TD 3

Limites et continuité

Exercice 1

c) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-3}$ h est définie

$\sqrt{x^2+1} \neq 3 \iff x^2+1 \neq 9 \iff x \neq 2\sqrt{2}$ and $x \neq -2\sqrt{2}$

$x^2+1 \geq 0$ always true

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

$g : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}-3$ continue sur $\mathbb{R}$

$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}^*$

donc $h_1(x) \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-3}$ est continue sur D_h

$h(x)$ composée de fonctions continues $h(x) = f \circ g\,(x)$

$h_2(x)$ $x \longmapsto x$ continue sur $\mathbb{R}$ car fonct° polynomiale

$h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$ est continue sur D_h comme produit de 2 fonctions continues.

Exercice 2

a) $f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)$

f est définie ssi $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1+x+x^2 \geqslant 0 \end{cases}$

Soit $f_1 : x \longmapsto x^2+x+1$

$(E) : x^2+x+1 = 0$ donc f_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

$\Delta = -3 < 0$ et est de signe constant on a $f_1(0) = 1 > 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) > 0$ $\quad Df = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{(\sqrt{1+x+x^2} - 1)(\sqrt{1+x+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)} \right)$$

c) $g\,x : x \to \dfrac{x^2+2|x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

- 0^+ $\lim g(x) = \lim \dfrac{x^2+2x}{x} = \lim x + 2 = 2$

- 0^- $\lim g(x) = \lim \dfrac{x^2-2x}{x} = \lim x - 2 = -2$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{2} g(x)$ donc la limite en 0 de $g(x)$ n'existe pas.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = \lim_{+\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{x+1-x+4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}} = \lim_{+\infty} \frac{5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}} = 0$$

e) $\lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$f(x) = \dfrac{1+x-2}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{-(1-x)}{(1+x)(1-x)} = -1 \quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$

$g(x) = \begin{cases} x \mapsto f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ g(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

g est le polongement par continuité de f sur $\mathbb{R} / \{-1\}$

f) $x \longmapsto x + \sqrt{x}\,\sin(x)$

$x - \sqrt{x} \leqslant x + \sqrt{x}\sin(x) \leqslant x + \sqrt{x}$

$\rightarrow$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

$\rightarrow$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$

- Par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x}\sin(x) = +\infty$

Exercice 3

1- a) $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

Soit $f : y \longmapsto \ln(1+y)$ est continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$ en particulier en 0.

Et on a $f'(0) = \frac{\ln(1+y) - \ln(1)}{y - 0}$ $\forall y \in D_f,\ f'(y) = \frac{1}{1+y}$

$*$ $f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $\qquad f'(0) = 1$

On a donc $1 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$

b) Soit $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Soit $h(x) = \ln(g(x)) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ on pose $X = \frac{1}{x}$ on a $X \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$h(X) = \frac{\ln(1+X)}{X} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \iff h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \iff h(x) = \ln(g(x)) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

$g(x) \rightarrow 1$

2 - a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ Soit $f : x \longmapsto \sin x$, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0.

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \iff f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \iff \cos(0) = 1 = \lim \frac{\sin x}{x}$

b) $1+\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x-\sin x}} = 1+\dfrac{x-\sin x}{\sin x} = \dfrac{x}{\sin x}$

donc $\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \left(1+\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x-\sin x}}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} = \dfrac{\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$= \dfrac{\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

$\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[,\ \dfrac{1+\cos x}{\sin x} > 0$ so $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\cos x}{\sin x} > 0$

Par ailleurs, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},0[,\ \dfrac{1-\cos x}{\sin x} < 0$

so $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1+\cos x}{\sin x} < 0 = -\infty$

For conclure, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ n'existe pas.

* Pour que une fonction soit prolongeable en a il faut que les limites en a^- et a^+ soient identiques.

