

# Appunti di Analisi III

Alessandro Sala

Questi appunti sono stati raramente rivisitati e corretti. Non mi ritengo responsabile di eventuali errori causati da noia e distrazione. Buono studio :)

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione Analisi Complessa</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Limiti</b>	<b>6</b>
2.0.1	Infinito nei complessi . . . . .	6
2.1	Derivabilità . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Funzioni olomorfe</b>	<b>8</b>
3.1	Invertibilità locale . . . . .	8
3.2	Ricerca delle primitive - antiderivazione . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Funzioni analitiche in campo complesso</b>	<b>10</b>
4.1	Serie di potenze in $\mathbb{C}$ . . . . .	10
4.2	Un altro modo di calcolare i coefficienti $c_k$ . . . . .	11
4.3	Analiticità e olomorfia . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Singularità isolate e loro classificazione</b>	<b>13</b>
5.0.1	Singularità eliminabile . . . . .	13
5.0.2	Polo . . . . .	14
5.0.3	Singularità essenziale . . . . .	14
5.1	Sviluppabilità in serie di Laurent . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Riconoscere le singolarità</b>	<b>15</b>
6.0.1	Principio di identità . . . . .	15
6.0.2	Ordine di zeri . . . . .	15
6.1	Ordine dei poli . . . . .	15
6.1.1	Unicità del prolungamento analitico . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Teorema dei residui</b>	<b>17</b>
7.1	Calcolo dei residui . . . . .	17
7.2	Definizione e calcolo dell'indice di avvolgimento . . . . .	18
7.2.1	Modalità analitica per calcolare l'indice . . . . .	19
7.3	Teorema dei residui . . . . .	19
<b>8</b>	<b>Applicazioni del teorema dei residui in campo reale</b>	<b>19</b>
8.1	Primo tipo . . . . .	19
8.2	Secondo tipo . . . . .	20
8.2.1	Lemma tecnico di decadimento . . . . .	21
8.3	Terzo tipo . . . . .	21
8.3.1	Lemma di Jordan . . . . .	22
8.4	Quarto tipo . . . . .	22
8.4.1	Lemma del polo semplice . . . . .	23
<b>9</b>	<b>Cenni aggiuntivi sull'analisi complessa</b>	<b>23</b>
9.1	Residuo all'infinito . . . . .	23
9.2	Funzioni polidrome . . . . .	24
9.3	Funzioni armoniche . . . . .	24

<b>10 Analisi funzionale</b>	<b>24</b>
10.0.1 Norma . . . . .	25
10.0.2 Norma su uno spazio funzionale di dimensione infinita . . . . .	25
10.1 Spazio di Banach . . . . .	27
<b>11 Integrazione secondo Lebesgue</b>	<b>28</b>
11.0.1 Misure e funzioni misurabili . . . . .	28
11.0.2 Definizione di integrale secondo Lebesgue . . . . .	30
11.0.3 Proprietà principali dell'integrale di Lebesgue . . . . .	32
11.1 Confronto Riemann-Lebesgue . . . . .	32
11.1.1 Integrali propri . . . . .	32
11.1.2 Integrali impropri . . . . .	33
<b>12 Spazi di Lebesgue</b>	<b>33</b>
12.0.1 Integrali multipli . . . . .	36
12.0.2 Spazi di Lebesgue (o spazi $L^p$ ) . . . . .	37
12.0.3 Caso limite $L$ infinito . . . . .	38
12.1 Risultati di confronto . . . . .	39
12.1.1 Disuguaglianza di Holder . . . . .	40
12.1.2 Conseguenze di Holder sul confronto tra i vari spazi . . . . .	40
12.2 Approssimazione con funzioni regolari . . . . .	41
12.3 Supporto e Classe $C_0$ . . . . .	42
12.4 Prodotto di convoluzione . . . . .	42
12.5 Teorema fondamentale del calcolo . . . . .	44
<b>13 Operatori lineari tra spazi vettoriali normati</b>	<b>46</b>
<b>14 Distribuzioni</b>	<b>48</b>
14.1 Convergenza . . . . .	50
14.2 Delta di Dirac . . . . .	51
14.2.1 Ovvie generalizzazioni . . . . .	52
14.2.2 Commento sulla Delta . . . . .	52
14.2.3 Derivazione di distribuzioni . . . . .	52
14.2.4 Motivo della definizione di derivata . . . . .	53
<b>15 Esempi di distribuzioni</b>	<b>53</b>
15.1 Generalizzazione . . . . .	54
15.1.1 Operatori differenziali . . . . .	54
<b>16 Spazi di Sobolev</b>	<b>54</b>
16.0.1 Disuguaglianza di Poincaré . . . . .	56
<b>17 Spazi di Hilbert</b>	<b>57</b>
17.1 Disuguaglianza di Cauchy Schwartz . . . . .	57
17.1.1 Legge del parallelogramma . . . . .	58
17.1.2 Teorema di proiezione su un convesso chiuso . . . . .	59
17.2 Teoremi di Rappresenzazione . . . . .	62
17.2.1 Teorema di Reisz . . . . .	62
17.2.2 Forme bilineari . . . . .	62
17.2.3 Teorema di Lax Milgram . . . . .	64
17.2.4 Commenti sulla proprietà variazionale di $u$ . . . . .	64

<b>18 Equazioni alle derivate parziali</b>	<b>65</b>
18.1 Formulazione variazionali di problemi ellittici . . . . .	65
18.1.1 PDE ellittiche del secondo ordine . . . . .	65
18.1.2 Formulazione variazionale del problema di Dirichlet . . .	66
18.1.3 Formulazione variazionale del problema di Neumann . . .	66
18.1.4 Esistenza delle soluzioni . . . . .	66
18.1.5 Esistenza delle soluzioni per Neumann . . . . .	67
18.1.6 Richiamo di Analisi Vettoriale . . . . .	68
18.1.7 Dimostrazione proposizione di Dirichlet . . . . .	68
<b>19 Serie di Fourier in spazi di Hilbert</b>	<b>69</b>
19.0.1 Convergenza in $H$ . . . . .	70
19.0.2 Sottospazio generato . . . . .	70
19.0.3 Disuguaglianza di Bessel . . . . .	70
19.0.4 Dimostrazione teorema di convergenza delle serie di Fourier	71
<b>20 Serie di Fourier in <math>L^2</math></b>	<b>73</b>
20.0.1 Modi equivalenti di scrivere (*) . . . . .	73
<b>21 Applicazioni delle serie di Fourier alle equazioni differenziali</b>	<b>75</b>
<b>22 Trasformata di Fourier</b>	<b>76</b>
22.1 Varianti in letteratura . . . . .	77
22.2 Operatore Trasformata . . . . .	77
22.3 Trasformate notevoli . . . . .	77
22.4 Teorema di Riemann-Lebesgue . . . . .	78
22.5 Proprietà algebriche . . . . .	79
22.6 Proprietà differenziali . . . . .	79
<b>23 Applicazione della trasformata di Fourier alle equazioni differenziali</b>	<b>80</b>
23.1 Esempio . . . . .	80
23.2 Formule di inversione per la trasformata di Fourier in $L^1$ . . . .	81
23.3 Trasformata di Fourier in $L^2$ . . . . .	81
23.3.1 Altre proprietà di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}$ . . . . .	82
23.3.2 Calcolo nella pratica . . . . .	83
<b>24 Trasformata di Fourier di distribuzioni</b>	<b>84</b>
24.1 Spazio delle funzioni temperate . . . . .	84
24.2 Lista trasformate studiate . . . . .	86
<b>25 Problemi di Cauchy per l'equazione del calore e delle onde</b>	<b>86</b>
25.1 Problema di Cauchy per l'equazione del calore . . . . .	87
25.2 Effetto regolarizzante dell'operatore calore . . . . .	88
25.3 Problema di Cauchy per l'equazione delle onde . . . . .	89

# 1 Introduzione Analisi Complessa

## Definizione

Una funzione di variabile complessa è una funzione  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Numero complesso:  $z = x + iy$  dove  $x, y \in \mathbb{R}$   $i^2 = -1$

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Dunque ad ogni funzione complessa è possibile associare due funzioni reali in due variabili

$$f \leftrightarrow u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

## Esempi di funzioni elementari

$$f(z) = z_0 \in \mathbb{C}, \quad z_0 = x_0 + iy_0, \quad u = x_0, \quad v = y_0$$

$$f(z) = \operatorname{Re} z, \quad z = x + iy, \quad u(x, y) = x, \quad v(x, y) = 0$$

$$f(z) = \operatorname{Im} z, \quad z = x + iy \implies f(z) = y$$

$$f(z) = |z|, \quad f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} \implies u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = 0$$

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

In questo ultimo caso è necessario calcolare manualmente le funzioni  $u, v$  associate

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ con } P, Q \text{ funzioni polinomiali}$$

Quest'ultima funzione non è definita  $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = e^z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$$

## Funzione Esponenziale

È l'estensione della funzione esponenziale nel campo dei reali

$$z = x + iy \implies e^z := e^x \cdot e^{iy} := e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Se  $z = x \in \mathbb{R} \implies e^z = e^x \implies$  è estensione della funzione reale

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^z$$

Questo implica che la funzione esponenziale nel campo complesso è periodica di periodo  $T = 2\pi i$  Inoltre,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$e^z = 0 \iff |e^z| = 0$$

$$|e^x (\cos y + i \sin y)| = |e^x| |\cos y + i \sin y| = e^x = 0 \quad \nexists z$$

## Funzioni coseno, seno

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Sono funzioni definite  $\forall z \in \mathbb{C}$

Come per la funzione esponenziale sono estensioni delle funzioni reali

Dunque se  $z = x \in \mathbb{R} \implies \cos z = \cos x$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

$\implies \cos z$  è periodica sia nel campo dei reali sia nel campo dei complessi

Inoltre

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Per le altre funzioni valgono proprietà analoghe essendo definite come estensioni

**Formule alternative trigonometriche**

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

## 2 Limiti

**Definizione:**

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \text{acc}(\Omega), l \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \forall V(l) \exists u(z_0) \text{ t.c. } \forall z \in (u(z_0) \cap \Omega \setminus \{z_0\}), f(z) \in V(l)$$

**Definizione di continuità**

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in a(\Omega) \cap \Omega, f \text{ continua } z_0 \iff \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

**Osservazioni**

$$z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, l = l_1 + il_2, f = u + iv$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = l_1 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = l_2 \end{cases}$$

Con le stesse notazioni

$$f \text{ continua in } z_0 \iff u, v \text{ continue in } (x_0, y_0)$$

Sono continue (sul loro dominio di definizione) tutte le funzioni elementari introdotte nella lezione scorsa

Vale l'algebra dei limiti e il teorema del limite della funzione composta ( $\implies$  composizione di continue rimane continua)

Vale il teorema di unicità del limite

### 2.0.1 Infinito nei complessi

Un intorno di  $\infty$  nei complessi è il complementare di un qualsiasi disco

$$z \rightarrow \infty \iff z \in u(\infty) \iff |z| > R \iff |z| \rightarrow +\infty$$

$$f(z) \rightarrow \infty \iff f(z) \in u(\infty) \iff |f(z)| > R \iff |f(z)| \rightarrow +\infty$$

## 2.1 Derivabilità

**Definizione:**

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \text{acc}(\Omega) \cap \Omega$$

$$f \text{ derivabile (in senso complesso) in } z_0 \iff \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (\in \mathbb{C})$$

e tale limite si dice  $f'(z_0)$

Definizioni alternative:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \dots$$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda \cdot h + o(h) \quad \frac{o(h)}{h} \rightarrow 0$$

Dove  $\lambda$  è la derivata prima della funzione nel punto  $z_0$

Quest'ultima è la definizione di differenziabilità

**Attenzione** Se  $u, v$  sono differenziabili ciò non implica la differenziabilità/derivabilità di  $f$  (Un esempio è  $f(z) = \text{Im}z$ )

### Teorema (caratterizzazione della derivabilità)

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \Omega \cap \text{acc}(\Omega), z_0 = x_0 + iy_0, f = u + iv$$

$$f \text{ derivabile in } z_0 \iff u, v \text{ differenziabili in } (x_0, y_0),$$

$$\text{Inoltre } \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

(sistema, condizione di cauchy riemann) Inoltre, in tal caso

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

### Dimostrazione

$$(\implies) \text{ Per Hp } \exists f'(z_0) = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \implies f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + g, g = o(h)$$

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_1) + iv(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (\alpha + i\beta)(h_1 + ih_2) + g_1 + ig_2$$

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = u(x_0, y_0) + (\alpha h_1 - \beta h_2) + g_1$$

$$v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = v(x_0, y_0) + (\beta h_1 + \alpha h_2) + g_2$$

Queste due equazioni indicano che  $u, v$  sono differenziabili in  $(x_0, y_0)$ , con

$$\begin{cases} \nabla u(x_0, y_0) = (\alpha, -\beta) \\ \nabla v(x_0, y_0) = (\beta, \alpha) \end{cases}$$

Questo dimostra inoltre che  $f'(z_0) = \alpha + i\beta$

( $\impliedby$ ) Procedere al contrario



### 3 Funzioni olomorfe

#### Definizione

$f$  si dice olomorfa su  $\Omega$  se è derivabile in  $z_0 \forall z_0 \in \Omega$

#### 3.1 Invertibilità locale

##### Teorema

Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa in  $\Omega$ , e sia  $z_0 \in \Omega$  tale che  $f'(z_0) \neq 0$  allora  $f$  è "localmente invertibile in  $z_0$ "

( $\exists u(z_0)$  tale che  $f|_{u(z_0)}$  invertibile)

E la funzione inversa  $f^{-1}$  è derivabile in senso complesso in  $f(z_0)$  e

$$(f^{-1})'|_{z_0} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

##### Dimostrazione

$\Phi(u, v)$  definito su  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \Omega$ , se  $\det J\Phi(x_0, y_0) \neq 0 \implies \Phi$  "localmente invertibile" e

$$J\Phi^{-1}(\Phi(x_0, y_0)) = (J\Phi(x_0, y_0))^{-1}$$

Dunque se  $f = u + iv$  si riformula il teorema con  $\Phi = (u, v)$

$$J\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \implies \det J\Phi(x_0, y_0) = \alpha^2 + \beta^2 = |f'(z_0)|^2$$

Poiché  $f' = \alpha + i\beta$  e l'ipotesi del teorema è che  $|f'(z_0)|^2 \neq 0$

$$J\Phi^{-1}(\Phi(x_0, y_0)) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\implies (f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\overline{f'(z_0)}}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

#### 3.2 Ricerca delle primitive - antiderivazione

**Problema:** Data  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  esiste? unica?  $F : \Omega \subseteq \mathbb{C}$  olomorfa in  $\Omega$  tale che

$$F'(z) = f(z)$$

Una tale  $F$  si dice **primitiva** di  $f$ .

**Richiamo - Teorema fondamentale del calcolo:** Data  $f : (a, b) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora una primitiva di  $f$  è data da

$$F(x) = \int_a^x f$$

E tutte le altre primitive si ottengono aggiungendo una costante reale

**Unicità:** una primitiva, se esiste, è univocamente determinata a meno di costante additiva.

$$\bullet F \text{ primitiva di } f, \lambda \in \mathbb{C} \implies F + \lambda \text{ primitiva di } f \text{ poiché } (F + \lambda)' = F' + \lambda' = f$$

$$\bullet F_1, F_2 \text{ primitive di } f \implies \exists \lambda \in \mathbb{C} : F_1 - F_2 = \lambda$$

$G := F_1 - F_2$ , Tesi:  $G$  è costante, Dim:

$$G' = (F_1 - F_2)' = f - f = 0$$

$$G = u + iv \quad G' = u_x - iu_y = v_y + iv_x \quad G' = 0 \implies \nabla u(x_0, y_0) = \nabla v(x_0, y_0) = \underline{0}$$

$\implies u$  costante,  $v$  costante

N.B vale se  $\Omega$  è connesso

### Esistenza

$f = u + iv, F = U + iV$  (  $f$  data,  $F$  incognita )

$$F' = U_x - iU_y = V_y + iV_x = f = u + iv$$

$$\implies \begin{cases} U_x = u \\ U_y = -v \end{cases} \quad \begin{cases} V_x = v \\ V_y = u \end{cases}$$

ovvero  $U$  potenziale per  $w_1 := udx - vdy$

e  $V$  potenziale per  $w_2 := vdx + udy$

Concludiamo che dire  $f$  ammette primitive  $\iff \omega_1, \omega_2$  esatte  $\implies \omega_1, \omega_2$  chiuse

Ovvero se la funzione  $f$  soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann dunque se  $f$  olomorfa

$$f \text{ ammette primitive} \iff \omega_i \text{ esatte} \implies f \text{ olomorfa} \iff w_i \text{ chiuse}$$

L'implicazione inversa è vera se  $\Omega$  è semplicemente connesso

Dunque  $F = U + iV$  dove  $U$  potenziale per  $\omega_1$ ,  $V$  potenziale per  $\omega_2$

**Nota:**  $\omega$  chiusa  $\implies \oint_{\gamma} \omega$  non cambia se sostituisco  $\gamma$  con un circuito omotopo.

