$$
Comme $0 \leqslant \frac{3}{4} < 1$, on en déduit que $|u_n - 4| \to 0$ donc $u_n \to 4$.