Ex $\lim\limits_{x\to a^-} f = b$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f = b$ alors f prolongeable en a

$\lim\limits_{x\to a^-} g = d$ et $\lim\limits_{x\to a^+} g = c$ $c \neq d$ g non prolongeable en a

<u>Exercice 4</u>

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$ $n\in\mathbb{N}$

$x^n - y^n = (x-y)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$

$\dfrac{x-1}{x^n-1} = \dfrac{x-1}{(x-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sum x^k} = \dfrac{1}{n}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ => utiliser la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\sin 3x}{\cancel{\sin 2x}\, 3x} \cdot \dfrac{2x}{\sin 2x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x} = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x$ On pose $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ $2y = \pi - 2x$

$\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{2} - y) = \dfrac{\sin(\pi/2 - y)}{\cos(\pi/2 - y)} = \dfrac{\cos(y)}{\sin(y)}$

$\lim\limits_{x\to 0} 2y = \dfrac{\cos(y)}{\sin(y)} = 2 \cdot \dfrac{y}{\sin(y)} \cdot \cos(y)$ Or $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{\sin y} = 1$

Ainsi la limite vaut 2 $\to \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x = 2$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin x$

Si f admet une limite l en $+\infty$, alors $\forall U_n \,\|\, \lim\limits_{x\to +\infty} U_n = +\infty$.

→ Méthode = Pour montrer que $f: x \mapsto x\sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$, on détermine deux suites U_n et V_n qui tendent vers $+\infty$ et telles que $f(U_n)$ et $f(V_n)$ n'ont pas la même limite.

- $U_n = n\pi$ Alors $f(U_n) = n\pi \cdot \sin(\pi) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $V_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ Alors $f(V_n) = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\sin(\pi/2 + 2n\pi) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi = +\infty$

$\lim f(U_n) \neq \lim f(V_n) \to 0 \neq +\infty$ on en déduit que f n'a pas de lim en $+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1 - \cos x} = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x} \times \dfrac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \dfrac{\sin x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \dfrac{\sin x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x} > 0$

$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

donc $\lim \dfrac{1 + \cancel{\sin} x}{\cancel{1 - \cos x}\ \sin^2 x} = +\infty$

$\lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{0} \dfrac{1}{x} = \varnothing$

Par ailleurs $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $\frac{1+\cos x}{\sin x} < 0$

donc $\lim\limits_{0^-} \frac{1+\cos x}{\sin x} = -\infty$

En conclusion $\lim \frac{\sin x}{1-\cos x} \neq \emptyset$

Exercice 5

1- a) $\lim\limits_{1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

c) $\lim\limits_{0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x} = \frac{\sin 4x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x$

$\lim\limits_{0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x} = \frac{4}{5}$ car $\lim\limits_{0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$ et $\lim \frac{5x}{\sin 5x} = 1$

d) $\lim\limits_{\pi/2} \frac{\cos x}{x-\pi/2} \Rightarrow$ $y = \frac{\pi}{2} - x$ $\frac{\cos x}{x - \pi/2} = \frac{\cos(\pi/2 - y)}{-y} = -\frac{\sin(y)}{y}$

Donc $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{y \to 0} -\frac{\sin y}{y} = -1$

e) $\lim\limits_{0} \frac{\tan x}{x}$

* ⇒ Rappel tangeante

D_f : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cos x = 0 \iff x = \pi/2$ ou $-\pi/2$ $[2\pi]$

$\iff x = \pi/2 \, [2\pi]$

$D\tan = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \cancel{2}k\pi\right\}$

tan est impaire et π périodique.

