Mathématiques pour l'Informatique

Licence d'Informatique
3ème année

Recueil
de
documents de travail

année 2018 - 2019

Pr. Nicole VINCENT

Table des matières

Programme du semestre

Semaine 1	Algèbre linéaire : calcul matriciel - changement de base
Semaine 2	Calcul des valeurs propres et vecteurs propres TD1 matrices et applications linéaires
Semaine 3	Réduction des matrices TD2 valeurs propres et vecteurs propres
Semaine 4	Formes bilinéaires - distances euclidiennes TD3 réduction matricielle
Semaine 5	Réduction et classification des quadriques TD4 réduction des formes quadratiques
Semaine 6	Espaces vectoriels normés TD5 Révisions
Semaine 7	Contrôle continu TD6 réduction des quadriques
Semaine 8	Fonctions de plusieurs variables TD7 EVN
Semaine 9	Recherche d'extrémum TD8
Semaine 10	Sous-ensembles flous TD9 Recherche d'extrémum
Semaine 11	Relations floues TD10 Ensembles flous
Semaine 12	Logique floue TD11 fonctions entre ensembles flous
Semaine 13	TD 12 relations floues

Semaine n°1

Algèbre linéaire : calcul matriciel - changement de base

A retenir

Dans un espace de dimension finie *n*, un ensemble de *n* vecteurs constitue une **base** si le **déterminant** de leurs coordonnées exprimées dans une base est non nul.

Lien entre application linéaire et matrice : Une matrice contient en colonne les coordonnées des images des vecteurs de la base

Une **matrice de changement de base** contient en colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base exprimées dans l'ancienne base

$$\boxed{X = P\,X'}$$

$f : E \to F$ associée à la matrice A dans les bases B_E et B_F
associée à la matrice A' dans les bases B'_E et B'_F
P matrice de changement de base de B_E à B'_E
Q matrice de changement de base de B_F à B'_F

alors

$A' = Q^{-1}\,A\,P$

et si E=F

$$\boxed{A' = P^{-1}\,A\,P}$$

Matrices orthogonales :

$$\boxed{A^{-1} = {}^{t}A}$$

TD n° 1

Exercice 1

1°/ On considère 3 matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1} , B^{-1} , C^{-1}

2°/ Calculer D=CBA et D^{-1}

3°/ On considère un jeu où 3 joueurs P,Q et R jouent. A chaque partie il y a 1 perdant et 2 gagnants. Chaque gagnant retire le double de sa mise et le perdant retire le reste. Au début de chaque partie, chaque joueur mise la totalité de son avoir.

Après 3 parties, la première perdue par P, la seconde perdue par Q, la troisième perdue par R, chaque joueur possède 8 jetons.
Quel était l'avoir initial de chaque joueur ?

Exercice 2

On considère la matrice A donnée par : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1°/ Cette matrice peut être interprétée comme la matrice d'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels. Indiquer l'expression des coordonnées du vecteur Y image du vecteur X de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ par cette application linéaire.

2°/ Quelle est l'image du vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

3°/ Dans l'espace d'arrivée, montrer que la matrice P peut être une matrice de changement de base. $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4°/ En considérant la relation Y = P Y' , exprimer les coordonnées du vecteur image dans la nouvelle base. Exprimer les nouveaux vecteurs de base en fonction des vecteurs de l'ancienne base.

Exercice 3

Dans un espace de dimension 3 et en considérant un repère (O;i,j,k) on donne deux transformations f et g linéaires définies par les relations suivantes

$$f : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = x + z \end{cases} \qquad g : \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

où le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se transforme en un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

1°/ Ecrire la matrice associée à la transformation f

2°/ Trouver la matrice de la transformation composée

Semaine n°2

Calcul des valeurs propres et vecteurs propres

A retenir

vecteur propre : un vecteur v non nul qui vérifie $f(v) = \lambda\ v$
où f est une application linéaire

Pour rechercher une valeur propre d'une application linéaire f de matrice A :

$$\boxed{\det(A-\lambda I) = 0}$$

Pour chercher un vecteur propre associé à une valeur propre λ, par ses coordonnées dans une base où la matrice de l'application linéaire est A :
résoudre le système de déterminant nul,

$$\boxed{(A-\lambda I)X = 0}$$

rayon spectral d'une matrice A, $\rho(A)$: le plus grand module des valeurs propres de A

la **trace** d'une matrice est égale à la somme des valeurs propres
le **déterminant** est égal au produit des valeurs propres
le polynôme caractéristique de la matrice A est le polynôme en λ dont le degré est égal à la taille de la matrice A $P(\lambda) = \det(A-\lambda I)$

Application : forme d'un nuage de points

TD n° 2

Exercice 1

On considère les matrices données par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de ces matrices et les vecteurs propres associés.

Exercice 2

On considère la matrice A donnée par :. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

On peut l'interpréter comme la matrice d'une application linéaire dans la base (i,j,k).

1°/ Calculer les valeurs propres de cette matrice.

2°/ Indiquer une base dans laquelle la matrice A est semblable à une matrice diagonale que l'on indiquera.

Exercice 3

Montrer que si la matrice A est inversible et admet 2 comme valeur propre, alors ½ est valeur propre de A^{-1}.

Exercice 4

1°/ Que pouvez-vous dire du nombre de solutions du système : $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 3x-6y+z=0 \\ -2x+4y-4z=0 \end{cases}$

2°/ Déterminer une condition sur α, β, γ pour que le système suivant admette une solution :

$$\begin{cases} x-2y+3z=\alpha \\ 3x-6y+z=\beta \\ -2x+4y-4z=\gamma \end{cases}$$

Exercice 5

On considère un ensemble de points dont les coordonnées dans un repère orthonormé sont données par :

(1,0) , (2,2) , (-1,0) ; (-2,-2) ; (1,1) ; (-1,1) ; (1,-1) ; (-1,-1) ; (0,-1) ; (0,1)

Que peut-on dire sur la répartition de ces points dans le plan ?

Les réponses devront être justifiées par des calculs et ne pas s'appuyer sur l'observation d'un dessin.

Exercice 6

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A admette un ensemble de vecteurs propres de dimension 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Semaine n°3

Réduction des matrices

A retenir

Deux matrices qui représentent une même application linéaire dans deux bases différentes sont dites semblables.

La dimension du sous-espace propre relatif à une valeur propre λ est inférieure à l'ordre de multiplicité de la valeur propre comme racine du polynôme caractéristique

Il y a conservation du rang, de la trace, du déterminant

Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables
Les matrices qui admettent un nombre de valeurs propres distinctes ou confondues, égal au degré du polynôme caractéristique sont triangularisables
Toutes les matrices ne sont pas triangularisables sur $\mathbb{R}$ mais le sont sur $\mathbb{C}$

Les matrices réelles symétriques sont diagonalisables, et on peut le faire avec une matrice de changement de base orthogonale

Choisir la "bonne base" pour simplifier les calculs

TD n° 3

Exercice 1

Soient I, J, K les matrices définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°/ Montrer que J est diagonalisable.

2°/ Indiquer une base de vecteurs propres de J.

3°/ Montrer que tout vecteur propre de J est aussi vecteur propre de K.

4°/ En déduire une base de vecteurs propres de la matrice M définie par :

$$M(a,b,c) = a\, I + b\, J + c\, K$$

où a, b et c sont des réels.

Indiquer les valeurs propres de M et son déterminant.

Exercice 2

Calculer l'expression analytique de la puissance n de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

On considère la relation de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 5u_{n-1} + 2u_{n-2} \\ u_0 = 2 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = 1 \end{cases}$

1°/ Indiquer l'expression matricielle de ces données.

2°/ En utilisant l'expression matricielle donner l'expression de u_n.

Exercice 4

Déterminer en dimension 2, les applications linéaires qui vérifient

$$f^2 = f$$

Semaine n°4

Formes bilinéaires - distances euclidiennes

A retenir

Une forme bilinéaire sur un espace produit est une application qui est linéaire par rapport à chacune des variables.

Une forme bilinéaire B symétrique réelle définie sur un espace vectoriel E est telle que

$B : E \times E \rightarrow R$
$\forall\ (x,y) \in E \times E : B(x,y) = B(y\ ,\ x)$

forme quadratique et forme bilinéaire symétrique sont associées

$Q(x) = B(x,x)$

Propriété : $Q(\lambda x)= \lambda^2 Q(x)$

Matrice d'une forme bilinéaire

$$\boxed{\begin{array}{c} B(x,y)={}^tYMX={}^tXAY \\ Q(x) = {}^tXAX \end{array}}$$

A est symétrique

L'expression d'une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2 par rapport aux variables.

Une forme quadratique est dite positive si $\forall x \in E\ Q(x) \geq 0$
Elle est dite définie positive si elle ne s'annule que pour le vecteur nul.

changement de base

$$\boxed{M' = {}^tP\ M\ P}$$

M et M' sont des **matrices congruentes**

Orthogonalité des vecteurs x et y par rapport à une forme bilinéaire : B(x,y)=0

une base est orthogonale si la matrice de la forme bilinéaire est, dans cette base, une matrice diagonale

Un espace vectoriel construit sur $\mathbb{R}$ est dit **Euclidien** si lui est associé une forme quadratique dont la matrice est définie positive.

