Université Paris-Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Mathématiques et Calculs 1 : Examen de 2e session (11 juin 2012)

Corrigé

L1 : Licence sciences et technologies, mention mathématiques, informatique et applications

---

Exercice 1. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, & a_0 = a \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), & b_0 = b \end{cases} \qquad 0 < a < b$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geq a_n$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que les deux suites sont convergentes et ont même limite.

Solution

1. Les deux suites sont à termes positifs puisque $0 < a < b$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \geq 0$$

2. D'après 1., $b_n \geq a_n$, donc :
   (a) $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n a_n} = a_n$; la suite a_n est croissante.
   (b) $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \leq \frac{1}{2}(b_n + b_n) = b_n$; la suite b_n est décroissante.
3. On a le classement : $0 < a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0 = b$.
   La suite a_n est croissante et majorée par b et la suite b_n est décroissante et minorée par a, ces deux suites sont donc convergentes respectivement par ℓ et ℓ'.
   Les limites vérifient : $\ell' = \frac{1}{2}(\ell + \ell')$, on en déduit : $\ell = \ell'$.

Exercice 2.

1. Citer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$. *(Remarque : seules les réponses donnant toutes les hypothèses et la conclusion seront prises en compte pour la correction.)*
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$, montrer les inégalités :

$$x < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < y$$

Solution

1. Soit une fonction f à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$; il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
2. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction définie par : $x \longmapsto \ln x$ est continue et dérivable, elle vérifie donc les hypothèses du théorème des accroissements finis sur tout intervalle $[x, y]$ contenu dans $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\ln(y) - \ln(x) = (y - x)\frac{1}{c} \quad \text{avec} \quad 0 < x < c < y$$

   Donc : $0 < x < c = \dfrac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < y$.

Exercice 3.

1. Calculer le module et l'argument du nombre complexe : $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$
2. Mettre le nombre complexe suivant sous la forme $a+ib$: $\dfrac{3-i}{3+4i}$

Solution

1. $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1}{2}(1-i)^2 = -i$. Donc : $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 = i$.
   Alors : $\left|\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3\right| = 1$ et $\text{Arg}\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 = \dfrac{\pi}{2}$
2. $\dfrac{3-i}{3+4i} = \dfrac{(3-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{9-12i-3i+4i^2}{9+16} = \dfrac{5-15i}{25} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants : $\vec{u} = (2, 3, -1)$ et $\vec{v} = (1, -1, -2)$.

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants.
2. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ contenant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Solution

1. Une combinaison linéaire nulle des deux vecteurs : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, conduit au système :

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta &= 0 \\ 3\alpha - \beta &= 0 \\ -\alpha - 2\beta &= 0 \end{cases}$$

   En faisant la somme des deux premières équations, on obtient : $5\alpha = 0$, d'où : $\alpha = \beta = 0$. Les deux vecteurs sont donc indépendants.
2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, on cherche un vecteur $\vec{w} = (x, y, z)$ qui forme un système libre avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   Une combinaison linéaire nulle des trois vecteurs : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, donne le système :

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma x &= 0 \\ 3\alpha - \beta + \gamma y &= 0 \\ -\alpha - 2\beta + \gamma z &= 0 \end{cases}$$

   On peut choisir $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, on aura alors : $\alpha = \beta = \gamma = 0$. (D'autres choix sont possibles...)

Exercice 5.

1. Calculer le développement limité de $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0.
2. Donner les développement limités de $\exp\big(\sin(x)\big)$ et $\exp\big(\tan(x)\big)$ à l'ordre 3 en 0 et calculer la limite : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp\big(\sin(x)\big) - \exp\big(\tan(x)\big)}{\sin(x) - \tan(x)}$

Solution

1. $\dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + \circ(x^4)$
   $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \circ(u^2)$
   On pose : $u = -\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + \circ(x^4)$, donc $u^2 = \dfrac{x^4}{36} + \circ(x^4)$ puisqu'on veut un développement à l'ordre 4 seulement. On obtient :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{2\times 36}\right)x^4 + \circ(x^4) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \circ(x^4)$$

2. $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)$

$\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)$

Donc : $\exp\left(\sin(x)\right) = \exp\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right) = \exp(x)\exp\left(-\dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right) = \exp(x)\left(1 - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)$

De même : $\exp\left(\tan(x)\right) = \exp\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right) = \exp(x)\exp\left(\dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right) = \exp(x)\left(1 + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right)$

$$\frac{\exp\left(\sin(x)\right) - \exp\left(\tan(x)\right)}{\sin(x) - \tan(x)} = \exp(x)\frac{-\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)}{-\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)} = \exp(x)\frac{1 + \circ(1)}{1 + \circ(1)} \underset{x \to 0}{\longmapsto} 1$$

Exercice 6.

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Montrer que $A^2 = 2I - A$; en déduire que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.
3. *Question bonus :* calculer l'inverse de la matrice B : B^{-1}.

Solution

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + A = 2I \Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(A^2 + A\right) = I$

   On a alors : $\dfrac{1}{2}\left(A + I\right)A = I$. A est donc inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\left(A + I\right) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Calculons le déterminant de B : $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ En remplaçant la première colonne par la somme des trois colonnes, on obtient : $\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

   Le déterminant étant non nul, la matrice est inversible.
3. On trouve : $B^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
