Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Examen de 2^{e} session

8 juin 2010

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 1. *Durée : 1h30*

Tout document est interdit.
Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont interdits.

Exercice 1. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par la relation : $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{1+3\,u_{n-1}}$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer que u_n est positif quel que soit $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Calculer $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Exercice 2.

1. Donner une développement limité à l'ordre 4 au voisinage de zéro, pour la fonction : $x \longmapsto e^x$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 pour la fonction
$$f \;: x \longmapsto f(x) = e^x + e^{-x}$$
3. Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} - 1\right)$$

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux familles de vecteurs suivantes :

1. $\vec{u_1} = (0,1,3), \vec{u_2} = (2,0,-1),\ \vec{u_3} = (2,0,1)$
2. $\vec{v_1} = (1,2,3),\ \vec{v_2} = (-2,3,1),\ \vec{v_3} = (0,7,7)$

Ces deux familles sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 4. Monter que la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est inversible et calculer son inverse.

Exercice 5. Soit le nombre complexe $z = i\left(\dfrac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right)$.

1. Pourquoi doit-on avoir : $\alpha \neq 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$?
2. Montrer que z est un nombre réel.

Exercice 6.

1. Citer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f \;:\; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arcsin(t) \end{array}$
   (a) Quelle est la dérivée de f ?
   (b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arcsin sur l'intervalle $[0,x]$ pour $x \in]0,1[$, démontrer l'inégalité :
$$\forall x \in]0,1[\quad \arcsin x \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$