

## Devoir d'entraînement sur les développements limités

**NB :** Ce devoir a pour but de compléter la feuille de TD6. Il s'agit d'un devoir d'entraînement *facultatif*. Un corrigé détaillé sera distribué ultérieurement pour permettre une *correction autonome*.

### Développement limité de la fonction tangente

Le but de ce devoir est d'établir le développement limité de la fonction tangente en zéro de plusieurs manières différentes. Pour guider les calculs, on rappelle le développement limité de tangente en 0 à l'ordre 8 :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

#### Exercice 1 : Préambule

On rappelle que la fonction tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- (1) Préciser quel est l'ensemble de définition  $D$  de  $\tan$ .
- (2) Justifier que  $\tan$  est de classe  $C^\infty$  sur  $D$ .
- (3) Démontrer que

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

#### Exercice 2 : Développement limité de $\tan$ par la formule de Taylor

On pose  $f(x) = \tan(x)$ .

- (1) Calculer la dérivée seconde  $f''$  et la dérivée troisième  $f^{(3)}$  de  $f$  (on utilisera l'expression  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  pour simplifier les calculs).
- (2) Appliquer la formule de Taylor pour obtenir le développement limité de  $\tan$  en 0 à l'ordre 3.
- (3) Déterminer également le développement limité de  $\tan$  en  $\frac{\pi}{4}$  à l'ordre 3.

#### Exercice 3 : Développement limité du quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$

- (1) Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 5 des fonctions  $\sin$  et  $\cos$ .
- (2) Rappeler le développement limité de  $\frac{1}{1+x}$  en 0 à l'ordre 5.
- (3) Développement limité à l'ordre 5 en 0 du quotient  $\frac{1}{\cos x}$  : En utilisant le fait que  $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$  est la composée de  $x \mapsto \cos x - 1$  et de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ , démontrer que
 
$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$
- (4) En déduire le développement limité de  $\tan$  en 0 à l'ordre 5.

#### Exercice 4 : Développement limité par intégration

On détermine maintenant le développement limité de la fonction tangente en intégrant les développements limités de sa dérivée.

- (1) En partant de la formule de Taylor à l'ordre 1  $\tan x = x + o(x)$ , déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 0 de  $\frac{\tan x}{x}$  et en déduire le développement limité en 0 à l'ordre 2 de  $\tan^2 x$ .
- (2) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la dérivée  $\tan'$  de  $\tan$ , puis, en intégrant ce dernier développement limité, établir le développement limité en 0 à l'ordre 3 de  $\tan$ .

- (3) A partir du résultat de la question précédente (c'est-à-dire le développement limité  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ ), établir comme précédemment le développement limité en 0 à l'ordre 4 de  $\tan^2$ , puis le développement limité en 0 à l'ordre 5 de  $\tan$ .
- (4) Répéter ces opérations pour obtenir le développement limité en 0 à l'ordre 7 de la fonction tangente.

**Exercice 5 : Application à un calcul de limite**

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x) - 2 \tan(x) - 2 \tan^3 x}{x^5} = 2.$$