### Definizione

Data  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dato  $\gamma$  cammino in  $\Omega$  parametrizzata da una funzione  $r : [a, b] \rightarrow \Omega, r(t) = r_1(t) + ir_2(t)$

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_a^b f(r(t))r'(t)dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b (u + iv)(r'_1 + ir'_2)dt = \int_a^b (ur'_1 - vr'_2) + i \int_a^b vr'_1 + ur'_2 \\ &= \int_{\gamma} \omega_1 + i \int_{\gamma} \omega_2 \end{aligned}$$

Riformulazione del calcolo di  $F$

$$F(z) = \int_{\gamma: z_0 \rightarrow z} f$$

Questo implica che

$$\oint_{\gamma} f = 0$$

**Teorema di Morera**

$\oint_{\gamma} f = 0 \ \forall \gamma \text{ circuito} \subseteq \Omega \implies f \text{ olomorfa}$

**Teorema di Cauchy**

$f$  olomorfa su  $\Omega \implies \oint f$  non cambia se sostituisco un circuito  $\gamma \subseteq \Omega$  con uno ad omotopo (In particolare, se  $\gamma$  omotopa ad un punto  $\oint_{\gamma} f = 0$ )

## 4 Funzioni analitiche in campo complesso

### Definizione

$f : \Omega \text{ aperto} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  si dice analitica su  $\Omega$  se  $\forall z_0 \in \Omega, \exists u(z_0)$  tale che

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in u(z_0)$$

### 4.1 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k$$

$$S_N(z) := \sum_{k=0}^N c_k (z - z_0)^k$$

#### Tipi di convergenza

La serie conv. puntualmente in  $z \in \mathbb{C}$  se

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(z) \in \mathbb{C}$$

La serie conv. uniformemente in  $\Omega$  a  $S(z)$  se

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{z \in \Omega} |S_N - S(z)| = 0$$

La serie conv. assolutamente in  $z \in \mathbb{C}$  se converge

$$\sum_{k \geq 0} |c_k| |z - z_0|^k$$

#### Dominio di convergenza della serie

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : \text{la serie converge puntualmente in } z\}$$

### Proprietà

1.  $\text{int}(\mathcal{D}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  dove  $R := \text{raggio di convergenza}$

$\implies$  La serie converge assolutamente in  $\text{int}(\mathcal{D})$

$\implies$  La serie converge uniformemente su  $\{|z - z_0| \leq \rho, \forall \rho < R\}$

2.  $R = \frac{1}{L}$  dove

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\sup) \sqrt{|c_k|}$$

Con la convenzione  $\frac{1}{0} = +\infty$ ,  $\frac{1}{+\infty} = 0$

3. La serie delle derivate n-esime

$$\sum_{k \geq 0} D^n (c_k (z - z_0)^k)$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza

---

### Calcolo dei coefficienti $c_k$

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

$$f'(z) = \sum_{k \geq 1} k c_k (z - z_0)^{k-1} = c_1 + 2c_2 (z - z_0) + \dots$$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k \geq n} k(k-1) \dots (k-n+1) c_k (z - z_0)^{k-n}$$

Si ottiene infine

$$f(z_0) = c_0, \quad f'(z_0) = c_1, \quad f''(z_0) = 2c_2$$

$$f^{(n)}(z_0) = n! c_n$$

$$\implies c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

## 4.2 Un altro modo di calcolare i coefficienti $c_k$

Sia  $f$  analitica in  $\Omega$ , sia  $z_0 \in \Omega$ ,  $R := \text{raggio di conv.}$

Fissato  $r \in (0, R)$ , e fissato  $k \geq 0$ , calcoliamo

$$I_k := \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Dove  $C_r(z_0)$  è una circonferenza centrata in  $z_0$  di raggio  $r$  percorso una volta in senso antiorario parametrizzato  $r(t) = z_0 + r e^{it}$   $t \in [0, 2\pi]$ , scrivibile anche come  $(x_0 + r \cos t) + i(y_0 + r \sin t)$

$$I_k = \int_{C_r(z_0)} \frac{\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n \geq 0} c_n \int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^{n-k-1} dz$$

È permesso per la convergenza uniforme della serie.

$$\int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases}$$

Dunque tutti gli integrali nella somma si annullano tranne per  $n - k - 1 = -1 \implies n = k$

$$= c_k \cdot 2\pi i \implies c_k = \frac{I_k}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

**Formula di Cauchy per la derivata k-esima:**

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

In particolare con  $k = 0$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Dove  $r$  è un qualsiasi raggio appartenente all'intervallo  $(0, R)$

---

**Osservazione:**

$$z \mapsto \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \text{ è olomorfa su } D \setminus \{z_0\}$$

$$\implies \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \text{ è indipendente dalla scelta di } r \in (0, R)$$

Per  $k = 0$  vale in realtà una proprietà più forte

**Formula di Cauchy**

$f$  olomorfa su  $\Omega$  contenente  $\overline{B_r(z_0)}$ , allora  $\forall z \in B_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

**Precisazione:**  $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

Questa formula è estremamente forte e generica poiché vale per tutte le funzioni olomorfe, non è necessaria l'ipotesi di funzione analitica.

**Osservazione:**

$$z \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

è somma della serie di potenze generica

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_k z^k$$

È dunque una funzione analitica.

### 4.3 Analiticità e olomorfa

**Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe**

Sia  $f$  olomorfa su  $\Omega \implies f$  analitica su  $\Omega$

**Osservazioni**

- $\Leftarrow$  (implicazione inversa) è ovvia
- Differenza rispetto al caso reale

Valgono gli sviluppi già noti dall'analisi reale.

## 5 Singolarità isolate e loro classificazione

Sia  $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , si dice che  $z_0$  è una **singolarità isolata** per  $f$  se  $\exists u(z_0) \subseteq \Omega$  tale che  $f$  sia olomorfa su  $u(z_0) \setminus \{z_0\}$

Sia  $z_0$  una singolarità isolata per  $f$ .

### 5.0.1 Singolarità eliminabile

Si dice che  $z_0$  è una **singolarità eliminabile** se

$$\exists u(z_0), \exists \tilde{f} : u(z_0) \rightarrow \mathbb{C} \text{ tale che } \tilde{f}|_{u(z_0) \setminus \{z_0\}} = f$$

e  $\tilde{f}$  sia olomorfa in  $u(z_0)$ .

Esempio:  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

**Osservazione:** Se  $\exists \tilde{f}$ ,  $\tilde{f}$  è unica.

Se una  $g$  è olomorfa è anche continua:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [g(z) - g(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) = g'(z_0) \cdot 0 = 0$$

Ne consegue che il valore che assumerà  $\tilde{f}$  in  $z_0$  è

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

**Osservazione 2:**  $z_0$  singolarità eliminabile per  $f \implies f$  limitata (in modulo) vicino a  $z_0$ .

$$\exists u(z_0), \exists M > 0 \text{ tale che } \|f(z)\| \leq M \forall u(z_0) - \{z_0\}$$

Infatti, se  $z_0$  singolarità eliminabile per  $f \implies \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

**Teorema di rimozione della singolarità**

Se  $f$  olomorfa e limitata in  $u(z_0) \setminus \{z_0\} \implies z_0$  è singolarità eliminabile

Quindi, in conclusione, se  $f$  è olomorfa su  $u(z_0) \setminus \{z_0\}$ ,  $z_0$  singolarità eliminabile di  $f \iff f$  limitata in  $u(z_0) \setminus \{z_0\}$

### 5.0.2 Polo

Si dice che  $z_0$  è un **polo** per  $f$  se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

Esempio:  $f(z) = \frac{1}{sz^m}$  con  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

### 5.0.3 Singolarità essenziale

Si dice che  $z_0$  è una **singolarità essenziale** per  $f$  se è una singolarità isolata e non è né eliminabile né polo.

Esempio:  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

**Teorema di Picard:**  $z_0$  singolarità essenziale per  $f \implies \forall u(z_0), f(u(z_0))$  (ovvero l'immagine di  $f$ ) è data da  $\mathbb{C}$  oppure  $\mathbb{C} \setminus \{1 \text{ punto}\}$ .

## 5.1 Sviluppabilità in serie di Laurent

**Teorema**  $f$  olomorfa su  $\Omega \setminus \{z_0\}$  aperto di  $\mathbb{C}$ , allora  $f$  è "sviluppabile in serie di Laurent di centro  $z_0$ ", ovvero

$$\exists u(z_0) \subseteq \Omega \text{ tale che } \forall x \in u(z_0) \setminus \{z_0\}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k < 0} c_k (z - z_0)^k \end{aligned}$$

Ovvero parte regolare dello sviluppo + parte singolare dello sviluppo  
**Inoltre, il calcolo dei coefficienti:**

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

In particolare:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} f(z) dz$$

C'è una relazione tra  $c_{-1}$  e gli integrali sui circoli. Esempio:  $f(z) = \frac{1}{z}$   
Tramite serie di Laurent è possibile riconoscere le singolarità  
 $z_0$  è singolarità eliminabile  $\iff$  parte singolare dello sviluppo = 0.

## 6 Riconoscere le singolarità

- $z_0$  eliminabile  $\iff$  parte singolare dello sviluppo  $= 0$
- $z_0$  polo
- $z_0$  sing. essenziale

Idea:  $z_0$  è un polo per  $f \iff z_0$  è zero per la funzione  $1/f$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f} = 0$$

### 6.0.1 Principio di identità

Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa e supposto  $\Omega$  connesso

Sia  $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ , sono equivalenti i seguenti fatti

1.  $z_0 \in \text{acc}(Z(f))$
2.  $f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
3.  $Z(f)$  contiene un intorno di  $z_0$
4.  $Z(f) \equiv \Omega$

In conclusione:  $Z(f)$

- È fatto da punti isolati, oppure
- Coincide con tutto  $\Omega$

### 6.0.2 Ordine di zeri

Sia  $f$  olomorfa su  $\Omega$  connesso,  $f \neq 0$  su  $\Omega$ , sia  $z_0 \in Z(f)$ , Per il principio di identità,  $z_0$  è uno zero isolato.

La (2) è quindi falsa  $\implies \{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \neq \emptyset$ . Per il principio di buon ordinamento  $\nu := \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ : **Ordine dello zero**.

**Osservazione:**  $\nu$  è anche caratterizzato da:

$$f(z) = \sum_{n \geq \nu} c_n (z - z_0)^n = c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu$$

Inoltre

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^\nu} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

## 6.1 Ordine dei poli

$z_0$  polo per  $f \iff z_0$  zero per  $1/f$

**Definizione:** Sia  $z_0$  polo per  $f$ . Chiamiamo ordine del polo  $z_0$  l'ordine di  $z_0$  come  $z_0$  per  $1/f$

**Definizione:** In particolare si dice polo semplice un polo di ordine 1.

**Osservazione:** L'ordine di un polo è caratterizzato anche:



- $z_0$  polo di ordine  $\nu$  per  $f \iff z_0$  zero di ordine  $\nu$  per  $1/f \iff$

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^\nu} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \implies & \exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^\nu f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (*) \end{aligned}$$

- $z_0$  polo di ordine  $\nu$  per  $f \iff$

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ con } c_{-\nu} \neq 0$$

Infatti

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \implies (z - z_0)^\nu f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+\nu}$$

(\*)  $\iff$  tutti i coefficienti  $c_n$  con  $n + \nu < 0$  e il coefficiente  $c_{-\nu} \neq 0$ .

Dunque, lo sviluppo di Laurent di una funzione che ha un polo ha parte singolare composta da un numero finito di termini.

È quindi possibile classificare le singolarità guardando lo sviluppo in serie di Laurent, guardando la parte singolare

- p. singolare nulla: ELIMINABILE
- p. singolare con numero finito di termini: POLO
- p. singolare con infiniti termini: ESSENZIALE

#### Osservazioni su zeri e poli

1. Se  $f, g$  hanno entrambe uno zero in  $z_0$  o entrambe un polo, allora

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f}{g} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'}{g'}$$

Cenno di dim (Primo caso):

$$f(z) = c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu, g(z) = c_\eta (z - z_0)^\eta + o(z - z_0)^\eta$$

Sono possibili solo tre casi:  $\eta = \nu \implies$  limite finito,  $\nu > \eta$  limite 0,  $\nu < \eta$  limite infinito.

2.  $z_0$  zero di ordine  $\nu$  per  $f \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{f(z)} = \nu$

Questa è una modalità per calcolare l'ordine. Dim:  $f(z) = c_\nu (z - z_0)^\nu + \dots$ ,  $f'(z) = \nu c_\nu (z - z_0)^{\nu-1} + \dots$

$$\implies \frac{(z - z_0)f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu}{c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \nu$$

3.  $z_0$  zero di ordine  $\nu$  per  $f$ , con  $\nu \geq 1 \implies z_0$  zero di ordine  $\nu - 1$  per  $f'$ .  
 $z_0$  polo di ordine  $\nu$  per  $f$ , con  $\nu \geq -1 \implies z_0$  polo di ordine  $\nu + 1$  per  $f$ .  
 Controllare su libro.

### 6.1.1 Unicità del prolungamento analitico

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  connesso, sia  $S \subseteq \Omega$  tale che  $\text{acc}(S) \cap \Omega \neq \emptyset$ .  
Data  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ , esiste al più una  $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa tale che  $\tilde{f}|_S = f$

**Dimostrazione:** Supponiamo  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  siano prolungamenti di  $f$ .  
Tesi:  $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2$   
Considerando  $g := \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ . Tesi:  $g \equiv 0$ .  
 $g$  è olomorfa,  $S \subseteq Z(g) \implies Z(g)$  ha punti di accumulazione in  $\Omega$ , quindi  $Z(g) \equiv \Omega$

## 7 Teorema dei residui

**Motivazione dello studio del teorema:** è il calcolo di integrali in campo complesso e anche in campo reale.  
Se  $f$  è olomorfa su  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \implies \int_\gamma f(z)dz = 0$  dove  $\gamma$  è un circuito omotopo a un punto. Se  $f$  è olomorfa su  $\Omega$  tranne che in un numero finito di punti, come si calcola  $\int_\gamma f(z)dz$ ?

### Definizione

Se  $z_0$  è una singolarità isolata per  $f$  si dice residuo di  $f$  in  $z_0$  il coefficiente  $c_{-1}$  dello sviluppo in serie di Laurent di  $f$  di centro  $z_0$ .

### 7.1 Calcolo dei residui

- Se  $z_0$  è una singolarità eliminabile:  $\text{Res}(f, z_0) = 0$  poiché la parte singolare dello sviluppo  $\equiv 0$
- $z_0$  singolarità essenziale: non c'è modo diretto di calcolare il residuo (serve calcolare lo sviluppo)
- Se  $z_0$  è un polo di ordine  $\nu$

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(\nu-1)!} D^{(\nu-1)}[(z-z_0)^\nu f(z)]$$

In particolare se  $z_0$  è un polo semplice

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)]$$

### Dimostrazione polo semplice

$z_0$  polo semplice  $\implies f(z) = \sum_{n \geq -1} c_n (z-z_0)^n$ , con  $c_{-1} \neq 0$

$$(z-z_0)f(z) = \sum_{n \geq -1} c_n (z-z_0)^{n+1} = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + o(z-z_0)^2$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)] = c_{-1}$$

**Osservazione:**  $\text{Res}(\frac{g}{h}, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$  con  $g$  olomorfa,  $h$  con uno zero di ordine 1 in  $z_0$ .

**Dimostrazione**

Caso  $g(z_0) \neq 0 \implies z_0$  polo semplice

$$(z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)}{h'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)} \rightarrow \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Tramite la formula per il residuo del polo semplice

$$\text{Res}(\frac{g}{h}, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Caso  $G(z_0)=0$  Dico che  $z_0$  è una singolarità eliminabile

$$\frac{g}{h} = \frac{g'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)}{h'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)} \rightarrow \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)} \in \mathbb{C}$$

## 7.2 Definizione e calcolo dell'indice di avvolgimento

### Definizione (intuitiva)

Sia  $\gamma$  circuito  $\subseteq \mathbb{C}$  e sia  $z_0 \notin \gamma$ .

Si dice indice di avvolgimento di  $\gamma$  rispetto a  $z_0$  è il numero di volte che  $\gamma$  gira attorno a  $z_0$ , contate con segno  $+$  nel caso di verso antiorario

### Definizione (formale)

Sia  $r(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  parametrizzazione di  $\gamma$  ( $\gamma$ ) circuito  $\subseteq \mathbb{C}$ ,  $z_0 \notin \mathbb{C}$ .

Sia  $\rho(t) := |r(t) - z_0|$ . Allora  $\exists \theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $r(t) = z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)}$ .

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

L'indice è un numero  $\in \mathbb{Z}$  poiché  $r(a) = r(b) \implies \rho(a) = |r(a) - z_0| = |r(b) - z_0| = \rho(b)$

$$r(a) = \rho(a) + e^{i\theta(a)}$$

$$r(b) = \rho(b) + e^{i\theta(b)}$$

$$\implies e^{i\theta(a)} = e^{i\theta(b)}$$

$$\implies i\theta(a) - i\theta(b) = 2k\pi i = \theta(a) - \theta(b) = 2k\pi$$

### Osservazioni

1. L'indice non cambia per parametrizzazioni equivalenti (dello stesso circuito)
2. L'indice di avvolgimento non cambia sostituendo  $\gamma$  con un circuito omo-topo a  $\gamma$  in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

### 7.2.1 Modalità analitica per calcolare l'indice

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

**Dimostrazione**

$$r(t) = z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)}, \quad t \in [a, b].$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)} - z_0} dt \\ &= \int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)}}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} dt + i \int_a^b \frac{\rho(t)\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} dt \\ &= \log \rho(t) \Big|_a^b + i[\theta(b) - \theta(a)] = i[\theta(b) - \theta(a)] \end{aligned}$$

Dunque dividendo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

### 7.3 Teorema dei residui

Sia  $\Omega$  aperto  $\subseteq \mathbb{C}$  e sia  $\gamma \subseteq \mathbb{C}$  circuito omotopo a un punto (in  $\Omega$ ).

