Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Mathématiques et Calcul 1

Contrôle continu n°3 — 10 janvier 2018

durée: 2h30

Tout document interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même prévus à titre d'horloge, sont également interdits.

MERCI DE BIEN INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE

On rappelle les développements limités suivants. Ils pourront être utilisés au cours de ce contrôle continu. Ils sont donnés au voisinage de 0 (n est un entier positif quelconque).

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

Les 7 exercices sont indépendants.

Exercice 1 Calculer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x) - e^x}{x^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}(2x) - \cos(2x)}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{n^{10} - 10^n + n!}{\mathrm{ch}(n)}$

Exercice 2 On considère la fonction f définie par : $f(x) = (1-5x)e^{-2x}$

(1) Donner le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

(2) En déduire sans calcul les valeurs de $f'(0)$ et $f''(0)$.

(3) Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse 0.

(4) Quelle est la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la tangente T ?

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0 et de u_1 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = u_{n+1} - u_n \quad$ et $\quad w_n = 2u_{n+1} + u_n$.

(1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Exprimer v_n en fonction de n, u_0 et u_1.

(2) Montrer que (w_n) est une suite constante. Exprimer w_n en fonction de u_0 et u_1.

(3) En calculant $-2v_n + w_n$ de deux façons différentes, exprimer u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

(4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer S_n en fonction n, u_0 et u_1.
Pour quelles valeurs de u_0 et u_1 la suite (S_n) admet-elle une limite finie ? Lorsque c'est le cas, exprimer cette limite en fonction de u_0.

Exercice 4

(1) (a) Déterminer les nombres complexes u tels que $u^2 = 4i - 3$.
(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - z + 1 - i = 0$.

(2) (a) Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes $-i$ et $1 + i$.
(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes :
(i) $z^3 = 1 + i$.
(ii) $z^3 = -i$.

(3) Grâce aux questions précédentes, déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^6 - X^3 + 1 - i$. Indiquer (en justifiant la réponse), pour chaque racine, son ordre de multiplicité (c'est-à-dire préciser s'il s'agit d'une racine simple, double, triple, etc.)

Exercice 5 On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \ln^2(1 + x)$.

(1) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.

(2) En utilisant l'inégalité : $\forall x \geqslant 0,\ \ln(1 + x) \leqslant x$, montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2x}{1 + x}.$$

(3) En déduire que $\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant 2$.

(4) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x \geqslant 0, \quad \ln^2(1 + x) \leqslant 2x$.

Exercice 6 On considère le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ et deux vecteurs $\vec{u} = (2, 1, 0)$ et $\vec{v} = (-3, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que $F = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ (autrement dit, que F est l'espace vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

(2) Déterminer une base de F et la dimension de F.

(3) Soit $G = \{(a, 2a, 3a),\ a \in \mathbb{R}\}$. Justifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(4) Prouver que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$).

Exercice 7

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3.

(1) Montrer que $A^3 - A = 4I_3$.

(2) En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

(3) Calculer de nouveau A^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.