Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Examen de 2e session

7 juin 2011

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 1. *Durée : 1h30*

Tout document est interdit.
Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont interdits.

Exercice 1. Effectuer les calculs suivants :

1. $(2+3i)(1-3i)$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ et du nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$
3. $\frac{2+3i}{1-3i}$

Exercice 2. Soit $a>0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & > & 0 \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que : $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$
2. Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 3. En utilisant un développement limité, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^3\arctan(x) - x^4}{\cos(x^2)-1}$$

Exercice 4. On considère les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\vec{e_1} = (1,1,1) \quad \vec{e_2} = (-1,1,0) \quad \vec{e_3} = (1,0,-1)$$

1. Montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (1,0,0)$ dans cette base.

Exercice 5. Montrer que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6.

1. Citer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arcsin(t) \end{array}$
   (a) Quelle est la dérivée de f ?
   (b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arcsin sur l'intervalle $[0,x]$ pour $x\in]0,1[$, démontrer l'inégalité :

$$\forall x \in]0,1[\quad \arcsin x \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$