1 Operatori lineari tra spazi vettoriali normati

Definizione: Siano $(V, \|.\|_V)$ e $(W, \|.\|_W)$ due spazi vettoriali normati. Un operatore lineare da V in W è una funzione $T : V \to W$ tale che

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Esempi
1) $V = W = \mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(v) = A \cdot v, \text{ con } A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$$

2) $V = C^0([a, b])$, fisso $x_0 \in (a, b)$, $W = R$

$$T : V \to W \text{ definita da } T(f) = f(x_0)$$

3) $V = C^1([a, b])$, $W = C^0([a, b])$

$$T : V \to W \text{ definita da } T(f) = f'$$

Osservazione: T operatore lineare $\implies T(0) = 0$

Definizione: $T : V \to W$ op. lineare, si dice *continuo* se, $\forall v \in V$, T è continuo in v, ovvero:

$$v_n \to v \implies T(v_n) \to T(v)$$

Rispettivamente nella norma di V e W.

Osservazione: Sia $T : V \to W$ op.lineare, allora T è continuo su $V \iff T$ è continuo in $v = 0$.
Dimostrazione
$(\implies)$ è immediata
$(\impliedby)$ Verifichiamo che se la proprietà vale per $v = 0$, vale per v qualsiasi.
Sia v qualsiasi, e sia $v_n \to v$; considero $v_n - v \to 0$, quindi, per ipotesi $T(v_n - v) \to T(0)$
Ovvero $T(v_n) - T(v) \to 0$, cioè $T(v_n) \to T(v)$.

Definizione: Sia T op. lineare: $(V, \|.\|_V) \to (W, \|.\|_W)$.
Si dice che T è limitato se:

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \|T(v)\|_W \le M\|v\|_V\ \forall v \in V$$

ovvero

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \le M\ \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \sup_{v \in V_0} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \le M$$

Esempi:

1) $T : (\mathbb{R}^2, \|.\|_2) \to (\mathbb{R}, |.|)$ definito da $T(v) = v_0 \cdot v$ operatore lineare.
T è limitato, $M = \|v_0\|$
2) finire