Notion de famille libre.

Définition :

La famille $(\vec{f_i})_{i\in I}$ de vecteurs de l'espace vectoriel E est dite **libre** si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls. Par exemple, la famille finie $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n})$ est libre si

$$\lambda_1 \cdot \vec{f_1} + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{f_n} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0.$$

Exemples :

- Montrons que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ donnée dans $\mathbb{R}^4$ par

$$\vec{u}_1 = (2,0,3,0),\ \vec{u}_2 = (0,-1,0,0), \vec{u}_3 = (5,-2,0,0)$$

est libre:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad & \cdot\vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0} \\ & \Rightarrow (2\lambda_1 + 5\lambda_3, -\lambda_2 - 2\lambda_3, 3\lambda_1, 0) = (0,0,0,0) \\ & \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

- Montrons que $\{X^2, X(X-1), (X-1)^2\}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad & X^2 + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 (X-1)^2 = 0 \\ & \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (-\lambda_2 - 2\lambda_3)X + \lambda_3 = 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

- Montrons que dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille

  $$\{x \mapsto |x-i|,\ i \in \mathbb{Z}\}$$

  est libre. Supposons que

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{i\in J} \lambda_i |x-i| = 0$$

  où J est une partie finie de $\mathbb{Z}$. Si il existe $i_0 \in J$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, on écrit

  $$|x-i_0| = -\sum_{i\in J\setminus\{i_0\}} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} |x-i|.$$

  Or la fonction écrite à gauche n'est pas dérivable en i_0 alors que celle de droite l'est. Contradiction. Donc, pour tout $i \in J$, $\lambda_i = 0$ et on conclut que la famille est libre.

Définition :
Quand une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.

Remarque: Toute famille contenant $\vec{0}$ est liée puisque $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ est une combinaison linéaire nulle de la famille dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

Proposition :
Toute partie d'une famille libre forme une famille libre.

Remarque: La famille de deux vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ est liée si et seulement si

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}) \quad \text{ou} \quad (\exists \mu \in \mathbb{R},\ \vec{v} = \mu \cdot \vec{u}).$$

Dans ce cas, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

Exemples :

- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille

  $$\{x \mapsto 1,\ x \mapsto \cos^2 x,\ x \mapsto \cos 2x\}$$

  est liée puisque

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1 - 2\cos^2 x + \cos 2x = 0.$$

- $\{X^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$. En effet, toute combinaison linéaire de cette famille est un polynôme et un polynôme ne peut être nul que si tous ses coefficients sont nuls.

Christine Graffigne, Avner Bar-Hen