

Alessandro Sala

Appunti di Analisi III

## Indice

<b>1 Introduzione Analisi Complessa</b>	<b>6</b>
<b>2 Limiti</b>	<b>7</b>
2.0.1 Infinito nei complessi . . . . .	7
2.1 Derivabilità . . . . .	8
<b>3 Funzioni olomorfe</b>	<b>9</b>
3.1 Invertibilità locale . . . . .	9
3.2 Ricerca delle primitive - antiderivazione . . . . .	9
<b>4 Funzioni analitiche in campo complesso</b>	<b>11</b>
4.1 Serie di potenze in $\mathbb{C}$ . . . . .	11
4.2 Un altro modo di calcolare i coefficienti $c_k$ . . . . .	12
4.3 Analiticità e olomorfia . . . . .	14
<b>5 Singolarità isolate e loro classificazione</b>	<b>14</b>
5.0.1 Singolarità eliminabile . . . . .	14
5.0.2 Polo . . . . .	15
5.0.3 Singolarità essenziale . . . . .	15
5.1 Sviluppabilità in serie di Laurent . . . . .	15
<b>6 Riconoscere le singolarità</b>	<b>16</b>
6.0.1 Princípio di identità . . . . .	16
6.0.2 Ordine di zeri . . . . .	16
6.1 Ordine dei poli . . . . .	16
6.1.1 Unicità del prolungamento analitico . . . . .	18
<b>7 Teorema dei residui</b>	<b>18</b>
7.1 Calcolo dei residui . . . . .	18
7.2 Definizione e calcolo dell'indice di avvolgimento . . . . .	19
7.2.1 Modalità analitica per calcolare l'indice . . . . .	20
7.3 Teorema dei residui . . . . .	20
<b>8 Applicazioni del teorema dei residui in campo reale</b>	<b>20</b>
8.1 Primo tipo . . . . .	20
8.2 Secondo tipo . . . . .	21
8.2.1 Lemma tecnico di decadimento . . . . .	22
8.3 Terzo tipo . . . . .	22
8.3.1 Lemma di Jordan . . . . .	23
8.4 Quarto tipo . . . . .	23
8.4.1 Lemma del polo semplice . . . . .	24
<b>9 Cenni aggiuntivi sull'analisi complessa</b>	<b>24</b>
9.1 Residuo all'infinito . . . . .	24
9.2 Funzioni polidrome . . . . .	25
9.3 Funzioni armoniche . . . . .	25

10 Analisi funzionale	25
10.01 Norma	26
10.02 Norma su uno spazio funzionale di dimensione infinita	26
11 Integrazione secondo Lebesgue	29
11.01 Misura e funzione misurabile	29
11.02 Definizione di integrale secondo Lebesgue	31
11.03 Proprietà principali dell'integrale di Lebesgue	33
11.1 Contorno Riemann-Lebesgue	33
11.1.1 Integrale proprio	33
11.1.2 Integrale improprio	34
12 Spazi di Lebesgue	37
12.01 Integrale multiplo	37
12.02 Spazi di Lebesgue (o spazi $L^p$ )	38
12.03 Caso limite L' limite	39
12.1 Risultati di confronto	40
12.1.1 Disegualanza di Holder	41
12.1.2 Conseguenze di Holder sul confronto tra i vari spazi	41
12.2 Approssimazione con funzioni regolari	42
12.3 Supporto e Classe $C_0$	43
12.4 Prodotto di convoluzione	43
12.5 Teorema fondamentale del calcolo	45
13 Operatori lineari tra spazi vettoriali normati	47
14 Distribuzioni	49
14.1 Convogenza	51
14.2 Delta di Dirac	52
14.2.1 Ovvie generalizzazioni	52
14.2.2 Delta	53
14.2.3 Deteriorazione di distribuzioni	53
14.2.4 Motivo della definizione di derivata	54
14.3 Esempi di distribuzioni	54
15.1 Generalizzazione	55
15.1.1 Operatori differenziali	55
16 Spazi di Sobolev	55
16.0.1 Disegualanza di Poincaré	57
17 Spazi di Hibert	58
17.1 Disegualeganza di Cauchy-Schwarz	58
17.1.1 Legge del paralleogramma	59
17.1.2 Teorema di proiezione su un convesso chiuso	60
17.2 Teoremi di rappresentazione	63
17.2.1 Teorema di Riesz	63
17.2.2 Forme bilineari	63
17.2.3 Teorema di Lax Milgram	65
17.2.4 Commenti sulla proprietà variazionale di u	65

<b>18 Equazioni alle derivate parziali</b>	<b>66</b>
18.1 Formulazione variazionali di problemi ellittici . . . . .	66
18.1.1 PDE ellittiche del secondo ordine . . . . .	66
18.1.2 Formulazione variazionale del problema di Dirichlet . . . . .	67
18.1.3 Formulazione variazionale del problema di Neumann . . . . .	67
18.1.4 Esistenza delle soluzioni . . . . .	67
18.1.5 Esistenza delle soluzioni per Neumann . . . . .	68
18.1.6 Richiamo di Analisi Vettoriale . . . . .	69
18.1.7 Dimostrazione proposizione di Dirichlet . . . . .	69
<b>19 Serie di Fourier in spazi di Hilbert</b>	<b>70</b>
19.0.1 Convergenza in $H$ . . . . .	71
19.0.2 Sottospazio generato . . . . .	71
19.0.3 Disugualanza di Bessel . . . . .	71
19.0.4 Dimostrazione teorema di convergenza delle serie di Fourier	72
<b>20 Serie di Fourier in <math>L^2</math></b>	<b>74</b>
20.0.1 Modi equivalenti di scrivere (*) . . . . .	74
<b>21 Applicazioni delle serie di Fourier alle equazioni differenziali</b>	<b>76</b>
<b>22 Trasformata di Fourier</b>	<b>77</b>
22.1 Varianti in letteratura . . . . .	78
22.2 Operatore Trasformata . . . . .	78
22.3 Trasformate notevoli . . . . .	78
22.4 Teorema di Riemann-Lebesgue . . . . .	79
22.5 Proprietà algebriche . . . . .	80
22.6 Proprietà differenziali . . . . .	80
<b>23 Applicazione della trasformata di Fourier alle equazioni differenziali</b>	<b>81</b>
23.1 Esempio . . . . .	81
23.2 Formule di inversione per la trasformata di Fourier in $L^1$ . . . . .	82
23.3 Trasformata di Fourier in $L^2$ . . . . .	82
23.3.1 Altre proprietà di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}$ . . . . .	83
23.3.2 Calcolo nella pratica . . . . .	84
<b>24 Trasformata di Fourier di distribuzioni</b>	<b>85</b>
24.1 Spazio delle funzioni temperate . . . . .	85
24.2 Lista trasformate studiate . . . . .	87
<b>25 Problemi di Cauchy per l'equazione del calore e delle onde</b>	<b>87</b>
25.1 Problema di Cauchy per l'equazione del calore . . . . .	88
25.2 Effetto regolarizzante dell'operatore calore . . . . .	89
25.3 Problema di Cauchy per l'equazione delle onde . . . . .	90

### 25.3 Problema di Cauchy per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Ipotesi:**  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$   
Spezzando (P) in due problemi distinti

$$(P_1) \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \\ v(x, 0) = u_0(x) \\ v_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

Se trovo  $v$  e  $w$  soluzioni dei due problemi  $\implies u = v + w$  soluzioni di (P)  
Risolvo ( $P_1$ )

1.  $\widehat{v_{tt}} - \widehat{v_{xx}} = 0$ , se  $v$  sufficientemente regolare

$$(\widehat{v})_{tt} = -\xi^2 \widehat{v}$$

$$\widehat{v}(\xi, 0) = \widehat{u}_0(\xi)$$

$$\widehat{v}_t(\xi, 0) = 0$$

Problema di Cauchy per un'ODE (lineare, omogenea del II ordine) Completare

$$\implies \varphi(t) = C_1 e^{i\xi t} + C_2 e^{-i\xi t}$$

Imponiamo i dati iniziali

$$\varphi(0) = C_1 + C_2 = \widehat{u}_0(\xi)$$

$$\varphi'(0)|_{t=0} = i\xi C_1 e^{i\xi t} - i\xi C_2 e^{-i\xi t}|_{t=0} = i\xi C_1 - i\xi C_2 = 0 \iff C_1 = C_2$$

Quindi  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \widehat{u}_0(\xi)$

$$\implies \varphi(t) = \widehat{v}(\xi, t) = \frac{1}{2} \widehat{u}_0(\xi) e^{i\xi t} + \frac{1}{2} \widehat{u}_0(\xi) e^{-i\xi t}$$

2. Ricavo  $v$  a partire da  $\widehat{v}$ , ricordando la regola di trasformazione (traslazione):

$$v(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)]$$

Somma di due onde, (progressiva e regressiva) che hanno stessa forma di  $u_0$  e metà ampiezza Procedendo in maniera analoga:

$$w(x, t) = \frac{1}{2}(U_1(x+t) - U_1(x-t)) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$$

Conclusione: **Formula di d'Alembert**

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$$

#### Commenti

- Non c'è effetto regolarizzante, nelle ipotesi sopra  $u$  è di classe  $C^2(\mathbb{R})$ . Si può dimostrare che D'Alembert vale più in generale.
- La velocità di propagazione è finita

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Funzione coseno, seno

$$|e_x(\cos y + i \sin y)| = |e_x| |\cos y + i \sin y| = e_x = 0 \quad \forall z$$

$$e_z = 0 \iff |e_z| = 0$$

$$e_{z_1+z_2} = e_{z_1} e_{z_2}$$

Questo implica che la funzione esponenziale nel campo complesso è periodica di periodo  $T = 2\pi i$ . Inoltre,

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi))$$

$S \in z = x \in R \iff e_z = e_x \iff$  estensione della funzione reale

$$z = x + iy \iff e_z = e_x \cdot e_{iy} = e_x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

E' estensione della funzione esponenziale nel campo dei reali

$$f(z) = e_z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$$

Questa ultima funzione non è definita  $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = P(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \text{ con } P, Q \text{ funzioni polinomiali}$$

ciate

In questo ultimo caso è necessaria calcolare manualmente le funzioni  $u, v$  associate

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

$$0 = (\Re z, \Im z) \cdot a = (\Re z) f + \Im z f \iff |z| = (z) f, |z| = (z) f$$

$$\Re z = (z) f \iff z = x + iy$$

$$0 = (\Re z, \Im z) \cdot a = (\Re z) f + \Im z f \iff f(z) = Re_z, z = x + iy, n = 0, a = iy_0$$

$$f(z) = zo \in \mathbb{C}, zo = 0, x = 0, a = iy_0$$

Esempio di funzione elementare

$$f \leftrightarrow u, a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dunque ad ogni funzione complessa è possibile associare due funzioni reali in

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Numeri complessi:  $z = x + iy$  dove  $x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1$

Una funzione di variabile complessa è una funzione  $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookleftarrow \mathbb{C}$

Definizione

Definizione Amalisi Complessa

1. Introduzione Amalisi Complessa

$$\forall t > 0, x \mapsto u(x, t) \text{ è diversa da } 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ovvero: anche se  $u(x)$  è a supporto compatto

La formula mostra anche quella che si dice *velocità di propagazione infinita*. Per le proprietà del prod. di convoluzione.

## 2.5.2. Effetto regolarizzante dell'operatore calore

convergenza dominata.

Per Planck, inoltre il limite per  $t \rightarrow 0$  passa sotto integrabile per

$$0 \leftarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\eta_0(\xi)| e^{-\xi t} d\xi \leftarrow$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\eta_0(\xi)| e^{-\xi t} d\xi =$$

$$\|u(x, t - u_0(x))\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-1} \|u(\xi, t - u_0(\xi))\|_{L^2}^2 =$$

Infatti

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = u_0(x) \text{ in } L^2(\mathbb{R})$$

- Se il prodotto scritto ha senso per  $t < 0$ , si può far vedere che:

• Avendo preso  $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ , il prodotto di convoluzione ha senso ( $u_0 \in L^2$ , gaussiana  $\in L^1$ )

Commenti

$$u(x, t) = (x, t) * u_0(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} = (t, x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} = (t, x) \cdot (t, x) \cdot u_0(x)$$

$$u(x, t) = \mathcal{F}_{-1}^{-1}(\eta_0(\xi) * ((\xi - x)^{-1} \mathcal{F}_{-1}^{-1}))$$

3. Determinare  $u$  a partire da  $u$

$$\phi(t) = \phi_0(\xi) \iff \phi(t) = \eta_0(\xi) e^{-\xi t}$$

$$\begin{cases} \phi(t) = \eta_0(\xi) \\ \phi'(t) = -\xi \phi(t) \end{cases} \iff \begin{cases} \phi(t) = C e^{-\xi t} \\ \phi'(t) = -\xi C e^{-\xi t} \end{cases}$$

- Se poniamo  $\phi(t) = u(\xi, t)$  (per fissato), il problema risulta da  $\phi$ :

Sono funzioni definite  $\forall z \in \mathbb{C}$

Come per la funzione esponenziale sono estensioni delle funzioni reali  
Dunque se  $z = x \in \mathbb{R} \implies \cos z = \cos x$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

$\implies \cos z$  è periodica sia nel campo dei reali sia nel campo dei complessi

Inoltre

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Per le altre funzioni valgono proprietà analoghe essendo definite come estensioni

**Formule alternative trigonometriche**

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

## 2 Limiti

**Definizione:**

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \text{acc}(\Omega), l \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \forall V(l) \exists u(z_0) \text{ tc } \forall z \in (u(z_0) \cap \Omega \setminus \{z_0\}), f(z) \in V(l)$$

**Definizione di continuità**

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in a(\Omega) \cap \Omega, f \text{ continua } z_0 \iff \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

**Osservazioni**

$$z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, l = l_1 + il_2, f = u + iv$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = l_1 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = l_2 \end{cases}$$

Con le stesse notazioni

$$f \text{ continua in } z_0 \iff u, v \text{ continue in } (x_0, y_0)$$

Sono continue (sul loro dominio di definizione) tutte le funzioni elementari introdotte nella lezione scorsa

Vale l'algebra dei limiti e il teorema del limite della funzione composta ( $\implies$  composizione di continue rimane continua)

Vale il teorema di unicità del limite

### 2.0.1 Infinito nei complessi

Un intorno di  $\infty$  nei complessi è il complementare di un qualsiasi disco

$$z \rightarrow \infty \iff z \in u(\infty) \iff |z| > R \iff |z| \rightarrow +\infty$$

$$f(z) \rightarrow \infty \iff f(z) \in u(\infty) \iff |f(z)| > R \iff |f(z)| \rightarrow +\infty$$

$u_{tt} - \Delta u = f$  equazione delle onde (ipbolica)

Ad entrambe è associata l'equazione di Poisson  $-\Delta u = f$  (ellittica)  
In dimensione  $n = 2$ , le equazioni omogenee diventano

$$u_t - u_{xx} = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{tt} & u_{tx} \\ u_{xt} & u_{xx} \end{pmatrix} \quad \det A = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A < 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A > 0$$

Si ha una terminologia simile alla classificazione delle coniche

### 25.1 Problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Ipotesi:**  $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$

**Strategia:** Applicare  $\mathcal{F}_{(x \rightarrow \xi)}$  (Fourier rispetto a  $x$ )

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(u(x, t)) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-i\xi x} dx$$

1. Trasformare il problema

$$\hat{u}_t - \widehat{u_{xx}} = 0$$

$\hat{u}_t = (\hat{u})_t$  purché  $u$  sia sufficientemente regolare

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-i\xi x} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-i\xi x} dx$$

$$\widehat{u_{xx}} = (i\xi)^2 \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$$

L'equazione soddisfatta da  $\hat{u}$  è

$$(\hat{u})_t + \xi^2 \hat{u} = 0$$

Il dato iniziale trasformato è

$$\hat{u}(\xi, 0) = \int_{\mathbb{R}} u_0 e^{-i\xi x} dx$$

Il problema risolto da  $\hat{u}$  è

$$\begin{cases} (\hat{u})_t + \xi^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

Ovvero una ODE, lineare, omogenea, del I ordine.

$u_t - \Delta u = f$  equazione del calore (parabolica)

Si tratta di problemi di evoluzione, ovvero l'incognita è  $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$

## e delle onde

## 25 Problemi di Cauchy per l'equazione del calore

Queste due equazioni indicano che  $u$ ,  $v$  sono differenziali in  $(x_0, y_0)$ , con

$$\begin{aligned} u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= u(x_0, y_0) + (gh_1 + ah_2) \\ u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= u(x_0, y_0) + (ah_1 - gh_2) \\ u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= u(x_0, y_0) + (a + i\beta)(h_1 + ih_2) + g_1 + gh_2 \\ ( \iff ) \text{Per } H^p_f(z_0) = a + i\beta \in \mathbb{C} &\iff f(z_0) = f(y_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(y_0) + (a + i\beta)(h_1 + ih_2) + g_1 + gh_2 \end{aligned}$$

### Dimostrazione

$$f_r(z_0) = u_y(x_0, y_0) + iu_x(x_0, y_0)$$

$$f_r(z_0) = u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

(sistema, condizione di cauchy riemann) Inoltre, in tal caso

$$\text{Inoltre } \begin{cases} u_y(x_0, y_0) = -u_x(x_0, y_0) \\ u_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

$f$  derivabile in  $z_0 \iff u, v$  differenziabile in  $(x_0, y_0)$ .

$$f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \Omega \cap \text{acc}(f), z_0 = x_0 + iy_0, f = u + iv$$

**Teorema (caratterizzazione della derivabilità)**

di  $f$  (Un esempio è  $f(z) = Im z$ )

Attenzione Se  $u, v$  sono differenziabili ciò non implica la differenziabilità/derivabilità

Questa ultima è la definizione di derivabilità

Dove  $\lambda$  è la derivata prima della funzione nel punto  $z_0$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda \cdot h + o(h) \quad o(h) \leftarrow 0$$

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

e tale limite si dice  $f'(z_0)$

$$f \text{ derivabile (in senso complesso) in } z_0 \iff \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

$$f : \Omega \subset \mathbb{C}, z_0 \in \text{acc}(f) \cup \partial \Omega$$

**Dimostrazione:**

### 2.1 Derivabilità

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S} &\leftarrow \mathcal{S} \\ \mathcal{S} &\leftarrow \mathcal{S} \\ \mathcal{F} : \mathcal{L}_z &\leftarrow \mathcal{L}_z \\ \mathcal{F} : \mathcal{L}_t &\leftarrow \mathcal{L}_t \end{aligned}$$

Ricapitolando, sono state studiate le seguenti trasformate:

$$\begin{aligned} 3. x = \mathcal{F}(x \cdot 1) &= i(1) = 2\pi i(\delta_0), \\ 2. \mathcal{I} = \frac{\delta_0}{z} = 2\pi \delta_0 &= (2\pi)\delta_0, \text{ poiché} \\ 1. \mathcal{T} = \delta_0 &= I = \delta_0 \end{aligned}$$

Esempi

$$\begin{aligned} \langle \delta_0, \phi \rangle &= \langle \delta_0, \phi \rangle = \langle \delta_0, \phi \rangle = \langle \delta_0, \phi \rangle \\ \int \mathcal{F} \cdot \phi &= \int \mathcal{F} \cdot \phi = \langle \delta_0, \phi \rangle = \langle \delta_0, \phi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \mathcal{T} = \delta_0 &\iff \\ \int \mathcal{F} \cdot \phi &= \int \mathcal{F} \cdot \phi = \langle \delta_0, \phi \rangle = \langle \delta_0, \phi \rangle \end{aligned}$$

Dimostrazione

$$\langle \mathcal{F}, \phi \rangle = \langle \mathcal{F}, \phi \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \mathcal{F}, \phi \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \mathcal{F}, \phi \rangle$$

Tutte le proprietà di  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  valgono anche in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

$$3. Si ha anche \mathcal{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ (vedere sopra)}$$

Invertione:  $\mathcal{F} = (2\pi)^{-n} \mathcal{I}$

$$\text{Infatti } \{\phi_h\} \leftarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \iff \phi_h \leftarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \iff \langle \mathcal{I}, \phi_h \rangle \leftarrow 0 \iff \langle \mathcal{I}, \phi_h \rangle \leftarrow 0$$

$$\{\phi_h\} \leftarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \iff \langle \mathcal{F}, \phi_h \rangle \leftarrow 0 \iff$$

2. Verifichiamo che  $\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\text{Quindi } \langle \mathcal{F}, \phi \rangle \text{ ha senso perché } \mathcal{F} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \iff \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

### 3 Funzioni olomorfe

**Definizione**  
 $f$  si dice olomorfa su  $\Omega$  se è derivabile in  $z_0 \forall z_0 \in \Omega$

#### 3.1 Invertibilità locale

**Teorema**  
Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa in  $\Omega$ , e sia  $z_0 \in \Omega$  tale che  $f'(z_0) \neq 0$  allora  $f$  è "localmente invertibile in  $z_0$ " ( $\exists u(z_0)$  tale che  $f|_{u(z_0)}$  invertibile)  
E la funzione inversa  $f^{-1}$  è derivabile in senso complesso in  $f(z_0)$  e

$$(f^{-1})'|_{z_0} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

**Dimostrazione**

$\Phi(u, v)$  definito su  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \Omega$ , se  $\det J\Phi(x_0, y_0) \neq 0 \implies \Phi$  "localmente invertibile" e

$$J\Phi^{-1}(\Phi(x_0, y_0)) = (J\Phi(x_0, y_0))^{-1}$$

Dunque se  $f = u + iv$  si riformula il teorema con  $\Phi = (u, v)$

$$J\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \implies \det J\Phi(x_0, y_0) = \alpha^2 + \beta^2 = |f'(z_0)|^2$$

Poiché  $f' = \alpha + i\beta$  e l'ipotesi del teorema è che  $|f'(z_0)|^2 \neq 0$

$$J\Phi^{-1}(\Phi(x_0, y_0)) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\implies (f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\overline{f'(z_0)}}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

#### 3.2 Ricerca delle primitive - antiderivazione

**Problema:** Data  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  esiste? unica?  $F : \Omega \subseteq \mathbb{C}$  olomorfa in  $\Omega$  tale che  
 $F'(z) = f(z)$

Una tale  $F$  si dice **primitiva** di  $f$ .