$\underset{x \to 0}{\frac{\tan x}{x}} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1}$ donc $\lim\limits_{0} \frac{\tan x}{x} = 1$

2- a) $\lim\limits_{+\infty} \lambda x + \sqrt{x^2+1}$

* Si $\lambda \geq 0$ alors $\lim\limits_{+\infty} \lambda x = +\infty$; $\lim \sqrt{x^2+1} = +\infty$
* Si $\lambda = 0$ alors $\lim\limits_{+\infty} \lambda x = 0$; donc $\lim \lambda x + \sqrt{x^2+1} = +\infty$
* Si $\lambda < 0$ alors $\lim\limits_{+\infty} \lambda x = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$, $\lim \lambda x + \sqrt{x^2+1} = \underline{FI}$

$\lambda x + \sqrt{x^2+1} = x\left(\lambda + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

$\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{+\infty} \lambda + \sqrt{1+1/x^2} = \lambda + 1$

* Si $\lambda + 1 > 0$, $0 > \lambda > -1$ $\lim = +\infty$
* Si $\lambda + 1 < 0$, $\lambda < -1$ $\lim = -\infty$
* Si $\lambda = -1$, FI du type $0 \cdot +\infty$

Determiner $\lim\limits_{+\infty} -x + \sqrt{x^2+1}$

$-x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{x^2+1} - x \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$

$= \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

Donc $\lim\limits_{+\infty} -x + \sqrt{x^2+1} = \lim \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

En bref $\lim \lambda x + \sqrt{x^2+1} = \begin{cases} \text{si } \lambda > -1, & +\infty \\ \text{si } \lambda = -1, & 0 \\ \text{si } \lambda < -1 & \end{cases}$

b) $\lim\limits_{2^+} \left(\dfrac{1}{x-\lambda} - \dfrac{1}{(x-2)^2}\right)$

- $\lim\limits_{2^+} \dfrac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$ $\lim\limits_{2^+} \dfrac{1}{x-\lambda} = \begin{cases} \text{si } \lambda \neq 2 & \dfrac{1}{2-\lambda} \\ \text{si } \lambda = 2 & +\infty \end{cases}$

- Si $\lambda \neq 2$ limite est $-\infty$
- Si $\lambda = 2$ On a une FI de forme $+\infty - \infty$

$$\lim_{2^+} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

Dans ts les cas, la limite vaut $-\infty$.

c) $\lim_{1^+} \dfrac{x^2+\lambda x+1}{x^2-1}$

$\lim_{1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = +\infty \quad \lim_{1^+} x^2+\lambda x+1 = 2+\lambda$

Exercice 6

1) $x^7 - x^2 + 1 = 0 \quad I = [-2;0]$

* → théorème des valeurs intermédiaires :

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$.

Pour tout y compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c)=y$.

On pose $f(x)=x^7-x^2+1$, $f(x)$ continue sur $[-2,0]$ car c'est une fonction polynomiale.

On veut prendre $y=0$.

$f(0) = +1 \quad f(-2) = -128-4+1 = -131 < 0$

Comme $f(-2)<0$ et $f(0)>0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]-2;0[$ tel que $f(c)=0$ soit $c^7-c^2+1=0$ donc l'équation admet bien une solution sur $[-2;0]$.

2) $\sqrt[3]{x^3+6x+1} - 3x = 2 \quad I = \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt[3]{x^3+6x+1} - 3x$.

On cherche a, b tels que 2 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (y

$$\lim_{2^+} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

Dans ts les cas, la limite vaut $-\infty$.

c) $\lim_{1^+} \frac{x^2+\lambda x+1}{x^2-1}$

$\lim_{1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$ $\quad \lim_{1^+} x^2+\lambda x+1 = 2+\lambda$

Exercice 6

1) $x^3-x^2+1=0 \quad I=[-2;0]$

* ⇒ théorème des valeurs intermédiaires :

Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$.

Pour tout y compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c)=y$.

On pose $f(x)=x^3-x^2+1$, $f(x)$ continue sur $[-2;0]$ car c'est une fonction polynomiale.

On veut prendre $y=0$.

$f(0)=+1 \quad f(-2)=-128-4+1=-131<0$

Comme $f(-2)<0$ et $f(0)>0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]-2;0[$ tel que $f(c)=0$ soit $c^3-c+1=0$ donc l'équation admet bien une solution a $[-2;0]$.