Sia  $f : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa, dove  $S$  "insieme singolare" soddisfa

- $\gamma \subseteq \Omega \setminus S$
- $\text{acc}(S) \cap \Omega = \emptyset$

Allora:

$\text{Ind}(\gamma, z_0) \neq 0$  per al più un numero finito di punti e vale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S} \text{Res}(f, z_0) \text{Ind}(\gamma, z_0)$$

## 8 Applicazioni del teorema dei residui in campo reale

### 8.1 Primo tipo

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) dt$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} g(e^{it}) i e^{it} dt$$

$$\int_{C_1(0)} g(z) dz$$

Se  $g$  soddisfa le ipotesi del teorema dei residui su  $C_1(0) \subseteq \Omega$ , con  $\gamma = C_1(0)$

$$= 2\pi i \sum_{|z_0| < 1} \text{Res}(g, z_0)$$

Esempio:  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t} dt$

## 8.2 Secondo tipo

$$\text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

La definizione cambia leggermente nel caso sia presente una singolarità su  $\mathbb{R}$ . Se  $f$  è integrabile (secondo Riemann) allora

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

In generale può accadere che il V.P.  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \in \mathbb{R}$  ma  $f$  non è integrabile

**Esempio:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 1 & x \in [0, 1] \\ -1 & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{x} & x \leq -1 \end{cases}$$

$f$  non è integrabile secondo Riemann, ma il V.P. è uguale a 0.

---

**Ipotesi:**  $f = f(z)$  abbia un numero finito di singolarità nel semipiano  $\{\text{Im} z > 0\}$  (e nessuna singolarità sull'asse reale) + (\*) ipotesi di decadimento.

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{-R} f(x) dx + \int_{C_R^+(0)} f(z) dz - \int_{C_R^+(0)} f(z) dz$$

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R(0)^+} f(z) dz$$

Dove  $\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0)$

Per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S, \\ \text{Im} z_0 > 0}} \text{Res}(f, z_0)$$

L'indice di avvolgimento è uguale a 1.

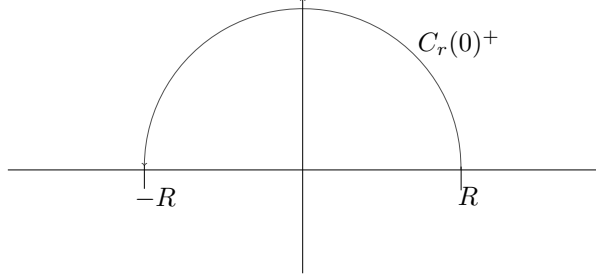


Figura 1: Semicirconferenza

### 8.2.1 Lemma tecnico di decadimento

Se  $\exists \alpha > 1$  tale che  $|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^\alpha}$  (per  $|z|$  abbastanza grande) (\*), allora

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) dz = 0$$

Aggiungendo l'ipotesi di decadimento all'integrale precedente si avrà il risultato scritto.

Si ha un calcolo analogo per il semipiano  $\{\text{Im} < 0\}$

### 8.3 Terzo tipo

$$I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S \\ \text{Im} z_0 > 0}}^{\infty} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, z_0)$$

Dove  $\omega \in \mathbb{R}^+$

**Ipotesi:**  $f(z) e^{i\omega z}$  abbia un numero finito di singolarità nel semipiano  $\{\text{Im} z > 0\}$  (e nessuna singolarità sull'asse reale) + (\*\*) lemma di Jordan.

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{-R} f(z) e^{i\omega z} dz + \int_{C_R(0)^+} f(z) e^{i\omega z} dz - \int_{C_R(0)^+} f(z) e^{i\omega z} dz$$

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\omega z} dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R(0)^+} f(z) e^{i\omega z} dz$$

Dove  $\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0)$

Per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S \\ \text{Im}(z_0) > 0}} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, z_0)$$

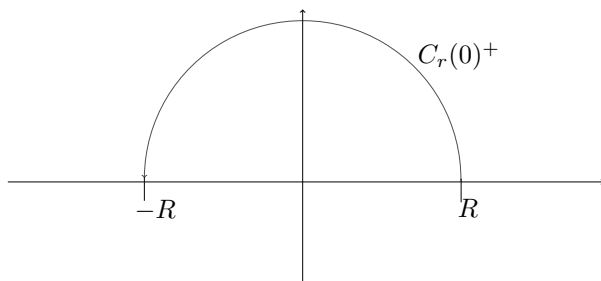


Figura 2: Semicirconferenza

L'indice di avvolgimento è uguale a 1.

Il secondo termine dell'integrale si elide grazie a il

### 8.3.1 Lemma di Jordan

Sotto l'ipotesi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{z \in C_R^+(0)} |f(z)| = 0 \quad (**)$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) e^{i\omega x} dz = 0$$

**Osservazione:** Variante analoga nel semipiano  $\{\text{Im} z < 0\}$  quando  $\omega \in \mathbb{R}^-$

Jordan vale anche per  $\omega \in \mathbb{R}^-$  in  $C_R^-(0)$

Esempio:  $I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

## 8.4 Quarto tipo

$$I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

**Ipotesi:**  $f(z)$  abbia un numero finito di singolarità su  $\{\text{Im} > 0\}$ ,  
 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) dz = 0$  (\*\*\*) e abbia un numero finito di poli semplici su  $\mathbb{R}$ .

$$\gamma_{R,\varepsilon} = [-R, x_0 - \varepsilon] - C_\varepsilon^+(x_0) + [x_0 + \varepsilon, R] + C_R^+(0)$$

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^+(x_0)} f(z) dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) dz$$

### 8.4.1 Lemma del polo semplice

Se  $x_0$  è un polo semplice

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^+(x_0)} f(z) dz = \pi i \text{Res}(f, x_0)$$

Esempio:  $I = (\text{V.P.}) \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx$

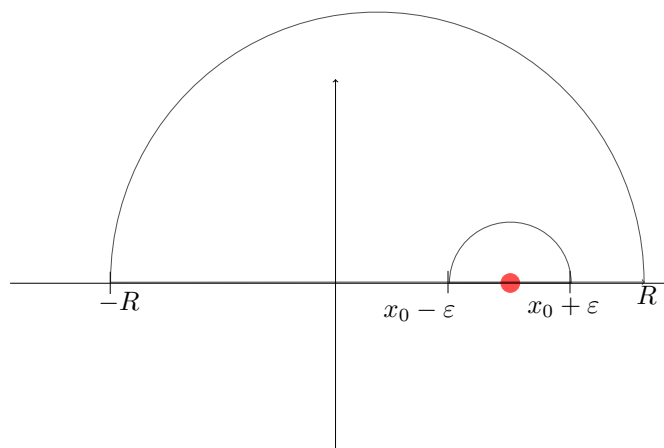


Figura 3: Quarto tipo

## 9 Cenni aggiuntivi sull'analisi complessa

### 9.1 Residuo all'infinito

**Definizione:** Diciamo che  $\infty$  è una singolarità isolata per  $f$  se  $f$  è olomorfa nel complementare di una palla

In modo equivalente:  $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  ha una singolarità isolata nell'origine.

$$\text{Olomorfa su } \left| \frac{1}{z} \right| > R \iff |z| < R$$

$$\text{Res}(f, \infty) := \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

**Teorema:** La somma di tutti i residui di una funzione olomorfa su  $\mathbb{C} \setminus \{\text{n. finito di punti}\}$  è zero. (compreso il punto all'infinito).

Da utilizzare quando si deve calcolare la somma di tanti residui al finito. (stesso indice di avvolgimento)



## 9.2 Funzioni polidrome

$z = |z|e^{i\text{Arg}z}$ ,  $\text{Arg}z := \{\arg + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\arg z$  argomento principale  $\in [0, 2\pi]$ .

$$\sqrt[n]{z} = \{ \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{Arg}z}{n}} \} = \{ \sqrt[n]{|z|} e^{i(\frac{\arg z}{n} + \frac{2k\pi}{n})} : k = 0, \dots, n-1 \}$$

$$\log z = \{\log |z| + i\text{Arg}z\}$$

Alla radice sono associati  $n$  valori, al logaritmo  $\infty$  valori.

$z \mapsto \sqrt[n]{z}, \log z$  non sono funzioni!

Per definire una radice  $n$ -esima funzione si può specificare l'intervallo di variabilità di  $\text{Arg}z$ .  $z \in \mathbb{C} \mapsto \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{Arg}z}{n}}$  con  $\text{Arg}z \in [\bar{\theta}, \bar{\theta} + 2\pi]$ : Branca della radice  $n$ -esima.

**Osservazione:** Una branca della radice  $n$ -esima non è continua su  $\mathbb{C}$ . (è continua su  $\mathbb{C} - \{\theta = \bar{\theta}\}$ )

Non è possibile incollare due branche diverse ottenendo una funzione olomorfa su  $\mathbb{C}$ .

## 9.3 Funzioni armoniche

**Definizione:**  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice armonica se

$$\nabla^2 u = 0 = u_{xx} + u_{yy}$$

**Osservazione:**  $f = f(z)$  olomorfa,  $f = u + iv \implies u, v$  armoniche.

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

Sommando le due equazioni

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(Analogamente per  $\nabla^2 v = 0$ )

**Osservazione 2:**  $u$  armonica su  $\Omega$ , con  $\Omega$  semplicemente connesso  $\implies \exists v$  armonica coniugata di  $u$  t.c.  $f = u + iv$  olomorfa.

## 10 Analisi funzionale

Uno **spazio vettoriale** (su  $\mathbb{R}$ ) è un insieme  $(V)$  su cui sono definite due operazioni:

**Somma**  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$

**Prodotto per scalare**  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

Tali operazioni godono delle seguenti proprietà

Per la somma

- $u + v = v + u$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- $u + \underline{0} = u$
- $u + (-u) = \underline{0}$

Per il prodotto per scalare

- $(ts)u = t(su)$
- $t(u + v) = tu + tv$
- $(t + s)u = tu + su$
- $1 \cdot u = u$

### 10.0.1 Norma

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

Una norma su  $V$  è una funzione  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  tale che:

1.  $\|v\| > 0 \forall v \in V - \{0\}$  (positività)
2.  $\|tv\| = |t|\|v\| \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V$  (omogeneità)
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \forall u, v \in V$  (dis. triangolare)

$(V, \|\cdot\|)$  si dice **spazio vettoriale normato**.

Seguono le seguenti proprietà

4.  $\|0\| = 0$
5.  $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \forall u, v \in V$  (dim)

Norma euclidea:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sum_{i=1}^n (x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

La disuguaglianza triangolare per la norma  $p$ , ovvero disuguaglianza di Minkowski, richiede l'ipotesi  $p \geq 1$ .

### 10.0.2 Norma su uno spazio funzionale di dimensione infinita

$V = C^0([a, b])$

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

**Definizione:** Sia  $(V, \|\cdot\|)$  sp. vettoriale normato. Allora  $d(u, v) := \|\underline{u} - \underline{v}\|$  definisce una distanza su  $V$ , ovvero

$$d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

tale che

1.  $d(u, v) \geq 0$  con  $= 0 \iff u = v$  positività
2.  $d(u, v) = d(v, u)$  simmetria
3.  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$  disuguaglianza triangolare

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left( \sum_{i=1}^n \|x_i - y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|$$

**Definizione:**  $(V, d)$  si dice spazio metrico

**Osservazione:** In uno spazio metrico possiamo definire le **sfere**: dato  $r \geq 0, v_0 \in V$

$$B_r(v_0) := \{v \in V : d(v, v_0) < r\}$$

Si dice sfera chiusa se la disuguaglianza non è stretta.

**Definizione:** Se  $\{v_n\} \subseteq (V, \|\cdot\|)$ , si dice che  $v_n \rightarrow v$  in  $V$  se

$$d(v_n, v) \rightarrow 0, \text{ oppure } \|v_n - v\| \rightarrow 0$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : d(v_n, v) = \|v_n - v\| < \varepsilon \forall n \geq \nu)$$

Alcuni fatti veri in dimensione finita ma falsi in dimensione infinita:

1. Tutte le norme sono "equivalenti" fra loro
2. Tutte le successioni di Cauchy convergono
3. Tutti i sottospazi vettoriali sono chiusi

**Definizione:** Sia  $V$  uno spazio vettoriale (su  $\mathbb{R}$ ), consideriamo su  $V$  due possibili norme  $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ .

Queste due norme si dicono **equivalenti** se:

1.  $\exists c > 0 : \forall v \in V, \|v\| \leq c |||v|||$
2.  $\exists c' > 0 : \forall v \in V, |||v||| \leq c' \|v\|$

Le successioni convergenti nelle due norme sono le stesse.  
Interpretazione geometrica:

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \iff B_1^1(0) \subseteq B_1^\infty(0)$$

**Teorema:** Se  $\dim V < +\infty \implies$  tutte le norme su  $V$  sono tra loro equivalenti

In uno spazio a dimensione infinita non è generalmente vero, ad esempio nello spazio delle funzioni continue su  $[a, b]$

**Definizione:** Sia  $(V, \|\cdot\|)$  uno spazio vettoriale normato. Una successione  $\{v_n\} \subseteq V$  si dice successione di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : d(v_n, v_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu$$

**Osservazione:** Vale sempre che se  $\{v_n\}$  converge allora è di Cauchy.

$$(\|v_n - v_m\| = \|v_n - v + v - v_m\| \leq \|v_n - v\| + \|v - v_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

**Teorema:** Se  $\dim V < +\infty$  vale anche il viceversa, ovvero

$$\{v_n\} \text{ converge} \iff \{v_n\} \text{ di Cauchy}$$

Questo teorema è falso se  $\dim V = +\infty$   
Prendendo lo spazio delle funzioni  $V = C^0([a, b])$  con norma 1, si può costruire una successione di Cauchy che non converge.

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon, \quad \int_a^b |f_n - f_m| = \int_a^b f_m - f_n$$

## 10.1 Spazio di Banach

**Definizione:** Uno spazio vettoriale normato  $(V, \|\cdot\|)$  si dice completo o di Banach se tutte le successioni di Cauchy convergono.

**Teorema/osservazione:**  $V = (C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  è di Banach  
Generalizzazione:

$$V = C^k([a, b]) \quad \|f\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

**Teorema** Sia  $(V, \|\cdot\|)$  spazio vettoriale normato. Se  $\dim V < +\infty \implies$  tutti i sottospazi vettoriali  $W$  sono **chiusi**.

$$\{v_n\} \subseteq W, v_n \rightarrow v \text{ in } V \implies v \in W$$

Il teorema diventa falso se  $\dim V = +\infty$ , ad esempio  $V = (C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ .

## 11 Integrazione secondo Lebesgue

1. Misure e funzioni misurabili
2. Definizione di integrale di Lebesgue
3. Confronto con Riemann
4. Teoremi principali

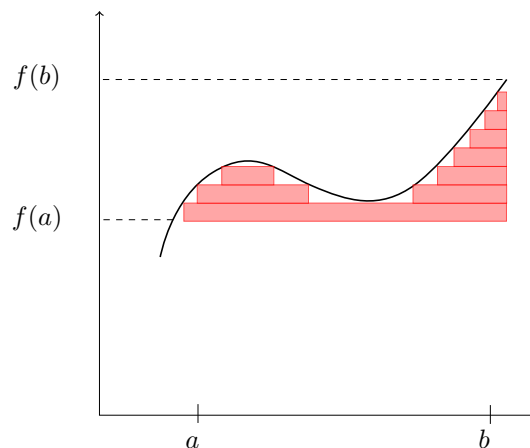


Figura 4: Integrale secondo Lebesgue, intuizione geometrica

$$\int_a^b f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N l(f^{-1}(j_k)) \cdot y_k$$

### 11.0.1 Misure e funzioni misurabili

**Definizione:** Sia  $X$  insieme, e sia  $F \subseteq P(X)$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ .

$F$  si dice una  $\sigma$ -algebra se:

- (i)  $\emptyset \in F$
- (ii)  $A \in F \implies X \setminus A \in F$
- (iii)  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F \implies \bigcup_n A_n \in F$

**Osservazione:**  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F \implies \bigcap_n A_n \in F$

Esempi

- $X$  qualsiasi,  $F = P(X) =$  parti di  $X$
- $X = \mathbb{R}^n$ ,  $F$  = la più piccola  $\sigma$ -algebra contenente gli aperti ( $\sigma$  di Borell)

**Definizione:** la coppia  $(X, F)$  si dice spazio misurabile

**Definizione:** Sia  $(X, F)$  spazio misurabile, una misura positiva su  $(X, F)$  è una funzione

$$\mu : F \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

tale che

1.  $\mu(A) \geq 0 \forall A \in F$  (positività)
2. Se  $\{A_n\}$  è una famiglia al più numerabile di insiemi di  $F$  2 a 2 disgiunti allora

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

(additività, eventualmente  $+\infty = +\infty$ )

Esempi:

- $(X, P(X))$ ,  $\mu(A) = \text{card} A$
- $(X, P(X))$  fissato  $x_0 \in X$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

**Osservazione:** Seguono da 1), 2)

3.  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, A_i \in F$

$$\implies \mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

4.  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots, A_i \in F, \mu(A_1) < +\infty$

$$\implies \mu(\bigcap_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

**Teorema:** Esistono su  $\mathbb{R}^n$  una  $\sigma$ -algebra  $M$  (misurabile secondo Lebesgue) e una misura positiva  $m$  (misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ ) tali che:

- Tutti gli insiemi aperti appartengono a  $M$
- $A \in M$  e  $m(A) = 0 \implies \forall B \subseteq A, B \in M$  e  $m(B) = 0$  (completezza)
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \ i = 1, \dots, n\}$

$$\implies m(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

[...]

