Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Licence 1ère année, 2016, Mathématiques et Calcul 1 (MC1)

Feuille de TD n° 4 : Dérivabilité d'une fonction numérique

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrer chaque assertion correcte et donner un contre-exemple pour chaque assertion fausse.

(1) Une fonction continue en x_0 est dérivable en x_0.

(2) Une fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.

(3) Une fonction dérivable sur un intervalle I a une dérivée continue sur I.

(4) Si deux fonctions ont leurs dérivées égales sur un intervalle ouvert, alors elles sont égales sur cet intervalle.

(5) Si les nombres dérivés d'une fonction à gauche et à droite existent en un point, alors la fonction est dérivable en ce point.

(6) Si une fonction paire est dérivable, alors sa dérivée est impaire.

(7) Une fonction ayant sa dérivée paire est toujours impaire.

Exercice 2. Calculer $f'(x_0)$ en utilisant la définition du nombre dérivé dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x) = \sqrt{2+x}$ (2) $f(x) = x^3 + 3x$ (3) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ (4) $f(x) = |x|$.

Exercice 3. Calculer, lorsqu'elle est définie, la dérivée des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \sin(\cos x)$ (2) $f(x) = \exp(2x\ln(x))$ (3) $f(x) = \sqrt{1+x^2+2x^4}$

(4) $f(x) = \frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$ (5) $f(x) = x^2 \exp\left(-\frac{1}{2x^2}\right)$ (6) $f(x) = \tan(\sqrt{1-x^2})$

(7) $f(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)-1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)+1}$ (8) $f(x) = \ln(1+\sqrt{1+\cos x})$ (9) $f(x) = (1+x)^{x^2}$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

(1) Pour tout $x \neq 1$, donner une expression de $P_n(x)$ sous forme de fraction rationnelle.

(2) En déduire une expression sous forme de fraction rationnelle de la somme $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ pour tout $x \neq 1$.

Exercice 5. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \sin(x)$ (2) $f(x) = x^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, (3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

(4) $f(x) = \ln(1-x)$, (5) $f(x) = \frac{\exp(x)}{x}$ (6) $f(x) = x\exp(2x)$.

Exercice 6.

(1) Déterminer si les applications suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

(1) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leqslant -1, \\ -4x & \text{si} \quad x > -1. \end{cases}$ (2) $f(x) = e^{|x|}$ (3) $f(x) = x|x|$

(2) Déterminer les réels a et b pour que l'application suivante soit dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si} \quad x \geqslant 2, \\ (ax+b)^2 & \text{si} \quad x < 2. \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 8. Calculer les limites suivantes :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\exp(x)-\exp(2)}{x^2+x-6}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sin(1+x)}{x^2-x-2}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\exp(x)-1}$

Exercice 9. On considère l'application $f : \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[\longrightarrow \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$, $x \longmapsto \frac{2x+1}{3x+1}$

(1) Montrer que f est strictement décroissante.

(2) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ dans $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$. Déterminer sa réciproque, notée f^{-1}.

(3) Calculer la dérivée de f^{-1} en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque. Vérifier le résultat par le calcul direct de la dérivée de f^{-1}.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & \text{si} & x = 0, \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si} & x \neq 0. \end{array} \right.$

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

(2) Calculer l'expression des dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de f sur $\mathbb{R}^*$.

(3) Calculer $f'(0)$ à l'aide du taux d'accroissement, puis montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est continue.

(4) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ où P_n est un polynôme de degré $2n-2$ et dont le coefficient dominant vaut $n!$.

(5) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^{(n-1)}(x)}{x}$ existe et le calculer. En déduire que $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 11. Soit g une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ telle que $g(a) = g(b) = 0$. Soit $x_0 \in]a,b[$, et on pose $A = \frac{2g(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $A = g''(\alpha)$. *(Indication : on pourra étudier la fonction g_1 définie par $g_1(x) = g(x) - \frac{A}{2}(x-a)(x-b)$.)*

Exercice 12. Montrer les encadrements suivants à l'aide du théorème des accroissements finis :

(1) $\dfrac{1-\exp(-x)}{x} < 1$ pour $x > 0$, (2) $|\sin(x)| \leqslant |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$, (3) $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

Exercice 13. Le but de l'exercice est d'étudier la bijection réciproque de la fonction tangente.

(1) Montrer que la fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est dérivable et strictement croissante. Déterminer ses limites en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

(2) En déduire que tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On note arctan sa bijection réciproque.

(3) Calculer la dérivée de la fonction arctan.

(4) Montrer que, pour tout x non nul,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2} \qquad \left(\text{avec } \operatorname{sgn}(x) = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \right)$$

Exercice 14. Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

(1) Montrer que $x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$.

(2) On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y) - \alpha \ln x - (1-\alpha) \ln y$ De l'étude de f, déduire que pour tout α de $]0,1[$,

$$\alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y < \ln(\alpha\, x + (1-\alpha)\, y).$$

Interprétation géométrique ?

Exercice 15. Soit f une fonction définie sur $]a,b[$ et valeurs réelles. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

(1) Soit $x_0 \in]a,b[$ tel que $f'(x_0) = 0$, alors x_0 est un extremum local.

(2) Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Exercice 16.

(1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a,b[$ s'annulant en $n+1$ points distincts. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$. *(Indication : on procédera par récurrence.)*

(2) En déduire qu'il n'existe pas de polynôme P_n de degré $n-1$ dont la courbe représentative coupe plus de $(n+1)$ fois la courbe représentative de l'exponentielle. (*On posera $f(x) = e^x - P_n(x)$ et on raisonnera par l'absurde.*)