2) $\sqrt[3]{x^3+6x+1}-3x=2 \quad I=\mathbb{R}$

$f(x)=\sqrt[3]{x^3+6x+1}-3x$.

On cherche a, b tels que 2 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (y

$x \mapsto \sqrt[3]{x^3+6x+1}$ est continue en tant que composée de fonctions continues, donc f est continue en tant que somme de fonctions continues.

• Recherche des bornes :

$f(0) = \sqrt[3]{1} = 1 < 2$

$f(-1) = \sqrt[3]{-6} + 3 = 3 - \sqrt[3]{+6} < 2$

$f(-2) = \sqrt[3]{-19} + 6 = 6 - \sqrt[3]{19} = 6 - 3 \simeq 3 > 2$ car $\sqrt[3]{19} < \sqrt[3]{27} = 3$

On a $f(-2) > 2$ $f(-1) < 2$ et f continue sur $[-2; -1]$ donc d'après le TVI, il existe $c \in]-2; -1[$ || $f(c) = 2$. Donc l'équation admet une solution.

3) $\tan x = x \frac{3}{2}$ $I =]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[$

$f(x) = \tan x - \frac{3}{2}x$; $y = 0$. f est continue sur $[\pi/4 ; \pi/3]$ par somme de fonctions continues.

$[\pi/4 ; \pi/3] \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc D tan.

$f(\pi/4) = 1 - \frac{3\pi}{8} < 0$

$f(\pi/3) = \sqrt{3} - \pi/2 > 0$

On a $f(\frac{\pi}{4}) < 0$ et $f(\pi/3) > 0$ et f continue sur $[\pi/4 ; \pi/3]$ donc d'après le TVI, il existe $c \in]\pi/4 ; \pi/3[$ tel que $f(c) = 0$ soit $\tan c = \frac{3}{2}c$

4) $e^x - 3\sqrt{x} = 0$ $I = [0, 1]$

On pose $f(x) = e^x - 3\sqrt{x}$

f est continue en tant que somme de fonctions continues.

$f(0) = 1 > 0$ $f(1) = e - 3 < 0$

* $e \simeq 2,7$ Donc f est continue en tant que somme de f° continues sur $[0, 1]$, $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$. Donc d'après le TVI, il existe $c \in]0; 1[$ || $f(c) = 0$ soit que $f(c) = 0 = e^c - 3\sqrt{c} = 0$.

5) $x + \sin x = \dfrac{1}{x^2+4}$ $\quad I = [0, \pi]$

$x + \sin x - \dfrac{1}{x^2+4} = 0$

La fonction f est ~~définie~~ continue en tant que deux f
continues.

$f(0) = -1/4 \quad f(\pi) = \pi - \dfrac{1}{\pi^2+4} \geqslant \pi - 1 > 0$

$f(0) < 0$ et $f(\pi) > 0$ donc d'après le TVI, il existe $c \in]0,$
tel que $f(c) = 0$, soit $c + \sin c = \dfrac{1}{c^2+4} = 0$

Exercice 9

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

1) $P(-1) = -1 \quad P(1) = 1$

P est continue sur $]-1, 1[$ car $P(x)$ est une fonction p
$P(-1) < 0$ et $P(1) > 0$ donc d'après le TVI, $\exists\, c \in]-1, 1[$ (

2) On essaye d'appliquer le TVI.

$P(0) = 2 \quad P(0) > 0$ et $P(1) \geqslant 1$

Donc on ne peut pas appliquer le TVI et ne pas répondre
question.