**Richiamo - Teorema fondamentale del calcolo:** Data  $f : (a, b) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora una primitiva di  $f$  è data da

$$F(x) = \int_a^x f$$

**Definizione:**  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{\text{distribuzioni temperate}\}$

**Esempi**

1.  $u(x) = p(x)$  polinomio in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , dico che  $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi_h \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u}{p} p \varphi_h \right| dx \leq \left\| \frac{u}{p} \right\|_{L^1} \|p \varphi_h\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \text{ se } \varphi_h \rightarrow 0$$

dove  $p$  polinomio tale che  $u/p \in L^1(\mathbb{R})$

2.  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  si dice a *crescita lenta* se  $u = qw$  con  $q$  polinomio e  $w \in L^1(\mathbb{R})$ , Tutte le funzioni a crescita lenta stanno in  $\mathcal{S}'$ . Per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \varphi \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |w q \varphi| \leq \|w\|_{L^1} \|q \varphi\|_{L^\infty}$$

Quindi, se  $\varphi_h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\|q \varphi_h\|_\infty \rightarrow 0$

3. Come caso particolare:  $u \in L^p(\mathbb{R}) \implies u$  è a crescita lenta, e quindi sta in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Data  $u \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $u = qw$  con  $q$  polinomio e  $w \in L^1(\mathbb{R})$ .

- $u \in L^1(\mathbb{R}) \rightarrow$  prendo  $q = 1$ ,  $w \in L^1(\mathbb{R})$
- $u \in L^\infty(\mathbb{R}) \implies$  prendo  $q : 1/q \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $u = q \cdot \frac{u}{q}$ ,  $w = u/q \in L^1(\mathbb{R})$  applicando Holder.
- $u \in L^p(\mathbb{R}) \implies$  prendo  $q : 1/q \in L^{p'}(\mathbb{R})$ ,  $u = q \cdot \frac{u}{q}$ ,  $w = \frac{u}{q} \in L^p(\mathbb{R})$ , sempre per Holder.

4.  $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,  $D^{(k)} \delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}), \varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \langle \delta_0, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

Avendo la convergenza uniforme di  $\varphi_h$ , si avrà anche la convergenza puntuale (in  $\varphi_h(0)$ ).

**Altre osservazioni su  $\mathcal{S}'$**

1.  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \implies T$  può agire più in generale su funzioni test di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$   
Infatti, se  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , posso definire

$$\langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \lim_{h \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi_h \rangle \text{ dove } \varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_h \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

2. Se  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , allora vale:

$$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } \varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

**Trasformata di Fourier in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$**

Data  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , definisco  $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  come

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

**Osservazioni**

$$\int_a^b \omega_1 + i\omega_2 = \int_a^b (u + iu)(r_1 + ir_2) dt = \int_a^b (ur_1 - ur_2) + i(r_1^2 - r_2^2) dt =$$

**Distribuzione** Data  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dato  $\gamma$  continuo in  $\mathbb{C}$  parametrizzata da una funzione  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $r(t) = r_1(t) + ir_2(t)$

$$\int_a^b f(r(t))r'(t) dt =: zp(z) \int_a^b f(z) dz$$

**Note:** se chiusa  $\Rightarrow$  non cambia se sostituisco  $\gamma$  con un circuito omotopico.  
Dunque  $F = U + iV$  dove  $U$  potenziale per  $w_1$ ,  $V$  potenziale per  $w_2$

L'implicazione inversa è vera se  $\mathbb{C}$  è semplicemente连通的

$f$  antinette primitiva  $\Leftrightarrow \omega_1$  esatta  $\Leftrightarrow f$  olomorfa  $\Leftrightarrow u_i$  chiuso

Ovvero se la funzione  $f$  soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann dunque se  $f$  chiuso

Concideremo che dire  $f$  antinette primitiva  $\Leftrightarrow \omega_1, \omega_2$  esatte  $\Leftrightarrow w_1, w_2$  olomorfa

ovvero  $U$  potenziale per  $w_1$ :  $= u dx - v dy$

$$\left. \begin{aligned} A_y &= U_x - iU_y \\ A_x &= U_y + iU_x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} U_y &= -v \\ U_x &= u \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} F_y &= U_x - iU_y = A_y + iA_x = f = u + iv \\ f &= u + iv, F = U + iV \quad (\text{f data, } F \text{ incognita}) \end{aligned} \right.$$

**Esistenza**

N.B. vale se  $\mathbb{C}$  è connesso

$\Leftrightarrow u$  costante,  $v$  costante

$G = u + iv$ ,  $G' = u_x - iv_y = v_y + iu_x$ ,  $G' = 0 = 0$

$$G' = (F_1 - F_2)' = f - f = 0$$

$G = F_1 - F_2$ , Tes:  $G$  è costante,  $\dim:$

•  $F_1, F_2$  primitiva di  $f \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : F_1 - F_2 = \lambda$

•  $F$  primitiva di  $f$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \Leftrightarrow F + \lambda$  primitiva di  $f$  poiché  $(F + \lambda)' = F' + \lambda' = f$

**Unicità:** una primitiva, se esiste, è univocamente determinata a meno di costante additiva.

E tutte le altre primitive si ottengono aggiungendo una costante reale

$\phi_h \in D(\mathbb{R}^n) : \phi_h \leftarrow 0 \text{ in } S(\mathbb{R}^n) \iff (T, \phi_h) \leftarrow 0$

**Definizione:** Una distribuzione  $T \in D'(\mathbb{R}^n)$  si dice distribuzione temperata se

### 24.1 Spazio delle funzioni temperate

$$\leq \sup_{\mathbb{R}^n} \|D^\alpha(x_\beta \phi_h) - D^\alpha(x_\beta \phi)(1+x^2)\| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+x^2} dx < 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|D^\alpha(x_\beta \phi_h) - D^\alpha(x_\beta \phi)|(1+x^2)} dx \leq$$

$$(Poché rispettivamente \mathcal{G}_\alpha D_\beta = D_\beta(\mathcal{G}_\alpha), \mathcal{G}_\alpha D_\beta \phi = D_\beta(\mathcal{G}_\alpha \phi))$$

$$\mathcal{G}_\alpha D_\beta \phi \leftarrow \mathcal{G}_\alpha D_\beta \phi \text{ uniformemente su } \mathbb{R}^n$$

2.  $F : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$  è continua, ovvero  $\phi_h \leftarrow \phi$  in  $S(\mathbb{R}^n) \iff \phi_h \leftarrow \phi$  in  $S(\mathbb{R}^n)$ .

1. Data  $\{\phi_h\} \subset D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$  (Riferimento a convergenza in  $D$ )

### Osservazioni

Aa, g,  $x_\alpha D_\beta \phi_h \leftarrow x_\alpha D_\beta \phi$  uniformemente su  $\mathbb{R}^n$

**Definizione:** Data  $\{\phi_h\} \subset S(\mathbb{R}^n)$ ,  $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ , diciamo che  $\phi_h \leftarrow \phi$  in  $S(\mathbb{R}^n)$  se

Si utilizzano quindi funzioni test in  $S(\mathbb{R}^n)$ . Si introduce quindi una convergenza non può avere supporto compatto. N.B. trasformata di una  $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$  è analitica, quindi

$$\phi \in D(\mathbb{R}^n) \iff \phi \in D(\mathbb{R}^n)$$

La definizione posta non ha senso, perché:

$$\langle T, \phi \rangle := \langle T, \phi \rangle$$

$T$

$$\int_{\mathbb{R}^n} du = \int_{\mathbb{R}^n} vu$$

**Idea:** Scattare  $T$  sulle funzioni test, dal momento che sappiamo

Problema: Data  $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ , come definire  $T$ ?

### 24 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Riformulazione del calcolo di  $F$

$$F(z) = \int_{\gamma: z_0 \rightarrow z} f$$

Questo implica che

$$\oint_{\gamma} f = 0$$

**Teorema di Morera**

$$\oint_{\gamma} f = 0 \quad \forall \gamma \text{ circuito } \subseteq \Omega \implies f \text{ olomorfa}$$

**Teorema di Cauchy**

$f$  olomorfa su  $\Omega \implies \oint f$  non cambia se sostituisco un circuito  $\gamma \subseteq \Omega$  con uno ad omotopio (In particolare, se  $\gamma$  omotopio ad un punto  $\oint_{\gamma} f = 0$ )

## 4 Funzioni analitiche in campo complesso

**Definizione**

$f : \Omega \text{ aperto} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  si dice analitica su  $\Omega$  se  $\forall z_0 \in \Omega, \exists u(z_0)$  tale che

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in u(z_0)$$

### 4.1 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k$$

$$S_N(z) := \sum_{k=0}^N c_k (z - z_0)^k$$

**Tipi di convergenza**

La serie conv. puntualmente in  $z \in \mathbb{C}$  se

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(z) \in \mathbb{C}$$

La serie conv. uniformemente in  $\Omega$  a  $S(z)$  se

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{z \in \Omega} |S_N - S(z)| = 0$$

La serie conv. assolutamente in  $z \in \mathbb{C}$  se converge

$$\sum_{k \geq 0} |c_k| |z - z_0|^k$$

**Dominio di convergenza della serie**

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : \text{la serie converge puntualmente in } z\}$$

- $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h$  (in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ) perché  $\hat{u}_h$  è di Cauchy: infatti

$$\|\hat{u}_h - \hat{u}_k\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|u_h - u_k\|_2 \text{ (identità di Plancherel)}$$

e la successione è di Cauchy

- $\lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h$  è indipendente dalla scelta di  $u_h$ :  $u_h \xrightarrow{L^2} u, v_h \xrightarrow{L^2} v$

Dunque  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{v}_h$   
perché  $u_h - v_h \xrightarrow{L^2} 0$  Plancherel  $\hat{u}_h - \hat{v}_h \rightarrow 0$

- Se  $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ , allora le trasformate coincidono

Infatti, prendendo  $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tale che (possibile tramite mollificatori)

$$\begin{cases} u_h \xrightarrow{L^1} u \\ u_h \xrightarrow{L^2} u \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{cases} \hat{u}_h \xrightarrow{L^\infty} \hat{u} & \text{Trasformata in } L^1, \text{ perché } \mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty \text{ continuo} \\ \hat{u}_h \xrightarrow{L^2} \hat{u} & \text{Trasformata in } L^2, \text{ per definizione di } \mathcal{F} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

- Vale l'id. di Plancherel in  $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Infatti, presa  $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :  $u_h \xrightarrow{L^2} u$ :

$$\|u_h\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}_h\|_{L^2}^2 \quad \forall h$$

Passando al limite si ottiene l'identità.

### 23.3.2 Calcolo nella pratica

Basta osservare che la successione

$$\begin{aligned} u_h &= u \cdot \chi_{(-h, h)} \\ u_h &\rightarrow u \text{ in } L^2(\mathbb{R}) \\ \implies \hat{u}_h &\rightarrow \hat{u} \text{ in } L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Per Plancherel.

Qunidi,

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h(\xi) \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} u_h(x) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

La formula di inversione vale in  $L^2$ , basta prendere  $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), u_h \xrightarrow{L^2} u$   
Sappiamo:

$$\check{u}_h = (2\pi)^{-n} \hat{\check{u}}_h \quad \forall h$$

Basta passare al limite per  $h \rightarrow +\infty$

$$\check{u} = (2\pi)^{-n} \hat{\check{u}}$$

$$\begin{aligned} u_h &\in S \\ u_h &\leftarrow u \in T^2 \end{aligned}$$

(\*)

Esiste una tale  $u_h$  perché  $C_0(\mathbb{R}^n)$  è denso in  $L_2(\mathbb{R}^n)$ .

Idea

Dove  $C_r(z_0)$  è una circonferenza centrata in  $z_0$  di raggio  $r$  percorso una volta in senso antiorario parametrizzato  $r(t) = z_0 + re_t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , servibile anche come  $(x_0 + r \cos t) + i(y_0 + r \sin t)$

$$I_r := \int_{C_r(z_0)} f(z) dz$$

Fissato  $r \in (0, R)$ , è fissato  $k \geq 0$ , calcoliamo  $\int_{C_r(z_0)} f(z) dz$ . Si  $f$  analitica in  $\Omega$ , sia  $z_0 \in \Omega$ ,  $R :=$  raggio di  $\Omega$ .

## 4.2 Un altro modo di calcolare i coefficienti $c_k$

$$\begin{aligned} & \text{Si ottiene infine} \\ & f(z) = \sum_{k \geq 1} c_k (z - z_0)^k = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \dots \\ & f'(z) = \sum_{k \geq 1} k c_k (z - z_0)^{k-1} = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \\ & f''(z) = \sum_{k \geq 1} k(k-1)c_k (z - z_0)^{k-2} = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \\ & \vdots \\ & f^{(n)}(z) = \sum_{k \geq 1} k(k-1)\dots(k-n+1)c_k (z - z_0)^{k-n} = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Calcolo dei coefficienti } c_k \\ & \text{ha lo stesso rango di convergenza della serie di potenze} \\ & \text{e } D^\alpha(x_\beta u) \sim \xi_\alpha D_\beta u \sim D^\alpha(x_\beta u) \end{aligned}$$

$$\sum_{k \geq 0} D^\alpha u$$

3. La serie delle derivate n-esime

$$\text{Con la convenzione } \frac{0}{1} = +\infty, \frac{+\infty}{1} = 0.$$

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\sup) \sqrt[|k|]{c_k}$$

$$2. R = \frac{L}{\ell} \text{ dove}$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ int}(D) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \text{ dove } R := \text{raggio di convergenza} \\ & \iff \text{La serie converge assolutamente in } \text{int}(D) \\ & \iff \text{La serie converge uniformemente su } \{|z - z_0| \leq p, \forall p > R\}. \end{aligned}$$

**Proprietà**

**Definizione:** Siia  $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ , e sia  $\{u_h \subset S(\mathbb{R}^n)\}$  tale che  $u_h \rightarrow u$  in  $L_2(\mathbb{R}^n)$ . Considero  $u_h \in S(\mathbb{R}^n)$  e definisco

$$u := \lim_{h \rightarrow +\infty} u_h$$

$$\begin{aligned} & \text{Prodotto di convoluzione} \\ & \int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon = \frac{(2\pi)^n}{1} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\epsilon \end{aligned}$$

Identità di Plancheral

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{u}_\epsilon$$

23.3.1 Altre proprietà di  $f$  in  $S$ 

Quindi per Remann-Lebesgue la sua trasformata sta in  $L_\infty(\mathbb{R}^n)$

$E D^\alpha(x_\beta u)$  appartiene a  $L_1(\mathbb{R}^n)$  perché appartenente a  $S(\mathbb{R}^n)$

$\xi_\alpha D_\beta u \sim \xi_\alpha x_\beta u \sim D^\alpha(x_\beta u)$

• Perche  $\xi_\alpha D_\beta u$  è la trasformata di una funzione di  $L_1(\mathbb{R}^n)$

Dunque per la prop. 2  $u$  ha derivate di ogni ordine

$u \in S(\mathbb{R}^n) \iff x_\alpha u \in S(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$

•  $u \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$  perché  $A_\alpha, x_\alpha u \in L_1(\mathbb{R}^n)$

• Come conseguenza di quelle in  $L_1(\mathbb{R}^n)$ , perché  $u, u \in S(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$

**Dimostrazione:** Se dimostro che  $u \in S(\mathbb{R}^n)$ , allora vale la formula di inversione.

Sia  $u \in S(\mathbb{R}^n)$ . Allora  $\tilde{u} \in S(\mathbb{R}^n)$

• Formula di inversione in  $S(\mathbb{R}^n)$

$$2. D^\alpha u = (-i)^{|\alpha|} x_\alpha u$$

È permesso per la convergenza uniforme della serie.

$$\int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases}$$

Dunque tutti gli integrali nella somma si annullano tranne per  $n - k - 1 = -1 \implies n = k$

$$= c_k \cdot 2\pi i \implies c_k = \frac{I_k}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

**Formula di Cauchy per la derivata k-esima:**

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

In particolare con  $k = 0$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Dove  $r$  è un qualsiasi raggio appartenente all'intervallo  $(0, R)$

**Osservazione:**

$z \mapsto \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$  è olomorfa su  $D \setminus \{z_0\}$

$\implies \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$  è indipendente dalla scelta di  $r \in (0, R)$

Per  $k = 0$  vale in realtà una proprietà più forte

**Formula di Cauchy**

$f$  olomorfa su  $\Omega$  contenente  $\overline{B_r(z_0)}$ , allora  $\forall z \in B_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

**Precisazione:**  $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

Questa formula è estremamente forte e generica poiché vale per tutte le funzioni olomorfe, non è necessaria l'ipotesi di funzione analitica.

**Osservazione:**

$$z \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

è somma della serie di potenze generica

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_k z^k$$

È dunque una funzione analitica.

Da risolvere per q.o.  $x \in \mathbb{R}$ .

Cerco soluzioni  $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$

$$\hat{u}' - \hat{u} = e^{-x} \widehat{H(x)}$$

$$i\xi \hat{u} - \hat{u} = \frac{1}{1 + i\xi}$$

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{1 + \xi^2} \implies u(x) = -\frac{1}{2} e^{-|x|}$$

## 23.2 Formule di inversione per la trasformata di Fourier in $L^1$

Sia  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tale che  $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Allora:

$$u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{u}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\check{u}(x) := u(-x)$$

**Problema:** Esiste uno spazio  $X$  tale che

$$\mathcal{F} : X \rightarrow X$$

e valga in  $X$  la formula di inversione?

**Risposta:** Sì,  $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Sia  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{u}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Ma chi è  $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$ ?

$$|\hat{u}(\xi)| < +\infty \text{ se } u \in L^1(\mathbb{R})$$

## 23.3 Trasformata di Fourier in $L^2$

**Spazio delle funzioni a decrescenza rapida**

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$  tali che

$$\forall \alpha, \beta \text{ multiindici} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty$$

**Osservazioni**

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\gamma u, D^\gamma u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$
- Valgono in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  le seguenti formule:

1.  $\widehat{D^\alpha u} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 0 \leq x \\ x < 0 \end{cases} =: (x) H_{-x} (x) H(x)$$

### 23.1 Esempio

Dato un'equazione differenziale in  $u = u(x)$ , applicando la trasformata si ottiene

#### equazioni differenziali

### 23 Applicazione della trasformata di Fourier alle

$$(u(\xi))' = \int_{-\infty}^{\infty} (u(x)e^{-ix\xi})' dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} xu(x)e^{-ix\xi} dx = -i \xi u(\xi)$$

Posso derivare sotto  $f$ :

$$\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-ix\xi} dx$$

#### Dimostrazione (cenno)

Mentre: maggiore rapidità di decrescenza a 0 per  $u$  implica maggior regolarità

$$x^{k-1}u \in L_1(\mathbb{R}) \iff u \in C_{k-1}(\mathbb{R})$$

$$u \sim \frac{x^a}{M!} \text{ per } x \rightarrow \pm\infty \text{ con } a < k \iff x^{k-1}u(x) \sim \frac{x^{a-k+1}}{M!} (a-k+1 < 1) \iff$$

$$\text{Hence: } u \in L_1(\mathbb{R}) : xu \in L_1(\mathbb{R}), x^a u \in L_1(\mathbb{R}) \iff u \in C^a(\mathbb{R})$$

In particolare, cioè  $u \in C_1(\mathbb{R})$  tale che  $xu \in L_1(\mathbb{R})$

$$(u')(\xi) = -i\xi u(\xi)$$

$$\text{Proposizione 2: Si } u \in L_1(\mathbb{R}) \text{ tale che } xu \in L_1(\mathbb{R})$$

$$\text{Poi che } f_L(t) = u(t)\chi_{(0,T)}(t).$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 u(t) dt + (0)u = \\ & \int_{-\infty}^0 u(t)\chi_{(0,T)}(t) dt + (0)u = \\ & \int_T^0 u(t) dt + (0)u = (T)u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Infatti, per } u \in L_1(\mathbb{R}) \cup A.C.(\mathbb{R}), u(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \\ & u(\mp T)e^{i\xi \mp T} \text{ per } T \rightarrow +\infty \leftarrow i\xi u(\xi) \end{aligned}$$

Teorema di rimozione della singolarità  
Se  $f$  olomorfa e limitata in  $u(z_0) \setminus \{z_0\} \iff z_0$  è singolarità eliminabile

Inoltre, se  $z_0$  singolarità eliminabile per  $f \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

$$\exists u(z_0), \exists M > 0 \text{ tale che } \|f(z)\| \leq M u(z_0) - |z_0|$$

Osservazione 2:  $z_0$  singolarità eliminabile per  $f \iff f$  limitata (in modulo) vicino a  $z_0$ .

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

Ne conseguue che il valore che assumere  $f$  in  $z_0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [g(z) - g(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

Se una  $g$  è olomorfa è anche continua:

Osservazione: Se  $\exists f, f$  è unica.

Esempio:  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

$f$  sia olomorfa in  $u(z_0)$ .

$$\exists u(z_0), \exists f : u(z_0) \hookrightarrow \mathbb{C} \text{ tale che } f|_{u(z_0) \setminus \{z_0\}}$$

Si dice che  $z_0$  è una singolarità eliminabile se

#### 5.0.1 Singolarità eliminabile

Sta  $z_0$  una singolarità isolata per  $f$ .

