Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Mathématiques et Calcul : Examen de rattrapage
Mercrcedi 11 juin 2014

L1 : Licence Sciences et Technologies,
mention Mathématiques, Informatique et Applications

Nombre de pages de l'énoncé : 2. Durée 1h30.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

On rappelle les développements limités suivants. Ils sont donnés au voisinage de 0 (n et p sont des entiers quelconques).

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)
\end{aligned}$$

Exercice 1. a) Mettre sous la forme trigonométrique (càd sous la forme $\rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0, \theta \in \mathbb{R}$) le nombre complexe $\Delta = 1 + i\sqrt{3}$.

b) Trouver un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $\dfrac{z^2}{4} + z - i\sqrt{3} = 0$ (les solutions seront données sous la forme algébrique, càd sous la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$).

1+2+3 points
a) $\Delta = 2e^{i\pi/3}$ b) $\delta = \sqrt{2}e^{i\pi/6}$ vérifie $\delta^2 = \Delta$. c) Le discriminant est le nombre Δ introduit au dessus, donc les solutions sont

$$\frac{-1 \pm \delta}{1/2} = -2 \pm 2\sqrt{2}e^{i\pi/6} = -2 \pm (\sqrt{6} + i\sqrt{2})$$

Exercice 2. a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta).$$
b) Soit $\alpha \in [0, \pi/2]$. On définit la suite (u_n) par
$$u_0 = 2\cos(\alpha) \qquad ; \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$
Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_n = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right).$$
c) En déduire la limite de (u_n).

d) On définit les suites
$$v_n = \arccos(u_n/2) \qquad ; \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$
Exprimer v_n puis S_n fonction de α et de n, puis en donner les limites de v_n et S_n lorsque n tend vers l'infini.

e) On pose maintenant
$$w_n = 4^n(2 - u_n).$$
Donner la limite de w_n lorsque n tend vers l'infini.

2+3+2+4+3 points
a) Utiliser $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$. b) Rec facile. c) $\lim = 2\cos(0) = 2$. d) $v_n = \frac{\alpha}{2^n} \to 0$, $S_n = 2\alpha(1 - 2^{-(n+1)}) \to 2\alpha$. e) $u_n = 2 - \frac{\alpha^2}{4^n} + o(4^{-n})$ dc $\lim w_n = \alpha^2$.

Exercice 3. Donner le développement limité au voisinage de 0 de

a) $\dfrac{1}{2 - 4x + 6x^2}$ à l'ordre 2 *b)* $\dfrac{e^x}{1 - 2x}$ à l'ordre 3

c) $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$ à l'ordre 3 *d)* $e^x \sin(x)$ à l'ordre 3

3+3+3+3 points
$$\frac{1}{2 - 5x + x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - 2x + 3x^2} = \frac{1}{2}(1+2x-3x^2+(2x-3x^2)^2+o(x^2)) = \frac{1}{2}(1+2x+x^2+o(x^2))$$
$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1-2x} &= (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + o(x^3)) \\ &= 1 + 3x + (4 + 2 + \frac{1}{2})x^2 + (8 + 4 + 1 + \frac{1}{6})x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + 3x + \frac{13}{2}x^2 + \frac{79}{6}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$
$$\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)} = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^2))(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}
e^x\sin(x) &= (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\\
&= x+x^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)\\
&= x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3)
\end{aligned}$$

Exercice 4. Donner les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0

$$f(x)=\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2} \qquad g(x)=\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x} \qquad h(x)=\frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

3+3+3+3 points. $\lim f=\frac{3}{2}$, $\lim g=0$, $\lim h=\frac{1}{4!}+\frac{1}{8}=\frac{4}{4!}=\frac{1}{6}$

Exercice 5. Soit $\mathcal{B}=\{\vec{u}_1=(1,2),\vec{u}_2=(3,1)\}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x\,,y) & \longmapsto & (x+2y\,,3x-y) \end{array}$$

a) Montrer que f est linéaire.

b) Donner la matrice $M_{f,\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0=\{\vec{e}_1=(1,0),\vec{e}_2=(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

d) Donner la matrice de passage $P=M_{Id,\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$ de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

e) En déduire la matrice $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

f) Soients

$$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,2x-3y=0\} \qquad G=\{f(\vec{u})\,/\,\vec{u}\in F\} \qquad H=\{\vec{v}\in\mathbb{R}^2\,/\,f(\vec{v})\in F\}.$$

Montrer que F,G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Quelles sont leurs dimensions ?

3+3+3+3+5+6 points

a) $f(\alpha u+\beta v)=\dots$ b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ c) liberté d) $P=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ e) On a $P^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned}
M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} &= P^{-1}M_{f,\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}P\\
&= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 5\\ 1 & 8\end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -19\\ -9 & -2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

f) Ss-ev : stablilité par comb. lin. Dimensions = 1, on peut donner des bases (le fait qu'un isomorphisme conserve la dim des ss-ev n'est pas dans le cours).