$\rightarrow$ tableau de variat° pour conclure

$P'(x) = 3x^2 - 4x$
$\quad = x(3x - 4)$

	0	1
P'	−	
P	2 ↘	1

Donc P ne s'annu
sur $[0, 1]$

Exercice 10

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$

$$\left.\begin{array}{l} P(0) = 1 \\ P(1) = -1 \end{array}\right\} \text{ D'après TVI, } c \in [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{l} P(-1) = -7 \\ P(0) = 1 \end{array}\right\} \text{ D'après TVI, } c \in [-1,0]$$

$$\left.\begin{array}{l} P(4) = -7 \\ P(5) = 11 \end{array}\right\} \text{ D'après TVI, } c \in [4,5]$$

Les valeurs de c tq $P(c) = 0$ sont comprises entre $[0,1]$, $[-1,0]$ et $[4,5]$

Le polynôme $Q(x) = P(x) + 7$
$= x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ s'annule en -1, 2 et 4.

Exercice 11

$f [a,b] \to [a,b]$ continue

1) On pose $g(x) = f(x) - x$ est un point fixe de f.

$f(c) = c \Rightarrow f(c) - c = 0 \to g(c) = 0$

- f admet un point fixe ssi la fonction g s'annule sur l'intervalle $[a,b]$.
- f admet une valeur c dans $[a,b]$ ssi $a < b$, $f(a) < f(b)$ et $f(a) < f(x) < f(b)$

$g(a) = f(a) - a$ et $g(b) = f(b) - b$

Ainsi $c \in [a, b]$ avec $f(a) - a < f(c) - c < f(b) - b$

* Par hypothèse : $f(a) \in [a, b]$, $f(a) \geq a$ donc $g(a) = f(a) - a \geq 0$

$f(b) \in [a, b]$, $f(b) \leq b$ donc $g(b) = f(b) - b \leq 0$

TVI → la fonction g continue en tant que somme de deux fonctions continues et $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$ donc d'après le TVI, $\exists\, c \in [a, b] \,\|\, g(c) = 0$

⚠ TVI avec inégalités larges → le $c \in [a, b]$ ($c \geq a$ et $c \leq b$)

2) On suppose que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ $\forall x \neq y$ dans $[a, b]$.

On dit que f est contractante.

→ Montrons que f admet un seul pt fixe

- d'après 1), il y a au moins un pt fixe, montrons qu'il n'y en a qu'un.

Preuve par l'absurde

Supposons que f admet 2 pts fixes $c_1 \neq c_2$. $|f(c_1) - f(c_2)| < |c_1 - c_2|$ or c_1 et c_2 sont des points fixes $\Rightarrow |f(c_1) - f(c_2)| = |c_1 - c_2| < |c_1 - c_2|$ ← impossible !

f a donc un unique point fixe.

Exercice 12

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $\quad]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

$f : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$

1) f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \longmapsto \sin x$ est continue sur $]0, +\infty[$

$x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ est continue sur $]0, +\infty[$

donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonct° continues.

2) la fonction f est prolongeable par continuité en $x=0$ ssi f admet une limite finie quand $x \to 0$

Etudions $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^n} \Rightarrow 0^+$ car f non def sur négatifs.

→ Remarque : Etude d'une limite avec un paramètre α ou β.

$$\lim_{x \to 0^+} x^\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta > 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \\ +\infty & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$$

* Si $\alpha < 0$, alors

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{0^+} \sin x = 0 \\ \lim\limits_{0^+} x^\alpha = +\infty \end{array}\right\} \lim_{0^+} \frac{\sin x}{x^n} = 0$$

* Si $\alpha = 0$ $\qquad \lim \frac{\sin x}{x^n} = 0$

* Si $\alpha > 0$ alors,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{0^+} \sin x = 0 \\ \lim\limits_{0^+} x^\alpha = 0 \end{array}\right\} \text{FI.}$$

On sait que $\lim\limits_{0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\to \frac{\sin x}{x^\alpha} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \frac{\sin x}{x} \cdot x^{1-\alpha} \quad \cancel{\lim}$$

$$\lim_{0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{0^+} x^{1-\alpha} = \begin{cases} \alpha > 1, & +\infty \\ \alpha = 1, & 1 \\ \alpha < 1, & 0 \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{0^+} \frac{\sin x}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1 \\ \boxed{1, \quad \alpha = 1} \\ \boxed{0, \quad \alpha < 1} \end{cases}$

Conclusion : f prolongeable par continuité en 0 ssi $\alpha \leq 1$
et alors $f(0) = 1$ si $\alpha = 1$ $f(0) = 0$ si $\alpha < 1$.

