Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Contrôle continu n° 3

janvier 2013

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 2h 30.

Tout document est interdit.
Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont interdits.

Exercice 1. *Fonctions usuelles, développements limités.*

1. Rappeler le domaine de définition, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, ainsi que la dérivée de la fonction $\arctan x$.
2. (a) Calculer le développement limité de la fonction $\arctan x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0, **sans utiliser la formule de Taylor**.
   (b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Exercice 2. *Fonctions, suites.*

1. Enoncer le théorème des accroissements finis *(on n'oubliera pas de donner toutes les hypothèses avec précision).*
2. Prouver que pour tout entier naturel $n \neq 0$:
$$\frac{1}{n^2} \leq \arctan(n) - \arctan(n-1) \leq \frac{1}{1+(n-1)^2}$$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$.
   (a) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Déduire de la question 2. que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \arctan(n)$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{\pi}{2}$.
   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier *(on ne demande pas de calculer la limite).*

Exercice 3. *Nombres complexes.*

1. Écrire le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le nombre $(1+i\sqrt{3})^n$ est-il un réel positif ?
2. Calculer les racines carrées du nombre $z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3. Linéariser $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

Exercice 4. *Matrices, systèmes linéaires.*

1. Soit les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer leur déterminant. Ces matrices sont-elles inversibles ?

   (b) Calculer leur inverse si cela est possible.

2. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y + 2z & = & 1 \\ x + y + 3z & = & 2 \\ 2y + 3z & = & 3 \end{array} \right.$$

   Écrire ce système sous forme matricielle et calculer sa solution.

Exercice 5. *Espaces vectoriels.*
On considère les deux systèmes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\vec{v}_1 = (1,\, 3,\, -2,\, 2) \quad \vec{v}_2 = (2,\, 7,\, -5,\, 6) \quad \vec{v}_3 = (1,\, 2,\, -1,\, 0)$$
$$\vec{w}_1 = (1,\, 3,\, 0,\, 2) \quad \vec{w}_2 = (2,\, 7,\, -3,\, 6)$$

On pose : $F = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1,\, \vec{v}_2,\, \vec{v}_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(\vec{w}_1,\, \vec{w}_2)$

1. La famille $\{\, \vec{v}_1,\, \vec{v}_2,\, \vec{v}_3 \,\}$ est-elle libre ? Si non, donner une relation de dépendance linéaire entre ces trois vecteurs. En déduire une base de F.
2. Montrer que la famille $\{\, \vec{w}_1,\, \vec{w}_2 \,\}$ est une base de G.
3. Calculer $v_1 - w_1$; en déduire que la famille $\{\, \vec{v}_1,\, \vec{v}_2,\, \vec{w}_1,\, \vec{w}_2 \,\}$ est liée.
   Montrer que $\{\, \vec{v}_1,\, \vec{v}_2,\, \vec{w}_1,\, \vec{w}_2 \,\}$ engendre $F + G$ et en extraire une base.
4. Soit $E = \{\, (x_1,\, x_3,\, x_3,\, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \,\}$

   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Donner une base de E.
5. Montrer que $F + G = E$. La somme est-elle directe ? Calculer la dimension de $F \cap G$.