Sia  $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \hookrightarrow \mathbb{C}$ , si dice che  $z_0$  è una singolarità isolata per  $f$  se  $\exists u(z_0) \hookrightarrow \mathbb{C}$  tale che  $f$  sia olomorfa se  $u(z_0) \setminus \{z_0\}$

### 5 Singolarità isolate e loro classificazione

Valegono gli sviluppi già noti dall'analisi reale.

- Differenza rispetto al caso reale

- $\Rightarrow$  (implicazione inversa) è ovvia

Osservazioni

Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe  
Sia  $f$  olomorfa su  $\Omega \iff f$  analitica su  $\Omega$

#### 4.3 Analiticità e olomorfia

Quindi, in conclusione, se  $f$  è olomorfa su  $u(z_0) \setminus \{z_0\}$ ,  $z_0$  singolarità eliminabile di  $f \iff f$  limitata in  $u(z_0) \setminus \{z_0\}$

### 5.0.2 Polo

Si dice che  $z_0$  è un **polo** per  $f$  se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

Esempio:  $f(z) = \frac{1}{sz^m}$  con  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

### 5.0.3 Singolarità essenziale

Si dice che  $z_0$  è una **singolarità essenziale** per  $f$  se è una singolarità isolata e non è né eliminabile né polo.

Esempio:  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

**Teorema di Picard:**  $z_0$  singolarità essenziale per  $f \implies \forall u(z_0), f(u(z_0))$  (ovvero l'immagine di  $f$ ) è data da  $\mathbb{C}$  oppure  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  punto).

## 5.1 Sviluppabilità in serie di Laurent

**Teorema**  $f$  olomorfa su  $\Omega \setminus \{z_0\}$  aperto di  $\mathbb{C}$ , allora  $f$  è "sviluppabile in serie di Laurent di centro  $z_0$ ", ovvero

$$\exists u(z_0) \subseteq \Omega \text{ tale che } \forall x \in u(z_0) \setminus \{z_0\}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k < 0} c_k (z - z_0)^k \end{aligned}$$

Ovvero parte regolare dello sviluppo + parte singolare dello sviluppo

**Inoltre, il calcolo dei coefficienti:**

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

In particolare:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} f(z) dz$$

C'è una relazione tra  $c_{-1}$  e gli integrali sui circoli. Esempio:  $f(z) = \frac{1}{z}$   
Tramite serie di Laurent è possibile riconoscere le singolarità  
 $z_0$  è singolarità eliminabile  $\iff$  parte singolare dello sviluppo = 0.

### 22.5 Proprietà algebriche

Sia  $u \in L^1(\mathbb{R})$

- $v(x) = u(x - a)$ ,  $a \in \mathbb{R} \implies \hat{v}(x) = e^{-i\xi a} \hat{u}(\xi)$
- $v(x) = e^{i\alpha x} u(x) \implies \hat{\xi} = \hat{u}(\xi - a)$   
Esempio: è possibile calcolare  $u(x) \cos(ax)$  (Definizione complessa del coseno)
- $v(x) = u(x/a)$   $a \in \mathbb{R} - \{0\} \implies \hat{v}(\xi) = |a| \hat{u}(a\xi)$  In particolare, con  $a = -1$ , si ha

$$\begin{cases} u \text{ pari} \implies \hat{u} \text{ pari (reale)} \\ u \text{ dispari} \implies \hat{u} \text{ dipari (puramente immaginaria)} \end{cases}$$

Queste proprietà sono dimostrabili tramite cambi di variabili negli integrali

### 22.6 Proprietà differenziali

**Proposizione 1:** Sia  $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap A.C.(\mathbb{R})$  (con tali ipotesi  $u$  derivabile q.o. su  $\mathbb{R}$ , con  $u' \in L^1(\mathbb{R})$ ). Allora

$$\hat{u}'(\xi) = i\xi \hat{u}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare, nelle ipotesi della proposizione

$$u' \in L^1(\mathbb{R}) \implies \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \hat{u}'(\xi) = 0$$

ovvero

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \xi \hat{u}(\xi) = 0$$

ovvero

$$\hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Iterando:

$$u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R}), u' \in AC(\mathbb{R})$$

$$\hat{u}''(\xi) = (i\xi)^2 \hat{u}(\xi) = -\xi^2 \hat{u}(\xi)$$

$$\text{e } \hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$$

**Morale:** maggior regolarità di  $u$  implica maggior rapidità di convergenza a 0 all'infinito di  $\hat{u}$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} \hat{u}'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} u' e^{-i\xi x} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L u'(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \lim_{L \rightarrow +\infty} u(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-L}^L + i\xi \int_{-L}^L u(x) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

## 22.4 Teorema di Riemann-Lebesgue

**Teorema:** Sia  $u \in L_1(\mathbb{R})$ . Allora  $u$  ha le seguenti proprietà:

1.  $u \in L_\infty(\mathbb{R})$

2.  $u$  è continua

3.  $u$  è infinitesima all'infinito

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} u(\zeta) = 0$$

1.  $|u(x)| \leq \|u\|_1$ , passo all'ess-sup al variare di  $\zeta$

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L_1(\mathbb{R})}$$

2.  $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L_1(\mathbb{R})}$

3.  $L_1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R})$  lineare continua

Ne conseguono che (con  $M = 1$ , da dimostrirete)

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L_1(\mathbb{R})}$$

2. Faciamo vedere che  $u(\zeta)$  è continua in  $\zeta$  fissato in  $\mathbb{R}$ , ovvero

$$\zeta_n \leftarrow \zeta \iff u(\zeta_n) \rightarrow u(\zeta)$$

Si può passare sotto il segno di integrale per conv. dominata, perché

$$\begin{aligned} f_n(x) &= u(x) e^{-i\zeta_n x} \leftarrow u(x) e^{-i\zeta x} = f(x) \\ \text{detare}(\zeta_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-i\zeta_n x} dx \\ u(\zeta_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-i\zeta_n x} dx \end{aligned}$$

So che  $\phi_n$  sono "infinitesime all'infinito", dunque anche  $u$  la stessa

$$\phi_n \leftarrow L_\infty(\mathbb{R})$$

Vero  $Lu \in L_1(\mathbb{R}) : E_{\phi_n}$  "a scalino"

$$u = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{I_k}$$

Vero se  $u$  è "a scalino",  $u = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{I_k}$ , poiché l'operatore trasf. è lineare

$$|f_n(x)| = |u(x)| |e^{-i\zeta_n x}| = |u(x)| \in L_1(\mathbb{R})$$

Definizione:  $u$  è anche caratterizzata da:

Osservazione: L'ordine di un polo è caratterizzato anche:

Definizione: In particolare si dice polo semplice un polo di ordine 1.

Osservazione: L'ordine di un polo è caratterizzato anche:

Definizione: Si fa  $z_0$  polo per  $f$ . Chiamaamo ordine del polo  $z_0$  l'ordine

$z_0$  polo per  $f \iff z_0$  zero per  $1/f$

### 6.1 Ordine dei poli

Inoltre

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_n(z - z_0)^n + o(z - z_0)^n$$

Osservazione:  $n$  è anche caratterizzata da:

ordinamento  $v := \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ : Ordine dello zero.  
 $I_a(z)$  è quindi falsa  $\iff n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0 \neq 0$ . Per il principio di boun  
 idontità,  $z_0$  è uno zero isolato.  
 Si fa olomorfa su  $\Omega$  compreso,  $f \neq 0$  su  $\Omega$ , sia  $z_0 \in Z(f)$ . Per il principio di

#### 6.0.2 Ordine di zero

- Coincide con tutto  $\Omega$

- È fatto da punti isolati, oppure

In conclusione:  $Z(f)$

$$4. Z(f) \equiv \Omega$$

3.  $Z(f)$  contiene un intorno di  $z_0$

$$2. f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.  $z_0 \in \text{acc}(Z(f))$

Sia  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa e supposto  $\Omega$  connesso  
 $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ , sono equivalenti i seguenti fatti

#### 6.0.1 Principio di identità

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f}{1} = 0$$

Idee:  $z_0$  è un polo per  $f \iff z_0$  è zero per la funzione  $1/f$

- $z_0$  sing. essenziale

- $z_0$  polo

- $z_0$  eliminabile  $\iff$  parte singolare dello sviluppo = 0

## 6 Ricognoscere le singolarità

- $z_0$  polo di ordine  $\nu$  per  $f \iff z_0$  zero di ordine  $\nu$  per  $1/f \iff$

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^\nu} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \implies & \exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^\nu f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (*) \end{aligned}$$

- $z_0$  polo di ordine  $\nu$  per  $f \iff$

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ con } c_{-\nu} \neq 0$$

Infatti

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \implies (z - z_0)^\nu f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+\nu}$$

$(*) \iff$  tutti i coefficienti  $c_n$  con  $n + \nu < 0$  e il coefficiente  $c_{-\nu} \neq 0$ .

Dunque, lo sviluppo di Laurent di una funzione che ha un polo ha parte singolare composta da un numero finito di termini.

È quindi possibile classificare le singolarità guardando lo sviluppo in serie di Laurent, guardando la parte singolare

- p. singolare nulla: ELIMINABILE
- p. singolare con numero finito di termini: POLO
- p. singolare con infiniti termini: ESSENZIALE

#### Osservazioni su zeri e poli

- Se  $f, g$  hanno entrambe uno zero in  $z_0$  o entrambe un polo, allora

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f}{g} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'}{g'}$$

Cenno di dim (Primo caso):

$$f(z) = c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu, g(z) = c_\eta (z - z_0)^\eta + o(x - x_0)^\eta$$

Sono possibili solo tre casi:  $\eta = \nu \implies$  limite finito,  $\nu > \eta$  limite 0,  $\nu < \eta$  limite infinito.

$$2. z_0 \text{ zero di ordine } \nu \text{ per } f \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{f(z)} = \nu$$

Questa è una modalità per calcolare l'ordine. Dim:  $f(z) = c_\nu (z - z_0)^\nu + \dots, f'(z) = \nu c_\nu (z - z_0)^{\nu-1} + \dots$

$$\implies \frac{(z - z_0)f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu c_\nu u(z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu}{c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \nu$$

3.  $z_0$  zero di ordine  $\nu$  per  $f$ , con  $\nu \geq 1 \implies z_0$  zero di ordine  $\nu - 1$  per  $f'$ .  
 $z_0$  polo di ordine  $\nu$  per  $f$ , con  $\nu \geq -1 \implies z_0$  polo di ordine  $\nu + 1$  per  $f$ .  
 Controllare su libro.

- Generalizzazioni: si può partire da  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

- Da  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ )

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

- $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

- Non si trasformano mai funzioni definite su sottoinsiemi propri di  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^n$

## 22.1 Varianti in letteratura

$e^{-i\xi x}$  rimpiazzato da  $e^{i\xi x}$ , oppure  $e^{i2\pi\xi x}$

## 22.2 Operatore Trasformata

La trasformata  $\mathcal{F}$  di Fourier è l'operatore che manda  $u$  in  $\hat{u}$

$$\mathcal{F} : u \rightarrow \hat{u}$$

### Osservazioni

- $\mathcal{F}$  è lineare:

$$\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v)$$

## 22.3 Trasformate notevoli

1.  $u(x) = \chi_{(a,b)}(x)$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\sin(\xi b) - \sin(\xi a)}{\xi} + i \frac{\cos(\xi b) - \cos(\xi a)}{\xi}$$

2.  $u(x) = e^{-|x|}$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}$$

Diversamente dal caso precedente, la trasformata è sempre reale, e  $\hat{u}$  è di nuovo  $L^1(\mathbb{R})$ .

3.  $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\hat{u}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$$

Partendo da  $u(x) = e^{-|x|}$  trasformando due volte si ottiene  $\hat{u}(x) = 2\pi e^{-|x|} = 2\pi u(x)$

- La definizione di  $u(\zeta)$  è "beni posta" grazie all'ipotesi  $u \in L_1(\mathbb{R})$
- $e^{-izx} = \cos(\zeta x) - i \sin(\zeta x) \iff u(\zeta) \in \mathbb{C}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| e^{-izx} dx > \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| \sin(\zeta x) dx = (\Im u(x) \cos(\zeta x) - \Im u(x) \sin(\zeta x))$
- La dipendenza da  $\zeta$  appare in  $e^{-izx} \iff u(\zeta)$  è un integrale dipendente dal parametro  $\zeta$
- Formalmente c'è analogia con i coefficienti di Fourier

$$u_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-izx} dx \quad h \in \mathbb{Z}$$

• La definizione di  $u(\zeta)$  è "beni posta" grazie all'ipotesi  $u \in L_1(\mathbb{R})$

- Osservazione:** Si  $u \in L_1(\mathbb{R})$ . La sua Trasformata di Fourier è la funzione definita per  $\zeta \in \mathbb{R}$ :
- $$u(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-izx} dx \quad \zeta \in \mathbb{R}$$
- Definizione: Si  $u \in L_1(\mathbb{R})$ . La sua Trasformata di Fourier è la

## 22 Trasformata di Fourier

Dato  $f \in L_2(I)$ , per minimizzare la distanza in  $L_2(I)$  da un polinomio di grado  $\leq 3$ , dovrà considerare la somma delle serie di Fourier di  $f$  fatta rispetto ai punti  $\gamma$  dove  $\gamma$  è un numero finito di punti, come

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} x \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{3}{1} + x^2$$

← polinomi di Legendre  
Esempio in  $L_2(-1, 1)$

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

Osservazione: Ci sono altri sistemi ortogonali completi in  $L_2(I)$ .

Se però  $f_k \neq 0$  per qualche  $k \in \{k_1^*, \dots, k_p^*\} \iff$  no soluzioni

$$u_k = \begin{cases} \frac{p(\zeta_k)}{f_k} & k \neq k_1^*, \dots, k_p^* \\ 0 & k = k_1^*, \dots, k_p^* \end{cases}$$

• Caso 2:  $P(\zeta_k) = 0$  per  $k = k_1^*, \dots, k_p^*$ , allora

$f_k = 0$  per  $k = k_1^*, \dots, k_p^* \iff$  infinite soluzioni, ovvero

$$\lim_{z \leftarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] = c_{-1}$$

$$(z)f(0z - z) = \sum_{n=0}^{n=-1} c_n(z - z_0)^{n+1} = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots$$

Dimostrazione polo semplice

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^{n+1}}{D^{(n+1)}(z - z_0)f(z)}$$

- Se  $z_0$  è un polo di ordine  $n$  calcolare lo sviluppo
- $z_0$  singolarità essenziale: non c'è modo diretto di calcolare il residuo (serve dello sviluppo  $\equiv 0$ )
- Se  $z_0$  è una singolarità eliminabile:  $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$  poiché la parte singolare dello sviluppo  $\equiv 0$

## 7.1 Calcolo dei residui

**Definizione**  
Se  $z_0$  è una singolarità isolata per  $f$  si dice residuo di  $f$  di centro  $z_0$ .  $c_{-1}$  dello sviluppo in serie di Laurent di  $f$  di centro  $z_0$ .

Motivazione dello studio del teorema: è il calcolo di integrali in campo complesso e anche in campo reale.  
Se  $f$  è olomorfa su  $\Omega \subset \mathbb{C}$   $\Longleftrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$  dove  $\gamma$  è un circuito omotopo a un punto. Se  $f$  è olomorfa su  $\Omega$   $\Longleftrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$  dove  $\gamma$  è un circuito omotopo a un punto.

Definizione dello studio del teorema: è il calcolo di integrali in campo complesso e anche in campo reale.

Dimostrazione: Supponiamo  $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  siano prolungamenti di  $f$ .  
Tesi:  $f_1 \equiv f_2$ .

Dimostrazione: Supponiamo  $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  siano prolungamenti di  $f$ .  
Tesi:  $f_1 \equiv f_2$ .

Data  $f : S \hookrightarrow \mathbb{C}$ , esiste al più una  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\operatorname{acc}(S) \cap \Omega \neq \emptyset$ .  
Se  $\Omega \subset \mathbb{C}$  comunque, sia  $S \subset \Omega$  tale che  $\operatorname{acc}(S) \cap \Omega \neq \emptyset$ .

6.1.1 Unicità del prolungamento analitico

**Osservazione:**  $\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$  con  $g$  olomorfa,  $h$  con uno zero di ordine 1 in  $z_0$ .

#### Dimostrazione

Caso  $g(z_0) \neq 0 \implies z_0$  polo semplice

$$(z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)}{h'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)} \rightarrow \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Tramite la formula per il residuo del polo semplice

$$\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Caso  $G(z_0)=0$  Dico che  $z_0$  è una singolarità eliminabile

$$\frac{g}{h} = \frac{g'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)}{h'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)} \rightarrow \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)} \in \mathbb{C}$$

## 7.2 Definizione e calcolo dell'indice di avvolgimento

#### Definizione (intuitiva)

Sia  $\gamma$  circuito  $\subseteq \mathbb{C}$  e sia  $z_0 \notin \gamma$ .

Si dice indice di avvolgimento di  $\gamma$  rispetto a  $z_0$  è il numero di volte che  $\gamma$  gira attorno a  $z_0$ , contate con segno + nel caso di verso antiorario

#### Definizione (formale)

Sia  $r(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  parametrizzazione di  $\gamma$  ( $\gamma$ ) circuito  $\subseteq \mathbb{C}$ ,  $z_0 \notin \mathbb{C}$ .

Sia  $\rho(t) := |r(t) - z_0|$ . Allora  $\exists \theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $r(t) = z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)}$ .

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

L'indice è un numero  $\in \mathbb{Z}$  poiché  $r(a) = r(b) \implies \rho(a) = |r(a) - z_0| = |r(b) - z_0| = \rho(b)$

$$r(a) = \rho(a) + e^{i\theta(a)}$$

$$r(b) = \rho(b) + e^{i\theta(b)}$$

$$\implies e^{i\theta(a)} = e^{i\theta(b)}$$

$$\implies i\theta(a) - i\theta(b) = 2k\pi i = \theta(a) - \theta(b) = 2k\pi$$

#### Osservazioni

1. L'indice non cambia per parametrizzazioni equivalenti (dello stesso circuito)

2. L'indice di avvolgimento non cambia sostituendo  $\gamma$  con un circuito omotopo a  $\gamma$  in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

- Se  $f \in A.C.([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$  e  $f(-\frac{T}{2}) = f(\frac{T}{2})$  posso estenderla a una funzione continua periodica su  $\mathbb{R}$ . (l'estensione  $\hat{f}$  appartiene a  $L_T^2(\mathbb{R})$ )  
Ha senso calcolare i coefficienti di Fourier sia di  $f$  che di  $\hat{f}$ .

$a_k, b_k$  siano i coefficienti di Fourier di  $f$

$a'_k, b'_k$  siano i coefficienti di Fourier di  $\hat{f}'$

$$a'_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x) \cos(\xi_k x) dx = 0 + \frac{2}{T} \xi_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(\xi_k x) dx \\ = \xi_k b_k$$

Analogamente

$$b'_k = -\xi_k a_k$$

Dunque

$$\hat{f}'_k = i\xi_k \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

## 21 Applicazioni delle serie di Fourier alle equazioni differenziali

Ricerca di soluzioni periodiche di ODE lineari (tramite serie di Fourier)  
Consideriamo un'ODE su  $\mathbb{R}$  della forma

$$\sum_{j=0}^n a_j u^{(j)} = f \in L_T^2(\mathbb{R}) \quad x \in \mathbb{R}$$

**Problema:** esistono soluzioni T-periodiche (in  $L_T^2(\mathbb{R})$ )?  
La seguente equazione differenziale equivale a chiedere:

$$\sum_{j=0}^n a_j \widehat{u^{(j)}}_k = \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{j=0}^n a_j (i\xi_k)^{(j)} \hat{u}_k = \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sistema di infinite eq. algebriche.

$$P(i\xi_k) \hat{u}_k = \hat{f}_k$$

(forma equivalente)

Ciascuna eq. è un'equazione lineare di 1° grado in  $\hat{u}_k$ !!!

- Caso 1:  $P(i\xi_k) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\implies \hat{u}_k = \frac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)}$$

• I coefficienti di Fourier hanno senso anche per  $f \in L^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

$$|a_k| = \left| \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(kx) dx \right| \leq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| dx < +\infty$$

e una spazio di Hilbert, con  $\langle f, g \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} f g$

$L^2_T(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : T\text{-periodiche}\}$

• Possiamo sostituire  $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  con

Dunque  $f \in L^2(I) \iff$  i suoi coefficienti di Fourier  $\in \ell^2$

Teorema: Il sistema  $(p_0, p_k, q_k)$  è ortonormale completa in  $L^2(I)$

Dimostrazione usando la (3) delle equivalenze

$\langle p_0, p_k, q_k \rangle \equiv L^2(I)$

$\subseteq A \in L^2(I), f$  può approssimare con elementi di  $(p_0, p_k, q_k)$

Sempre vero ( $A \subseteq H$ )

Infatti, possiamo estendere  $\phi$  a  $\phi \in C_p(\mathbb{R})$ .

Passo 1 Mostriamo che quantità sopra è zero se  $f = \phi \in C_0^\infty(I)$ .

Passo 2 Mostriamo che quantità sopra è  $\phi$  in  $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ .

La successione della serie di Fourier di  $\phi$  fornisce una successione in  $(p_0, p_k, q_k)$ , che converge a  $\phi$  in  $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ .

Sappiamo (Analisi 2) che la serie di Fourier di  $\phi$  converge uniformemente su  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \iff$  converge uniformemente in  $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ .

Infatti, possiamo estendere  $\phi$  a  $\phi \in C_p(\mathbb{R})$ .

Dunque dividendo

Allora:

Se  $\gamma$  appartiene a  $C$  e sia  $\gamma \subseteq C$  chiuso omotopo a un punto (in  $\gamma$ ).