TD n° 4

Exercice 1

Réduire la forme quadratique définie par

$$Q(x) = 3\,x^2 + 2y^2 + 3\,z^2 - 2\,xz$$

Exercice 2

Soit l'expression $P(x,y,z) = 3\,x^2 + 4\,y^2 + 3\,z^2 - 2\,x\,y + 2\,x\,z - 2\,y\,z$

1°/Etudier le signe de ce polynôme.

2°/ Ecrire le polynôme P sous forme d'une somme algébrique de carrés indépendants.

Exercice 3

Soit la forme quadratique Q définie dans la base *B*, où *B* = (e_1,e_2,e_3,e_4), par l'expression

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 6x_1x_4 + 6x_2x_3\,.$$

1°/ Réduire la forme quadratique

2°/ Indiquer une expression de *Q(x)* sous forme d'une somme algébrique de de carrés de polynômes de degrés 1 indépendants.

Exercice 4

Trouver les valeurs du réel a pour que le polynôme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a(xy + yz)$$

garde un signe constant.

Exercice 5

Soit A une matrice réelle inversible. Montrer qu'il existe une matrice V orthogonale et une matrice B symétrique telles que A = V B.

Pour cela

1°/ montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique strictement positive

2°/ montrer que toute matrice M réelle symétrique représentant une forme quadratique définie positive peut s'écrire sous la forme $M = B^2$.

3°/ conclure

Semaine n°5

Réduction et classification des quadriques

A retenir

Equation polynomiale du second degré dans un repère $\mathcal{R} = (O\,;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$
a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 d xy + 2 e xz + 2 f yz + g x + h y + k z + l = 0

écriture matricielle : ${}^tX\,A\,X + {}^tB\,X + l = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} g \\ h \\ k \end{pmatrix}$$

réduction de la matrice (changement de base : $\mathcal{R}' = (O\,;\ \vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})$)   X = P X'
${}^tX'\,({}^tPAP)\,X' + {}^tBP\,X' + l = 0$
étude du signe des valeurs propres de A
recherche du centre éventuel par translation (changement de l'origine du repère :
$\mathcal{R}'' = (\Omega\,;\ \vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})$ X' = X'' + $\boldsymbol{d}$ $\boldsymbol{d}$ *correspond* à $\overrightarrow{O\Omega}$ *dans* $\mathcal{R}'$)
obtention d'une équation réduite

TD n° 5

Semaine n°6

Espaces vectoriels normés

A retenir

Une **norme** sur un espace vectoriel réel est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

$\forall x \in E$ $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in E \quad \forall \lambda \in R$ $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$

$\forall x \in E \quad \forall y \in E$ $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

espace vectoriel euclidien : un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive.
Cette forme bilinéaire est le **produit scalaire**, la **norme** est la racine carrée de la forme quadratique. La norme est définie par

$$\boxed{N(x) = \sqrt{Q(x)}}$$

La notion d'orthogonalité est naturelle : $B(x,y) = 0$

On peut lui associer une notion de distance $d(x,y) = \|x - y\|$

E un ensemble, $d : ExE \to \mathbb{R}^+$ est une **distance** ou **métrique** sur E si

$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ axiome de séparation

$\forall (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) = d(y,x)$ axiome de symétrie

$\forall (x,y,z) \in E^3 \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ inégalité triangulaire

d_1 et d_2 sont des distances équivalentes si

$$\exists (k_1, k_2) \epsilon \mathbb{R}^{*+2} / \forall (x,y) \epsilon E^2 : k_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq k_2 d_2(x,y)$$

Notion de voisinage
Boules ouvertes ou fermées de centre *a* et de rayon *r*.
Boule ouverte $B(a,r) = \{x, x \in E / d(a,x) < r\}$

théorème du point fixe
E étant un espace muni d'une distance d, complet pour cette distance.
f une application de E dans lui-même, vérifiant f est strictement contractante
alors

- f admet un unique point fixe a (f(a)=a)
- on peut construire a comme la limite de la suite $(x_n)_n$ définie par $\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

l'erreur commise est majorée selon : $d(x_n, a) \leq \dfrac{k^n}{1-k} d(x_n, x_0)$

TD n° 6

Exercice 1

Etudier la nature de la conique dont une équation dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est donnée par :

$7x^2 - y^2 + 6xy + 28x + 12y + 29 = 0$

Réduire l'équation par un changement de repère.

La conique admet-elle un centre ?

Tracer la courbe correspondante.

Exercice 2

On veut étudier la nature de la quadrique dont une équation dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est donnée par :

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$$

Réduire l'équation par un changement de base.

La quadrique admet-elle un centre ?

Reconnaître l'intersection de la quadrique avec chacun des plans d'équation $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = 0$ dans un repère où l'équation de la quadrique a été réduit.

Semaine n°7

Contrôle Continu

TD n° 7

Exercice 1

Montrer que dans l'espace R^n, on définit une métrique par

$$\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{(x_i - y_i)\neq 0}$$

Exercice 2

On considère la norme du max dans l'espace R^n : $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

On appelle norme matricielle une norme qui vérifie $\|A\ B\| \leq \|A\|\ \|B\|$,

Une norme dans l'espace des matrices peut être induite par une norme vectorielle en posant :

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

1°/ Calculer la norme matricielle induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2°/ Montrer que pour une norme induite on a

$$\forall x : \ \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

3°/ Montrer qu'une norme induite est une norme matricielle

4°/ Montrer que la norme induite par la norme vectorielle $\|\cdot\|_\infty$ s'écrit :

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Exercice 3
méthode de Jacobi

On se propose de résoudre un système de la forme AX = b

1°/ En considérant une écriture de A sous la forme A = M+N avec M une matrice diagonale, écrire le problème sous la forme d'un problème de point fixe.

2°/ Montrer que si la matrice A est à diagonale strictement dominante, la méthode est convergente

3°/ Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = -1 \\ 2x + 2y + z = -3 \end{cases}$$

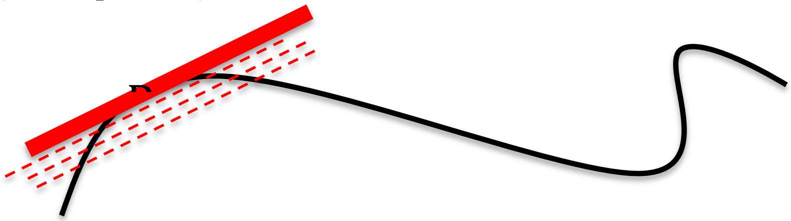
Semaine n°8

Fonctions de plusieurs variables

A retenir

Une fonction : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

Etude locale d'une fonction : Approximation du graphe of $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ par un sous-espace (droite, plan, …)



Dérivée partielle du premier ordre pour une fonction : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n)$

Le **gradient** est le vecteur des dérivées partielles calculées en un point : $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

La **divergence** au point M est le réel : $\quad div_M\, f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{M})$

Pour une fonction: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$

La **matrice Jacobienne** :$J_M(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(m_1, \dots, m_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(m_1, \dots, m_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(m_1, \dots, m_n) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(m_1, \dots, m_n) \end{pmatrix}$

Dérivées partielles d'ordre supérieur d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad \frac{\partial^m f}{\partial x_i \cdots \partial x_j}(x_1, \cdots, x_n)$

La **matrice Hessienne** : $\mathcal{H}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(m_1, \dots, m_n) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(m_1, \dots, m_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(m_1, \dots, m_n) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(m_1, \dots, m_n) \end{pmatrix}$

Le **Laplacien** est défini par : $\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(m_1, \dots, m_n)$

Taylor-Lagrange formula at order m:

$$f(M+h) = f(M) + {}^{t}(grad_M f) \cdot h + \cdots + \frac{1}{m!}\Big(\sum_{i=1}^{m} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)^{\textcircled{7}} + o(\|h\|^m)$$

TD n° 8

Exercice 1

Soit A une matrice réelle, carrée de dimension n. L'espace de ces matrices est muni d'une norme matricielle $\| \quad \|$. On suppose que $\|A\| < 1$

Montrer que la matrice I+A est inversible.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^3 - 4x^2\, y^2 z^2 + \ 2xy^3 - 5z^5 \\ e^{3xy} + x^3 y \ln(z) \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice Jacobienne de cette fonction.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x^3 - x\, y^2 + \ y^3 - x$$

Calculer le gradient de cette fonction au point $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice Hessienne au même point.

Ecrire le développement de Taylor au point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ à l'ordre 3.