**Osservazione:** Non tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  sono misurabili secondo Lebesgue.

**Osservazione:** La misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$  estende il concetto di volume  $n$ -dimensionale

**Osservazione:** Gli insiemi di misura nulla sono importanti

**Definizione:** Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice misurabile secondo Lebesgue se

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto, } f^{-1}(A) \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

$$\forall C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso, } f^{-1}(C) \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

**Osservazione:**  $f$  continua  $\implies f$  misurabile secondo Lebesgue ( $f$  continua  $\implies \forall A$  aperto  $f^{-1}(A)$  aperto  $\implies \forall A$  aperto  $f^{-1}(A)$  misurabili)

**Osservazione 2:** Sono misurabili anche limiti, inferiore, superiore di funzioni continue (di funzioni misurabili)

Più in generale se

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

con  $E$  misurabile,  $f$  si dice misurabile secondo Lebesgue se  $\forall A \subseteq \mathbb{R}$  aperto  $E \cap f^{-1}(A)$  misurabile secondo Lebesgue

### 11.0.2 Definizione di integrale secondo Lebesgue

Sia  $f : E$  misurabile  $\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile.

#### Funzioni semplici

$S$  funzione semplice è una funzione (misurabile) che assume un numero finito di valori (ciascuno su un insieme misurabile).

$$S = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{E_k}, \quad \chi_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dove gli  $E_i$  sono insiemi misurabili 2 a 2 disgiunti

$$\int_E S := \sum_{k=1}^N \alpha_k m(E_k)$$

**Precisazione:** con la convenzione  $0 \cdot \infty = 0$

**Funzioni misurabili  $f \geq 0$**

$$\int_E f := \sup_{\substack{S \text{ semplici} \\ S \geq f}} \int_E S \quad \left( = \inf_{\substack{S \text{ semplici} \\ S \geq f}} \int_E S \right)$$

**Funzioni misurabili di segno qualsiasi**

Data  $f$  misurabile su  $E$  misurabile, scriviamo:

$f = f^+ - f^-$  con  $f^+, f^- \geq 0$ ,  $f^+ := \max\{f, 0\}$ ,  $f^- := -\min\{f, 0\}$

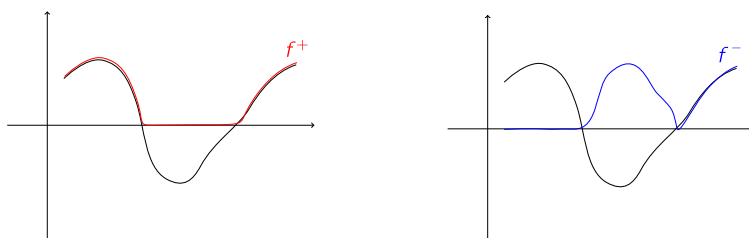


Figura 5: Funzioni di segno qualsiasi

$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-$$

A patto che almeno uno tra i due integrali sia finito, (eventualmente l'integrale vale  $\pm\infty$ )

**Definizione:**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile si dice *integrabile secondo Lebesgue* se

$$\int_E f \in \mathbb{R}$$

**Osservazione:**  $f$  è integrabile secondo Lebesgue  $\iff \int_E f^\pm \in \mathbb{R}$

Quindi  $f$  integrabile secondo Lebesgue  $\iff |f|$  integrabile secondo Lebesgue, infatti

$$|f| = f^+ + f^-$$



### 11.0.3 Proprietà principali dell'integrale di Lebesgue

1) **Linearità:**  $f, g$  Lebesgue integrabili,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g$  Lebesgue integrabile e

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

2) **Monotonia:**  $f, g$  Lebesgue integrabili,  $f \leq g$  q.o. su  $E$

$$\implies \int_E f \leq \int_E g$$

3) **Maggiorazione del modulo:**  $f$  Lebesgue integrabile

$$\implies \left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

Segue da 2),  $-|f| \leq f \leq |f| \implies -\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|$

4) L'integrale di Lebesgue "non vede" gli insiemi di misura nulla.  
Sia  $S$  semplice,  $E \rightarrow \mathbb{R}$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } E \setminus N \\ 1 & \text{su } N \end{cases} \quad m(N) = 0$$

$$\int_E S = m(E \setminus N) \cdot 0 + m(N) \cdot 1 = 0$$

Più in generale, se  $f$  misurabile:  $E \rightarrow \mathbb{R}$  se  $f$  si annulla su  $E$  tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = 0$$

Conseguenza: se  $f, g$  misurabili:  $E \rightarrow \mathbb{R}$  se  $f = g$  su  $E$  tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = \int_E g$$

**Definizione:** Si dice che una proprietà  $P(x)$  vale per q.o.  $x \in E$  se  $P(x)$  vale  $\forall x \in E \setminus N$ , con  $m(N) = 0$

Quindi

- $f = 0$  q.o. su  $E \implies \int_E f = 0$
- $f = g$  q.o. su  $E \implies \int_E f = \int_E g$

## 11.1 Confronto Riemann-Lebesgue

### 11.1.1 Integrali propri

$f$  R-integrabile  $\implies f$  L-integrabile, in caso affermativo, i valori degli integrali coincidono, in generale non vale il viceversa.

( $\implies$ ) Le funzioni semplici secondo Lebesgue  $S_L$  sono una classe più ampia delle funzioni semplici secondo Riemann  $S_R$

$$\sup_{\substack{s \in S_R \\ s \leq f}} \int_E s \leq \sup_{\substack{s \in S_L \\ s \leq f}} \int_E s \leq \inf_{\substack{s \in S_L \\ s \geq f}} \int_E s \leq \inf_{\substack{s \in S_R \\ s \geq f}} \int_E s$$

Controesempio:  $\exists f$  L-integrabile ma non R-integrabile.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Non R-integrabile poiché approssimando da sotto e da sopra non si trova lo stesso valore

$$s \in S_R, s \geq f \implies s \geq 1 \text{ su } (0, 1) \implies \int_0^1 s \geq 1$$

$$s \in S_R, s \leq f \implies s \leq 0 \text{ su } (0, 1) \implies \int_0^1 s \leq 0$$

$f$  è però L-integrabile,  $\int_0^1 f = 0$

$$\int_0^1 f = 1 \cdot m((0, 1) \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot m((0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = 0$$

### 11.1.2 Integrali impropri

In  $\mathbb{R}$ , supponiamo che  $f$  limitata, sia R-integrabile su  $[-L, L] \forall L > 0$ .

Allora:  $f$  L-integrabile su  $\mathbb{R} \iff |f|$  R-integrabile (in senso improprio su  $\mathbb{R}$ ).  
E in tal caso l'integrale di Lebesgue di  $f$  coincide con l'integrale improprio di  $f$ .  
Analogamente se  $f$  non è limitata.

Controesempio: una funzione R-integrabile ma non R-integrabile in modulo e quindi non L-integrabile.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ su } (0, +\infty)$$

Riemann integrabile su  $(0, +\infty)$  (tramite analisi complessa)

Ma non è Riemann integrabile in modulo

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} = +\infty$$

(Tramite serie)

## 12 Spazi di Lebesgue

**Definizione:** Sia  $E$  misurabile  $\subseteq \mathbb{R}^n$

$$L^1(E) := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ L-integrabili}\} / \sim$$

Tale insieme è uno spazio vettoriale per la linearità dell'integrale.

**Definizione:** Data  $f \in L^1(E)$

$$\|f\|_1 := \int_E |f|$$

Tale norma rispetta le tre proprietà necessarie.

C'è un problema,  $\int_E |f| = 0 \not\Rightarrow f = 0$  su  $E$ ,  $\Rightarrow f = 0$  q.o. su  $E$ .

**Definizione:** Date  $f, g \in L^1(E)$  diciamo che  $f$  è equivalente a  $g$  se  $f = g$  q.o. su  $E$ .

Proprietà di una relazione di equivalenza:

- $f \sim f$
- $f \sim g \iff g \sim f$
- $f \sim g$  e  $g \sim h \implies f \sim h$

Dunque identifichiamo le funzioni equivalenti secondo l'ultima definizione.

**Teorema:**  $(L^1(E), \|\cdot\|)$  è uno spazio di Banach

**Definizione:**

$$\{f_n\} \subseteq L^1(E), f_n \rightarrow f \text{ in } L^1(E) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n - f| dx = 0$$

Consideriamo per semplicità  $f = 0$

Q:  $f_n \rightarrow 0$  puntualmente q.o. su  $E$ , allora  $\int_E f_n = 0$  ?

Controesempio 1

$$\exists f_n \subseteq L^1(\mathbb{R}) : \begin{cases} f_n \rightarrow 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R} \\ f_n \not\rightarrow 0 \text{ in } L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$f_n = \chi_{(n, n+1)} = \begin{cases} 1 & x \in (n, n+1) \\ 0 & x \notin (n, n+1) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f(x_0) = 0$  definitivamente (per  $n \gg 1$ )

$$\int_{\mathbb{R}} \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(n, n+1)} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Controesempio 2

$$\exists f_n \subseteq L^1(0, 1) : \begin{cases} f_n \rightarrow 0 \text{ in } L^1(0, 1) \\ f_n \not\rightarrow 0 \text{ q.o. su } (0, 1) \end{cases}$$

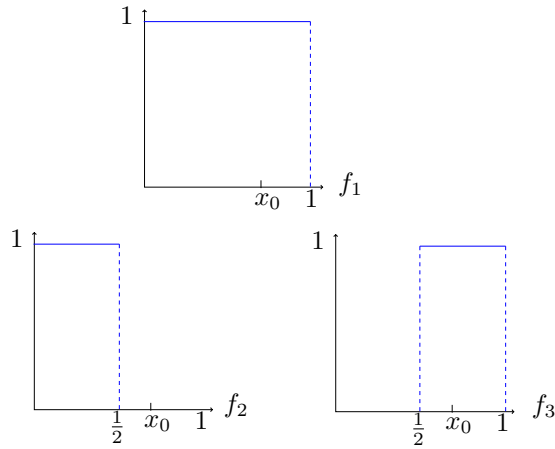


Figura 6: Successione

$f_n \rightarrow 0$  in  $L^1(0, 1)$ ,  $\|f_n\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |f_n| \rightarrow 0$   
 $f_n \not\rightarrow 0 \forall x_0 \in (0, 1)$   
 Fissato  $x_0 \in (0, 1)$ ,  $\exists K(n) : f_{K(n)}(x_0) = 1$

**Proposizione:** Se  $f_n \rightarrow 0$  in  $L^1(E)$ , allora  $\exists f_{K(n)} \rightarrow 0$  q.o. su  $E$ .

**Osservazioni:**

- Si può mettere  $f$  al posto di 0.
- Nell'esempio è vero
- Conseguenza: Se una successione  $f_n$  ammette limite in  $L^1(E)$  allora questo limite deve coincidere col limite puntuale q.o.

Infatti,  $f_n \rightarrow f$  q.o. in  $L^1(E)$  Allora  $\exists f_{K(n)} \rightarrow f$  q.o. su  $E$ . (per la proposizione)

Quindi se  $f_n \rightarrow g$  q.o. su  $E$ . ( $\implies f_{K(n)} \rightarrow g$  q.o. su  $E$ , per l'unicità del limite puntuale quasi ovunque,  $f = g$  q.o. su  $E$ )

**Teorema di convergenza dominata (di Lebesgue)**

Sia  $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$  e sia  $f_n \rightarrow f$  q.o. su  $E$

Supponiamo che  $\exists g \in L^1(E)$  indipendente da  $n$  tale che

$$(*) |f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.o. } x \in E, \forall n \in \mathbb{N} \text{ (definitivamente)}$$

Allora  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1(E)$

**Osservazioni**

- La (\*) è un'ipotesi molto più debole della convergenza uniforme

- In particolare per  $f_n(x) = x^n$  su  $(0, 1)$  la (\*) è verificata, prendendo  $g \equiv 1$
- Invece nel controesempio 1, se  $|f_n(x)| \leq g$  q.o. su  $\mathbb{R}$ ,  $g \notin L^1(\mathbb{R})$
- È un teorema di passaggio al limite sotto integrale.

$$|f_n - f| \rightarrow 0 \text{ su } E \implies \int_E |f_n - f| \rightarrow 0$$

$\implies$  il limite degli integrali  $\equiv$  l'integrale del limite.

### **Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi)**

Sia  $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$ , supponiamo che:

$$(**) f_n \geq 0 \text{ q.o. su } E, f_{n+1} \geq f_n \text{ q.o. su } E$$

Allora

$$\int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n$$

### **Osservazioni**

- Il teorema si applica anche se  $f_n \leq 0$  decrescente, basta considerare  $g_n = -f_n \geq 0$

$$\text{B.L. a } g_n \implies \int_E \lim g_n = \lim \int_E g_n = \int_E \lim(-f_n) = \lim \int_E (-f_n)$$

- Può valere come uguaglianza  $+\infty = +\infty$

### **12.0.1 Integrali multipli**

#### **Teorema di Fubini**

Sia  $f$  integrabile secondo Lebesgue, su  $I = I_1 \times I_2$  ( $I_1 \subseteq \mathbb{R}^m, I_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ )

Allora:

1. Per q.o.  $x_1 \in I_1$ ,  $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  è L-integrabile su  $I_2$
2.  $x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2$  L-integrabile su  $I_1$
3.  $\int_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{I_1} (\int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2) dx_1$

**Osservazione:** Si può scambiare il ruolo delle variabili.

$$\int_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{I_1} \left( \int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{I_2} \left( \int_{I_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

**Teorema di Tonelli**

Sia  $f \geq 0$  misurabile sul precedente  $I = I_1 \times I_2$ .

Supponiamo che:

- Per q.o.  $x_1 \in I_1$ ,  $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  è L-integrabile su  $I_2$
- $x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2$  L-integrabile su  $I_1$

Allora:  $f$  L-integrabile su  $I_1 \times I_2$  (e quindi per Fubini  $\int_I f = \int_{I_1} \int_{I_2} f$ )

**Osservazione:** Se ho una  $f$  che cambia segno, posso provare ad applicare Tonelli a  $|f|$ : se  $|f|$  soddisfa 1) 2), Tonelli  $\implies |f|$  L-integrabile  $\implies f$  L-integrabile  $\implies$  posso applicare Fubini.

**12.0.2 Spazi di Lebesgue (o spazi  $L^p$ )**

**Definizione:**  $p \in [1, +\infty)$ ,  $L^p(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : |f|^p \text{ L-integrabile}\} / \sim$ , anch'esso risulta essere uno spazio vettoriale normato (di Banach)

$$\|f\|_p := \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Teorema:**  $(L^p, \|\cdot\|_p)$  è uno spazio di Banach.

- Caso particolarmente importante:  $p = 2$
- Caso limite:  $p = +\infty$
- Definizione e teoremi di completezza
- Criteri di convergenza
- Risultati di confronto
- Approssimazione con funzioni regolari (prodotto di convoluzione)
- Teorema di differenziazione (funzioni assolutamente continue)

Appartenenza a  $L^p$ : verifica dell'integrale

$$f \in L^p(E) \iff \int_E |f|^p < +\infty$$

Convergenza in  $L^p$

$$\{f_n\} \subseteq L^p(E), f \in L^p(E), \left( \int_E |f_n - f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

Candidato limite:  $f$  limite puntuale q.o.

$$\lim_n \int_E |f_n - f|^p = \int_E \lim |f_n - f|^p ?$$

### 12.0.3 Caso limite L infinito

**Definizione:**

$$L^\infty := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili} : \text{ess-sup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty\} / \sim$$

$$\sup_{x \in E} |f(x)| := \min\{M : |f(x)| \leq M \ \forall x \in E\}$$

$$\text{ess-sup}_{x \in E} |f(x)| := \min\{M : |f(x)| \leq M \text{ q.o. } x \in E\}$$

**Teorema:**  $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach

**Osservazioni**

$$f \in L^\infty(E) \iff \text{ess-sup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty$$

Convergenza

$$\{f_n\} \subseteq L^\infty(E), \ f \in L^\infty(E) : \text{ess-sup}_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

Dunque convergenza uniforme a meno di un insieme di misura nulla.

**Esempi** di funzioni in  $L^\infty(\mathbb{R})$

$$f(x) = c > 0, \ \|f\|_\infty = c$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{N} \\ n & x = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**Osservazione:** Se  $f \in L^p(E)$ ,  $\forall p \in [1, +\infty]$

$$\implies \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Analogo in  $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

## 12.1 Risultati di confronto

$p \leq q, p, q \in [1, +\infty] \implies L^p(E) \subseteq$  oppure  $\supseteq L^q(E)$ ?