Sia  $\gamma$  aperto  $\subseteq C$  e sia  $\gamma \subseteq C$  chiuso, dove  $S$  "insieme singolare" soddisfa

- $\text{acc}(S) \cup \emptyset = \emptyset$
- $\gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus S$

Allora:  $\text{Ind}(\gamma, z_0) \neq 0$  per al più un numero finito di punti e vale

$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0} \text{Res}(f, z_0) \text{Ind}(\gamma, z_0)$

### 7.3 Teorema dei residui

Dunque dividendo

$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$

•  $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

•  $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$

### 7.2.1 Modalità analitica per calcolare l'indice

Dimostrazione

$r(t) = z_0 + p(t)e^{i\theta(t)}, t \in [a, b]$ .

$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{2\pi i}{1} \int_\gamma \frac{z - z_0}{1} dz$

### 7.3 Teorema dei residui

Ottobre:  $f \in L^2(I)$ , vale Id. di Bessel:

$\|f\|_{L^2(I)}^2 = (f, p_0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (f, p_k)^2 + (f, q_k)^2$

Dunque  $f \in L^2(I) \iff$  i suoi coefficienti di Fourier  $\in \ell^2$

• Possiamo sostituire  $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  con

• I coefficienti di Fourier hanno senso anche per  $f \in L^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

$L^2_T(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : T\text{-periodiche}\}$

• Dato  $f \in L^2(I)$ , per il teorema sopra:

$f = (f, p_0)p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (f, p_k)p_k + (f, q_k)q_k$

$S$  somma parziale della serie di Fourier di  $\phi$

Osservazione

Dunque

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} g(e^{it}) ie^{it} dt$$

$$\int_{C_1(0)} g(z) dz$$

Se  $g$  soddisfa le ipotesi del teorema dei residui su  $C_1(0) \subseteq \Omega$ , con  $\gamma = C_1(0)$

$$= 2\pi i \sum_{|z_0|<1} \text{Res}(g, z_0)$$

Esempio:  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t} dt$

## 8.2 Secondo tipo

V.P.  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$

La definizione cambia leggermente nel caso sia presente una singolarità su  $\mathbb{R}$ . Se  $f$  è integrabile (secondo Riemann) allora

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

In generale può accadere che il V.P.  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \in \mathbb{R}$  ma  $f$  non è integrabile  
Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 1 & x \in [0, 1] \\ -1 & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{x} & x \leq -1 \end{cases}$$

$f$  non è integrabile secondo Riemann, ma il V.P. è uguale a 0.

**Ipotesi:**  $f = f(z)$  abbia un numero finito di singolarità nel semipiano  $\{\text{Im}z > 0\}$  (e nessuna singolarità sull'asse reale) + (\*) ipotesi di decadimento.

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{-R} f(x) dx + \int_{C_R^+(0)} f(z) dz - \int_{C_R^+(0)} f(z) dz$$

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R(0)^+} f(z) dz$$

Dove  $\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0)$

Per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S, \\ \text{Im}z_0 > 0}} \text{Res}(f, z_0)$$

L'indice di avvolgimento è uguale a 1.

## Dimostrazione 5 implica 6

Prendere  $u = v$  in Parseval

## Dimostrazione 6 implica 2

Se  $(u, u_n) = 0 \forall n, \sum 0 = 0$

## 20 Serie di Fourier in $L^2$

Si considera  $L^2(I)$  dove  $I = (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , e il prodotto scalare è definito come

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x) dx$$

### Sistema ortonormale dei polinomi trigonometrici

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad p_k = \frac{\cos(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{T}{2}}}, \quad q_k = \frac{\sin(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{T}{2}}}, \quad k \geq 1$$

dove

$$\xi_k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)k \quad (\text{se } T = 2\pi, \xi_k = k)$$

formano un sistema ortonormale

Dunque, data  $f \in L^2(I)$  la sua serie di Fourier rispetto a questo sistema è la serie

$$(f, p_0)p_0 + \sum_{k \geq 1} (f, p_k)p_k + (f, q_k)q_k \quad (*)$$

#### 20.0.1 Modi equivalenti di scrivere (\*)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(\xi_k x) + b_k \sin(\xi_k x) \quad (**)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_I f(x) \cos(\xi_k x) dx \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_I f(x) \sin(\xi_k x) dx \quad k \geq 1$$

Oppure

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{i\xi_k x} \quad (***)$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\xi_k x} dx \quad z \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{f}_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\hat{f}_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

Dimostrazione 3 implica 4. Per la quattro ogni elemento è la sua serie di Fourier, dunque

$$(u, v) = (\sum_n u_n u_n, \sum_n v_n u_n) = (\sum_n u_n (v_n, u_n), \sum_n u_n (u_n, u_n))$$

Se  $M$  coincide con  $H$ , allora  $u = P_M(u)$

Dimostrazione 4 implica 5. Per la quattro ogni elemento è la sua serie di Fourier, dunque

$$(u, v) = (\sum_n u_n u_n, \sum_n v_n u_n) = (\sum_n u_n (u_n, v_n), \sum_n u_n (u_n, u_n))$$

Per mostrare  $M \equiv H$ , basta mostrare  $M^\perp = \{0\}$ , visto per la 2

Dimostrazione 2 implica 3. Per cui la 2 è falsa.

Allora  $(u_n)$  non è massimale, posso aggiungere almeno un elemento  $\leftarrow \exists u \in H$  se  $u \in M^\perp$  allora  $u = 0$

Dimostrazione 1 se e solo se 2. Se è falsa la 1 implica che è falsa la 2

$$\exists u \in H : (u, u_n) = 0 \quad \forall n \quad \text{MA } u \neq 0$$

Se è falsa la 2 implica che è falsa la 1

Dimostrazione 1 se e solo se 2.  $(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4) \iff (5) \iff (6) \iff (2)$

Dimostrazione

6.  $\sum_n (u_n)_n^2 = \|u\|^2 \quad \forall u \in H$  (identità di Bessel)

5.  $\sum_n (u_n, v_n)_n = (u, v) \quad \forall u, v \in H$  (identità di Parseval)

4.  $\sum_n (u_n, u_n)_n = n \quad \forall n \in H$

3. Posto  $M := \langle u_n \rangle$ , si ha  $M \equiv H$

2.  $u \in H : (u, u_n) = 0 \quad \forall n \iff u = 0$

1.  $(u_n)$  è completo

Sono equivalenti:

Sia  $(u_n)$  ortonomale in un Hilbert.

Proposizione di caratterizzazione di sistemi ortonormali come

Ovvero:  $\mathbb{E}(u_n)$  sistema ortonormale che contiene una propria elemente  $(u_n)$

che  $(u_n)$  è sistema complesso e massimale rispetto alla inclusione.

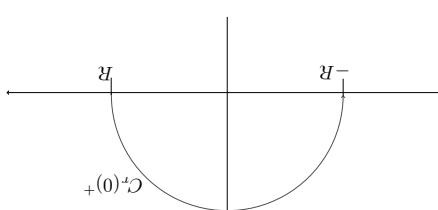
Definizione: Sia  $H$  di Hilbert se  $(u_n)$  sistema ortonormale. Si dice

che  $(u_n)$  è sistema ortonormale a tutti i limiti delle combinazioni

quanto assicura che  $u - u_n \in M^\perp$  sarà ortogonale a tutti gli elementi di  $M$ .

2. Per mostrare che  $u - u_n \in M^\perp$  basta far vedere che  $(u - u_n, u_m) = 0 \quad \forall n, m$ ,

ma è degl'  $u_n$ , ovvero a tutti gli elementi di  $M$ .



### 8.3 Terzo tipo

Aggiungendo l'ipotesi di decadenza all'integrale precedente si avrà il risultato scritto.

Si ha un calcolo analogo per il semipiano  $\{\text{Im} < 0\}$

$I = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixz} dx = 2\pi i \sum_{z_0 \in S} \text{Res}(f(z) e^{izx}, z_0)$

Ipotesi:  $f(z) e^{izx}$  abbia un numero finito di singolarità nel semipiano  $\{\text{Im} z < 0\}$  e nessuna singolarità sullaasse reale) + (\*\*) Lemma di Jordan.

Dove  $w \in \mathbb{R}^+$

Dimostrazione 3 implica 4. Per il teorema dei residui

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(z) e^{izx} dz + \int_{C_r(0)^+} f(z) e^{izx} dz - \int_{C_r(0)^-} f(z) e^{izx} dz$$

Dove  $\gamma_R = [-R, R] + C_r(0)$

$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{-R} f(z) e^{izx} dz + \int_{C_r(0)^+} f(z) e^{izx} dz - \int_{C_r(0)^-} f(z) e^{izx} dz$

Dimostrazione 4 implica 5. Per la quattro ogni elemento è la sua serie di Fourier, dunque

$$(u, v) = (\sum_n u_n u_n, \sum_n v_n u_n) = (\sum_n u_n (v_n, u_n), \sum_n u_n (u_n, u_n))$$

Se  $M$  coincide con  $H$ , allora  $u = P_M(u)$

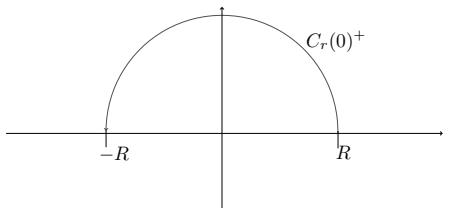


Figura 2: Semicirconferenza

L'indice di avvolgimento è uguale a 1.

Il secondo termine dell'integrale si elide grazie al

### 8.3.1 Lemma di Jordan

Sotto l'ipotesi

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{z \in C_R^+(0)} |f(z)| &= 0 \quad (***) \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) e^{i\omega z} dz &= 0 \end{aligned}$$

Osservazione: Variante analoga nel semipiano  $\{\text{Im}z < 0\}$  quando  $\omega \in \mathbb{R}^-$

Jordan vale anche per  $\omega \in \mathbb{R}^-$  in  $C_R^-(0)$

Esempio:  $I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

### 8.4 Quarto tipo

$$I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

**Ipotesi:**  $f(z)$  abbia un numero finito di singolarità su  $\{\text{Im}z > 0\}$ ,  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) dz = 0$  (\*\*\*\*) e abbia un numero finito di poli semplici su  $\mathbb{R}$ .

$$\gamma_{R,\varepsilon} = [-R, x_0 - \varepsilon] - C_\varepsilon^+(x_0) + [x_0 + \varepsilon, R] + C_R^+(0)$$

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^+(x_0)} f(z) dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) dz$$

### Dimostrazione

Fisso  $N \in \mathbb{N}$  e mostriamo

$$\sum_{n=0}^N (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$$

la tesi è dimostrata passando al limite, dunque:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n\|^2 &= (u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n, u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n) = \\ &= \|u\|^2 - 2 \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 + \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 \\ &= \|u\|^2 - \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 \end{aligned}$$

L'ultima somma vale poiché siamo in un sistema ortonormale:

$$((u, u_1)u_1 + (u, u_2)u_2, ((u, u_1)u_1 + (u, u_2)u_2)) = (u, u_1)^2 + (u, u_2)^2$$

#### 19.0.4 Dimostrazione teorema di convergenza delle serie di Fourier

Per dimostrare la convergenza della serie, basta mostrare che  $S_N(u)$  è di Cauchy:

$$\forall \varepsilon \exists \nu : \|S_N - S_M(u)\|^2 < \varepsilon \quad \forall N, M \geq \nu$$

ovvero: (supposto  $N > M$ )

$$\begin{aligned} \|S_n(u) - S_M(u)\|^2 &= (S_N(u) - S_M(u), S_N(u) - S_M(u)) = \\ &\quad \left( \sum_{n=M+1}^N (u, u_n) u_n, \sum_{n=M+1}^N (u, u_n) u_n \right) \\ &= \sum_{n=M+1}^N (u, u_n)^2 = |T_N(u) - T_M(u)| \end{aligned}$$

dove  $T_N = \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2$

Bessel  $\implies \{T_N(u)\}$  è di Cauchy

Essendo in un Hilbert  $S_N(u)$  converge

Sia ora  $u' := \sum_n (u, u_n) u_n$

Per dimostrare  $u' = P_M(u)$  basta mostrare che

1.  $u' \in M$

2.  $u - u' \in M^\perp$

Per l'unicità nel teorema delle proiezioni,  $u' = P_M(u)$ ,  $u - u' = P_{M^\perp}(u)$   
Infatti

1.  $u' \in M$  vale per costruzione:

$$u' = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(u) \in \overline{\langle u_n \rangle}, \quad u' \text{ è limite di comb. lineari degli } u_n$$

$$S_N(u) = \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n \in \langle u_n \rangle \text{ sono comb. lineari degli } u_n$$

Definizione: Siia  $H$  di Hilbert e sia  $(u_n)$  sistema ortonormale.  
Da utilizzare quando si deve calcolare la somma di tutti i residui al finito.

**Teorema:** La somma di tutti i residui di una funzione olomorfa su  $\mathbb{C} \setminus \{n, \text{finito di punti}\}$  è zero. (comprese il punto all'infinito).

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := \operatorname{Res}\left(-\frac{z^2}{z}, \frac{z}{1}\right)$$

$$\text{Oloromorfa su } \left| \frac{z}{1} \right| < R \iff |z| > R$$

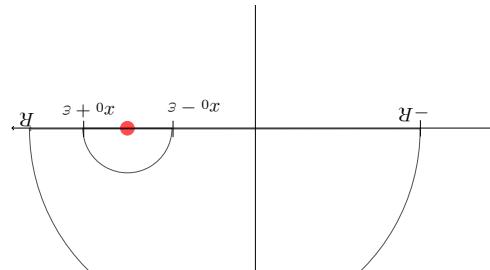
In modo equivalente:  $g(z) = f\left(\frac{z}{z-1}\right)$  ha una singolarità isolata nell'origine.

**Definizione:** Diciamo che  $\infty$  è una singolarità isolata per  $f$  se  $f$  è l'olomorfia nel complementare di una palla.

### 9.1 Residuo all'infinito

## 9 Come aggiantivare sul'analisi complessa

Figura 3: Quarto tipo



Esempio:  $I = (\text{V.P.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1-\cos^2 x} dx$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon^+(x_0)} f(z) dz = \operatorname{Res}(f, x_0)$$

Se  $x_0$  è un polo semplice

### 8.4.1 Lemma del polo semplice

Definizione: Siia  $H$  di Hilbert e sia  $(u_n)$  sistema ortonormale.  
stesso indice di avvolgimento)

$$\sum_n (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$$

**Teorema:** Sia  $H$  Hilbert, e sia  $(u_n)$  sistema ortonormale, dato  $u \in H$ ,

$M$  è un sottospazio chiuso.

$M = \langle u_n \rangle := \{\lim \text{di comb. lineari degli } u_n\}$

$\langle u_n \rangle := \{\text{combinazioni lineari degli } u_n\}$

Il sottospazio generato, indicato con  $\langle u_n \rangle$  è definito come

$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(u) = u \iff \lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(u) - u\| = 0$

$\langle u_n, u_m \rangle$  corrisponde a  $S_N(u) = \sum_{n=0}^N \langle u, u_n \rangle u_n$ , converge a  $u$  se

## 19.0.1 Convergenza in $H$

sottospazio generato del sistema.  
Dove  $u'$  è la proiezione ortogonale di  $u$  su  $M$ , dove  $M$  è la chiusura del

$$\sum_n (u, u_n) u_n = u'$$

Dato  $u \in H$ , la serie di Fourier di  $u$  converge in  $H$   
Sia  $H$  Hilbert, sia  $\{u_n\}$  sistema ortonormale fissato.

**Teorema di convergenza per serie di Fourier**

•  $\{e_n\}$  con  $n$  quadratisi  $\sum_n (u, e_n) e_n = u$

•  $\{e_n\}$  pari  $\sum_n (u, e_n) e_n = 0$

•  $\{e_n\} = \{(1, 0, \dots, 0)\}, (u, e_1) e_1 = P_{e_1}(u)$

•  $\{e_n\}, (u, e_1) e_1 + (u, e_2) e_2 = P(u)$  su  $\{e_1, e_2\}$

•  $H = \mathbb{R}^3, \{e_1\}, (u, e_1) e_1 = P(u)$  su  $\{e_1\}$

**Esempi**

- $\sum_n (u, u_n) u_n$  serie di Fourier di  $u$  (rispetto a  $(u_n)$ )
- $(u, u_n) \in \mathbb{R}$  coefficienti di Fourier di  $u$  (rispetto a  $(u_n)$ )

Dato  $u \in H$   
Definizione: Siia  $H$  di Hilbert e sia  $(u_n)$  sistema ortonormale.

## 9.2 Funzioni polidrome

$z = |z|e^{i\text{Arg}z}$ ,  $\text{Arg}z := \{\arg + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\text{arg}z$  argomento principale  $\in [0, 2\pi]$ .

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\text{Arg}z}{n}} \right\} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} e^{i(\frac{\text{arg}z}{n} + \frac{2k\pi}{n})} : k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

$$\log z = \{\log |z| + i\text{Arg}z\}$$

Alla radice sono associati n valori, al logaritmo  $\infty$  valori.

$z \mapsto \sqrt[n]{z}, \log z$  non sono funzioni!

Per definire una radice n-esima funzione si può specificare l'intervallo di variazibilità di  $\text{Arg}z$ .  $z \in \mathbb{C} \mapsto \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\text{Arg}z}{n}}$  con  $\text{Arg}z \in [\bar{\theta}, \bar{\theta} + 2\pi]$ : Branca della radice n-esima.

**Osservazione:** Una branca della radice n-esima non è continua su  $\mathbb{C}$ . (è continua su  $\mathbb{C} - \{\theta = \bar{\theta}\}$ )

Non è possibile incollare due branche diverse ottenendo una funzione olomorfa su  $\mathbb{C}$ .

## 9.3 Funzioni armoniche

**Definizione:**  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice armonica se

$$\nabla^2 u = 0 = u_{xx} + u_{yy}$$

**Osservazione:**  $f = f(z)$  olomorfa,  $f = u + iv \implies u, v$  armoniche.

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \begin{cases} u_{xx} = v_{yy} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

Sommando le due equazioni

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(Analogamente per  $\nabla^2 v = 0$ )

**Osservazione 2:**  $u$  armonica su  $\Omega$ , con  $\Omega$  semplicemente connesso  $\implies \exists v$  armonica coniugata di  $u$  t.c.  $f = u + iv$  olomorfa.

## 10 Analisi funzionale

Uno spazio vettoriale (su  $\mathbb{R}$ ) è un insieme ( $V$ ) su cui sono definite due operazioni:

**Somma**  $+ : V \times V \rightarrow V$

**Prodotto per scalare**  $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$

Tali operazioni godono delle seguenti proprietà

Per la somma

- $u + v = v + u$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- $u + \underline{0} = u$
- $u + (-u) = \underline{0}$

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v_n + cuv_n = \int_{\Omega} fv_n \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Data  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\exists \{v_n\} \subseteq C_0^{\infty}(\Omega)$  :  $v_n \xrightarrow{H^1} v$  (per definizione di  $H_0^1(\Omega)$ )  
Passando al limite

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Tale limite si dimostra

$$\left| \int_{\Omega} fv_n - fv \right| \leq \int_{\Omega} |f(v_n - v)| \leq_H \|f\|_2 \|v_n - v\|_2 \rightarrow 0$$

In modo analogo si verificano le altre convergenze

2. Sia  $u \in H_0^1(\Omega)$  sol. variazionale, supponendo  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , ( $c, f$  continue)

$u = 0$  su  $\partial\Omega$

Sappiamo che

$$\int_{\Omega} a \nabla v \cdot \nabla u + cuv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ in particolare } \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Tramite Gauss Green

$$\int_{\Omega} -a \Delta u \cdot v + cuv - fv = 0 \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

$$\implies \int_{\Omega} (-a \Delta u + cu - f)v = 0 \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

La funzione nelle parentesi è continua su  $\bar{\Omega}$

Per il lemma di DBR

$$\implies -a \Delta u + cu - f = 0 \text{ in } \Omega$$

## 19 Serie di Fourier in spazi di Hilbert

**Definizione:** Sia  $H$  di Hilbert. Una famiglia di vettori  $\{u_n\} \subseteq H$  si dice **sistema ortogonale** se  $(u_n, u_m) = 0 \ \forall n \neq m$ .  
Si dice poi **sistema ortonormale** se è ortogonale e  $(u_n, u_n) = 1 \ \forall n$

**Esempi:**

- $H = \mathbb{R}^3$ :  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$
- $H = l^2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \text{ tali che } \sum_{n \geq 0} x_n^2 < +\infty\}$  è uno spazio vettoriale

$$\|x\|_{l^2} = \left( \sum_{n \geq 0} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

è di Hilbert poiché  $((x_n), (y_n)) = \sum x_n y_n$   
 $e_n = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

Per Gauss-Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi = \int_{\Omega} -a \nabla u \cdot \alpha + cu \varphi$$

Integrando

$$-a \nabla u \cdot \alpha + cu \varphi = f \varphi \text{ in } \Omega$$

Moltiplico l'equazione per  $v \in C_0(\Omega)$

$$\text{Allora } u \in H_1^0(\Omega) \quad (u, v \Delta u \in C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega), u = 0 \text{ su } \partial\Omega)$$

10.0.2 Norma su uno spazio funzionale di dimensione infinita  
wsld, ricorda che l'ipotesi  $p \geq 1$ .  
La disegualanza triangolare per la norma  $p$ , ovvero disegualanza di Minkowski

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|^p = \left( \sum_{i=1}^n |a_i x_i|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^n |a_i| |x_i| = \left\| \sum_{i=1}^n |a_i| |x_i| \right\|^p = \left\| \sum_{i=1}^n |a_i| x_i \right\|^p = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|^p$$

Norma euclidea:  
 5.  $\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\| \forall u, v \in V(\dim)$   
 4.  $\|\overline{0}\| = 0$

Seguono le seguenti proprietà:

( $V, \|\cdot\|$ ) si dice **spazio vettoriale normato**.