Semaine n°9

Recherche d'extremum

A retenir

Définition des dérivées partielles premières et d'ordre supérieur

Le **gradient** d'une fonction assez régulière est la matrice uni colonne de ses dérivées partielles premières

Les **points critiques** d'une fonction de plusieurs variables sont les points où le gradient de la fonction s'annule

Les **extrémums** d'une fonction de plusieurs variables sont à rechercher parmi
- les points où la fonction n'est pas différentiable
- les points critiques
- les points frontière du domaine de définition de la fonction

Si la fonction est assez régulière, les valeurs propres de la matrice **hessienne** de la fonction permettent, quand 0 n'est pas valeur propre, de préciser la nature des points critiques
La formule de Taylor-Lagrange dans le voisinage d'un point critique M :

$$f(M+h)-f(M)= \frac{1}{2}\, {}^t h \mathcal{H} h + o(\|h\|^2)$$

Méthode des multiplicateurs de Lagrange pour rechercher les **extrémums liés** :

$$\begin{cases} \text{Minimum de } f \\ \text{sous la contrainte : } g(X) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Minimum de } X \to f(X) - \lambda X$$

TD n° 9

Exercice 1

Etudier les extremums de la fonction f définie par :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 9x^2 + 9y^2 + 12xy$$

Exercice 2

Etudier les extremums de la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + x\,y$$

Exercice 3

Déterminer les extremums de la fonction définie sur le domaine $x > 0$, $y > 0$ par :

$$f(x,y) = x^3\,y^2\,(6 - x - y)$$

Exercice 4

Etudier les extremums de la fonction f définie par :

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x\,y\,z$$

1°/ Quels sont les points critiques de cette fonction ?
2°/ Etudier les points qui vérifient $x = y = z$
3°/ En déduire le comportement aux autres points critiques.

Exercice 8

On considère un ensemble de points dont les coordonnées sont :

$$(2,3)\ ,\ (4,3)\ ,\ (5,4)\ ;\ (6,5)\ ;\ (8,5)$$

Le but est de trouver une droite qui pourrait modéliser la relation entre l'abscisse et l'ordonnée de ces points. On note par: $y = a\,x + b$ une équation de cette droite.

En exprimant que la somme des carrés de distances que l'on précisera est minimum déterminer les expressions de a et de b puis leur valeurs.

Semaine n°10

Sous-ensembles flous

A retenir

Un **sous-ensemble flou** A d'un ensemble X est associé à une **fonction d'appartenance** définie sur X et à valeur dans l'intervalle [0,1].
Notion définie pour modéliser le langage humain.

On peut définir :
le support,
la hauteur,
le noyau

Les opérations entre ensembles flous sont définies par des opérations sur les fonctions d'appartenance.
Traditionnellement on associe l'opérateur min à ∧, l'opérateur max à ∨, $1\text{-}f_A$ à la complémentation.

Dans un **produit cartésien** $X=X_1xX_2$,
la fonction d'appartenance associée à $A=A_1xA_2$ est définie par :

$$\forall x=(x_1,x_2)\in X \quad f_A(x)=\min_{i=1 à 2}\left(f_{A_i}(x_i)\right)$$

La **projection** d'un ensemble flou A sur la composante X_1 est définie par :

$$\forall x_1\in X_1 \quad f_{projX_1(A)}(x_1)=\sup_{x_2\in X_2}\left(f_A(x_1,x_2)\right)$$

Principe d'extension d'une fonction φ définie de X dans Y en une fonction toujours appelée φ définie de l'ensemble des sous-ensembles flous de X dans l'ensemble des sous-ensembles flous de Y.
A un sous-ensemble flou de X, son image par φ est un sous ensemble flou B de Y ($\varphi(A)=B$)) est défini par :

$$\forall y \epsilon Y \ f_B(y)=\left|\begin{array}{l}\sup\limits_{x/y=\varphi(x)}\{f_A(x)\}\\ 0 \ si \ \varphi^{-1}(y)=\emptyset\end{array}\right.$$

Dualité par rapport à la négation, entre t-norme et t-conorme.

$$n\big(\top(u,v)\big)=\perp(n(u),n(v))$$

TD n° 10

Exercice 1

Sur l ensemble A = {1,2,3,4,5,6} on considère la relation
R = {(1,1), (1,5), (2,3), (2,2), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2)(6,3), (6,6)}
1°/ montrer que R est une relation d'équivalence
2°/ trouver la partition associée à la relation R

Exercice 2

Sur l ensemble A = {1,2,3,4,5,6} on considère la relation
R = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,6), (3,3), (3,5), (4,4), (5,3), (5,5), (5,6), (6,2), (6,5), (6,6)}
1°/ montrer que R n'est pas une relation d'équivalence
2°/ trouver la partition associée à la relation R

Exercice 3

On considère deux sous-ensembles flous discrets sur l'ensemble X = {x , y , z , t},

$$A = \begin{Bmatrix} x & y & z & t \\ 0,5 & 0,8 & 0,4 & 0,2 \end{Bmatrix} \text{ et } B = \begin{Bmatrix} x & y & z & t \\ 0,6 & 0,3 & 0,6 & 1 \end{Bmatrix};$$

1°/ Calculer $A \cap B$; $A \cup B$ et ${}^cA$

2°/ Calculer le produit cartésien

3°/ Calculer la projection de C sur la première composante de XxX

$$C = \begin{Bmatrix} (x,x) & (x,y) & (x,z) & (y,z) & (y,t) & (z,x) & (z,t) & (t,x) & (t,y) & (t,z) \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 & 0,1 & 0,8 & 0,4 & 0,6 & 0,3 & 0,9 & 0,5 \end{Bmatrix}$$

4°/ Mêmes questions avec les opérateurs (u,v) → uv et (u,v) → u+v-uv

5°/ De plus calculer $A \cap A$ et $A \cup A$

Exercice 4

Dans quelles conditions un sous-ensemble flou A d'un ensemble produit $X=X_1 x X_2$ est-il produit cartésien de ses projections respectivement sur X_1 et X_2 ?

Semaine n°11

Relations floues

à retenir

Une **relation floue** est un sous-ensemble flou d'un produit cartésien. La liaison entre des éléments est connue de façon graduelle.

La composition de deux relations floues définit une nouvelle relation floue définie par :

$$\forall (x,z) \in X \times Z \qquad f_R(x,z) = \sup_{y \in Y}\left(f_{R_1}(x,y)\,, f_{R_2}(y,z)\right)$$

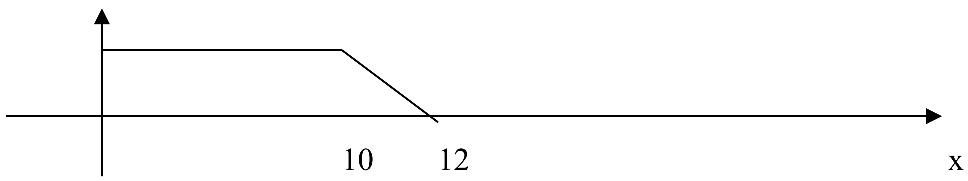
Relation d'équivalence floue
Propriété : la fermeture transitive s'obtient par composition successive avec la relation initiale.

Application à la classification

TD n° 11

Exercice 1

Un certain phénomène physique se traduit par une relation entre deux variables par une fonction $y = f(x) = (x-5)^2$
Les deux variables ne prennent que des valeurs positives.
1°/ Dans l'univers de la variable x on considère le sous-ensemble flou A de fonction d'appartenance f_A qui correspond à l'attribut petit



Que peut on dire de la valeur de la variable y quand la variable x est petite ?

2°/ Même question mais en considérant la variable x presque nulle.

Exercice 2

En appliquant le principe d'extension calculer la distance entre les sous-ensembles A et B sachant que l'on connaît 4 points N_1, N_2, N_3, N_4 vérifiant :

$d(N_1,N_2) = 4 \quad d(N_1,N_3) = 4 \quad d(N_1,N_4) = 5 \quad d(N_2,N_3) = 2 \quad d(N_2,N_4) = 3 \quad d(N_3,N_4) = 3$

et

$$A = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{Bmatrix}$$

Semaine n°12

Logique floue

A retenir

Une **variable linguistique** est un triplet (V,X,T_V) dans lequel V est une variable définie sur un ensemble de référence X et TV est un ensemble fini ou infini de sous-ensemble flous normalisés de X utilisables pour caractériser V.
Exemple : variable taille, sur $\mathbb{R}^+$, peut être petite, moyenne, grande, …

Un **modificateur** d'une variable linguistique

Une **proposition floue**

Une **règle floue**, basée sur l'implication
Modélisation de l'implication floue

Modus Ponens généralisé
Compatibilité avec l'implication floue

défuzzification

TD n° 12

Exercice 1

Dans certaines expériences on cherche un lien entre deux paramètres. On a trouvé

$$X = \begin{Bmatrix} 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{Bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}9 & 0{,}2 \end{Bmatrix}$$

1°/ Trouver la relation floue qui relie X et Y.

2°/ Prédire la mesure de Y quand on mesure le lendemain

$$X' = \begin{Bmatrix} 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0 \end{Bmatrix}$$

Exercice 2

Soit $\mathcal{R}$ une relation floue 'beaucoup plus grand que' définie sur RxR. Sa fonction d'appartenance est :

$$f_{\mathcal{R}}(x,y) = \left| \begin{array}{ll} 0 & si\ y \le x \\ \dfrac{y-x}{\alpha} & si\ x < y < x+\alpha \\ 1 & si\ y \ge x+\alpha \end{array} \right.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive.

Exercice 3

X={x, y, z , t, u, v} et $\mathcal{R}$ une relation floue définie sur XxX par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 1 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}2 & 1 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}2 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$$

1°/ Montrer que c'est une relation d'équivalence.