Exercice 15

$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

1) $U_n = \frac{1}{2\pi(n+1)}$ et $V_n = \frac{1}{2\pi(n+\frac{1}{4})} = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$

$f(U_n) = \sin(2\pi(n+1)) = 0$
$f(V_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

2) Conséquences sur la limite de f en 0^+.
Raisonnement par contraposée :
Rappel → Si f admet une lim ℓ en 0 alors $\forall$ suite U_n qui tend vers
la suite $f(U_n)$ tend vers ℓ.

Ici, V_n et U_n tendent vers 0 et $\lim f(U_n) = 0$ et $\lim f(V_n$
donc $\lim f(U_n) \neq \lim f(V_n)$. Ainsi f n'admet pas de li
quand $x \to 0$.

Exercice 13

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^{1/x}$

$* \; a^n = e^{n\ln a}$

$x^{1/x} = e^{1/x \cdot \ln x}$

1) $x \mapsto 1/x$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$x \to \ln x$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto \exp(x)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$\frac{1}{x} \ln x$ continue par produit de fonctions continues.

$e^{\frac{1}{x} \ln x}$ continue par composée de fonctions continues.

2) f est prolongeable par continuité en 0^+ ssi f admet une limite finie quand $x \to 0^+$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{0^+} \ln x &= -\infty \\ \lim_{0^+} 1/x &= +\infty \end{aligned}\right\} \text{ par produit } \lim_{0^+} = -\infty$$

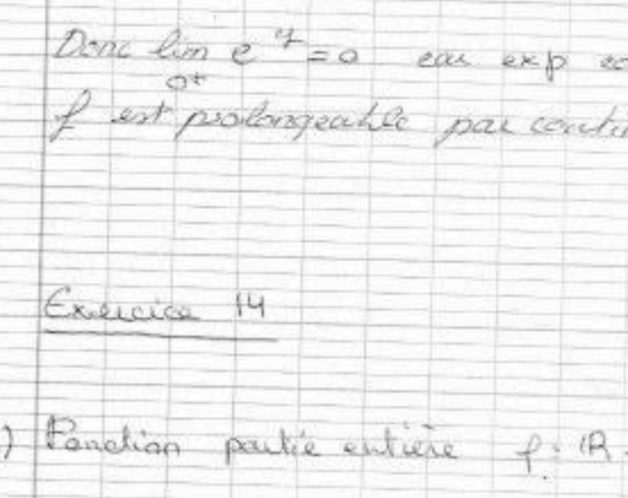
Donc $\lim_{0^+} e^{f} = 0$ car exp continue.

f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0

Exercice 14

1) Fonction partie entière $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
$x \to \lfloor x \rfloor$

$\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 1{,}2 \rfloor = 1$, $\lfloor -2{,}7 \rfloor = -3$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor e \rfloor = 2$



f est continue sur $\mathbb{R} / \{\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{R} / \{\mathbb{Z}\} = \cup \,]n, n+1[$

Sur l'intervalle $]n, n+1[$ $f(x) = n$ est une fonction constante donc elle est continue.

continue à gauche $= n^-$

continue à droite $= n^+$

gauche $g(n)=n \quad \forall x \in \,]n-1, n[$

$g(x) = n-1 + (x-(n-1))^2$

$\lim\limits_{n^-} g(x) = n-1+(x-(n-1))^2 = n-1+1^2 = n = g(n)$

donc g continue à gauche en $x=n$ -

$\forall n \in \mathbb{Z}$, g est continue à droite et à gauche au point $x=n$,

donc g est continue sur $\mathbb{R}$ -

Exercice 16

1)

2) f, g continues
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)$

On introduit la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$
Alors $\forall x \in \mathbb{Q},\ h(x) = 0$
De plus, h est continue en tant que somme de fonctions continues.
Donc d'après 1) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 0,\ f(x) - g(x) = 0$ donc $f(x) = g(x)$.