3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \forall u, v \in V$  (dis. triangolare)  
 2.  $\|ta\| = |t| \|a\| \forall t \in \mathbb{R}, \forall a \in V$  (omogeneità)

1.  $\|a\| > 0 \forall a \in V - \{0\}$  (positività)

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .  
Una norma su  $V$  è una funzione  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  tale che:

### 10.0.1 Norma

- $1 \cdot u = u$
- $t(u + v) = tu + tv$
- $t(su) = t(s)u$

Per il prodotto per scalare

Lemma di DuBois-Raymond

$$\int_{\Omega} u \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega) \iff u \equiv 0 \text{ in } \Omega$$

Se  $u \in C(\bar{\Omega})$  è tale che:

Formula di Gauss-Green

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v + a \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Omega} a \frac{\partial v}{\partial n} u + \int_{\Omega} a \Delta v \cdot \Delta u$$

$X = a \Delta u, a \in C_1, u \in C^2$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(a \Delta u) v = \int_{\Omega} a \Delta u \cdot \Delta v + \int_{\Omega} a \frac{\partial u}{\partial n} v$$

Tranne che per la coercività di  $b$ :

$$\int_{\Omega} q(u, n) a \Delta u \Delta v + c u^2 \leq \alpha \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{Analogo al caso di Dirichlet lavorando su } H = H_1(\Omega) \text{ minimo di } \|u\|_{H^1} =$$

Dimostrazione

$$\int_{\Omega} a |\Delta u|^2 + c_0 u^2 \leq \min\{a, c_0\} |\Delta u|^2 + |u|^2$$

$$\int_{\Omega} q(u, n) a |\Delta u|^2 + c u^2 \leq \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

**Definizione:** Sia  $(V, \|\cdot\|)$  sp. vettoriale normato. Allora  $d(u, v) := \|\underline{u} - \underline{v}\|$  definisce una distanza su  $V$ , ovvero

$$d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

tal che

1.  $d(u, v) \geq 0$  con  $= 0 \iff u = v$  positività
2.  $d(u, v) = d(v, u)$  simmetria
3.  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$  disugualanza triangolare

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left( \sum_{i=1}^n \|x_i - y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|$$

**Definizione:**  $(V, d)$  si dice spazio metrico

**Osservazione:** In uno spazio metrico possiamo definire le **sfere**: dato  $r \geq 0, v_0 \in V$

$$B_r(v_0) := \{v \in V : d(v, v_0) < r\}$$

Si dice sfera chiusa se la disugualanza non è stretta.

**Definizione:** Se  $\{v_n\} \subseteq (V, \|\cdot\|)$ , si dice che  $v_n \rightarrow v$  in  $V$  se

$$d(v_n, v) \rightarrow 0, \text{ oppure } \|v_n - v\| \rightarrow 0$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : d(v_n, v) = \|v_n - v\| < \varepsilon \forall n \geq \nu)$$

Alcuni fatti veri in dimensione finita ma falsi in dimensione infinita:

1. Tutte le norme sono "equivalenti" fra loro
2. Tutte le successioni di Cauchy convergono
3. Tutti i sottospazi vettoriali sono chiusi

**Definizione:** Sia  $V$  uno spazio vettoriale (su  $\mathbb{R}$ ), consideriamo su  $V$  due possibili norme  $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ .

Queste due norme si dicono **equivalenti** se:

1.  $\exists c > 0 : \forall v \in V, \|v\| \leq c|||v|||$
2.  $\exists c' > 0 : \forall v \in V, |||v||| \leq c\|v\|$

- $\varphi(v) = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H$

- $b(u, v) = \int_{\Omega} a\nabla u \cdot \nabla v + cuv$

$\varphi$  è lineare continuo,  $b(u, v)$  è bilineare simmetrica, continua, coerciva Per Lax-Milgram  $\exists$  unico  $u \in H$  tale che

$$\varphi(v) = b(u, v) \quad \forall v \in H$$

ovvero:

$$\int_{\Omega} a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H$$

Inoltre  $u$  risolve

$$\min_H E(v) := \frac{1}{2}b(u, v) - \varphi(v)$$

Verifica ip. Lax-Milgram:

- $\varphi$  (lineare) continuo:  $\exists M : |\varphi(v)| \leq M\|v\|_H$

$$\int_{\Omega} |fv| \leq \int_{\Omega} |fv| \leq_H \|f\|_2 \|v\|_2 \leq_P C_p(\Omega) \|f\|_2 \|\nabla v\|_2$$

Si avrà dunque  $M = C_p(\Omega) \|f\|_2$  e  $\|\nabla v\|_2 = \|v\|_2$

- $b(u, v)$  è bilineare simmetrica (dimostrazione semplice)
- $b(u, v)$  continua

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} a\nabla u \cdot \nabla v + cuv \right| \leq \int_{\Omega} |a\nabla u \cdot \nabla v + cuv| \leq \int_{\Omega} |a\nabla u \cdot \nabla v| + |cuv| \\ &\leq \int_{\Omega} |a|\nabla u \cdot \nabla v + \|c\|_\infty \int_{\Omega} |uv| \leq a\|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|c\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &\leq a\|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|c\|_\infty C_p^2(\Omega) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \\ &= (a + \|c\|_\infty C_p^2(\Omega)) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 = (a + \|c\|_\infty C_p^2(\Omega)) \|u\|_H \|v\|_H \end{aligned}$$

- $b(u, v)$  coerciva

$$b(u, v) = \int_{\Omega} a|\nabla u|^2 + cu^2 \geq \int_{\Omega} a|\nabla u|^2 = a\|\nabla u\|_2^2 = \alpha\|u\|_H^2$$

#### 18.1.5 Esistenza delle soluzioni per Neumann

**Teorema:** Nelle ip. sopra definite, supponiamo anche  $c(x) > 0$  il problema  $(D)_v$ : trovare  $u \in H^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Ammette una e una sola soluzione. Inoltre  $u$  è caratterizzata nel modo seguente:

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a|\nabla v|^2 + cv^2) - \int_{\Omega} fv$$

Dimostrazione: Considero  $H = H_1^0(\Omega)$ , munito di  $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|^2$

$$\min_{a \in H_1^0(\Omega)} E(a) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a |\Delta u|^2 + c u^2) - \int_{\Omega} f a$$

segue che: Ammette una sola soluzione. Inoltre  $u$  è caratterizzata nel modo

$$\int_{\Omega} a \Delta u \cdot \Delta u + cu = \int_{\Omega} f a \quad \forall a \in H_1^0(\Omega)$$

Teorema: Nelle ip. sopra definite, il problema  $(D)^a$ : trovare  $u \in H_1^0(\Omega)$

#### 18.1.4 Esistenza delle soluzioni

1.  $u$  sol. variabile,  $c, f$  continue,  $u \in C^2(\bar{\Omega}) \iff u$  sol. classica

2.  $u$  sol. classica  $\iff$   $u$  sol. variabile

Proposizione (N): Nelle ipotesi sopra:

$$\int_{\Omega} a \Delta u \cdot \Delta u + cu = \int_{\Omega} f a \quad \forall a \in H_1^0(\Omega)$$

$(N)^a$  Trovare  $u \in H_1^0(\Omega)$  tale che:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial \Omega \\ -a \Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$(N)^c$  Trovare  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  tale che:

18.1.3 Formulazione variazionale del problema di Neumann

2.  $u$  sol. variabile,  $c, f$  continue,  $u \in C^2(\bar{\Omega}) \iff u$  sol. classica

1.  $u$  sol. classica  $\iff$   $u$  sol. variabile

Proposizione (D): Nelle ipotesi sopra:

$$\int_{\Omega} a \Delta u \cdot \Delta u + cu = \int_{\Omega} f a \quad \forall a \in H_1^0(\Omega)$$

$(D)^a$  Trovare  $u \in H_1^0(\Omega)$  tale che:

$$\begin{cases} u = 0 & \text{su } \partial \Omega \\ -a \Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$(D)^c$  Trovare  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  tale che:

18.1.2 Formulazione variazionale del problema di Dirichlet

Le successioni convergenti nelle due norme sono le stesse.

#### 10.1 Spazio di Banach

Definizione: Uno spazio vettoriale normato  $(V, \|\cdot\|)$  si dice completo o

di

Banach se tutte le successioni di Cauchy sono complete.

Teorema/osservazione:  $V = (C_0([a, b], \mathbb{R}))^\infty$  è di Banach

$$V = C_b([a, b]) \quad \|f\|_{C_b} := \sum_{n=1}^{\infty} |D^n f|^\infty$$

Generalizzazione:

Teorema:  $(C_0([a, b], \mathbb{R}))^\infty$  è di Banach

Definizione: Una successione di Cauchy composta da numeri reali è detta successione di Cauchy se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un numero naturale  $N$  tale che per tutti i  $n, m > N$  si ha  $|a_n - a_m| < \epsilon$ .

$$\|f_n - f_m\|_1 = \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f_m(x) dx \right| < \epsilon$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1} \\ -1 & \frac{1}{n-1} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questo teorema è falso se  $\dim V = +\infty$ . Prendendo lo spazio delle funzioni  $V = C_0([a, b])$  con norma  $\|\cdot\|_1$ , si può costruire una successione di Cauchy che non converge.

Teorema: Se  $\dim V < +\infty$  vale anche il viceversa, ovvero

Teorema: Se la successione  $\{u_n\}$  converge allora è di Cauchy

$\{u_n\}$  converge  $\iff$   $\{u_n\}$  di Cauchy

$$\|u_n - u_m\| = \|u_n - u + u - u_m\| \leq \|u_n - u\| + \|u - u_m\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Osservazione: Vale sempre che se  $\{u_n\}$  converge allora è di Cauchy.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(u_n, u_m) < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Definizione: Sia  $(V, \|\cdot\|)$  uno spazio vettoriale normato. Una successione  $\{u_n\} \subset V$  si dice successione di Cauchy se

In uno spazio a dimensione finita non è generalmente vero, ad esempio nelle spazi di dimensione infinita su  $[a, b]$ .

Teorema: Se  $\dim V < +\infty \iff$  tutte le norme su  $V$  sono tra loro equivalenti

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \iff B_1(0) \subseteq B_\infty(0)$$

Interpretazione geometrica:

Le successioni convergenti nelle due norme sono le stesse.

**Teorema** Sia  $(V, \|\cdot\|)$  spazio vettoriale normato. Se  $\dim V < +\infty \implies$  tutti i sottospazi vettoriali  $W$  sono **chiusi**.

$$\{v_n\} \subseteq W, v_n \rightarrow v \text{ in } V \implies v \in W$$

Il teorema diventa falso se  $\dim V = +\infty$ , ad esempio  $V = (C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ .

## 11 Integrazione secondo Lebesgue

1. Misure e funzioni misurabili
2. Definizione di integrale di Lebesgue
3. Confronto con Riemann
4. Teoremi principali

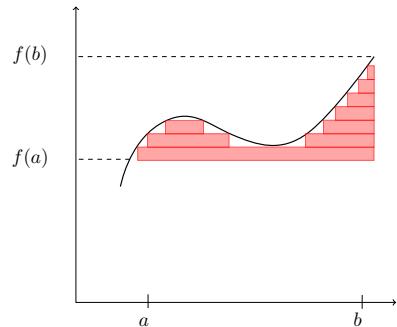


Figura 4: Integrale secondo Lebesgue, intuizione geometrica

$$\int_a^b f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N l(f^{-1}(j_k)) \cdot y_k$$

### 11.0.1 Misure e funzioni misurabili

**Definizione:** Sia  $X$  insieme, e sia  $F \subseteq P(X)$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ .

$F$  si dice una  $\sigma$ -algebra se:

- (i)  $\emptyset \in F$
- (ii)  $A \in F \implies X \setminus A \in F$
- (iii)  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F \implies \bigcup_n A_n \in F$

Se  $a(u, v) = \varphi(v) \forall v \in H$ ,

$$E(u + \varepsilon v) - E(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} a(v, v) \geq 0$$

Quindi  $u$  minimizza  $E$ .

Viceversa, se  $u$  minimizza  $E$ :

$$\begin{aligned} E(u + \varepsilon v) &\geq E(u) \quad \forall v \in H \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \implies a(u, v) - \varphi(v) &= 0 \quad \forall v \in H \end{aligned}$$

## 18 Equazioni alle derivate parziali

### 18.1 Formulazione variazionali di problemi ellittici

$-a\Delta u + cu = f$  in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, limitato e regolare,  $u = u(x_1, \dots, x_n)$

**Ipotesi**

- $a > 0$
- $c \in L^\infty(\Omega)$
- $f(x) \in L^2(\Omega)$

Se  $c = 0, a = 1 \implies -\nabla^2 u = f$  (Equazione di Poisson)

Condizione di Dirichlet (omogenea):  $u = 0$  su  $\partial\Omega$

Condizione di Neumann (omogenea):  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  su  $\partial\Omega$

#### 18.1.1 PDE ellittiche del secondo ordine

ODE lineare del 2° ordine

$$au'' + bu' + cu = f$$

Alle derivate parziali (PDE del 2° ordine),  $u = u(x), x \in \mathbb{R}^n$

$$-A(x) \cdot \nabla^2 u(x) + b(x) \cdot \nabla u(x) + cu = f$$

si dice ellittica se  $A$  è definita positiva

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

In particolare se  $A(x) = I$

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) u_{x_i, x_j} = \sum_{i=1}^n u_{x_i, x_j} = \Delta u$$

$$\begin{aligned}
& 0 = (a)\phi - (a, n)a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(a\varepsilon + n) - \phi(a\varepsilon)}{a\varepsilon} \quad \Leftarrow \\
& (\exists) o + [(a)\phi - (a, n)a]\varepsilon = (n)\phi - (a, n)a \quad \Leftarrow \\
& (a, n)a \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} + [(a)\phi - (a, n)a]\varepsilon + [(n)\phi - (n, n)a] = 0 \\
& (a)\phi\varepsilon - (n)\phi - [(a, n)a\varepsilon + (a, n)a\varepsilon] = 0 \\
& \frac{2}{1}[a(n, n) + 2\varepsilon a(n, a\varepsilon) + (a, n)a\varepsilon] = 0 \\
& E(u + \varepsilon a) = \frac{2}{1}a(u + \varepsilon a, u + \varepsilon a) - \phi(u + \varepsilon a)
\end{aligned}$$

17.2.4 Commentari sulla proprietà variazionale di  $\mu$

$$\min_{a \in H_1^0(\Omega)} E(a) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{2}{1} |a|^2 - \int_{\Omega} \int_{\Omega} a \Delta a \quad \text{risolve il teorema}$$

Mentre il teorema dice che  $u$  risolve

$$\begin{cases} u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ -\Delta u = f & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Questa ultima è una formulazione debole del seguente problema:

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} u \cdot \Delta u dx d\alpha \in H_1^0(\Omega)$$

Per Lax-Milgram:  $\exists u \in H_1^0(\Omega)$  tale che  $\phi(a) = (a, u) \forall a \in H_1^0(\Omega)$

$$\|u\|_{H_1^0(\Omega)} \leq \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} u \cdot \Delta u dx d\alpha \right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$H = H_1^0(\Omega), a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v dv$  dove  $f \in L^2(\Omega)$

$$\min_{a \in H} E(a) = E(u)$$

si ha

$$E(a) := \frac{2}{1}(a, a) - \phi(a) \quad \forall a \in H$$

Mentre  $u$  è caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$\phi(a) = (a, u) \quad \forall a \in H$$

Allora esiste  $u \in H$  tale che

Sia  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  forma bilineare simmetrica, continua e coerciva.

Sia  $H$  Hilbert, e sia  $\phi' \in H'$

Teorema di Lax-Milgram

17.2.3 Teorema di Lax Milgram

$$\begin{aligned}
& \mu(\cup_n A_n) = \lim_{n \leftarrow \infty} \mu(A_n) \Leftarrow \\
& 4. A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \dots, A_i \in F, \mu(A_i) > +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3. A_1 \subset A_2 \subset \dots, A_i \in F \\
& \text{Osservazione: Seguono da 1, 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \notin A \\ 1 & \text{se } x_0 \in A \end{cases} \\
& \bullet (X, P(X)) \text{ fissato } x_0 \in X \\
& \bullet (X, P(X)), \mu(A) = \text{card } A
\end{aligned}$$

Esempi:

$$\begin{aligned}
& \text{(additività, eventualmente } +\infty = +\infty\text{)} \\
& \mu(\cup_n A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \\
& \text{disgiunti allora} \\
& 2. Se \{A_n\} \text{ è una famiglia al più numerabile di insiemi di } F \text{ 2 a 2}
\end{aligned}$$

1.  $\mu(A) \geq 0 \forall A \in F$  (positività)

tale che

$$\mu : F \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

( $X, F$ ) è una misurazione

Definizione: Sia  $(X, F)$  spazio misurabile, una misura positiva su

Definizione: La coppia  $(X, F)$  si dice spazio misurabile

•  $X = \mathbb{R}^n, F =$  la più piccola  $\sigma$ -algebra contenente gli aperti (o di Borel)

•  $X$  qualsiasi,  $F = P(X) =$  partiti di  $X$

Esempi

Osservazione:  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F \iff \bigcup_n A_n \in F$

**Teorema:** Esistono su  $\mathbb{R}^n$  una  $\sigma$ -algebra  $M$  (misurabile secondo Lebesgue) e una misura positiva  $m$  (misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ ) tali che:

- Tutti gli insiemi aperti appartengono a  $M$
- $A \in M$  e  $m(A) = 0 \implies \forall B \subseteq A, B \in M$  e  $m(B) = 0$  (completezza)
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$

$$\implies m(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

[...]

**Osservazione:** Non tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  sono misurabili secondo Lebesgue.

**Osservazione:** La misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$  estende il concetto di volume n-dimensionale

**Osservazione:** Gli insiemi di misura nulla sono importanti

**Definizione:** Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice misurabile secondo Lebesgue se

$$\begin{aligned} \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto, } f^{-1}(A) \text{ misurabile secondo Lebesgue} \\ \forall C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso, } f^{-1}(C) \text{ misurabile secondo Lebesgue} \end{aligned}$$

**Osservazione:**  $f$  continua  $\implies f$  misurabile secondo Lebesgue ( $f$  continua  $\implies \forall A$  aperto  $f^{-1}(A)$  aperto  $\implies \forall A$  aperto  $f^{-1}(A)$  misurabili)

**Osservazione 2:** Sono misurabili anche limiti, inferiore, superiore di funzioni continue (di funzioni misurabili)

Più in generale se

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

con  $E$  misurabile,  $f$  si dice misurabile secondo Lebesgue se  $\forall A \subseteq \mathbb{R}$  aperto  $E \cap f^{-1}(A)$  misurabile secondo Lebesgue

### 11.0.2 Definizione di integrale secondo Lebesgue

Sia  $f : E$  misurabile  $\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile.

**Funzioni semplici**

$S$  funzione semplice è una funzione (misurabile) che assume un numero finito di valori (ciascuno su un insieme misurabile).

$$S = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{E_i}, \quad \chi_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

### Esempi:

- In  $H$  Hilbert qualsiasi  $a(u, v) = (u, v)$
- $H = H^1(\Omega)$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} uv$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$

**Definizione:** Sia  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineare

- a simmetrica se

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H$$

- a continua se

$$\exists C > 0 \text{ tale che } |a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H$$

- a coerciva se

$$\exists \alpha > 0 \text{ tale che } a(u, v) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

### Esempi:

- 1) In  $H$  di Hilbert qualsiasi,  $a(u, v) = (u, v)$  è

- simmetrica (per definizione di prodotto scalare)
- continua (limitata per Cauchy Schwartz)
- coerciva ( $(u, u) = 1 \cdot \|u\|^2$ )

- 2) In  $H = H_0^1(\Omega)$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ .

- simmetrica
- continua: (tramite Holder)

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \leq \|\nabla v\|_2 \|\nabla v\|_2 \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

- coerciva: (per Poincaré)

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

**Osservazione:**  $a(u, v)$  non sarebbe coerciva su  $H^1(\Omega)$  poiché non vale la diseguaglianza di Poicaré (verificabile con  $u = \text{cost} > 0$ )

$$f_+ = f - f_-$$

infatti

$\Rightarrow$

Quindi  $f$  integrabile secondo Lebesgue  $\Leftrightarrow |f|$  integrabile secondo Lebesgue  $\Leftrightarrow \int_E f \, d\mu \in \mathbb{R}$

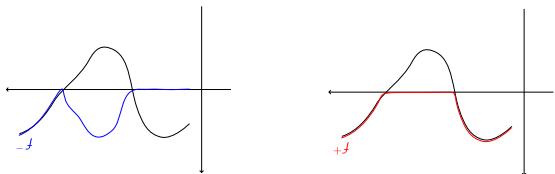
Osservazione:  $f$  è integrabile secondo Lebesgue  $\Leftrightarrow \int_E f \, d\mu \in \mathbb{R}$

Definizione:  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile si dice integrabile secondo Lebesgue se

A partire che almeno uno tra i due integrali sia finito, (eventualmente integrabile valore  $\pm\infty$ )

$$\int_E f_- \, d\mu - \int_E f_+ \, d\mu =: \int_E f \, d\mu$$

Figura 5: Funzioni di segno qualsiasi



$f = f_+ - f_-$  con  $f_+, f_- \geq 0$ ,  $f_+ = \max\{f, 0\}$ ,  $f_- = -\min\{f, 0\}$

Dato  $f$  misurabile su  $E$  misurabile, scriviamo:

Funzione misurabile di segno qualsiasi

$$\left( \int_S f \, d\mu \right) = \sup_{S \in \mathcal{F}} \int_S f \, d\mu$$

Funzione misurabile  $f \geq 0$

Precisazione: con la convenzione  $0 \cdot \infty = 0$

Osservazione:  $f$  possiamo associare ad  $u$  un elemento  $\phi_u \in H'$

$H' = \{\phi : H \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare e continuo}\} = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$

- $a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 a(u_1, v) + a_2 a(u_2, v)$

tale che:

$$a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

Definizione: Sia  $H$  di Hilbert. Una forma bilineare su  $H$  è per definizione un'applicazione

## 17.2.2 Forme bilineari

$$\text{Dunque } H'' = "H".$$

$$\|\phi\|_{H'} = \|u\|_H$$

Ma

$$\phi(a) = (u, a) \quad \forall a \in H$$

Allora, esiste unico  $u \in H$  tale che  $\phi = \phi_u$  ovvero  
Sia  $H$  spazio di Hilbert e sia  $\phi \in H'$ .