2°/ Construire l'arbre des partitions emboîtées associé à cette relation.

Exercice 4

X et Y étant 2 ensembles flous définis sur un univers U , a et b désignant les grandeurs $f_X(x)$ et $f_Y(x)$ on définit :

$$\forall x \in U \quad [X \equiv Y](x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{(1-a)}{(1-b)}\right) & si \quad a > b \\ 1 & si \quad a = b \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{(1-b)}{(1-a)}\right) & si \quad a < b \end{cases}$$

$$m(X,Y) = \min_{x \in U} [X \equiv Y](x)$$

Monter que m permet de définir une relation floue adaptée à la comparaison entre ensembles flous. Proposer une formule permettant de comparer deux sous-ensembles flous définis dans un espace produit de dimension finie.

Exercices corrigés

Algèbre linéaire : Matrices – changement de base

On considère A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Calcul du Déterminant

Calculer la valeur du déterminant de la matrice A

Solution

$\det A = 3\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 14 - 2 - 4 = 36$

autre méthode :

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 18 = 36$

C3←C3+C2 R2←R2-2·R3

Lien entre matrice et application linéaire

1°/ La matrice A est la matrice de l'application linéaire f définie dans un espace vectoriel rapporté à la base B=(e_1,e_2,e_3). Soit x un vecteur de coordonnées (x_1,x_2,x_3). Donner les coordonnées de y, image de x par f. Ecrire le vecteur y.

2°/ Indiquer les coordonnées de l'image du vecteur e_1+e_2

3°/ Ecrire la matrice B de l'application linéaire g définie dans la base B par les relations:

$$\begin{cases} x' = 2x + 5y - 3z \\ y' = x - 2y + 4z \\ z' = 7x - y + 2z \end{cases}$$

4°/ Une application linéaire h est définie par les images des vecteurs de base, f_1, f_2 and f_3.

$$\begin{cases} f_1 = 2e_1 + 5e_2 - 3e_3 \\ f_2 = e_1 - 2e_2 + 4e_3 \\ f_3 = 7e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

Ecrire la matrice C associée à h dans la base B

Solution

1°/ coordonnées de y : $\begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$

y = $(3x_1 - x_2 + x_3)e_1 + (-x_1 + 5x_2 - x_3)e_2 + (x_1 - x_2 + 3x_3)e_3$

2°/ $\begin{pmatrix} 3-1 \\ -1+5 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

3°/ B=$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4°/ C=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & +4 & 2 \end{pmatrix}$

Changement de base

1°/ Montrer que (f_1,f_2,f_3) constitue une base que l'on notera B'.

2°/ Indiquer la matrice de changement de base P, de l'ancienne base B vers la nouvelle base B'.

3°/ Ecrire la matrice A' de l'application f dans la base B'.

Solution

1°/ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & +4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 7 + 7 \cdot 14 \neq 0$

2°/ P = C

3°/ A' = P^{-1} A P

$P^{-1} = \frac{1}{91} {}^t\begin{pmatrix} 0 & -(7) & 14 \\ -(-26) & 25 & -(11) \\ 13 & -(-37) & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{91}\begin{pmatrix} 0 & 26 & 13 \\ -7 & 25 & 37 \\ 14 & 11 & -9 \end{pmatrix}$

$A' = \frac{1}{91}\begin{pmatrix} 0 & 26 & 13 \\ -7 & 25 & 37 \\ 14 & 11 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 9 & 24 \\ 26 & -15 & -14 \\ -12 & 15 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{91}\begin{pmatrix} 520 & -195 & -182 \\ 220 & 117 & 0 \\ 366 & -174 & 56 \end{pmatrix}$

Valeurs propres et vecteurs propres

1°/ Déterminer les valeurs propres de la matrice A

2°/ Déterminer les vecteurs propres de la matrice A

Solution

1°/ Det(A-λI) = $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & -1 \\ -2+\lambda & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[\lambda^2-9\lambda+18] = (2-\lambda)(6-\lambda)(3-\lambda)$$

Donc A a 3 valeurs propres : 2, 3 and 6.

2°/

- Vecteurs associés à la valeur propre 2 :

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ is un vecteur propre évident relatif à $\lambda = 2$

Ainsi, les vecteurs propres sont tous les vecteurs non nuls colinéaires au vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Vecteurs associés à la valeur propre 3 :

vecteurs vérifiant (A-3I)X=0

$$\begin{cases} -y+z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

Les vecteurs propres sont les vecteurs non nuls colinéaires au vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Vecteurs associés à la valeur propre 6 :

vecteurs vérifiant (A-6I)X=0

$$\begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs propres sont les vecteurs non nuls colinéaires au vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Réduction des Matrices

Diagonalisation

1°/ Trouver une matrice diagonale D semblable à A

2°/ Indiquer une matrice de changement de base Q caractérisant une représentation de l'espace dans lequel D est associée à l'application linéaire f

Solution

1°/ $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2°/ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Triangulation

Soit M une matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1°/ M est elle semblable à une matrice diagonale ? On justifiera la réponse

2°/ Triangulariser cette matrice en précisant une matrice de changement de base

Solution

1°/

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ -8 & -3-\lambda & -2 \\ 7 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - 1) + 8(6 - 2\lambda - 4) + 7(-4 + 3 + \lambda)$$

$= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$

1 est valeur propre d'ordre 1

2 est valeur propre d'ordre 2

Donc on doit étudier la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 2

(A-λI)X=0

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ -8x - 5y - 2z = 0 \\ 7x +' y + z = 0 \end{cases}$$

c'est à dire : $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ d'où $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

La dimension est égale à 1 strictement inférieur à l'ordre de multiplicité.

Ainsi la matrice n'est pas semblable à une matrice diagonale.

2°/ M est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où a et b doivent être calculés. Les deux premiers vecteurs de la nouvelle base sont des vecteurs propres relativement respectivement à 1 et 2. Le troisième vecteur peut être choisi quelconque avec la seule contrainte que les 3 vecteurs soient linéairement indépendant.

Vecteur propre associé à 1

(A-I)X=0

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 0 \\ -8x - 4y - 2z = 0 \\ 7x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

par exemple $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Pour troisième vecteur choisissons $v_3=e_3$

$f(v_3) = (f(e3) = e_1-2e_2+3e_3= (e_1-2e_2+e_3) + 2e_3 = v_2+2v_3$

alors une matrice triangulaire possible est T avec P la matrice de changement de base associée :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; et \; P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Formes Bilinéaires - Distances Euclidiennes

Considérons la forme quadratique définie dans la base B=(e_1,e_2,e_3) par l'expression :

$$Q(X) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

1°/ Calculer la matrice A associée avec la forme *Q* dans la base B.

2°/ Trouver une matrice D diagonale, congruente avec la matrice A et indiquer une matrice de changement de base possible P.

3°/ Exprimer les vecteurs de la nouvelle base relativement à la base B.

4°/ Exprimer *Q(X)* comme une somme algébrique de carrés de formes linéaire indépendantes.

Solution

1°/

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

2°/

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -7+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(7-\lambda)[(6-\lambda)(-1-\lambda)-8] = (7-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 14) = (7-\lambda)(-2-\lambda)(7-\lambda)$$

$$D=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

3°/

(A+2I)X=0

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Une solution est ${}^t(1,-2,-2)$

Vecteurs propres associés avec la valeur propre 7.

Une solution évidente est $^t(0,1,-1)$ mais la dimension de l'espace est 2.

Nous devons résoudre (A-7I)X=0

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Une solution est $^t(2,0,1)$

Mais le vecteur associé n'est pas orthogonal aux vecteurs choisis précédemment.

Une solution orthogonale est $^t(4,1,1)$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

4°/

Dans la nouvelle base Q(X)=-2$Q(X) = -2x_1'^2 + 7x_2'^2 + 7x_3'^2$

X=PX' et X'=^{t}PX

Alors

Q(X)=$-\frac{2}{9}(x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + \frac{7}{2}(x_2 - 2x_3)^2 + \frac{7}{18}(4x_1 + x_2 + x_3)^2$

Différentiabilité - fonctions à plusieurs variables

Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 de la fonction définie par :

$f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$

solution

$f(x,y)= f(1,2)+[f_x'(1,2)(x-1)+f_y'(1,2)(y-2)]+ 1/2[f_{xx}''(1,2)(x-1)2+2f_{xy}''(1,2)(x-1)(y-2)+f_{yy}''(1,2)(y-2)2]+1/6[f_{xxx}'''(1,2)(x-1)3+3f_{xxy}'''(1,2)(x-1)2(y-2)+3f_{xyy}'''(1,2)(x-1)(y-2)2+f_{yyy}'''(1,2)(y-2)3]+1/24[(x-1)\partial/\partial x +(y-2) \partial/\partial y]^{④}f(a,b)$

$f_x'(x,y)=3x2+3y$ $f_y'(x,y)=-6y2+3x$

$f_{xx}''(x,y)=6x$ $f_{xy}''(x,y)=3$ $f_{yy}''(x,y)=-12$

$f_{xxx}'''(x,y)=6$ $f_{xxy}(x,y)=0$ $f_{yyy}'''(x,y)=-12$

toutes les autres dérivées partielles sont 0

$f(1+h,2+k) = -9 + 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3$

Extrémums

Déterminer les extrémums de la fonction définie par f(x,y)=$x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

solution

f est régulière sur tout le domaine.

