Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Mathématiques et Calcul : Contrôle continu n° 2
21 Novembre 2011

L1 : Licence Sciences et Technologies,
mention Mathématiques, Informatique et Applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2 . Durée : 1h30.

NB : *Ce sujet contient 4 exercices. Chaque résultat doit être démontré clairement.*

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^3-5x+6}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-3x+2}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\exp(x)-\exp(3)}{x^2-4x+3}\right)$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

1. Trouver le domaine de définition de f
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en zéro. On notera encore f le prolongement par continuité obtenu.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$
4. En étudiant le taux d'accroissement de f en zéro, montrer que la fonction f est dérivable en zéro et calculer $f'(0)$

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-2+\cos(x)$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(\pi)$. Que peut-on en déduire pour l'équation $f(x)=0$?
2. Calculer la dérivée de f. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution dans $[0,\pi]$, notée x_0
4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $F(x)=(x+x_0-2)(x-x_0)+\sin(x)-\sin(x_0)$. En étudiant les variations de la fonction F, montrer que $F\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4. Le but de l'exercice est d'étudier la bijection réciproque de la fonction tangente hyperbolique :

$$\begin{array}{rccc} \text{th}: & \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ & x & \to & \text{th}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{array}$$

.../...

1. Montrer que la fonction tangente hyperbolique est dérivable et strictement croissante. Déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. En déduire que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. On note Argth sa bijection réciproque.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.
4. Calculer la dérivée de la fonction Argth.
5. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\mathrm{Argth}(x) < \frac{x}{1-x^2}$$