Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°1
12 Octobre 2015

L1 : Licence sciences et technologies
Mention mathématiques, informatique et applications

NB : Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

INDIQUEZ VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE!

Exercice 1

1) Ecrire sous la forme exponentielle les nombres complexes $(1+i)$ et $(1-i)$

2) Montrer que le nombre complexe Z défini par $Z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ vérifie $Z = 2$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : (on donnera les solutions sous forme algébrique)

(E_1) $z^2 + \sqrt{2}z - i = 0$

(E_2) $z^4 - 8z^2 + 25 = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (on donnera les solutions sous forme exponentielle)

(E_3) $(z^5 - 1)(z^3 + 8i) = 0$

Exercice 3

On cherche à calculer pour $a, b \in \mathbb{R}$, $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \cos(a + kb)$

On note $Z = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} e^{i(a+kb)}$

1) Montrer que $Z = S + iT$ avec $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \sin(a + kb)$.

2) Montrer que $Z = e^{i(a + \frac{nb}{2})} \left(2\cos\left(\dfrac{b}{2}\right)\right)^n$

3) En déduire que $S = 2^n \cos^n \left(\dfrac{b}{2}\right) \cos\left(a + n\dfrac{b}{2}\right)$

Exercice 4

1) Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

a) $u_n = \sqrt{n^2 e^{2n} + 2} - ne^n$ b) $v_n = \dfrac{\cos n - n^3}{1 + n^2 \log n + n^3}$ c) $w_n = \dfrac{3^n + 2n^2}{2^n + 3n^3}$.

2) Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2 - 5^k}{3^k}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$.

Exercice 5 Soit $a > 0$. On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{5}u_n^2 + \dfrac{6}{5} \\ u_0 &= a. \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 0$.

2) Dans le cas où on suppose que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs possibles de ℓ.

3) **On suppose que** $0 < a < 2$ **:**
Montrer par récurrence sur n que $u_n < 2$, puis montrer que la suite est croissante. En déduire qu'elle converge et donner sa limite.

4) **On suppose que** $a > 3$ **:**
Montrer par récurrence sur n que $u_n > 3$, puis montrer que la suite est croissante. En déduire que dans ce cas, la suite tend vers $+\infty$.