Points critiques

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \text{ et } y \text{ de même signe} \\ x^2 + y^2 = 5 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases}$$

alors x^2 et y^2 sont solutions de l'équation X^2-5X+4=0 X = 4 or 1

4 points critiques : $P_1(1,2)$ $P_2(2,1)$ $P_3(-1,-2)$ $P_4(-2,-1)$

Etude plus précise dans un voisinage de chaque point

Utilisation de la matrice Hessienne : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x$

Au point P_1 : $\mathcal{H}_{P_1}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ le déterminant est négatif, donc f ne présente pas d'extrémum en P_1

Au point P_2 : $\mathcal{H}_{P_2}(f) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ le déterminant et la trace sont positifs, donc f présente un minimum en P_2 et sa valeur est égale à -28

Au point P_3 : $\mathcal{H}_{P_3}(f) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$ le déterminant est négatif, donc f ne présente pas d'extrémum en P_3

Au point P_4 : $\mathcal{H}_{P_4}(f) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$ le déterminant et la trace sont négatifs, donc f présente un maximum en P_4 et sa valeur est égale à -28

ANNALES

L3 info 2010-2011

Mathématiques pour l'informatique

Contrôle continu

Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1°/ Cette matrice peut être considérée comme la matrice associée à une transformation linéaire f définie dans un espace vectoriel rapporté à la base B (e_1,e_2,e_3).
Soit x un vecteur dont les composantes relativement à la base B sont notées (x_1,x_2,x_3). Indiquez les coordonnées de l'image par f d'un vecteur x exprimé dans la base B.

2°/ Montrer qu'on peut définir une nouvelle base B' (f_1,f_2,f_3) en posant

$f_1 = 3\ e_1 + e_2 - e_3$
$f_2 = -2\ e_2 + e_3$
$f_3 = e_1 - 2\ e_2$

3°/ Exprimer la matrice de l'application f dans la base B'.

4°/ La matrice A est-elle semblable à une matrice diagonale ? On justifiera précisément la réponse.

5°/ En supposant que l'on ait entre deux matrices la relation $B^2 = A$, montrer qu'un vecteur propre de B est aussi un vecteur propre de A.

6°/ Trouver une matrice B telle que $B^2=A$ pour la matrice A de l'énoncé.

L3 - INFO

année 2010-2011

Mathématiques pour l'informatique

Examen

I. 1° Indiquer la définition d'un vecteur propre d'une application linéaire f.

2°/ Comment s'exprime la transitivité d'une relation floue $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E ?

II. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Indiquer une matrice diagonale semblable à A. On justifiera les résultats sans nécessairement préciser des vecteurs propres.

III. Dans le repère (O;i,j,k) on considère la quadrique d'équation :

$$x^2 -2\, y^2 + z^2 + 4xy- 8xz - 4yz + 2x - y + 3z + 5 = 0$$

1°/ Indiquer l'équation réduite de cette quadrique en précisant le repère associé $(\Omega;e_1,e_2,e_3)$.

2°/ Indiquer la nature de la conique obtenue dans le repère (O;i,j,k) comme l'intersection de la quadrique et du plan d'équation $z=0$.

IV. On considère la relation floue définie sur un ensemble à 5 éléments $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}9 & 1 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$$

1°/ Montrer que l'on a une relation d'équivalence.

2°/ Indiquer l'ensemble des partitions que l'on peut en déduire.

L3 - INFO

année 2010-2011

Mathématiques pour l'informatique
Examen Session 2

I. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°/ Indiquer une matrice diagonale semblable à A ainsi que la matrice de changement de base associée.

2°/ Cette matrice A peut être considérée comme la matrice associée à une transformation linéaire f définie dans un espace vectoriel rapporté à la base B (e_1,e_2,e_3).

Quelle est l'image du vecteur u défini par $u = 3\ e_1 + e_2 - e_3$?

II. On considère un ensemble de points dont les coordonnées dans un repère orthonormé sont données par :

(1,0) , (2,-1) , (2,0) ; (2,2) ; (3,2) ; (4,0) ; (4,1) ; (4,3) ; (4,4) ; (5,2) . (6,2) , (6,4) , (6,5) ; (7,4)

Que peut-on dire sur la répartition de ces points dans le plan ?

Les réponses devront être justifiées par des calculs et ne pas s'appuyer sur l'observation d'un dessin. On pourra montrer qu'on peut se ramener à étudier la matrice :

$$\begin{pmatrix} 44 & 32 \\ 32 & 44 \end{pmatrix}$$

III. On considère la relation floue définie sur un ensemble à 5 éléments $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,3 & 0,7 & 0,8 \\ 0,3 & 1 & 0,9 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,9 & 1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 0,3 & 1 & 0,7 \\ 0,8 & 0,3 & 0,3 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}$$

1°/ Montrer que l'on a une relation d'équivalence.

2°/ Indiquer l'ensemble des partitions que l'on peut en déduire.

Université Paris Descartes
L3 parcours Informatique 2011 – 2012

Mathématiques pour l'Informatique

Contrôle Continu

I. On considère une application linéaire f définie sur R^3. Elle est associée, dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$, à la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1°/ Calculer l'image par f du vecteur $u = 3\ e_1 + 2\ e_2 - e_3$

2°/ On définit les vecteurs : $f_1 = 2\ e_1 - e_3$; $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$; $f_3 = e_2 - 3\ e_3$

(f_1,f_2,f_3) définit-il une nouvelle base B' ? Justifier la réponse.

Exprimer la matrice de changement de base. Exprimer les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base.

3°/ Calculer la matrice de f exprimée dans la base B'.

II. Soit l'expression $P(x,y,z) = 6\ x^2 + 3\ y^2 + 3\ z^2 + 4\ xy + 4\ xz - 8\ yz$

Ecrire l'expression sous forme d'une somme algébrique de carrés.

Université Paris Descartes
L3 parcours Informatique

2011 – 2012

Mathématiques pour l'Informatique

Examen

I. Soit la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1°/ Calculer A^n

2°/ On considère que A est la matrice associée à une application linéaire relativement à la base B= (e_1,e_2,e_3)
Exprimer la matrice de f relativement à la base B' = $(e_1\text{-}e_3\ ,\ e_1\text{-}e_2\text{+}e_3\ ,\ e_3)$

II. Soit X= { x , y , z , t } et ***R*** une relation floue définie sur XxX par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 1 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$$

1°/ La relation ***R*** est-elle une relation d'équivalence ?

2°/ si la réponse à la question précédente est négative, déterminer la fermeture transitive de la relation.

3°/ Indiquer l'ensemble des partitions que l'on peut déduire de la relation floue ***S*** définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 1 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

Université Paris Descartes
L3 parcours Informatique

2011 – 2012

Mathématiques pour l'Informatique

Examen
Session 2

I. 1°/ Calculer les valeurs propres de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2°/ Calculer un vecteur propre associé à chaque valeur propre.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

II. Soit A la matrice d'une application linéaire f dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire la matrice de f dans la base B'=(e1-e3 , e1-e2 , e2)

III. Réduire la forme quadratique définie par :

$Q(X) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

On indiquera tous les calculs.

Université Paris Descartes

2012-2013

Licence MIA

L3 parcours informatique

Mathématiques pour l'informatique

Contrôle continu

I. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Cette matrice peut être considérée comme la matrice associée à une transformation linéaire f définie dans un espace vectoriel rapporté à la base $B = (e_1,e_2,e_3)$.

1°/ Soit x un vecteur dont les composantes relativement à la base B sont notées (x_1,x_2,x_3). Indiquez les coordonnées (y_1,y_2,y_3) de l'image par f du vecteur x, exprimées relativement à la base B.

2°/ Montrer que les vecteurs $(e_1+e_2,\ e_3-e_2,\ e_1+e_2+e_3)$ forment une nouvelle base B'.

3°/ Exprimer la matrice de l'application f dans la base B'.

4°/ La matrice A est-elle semblable à une matrice diagonale ? On justifiera précisément la réponse.
Dans le cas positif, indiquer la matrice diagonale et la matrice de changement de base.

II. Etudier la nature de la conique dont une équation dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ est donnée par :

$$3\,x^2 + 4\,xy + 3\,y^2 + 2\,y - 1 = 0.$$

On tracera la conique et on précisera ses éléments caractéristiques dans ce repère.

L3 - INFO

année 2012-2013

Licence MIA

Mathématiques pour l'informatique

Examen

I. Soient I, J, K les matrices définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°/ Montrer que J est diagonalisable.

2°/ Indiquer une base de vecteurs propres de J.

3°/ Montrer que tout vecteur propre de J est aussi vecteur propre de K.

4°/ En déduire une base de vecteurs propres de la matrice M définie par :

$$M(a,b,c) = a\,I + b\,J + c\,K$$

où a, b et c sont des réels.

Indiquer les valeurs propres de M et son déterminant.

5°/ Soit $P(x,y,z) = 3\,x^2 + 4\,y^2 + 3\,z^2 - 2\,x\,y + 2\,x\,z - 2\,y\,z$

Etudier le signe de ce polynôme.

