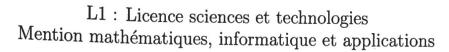


## Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°2 Lundi 14 Novembre 2016



Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Ce sujet contient 4 exercices. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

# INDIQUEZ VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE!

### Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 4.$$

Déterminer le domaine de continuité de f.

(%) Calculer

$$f(0)$$
 et  $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ .

En déduire que l'équation f(x) = 0 possède au moins une solution dans  $\mathbb{R}_+$ .

Montrer que cette solution est unique.

#### Exercice 2

En utilisant par exemple la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes  $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}, \quad n\in\mathbb{N}_*.$   $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}, \quad n\in\mathbb{N}_*.$   $\lim_{x\to 1} \frac{x-2}{\ln^2(x-1)}.$   $\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e^{2x}}{x}.$   $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x+\sin x}.$ 

Page 
$$1/2$$
  $3im 9$   $y \Rightarrow 0$   $y$ 

### Exercice 3

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  de f et montrer que f est continue sur  $\mathcal{D}_f$ .

Montrer que f est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}$ . On note encore f la fonction prolongée.

 $\nearrow$  Montrer que f est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et calculer sa dérivée.

(4) Montrer que f est dérivable en 0. (5) Est-ce que f' est continue en 0 ?

## Exercice 4

On considère l'application  $f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow ]-2, +\infty[$  définie par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3.$$

(4) Montrer que f est strictement décroissante.

Montrer que f réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $]-2,+\infty[$  et déterminer sa réciproque qu'on notera g.

Calculer la dérivée de g en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque. Vérifier le résultat par le calcul direct de la dérivée de g.

Montrer que pour tout x > 0,

$$-\frac{1}{3} < -\frac{1}{(x+3)\ln^2(x+3)} < 0$$

(on rappelle pour cette question que  $\exp(1) < 3$ , ce qui implique que  $\ln(3) > 1$ ).

(X) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$g(x) - g(y) < \frac{1}{3}(y - x) \quad \text{pour tout } y > x > 0.$$

$$0 \quad \text{Secit} \quad \text{que } \{(4) - \{(n) = \{(4)(n - x)\}\}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{(n+3)(n+3)} \quad \frac{(n+3)(n+3) + 2}{(n+3)(n+3)} = 0.$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{(\lambda+3) \ln^{2}} = -\frac{(\lambda+3) \ln^{2}(1+3)}{3(\lambda+3) \ln^{2}(1)} \leq 0.$$