Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Contrôle continu n^o 3

11 janvier 2010

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2 . Durée 2h 30.

Tout document est interdit.
Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont interdits.

Exercice 1. Donner les développements limités en 0,

1. à l'ordre 2 pour la fonction $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$.
2. à l'ordre 3, pour la fonction $g(x) = e^{\sin x}$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Vérifier que $u_n^2 - u_n - 1 \leq 0$ et en déduire que : $u_n \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \forall n \geq 0$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3.

1. Mettre le nombre complexe $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$ sous la forme : $z = \mathfrak{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z)$ et calculer $\bar{z}$.
2. Mettre le nombre complexe $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ sous forme trigonométrique et donner son conjugué.

Exercice 4.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction arctangente et où est-elle dérivable ?
2. Quelle est la dérivée de $\arctan x$? et que vaut $\arctan 1$?
3. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis que :

$$\forall a,, b \in \mathbb{R},\ a < b, \quad \frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$$

4. En choisissant des valeurs appropriées pour a et b, montrer que :
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

.../...

Exercice 5. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère la partie :

$$F = \{\vec{u} = (x, y, z) \mid x + 2y = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Donner une base de F.

Exercice 6.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{v_1} = (0,1,1,1)$, $\vec{v_2} = (1,0,1,1)$, $\vec{v_3} = (1,1,0,1)$, $\vec{v_4} = (1,1,1,0)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{v} = (1,1,1,1)$ sur cette base.

Exercice 7. Calculer le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

1. Soit la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
et D son déterminant.
   (a) Calculer D et montrer que M est inversible.
   (b) Inverser M par la méthode du pivot de Gauß et vérifier votre calcul en calculant MM^{-1}.
2. On considère l'application : $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par :
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + y + z, x + y + z)$$
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Calculer la matrice M_f de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$
   (c) Montrer que f est bijective et calculer la bijection réciproque.