6°/ Ecrire le polynôme P sous forme d'une somme algébrique de carrés.

II. On considère la relation floue définie sur un ensemble à 5 éléments $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$$

1°/ Cette relation floue est-elle une relation d'équivalence ?

2°/ Indiquer l'ensemble des partitions que l'on peut déduire de cette relation.

L3 - INFO

année 2012-2013

Licence MIA

Mathématiques pour l'informatique

Session de rattrapage

I. Donner un exemple de deux matrices ayant mêmes valeurs propres mais qui ne sont pas semblables.

II. Montrer que si la matrice A est inversible et admet 2 comme valeur propre, alors ½ est valeur propre de A^{-1}.

III. Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1°/ Montrer que A n'est pas diagonalisable.

2°/ Sachant que A est la matrice de l'application linéaire f exprimée dans la base $B = \{e, e_2, e_3\}$, écrire la matrice de l'application f dans la base $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ où $e_1' = e_2 - 2\,e_3$; $e_2' = e_1 - 2\,e_2 + e_3$; $e_3' = e_3$

IV. Soit P le polynôme défini par :

$P(x,y,z) = 2\,x^2 + 5\,y^2 + 2\,z^2 - 4\,x\,y - 2\,x\,z + 4\,y\,z$

1°/ Ecrire la matrice de la forme quadratique associée

2°/ Quel est le signe du polynôme ? On justifiera la réponse sans utiliser le résultat de la question 3°.

3°/ Ecrire l'expression du polynôme sous forme d'une somme de carrés de formes linéaires

V. Etudier les extremums de la fonction f définie par :

$$f(x,y) = (\,y - x^2\,)\,(\,y - 2\,x^2\,)$$

L3 - INFO

année 2013-2014

Mathématiques pour l'informatique

Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1°/ La matrice A est la matrice d'une application linéaire f définie dans un espace vectoriel rapporté à la base B=(e_1,e_2,e_3). Soit x un vecteur de coordonnées (x_1,x_2,x_3). Indiquez les coordonnées de y l'image de x par l'application f. Indiquez le vecteur y.

2°/ Indiquez les coordonnées de l'image du vecteur e_1-2e_2.

3°/ Ecrire la matrice B de l'application linéaire g définie dans la base B par les relations :

$$\begin{cases} x' = x + 5y - 2z \\ y' = 2x - 3y + 4z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$$

où x,y et z sont les coordonnées du point dont est calculée l'image par g, les coordonnées de l'image sont x',y' et z'.

4°/ Ecrire, dans la base B, la matrice C de l'application linéaire h définie par les images f_1, f_2 and f_3 des vecteurs de base.

$$\begin{cases} f_1 = 2e_1 + 5e_2 - 3e_3 \\ f_2 = e_1 - 2e_2 + 4e_3 \\ f_3 = 7e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

5°/ Ecrire, dans la base B, la matrice D de l'application linéaire l définie par l = f o g.

6°/ La matrice A est-elle triangularisable ?

7°/ La matrice A est-elle diagonalisable ?

8°/ Réduire la matrice A et indiquer la matrice de changement de base correspondante.

9°/ Après avoir écrit la matrice associée à la forme quadratique Φ, écrire Φ(x) sous la forme d'une somme algébrique de carrés de formes linéaire indépendantes.

$$\Phi(x) = 2\, x_1\, x_4 + 6\, x_2\, x_3$$

L3 - INFO

année 2013-2014

Mathématiques pour l'informatique

Examen

I. Donner un exemple de deux marices ayant mêmes valeurs propres mais non semblables.

II. Exprimer analytiquement les puissances de la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

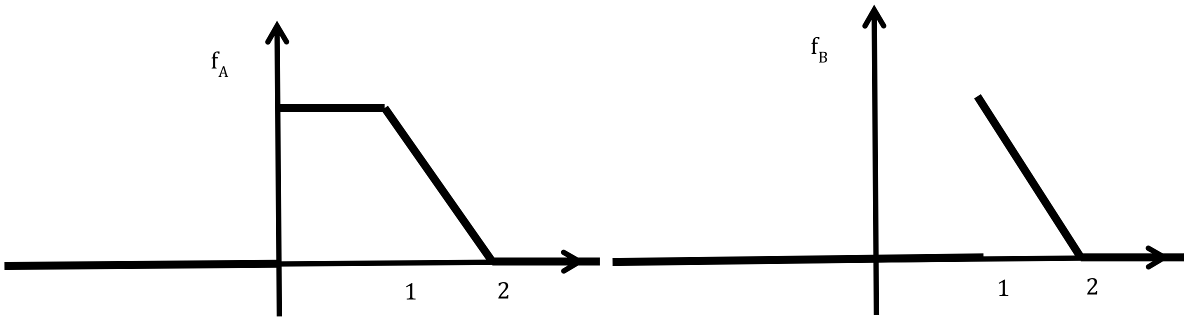
III. Dans le repère (O;i,j,) on considère la conique d'équation : $x^2 - 4xy + 4y^2 + 7x - 12 = 0$

1°/ Indiquer l'équation réduite de cette conique en précisant le repère associé $(\Omega;e_1,e_2)$.

2°/ Indiquer la nature de la conique obtenue et la tracer dans le repère (O;i,j).

IV. La relation entre deux variables x et y se traduit par la relation $(x-1)^2 + 4y^2 = 1$

Dans l'univers de la varialble x on cnsidère le sous-ensemble flou A de fonction d'appartenance f_A (petit et positif) et le sous-ensemble flou B de fonction d'appartenance f_B (égal à 1 et pas inférieur).



1°/ Que peut on dire de la valeur de y quand la variable x est caractérisée par A ?

2°/ Que peut on dire de la valeur de y quand la variable x est caractérisée par B ?

V. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeur réelle dont les valeurs sont données par l'expression :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 9x^2 + 9y^2 + 12xy$$

Déterminer les extremums locaux de cette fonction et préciser leur nature. On justifiera les résultats.

L3 - INFO

année 2013-2014

Mathématiques pour l'informatique

Session de rattrapage

I. Soit A la matrice de la transformation linéaire f exprimée dans la base B=(e_1,e_2,e_3),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

écrire la matrice de f relativement à la base B'=(e_1-e_3 , e_1-e_2 , e_2)

II. Soit Q la forme quadratique définie dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$ par l'expression

$$Q(X) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

1°/ Trouver une nouvelle base $B'=(e_1',e_2',e_3')$ et la matrice de changement de base correspondante dans laquelle l'expression de Q est $Q(X) = ax'^2_1 + bx'^2_2 + cx'^2_3$, où a, b et c sont des nombres réels.

2°/ Relativement à la base B, exprimer $Q(X)$ comme un somme algébrique de carrés de formes linéaires indépendantes.

III. Dans le repère (O;i,j,) on considère la conique d'équation : $x^2 - 4xy + 4y^2 + 7x - 12 = 0$

1°/ Indiquer l'équation réduite de cette conique en précisant le repère associé (Ω;e_1,e_2).

2°/ Indiquer la nature de la conique obtenue et la tracer dans le repère (O;i,j).

IV. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeur réelle par :

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + x^3 + y^4$$

Montrer que le point A (0,0,0) est un point critique.

Est ce que f présente en A un extremum ? Dans le cas positif donner sa nature. Les résultats doivent être justifié.

L3 – INFO - MIAGE

année 2014-2015

Mathématiques pour l'informatique

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à la base B=(e_1,e_2,e_3).

1°/ Montrer que l'on peut définir une nouvelle base B' en posant B'=(f_1,f_2,f_3) en posant

$f_1 = e_1 - 2 e_3$
$f_2 = e_1 + e_2 - e_3$
$f_3 = - e_1 + 3 e_3$

2°/ Expliciter P la matrice de changement de base qui permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur connu dans la base B en fonction des coordonnées du même vecteur dans la base B'.

3°/ Exprimer les coordonnées x',y',z' d'un vecteur exprimé dans la base B' en fonction des coordonnées x, y, z du même vecteur exprimé dans la base B.

4°/ Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 16 & -17 & 9 \end{pmatrix}$

C'est la matrice d'une application linéaire f définie sur E et à valeurs dans E rapporté à la base B=(e_1,e_2,e_3). Ecrire la matrice M de l'application f exprimée dans la base B'.

5°/ La matrice A est-elle triangularisable ? On justifiera la réponse.

6°/ La matrice A est-elle diagonalisable ? On justifiera la réponse.

Exercice 2

Soit Φ la forme quadratique exprimée dans une base B=(e_1,e_2,e_3,e_4) par.

$$\Phi(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 8x_2x_4 + 4x_3x_4$$

1°/ Ecrire Φ sous la forme d'une somme algébrique de carrés de formes linéaires indépendantes.

2°/ Indiquer une matrice de changement de base associée.

L3 – INFO - MIAGE

année 2014-2015

Mathématiques pour l'informatique

Examen

I. Donner la définition de deux matrices congruentes. On sera précis.

II. Soit A la matrice d'une application linéaire f définie dans un espace vectoriel E of dimension 3 relatif à une base base $B = (e_1, e_2, e_3)$. f est donnée par les images des vecteurs de base.