In generale no

**Controesempio 1:**  $L^1(0, +\infty), L^2(0, +\infty), L^\infty(0, +\infty)$

$$f(x) = 1, \text{ ess-sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1, \int_{\mathbb{R}_+} |f| = \int_{\mathbb{R}_+} |f|^2 = +\infty$$

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^1(\mathbb{R}_+), f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$$

**Controesempio 2:**

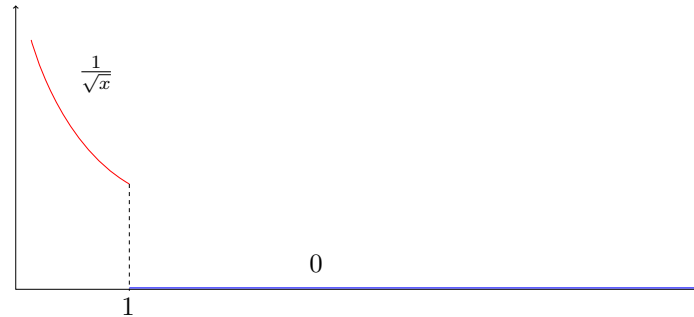


Figura 7: Controesempio 2

$$\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < +\infty, \text{ ess-sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = +\infty = \int_0^{+\infty} |f|^2$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+), f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$$

**Controesempio 3:** Si ricava in modo immediato che

$$f \in L^2(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+), f \notin L^1(\mathbb{R}_+)$$



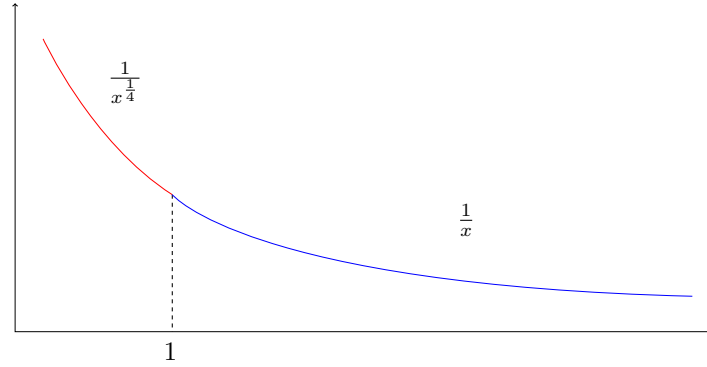


Figura 8: Controesempio 3

### 12.1.1 Disuguaglianza di Holder

Sia  $E$  misurabile  $\subseteq \mathbb{R}^n$  qualsiasi, e  $p \in [1, +\infty]$ .

Siano  $f \in L^p(E)$ ,  $g \in L^{p'}(E)$ , con  $p' :=$  esponente coniugato di  $p$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Con la convenzione  $\frac{1}{\infty} = 0$

**Disuguaglianza di Holder:** Sia  $f \in L^p(E)$ ,  $g \in L^{p'}(E)$

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

### 12.1.2 Conseguenze di Holder sul confronto tra i vari spazi

#### Proprietà di immersione (1)

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $m(E) < +\infty$  e sia  $q \geq p$ , allora  $L^q(E) \subseteq L^p(E)$ , e

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{qp}} \|f\|_{L^q(E)} \quad \forall f \in L^q(E)$$

In particolare se  $q = +\infty$  ho che  $\forall p \in [1, +\infty)$ ,  $L^\infty(E) \subseteq L^p(E)$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Infatti

$$\int_E |f|^p \leq \int_E \text{ess-sup}_{x \in E} |f|^p = m(E) \cdot (\text{ess-sup}_{x \in E} |f|)^p$$

Elevando a  $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_p = \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (m(E))^{\frac{1}{p}} \text{ess-sup}_{x \in E} |f| = m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

### Dimostrazione di (1) a partire da Holder

Suppongo  $f \in L^q(E)$ ,  $\implies f \in L^{\frac{q}{p}}$

$$\int_E |f|^p = \int_E |f|^p \chi_E \leq \|f^p\|_{L^{\frac{q}{p}}} \cdot \|\chi_E\|_{L^{(q/p)'}}$$

- $f \in L^{q/p}$  infatti
- $\chi_E \in L^{(q/p)'} \text{ infatti}$

$$\int_E |\chi_E|^{(q/p)'} = \left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{q}{q-p}$$

$$\| |f|^p \|_{L^{q/p}} = \left( \int_E |f|^q \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\|\chi_E\|_{L^{(q/p)'}} = \left( \int_E |\chi_E|^{(\frac{q}{p})'} \right)^{\frac{1}{p'}} = m(E)^{\frac{q-p}{q}}$$

Quindi

$$\int_E |f|^p \leq m(E)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left( \int_E |f|^q \right)^{\frac{p}{q}}$$

Elevando tutto alla  $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|f\|_{L^q(E)}$$

### Proprietà di interpolazione (2)

Se  $f \in L^p(E) \cap L^q(E)$ , con  $p \leq q \implies f \in L^r(E) \forall r \in [p, q]$  e

$$\|f\|_{L^r(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)}^\alpha \cdot \|f\|_{L^q(E)}^{1-\alpha}$$

Dove  $\alpha \in (0, 1)$  tale che  $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$

**Esempio:** Se  $f \in L^1(E) \cap L^\infty(E) \implies f \in L^r(E) \forall r \in [1, +\infty]$

## 12.2 Approssimazione con funzioni regolari

### Teorema di approssimazione con funzioni regolari

Sia  $p \in [1, +\infty)$ , e sia  $E$  misurabile in  $\mathbb{R}^n$

$C_0^\infty(E)$  è un sottospazio *denso* in  $L^p(E)$

$C_0^\infty(E) := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^\infty \text{ e aventi supporto compatto in } E\}$

Ovvero

$$\forall f \in L^p(E) \exists \{f_n\} \subseteq C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall f \in L^p(E), \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|\varphi - f\|_{L^p} < \varepsilon$$

**Osservazione:** Falso nel caso  $p = +\infty$

## 12.3 Supporto e Classe $C_0$

Ovvero:

$$\forall f \in L^p(E) \exists \{\varphi_n\} \subseteq C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|\varphi_n - f\| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall f \in L^p(E), \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$$

Falso nel caso  $p = \infty$

**Definizione:** Data  $\varphi \in C^\infty(E)$  il supporto di  $\varphi$  è

$$\overline{\{x \in E : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Un insieme  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  è compatto se e solo se è limitato e chiuso

$C_0^\infty(E) := \{\varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ derivabili infinite volte tali che } \text{supp}(\varphi) \text{ è un sottoinsieme compatto di } E\}$

## 12.4 Prodotto di convoluzione

**Osservazione:**  $f, g \in L^1(E) \not\Rightarrow f \cdot g \in L^1(E)$

Nel caso  $E = \mathbb{R}$  si può definire un prodotto che rimanga interno a  $L^1(\mathbb{R})$

### Proposizione 1

Siano  $f, g(x) \in L^1(\mathbb{R})$  Si definisce prodotto di convoluzione

$$f * g := \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y)dy$$

1.  $f * g$  esiste finito per q.o.  $x \in \mathbb{R}$ , ovvero q.o.  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto f(x-y)g(y)$  è integrabile su  $\mathbb{R}$
2.  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$
3.  $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$

### Dimostrazione

Consideriamo  $H(x, y) := f(x-y)g(y)$ , a priori non sappiamo se  $H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$ , dunque non è possibile applicare direttamente Fubini.

Quindi consideriamo  $|H| \geq 0$  e applichiamo il teorema di Tonelli.

Verificando le ipotesi:

- Integro prima in  $dx$

$$\int_{\mathbb{R}_x} |H(x, y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}_x} |f(x, y)| dx$$

Con la sostituzione  $z = x - y$

$$= |g(y)| \int_{\mathbb{R}_z} |f(z)| dz = |g(y)| \cdot \|f\|_1 < +\infty$$

- Integro in dy

$$\int_{\mathbb{R}_y} \left[ \int_{\mathbb{R}_x} |H(x, y)| dx \right] dy = \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)| dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty$$

Dunque per Tonelli  $|H| \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y) \implies H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$

A questo punto posso applicare Fubini ad  $H$

Dunque per q.o.  $x, y \mapsto H(x, y) = f(x, y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}_y)$

**Dimostrazione 3 (che implica 2)**

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}_x} |f * g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}_x} \left| \int_{\mathbb{R}_y} f(x - y)g(y) dy \right| dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_x} \int_{\mathbb{R}_y} |f(x - y)| |g(y)| dy dx \leq \int_{\mathbb{R}_y} \int_{\mathbb{R}_x} |f(x - y)| |g(y)| dy dx \end{aligned}$$

(Per Fubini)

$$= \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)| \int_{\mathbb{R}_x} |f(x - y)| dx dy = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)| dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

#### Osservazione

- vale la proposizione 1 anche su  $\mathbb{R}^n$
- $f * g = g * f$
- le funzioni devono essere definite su tutto lo spazio

**Estensione:**  $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^p(\mathbb{R}) \implies$

1.  $f * g(x)$  esiste per q.o.  $x$
2.  $f * g \in L^p(\mathbb{R})$
3.  $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

$$H(x, y) = |f(x - y)|^p |g(y)|^p$$

#### Proposizione 2

Siano  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) (\subseteq L^1(\mathbb{R}))$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , allora:

1.  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$
2.  $(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g \quad \forall k$

Idea della dimostrazione:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f(x - y)g(y) dy$$

$$(f * g)'(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f'(x - y)g(y) dy$$

**Osservazione 1:** Vale con  $k$  al posto di  $\infty$

**Osservazione 2:** In generale nelle ip. della Prop.2  $f * g$  non è a supporto

compatto.

---

**Idea della dim. del teorema di approssimazione di funzioni  $L^p$  con funzioni regolari**

Prendiamo  $p = 1$ , data  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , vogliamo costruire  $\varphi_n \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R})$  tale che  $\varphi_n \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R})$ . Prendiamo

$$f_n := f * \rho_n$$

Dove  $\rho_n$  successione di mollificatori

$\rho_n(x) = n\rho(nx)$  dove  $\rho$  è un nucleo di convoluzione

- $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\text{supp}(\rho) \subseteq [-1, 1]$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$
- $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\rho_n \geq 0$ ,  $\text{supp}(\rho_n) \subseteq [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) dx = 1$

Si può dimostrare usando i teoremi di convergenza dominata che  $\varphi_n \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Osservazione:** Per guadagnare anche il supporto compatto, occorre prima "trovare"  $f$ , cioè considerare

$$f_k = f \cdot \chi_{[-k, k]} = \begin{cases} f & \text{se } x \in [-k, k] \\ 0 & \text{se } x \notin [-k, k] \end{cases}$$

Approssimo  $f$  per convoluzione:

$$f_k * \rho_n \in C_0^\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_k \\ \varphi_n = f_{k(n)} * \rho_n$$

## 12.5 Teorema fondamentale del calcolo

**Teorema di differenziazione nella teoria di Lebesgue**

Sia  $f \in L^1([a, b])$ , sia  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ , essa è derivabile q.o. su  $[a, b]$  e

$$F'(x) = f(x) \text{ per q.o. } x \in (a, b)$$

Esempio:  $f(x) = \text{sign}(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

**Definizione:** Diciamo che  $F \in \text{A.C.}([a, b])$ , ovvero lo spazio delle funzioni assolutamente continue su  $[a, b]$  se  $\exists f \in L^1([a, b])$  tale che

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

**Osservazione 1:** Tale spazio è vettoriale (per la linearità della derivata e dell'integrale).

**Osservazione 2:**  $F \in \text{AC}([a, b]) \implies$

$$F(b) - F(a) = \left[ \int_a^b f(t) dt + c \right] - \left[ \int_a^a f + c \right] = \int_a^b f(t) dt$$

**Osservazione 3:**  $F \in AC([a, b]), F' = 0$  q.o. su  $[a, b] \implies F = c \forall x \in [a, b]$

Questa implicazione è falsa se togliamo l'ipotesi che  $F \in AC([a, b])$

Esistono funzioni (non in  $AC([a, b])$ ) che sono derivabili q.o. con derivata prima nulla q.o. ma non costanti.

**Esempio:** una funzione derivabile  $f$  continua con  $f' = 0$  q.o. su  $(0, 1)$  ma  $f$  non costante (scala di Cantor).

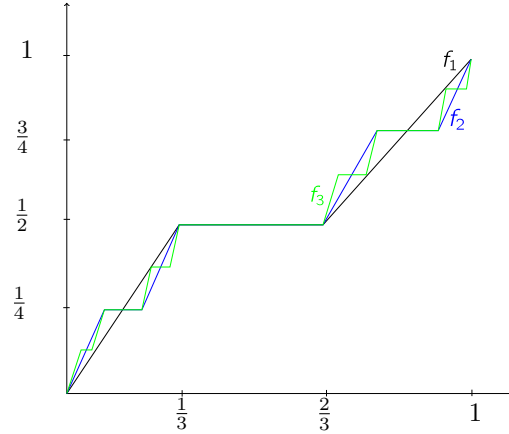


Figura 9: Scala di Cantor

La successione  $\{f_n\} \subseteq C^0([0, 1])$  risulta di Cauchy in  $\|\cdot\|_\infty$ .

Poiché  $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach:

$$\exists f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in C^0([0, 1])$$

$f(0) = 0, f(1) = 1$ , con  $f' = 0$  q.o. su  $(0, 1)$

**Proposizione (caratterizzazione puntuale di AC)**

$F \in AC([a, b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $\forall$  famiglia  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N}$

di intervalli a 2 a 2 disgiunti  $\subseteq (a, b)$  con

$$\sum_{k=1}^N |y_k - x_k| < \delta, \text{ si ha } \sum_{k=1}^N |F(x_k) - F(y_i)| < \varepsilon$$

**Osservazione:** Per  $N = 1$  si ha continuità uniforme  
 $\implies AC([a, b]) \subseteq \{\text{funzioni uniformemente continue su } [a, b]\}$

**Conseguenze della proposizione**

- $F, G \in AC([a, b]) \implies F, G \in AC([a, b])$
- $F, G \in AC([a, b]) \implies$

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b (F \cdot G)'(t) dt = \int_a^b (F'G + FG') dt$$

Ovvero

$$\int_a^b fG = - \int_a^b Fg + F \cdot G|_a^b$$

$\implies$  vale in AC la formula di integrazione per parti.

## 13 Operatori lineari tra spazi vettoriali normati

**Definizione:** Siano  $(V, \|\cdot\|_V)$  e  $(W, \|\cdot\|_W)$  due spazi vettoriali normati. Un operatore lineare da  $V$  in  $W$  è una funzione  $T : V \rightarrow W$  tale che

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

### Esempi

1)  $V = W = \mathbb{R}^n$ ,  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$T(v) = A \cdot v, \text{ con } A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$$

2)  $V = C^0([a, b])$ , fisso  $x_0 \in (a, b)$ ,  $W = \mathbb{R}$

$$T : V \rightarrow W \text{ definita da } T(f) = f(x_0)$$

3)  $V = C^1([a, b])$ ,  $W = C^0([a, b])$

$$T : V \rightarrow W \text{ definita da } T(f) = f'$$

**Osservazione:**  $T$  operatore lineare  $\implies T(0) = 0$

**Definizione:**  $T : V \rightarrow W$  op. lineare, si dice *continuo* se,  $\forall v \in V$ ,  $T$  è continuo in  $v$ , ovvero:

$$v_n \rightarrow v \implies T(v_n) \rightarrow T(v)$$

Rispettivamente nella norma di  $V$  e  $W$ .

**Osservazione:** Sia  $T : V \rightarrow W$  op. lineare, allora  $T$  è continuo su  $V \iff T$  è continuo in  $v = 0$ .

### Dimostrazione

( $\implies$ ) è immediata

( $\impliedby$ ) Verifichiamo che se la proprietà vale per  $v = 0$ , vale per  $v$  qualsiasi.

Sia  $v$  qualsiasi, e sia  $v_n \rightarrow v$ ; considero  $v_n - v \rightarrow 0$ , quindi, per ipotesi  $T(v_n - v) \rightarrow T(0)$

Ovvero  $T(v_n) - T(v) \rightarrow 0$ , cioè  $T(v_n) \rightarrow T(v)$ .

**Definizione:** Sia  $T$  op. lineare:  $(V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$ .

Si dice che  $T$  è limitato se:

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \|T(v)\|_W \leq M\|v\|_V \quad \forall v \in V$$

ovvero

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M$$

**Esempi:**

1)  $T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  definito da  $T(v) = v_0 \cdot v$  operatore lineare.

$T$  è limitato,  $M = \|v_0\|$

2)  $T : (C^1([a, b]), \|\cdot\|_{C^1}) \rightarrow (C^0([a, b]), \|\cdot\|_{C^0})$ ,  $T(f) = f'$  op. lineare.

$T$  è limitato con la scelta  $M = 1$

3)  $T : (L^2(0, 1), \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $T(f) = \int_0^1 f_0 \cdot f dx$  dove  $f_0 \in L^2(0, 1)$

$T$  è limitato con la scelta  $M = \|f_0\|_2$  (Tramite disuguaglianza di Holder)

**Osservazione:** Considerando  $T : (L^p(0, 1), \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  definito da  $T(f) = \int_0^1 f_0 f dx$  questo è lineare continuo prendendo  $f_0 \in L^{p'}(0, 1)$ .