## Torema di Riesz

$$\begin{aligned} \phi_u(a) &= \sum_{k=1}^n u_k a_k = \sum_{k=1}^n a_k \phi_u(a) = \sum_{k=1}^n a_k u_k \\ \bullet \quad H &= \mathbb{R}^n, u = \sum_{k=1}^n u_k e_k, \phi_u(a) = \sum_{k=1}^n a_k u_k \\ \text{Esempio:} \quad &\text{In conclusione, } H \subseteq H' \text{ (immagine isometrica), ovvero la norma si conserva.} \\ \text{cioè } M &= \|u\| \text{ la costante migliore possibile } (\phi_u(a) = \|a\|_H) \\ \text{Ma:} \quad &\|\phi_u\|_{H'} = \|u\|_H \end{aligned}$$

Esiste

che

glossa

Cauchy-Schwarz

- continuo (limata):  $|\phi_u(a)| \leq M\|a\|$  valida con  $M = \|u\|$  per la diseguale

• Lineare:  $\phi_u(a_1 + a_2 v) = (u, a_1 + a_2 v) = a_1 \phi_u(a_1) + a_2 \phi_u(a_2)$

Verifica che  $\phi_u \in H'$ :

$$\phi_u(a) : H \rightarrow \mathbb{R}, \phi_u(a) = (u, a) \quad \forall a \in H$$

Osservazione: Fissato  $u \in H$  possiamo associare ad  $u$  un elemento  $\phi_u \in H'$

$$H' = \{\phi : H \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare e continuo}\} = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$$

Problema: Dato  $H$  di Hilbert, caratterizzarne  $H'$  (duale di  $H$ ).

## 17.2.1 Teorema di Riesz

Dove gli  $E_i$  sono insiemini misurabili a 2 disgiunti

## 17.2 Teoremi di rappresentazione

Definizione:  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile secondo Lebesgue  $\Leftrightarrow \int_E f \, d\mu \in \mathbb{R}$

Proprietà: Dato  $H$  di Hilbert, caratterizzare  $H'$  (duale di  $H$ ).

Definizione:  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile secondo Lebesgue  $\Leftrightarrow \int_E f \, d\mu \in \mathbb{R}$

Osservazione: Fissato  $u \in H$  possiamo associare ad  $u$  un elemento  $\phi_u \in H'$

$H' = \{\phi : H \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare e continuo}\} = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$

### 11.0.3 Proprietà principali dell'integrale di Lebesgue

1) **Linearità:**  $f, g$  Lebesgue integrabili,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g$  Lebesgue integrabile e

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

2) **Monotonia:**  $f, g$  Lebesgue integrabili,  $f \leq g$  q.o. su  $E$

$$\implies \int_E^f \leq \int_E^g$$

3) **Maggiorazione del modulo:**  $f$  Lebesgue integrabile

$$\implies \left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

Segue da 2),  $-|f| \leq f \leq |f| \implies -\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|$

4) L'integrale di Lebesgue "non vede" gli insiemi di misura nulla.  
Sia  $S$  semplice,  $E \rightarrow \mathbb{R}$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } E \setminus N \\ 1 & \text{su } N \end{cases} \quad m(N) = 0$$

$$\int_E S = m(E \setminus N) \cdot 0 + m(N) \cdot 1 = 0$$

Più in generale, se  $f$  misurabile:  $E \rightarrow \mathbb{R}$  se  $f$  si annulla su  $E$  tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = 0$$

Conseguenza: se  $f, g$  misurabili:  $E \rightarrow \mathbb{R}$  se  $f = g$  su  $E$  tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = \int_E g$$

**Definizione:** Si dice che una proprietà  $P(x)$  vale per q.o.  $x \in E$  se  $P(x)$  vale  $\forall x \in E \setminus N$ , con  $m(N) = 0$

Quindi

- $f = 0$  q.o. su  $E \implies \int_E f = 0$
- $f = g$  q.o. su  $E \implies \int_E f = \int_E g$

## 11.1 Confronto Riemann-Lebesgue

### 11.1.1 Integrali propri

$f$  R-integrabile  $\implies f$  L-integrabile, in caso affermativo, i valori degli integrali coincidono, in generale non vale il viceversa.

**Definizione:** Se  $(,)$  è un prodotto scalare su  $H$

- $x \perp y \iff (x, y) = 0$  (definizione)

$$\bullet M^\perp := \{x \in H : (x, y) = 0 \ \forall y \in M\}$$

**Osservazione:**  $f \perp g$  in  $L^2(0, 1)$  se  $\int_0^1 fg = 0$

**Esempio:**  $M = \{\text{funzioni costanti in } L^2(0, 1)\}$

$$M^\perp = \{f \in L^2(0, 1) : \int_0^1 fc = 0 \ \forall c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{f \in L^2(0, 1) : \int_0^1 f = 0\}$$

**Osservazione:**

$$x \perp y \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

**Dimostrazione**

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

**Osservazione:**  $M \cap M^\perp = \{0\}$ . Infatti  $x \in M \cap M^\perp \implies (x, x) = 0$  valido  $\iff x = 0$

### Teorema delle proiezioni

Sia  $H$  insieme di Hilbert e  $M$  un sottospazio chiuso.

Allora  $\forall x \in H \exists$  un'unica rappresentazione di  $x$  come:

$$x = y + z \text{ con } y \in M \text{ e } z \in M^\perp$$

Inoltre, le applicazioni  $x \mapsto y = P_M(x)$ ,  $x \mapsto z = P_{M^\perp}(x)$ , sono operatori lineari, limitati, di norma 1.

**Dimostrazione**

Basta prendere come  $y = P_M(x)$  (che esiste dal teorema precedente): sappiamo che  $(x - P_M(x), v) = 0 \ \forall v \in M \implies x - P_M(x) \in M^\perp$ , ovvero  $z := x - y \in M^\perp$ . L'unicità è data da  $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \implies y_1 - y_2 \in M$ ,  $z_2 - z_1 \in M^\perp$  ma  $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$ , dunque per queste ultime due condizioni si avrà  $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0$ .

**Dimostrazione Linearità**

$$x_1 = y_1 + z_1$$

$$x_2 = y_2 + z_2$$

Dunque  $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + z_1 + z_2$ , con  $y_k \in M$ ,  $z_k \in M^\perp$ , per l'unicità  $y_1 + y_2 = P_M(x_1 + x_2)$ ,  $z_1 + z_2 = P_{M^\perp}(x_1 + x_2)$

**Limitatezza**

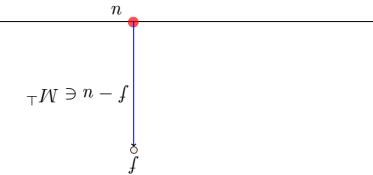
$P_M$  limitato:  $x = y + z = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$$

$$\implies \|P_M(x)\| \leq \|x\| \implies P_M \text{ limitato con norma } \leq 1$$

$\|P_M\| = 1$ : basta prendere  $x \in M \implies x = P_M(x) \implies$  vale l'uguaglianza  $\|P_M(x)\| = \|x\|$

Figura 13: Rappresentazione grafica della proiezione su un sottospazio chiuso



## 12 Spazi di Lebesgue

(Tramite serie)

$$\int_{+\infty}^0 \frac{x}{|\sin x|} = +\infty$$

Riemann integrabile su  $(0, +\infty)$  (tranne analisi complessa) Ma non è Riemann integrabile in modulo

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} \text{ su } (0, +\infty)$$

quindi non L-integrabile.

Controesempio: una funzione R-integrabile ma non R-integrabile in modulo e

Aalogamente se  $f$  non è limitata.

E in tal caso L-integrabile di Lebesgue di tipo proprio su  $\mathbb{R}$ .

Allora:  $f$ -integrabile su  $\mathbb{R} \iff |f|$ -integrabile (in senso improprio su  $\mathbb{R}$ ).

In  $\mathbb{R}$ , supponiamo che  $f$  limitata, sia R-integrabile su  $[-L, L]$  con  $|A_L| < 0$ .

### 11.1.2 Integrali impropri

$$\int_1^0 f = 1 \cdot m(0, 1) \cup \mathbb{Q} + 0 \cdot m(0, 1) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$$

$f$  è però L-integrabile,  $\int_1^0 f = 0$

$$\int_1^0 s \in S_R, s \leq f \iff s \leq 0 \text{ su } (0, 1) \iff 0 \leq s \leq s$$

$$\int_1^0 s \in S_R, s \geq f \iff s \geq 1 \text{ su } (0, 1) \iff 1 \geq s \geq s$$

stesso valore  
Non R-integrabile poiché approssimando da sotto e da sopra non si trova lo stesso valore

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Controesempio:  $\exists f$  L-integrabile ma non R-integrabile.

$$\sup_E s \leq \sup_{S_R} s \leq \int_E s \leq \inf_{S_R} s \leq \sup_E s$$

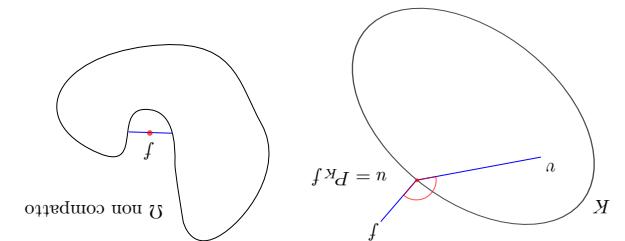
delle funzioni semplici secondo Riemann  $S_R$  sono una classe più ampia ( $\iff$ ) Le funzioni semplici seconda Lebesgue  $S_L$  sono una classe più ampia

$$u = P_M f \iff (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

$$\|f - u\| = \lim_{a \in M} \|f - v\|$$

Allora:  $A_f \in H$  unico  $u = P_M f$  tale che  
( $M$  è connesso, non è necessariamente chiuso senza ipotesi).  
Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e  $M$  un sottospazio vettoriale chiuso.  
Corollario, Teorema di proiezione su un sottospazio chiuso

Figura 12: Rappresentazione grafica della proiezione su connesso



Tale insieme è uno spazio vettoriale per la linearità dell'integrale.

**Definizione:** Data  $f \in L^1(E)$

$$\|f\|_1 := \int_E |f|$$

Tale norma rispetta le tre proprietà necessarie.

C'è un problema,  $\int_E |f| = 0 \Rightarrow f = 0$  su  $E$ ,  $\Rightarrow f = 0$  q.o. su  $E$ .

**Definizione:** Date  $f, g \in L^1(E)$  diciamo che  $f$  è equivalente a  $g$  se  $f = g$  q.o. su  $E$ .

Proprietà di una relazione di equivalenza:

- $f \sim f$
- $f \sim g \iff g \sim f$
- $f \sim g$  e  $g \sim h \implies f \sim h$

Dunque identifichiamo le funzioni equivalenti secondo l'ultima definizione.

**Teorema:**  $(L^1(E), \|\cdot\|)$  è uno spazio di Banach

**Definizione:**

$$\{f_n\} \subseteq L^1(E), f_n \rightarrow f \text{ in } L^1(E) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n - f| dx = 0$$

Consideriamo per semplicità  $f = 0$

Q:  $f_n \rightarrow 0$  puntualmente q.o. su  $E$ , allora  $\int_E f_n = 0$  ?

Controesempio 1

$$\exists f_n \subseteq L^1(\mathbb{R}) : \begin{cases} f_n \rightarrow 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R} \\ f_n \not\rightarrow 0 \text{ in } L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$f_n = \chi_{(n, n+1)} = \begin{cases} 1 & x \in (n, n+1) \\ 0 & x \notin (n, n+1) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f(x_0) = 0$  definitivamente (per  $n \gg 1$ )

$$\int_{\mathbb{R}} \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(n, n+1)} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Controesempio 2

$$\exists f_n \subseteq L^1(0, 1) : \begin{cases} f_n \rightarrow 0 \text{ in } L^1(0, 1) \\ f_n \not\rightarrow 0 \text{ q.o. su } (0, 1) \end{cases}$$

$$\|f\|_p = \left( \int_0^1 |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_0^t 1 \right)^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{1}{p}}$$

$$\|g\|_p = \left( \int_0^1 |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_t^1 1 \right)^{\frac{1}{p}} = (1-t)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f+g\|_p = 1$$

$$\|f-g\|_p = 1$$

L'identità del parallelogramma diventa:

$$2 = 2t^{\frac{2}{p}} + 2(1-t)^{\frac{2}{p}}$$

$$1 = t^{\frac{2}{p}} + (1-t)^{\frac{2}{p}}$$

Valida  $\iff p = 2$

**Definizione:** Uno spazio di Hilbert è uno spazio di Banach in cui la norma proviene da un prodotto scalare.

**Esempi:** sono spazi di Hilbert

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$
- $L^2(\Omega)$
- $H^1(\Omega)$

Non sono di Hilbert

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  con  $p \neq 2$
- $L^p(\Omega)$  con  $p \neq 2$
- $W^{1,p}(\Omega)$  con  $p \neq 2$
- $C^0([a, b])$ ,  $\|f\|_2 = (\int_a^b |f|^2)^{1/2}$  la norma viene da un prodotto scalare MA non è uno spazio di Banach, dunque non è uno spazio di Hilbert

### 17.1.2 Teorema di proiezione su un convesso chiuso

Un insieme  $K$  si dice **convesso** se  $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in (0, 1) \implies \lambda x + (1-\lambda)y \in K$   
Un insieme  $K$  si dice **chiuso** se  $\forall \{x_n\} \subseteq K : x_n \rightarrow x \in H \implies x \in K$

**Teorema:** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert, e sia  $K \subseteq H$  un convesso chiuso  
Allora  $\forall f \in H$  esiste unico  $u \in K$  tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

Inoltre:  $u = P_k f \iff (f - u, v - u) \leq 0 \forall v \in K$

$$\bullet \quad g = \chi_{(t,1)}$$

$$\bullet \quad f = \chi_{(0,t)}$$

- La (\*) è un'ipotesi molto più debole della convergenza uniforme

### Osservazioni

Allora  $f_n \rightarrow f$  in  $L_1(E)$

$$(*) |f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.o. } x \in E, \forall n \in \mathbb{N} \text{ (definitivamente)}$$

Supponiamo che  $\exists g \in L_1(E)$  indipendente da  $n$  tale che

Sia  $\{f_n\} \subseteq L_1(E)$  e sia  $f_n \rightarrow f$  q.o. su  $E$

Terema di convergenza dominata (di Lebesgue)

Infatti,  $f_n \rightarrow f$  q.o. in  $L_1(E)$ . Allora  $\exists f^{k(n)} \rightarrow f$  q.o. su  $E$ . (per la proposizione precedente)

Quindi se  $f_n \rightarrow f$  q.o. su  $E$ . ( $\iff f^{k(n)} \rightarrow f$  q.o. su  $E$ , per l'unicità del limite

quintale quasi ovunque,  $f = g$  q.o. su  $E$ )

Infatti,  $f_n \rightarrow f$  q.o. in  $L_1(E)$ . Allora  $\exists f^{k(n)} \rightarrow f$  q.o. su  $E$ . (per la proposizione precedente)

• Nell'esempio è vero

• Si può mettere  $f$  al posto di 0.

### Osservazioni:

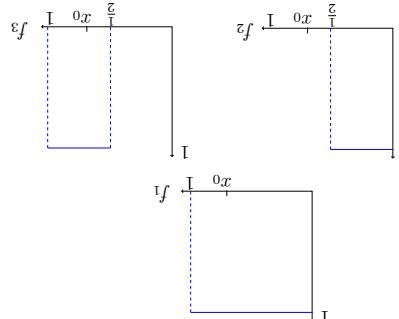
**Proposizione:** Se  $f_n \rightarrow 0$  in  $L_1(E)$ , allora  $\exists f^{k(n)} \rightarrow 0$  q.o. su  $E$ .

Fissato  $x_0 \in (0,1)$ ,  $\exists K(n) : f^{k(n)}(x_0) = 1$

$f_n \not\rightarrow 0 \wedge x_0 \in (0,1)$

$f_n \rightarrow 0$  in  $L_1(0,1)$ ,  $\|f_n\|_{L_1(0,1)} = \|f_0\|_{L_1} = 0$

Figura 6: Successione



**Esempio:**  $U = (0,1)$  in  $L_p(0,1)$  con  $p \neq 2$  non provengono da un prodotto scalare.

Le norme di  $\mathbb{R}^n, L_p(\Omega), W^{1,p}(\Omega)$  con  $p \neq 2$  non provengono da un prodotto scalare.

Prodotti scalari:  $\bullet$  solo servire a verificare se una norma proviene da un prodotto scalare.

**Osservazione:** Poco servire a verificare se una norma proviene o meno da un prodotto scalare.

**Dimostrazione:**  $\bullet$  solo servire a verificare se una norma proviene o meno da un prodotto scalare.

**Figura 11:** Legege del parallelogramma in  $\mathbb{R}^2$

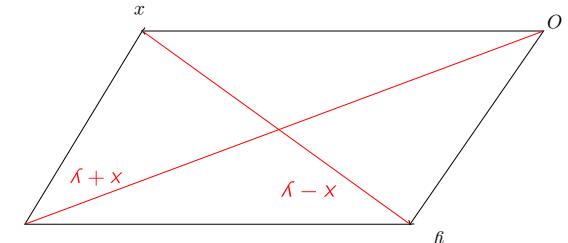


Figura 11: Legge del parallelogramma in  $\mathbb{R}^2$

**Teorema:** Sia  $H$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $(,)$  e sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da esso. Allora

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$$

•

$$\begin{aligned} \|y\| + \|x\| &= \sqrt{\|y\|^2 + \|x\|^2} \leq \sqrt{2\|x\|^2 + 2\|y\|^2} \\ \|y\| &= \sqrt{\|y\|^2} = \sqrt{\|y\|^2 + 2(x,y) + \|x\|^2} = \sqrt{\|y+x\|^2} = \|y+x\| \end{aligned}$$

•  $\|xy\| = \sqrt{(xy)(xy)} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = \|x\|\|y\|$

•  $\|x\| \geq 0$  con  $\iff x = 0$  vera per la prop. (1)

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

- In particolare per  $f_n(x) = x^n$  su  $(0, 1)$  la  $(*)$  è verificata, prendendo  $g \equiv 1$
- Invece nel controsenso 1, se  $|f_n(x)| \leq g$  q.o. su  $\mathbb{R}$ ,  $g \notin L^1(\mathbb{R})$
- È un teorema di passaggio al limite sotto integrale.

$$|f_n - f| \rightarrow 0 \text{ su } E \implies \int_E |f_n - f| \rightarrow 0$$

$\implies$  il limite degli integrali  $\equiv$  l'integrale del limite.

#### Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi)

Sia  $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$ , supponiamo che:

$$(**) f_n \geq 0 \text{ q.o. su } E, f_{n+1} \geq f_n \text{ q.o. su } E$$

Allora

$$\int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n$$

#### Osservazioni

- Il teorema si applica anche se  $f_n \leq 0$  decrescente, basta considerare  $g_n = -f_n \geq 0$

$$\text{B.L. a } g_n \implies \int_E \lim g_n = \lim \int_E g_n = \int_E \lim(-f_n) = \lim \int_E (-f_n)$$

- Può valere come uguaglianza  $+\infty = +\infty$

#### 12.0.1 Integrali multipli

##### Teorema di Fubini

Sia  $f$  integrabile secondo Lebesgue, su  $I = I_1 \times I_2$  ( $I_1 \subseteq \mathbb{R}^m, I_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ )

Allora:

1. Per q.o.  $x_1 \in I_1, x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  è L-integrabile su  $I_2$
2.  $x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2$  L-integrabile su  $I_1$
3.  $\int_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{I_1} \left( \int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{I_2} \left( \int_{I_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$

**Osservazione:** Si può scambiare il ruolo delle variabili.

$$\int_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{I_1} \left( \int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{I_2} \left( \int_{I_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

## 17 Spazi di Hilbert

**Definizione:** Sia  $H$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$

Un prodotto scalare su  $H$  è un'applicazione  $( , ) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

1.  $(x, x) \geq 0 \forall x \in H$  con  $(x, x) = 0 \iff x = 0$  positività
2.  $(x, y) = (y, x) \forall x, y \in H$  simmetria
3.  $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$  bilinearità

**Definizione:**  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  è detta norma associata (o indotta) dal prodotto scalare

#### Esempi

- $H = \mathbb{R}^n ; (x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k ; \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \|x\|_2$ ; ovvero la norma euclidea
- $H = L^2(\Omega) ; (f, g) = \int_{\Omega} fg ; \sqrt{(f, f)} = (\int_{\Omega} f^2)^{1/2} = \|f\|_2$
- $H = W^{1,2}(\Omega) ; (f, g) := \int_{\Omega} fg + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} = \int_{\Omega} fg + \nabla f \cdot \nabla g$

$$\sqrt{(f, f)} = \left( \int_{\Omega} f^2 + |\nabla f|^2 \right)^{1/2} \simeq \|f\|_{H^1}$$

norma equivalente alla norma di  $H^1$

### 17.1 Disuguaglianza di Cauchy Schwartz

Se  $( , )$  è un prodotto scalare su  $H$ , allora

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in H$$

Inoltre vale  $\iff x = \lambda y$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$

#### Dimostrazione

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq (x - ty, x - ty) = (x, x) - 2t(x, y) + t^2(y, y)$$

Dunque

$$0 \leq \|x\|^2 - 2t(x, y) + t^2\|y\|^2 \implies \Delta \leq 0$$

$$\Delta = 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

$$\implies |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Se vale  $=, \Delta = 0 \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x - \lambda y, x - \lambda y) = 0 \implies x - \lambda y = 0$  (Viceversa se  $x = \lambda y$ )

**Proposizione:** Se  $( , ) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  è un prodotto scalare,

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

#### Dimostrazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f|^p = \int_E |\lim_{n \rightarrow \infty} f_n - f|^p.$$

Candidato limite:  $f$  limite punto a.p.o.

$$0 \leftarrow \left( \inf_d |f - f_n| \int_E^d \right) \quad \{ f_n \in T_d(E), f \in L^p(E) \}$$

Convergenza in  $L^p$

$$\int_E |f|^p < +\infty \iff f \in L^p(E)$$

Appartenenza a  $L^p$ : verifica dell'integrale

- Teorema di differenziabilità (funzione assolutamente continua)
- Approssimazione con funzioni regolari (prodotto di convoluzione)
- Risultati di confronto
- Criteri di convergenza
- Definizione e teoremi di completezza
- Caso limite:  $p = +\infty$
- Caso particolarmente importante:  $p = 2$

**Teorema:**  $(L^p, \| \cdot \|_p)$  è uno spazio di Banach.

$$\left( \inf_d |f - f_n| \int_1^d \right) = \|f\|_p$$

Definizione:  $p \in [1, +\infty]$ ,  $L^p(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : |f|^p \text{ L-integrabile}\}/\sim$ , anche esso risulta essere uno spazio vettoriale normato (di Banach).