$f(e_1) = 3\, e_1 - 2\, e_2 + e_3$
$f(e_2) = e_1 + e_2 + 2\, e_3$
$f(e_3) = e_1 - 2\, e_2 + 2\, e_3$

1°/ Indiquer la matrice A de f dans la base B.

2°/ Soit c un vecteur de coordonnées (x_1,x_2,x_3) in base B. Indiquer les coordonnées (y_1,y_2,y_3) de l'image de x par f exprimée dans la base B.

III. Soit Q la forme quadratique définie dans la base $B=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ par l'expression

$$Q(X) = 2x_1x_4 + 6x_2x_3$$

1°/ Trouver une nouvelle base $B'=(e_1',e_2',e_3',e_4')$ et la matrice de changement de base correspondante dans laquelle l'expression de Q est $Q(X) = ax'^2_1 + bx'^2_2 + cx'^2_3 + dx'^2_4$, où a, b, c et d sont des nombres réels.

2°/ Relativement à la base B, exprimer $Q(X)$ comme une somme algébrique de carrés de formes linéaires indépendantes.

IV. Dans le repère (O;i,j,k) on considère la quadrique (S) d'équation :

$$2x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + yz + \sqrt{2}(y+z) = 0$$

1°/ Indiquer l'équation réduite de cette quadrique en précisant le repère associé $(\Omega\,; e_1,e_2,e_3)$.

2°/ Indiquer la nature de la conique obtenue comme l'intersection de (S) avec les plans repectivement orthogonaux aux directions de e_1,e_2 et e_3.

V. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeur réelle dont les valeurs sont données par l'expression :

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

Déterminer les extremums locaux de cette fonction et préciser leur nature. On justifiera les résultats.

L3 – INFO-MIAGE

année 2014-2015

Mathématiques pour l'informatique

Session de rattrapage

I. 1°/ Soit A la matrice de la transformation linéaire f exprimée dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

écrire la matrice de f relativement à la base $B'=(e_1-e_3\ ,\ e_1-e_2\ ,\ e_2)$

2°/ Soit g la transformation linéaire f telle que les coordonnées (x',y',z') de l'image du vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$ est donnée par :

$$\begin{cases} x' = 3\,x + y - z \\ y' = -x + y + 2z \\ z' = x - 2y + z \end{cases}$$

Ecrire la matrice M de la transformation g dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$.

3°/ Ecrire la matrice de la transformation fog dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$.

4°/ La matrice A est-elle semblable à une matrice diagonale ?

Si oui, donnez une matrice diagonale D, semblable à A, et une base dans laquelle la transformation f admet D comme matrice.

II. Soit Q la forme quadratique définie dans la base $B=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ par l'expression

$$Q(X) = 2x_1x_4 + 6x_2x_3$$

1°/ Trouver une nouvelle base $B'=(e_1',e_2',e_3',e_4')$ et la matrice de changement de base correspondante dans laquelle l'expression de Q est $Q(X) = ax'^2_1 + bx'^2_2 + cx'^2_3 + dx'^2_4$, où a, b, c et d sont des nombres réels.

2°/ Relativement à la base B, exprimer $Q(X)$ comme une somme algébrique de carrés de formes linéaires indépendantes.

III. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeur réelle par :

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + x^3 + y^4$$

Montrer que le point A (0,0,0) est un point critique.

Est ce que f présente en A un extremum ? Dans le cas positif donner sa nature. Les résultats doivent être justifié.

Mathématiques pour l'informatique

Contrôle continu

Exercice 1

Donner un exemple de deux matrices, non semblables et ayant le même polynôme caractéristique.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à la base B=(e_1,e_2,e_3).

1°/ On définit une application linéaire dans cette base par

$f(e1) = e_1$
$f(e_2) = - e_1 - e_2 + 2 e_3$
$f(e_3) = e_1 - e_3$

Indiquer la matrice de f exprimée dans cette base.

2°/ La matrice A est-elle diagonalisable? On justifiera la réponse. Dans le cas positif on indiquera une matrice diagonale semblable à A ainsi que la matrice de changement de base correspondante. On notera *B'* cette nouvelle base.

3°/ La matrice A est-elle triangularisable? On justifiera la réponse. Dans le cas positif on indiquera une matrice triangulaire semblable à A ainsi que la matrice de changement de base correspondante. On notera *B'* cette nouvelle base.

4°/ Soit u un vecteur de coordonnées (x_1,x_2,x_3) dans la base *B'*. Indiquer les coordonnées (y_1,y_2,y_3) de l'image de u par f exprimée dans la base *B'*.

Exercice 3

Soit Φ la forme quadratique exprimée dans une base B=(e_1,e_2,e_3) par.

$$\Phi(x) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

1°/ Ecrire Φ sous la forme d'une somme algébrique de carrés de formes linéaires indépendantes.

2°/ Indiquer une matrice de changement de base associée.

Mathématiques pour l'informatique

Examen

I. Soient A et B deux matrices associées respectivement aux transformations linéaires f et g dans un espace vectoriel de dimension 3 relativement à la base $\mathcal{B}$ = (e_1, e_2, e_3).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1°/ Indiquer valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A exprimée dans la base $\mathcal{B}$.

2°/ Indiquer valeurs propres et vecteurs propres de la matrice B exprimée dans la base $\mathcal{B}$.

3°/ Montrer qu'il existe une base que l'on indiquera dans laquelle f et g sont représentées par des matrices diagonales.

4°/ Soit C la matrice définie par : $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que C est diagonalisable et indiquer une matrice diagonale semblable à C ainsi que la matrice de changement de base.

II. Dans le repère (O ; i , j) on considère la conique (C) d'équation :

$$(2x+3y)^2 - \sqrt{13}x + 5\sqrt{13}y - \frac{3}{4} = 0$$

1°/ Indiquer un changement de repère (O ; e_1 , e_2) par lequel l'équation de cette conique serait : $\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma x' + \delta y' - \frac{3}{4} = 0$.

2°/ Indiquer un changement de repère (Ω ; e_1 , e_2) par lequel l'équation de cette conique serait : $a\,x''^2 + c\,y'' + d = 0$ ou $a\,y''^2 + c\,x'' + d = 0$

2°/ Indiquer la nature de la conique (C) et la représenter dans le repère (O ; i , j).

III. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeur réelle dont les valeurs sont données par l'expression : f(x,y,z) = $\frac{x^2}{2} + xyz - z + y$

Déterminer les extremums locaux de cette fonction et leur nature. On justifiera les résultats.

IV. On considère deux univers X_1 et X_2, définis par

$$X_1 = \{A, B, C, D, E, F\} \; et \; X_2 = \{M, N\}$$

et un sous ensemble flou X de l'espace produit X_1 x X_2

$$X = \begin{Bmatrix} (A,M) & (B,M) & (D,M) & (F,M) & (A,N) & (C,N) & (D,N) & (E,N) \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{Bmatrix}$$

Calculer la projection de X sur X_2.

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES | USPC Université Sorbonne Paris Cité

L3 – INFO-MIAGE

année 2015-2016

Mathématiques pour l'informatique
Session de rattrapage

I. 1°/ Soit A la matrice de la transformation linéaire f exprimée dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

écrire la matrice de f relativement à la base $B'=(e_1-e_3 \,,\, e_1-e_2 \,,\, e_2)$

2°/ Soit g la transformation linéaire f telle que les coordonnées (x',y',z') de l'image du vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$ est donnée par :

$$\begin{cases} x' = 3\,x + y - z \\ y' = -x + y + 2z \\ z' = x - 2y + z \end{cases}$$

Ecrire la matrice M de la transformation g dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$.

3°/ Ecrire la matrice de la transformation fog dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$.

II. Soit A la matrice de la transformation linéaire f exprimée dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1°/ La matrice A est-elle diagonalisable ?

2°/ Indiquer une base dans laquelle f est représentée par une matrice 'plus simple' que A. On donnera aussi la nouvelle matrice.

III. Etudier, en fonction des valeurs du réel a, le signe du polynôme

$$P(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2ayz$$

On précisera dans tous les cas si le polynôme admet des racines différentes du triplet (0,0,0) et pour une réponse positive on donnera un exemple de racine.

IV. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur réelle par :

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$$

Etudier les extremums de la fonction f.

L3 – INFORMATIQUE

année 2016-2017

Mathématiques pour l'informatique

Contrôle continu

Exercice 1

Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1°/ La matrice est-elle diagonalisable ?

2°/ Réduire la matrice, on notera A' la nouvelle matrice.

3°/ Soit f l'application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même dont la matrice associée est A lorsque E est rapporté à la base $B = (e_1,e_2,e_3)$.
Indiquer une base *B'* dans laquelle la matrice de f est *A'*.

4°/ Soit u un vecteur de coordonnées (x_1,x_2,x_3) relativement à la base *B'*. Indiquer les coordonnées (y_1,y_2,y_3) de l'image de u par f exprimée relativement à la base *B*.

Exercice 2

Soit Φ la forme quadratique exprimée dans une base $B = (e_1,e_2,e_3)$ par.

$$\Phi(\mathrm{x}) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

où x_1, x_2 *et* x_3 sont les coordonnées du vecteur x dans la base *B*.

