Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris Cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Mathématiques et calculs 1 : Contrôle continu n°1
Lundi 10 Octobre 2016

L1 : Licence sciences et technologies
Mention mathématiques, informatique et applications

Ce sujet contient 6 exercices. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

INDIQUEZ VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE COPIE !

Exercice 1

1) Mettre $z_1 = (1-i)^{2016}$ sous forme algébrique. à refaire

2) Mettre $z_2 = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme exponentielle. FAUX

Exercice 2 Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

⚠ aux signe

Exercice 3

1) Déterminer les racines cubiques de $-i$. Les placer dans le plan muni d'un repère orthonormal.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 5i = 1 + (3+4i)z$$

Exercice 4 Déterminer, quand elles existent, les limites des suites suivantes :

1) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2-2}}{n^3+1}$

2) $v_n = \dfrac{((-1)^n+3)(n+5)}{n-\log(n)}$

3) $w_n = \dfrac{4^n n^2 - 2^n n^3 + 1}{n^3 - n}$

Exercice 5 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$.

2) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
3) Donner la nature de la suite (v_n) et exprimer son terme général.
4) Calculer la limite de la suite (v_n). En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6

(1) Soit $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 2)$.

(a) Donner les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
(b) Factoriser $f(x)$.
(c) Donner le signe de $f(x)$ en fonction de x.

(2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{2}{3}$.

(a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
(b) Montrer que (u_n) est croissante.
(c) Etudier la convergence de (u_n) et préciser sa limite le cas échéant.

(3) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n^2 + \frac{2}{3}$.

(a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 3$.
(b) Montrer que (v_n) est croissante.
(c) Donner $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

$l = \frac{1}{3} l^2 + \frac{2}{3}$

$-\frac{1}{3} l^2 + l - \frac{2}{3} = 0$.

$-l^2 + 3l - 2 = 0$

$\cancel{\Delta = 9 + 8 = 17}$.

$\cancel{l = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{-2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}}$.

$\Delta = 9 - 8 = 1$.

$\frac{-3+1}{-2} = \boxed{1}$ 2

$v_1 = \frac{11}{3}$. $v_2 = \frac{133}{27}$.