Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris

Mathématiques et Calcul 1

Contrôle continu n°2 — 27 novembre 2017
durée: 1h30

Tout document interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même prévus à titre d'horloge, sont également interdits.

MERCI DE BIEN INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE

Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice 1.

Déterminer les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x}\,; \qquad 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x}\,;$$

$$3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}\,; \qquad 4)\ \lim_{x\to 0^+} \ln(x)\,\exp(-\frac{1}{x})\,;$$

$$5)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}\,; \qquad 6)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x}\,.$$

Exercice 2.

On considère la fonction

$$f : x \longmapsto \operatorname{sh}(x)\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(1) Donner le domaine de définition D_f de f. Justifier que f est continue et dérivable sur D_f.

(2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction prolongée.

(3) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

(4) f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur de $f'(0)$.

Exercice 3. On considère l'application f définie pour tout $x \in]-4,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x+5)}.$$

(1) Montrer que f est strictement décroissante.

(2) Montrer que f réalise une bijection de $]-4,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$, puis déterminer sa réciproque que l'on notera g.

(3) Calculer la dérivée de g en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque. Vérifier le résultat par le calcul direct de la dérivée de g.

(4) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$-\frac{1}{5} < -\frac{1}{(x+5)\ln^2(x+5)} < 0$$

(on rappelle pour cette question que $\exp(1) < 5$, ce qui implique que $\ln(5) > 1$).

(5) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$f(x) - f(y) < \frac{1}{5}(y-x) \quad \text{pour tous } x, y \text{ tels que } y > x \geqslant 0.$$

Exercice 4. On considère la fonction f définie pour tout $x \geqslant 0$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$, ainsi que la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,4]$.

(2) Montrer que pour tout $x \in [0,4]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$.

(3) En déduire que pour tout $x \in [0,4]$,

$$|f(x) - f(4)| \leqslant \frac{3}{4}|x-4|,$$

puis que

$$|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 4|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) Déduire de l'inégalité précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 4|,$$

puis que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.