## 12.0.2 Spazi di Lebesgue (o spazi $L^p$ )

**Osservazione:** Se ho una  $f$  che cambia segno, posso provare ad applicare Tonelli a  $|f|$ : se  $|f|$  soddisfa 1), 2), Tonelli  $\iff |f|$  L-integrabile  $\iff f$  L-integrabile  $\iff$  posso applicare Tonelli.

Allora:  $f$  L-integrabile su  $I_1 \times I_2$  (e quindi per Tonelli  $\int_I f = \int_{I_1} \int_{I_2} f$ )

$$\bullet x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2 \text{ L-integrabile su } I_1$$

• Per q.o.  $x_1 \in I_1$ ,  $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  è L-integrabile su  $I_2$ .

Supponiamo che:

Sia  $f > 0$  misurabile sul precedente  $I = I_1 \times I_2$ .

**Teorema di Tonelli**

$$\|u\|_{L^p(0,1)} \leq \|u\|_{L^2(0,1)}$$

Mentre si calcola

$$\left( \inf_d |u - u_n| \int_1^d \right) \geq |u| \int_1^0 \geq |u| \int_x^{1/2} \geq |(x)u| \iff u(0) = (x)u = (x)$$

Osservazione Per  $n = 1$

Falso su  $W_{1,p}^0(\Omega)$ , verificabile prendendo  $u = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Delta u\|_p \text{ norma equivalente} \\ \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\Delta u\|_p \text{ norma su } W_{1,p}(\Omega) \end{array} \right.$$

Dunque, su  $W_{1,p}^0(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(\Omega) \cdot \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}$$

Teorema Si fa appunto, limitato di  $\mathbb{R}^n$ . Allora esiste una costante  $C_p = C_p(\Omega)$  tale che, per ogni  $u \in W_{1,p}^0(\Omega)$

16.0.1 Distinguibilità di Poincaré

$$u \in W_{1,p}^0(\Omega) \iff u = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

Osservazione Se  $u \in W_{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  allora

$$\{u \in W_{1,p}(\Omega) : \exists \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che } \varphi_n \hookrightarrow u \text{ in } L^p \text{ e } \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \hookrightarrow u \text{ in } L^p\} =$$

$$\{u \in W_{1,p}(\Omega) : \exists \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che } \varphi_n \hookrightarrow u \text{ in } W_{1,p}(\Omega)\} =$$

ovvero

$$W_{1,p}^0(\Omega) := \text{chiusura di } \mathcal{D}(\Omega) \text{ in } W_{1,p}(\Omega)$$

Definizione

### 12.0.3 Caso limite L infinito

**Definizione:**

$$L^\infty := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili} : \text{ess-sup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty\} / \sim$$

$$\sup_{x \in E} |f(x)| := \min\{M : |f(x)| \leq M \forall x \in E\}$$

$$\text{ess-sup}_{x \in E} |f(x)| := \min\{M : |f(x)| \leq M \text{ q.o. } x \in E\}$$

**Teorema:**  $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach

**Osservazioni**

$$f \in L^\infty(E) \iff \text{ess-sup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty$$

Convergenza

$$\{f_n\} \subseteq L^\infty(E), f \in L^\infty(E) : \text{ess-sup}_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

Dunque convergenza uniforme a meno di un insieme di misura nulla.

**Esempi** di funzioni in  $L^\infty(\mathbb{R})$

$$f(x) = c > 0, \|f\|_\infty = c$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{N} \\ n & x = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**Osservazione:** Se  $f \in L^p(E), \forall p \in [1, +\infty]$

$$\implies \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Analogo in  $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

- $u \in C_0^1(\Omega) \implies u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$(1) \quad p < +\infty \quad \int_{\Omega} |u|^p < +\infty ; \quad \int_{\Omega} |u'|^p < +\infty$$

$$(2) \quad p = +\infty \quad \text{ess-sup}_{\Omega} |u| < +\infty ; \quad \text{ess-sup}_{\Omega} |u'| < +\infty$$

- $u(x) = \text{sign}(x) \quad u \notin W^{1,2}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u|^2 = \int_{-1}^1 |\text{sign}x|^2 < +\infty \implies u \in L^2(\Omega)$$

MA:  $u'(x) = 2\delta_0 \notin L^2(\Omega)$

**Definizione:** Fissato  $\Omega$  aperto  $\subseteq \mathbb{R}^n, p \in [1, +\infty], k \in \mathbb{N}$

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \alpha \text{ multiindice con } |\alpha| \leq k\}$$

**Caso particolare**  $p = 2$

$$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$$

**Osservazione:**  $W^{k,p}(\Omega)$  sono spazi vettoriali

**Definizione:** Norma su  $W^{1,p}(\Omega)$  sia  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

**Definizione:** Norma su  $W^{k,p}(\Omega)$  sia  $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_p + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p$$

**Teorema:** Per ogni  $p \in [1, +\infty], W^{1,p}(\Omega)$  sono spazi di Banach

**Osservazione:**  $u_h \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  se

$$\|u_h - u\|_{1,p} \rightarrow 0$$

$$= \|u_h - u\|_p + \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

ovvero

$$\begin{cases} u_h \rightarrow u \text{ in } L^p(\Omega) \\ \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ in } L^p(\Omega) \end{cases}$$

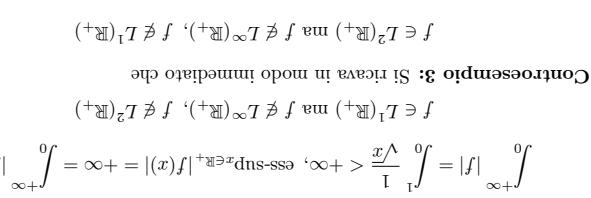


Figura 7: Controesempio 2

$$\int_1^\infty |f|^2 < \infty \quad \text{ma } f \notin L^\infty(\mathbb{R}^+), f \notin L^2(\mathbb{R}^+)$$

**Esempio** ( $n = 1, \Omega = (-1, 1)$ )

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial x} dx = \phi \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^1 u = \phi \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \iff \exists a_i \in L^p(\Omega) \text{ tali che}$$

Con  $\frac{\partial u}{\partial x}$  intrezzo nel senso delle distribuzioni

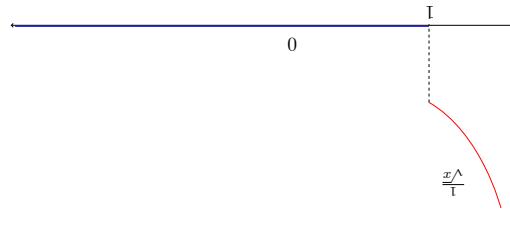
$$W_{1,p}(\Omega) := \{u \in L_p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x} \in L^p(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

**Definizione:** Fissato  $\Omega$  aperto  $\subset \mathbb{R}^n$ ,  $p \in [1, +\infty]$

$$\begin{cases} u = 0 \text{ su } \partial\Omega \\ -\Delta_p u = f \text{ su } \Omega \end{cases}$$

Esempio Equazione di Poisson  
Sono gli spazi dove si trovano le soluzioni di problemi di controllo per P.D.E.

## 16 Spazi di Sobolev



**Controesempio 2:**

$$\int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^2 dx = \infty \quad \text{ma } f \in L^\infty(\mathbb{R}^+), f \notin L^2(\mathbb{R}^+)$$

**Controesempio 1:** In generale non

$$p < q, q \in [1, +\infty] \iff L_p(E) \subset L_q(E) \subset L^q(E)$$

### 12.1 Risultati di confronto

**15.1.1 Operatori differenziali**  
Data  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , si possono definire  $D_T, D_T^2, \text{rot}_T, \dots$

**Osservazione:** Si possano calcolare le derivate di tutti gli ordini, di qualiasi

**Osservazione:**  $D_T$  definiscono delle distribuzioni. Aa

$$\langle D_a T, \phi \rangle = (-1)^{|a|} \langle T, D_a \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

- $a \geq 1$  Data  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  Aa multilinearie

**Esempio:**  $u(x) = |x| = u'' = 2\delta_0$   
**Osservazione 2:**  $\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n \text{ con } u \in C_b^n(\Omega) \subset L^{(n)}_{loc}(\Omega) \iff \langle T_n, \phi \rangle = \int_{\Omega} u \phi dx$   
**Osservazione:**  $T_{(k)}$  definisce una distribuzione lineare e continua, inoltre se  $\phi_h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\langle T_{(k)}, \phi_h \rangle \rightarrow 0$ .

$$\langle T_{(k)}, \phi \rangle = \langle (-1)^k T, \phi_{(k)} \rangle$$

- $n = 1$  Data  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N} \quad T_{(k)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

### 15.1 Generalizzazioni

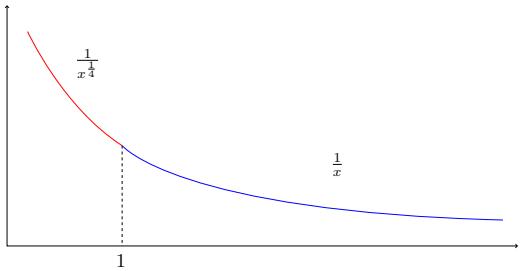


Figura 8: Controesempio 3

### 12.1.1 Disuguaglianza di Holder

Sia  $E$  misurabile  $\subseteq \mathbb{R}^n$  qualsiasi, e  $p \in [1, +\infty]$ .

Siano  $f \in L^p(E)$ ,  $g \in L^{p'}(E)$ , con  $p'$ : esponente coniugato di  $p$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Con la convenzione  $\frac{1}{\infty} = 0$

**Disuguaglianza di Holder:** Sia  $f \in L^p(E)$ ,  $g \in L^{p'}(E)$

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

### 12.1.2 Conseguenze di Holder sul confronto tra i vari spazi

#### Proprietà di immersione (1)

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $m(E) < +\infty$  e sia  $q \geq p$ , allora  $L^q(E) \subseteq L^p(E)$ , e

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{qp}} \|f\|_{L^q(E)} \quad \forall f \in L^q(E)$$

In particolare se  $q = +\infty$  ho che  $\forall p \in [1, +\infty), L^\infty(E) \subseteq L^p(E)$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Infatti

$$\int_E |f|^p \leq \int_E \text{ess-sup}_{x \in E} |f|^p = m(E) \cdot (\text{ess-sup}_{x \in E} |f|)^p$$

Elevando a  $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_p = \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (m(E))^{\frac{1}{p}} \text{ess-sup}_{x \in E} |f| = m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

### 14.2.4 Motivo della definizione di derivata

Considerando il caso  $T = T_u$  con  $u \in C^1(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$   
Si avrà in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  che  $(T_u)' = T_{u'}$

**Dimostrazione**

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle = -\int_{\Omega} u \varphi'$$

$$\langle T_{u'}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u' \varphi$$

Integrando per parti si avrà

$$\int_{\Omega} u' \varphi = u \varphi - \int_{\Omega} u \varphi'$$

Essendo  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u \varphi|_a^b = 0$  (dove  $a, b$  estremi di  $\Omega$ ) Si avrà:

$$\int_{\Omega} u' \varphi = - \int_{\Omega} u \varphi'$$

### 15 Esempi di distribuzioni

$$1. T = T_u \text{ con } u \in C^1(\Omega) \implies (T_u)' = T_{u'}$$

$$2. T = T_u \text{ con } u(x) = |x| \text{ su } \Omega = (-1, 1)$$

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle = -\int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x) dx + x \varphi \Big|_0^1 - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + x \varphi(x) \Big|_{-1}^0 = \int_{-1}^1 \varphi(x) \cdot \text{sign}(x) dx \\ \implies (T_{|x|})' = T_{\text{sign}(x)} \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

**Notazione:**  $(|x|)' = \text{sign}(x)$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$

Più in generale: se  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$   $u' = v$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , significa  $(T_u)' = T_v$  ovvero

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle (T_u)', \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle = \langle T_v, \varphi \rangle$$

$$-\int_{\Omega} u \varphi' = \int_{\Omega} v \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$3. u(x) = \text{sign}(x), u' = ?$$

$$-\int_{\Omega} \text{sign}(x) \varphi'(x) dx = -\int_0^1 \varphi' + \int_{-1}^0 \varphi' = -\varphi(1) + 2\varphi(0) - \varphi(-1) = 2\varphi(0) \\ = 2 \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

$$4. T = \delta_0 \quad T' = ?$$

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Teorema di approssimazione con funzione regolare**

$C_0(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C_\infty \text{ e aventi supporto compatto in } E\}$

$C_0(E)$  è un sottospazio denso in  $L_p(E)$ .

Sia  $p \in [1, +\infty)$ , e sia  $E$  misurabile in  $\mathbb{R}^n$ .

Ovvero

Osservazione:  $f \in L_p(E)$  tale che  $\|f\|_{L^p} < +\infty$

$\forall f \in L_p(E) \exists \{f_n\} \subset C_0(E)$  tale che  $|f_n - f|_{L^p} \rightarrow 0$

$\forall f \in L_p(E), \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $\|f - f_n\|_{L^p} < \epsilon$

## 12.2 Approssimazione con funzione regolare

Esempio: Se  $f \in L_1(E) \cup L_\infty(E) \iff f \in L_r(E) \forall r \in [1, +\infty]$

Dove  $a \in (0, 1)$  tale che  $\frac{1}{a} = \frac{d}{a} + \frac{b}{1-a}$

$$\|f\|_{L^a(E)} \leq \|f\|_{L^d(E)} \cdot \|f\|_{L^{1-a}(E)}$$

Se  $f \in L_p(E) \cup L_q(E)$ , con  $d \leq b \leq p \iff f \in L_r(E) \forall r \in [d, p]$

Proprietà di interpolazione (2)

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{p}{d}}$$

Elevando tutto alla  $\frac{d}{p}$

$$\left( \frac{d}{p} |f|^{\frac{d}{p}} \int \right) \cdot \left( \frac{d}{p} |f|^{\frac{d}{p}} \int \right) \leq m(E)^{\frac{d}{p}}$$

Ovvero

$$m(E) = \left( \frac{d}{p} |f|^{\frac{d}{p}} \int \right) = |f|^{\frac{d}{p}} \int |f|^{\frac{d}{p}} d\chi$$

$$\left( \frac{d}{p} |f|^{\frac{d}{p}} \int \right) = |f|^{\frac{d}{p}} \int |f|^{\frac{d}{p}} d\chi$$

$$\frac{d}{p} = \left( \frac{d}{p} \right) = |f|^{\frac{d}{p}} \int |f|^{\frac{d}{p}} d\chi$$

•  $x \in L_{q/p}$  infatti

•  $f \in L_{q/p}$  infatti

$$\|f\|_{L_{q/p}} \leq \|f\|_{L^d(E)} \cdot \|f\|_{L^{1-a}(E)}^{\frac{a}{d}}$$

Supponendo  $f \in L_q(E) \iff f \in L_{q/p}$

Dimostrazione di (1) a parte da Holder

Quindi  $(T, \phi_h) \hookrightarrow 0$  perché  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Questo perché se tale che  $\text{supp } \phi_h \subset K \setminus h \hookrightarrow 0$  informemente su  $K$  con tutte le derive.

Infatti  $\phi_h \hookrightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega) \iff \phi_h \hookrightarrow 0$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

(ii) è continuo

$\phi_h \hookrightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega) \iff \langle \phi_h, \phi_h \rangle \leftarrow \langle \phi_h, \phi_h \rangle \leftarrow 0$

$= -a > T, \phi_h < -b > T, \phi_h + a, \phi_h < b > T, \phi_h + b, \phi_h <$

$< T, \alpha \phi_h + \beta \phi_h = < T, \alpha \phi_h + \beta \phi_h <$

(i) è lineare:

$T, \phi_h < - > T, \phi_h < A \phi_h \in \mathcal{D}(\Omega)$

Dati  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , definito  $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$  come:

Definizione:  $\langle \phi, T \rangle$

14.2.3 Derivazione di distribuzioni

Assurdo.

$$\int_{\mathbb{R}} u \phi dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \iff$$

$u = 0$  q.o. su  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \iff u = 0$  q.o. su  $\mathbb{R}$

Applicando la proprietà si arriva

$$\int_{\mathbb{R}} u \phi dx = 0$$

Ricordando l'osservazione sull'esempio

$$\int_{\mathbb{R}} u \phi = \phi(0) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

In particolare, posso prendere  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$\int_{\mathbb{R}} u \phi dx = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Supponiamo per assurdo  $\phi_0 = T_u$ , con  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

Dimostrazione ad acciuffa finzione di  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

di non è associata ad alcuna finzione di  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

14.2.2 Commento sulla Delta

$\delta^{x_0}(\phi) := \phi(x_0), \delta^{x_0} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Caso n-dimensionale,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\delta^{x_0}(\phi) = \phi(x_0)$$

Punto generico  $x_0$

$$\|f\|_{L_{q/p}} \leq \|f\|_{L^d(E)} \cdot \|f\|_{L^{1-a}(E)}^{\frac{a}{d}}$$

Supponendo  $f \in L_q(E) \iff f \in L_{q/p}$

Dimostrazione di (1) a parte da Holder

14.2.1 Ovvie generalizzazioni

### 12.3 Supporto e Classe $C_0$

Ovvero:

$$\forall f \in L^p(E) \exists \{\varphi_n\} \subseteq C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall f \in L^p(E), \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$$

Falso nel caso  $p = \infty$

**Definizione:** Data  $\varphi \in C^\infty(E)$  il supporto di  $\varphi$  è

$$\overline{\{x \in E : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Un insieme  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  è compatto se e solo se è limitato e chiuso

$C_0^\infty(E) := \{\varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ derivabili infinite volte tali che } \text{supp}(\varphi) \text{ è un sottoinsieme compatto di } E\}$

### 12.4 Prodotto di convoluzione

**Osservazione:**  $f, g \in L^1(E) \not\Rightarrow f \cdot g \in L^1(E)$

Nel caso  $E = \mathbb{R}$  si può definire un prodotto che rimanga interno a  $L^1(\mathbb{R})$

**Proposizione 1**

Siano  $f, g(x) \in L^1(\mathbb{R})$  Si definisce prodotto di convoluzione

$$f * g := \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y)dy$$

1.  $f * g$  esiste finito per q.o.  $x \in \mathbb{R}$ , ovvero q.o.  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto f(x-y)g(y)$  è integrabile su  $\mathbb{R}$

2.  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$

3.  $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$

**Dimostrazione**

Consideriamo  $H(x, y) := f(x-y)g(y)$ , a priori non sappiamo se  $H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$ , dunque non è possibile applicare direttamente fubini.

Quindi consideriamo  $|H| \geq 0$  e applichiamo il teorema di Tonelli.

Verificando le ipotesi:

- Integro prima in  $dx$

$$\int_{\mathbb{R}_x} |H(x, y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}_x} |f(x, y)| dx$$

Con la sostituzione  $z = x - y$

$$= |g(y)| \int_{\mathbb{R}_z} |f(z)| dz = |g(y)| \cdot \|f\|_1 < +\infty$$

### 14.2 Delta di Dirac

$$\{u_h\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$$

Questa successione non converge in  $L^1(\mathbb{R})$

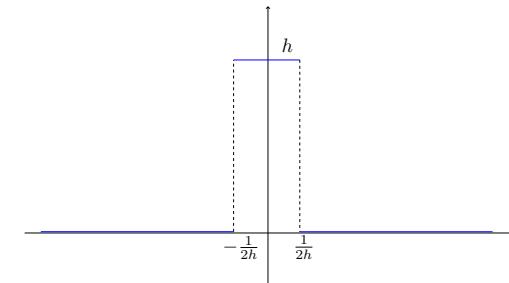


Figura 10: Delta di Dirac

$u_h \rightarrow 0$  q.o. su  $\mathbb{R} \implies$  se  $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} u_h$  in  $L^1(\mathbb{R})$  allora  $\lim_{h \rightarrow +\infty} u_h = 0$ . Ma  $\lim_{h \rightarrow +\infty} u_h \neq 0$  in  $L^1(\mathbb{R})$  perché

$$\|u_h\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} h = 1$$

Converge però in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle u_h, \varphi \rangle = T_{u_h}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} u_h \varphi = h \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} \varphi \rightarrow \varphi(0)$$

**Definizione:**  $\delta_0$  delta di Dirac in 0

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle := \varphi(0)$$

**Osservazioni:**

- Se  $u_h = h \cdot \chi_{[-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}]}$ , allora  $u_h \rightarrow \delta_0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

- Verifica che  $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(i) lineare:  $\delta_0(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\delta_0(\varphi) + \beta\delta_0(\psi)?$

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(0) = \alpha\varphi(0) + \beta\psi(0)$$

(ii) continuo:  $\varphi_h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \delta_0(\varphi_h) \rightarrow 0$

vero per la definizione di convergenza in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp}(\varphi_h) \subseteq K$  compatto,  $\varphi_h \rightarrow 0$  uniformemente.