**Proposizione:** Sia  $T : (V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$  lineare. Allora

$$T \text{ continuo} \iff T \text{ limitato}$$

**Dimostrazione**

( $\Leftarrow$ ) Supposto  $T$  limitato, basta mostrare che  $T$  è continuo in 0, ovvero: se  $v_n \rightarrow 0$ , allora  $T(v_n) \rightarrow T(0) = 0$

$$\|T(v_n)\|_W \leq M\|v_n\|_V \rightarrow 0$$

( $\Rightarrow$ ) Supposto  $T$  non limitato mostriamo  $T$  non continuo

$$\sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} = +\infty \implies \exists \{v_n\} \subseteq V \setminus \{0\} : \frac{\|T(v_n)\|_W}{\|v_n\|_V} \rightarrow +\infty$$

ovvero, siccome  $T$  è lineare:

$$\left\| T\left(\frac{v_n}{\|v_n\|_V}\right) \right\|_W \rightarrow +\infty$$

Quindi se considero  $u_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_V}$ , ha che

$$\begin{cases} \|u_n\|_V = 1 \\ \|T(u_n)\|_W \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Posso costruire una successione  $y_n$  tale che  $y_n \rightarrow 0$  ma  $T(y_n) \not\rightarrow 0$  Ponendo

$$y_n = \frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}$$



- $y_n \rightarrow 0$  poiché

$$\|y_n\|_V = \left\| \frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W} \right\|_V \rightarrow 0$$

- $T(y_n) = 1$  perché

$$T(y_n) = T\left(\frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}\right) = \frac{T(u_n)}{\|T(u_n)\|_W} \not\rightarrow 0$$

**Definizione:** Dati  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  spazi normati

$$\mathcal{L}(V, W) := \{\text{op. lineari limitati da } V \text{ in } W\}$$

È uno spazio vettoriale munito delle operazioni naturali

È possibile introdurre su questo spazio una norma, ponendo

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V, W)} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

ovvero, per definizione, la più piccola costante  $M$  tale che  $\|T(v)\|_W \leq M\|v\|_V \forall v \in V$ .

**Osservazione:** Si può verificare che quella definita sopra è effettivamente una norma.

In particolare

**Definizione:** Quando  $W = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$\mathcal{L}(V, W) = V' \text{ spazio duale di } V$$

$$\|T\|_{V'} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|T(v)|_{\mathbb{R}}}{\|v\|_V}$$

**Esempi:** Vedere i casi 1) e 3)

## 14 Distribuzioni

**Definizione:** Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\text{funzioni } C^\infty \text{ su } \Omega \text{ con supporto compatto in } \Omega\}$$

È uno spazio vettoriale

Muniamo  $C_0^\infty$  di una **convergenza**

**Definizione:** Sia  $\{\varphi_h\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ . Diciamo che

$$\varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } C_0^\infty(\Omega) \text{ se}$$

1.  $\exists K$  compatto, indipendente da  $h$ , tale che  $\text{supp}(\varphi_h) \subseteq K \forall h \gg \nu$
2.  $\varphi_h \rightarrow 0$  uniformemente su  $K$  con tutte le derivate  $\forall \alpha$  multiindice  $D^\alpha \varphi_h \rightarrow 0$  unif. su  $K$

**Definizione:** Lo spazio  $C_0^\infty(\Omega)$  munito della convergenza definita sopra si indica con  $\mathcal{D}(\Omega)$  e si chiama *spazio delle funzioni test*

**Definizione:** Lo spazio delle distribuzioni su  $\Omega$ , che si indica con  $\mathcal{D}'(\Omega)$  è lo spazio degli operatori  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  lineari e continui rispetto alla convergenza introdotta su  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

Ovvero, una distribuzione è un operatore  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- $T$  lineare
- $T$  continuo ( $\varphi_h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega) \implies T(\varphi_h) \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$ )

### Esempi

1. Sia  $u \in L^1(\Omega)$ , ad  $u$  posso associare una distribuzione  $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_u(\varphi) := \int_{\Omega} u \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

È ben definito:

$$\left| \int_{\Omega} u \varphi \right| \leq \int_{\Omega} |u \varphi| \leq \int_K \max |\varphi| |u| \leq \max_K |\varphi| \int_K |u|$$

È lineare:

$$T_u(\alpha \varphi + \beta \psi) = \int_{\Omega} u(\alpha \varphi + \beta \psi) = \alpha \int_{\Omega} u \varphi + \beta \int_{\Omega} u \psi = \alpha T_u(\varphi) + \beta T_u(\psi)$$

È continuo:

$$\{\varphi_h\} \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \implies T_u(\varphi_h) \rightarrow 0$$

Poiché, sia  $\{\varphi_h\} \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$

$$|T_u(\varphi_h)| = \left| \int_{\Omega} u \varphi_h \right| \leq \max_K |\varphi_h| \cdot \int_K |u| \rightarrow 0$$

### Osservazioni sull'esempio

L'associazione tra  $u$ ,  $T_u$  è iniettiva su  $L^1(\Omega)$

Se  $u_1 = u_2$  q.o. su  $\Omega \implies T_{u_1} = T_{u_2}$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  poiché  $T_{u_1}(\varphi) = T_{u_2}(\varphi)$

Si può dimostrare che  $T_{u_1} = T_{u_2}$  in  $\mathcal{D}'(\Omega) \implies u_1 = u_2$  q.o. su  $\Omega$  (\*)

$$\int_{\Omega} u_1 \varphi = \int_{\Omega} u_2 \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega$$

$$\int_{\Omega} (u_1 - u_2) \varphi = 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega$$

**Notazione:** Invece di  $T_u(\varphi)$  si scrive spesso  $\langle u, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))}$

Per definire  $T_u$ , basta una condizione più debole:

$$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_K |u| < +\infty \forall K \text{ compatto } \subseteq \Omega\}$$

**Esempio:**  $\Omega = (0, 1)$ ,  $u(x) = \frac{1}{x} \notin L^1(\Omega)$  ma  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

In particolare, possiamo associare una distribuzione a qualsiasi  $u \in L^p(\Omega)$  con  $p \in [1, +\infty]$

Infatti  $L^p(\Omega) \not\subseteq L^1(\Omega)$ , ma

$$L^p(\Omega) \subseteq L^p_{\text{loc}}(\Omega), \forall p \in [1, +\infty] :$$

$$u \in L^p(\Omega) \implies u \in L^p(K) \forall K \subset\subset \Omega$$

Poiché  $|K| < +\infty$ .

$$\implies u \in L^1(K) \forall K \subset\subset \Omega \implies u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

Tutte le funzioni  $u \in L^p(\Omega)$  possono essere viste come distribuzioni.

$$u \in L^p(\Omega) \mapsto T_u$$

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} := \int_{\Omega} u \varphi dx$$

Essendo  $\mathcal{D}'$  vettoriale

$$(T_1 + T_2)(\varphi) := T_1(\varphi) + T_2(\varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$(\lambda T) := \lambda T(\varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

## 14.1 Convergenza

**Definizione:**

$$\{T_h\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega), T_h \xrightarrow{\text{in } \mathcal{D}'(\Omega)} 0 \text{ se } T_h(\varphi) \rightarrow 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$T_h \rightarrow T \text{ se } T_h(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Esempio:**  $T_h = T_{u_h}$ , con  $u_h \subseteq L^1(\Omega)$

$$u_h \rightarrow 0 \text{ in } L^1(\Omega) \implies T_{u_h} \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Dato che

$$|T_{u_h}(\varphi)| = \left| \int_{\Omega} u_h \varphi \right| \leq \int_{K=\text{supp}\varphi} |u_h| |\varphi| \leq \max_K |\varphi| \cdot \int_K |u_h| \rightarrow 0$$

## 14.2 Delta di Dirac

$$\{u_h\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$$

Questa successione non converge in  $L^1(\mathbb{R})$

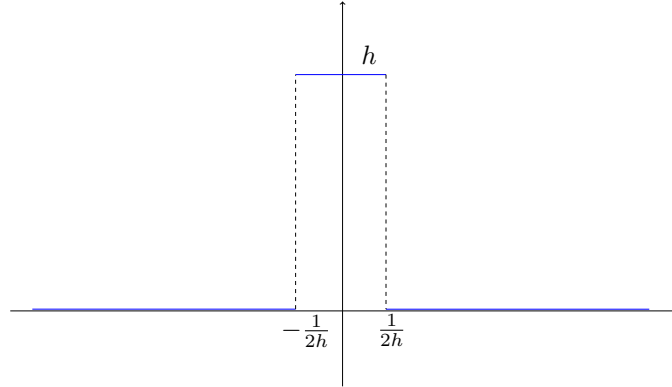


Figura 10: Delta di Dirac

$u_h \rightarrow 0$  q.o. su  $\mathbb{R} \implies$  se  $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} u_h$  in  $L^1(\mathbb{R})$  allora  $\lim_{h \rightarrow +\infty} u_h = 0$ .  
Ma  $\lim_{h \rightarrow +\infty} u_h \neq 0$  in  $L^1(\mathbb{R})$  perché

$$\|u_h\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} h = 1$$

Converge però in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle u_h, \varphi \rangle = T_{u_h}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} u_h \varphi = h \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} \varphi \rightarrow \varphi(0)$$

**Definizione:**  $\delta_0$  delta di Dirac in 0

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle := \varphi(0)$$

**Osservazioni:**

- Se  $u_h = h \cdot \chi_{[-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}]}$ , allora  $u_h \rightarrow \delta_0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- Verifica che  $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(i) lineare:  $\delta_0(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\delta_0(\varphi) + \beta\delta_0(\psi)$ ?

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(0) = \alpha\varphi(0) + \beta\psi(0)$$

(ii) continuo:  $\varphi_h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \delta_0(\varphi_h) \rightarrow 0$

vero per la definizione di convergenza in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp}(\varphi_h) \subseteq K$  compatto,  $\varphi_h \rightarrow 0$  uniformemente.

### 14.2.1 Ovvie generalizzazioni

Punto generico  $x_0$

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$$

Caso n-dimensionale,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0), \quad \delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

### 14.2.2 Commento sulla Delta

$\delta_0$  non è associata ad alcuna funzione di  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

**Dimostrazione**

Supponiamo per assurdo  $\delta_0 = T_u$ , con  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

In particolare, posso prendere  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi = \varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Ricordando l'osservazione sull'esempio

$$0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \cdot \varphi$$

Applicando tale proprietà si avrà

$$u = 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies u = 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R}$$

$$\implies \int_{\mathbb{R}} u \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Assurdo.

### 14.2.3 Derivazione di distribuzioni

**Definizione:**  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$

Data  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , definisco  $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$  come:

$$\langle T', \varphi \rangle := - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$T'$  è una distribuzione

(i) è lineare:

$$\begin{aligned} \langle T', \alpha\varphi + \beta\psi \rangle &= - \langle T, \alpha\varphi' + \beta\psi' \rangle \\ &= -\alpha \langle T, \varphi' \rangle - \beta \langle T, \psi' \rangle = +\alpha \langle T', \varphi \rangle + \beta \langle T', \psi \rangle \end{aligned}$$

(ii) è continuo

$$\varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \implies \langle T', \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

Infatti  $\varphi_h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega) \implies \varphi'_h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

Questo perché  $\exists K$  tale che  $\text{supp} \varphi'_h \subset K \forall h$  e  $\varphi'_h \rightarrow 0$  uniformemente su  $K$  con tutte le derivate.

Quindi  $\langle T, \varphi'_h \rangle \rightarrow 0$  perché  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

#### 14.2.4 Motivo della definizione di derivata

Considerando il caso  $T = T_u$  con  $u \in C^1(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

Si avrà in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  che  $(T_u)' = T_{u'}$

**Dimostrazione**

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle = -\int_{\Omega} u \varphi'$$

$$\langle T_{u'}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u' \varphi$$

Integrando per parti si avrà

$$\int_{\Omega} u' \varphi = u \varphi - \int_{\Omega} u \varphi'$$

Essendo  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u \varphi|_a^b = 0$  (dove  $a, b$  estremi di  $\Omega$ ) Si avrà:

$$\int_{\Omega} u' \varphi = -\int_{\Omega} u \varphi'$$

### 15 Esempi di distribuzioni

1.  $T = T_u$  con  $u \in C^1(\Omega) \implies (T_u)' = T_{u'}$
2.  $T = T_u$  con  $u(x) = |x|$  su  $\Omega = (-1, 1)$

$$\begin{aligned} \langle (T_u)', \varphi \rangle &= -\langle T_u, \varphi' \rangle = -\int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx \\ &= \int_0^1 \varphi(x) dx + x \varphi \Big|_0^1 - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + x \varphi(x) \Big|_{-1}^0 = \int_{-1}^1 \varphi(x) \cdot \text{sign}(x) dx \\ &\implies (T_{|x|})' = T_{\text{sign}(x)} \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \end{aligned}$$

**Notazione:**  $(|x|)' = \text{sign}(x)$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$

Più in generale: se  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$   $u' = v$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , significa  $(T_u)' = T_v$  ovvero

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle (T_u)', \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle = \langle T_v, \varphi \rangle$$

$$-\int_{\Omega} u \varphi' = \int_{\Omega} v \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

3.  $u(x) = \text{sign}(x)$ ,  $u' = ?$

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \text{sign}(x) \varphi'(x) dx &= -\int_0^1 \varphi' + \int_{-1}^0 \varphi' = -\varphi(1) + 2\varphi(0) - \varphi(-1) = 2\varphi(0) \\ &= 2 \langle \delta_0, \varphi \rangle \end{aligned}$$

4.  $T = \delta_0$   $T' = ?$

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

## 15.1 Generalizzazione

- $n = 1$  Data  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$   $T^{(k)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle := (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$$

**Osservazione:**  $T^{(k)}$  definisce una distribuzione, lineare e continua, infatti se  $\varphi_h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\varphi_h^{(k)} \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega) \implies \langle T, \varphi_h^{(k)} \rangle \rightarrow 0$ .

**Osservazione 2:** se  $T = T_u$  con  $u \in C^k(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega) \implies (T_u)^{(k)} = T_{u^{(k)}}$

**Esempio:**  $u(x) = |x| \implies u'' = 2\delta_0$

- $n \geq 1$  Data  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$   $\forall \alpha$  multiindice

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Osservazione:**  $D^\alpha T$  definiscono delle distribuzioni  $\forall \alpha$

**Osservazione:** Si possono calcolare le derivate di tutti gli ordini, di qualsiasi  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

**Osservazione:** Il risultato non dipende dall'ordine di derivazione

### 15.1.1 Operatori differenziali

Data  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , si possono definire  $\nabla T, \nabla^2 T, \text{rot} T, \dots$

## 16 Spazi di Sobolev

Sono gli spazi dove si trovano le soluzioni di problemi al contorno per P.D.E.

Esempio Equazione di Poisson

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = f & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

**Definizione:** Fissato  $\Omega$  aperto  $\subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $p \in [1, +\infty]$

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

Con  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  intesa nel senso delle distribuzioni

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \iff \exists v_i \in L^p(\Omega) \text{ tali che}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \varphi = \int_{\Omega} v_i \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Esempi** ( $n = 1$ ,  $\Omega = (-1, 1)$ )

- $u \in C_0^1(\Omega) \implies u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$(1) \quad p < +\infty \quad \int_{\Omega} |u|^p < +\infty ; \quad \int_{\Omega} |u'|^p < +\infty$$

$$(2) \quad p = +\infty \quad \text{ess-sup}_{\Omega} |u| < +\infty ; \quad \text{ess-sup}_{\Omega} |u'| < +\infty$$

- $u(x) = \text{sign}(x) \quad u \notin W^{1,2}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u|^2 = \int_{-1}^1 |\text{sign} x|^2 < +\infty \implies u \in L^2(\Omega)$$

$$\text{MA: } u'(x) = 2\delta_0 \notin L^2(\Omega)$$

**Definizione:** Fissato  $\Omega$  aperto  $\subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $p \in [1, +\infty]$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \text{ multiindice con } |\alpha| \leq k\}$$

**Caso particolare**  $p = 2$

$$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$$

**Osservazione:**  $W^{k,p}(\Omega)$  sono spazi vettoriali

**Definizione:** Norma su  $W^{1,p}(\Omega)$  sia  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

**Definizione:** Norma su  $W^{k,p}(\Omega)$  sia  $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_p + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_p$$

**Teorema:** Per ogni  $p \in [1, +\infty]$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$  sono spazi di Banach

**Osservazione:**  $u_h \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  se

$$\begin{aligned} & \|u_h - u\|_{1,p} \rightarrow 0 \\ & = \|u_h - u\|_p + \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{cases} u_h \rightarrow u \text{ in } L^p(\Omega) \\ \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ in } L^p(\Omega) \end{cases}$$



**Definizione**

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \text{chiusura di } \mathcal{D}(\Omega) \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

ovvero

$$\begin{aligned} &= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che } \varphi_n \rightarrow u \text{ in } W^{1,p}\} \\ &= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che } \varphi_n \rightarrow u \text{ in } L^p \text{ e } \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \rightarrow u \text{ in } L^p\} \end{aligned}$$

**Osservazione** Se  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  allora

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff u = 0 \text{ su } \Omega$$

**16.0.1 Disuguaglianza di Poincaré**

**Teorema** Sia  $\Omega$  aperto, limitato di  $\mathbb{R}^n$ . Allora esiste una costante  $C_p = C_p(\Omega)$  tale che, per ogni  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(\Omega) \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Dunque, su  $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{cases} \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p \text{ norma su } W^{1,p}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_p \text{ norma equivalente} \end{cases}$$

**Falso** su  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , verificabile prendendo  $u = 1$

---

**Osservazione** per  $n = 1$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt \implies |u(x)| \leq \int_0^x |u'| \leq \int_0^1 |u'| \leq \left( \int_0^1 |u'|^2 \right)^{1/2}$$

Integrando

$$\|u\|_{L^1(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega)$$

## 17 Spazi di Hilbert

**Definizione:** Sia  $H$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$

Un prodotto scalare su  $H$  è un'applicazione  $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

