1 Operatori lineari tra spazi vettoriali normati

Definizione: Siano $(V, \|.\|_V)$ e $(W, \|.\|_W)$ due spazi vettoriali normati. Un operatore lineare da V in W è una funzione $T : V \to W$ tale che

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \ \forall v_1, v_2 \in V, \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Esempi
1) $V = W = \mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(v) = A \cdot v, \text{ con } A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$$

2) $V = C^0([a, b])$, fisso $x_0 \in (a, b)$, $W = R$

$$T : V \to W \text{ definita da } T(f) = f(x_0)$$

3) $V = C^1([a, b])$, $W = C^0([a, b])$

$$T : V \to W \text{ definita da } T(f) = f'$$

Osservazione: T operatore lineare $\implies T(0) = 0$

Definizione: $T : V \to W$ op. lineare, si dice *continuo* se, $\forall v \in V$, T è continuo in v, ovvero:

$$v_n \to v \implies T(v_n) \to T(v)$$

Rispettivamente nella norma di V e W.

Osservazione: Sia $T : V \to W$ op. lineare, allora T è continuo su $V \iff T$ è continuo in $v = 0$.
Dimostrazione
($\implies$) è immediata
($\impliedby$) Verifichiamo che se la proprietà vale per $v = 0$, vale per v qualsiasi.
Sia v qualsiasi, e sia $v_n \to v$; considero $v_n - v \to 0$, quindi, per ipotesi $T(v_n - v) \to T(0)$
Ovvero $T(v_n) - T(v) \to 0$, cioè $T(v_n) \to T(v)$.

Definizione: Sia T op. lineare: $(V, \|.\|_V) \to (W, \|.\|_W)$.
Si dice che T è limitato se:

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \|T(v)\|_W \leq M\|v\|_V \ \forall v \in V$$

ovvero

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M \ \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M$$

Esempi:

1) $T:(\mathbb{R}^2,\|.\|_2)\to(\mathbb{R},|.|)$ definito da $T(v)=v_0\cdot v$ operatore lineare.
T è limitato, $M=\|v_0\|$
2) $T:(C^1([a,b]),\|.\|_{C^1})\to(C^0([a,b]),\|.\|_{C^0})$, $T(f)=f'$ op. lineare.
T è limitato con la scelta $M=1$
3) $T:(L^2(0,1),\|.\|_2)\to(\mathbb{R},|.|)$, $T(f)=\int_0^1 f_0\cdot f dx$ dove $f_0\in L^2(0,1)$
T è limitato con la scelta $M=\|f_0\|_2$ (Tramite disuguaglianza di Holder)
Osservazione: Considerando $T:(L^p(0,1),\|.\|_p)\to(\mathbb{R},|.|)$ definito da $T(f)=\int_0^1 f_0 f dx$ questo è lineare continuo prendendo $f_0\in L^{p'}(0,1)$.

Proposizione: Sia $T:(V,\|.\|_V)\to(W,\|.\|_W$ lineare. Allora

$$T \text{ continuo } \iff T \text{ limitato}$$

Dimostrazione

$(\impliedby)$ Supposto T limitato, basta mostrare che T è continuo in 0, ovvero: se $v_n\to 0$, allora $T(v_n)\to T(0)=0$

$$\|T(v_n)\|_W\le M\|v_n\|_V\to 0$$

$(\implies)$ Supposto T *non limitato* mostriamo T non continuo

$$\sup_{v\in V\setminus\{0\}}\frac{\|T\|_W}{\|v\|_V}=+\infty \implies \exists\{v_n\}\subseteq V\setminus\{0\}:\frac{\|T(v_n)\|_W}{\|v_n\|_V}\to+\infty$$

ovvero, siccome T è lineare:

$$\left\|T\left(\frac{v_n}{\|v_n\|_V}\right)\right\|_W\to+\infty$$

Quindi se considero $u_n:=\frac{v_n}{\|v_n\|_V}$, ha che

$$\begin{cases}\|u_n\|_V=1\\ \|T(u_n)\|_W\to+\infty\end{cases}$$

Posso costruire una successione y_n tale che $y_n\to 0$ ma $T(y_n)\not\to 0$ Ponendo $y_n=\frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}$

- $y_n\to 0$ poiché

$$\|y_n\|_V=\left\|\frac{u_n}{\|T(u_n)_W\|}\right\|_V\to 0$$

- $T(y_n)=1$ perché

$$T(y_n)=T\left(\frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}\right)=\frac{T(u_n)}{\|T(u_n)\|_W}\not\to 0$$

Definizione: Dati $(V,\|.\|_V),(W,\|.\|_W)$ spazi normati

$$\mathcal{L}(V,W):=\{\text{op. lineari limitati da } V \text{ in } W\}$$

È uno spazio vettoriale munito delle operazioni naturali

È possibile introdurre su questo spazio una norma, ponendo

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

ovvero, per definizione, la più piccola costante M tale che $\|T(v)\|_W \leq M\|v\|_V \ \forall v \in V$.
Osservazione: Si può verificare che quella definita sopra è effettivamente una norma.
In particolare

Definizione: Quando $W = (\mathbb{R}, |.|)$

$$\mathcal{L}(V, W) = V' \text{ spazio duale di } V$$

$$\|T\|_{V'} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|T(v)|_{\mathbb{R}}}{\|v\|_V}$$

Esempi: Vedere i casi 1) e 3)