→ Un exemple de fonctions non continues et différentes entre rationnels et irrationnels.

$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \neq \mathbb{Q} \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \ln|x| & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 17

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \| \ f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Q° = Déterminer toutes les fonctions f vérifiant ces propriétés
ex = $f(x) = x,\ f(x) = -x,\ f(x) = 0,\ f(x) = ax \quad a \in \mathbb{R}$

1) - Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) = an$, $a \in \mathbb{R}$.
On pose $a = f(1)$.
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = an$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : $f(n) = an$.

Initialisation :

$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

On suppose que P_n est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, on montre que P_{n+1} est vraie.

$f(n+1) = f(n) + f(1)$

Par hypothèse de récurrence

$f(n) = an$ et par ailleurs $f(1) = \cancel{f(a)}\ a$

$f(n+1) = f(n) + f(1) = an + a = a(n+1)$

Ainsi on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$

. Montrons que f est impaire.

fonction impaire $f(-x) = -f(x)$

fonction paire $f(x) = f(-x)$

$\rightarrow f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$

On sait que $f(0) = 0$

$f(x) + f(-x) = 0$ donc $f(-x) = -f(x)$

Donc si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (n entier négatif) $n = -|n|$

Alors $f(n) = f(-|n|) = -f(|n|) = -a|n| = (-a|n|) = a|-n| = an$

Donc $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ $f(n) = an$.

De plus, on a déjà vu, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$ donc $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = an$

2) Montrons que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$

Soit $x \in \mathbb{Q}$, alors x s'écrit $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$

On utilise $xq = p \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$

$f(xq) = f(p) = ap = axq$

$f(xq) = (x + (q-1)x) = f(x) + f((q-1)x)$

$f(xq) = f(x) + f(x) + f(x) \dots + f(x) = q \cdot f(x)$

On a donc montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f(qx) = aqx \\ \cdot\ f(qx) = q \cdot f(x) \end{array}\right\} \quad q f(x) = aqx \Rightarrow f(x) = ax$$

· Montrer que $f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Par exercice 16 :

$f(x)$ et $x \to ax$ continues et $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$

Donc par d de $\mathbb{Q}$ (ex 14) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

3) Fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues // $g(x+y) = g(x)g(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Analyse : Soit g une fonction vérifiant ces propriétés

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$, $y = x$

$g(x+x) = g(x)g(x) = (g(x))^2$

~~$g2x = (g(x))^2 \geq 0$~~

$g(x) = g\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$

1^er cas

Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $g(x_0) = 0$.

Montrons qu'alors $g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = g((x - x_0) + x_0) = g(x - x_0)\underbrace{g(x_0)}_{=0} = 0$$

la seule fonction possible est la fonction nulle.

2^{nd} cas

Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$
Alors la fonction $h(x) = \ln(g(x))$ est bien définie et continue (composée)
De plus $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$h(x+y) = \ln(g(x+y)) = \ln(g(x) \cdot g(y)) = \ln(g(x)) + \ln(g(y))$$
$$= h(x) + h(y)$$

Donc h est continue et vérifie $h(x+y) = h(x) + h(y)$.
Il existe $a \in \mathbb{R}$ // $h(x) = ax$. Donc $g(x) = \exp(h(x)) = e^{ax}$

$\rightarrow$ les seules fonctions continues sur $\mathbb{R}$ //
$\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y) = g(x)g(y)$
sont les fonctions : - nulle
- de la forme $g(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$.

Teaser g est un morphisme entre le groupe $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$