1.  $(x, x) \geq 0 \ \forall x \in H$  con  $(x, x) = 0 \iff x = 0$  *positività*
2.  $(x, y) = (y, x) \ \forall x, y \in H$  *simmetria*
3.  $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$  *bilinearità*

**Definizione:**  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  è detta *norma associata* (o indotta) dal prodotto scalare

**Esempi**

- $H = \mathbb{R}^n$  ;  $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  ;  $\sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \|x\|_2$  ; ovvero la norma euclidea
- $H = L^2(\Omega)$   $(f, g) = \int_{\Omega} f g$  ;  $\sqrt{(f, f)} = (\int_{\Omega} f^2)^{1/2} = \|f\|_2$
- $H = W^{1,2}(\Omega)$  ;  $(f, g) := \int_{\Omega} f g + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} = \int_{\Omega} f g + \nabla f \cdot \nabla g$

$$\sqrt{(f, f)} = \left( \int_{\Omega} f^2 + |\nabla f|^2 \right)^{1/2} \simeq \|f\|_{H^1}$$

norma equivalente alla norma di  $H^1$

### 17.1 Disuguaglianza di Cauchy Schwartz

Se  $(\cdot, \cdot)$  è un prodotto scalare su  $H$ , allora

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \ \forall x, y \in H$$

Inoltre vale  $\iff x = \lambda y$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$

**Dimostrazione**

$$\forall t \in \mathbb{R} \ 0 \leq (x - ty, x - ty) = (x, x) - 2t(x, y) + t^2(y, y)$$

Dunque

$$0 \leq \|x\|^2 - 2t(x, y) + t^2\|y\|^2 \implies \Delta \leq 0$$

$$\Delta = 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

$$\implies |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Se vale  $\implies \Delta = 0 \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x - \lambda y, x - \lambda y) = 0 \implies x - \lambda y = 0$  (Viceversa se  $x = \lambda y$ )

**Proposizione:** Se  $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  è un prodotto scalare,

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} \text{ è una norma}$$

**Dimostrazione**

- $\|x\| \geq 0$  con  $= \iff x = 0$  vera per la prop. (1)
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2}$   
 $\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|$

### 17.1.1 Legge del parallelogramma

**Teorema:** Sia  $H$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)$  e sia  $\|\cdot\|$  la norma indotta da esso. Allora

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$$

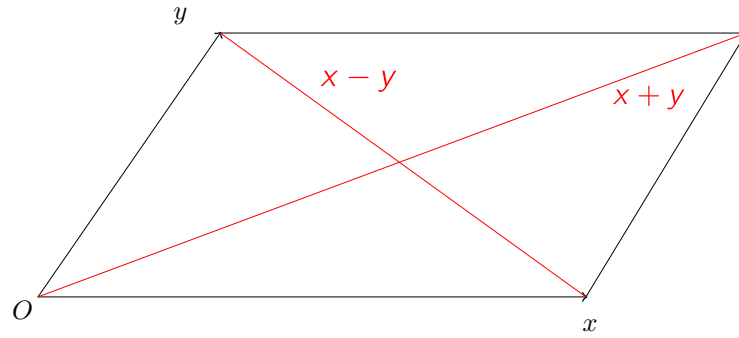


Figura 11: Legge del parallelogramma in  $\mathbb{R}^2$

#### Dimostrazione

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

**Osservazione:** Può servire a verificare se una norma proviene o meno da un prodotto scalare.

Le norme di  $\mathbb{R}^n, L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega)$  con  $p \neq 2$  non provengono da un prodotto scalare.

**Esempio:**  $\Omega = (0, 1)$  in  $L^p(0, 1)$  con  $p \neq 2$ , la norma non proviene da un prodotto scalare

Fisso  $t \in (0, 1)$ , considero le funzioni

- $f = \chi_{(0, t)}$
- $g = \chi_{(t, 1)}$

$$\begin{aligned}\|f\|_p &= \left( \int_0^1 |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_0^t 1 \right)^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{1}{p}} \\ \|g\|_p &= \left( \int_0^1 |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_t^1 1 \right)^{\frac{1}{p}} = (1-t)^{\frac{1}{p}} \\ \|f+g\|_p &= 1 \\ \|f-g\|_p &= 1\end{aligned}$$

L'identità del parallelogramma diventa:

$$2 = 2t^{\frac{2}{p}} + 2(1-t)^{\frac{2}{p}}$$

$$1 = t^{\frac{2}{p}} + (1-t)^{\frac{2}{p}}$$

Valida  $\iff p = 2$

**Definizione:** Uno *spazio di Hilbert* è uno spazio di Banach in cui la norma proviene da un prodotto scalare.

**Esempi:** sono spazi di Hilbert

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$
- $L^2(\Omega)$
- $H^1(\Omega)$

Non sono di Hilbert

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  con  $p \neq 2$
- $L^p(\Omega)$  con  $p \neq 2$
- $W^{1,p}(\Omega)$  con  $p \neq 2$
- $C^0([a,b])$ ,  $\|f\|_2 = (\int_a^b |f|^2)^{1/2}$  la norma viene da un prodotto scalare MA non è uno spazio di Banach, dunque non è uno spazio di Hilbert

### 17.1.2 Teorema di proiezione su un convesso chiuso

Un insieme  $K$  si dice *convesso* se  $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in (0, 1) \implies \lambda x + (1-\lambda)y \in K$

Un insieme  $K$  si dice *chiuso* se  $\forall \{x_n\} \subseteq K : x_n \rightarrow x \in H \implies x \in K$

**Teorema:** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert, e sia  $K \subseteq H$  un convesso chiuso  
Allora  $\forall f \in H$  esiste unico  $u \in K$  tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

Inoltre:  $u = P_K f \iff (f - u, v - u) \leq 0 \forall v \in K$

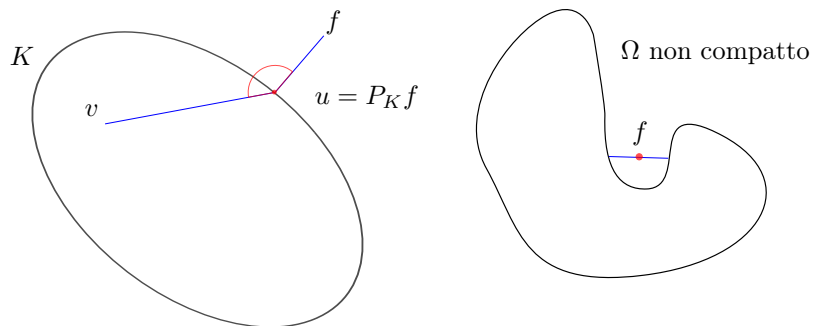


Figura 12: Rappresentazione grafica della proiezione su convesso

**Corollario, Teorema di proiezione su un sottospazio chiuso**

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e  $M$  un sottospazio vettoriale chiuso.

( $M$  è convesso, non è necessariamente chiuso senza ipotesi)

Allora:  $\forall f \in H \exists$  unico  $u = P_M f$  tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in M} \|f - v\|$$

Inoltre

$$u = P_M f \iff (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

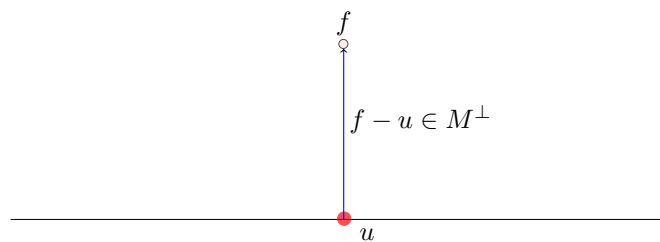


Figura 13: Rappresentazione grafica della proiezione su un sottospazio chiuso

**Definizione:** Se  $(,)$  è un prodotto scalare su  $H$

- $x \perp y \iff (x, y) = 0$  (definizione)
- $M^\perp := \{x \in H : (x, y) = 0 \forall y \in M\}$

**Osservazione:**  $f \perp g$  in  $L^2(0, 1)$  se  $\int_0^1 fg = 0$

**Esempio:**  $M = \{\text{funzioni costanti in } L^2(0, 1)\}$

$$\begin{aligned} M^\perp &= \{f \in L^2(0, 1) : \int_0^1 fc = 0 \forall c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f \in L^2(0, 1) : \int_0^1 f = 0\} \end{aligned}$$

**Osservazione:**

$$x \perp y \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

**Dimostrazione**

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

**Osservazione:**  $M \cap M^\perp = \{0\}$ . Infatti  $x \in M \cap M^\perp \implies (x, x) = 0$  valido  $\iff x = 0$

### Teorema delle proiezioni

Sia  $H$  insieme di Hilbert e  $M$  un sottospazio chiuso.

Allora  $\forall x \in H \exists$  un'unica rappresentazione di  $x$  come:

$$x = y + z \text{ con } y \in M \text{ e } z \in M^\perp$$

Inoltre, le applicazioni  $x \mapsto y = P_M(x)$ ,  $x \mapsto z = P_{M^\perp}(x)$ , sono operatori lineari, limitati, di norma 1.

### Dimostrazione

Basta prendere come  $y = P_M(x)$  (che esiste dal teorema precedente): sappiamo che  $(x - P_M(x), v) = 0 \forall v \in M \implies x - P_M(x) \in M^\perp$ , ovvero  $z := x - y \in M^\perp$ . L'unicità è data da  $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \implies y_1 - y_2 \in M$ ,  $z_2 - z_1 \in M^\perp$  ma  $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$ , dunque per queste ultime due condizioni si avrà  $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0$

### Dimostrazione Linearità

$$x_1 = y_1 + z_1$$

$$x_2 = y_2 + z_2$$

Dunque  $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + z_1 + z_2$ , con  $y_k \in M$ ,  $z_k \in M^\perp$ , per l'unicità  $y_1 + y_2 = P_M(x_1 + x_2)$ ,  $z_1 + z_2 = P_{M^\perp}(x_1 + x_2)$

### Limitatezza

$P_m$  limitato:  $x = y + z = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$$

$$\implies \|P_m(x)\| \leq \|x\| \implies P_M \text{ limitato con norma } \leq 1$$

$\|P_M\| = 1$  : basta prendere  $x \in M \implies x = P_M(x) \implies$  vale l'uguaglianza  $\|P_M(x)\| = \|x\|$

## 17.2 Teoremi di Rappresentazione

### 17.2.1 Teorema di Reisz

**Problema:** Dato  $H$  di Hilbert, caratterizzare  $H'$  (duale di  $H$ ).

$$H' = \{\varphi : H \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineari e continui}\} = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$$

**Osservazione:** Fissato  $u \in H$  possiamo associare ad  $u$  un elemento  $\varphi_u \in H'$

$$\varphi_u(v) : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_u(v) = (u, v) \quad \forall v \in H$$

Verifica che  $\varphi_u \in H'$  :

- lineare:  $\varphi_u(\alpha v_1 + \alpha_2 v_2) = (u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \varphi_u(v_1) + \alpha_2 \varphi_u(v_2)$
- continuo (limitato):  $|\varphi_u(v)| \leq M \|v\|$  valida con  $M = \|u\|$  per la disuguaglianza di Cauchy Schwartz

Inoltre:

$$\|\varphi_u\|_{H'} = \|u\|_H$$

cioè  $M = \|u\|$  è la costante migliore possibile ( $v = u$ )

In conclusione,  $H \subseteq H'$  (immersione isometrica), ovvero la norma si conserva.

**Esempi:**

- $H = \mathbb{R}^n$   $(u, v) = \sum_{k=1}^n u_k v_k$   $\varphi_u(v) = \sum_{k=1}^n u_k v_k$
- $H = L^2(\Omega)$ ,  $(u, v) = \int_{\Omega} uv$ ,  $\varphi_u(v) = \int_{\Omega} uv \quad \forall v \in L^2(\Omega)$
- $H = H^1(\Omega)$ ,  $(u, v) = \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v$

$$\varphi_u(v) = \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

#### Teorema di Riesz

Sia  $H$  spazio di Hilbert e sia  $\varphi \in H'$ .

Allora, esiste unico  $u \in H$  tale che  $\varphi = \varphi_u$  ovvero

$$\varphi(v) = (u, v) \quad \forall v \in H$$

Inoltre

$$\|\varphi\|_{H'} = \|u\|_H$$

Dunque  $H'' = H$ .

### 17.2.2 Forme bilineari

**Definizione:** Sia  $H$  di Hilbert. Una *forma bilineare* su  $H$  è per definizione un'applicazione

$$a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

- $a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v)$

**Esempi:**

- In  $H$  Hilbert qualsiasi  $a(u, v) = (u, v)$
- $H = H^1(\Omega)$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} uv$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$

**Definizione:** Sia  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineare

- $a$  *simmetrica* se

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H$$

- $a$  *continua* se

$$\exists C > 0 \text{ tale che } |a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H$$

- $a$  *coerciva* se

$$\exists \alpha > 0 \text{ tale che } a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

**Esempi:**

1) In  $H$  di Hilbert qualsiasi,  $a(u, v) = (u, v)$  è

- simmetrica (per definizione di prodotto scalare)
- continua (limitata per Cauchy Schwartz)
- coerciva ( $(u, u) = 1 \cdot \|u\|^2$ )

2) In  $H = H_0^1(\Omega)$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ .

- simmetrica
- continua: (tramite Holder)

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \leq \|\nabla v\|_2 \|\nabla u\|_2 \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

- coerciva: (per Poincaré)

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

**Osservazione:**  $a(u, v)$  non sarebbe coerciva su  $H^1(\Omega)$  poiché non vale la disuguaglianza di Poicaré (verificabile con  $u = \text{cost} > 0$ )



### 17.2.3 Teorema di Lax Milgram

#### Teorema di Lax-Milgram

Sia  $H$  Hilbert, e sia  $\varphi' \in H'$

Sia  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  forma bilineare simmetrica, continua e coerciva.

Allora esiste unico  $u \in H$  tale che

$$\varphi(v) = a(u, v) \quad \forall v \in H$$

Inoltre  $u$  è caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$E(v) := \frac{1}{2}a(v, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H$$

si ha

$$\min_{v \in H} E(v) = E(u)$$

#### Esempio ( $\Omega$ limitato)

$H = H_0^1(\Omega)$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ ,  $\varphi(v) = \int_{\Omega} f v$  dove  $f \in L^2(\Omega)$

$$\varphi \in H' : \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \int_{\Omega} |f v| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1}$$

Per Lax-Milgram:  $\exists$  unico  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che  $\varphi(v) = a(u, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Quest'ultima è una formulazione debole del seguente problema:

$$\begin{cases} -\nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Inoltre il teorema dice che  $u$  risolve

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v$$

### 17.2.4 Commenti sulla proprietà variazionale di $u$

$$E(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}a(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - \varphi(u + \varepsilon v)$$

$$= \frac{1}{2}[a(u, u) + 2\varepsilon a(u, v) + \varepsilon^2 a(v, v)] - \varphi(u) - \varepsilon \varphi(v)$$

$$= [\frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u)] + \varepsilon[a(u, v) - \varphi(v)] + \frac{\varepsilon^2}{2}a(u, v)$$

$$\implies E(u + \varepsilon v) - E(u) = \varepsilon[a(u, v) - \varphi(v)] + o(\varepsilon)$$

$$\implies \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E(u + \varepsilon v) - E(u)}{\varepsilon} = a(u, v) - \varphi(v) = 0$$

Se  $a(u, v) = \varphi(v) \forall v \in H$ ,

$$E(u + \varepsilon v) - E(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} a(v, v) \geq 0$$

Quindi  $u$  minimizza  $E$ .