Osservazione 1: Vale con  $f$  al posto di  $\infty$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

$$g(f)(y-x)f \int_{-\infty}^y = (x)g * f$$

Idea della dimostrazione:

$$2. (f * g)(y) = \int_{-\infty}^y f * g$$

$$1. f * g \in C_{\infty}(\mathbb{R})$$

Siamo  $f \in C_0(\mathbb{R}) \subset L_1(\mathbb{R})$ ,  $g \in L_1(\mathbb{R})$ , allora:

**Proposizione 2**

$$d|(\delta)g|_d|(\delta-x)f| = H(x, \delta)$$

$$3. \|f * g\|^p \leq \|f\|_1 \|g\|^p$$

$$2. f * g \in L_p(\mathbb{R})$$

1.  $f * g(x)$  esiste per q.o.  $x$

**Esempio:**  $f \in L_1(\mathbb{R})$ ,  $g \in L_p(\mathbb{R}) \iff$

- Le funzioni devono essere definite su tutto lo spazio

$$\bullet f * g = f$$

- vale la proposizione 1 anche su  $\mathbb{R}$

**Osservazione**

$$1. \|g\| \cdot \|f\| = \delta p |(\delta) \delta| \int_{-\infty}^y \|f\| = \delta p \int_{-\infty}^y |f| = \delta p \int_{-\infty}^y |g(y)| \int_{-\infty}^y |f(x-y)| dy =$$

(Per Fubini)

$$\delta p \int_{-\infty}^y |g(y)| \int_{-\infty}^y |f(x-y)| dy \int_{-\infty}^y |f(x-y)| dy \leq$$

$$\leq \delta p \left| \int_{-\infty}^y |g(y)| \int_{-\infty}^y |f(x-y)| dy \right| = \delta p \int_{-\infty}^y |g(y)| \int_{-\infty}^y |f(x-y)| dy$$

**Dimostrazione 3 (che implica 2)**

Dunque per q.o.  $x, y \leftrightarrow H(x, y) = f(x, y)g(y) \in L_1(\mathbb{R}^n)$

A questo punto possiamo applicare Fubini ad  $H$

Dunque per Tonelli  $|H| \in L_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \iff H \in L_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$\infty + > \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x |H(x, y)| dy dx = \delta p \left[ \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x |f(x-y)| dy dx \right] = \|f\|_1 \|g\|_1$$

• Integro in dy

$$|T_h(\phi)| = \int_{-\infty}^y u_h \phi \leq \max_{K=\text{supp } \phi} |u_h| |\phi| \leq 0$$

Dato che  $u_h \leftarrow 0$  in  $L_1(\Omega)$   $\iff T_h \leftarrow 0$  in  $D(\Omega)$

**Esempio:**  $T_h = T_{u_h}$ , con  $u_h \subset L_1(\Omega)$

$$T_h \leftarrow T \text{ se } T_h(\phi) \neq 0 \text{ in } D(\Omega)$$

$$\{T_h\} \subset D(\Omega), T_h \leftarrow \text{in } D(\Omega) \text{ se } T_h(\phi) \neq 0 \text{ se } \forall \phi \in D(\Omega)$$

**Dimostrazione:**

$$(T_1 + T_2)(\phi) = T_1(\phi) + T_2(\phi)$$

$$T_1(\phi) = \int_{-\infty}^y u_1 \phi$$

Essendo  $D'$  vettoriale

$$\int_{-\infty}^y u_1 \phi = \langle u_1, \phi \rangle$$

$$u \in L_p(\Omega) \iff T_h$$

Tutte le funzioni  $u \in L_p(\Omega)$  possono essere vista come distribuzione.

$$u \in L_1(\Omega) \text{ AK CC } \Omega \iff u \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$$

Poi che  $|Y| < +\infty$ .

$$u \in L_d(\Omega) \iff u \in L_d(\Omega) \text{ AK CC } \Omega$$

$$L_d(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^{\text{loc}}(\Omega), \forall d \in [1, +\infty]$$

In particolare, possiamo associare una distribuzione a qualsiasi  $u \in L_p(\Omega)$  con  $p \in [1, +\infty]$

$$\text{Esempio: } \Omega = (0, 1), u(x) = \frac{x}{1-x} \notin L_1(\Omega) \text{ ma } u \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$$

$$u \in L_1^{\text{loc}}(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : |u| < +\infty \text{ AK compatto } \subset \Omega\}$$

Per definire  $T_h$ , basata una condizione più debolé:

**Notazione:** Invoca di  $T_h(\phi)$  si scrive spesso  $> u, \phi <_{D(\Omega), D(\Omega)}$

$$\int_{-\infty}^y (u_1 - u_2) \phi = 0 \iff u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega$$

compatto.

**Idea della dim. del teorema di approssimazione di funzioni  $L^p$  con funzioni regolari**

Prendiamo  $p = 1$ , data  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , vogliamo costruire  $\varphi_n \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R})$  tale che  $\varphi_n \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R})$ . Prendiamo

$$f_n := f * \rho_n$$

Dove  $\rho_n$  successione di mollificatori

$$\rho_n(x) = n\rho(nx) \text{ dove } \rho \text{ è un nucleo di convoluzione}$$

- $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\text{supp}(\rho) \subseteq [-1, 1]$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$
- $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\rho_n \geq 0$ ,  $\text{supp}(\rho_n) \subseteq [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx = 1$

Si può dimostrare usando i teoremi di convergenza dominata che  $\varphi_n \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Osservazione:** Per guadagnare anche il supporto compatto, occorre prima "trovare"  $f$ , cioè considerare

$$f_k = f \cdot \chi_{[-k, k]} = \begin{cases} f & \text{se } x \in [-k, k] \\ 0 & \text{se } x \notin [-k, k] \end{cases}$$

Approssimo  $f$  per convoluzione:

$$\begin{aligned} f_k * \rho_n &\in C_o^\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_k \\ \varphi_n &= f_k(n) * \rho_n \end{aligned}$$

## 12.5 Teorema fondamentale del calcolo

**Teorema di differenziazione nella teoria di Lebesgue**

Sia  $f \in L^1([a, b])$ , sia  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ , essa è derivabile q.o. su  $[a, b]$  e

$$F'(x) = f(x) \text{ per q.o. } x \in (a, b)$$

Esempio:  $f(x) = \text{sign}(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

**Definizione:** Diciamo che  $F \in \text{A.C.}([a, b])$ , ovvero lo spazio delle funzioni assolutamente continue su  $[a, b]$  se  $\exists f \in L^1([a, b])$  tale che

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

**Osservazione 1:** Tale spazio è vettoriale (per la linearità della derivata e dell'integrale).

**Osservazione 2:**  $F \in \text{AC}([a, b]) \implies$

$$F(b) - F(a) = \left[ \int_a^b f(t)dt + c \right] - \left[ \int_a^a f(t)dt + c \right] = \int_a^b f(t)dt$$

**Definizione:** Sia  $\{\varphi_h\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ . Diciamo che

$$\varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } C_0^\infty(\Omega) \text{ se}$$

1.  $\exists K$  compatto, indipendente da  $h$ , tale che  $\text{supp}(\varphi_h) \subseteq K \forall h >> \nu$
2.  $\varphi_h \rightarrow 0$  uniformemente su  $K$  con tutte le derivate  $\forall \alpha$  multiindice  $D^\alpha \varphi_h \rightarrow 0$  unif. su  $K$

**Definizione:** Lo spazio  $C_0^\infty(\Omega)$  munito della convergenza definita sopra si indica con  $\mathcal{D}(\Omega)$  e si chiama *spazio delle funzioni test*

**Definizione:** Lo spazio delle distribuzioni su  $\Omega$ , che si indica con  $\mathcal{D}'(\Omega)$  è lo spazio degli operatori  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  lineari e continui rispetto alla convergenza introdotta su  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

Ovvero, una distribuzione è un operatore  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- $T$  lineare
- $T$  continuo ( $\varphi_h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega) \implies T(\varphi_h) \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$ )

**Esempi**

1. Sia  $u \in L^1(\Omega)$ , ad  $u$  posso associare una distribuzione  $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_u(\varphi) := \int_{\Omega} u\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

È ben definito:

$$\left| \int_{\Omega} u\varphi \right| \leq \int_{\Omega} |u\varphi| \leq \int_K \max |\varphi| |u| \leq \max_k |\varphi| \int_K |u|$$

È lineare:

$$T_u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \int_{\Omega} u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_{\Omega} u\varphi + \beta \int_{\Omega} u\psi = \alpha T_u(\varphi) + \beta T_u(\psi)$$

È continuo:

$$\{\varphi_h\} \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \implies T_u(\varphi_h) \rightarrow 0$$

Poiché, sia  $\{\varphi_h\} \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$

$$|T_u(\varphi_h)| = \left| \int_{\Omega} u\varphi_h \right| \leq \max_K |\varphi_h| \cdot \int_K |u| \rightarrow 0$$

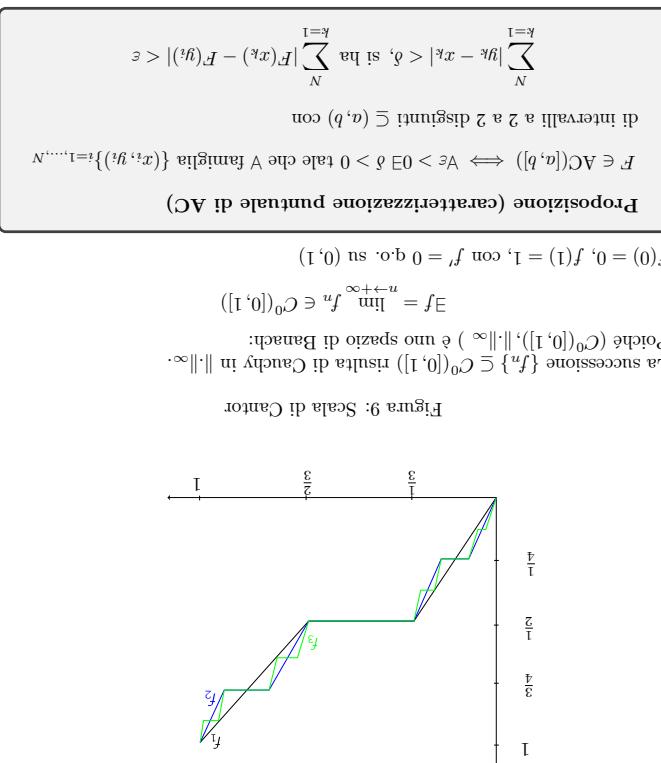
**Osservazioni sull'esempio**

L'associazione tra  $u$ ,  $T_u$  è iniettiva su  $L^1(\Omega)$

Se  $u_1 = u_2$  q.o. su  $\Omega \implies T_{u_1} = T_{u_2}$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  poiché  $T_{u_1}(\varphi) = T_{u_2}(\varphi)$

Si può dimostrare che  $T_{u_1} = T_{u_2}$  in  $\mathcal{D}'(\Omega) \implies u_1 = u_2$  q.o. su  $\Omega$  (\*)

$$\int_{\Omega} u_1\varphi = \int_{\Omega} u_2\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega$$



**Osservazione:** Per  $N = 1$  si ha continua uniforme conseguenze della proposizione

$\iff AC([a, b]) \subseteq \{ funzioni uniformemente continue su [a, b]\}$

**Proposizione (caratterizzazione puntuale di AC):**

$F \in AC([a, b]) \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $\forall$  famiglia  $\{x_i, y_i\}_{i=1, \dots, N}$  di intervalli a 2 a 2 disgiunti  $\subseteq (a, b)$  con

$$\sum_{k=1}^N |y_k - x_k| < \delta, \text{ si ha } \sum_{k=1}^N |F(x_k) - F(y_k)| < \epsilon$$

**Osservazione:** Per  $N = 1$  si ha continua uniforme

$\iff AC([a, b]) \subseteq \{ funzioni uniformemente continue su [a, b]\}$

**Proposizione:**  $C_0(\Omega) = \{ funzioni C_\infty su \Omega con supporto compatto in \Omega\}$

**Definizione:** Siia  $\mathcal{J}$  aperto di  $\mathbb{R}^n$

**Munito**  $C_0(\Omega)$  di una convergenza

**E** uno spazio vettoriale

$C_0(\Omega) = \{ funzioni C_\infty su \Omega con supporto compatto in \Omega\}$

**Definizione:** Siia  $\mathcal{J}$  aperto di  $\mathbb{R}^n$

**Munito**  $C_0(\Omega)$  di una convergenza

**Esempio:** Vedere i casi 1) e 3)

$\|T\|_{V,W} := \sup_{a \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Ta\|_W}{\|T(a)\|_W}$

**Definizione:** Quando  $W = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\mathcal{L}(V, W) = V'$  spazio duale di  $V$

**Definizione:** Si può verificare che quella definita sopra è effettivamente una norma.

**Osservazione:** Si può verificare che quella definita sopra è effettivamente una norma.

**Proposizione:** La successione  $\{f_n\} \subseteq C_0([0, 1])$  risulta di Cauchy in  $\|\cdot\|_\infty$ .

Poi che  $C_0([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach:

$f(0) = 0, f(1) = 1$ , con  $f' = 0$  q.o. su  $(0, 1)$

$\exists f = \lim_{n \leftarrow +\infty} f_n \in C_0([0, 1])$

**Proposizione (caratterizzazione puntuale di AC):**

$F \in AC([a, b]) \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $\forall$  famiglia  $\{x_i, y_i\}_{i=1, \dots, N}$  di intervalli a 2 a 2 disgiunti  $\subseteq (a, b)$  con

$$\sum_{k=1}^N |y_k - x_k| < \delta, \text{ si ha } \sum_{k=1}^N |F(x_k) - F(y_k)| < \epsilon$$

**Osservazione:** Per  $N = 1$  si ha continua uniforme

$\iff AC([a, b]) \subseteq \{ funzioni uniformemente continue su [a, b]\}$

**Proposizione:**  $C_0(\Omega) = \{ funzioni C_\infty su \Omega con supporto compatto in \Omega\}$

**Definizione:** Siia  $\mathcal{J}$  aperto di  $\mathbb{R}^n$

**Munito**  $C_0(\Omega)$  di una convergenza

**E** possibile introdurre su questo spazio una norma, ponendo

$\|L\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{a \in V \setminus \{0\}} \frac{\|La\|_W}{\|L(a)\|_W}$

**Definizione:** Dati  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  spazi normati

$\mathcal{L}(V, W) := \{ op. lineari limitati da V in W\}$

**Definizione:** Dati  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  spazi normati

$\mathcal{L}(V, W) = V'$  spazio duale di  $V$

**Definizione:** Quando  $W = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\mathcal{L}(V, W) = V'$  spazio duale di  $V$

**Osservazione:** La successione  $\{f_n\} \subseteq C_0([0, 1])$  risulta di Cauchy in  $\|\cdot\|_\infty$ .

Poi che  $C_0([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach:

$f(0) = 0, f(1) = 1$ , con  $f' = 0$  q.o. su  $(0, 1)$

$\exists f = \lim_{n \leftarrow +\infty} f_n \in C_0([0, 1])$

**Proposizione (caratterizzazione puntuale di AC):**

$F \in AC([a, b]) \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $\forall$  famiglia  $\{x_i, y_i\}_{i=1, \dots, N}$  di intervalli a 2 a 2 disgiunti  $\subseteq (a, b)$  con

$$\sum_{k=1}^N |y_k - x_k| < \delta, \text{ si ha } \sum_{k=1}^N |F(x_k) - F(y_k)| < \epsilon$$

**Osservazione:** Per  $N = 1$  si ha continua uniforme

$\iff AC([a, b]) \subseteq \{ funzioni uniformemente continue su [a, b]\}$

**Proposizione:**  $C_0(\Omega) = \{ funzioni C_\infty su \Omega con supporto compatto in \Omega\}$

**Definizione:** Siia  $\mathcal{J}$  aperto di  $\mathbb{R}^n$

**Munito**  $C_0(\Omega)$  di una convergenza

**E** possibile introdurre su questo spazio una norma, ponendo

$\|L\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{a \in V \setminus \{0\}} \frac{\|La\|_W}{\|L(a)\|_W}$

**Definizione:** Dati  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  spazi normati

$\mathcal{L}(V, W) := \{ op. lineari limitati da V in W\}$

**Definizione:** Dati  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  spazi normati

$\mathcal{L}(V, W) = V'$  spazio duale di  $V$

**Definizione:** Quando  $W = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\mathcal{L}(V, W) = V'$  spazio duale di  $V$

Ovvero

$$\int_a^b fG = - \int_a^b Fg + F \cdot G|_a^b$$

$\implies$  vale in AC la formula di integrazione per parti.

## 13 Operatori lineari tra spazi vettoriali normati

**Definizione:** Siano  $(V, \|\cdot\|_V)$  e  $(W, \|\cdot\|_W)$  due spazi vettoriali normati.  
Un operatore lineare da  $V$  in  $W$  è una funzione  $T : V \rightarrow W$  tale che

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

**Esempi**

1)  $V = W = \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$T(v) = A \cdot v, \text{ con } A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$$

2)  $V = C^0([a, b]),$  fisso  $x_0 \in (a, b), W = \mathbb{R}$

$$T : V \rightarrow W \text{ definita da } T(f) = f(x_0)$$

3)  $V = C^1([a, b]), W = C^0([a, b])$

$$T : V \rightarrow W \text{ definita da } T(f) = f'$$

**Osservazione:**  $T$  operatore lineare  $\implies T(0) = 0$

**Definizione:**  $T : V \rightarrow W$  op. lineare, si dice *continuo* se,  $\forall v \in V, T$  è continuo in  $v$ , ovvero:

$$v_n \rightarrow v \implies T(v_n) \rightarrow T(v)$$

Rispettivamente nella norma di  $V$  e  $W$ .

**Osservazione:** Sia  $T : V \rightarrow W$  op. lineare, allora  $T$  è continuo su  $V \iff T$  è continuo in  $v = 0$ .

**Dimostrazione**

( $\implies$ ) è immediata

( $\iff$ ) Verifichiamo che se la proprietà vale per  $v = 0$ , vale per  $v$  qualsiasi.

Sia  $v$  qualsiasi, e sia  $v_n \rightarrow v$ ; considero  $v_n - v \rightarrow 0$ , quindi, per ipotesi  $T(v_n - v) \rightarrow T(0)$

Ovvero  $T(v_n) - T(v) \rightarrow 0$ , cioè  $T(v_n) \rightarrow T(v)$ .

**Definizione:** Sia  $T$  op. lineare:  $(V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$ .  
Si dice che  $T$  è limitato se:

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \|T(v)\|_W \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

ovvero

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M$$

**Esempi:**

1)  $T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  definito da  $T(v) = v_0 \cdot v$  operatore lineare.

$$T \text{ è limitato, } M = \|v_0\|$$

2)  $T : (C^1([a, b]), \|\cdot\|_{C^1}) \rightarrow (C^0([a, b]), \|\cdot\|_{C^0}), T(f) = f'$  op. lineare.

$$T \text{ è limitato con la scelta } M = 1$$

3)  $T : (L^2(0, 1), \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), T(f) = \int_0^1 f_0 \cdot f dx$  dove  $f_0 \in L^2(0, 1)$

$$T \text{ è limitato con la scelta } M = \|f_0\|_2 \text{ (Tramite disegualanza di Holder)}$$

**Osservazione:** Considerando  $T : (L^p(0, 1), \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  definito da  $T(f) = \int_0^1 f_0 \cdot f dx$  questo è lineare continuo prendendo  $f_0 \in L^{p'}(0, 1)$ .

**Proposizione:** Sia  $T : (V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$  lineare. Allora

$$T \text{ continuo} \iff T \text{ limitato}$$

**Dimostrazione**

( $\iff$ ) Supposto  $T$  limitato, basta mostrare che  $T$  è continuo in 0, ovvero: se  $v_n \rightarrow 0$ , allora  $T(v_n) \rightarrow T(0) = 0$

$$\|T(v_n)\|_W \leq M \|v_n\|_V \rightarrow 0$$

( $\implies$ ) Supposto  $T$  non limitato mostriamo  $T$  non continuo

$$\sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} = +\infty \implies \exists \{v_n\} \subseteq V \setminus \{0\} : \frac{\|T(v_n)\|_W}{\|v_n\|_V} \rightarrow +\infty$$

ovvero, siccome  $T$  è lineare:

$$\left\| T \left( \frac{v_n}{\|v_n\|_V} \right) \right\|_W \rightarrow +\infty$$

Quindi se considero  $u_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_V}$ , ha che

$$\begin{cases} \|u_n\|_V = 1 \\ \|T(u_n)\|_W \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Posso costruire una successione  $y_n$  tale che  $y_n \rightarrow 0$  ma  $T(y_n) \not\rightarrow 0$  Ponendo  $y_n = \frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}$