1 Distribuzioni

Definizione: Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\text{funzioni } C^\infty \text{ su } \Omega \text{ con supporto compatto in } \Omega\}$$

È uno spazio vettoriale

Muniamo C_0^∞ di una **convergenza**

Definizione: Sia $\{\varphi_k\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$. Diciamo che

$$\varphi_k \to 0 \text{ in } C_0^\infty(\Omega) \text{ se}$$

1. $\exists K$ compatto, indipendente da h, tale che $\text{supp}(\varphi_h) \subseteq K \ \forall h >> \nu$
2. $\varphi_h \to 0$ uniformemente su K con tutte le derivate $\forall \alpha$ multiindice $D^\alpha \varphi_h \to 0$ unif. su K

Definizione: Lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ munito della convergenza definita sopra si indica con $\mathcal{D}(\Omega)$ e si chiama *spazio delle funzioni test*

Definizione: Lo spazio delle distribuzioni su Ω, che si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$ è lo spazio degli operatori $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineari e continui rispetto alla convergenza introdotta su $\mathcal{D}(\Omega)$.
Ovvero, una distribuzione è un operatore $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che

- T lineare
- T continuo ($\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)(\varphi_h) \to 0$ in $\mathbb{R}$)

Esempi

1. Sia $u \in L^1(\Omega)$, ad u posso associare una distribuzione $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_u(\varphi) := \int_\Omega u\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

È ben definito:

$$\left| \int_\Omega u\varphi \right| \leq \int_\Omega |u\varphi| \leq \int_K \max |\varphi||u| \leq \max_k |\varphi| \int_K |u|$$

È lineare:

$$T_u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \int_\Omega u(\alpha\varphi + \beta\psi$$

completare