1°/ Ecrire Φ sous la forme d'une somme algébrique de carrés de formes linéaires indépendantes.

2°/ Indiquer une matrice de changement de base associée.

3°/ Que pouvez vous dire du signe du polynôme P défini par

$$\mathrm{P}(x,y,z) = -x^2 + y^2 - 5z^2 + 6xz + 4yz$$

L3 – INFORMATIQUE

année 2016-2017

Mathématiques pour l'informatique
Examen

I. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1°/ Cette matrice A peut être considérée comme la matrice associée à une transformation linéaire f définie dans un espace vectoriel rapporté à la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Quelle est l'image du vecteur u défini par u = 3 $e_1 + e_2 - e_3$

2°/ Si x, y et z sont les coordonnées d'un vecteur, et x', y' et z' celles de l'image de ce vecteur par f, indiquer les expressions de x', y' et z' en fonction de x, y et z.

3°/ Indiquer une matrice diagonale D semblable à la matrice A.

4°/ Dans quelle base $\mathscr{B}'=(i,j,k)$ la transformation f admet-elle D comme matrice associée ? On définira i, j et k en fonction de e_1, e_2 et e_3

II. Soit E un espace de dimension 5 sur lequel est définie une forme quadratique. Dans la base $\mathscr{B}= (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ son expression pour un vecteur x de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 est définie par :

$$Q(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 5x_5^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_1x_5 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_2x_5 + 2x_3x_4 + 2x_3x_5 + 2x_4x_5$$

1°/ Indiquer la matrice A associée à la forme quadratique exprimée dans la base $\mathscr{B}$.

2°/ Quel est le signe de la forme quadratique ? La réponse doit être justifiée.

3°/ Donner une expression dans la base $\mathcal{B}$, de Q sous forme d'une somme algébrique de carrés de formes linéaires indépendantes.

III. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeur réelle dont les valeurs sont données par l'expression : $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$, où a est une constante positive.
Déterminer les extremums locaux de cette fonction et leur nature. On justifiera les résultats qui devront être donnés en fonction des valeurs de a.

IV. Soient X_1 , X_2 et Y trois ensembles définis par $X_1= \{a, b, c\}$, $X_2=\{x, y\}$ et $Y=\{p, q, r\}$ et une application f définie sur $X_1 x X_2$ par les 6 valeurs : f(a,x)=p ; f(a,y)=p ; f(b,x)=q ; f(b,y)=r ; f(c,x)=r ; f(c,y)=q .
A_1 est un sous-ensemble flou de X_1 $A_1 = \{0,3/a, 0,9/b, 0,5/c\}$
A_2 est un sous-ensemble flou de X_2 $A_2 = \{0,5/x, 1/y\}$
En utilisant le principe d'extension définir le sous-ensemble flou B de Y associé à l'image par f de $A_1 x A_2$. (B = f($A_1 x A_2$))

L3 – INFORMATIQUE

année 2016-2017

Mathématiques pour l'informatique
Session de rattrapage

I. Donner un exemple de deux matrices carrée en dimension 2 ayant mêmes valeurs propres mais qui ne sont pas semblables.

II. Soit A la matrice :A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Cette matrice peut être considérée comme la matrice associée à une transformation linéaire f définie dans un espace vectoriel rapporté à la base $B = (e_1,e_2,e_3)$.

1°/ Soit x un vecteur dont les composantes relativement à la base B sont notées (x_1,x_2,x_3). Indiquez les coordonnées (y_1,y_2,y_3) de l'image par f du vecteur x, exprimées relativement à la base B.

2°/ Montrer que les vecteurs (e1+e2, e3-e2, e1+e2+e3) forment une nouvelle base B'.

3°/ Exprimer la matrice de l'application f dans la base B'.

4°/ La matrice A est-elle semblable à une matrice diagonale ? On justifiera précisément la réponse.
Dans le cas positif, indiquer en utilisant le moins de calculs possible, une matrice diagonale et la matrice de changement de base correspondante.

III. Etudier la nature de la conique dont une équation dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ est donnée par :

$$3\,x^2 + 4\,xy + 3\,y^2 + 2\,y - 1 = 0.$$

On tracera la conique et on précisera ses éléments caractéristiques dans ce repère.

IV. On considère la relation floue définie sur un ensemble à 5 éléments $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$$

1°/ Cette relation floue est-elle une relation d'équivalence ?

2°/ Indiquer l'ensemble des partitions que l'on peut déduire de cette relation.

L3 – INFORMATIQUE

année 2017-2018

Mathématiques pour l'informatique

Contrôle continu

Exercice 1

Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1°/ Calculer le produit AX_0

2°/ La matrice est-elle diagonalisable ? On justifiera la réponse.

3°/ Réduire la matrice, on notera A' la nouvelle matrice.

On précisera la matrice de changement de base correspondante.

4°/ Quelle est la matrice semblable à A obtenue avec la matrice P de changement de base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit Φ la forme quadratique exprimée dans une base $B = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ par.

$$\Phi(x) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$$

où x_1, x_2 x_3 *et* x_4 sont les coordonnées du vecteur x dans la base B.

1°/ Réduire la forme Φ.

2°/ Indiquer une matrice de changement de base associée.

3°/ Ecrire Φ sous la forme d'une somme algébrique de carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice 3

Réduire l'équation de la conique d'équation :

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 7x - 12 = 0$$

Quelle est la nature de la conique ?

L3 – INFORMATIQUE

année 2017-2018

Mathématiques pour l'informatique
Examen

I. On considère la relation de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} \\ u_1 = 1 \quad u_2 = 2 \end{cases}$

1°/ Indiquer l'expression matricielle de ces données.

2°/ En utilisant cette expression matricielle donner l'expression analytique de u_n en fonction de n

II. Soit Φ la forme quadratique exprimée dans une base *B* = (e_1,e_2,e_3) par

$$\Phi(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

où $x_1,\ x_2\ et\ x_3$ sont les coordonnées du vecteur x dans la base *B*.

1°/ Réduire la forme Φ.

2°/ Indiquer une matrice de changement de base associée.

3°/ Ecrire Φ sous la forme d'une somme algébrique de carrés de formes linéaires indépendantes.

4°/ Indiquer une base dans laquelle Φ est représentée matriciellement par la matrice identité.

III. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur réelle par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

Etudier les extrémums de la fonction f.

IV. Soit l'ensemble E={N_1, N_2, N_3, N_4} de 4 points. Sur cet ensemble est définie une distance d par :

$d(N_1,N_2) = 4 \quad d(N_1,N_3) = 4 \quad d(N_1,N_4) = 5 \quad d(N_2,N_3) = 2 \quad d(N_2,N_4) = 3 \quad d(N_3,N_4) = 3$

On définit deux sous-ensembles flous *A* et *B* de E par

$$A = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{Bmatrix} \text{ et } B = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{Bmatrix}$$

1°/ Définir les sous-ensembles A ∩ B , A ∪ B de E et du sous-ensemble AxB de ExE.

2°/ En appliquant le principe d'extension calculer la distance entre les sous-ensembles A et B.

L3 – INFORMATIQUE

année 2017-2018

Mathématiques pour l'informatique
Session de rattrapage

I. Soit A la matrice :A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Cette matrice peut être considérée comme la matrice associée à une transformation linéaire f définie dans un espace vectoriel rapporté à la base $B=(e_1,e_2,e_3)$.

1°/ Soit x un vecteur dont les composantes relativement à la base B sont notées (x_1,x_2,x_3). Indiquez les coordonnées (y_1,y_2,y_3) de l'image par f du vecteur x, exprimées relativement à la base B.

2°/ Montrer que les vecteurs $(e_1+e_2,\ e_3-e_2,\ e_1+e_2+e_3)$ forment une nouvelle base B'.

3°/ Exprimer la matrice de l'application f dans la base B'.

4°/ Soit g la transformation linéaire telle que les coordonnées (x',y',z') de l'image du vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$ est donnée par :

$$\begin{cases} x' = 3\,x + y - z \\ y' = -x + y + 2z \\ z' = x - 2y + z \end{cases}$$

Écrire la matrice M de la transformation g dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$.

5°/ Écrire la matrice de la transformation fog dans la base $B=(e_1,e_2,e_3)$.

6°/ La matrice A est-elle semblable à une matrice 'plus simple' ? On justifiera précisément la réponse et on utilisera le moins de calculs possible.
Dans le cas d'une réponse positive,on indiquera une matrice 'plus simple' et la matrice de changement de base correspondante.

II. On veut étudier la nature de la quadrique dont une équation dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x\,z - \frac{4}{\sqrt{2}}\,x - 4\,y - \frac{4}{\sqrt{2}}\,z - a^2 + 6 = 0$$

Réduire l'équation par un changement de base.
Pourquoi peut-on dire que l'ensemble est un cylindre dont on précisera la direction
Reconnaître l'intersection de la quadrique et du plan d'équation z = 0.

III. Etudier, en fonction des valeurs du réel a, le signe du polynôme

$$P(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2ayz$$

On précisera dans tous les cas si le polynôme admet des racines différentes du triplet (0,0,0) et pour une réponse positive on donnera un exemple de racine.

IV. Etudier les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur réelle par :

$f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$