Viceversa, se  $u$  minimizza  $E$  :

$$\begin{aligned} E(u + \varepsilon v) &\geq E(u) \quad \forall v \in H \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \implies a(u, v) - \varphi(v) &= 0 \quad \forall v \in H \end{aligned}$$

## 18 Equazioni alle derivate parziali

### 18.1 Formulazione variazionali di problemi ellittici

$-a\Delta u + cu = f$  in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, limitato e regolare,  $u = u(x_1, \dots, x_n)$

**Ipotesi**

- $a > 0$
- $c \in L^\infty(\Omega)$
- $f(x) \in L^2(\Omega)$

Se  $c = 0$ ,  $a = 1 \implies -\nabla^2 u = f$  (Equazione di Poisson)

**Condizione di Dirichlet (omogenea):**  $u = 0$  su  $\partial\Omega$

**Condizione di Neumann (omogenea):**  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  su  $\partial\Omega$

#### 18.1.1 PDE ellittiche del secondo ordine

ODE lineare del 2° ordine

$$au'' + bu' + cu = f$$

Alle derivate parziali (PDE del 2° ordine),  $u = u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

$$-A(x) \cdot \nabla^2 u(x) + b(x) \cdot \nabla u(x) + cu = f$$

si dice ellittica se  $A$  è definita positiva

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

In particolare se  $A(x) = I$

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) u_{x_i, x_j} = \sum_{i=1}^n u_{x_i, x_i} = \Delta u$$

### 18.1.2 Formulazione variazionale del problema di Dirichlet

$(D)_c$  Trovare  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  tale che:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$(D)_v$  Trovare  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che:

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

**Proposizione (D):** Nelle ipotesi sopra:

1.  $u$  sol. classica  $\implies u$  sol. variazionale
2.  $u$  sol. variazionale,  $c, f$  continue,  $u \in C^2(\overline{\Omega}) \implies u$  sol. classica

### 18.1.3 Formulazione variazionale del problema di Neumann

$(N)_c$  Trovare  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  tale che:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$(N)_v$  Trovare  $u \in H^1(\Omega)$  tale che:

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

**Proposizione (N):** Nelle ipotesi sopra:

1.  $u$  sol. classica  $\implies u$  sol. variazionale
2.  $u$  sol. variazionale,  $c, f$  continue,  $u \in C^2(\overline{\Omega}) \implies u$  sol. classica

### 18.1.4 Esistenza delle soluzioni

**Teorema:** Nelle ip. sopra definite, il problema  $(D)_v$ : trovare  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Ammette una e una sola soluzione. Inoltre  $u$  è caratterizzata nel modo seguente:

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a|\nabla v|^2 + cv^2) - \int_{\Omega} fv$$

**Dimostrazione**

Considero  $H = H_0^1(\Omega)$ , munito di  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_2$

- $\varphi(v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H$
- $b(u, v) = \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + c u v$

$\varphi$  è lineare continuo,  $b(u, v)$  è bilineare simmetrica, continua, coerciva Per Lax-Milgram  $\exists$  unico  $u \in H$  tale che

$$\varphi(v) = b(u, v) \quad \forall v \in H$$

ovvero:

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + c u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H$$

Inoltre  $u$  risolve

$$\min_H E(v) := \frac{1}{2} b(u, v) - \varphi(v)$$

Verifica ip. Lax-Milgram:

- $\varphi$  (lineare) continuo:  $\exists M : |\varphi(v)| \leq M \|v\|_H$

$$\int_{\Omega} |f v| \leq \int_{\Omega} |f v| \leq_H \|f\|_2 \|v\|_2 \leq_P C_p(\Omega) \|f\|_2 \|\nabla v\|_2$$

Si avrà dunque  $M = C_p(\Omega) \|f\|_2$  e  $\|\nabla v\|_2 = \|v\|_2$

- $b(u, v)$  è bilineare simmetrica (dimostrazione semplice)
- $b(u, v)$  continua

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + c u v \right| \leq \int_{\Omega} |a \nabla u \cdot \nabla v + c u v| \leq \int_{\Omega} a |\nabla u \cdot \nabla v| + c |u v| \\ &\leq \int_{\Omega} a |\nabla u \cdot \nabla v| + \|c\|_{\infty} \int_{\Omega} |u v| \leq a \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|c\|_{\infty} \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &\leq a \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|c\|_{\infty} C_p^2(\Omega) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \\ &= (a + \|c\|_{\infty} C_p^2(\Omega)) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 = (a + \|c\|_{\infty} C_p^2(\Omega)) \|u\|_H \|v\|_H \end{aligned}$$

- $b(u, v)$  coerciva

$$b(u, v) = \int_{\Omega} a |\nabla u|^2 + c u^2 \geq \int_{\Omega} a |\nabla u|^2 = a \|\nabla u\|_2^2 = \alpha \|u\|_H^2$$

### 18.1.5 Esistenza delle soluzioni per Neumann

**Teorema:** Nelle ip. sopra definite, supponiamo anche  $c(x) > 0$  il problema  $(D)_v$ : trovare  $u \in H^1(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + c u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Ammette una e una sola soluzione. Inoltre  $u$  è caratterizzata nel modo seguente:

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a |\nabla v|^2 + c v^2) - \int_{\Omega} f v$$

### Dimostrazione

Analoga al caso di Dirichlet lavorando su  $H = H^1(\Omega)$  munito di  $\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$   
Tranne che per la coercività di  $b$ :

$$\begin{aligned} b(u, u) &= \int_{\Omega} a|\nabla u|^2 + cu^2 \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2? \\ &\geq \int_{\Omega} a|\nabla u|^2 + c_0 u^2 \geq \min\{a, c_0\} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^2 \end{aligned}$$

### 18.1.6 Richiamo di Analisi Vettoriale

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \quad \forall X \in C^1(\Omega)$$

$$X = v \nabla u, \quad v \in C^1, \quad u \in C^2$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v \nabla u) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u \end{aligned}$$

### Formula di Gauss-Green

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + v \nabla u = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad v \in C^1, u \in C^2$$

### Lemma di DuBois-Raymond

Se  $u \in C(\bar{\Omega})$  è tale che:

$$\int_{\Omega} u \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \implies u \equiv 0 \text{ in } \Omega$$

Per dimostrarlo si procede per assurdo

### 18.1.7 Dimostrazione proposizione di Dirichlet

1. Sia  $u$  sol. di  $(D)_c$

Allora  $u \in H_0^1(\Omega)$  ( $u, v \nabla u \in C(\bar{\Omega}) \subseteq L^2(\Omega), u = 0$  su  $\partial\Omega$ )  
Moltiplico l'equazione per  $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$-a \Delta u \cdot v + cuv = fv \text{ in } \Omega$$

Integrando

$$\int_{\Omega} -a \Delta u \cdot v + cuv = \int_{\Omega} fv$$

Per Gauss Green

$$\int_{\Omega} av \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v_n + cuv_n = \int_{\Omega} f v_n \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Data  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\exists \{v_n\} \subseteq C_0^\infty(\Omega) : v_n \xrightarrow{H^1} v$  (per definizione di  $H_0^1(\Omega)$ )  
 Passando al limite

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Tale limite si dimostra

$$\left| \int_{\Omega} f v_n - f v \right| \leq \int_{\Omega} |f(v_n - v)| \leq_H \|f\|_2 \|v_n - v\|_2 \rightarrow 0$$

In modo analogo si verificano le altre convergenze

2. Sia  $u \in H_0^1(\Omega)$  sol. variazionale, supponendo  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $(c, f)$  continue)

$u = 0$  su  $\partial\Omega$

Sappiamo che

$$\int_{\Omega} a \nabla v \cdot \nabla u + cuv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ in particolare } \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Tramite Gauss Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -a \Delta u \cdot v + cuv - f v &= 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \\ \implies \int_{\Omega} (-a \Delta u + cu - f) v &= 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

La funzione nelle parentesi è continua su  $\overline{\Omega}$

Per il lemma di DBR

$$\implies -a \Delta u + cu - f = 0 \text{ in } \Omega$$

## 19 Serie di Fourier in spazi di Hilbert

**Definizione:** Sia  $H$  di Hilbert. Una famiglia di vettori  $\{u_n\} \subseteq H$  si dice *sistema ortogonale* se  $(u_n, u_m) = 0 \quad \forall n \neq m$ .  
 Si dice poi *sistema ortonormale* se è ortogonale e  $(u_n, u_n) = 1 \quad \forall n$

**Esempi:**

- $H = \mathbb{R}^3$ :  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$
- $H = l^2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \text{ tali che } \sum_{n \geq 0} x_n^2 < +\infty\}$  è uno spazio vettoriale

$$\|x\|_{l^2} = \left( \sum_{n \geq 0} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

è di Hilbert poiché  $((x_n), (y_n)) = \sum x_n y_n$   
 $e_n = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

**Definizione:** Sia  $H$  di Hilbert e sia  $(u_n)$  sistema ortonormale.  
Dato  $u \in H$

- $(u, u_n) \in \mathbb{R}$  *coefficienti di Fourier* di  $u$  (rispetto a  $(u_n)$  )
- $\sum_n (u, u_n) u_n$  *serie di Fourier* di  $u$  (rispetto a  $(u_n)$  )

### Esempi

- $H = \mathbb{R}^3$ ,  $\{e_1\}$ ,  $(u, e_1)e_1 = P(u)$  su  $\langle e_1 \rangle$
- $\{e_1, e_2\}$ ,  $(u, e_1)e_1 + (u, e_2)e_2 = P(u)$  su  $\langle e_1, e_2 \rangle$
- $\{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $(u, e_1)e_1 + \dots = P(u)$  su  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$
- $H = l^2$ ,  $\{e_1\} = \{(1, 0, \dots, 0)\}$ ,  $(u, e_1)e_1 = P_{\langle e_1 \rangle}(u)$   
 $\{e_i\}$  pari  $\sum_k (u, e_{2k})e_{2k}$   
 $\{e_n\}$  con  $n$  qualsiasi  $\sum_k (u, e_k)e_k = u$

### Teorema di convergenza per serie di Fourier

Sia  $H$  Hilbert, sia  $\{u_n\}$  sistema ortonormale fissato.  
Dato  $u \in H$ , la serie di Fourier di  $u$  converge in  $H$  e

$$\sum_n (u, u_n) u_n = u'$$

Dove  $u'$  è la proiezione ortogonale di  $u$  su  $M$ , dove  $M$  è la chiusura del sottospazio generato dal sistema.

#### 19.0.1 Convergenza in H

$\sum_n (u, u_n) u_n$  corrisponde a  $S_N(u) = \sum_{n=0}^N (u, u_n) u_n$ , converge a  $u'$  se

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(u) = u' \iff \lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(u) - u'\| = 0$$

#### 19.0.2 Sottospazio generato

Il sottospazio generato, indicato con  $\langle u_n \rangle$  è definito come

$$\langle u_n \rangle := \{\text{combinazioni lineari degli } u_n\}$$

$$M = \overline{\langle u_n \rangle} := \{\text{limiti di comb. lineari degli } u_n\}$$

$M$  è un sottospazio chiuso.

#### 19.0.3 Disuguaglianza di Bessel

**Teorema:** Sia  $H$  Hilbert, e sia  $(u_n)$  sistema ortonormale, dato  $u \in H$ , vale

$$\sum_n (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$$

### Dimostrazione

Fisso  $N \in \mathbb{N}$  e mostriamo

$$\sum_{n=0}^N (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$$

la tesi è dimostrata passando al limite, dunque:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n\|^2 &= (u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n, u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n) = \\ &= \|u\|^2 - 2 \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 + \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 \\ &= \|u\|^2 - \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 \end{aligned}$$

L'ultima somma vale poiché siamo in un sistema ortonormale:

$$((u, u_1)u_1 + (u, u_2)u_2, (u, u_1)u_1 + (u, u_2)u_2) = (u, u_1)^2 + (u, u_2)^2$$

### 19.0.4 Dimostrazione teorema di convergenza delle serie di Fourier

Per dimostrare la convergenza della serie, basta mostrare che  $S_N(u)$  è di Cauchy:

$$\forall \varepsilon \exists \nu : \|S_N - S_M(u)\|^2 < \varepsilon \quad \forall N, M \geq \nu$$

ovvero: (supposto  $N > M$ )

$$\begin{aligned} \|S_N(u) - S_M(u)\|^2 &= (S_N(u) - S_M(u), S_N(u) - S_M(u)) = \\ &= \left( \sum_{n=M+1}^N (u, u_n) u_n, \sum_{n=M+1}^N (u, u_n) u_n \right) \\ &= \sum_{n=M+1}^N (u, u_n)^2 = |T_N(u) - T_M(u)| \end{aligned}$$

dove  $T_N = \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2$

Bessel  $\implies \{T_N(u)\}$  è di Cauchy

Essendo in un Hilbert  $S_N(u)$  converge

Sia ora  $u' := \sum_n (u, u_n) u_n$

Per dimostrare  $u' = P_M(u)$  basta mostrare che

1.  $u' \in M$
2.  $u - u' \in M^\perp$

Per l'unicità nel teorema delle proiezioni,  $u' = P_M(u)$ ,  $u - u' = P_{M^\perp}(u)$

Infatti

1.  $u' \in M$  vale per costruzione:

$$u' = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(u) \in \overline{\langle u_n \rangle}, \quad u' \text{ è limite di comb. lineari degli } u_n$$

$$S_N(u) = \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n \in \langle u_n \rangle \text{ sono comb. lineari degli } u_n$$



2. Per mostrare che  $u - u' \in M^\perp$  basta far vedere che  $(u - u', u_n) = 0 \forall n$ , questo assicura che  $u - u'$  sarà ortogonale a tutti i limiti delle combinazioni lineari degli  $u_n$ , ovvero a tutti gli elementi di  $M$ .

$$(u - u', u_m) = (u - \sum_n (u, u_n) u_n, u_m) = (u, u_m) - (u, u_m)(u_m, u_m) = 0$$

**Definizione:** Sia  $H$  di Hilbert e sia  $(u_n)$  sistema ortonormale. Si dice che  $(u_n)$  è *sistema completo* se è massimale rispetto all'inclusione. Ovvero:  $\exists (v_n)$  sistema ortonormale che contenga propriamente  $(u_n)$

**Proposizione di caratterizzazione di sistemi ortonormali completi**

Sia  $(u_n)$  ortonormale in un Hilbert.

Sono equivalenti:

1.  $(u_n)$  è completo
2.  $u \in H : (u, u_n) = 0 \forall n \implies u = 0$
3. Posto  $M := \overline{\langle u_n \rangle}$ , si ha  $M \equiv H$
4.  $\sum_n (u, u_n) u_n = u \forall u \in H$
5.  $\sum_n (u, u_n)(v, u_n) = (u, v) \forall u, v \in H$  (identità di Parseval)
6.  $\sum_n (u, u_n)^2 = \|u\|^2 \forall u \in H$  (identità di Bessel)

**Dimostrazione**

(1)  $\iff$  (2)  $\implies$  (3)  $\implies$  (4)  $\implies$  (5)  $\implies$  (6)  $\implies$  (2)

**Dimostrazione 1 se e solo se 2**

Se è falsa la 2 implica che è falsa la 1

$$\exists u \in H : (u, u_n) = 0 \forall n \text{ MA } u \neq 0$$

Allora  $(u_n)$  non è massimale. Se è falsa la 1 implica che è falsa la 2 se  $(u_n)$  non è massimale, posso aggiungere almeno un elemento  $\implies \exists u \in H$  per cui la 2 è falsa.

**Dimostrazione 2 implica 3**

Per mostrare  $M \equiv H$ , basta mostrare  $M^\perp = \{0\}$ , vero per la 2

$$\text{se } u \in M^\perp \text{ allora } u = 0$$

**Dimostrazione 3 implica 4**

Se  $M$  coincide con  $H$ , allora  $u' = P_M(u) = u$

**Dimostrazione 4 implica 5** Per la quattro ogni elemento è la sua serie di Fourier, dunque

$$(u, v) = \left( \sum (u, u_n) u_n, \sum (v, u_n) u_n \right) = \sum (u, u_n)(v, u_n)$$

**Dimostrazione 5 implica 6**

Prendere  $u = v$  in Parseval

**Dimostrazione 6 implica 2**

Se  $(u, u_n) = 0 \ \forall n, \sum 0 = 0$

**20 Serie di Fourier in  $L^2$** 

Si considera  $L^2(I)$  dove  $I = (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , e il prodotto scalare è definito come

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x)dx$$

**Sistema ortonormale dei polinomi trigonometrici**

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad p_k = \frac{\cos(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{T}{2}}}, \quad q_k = \frac{\sin(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{T}{2}}}, \quad k \geq 1$$

dove

$$\xi_k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)k \quad (\text{se } T = 2\pi, \quad \xi_k = k)$$

formano un sistema ortonormale

Dunque, data  $f \in L^2(I)$  la sua serie di Fourier rispetto a questo sistema è la serie

$$(f, p_0)p_0 + \sum_{k \geq 1} (f, p_k)p_k + (f, q_k)q_k \quad (*)$$

**20.0.1 Modi equivalenti di scrivere (\*)**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(\xi_k x) + b_k \sin(\xi_k x) \quad (**)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_I f(x) \cos(\xi_k x) dx \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_I f(x) \sin(\xi_k x) dx \quad k \geq 1$$

Oppure

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{i\xi_k x} \quad (***)$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\xi_k x} dx \quad z \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{f}_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\hat{f}_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

**Teorema:** Il sistema  $(p_0, p_k, q_k)$  è ortonormale completo in  $L^2(I)$

**Dimostrazione** usando la (3) delle equivalenze

$$\langle p_0, p_k, q_k \rangle \equiv L^2(I)$$

$\subseteq$  sempre vero ( $\overline{M} \subseteq H$ )

$\supseteq \forall f \in L^2(I)$ ,  $f$  può essere approssimata con elementi di  $\langle p_0, p_k, q_k \rangle$

**Passo 1** Mostriamo che quanto sopra è vero se  $f = \varphi \in C_0^\infty(I)$ .

Infatti, posso estendere  $\varphi$  a  $\tilde{\varphi} \in C_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R})$ .

Sappiamo (Analisi 2) che la serie di Fourier di  $\tilde{\varphi}$  converge uniformemente su  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \implies$  converge uniformemente in  $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ .

$\implies$  La successione delle somme parziali della serie di Fourier di  $\tilde{\varphi}$  fornisce una successione in  $\langle p_0, p_k, q_k \rangle$ , che converge a  $\tilde{\varphi} = \varphi$  in  $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

**Passo 2** Data  $f \in L^2(I)$  posso approssimarla con una successione  $\varphi_k \subset C_0^\infty(I)$ .

$$\varphi_k \xrightarrow{L^2(I)} f$$

Concludo prendendo una successione diagonale.

Oppure:

$$\|f - S\| \leq \|f - \varphi\| + \|\varphi - S\| < \varepsilon$$

$S$  somma parziale della serie di Fourier di  $\varphi$

**Osservazioni**

- Data  $f \in L^2(I)$ , per il teorema sopra:

$$f = (f, p_0)p_0 + \sum_{k \geq 1} (f, p_k)p_k + (f, q_k)q_k$$

- Data  $f \in L^2(I)$ , vale l'id. di Bessel:

$$\|f\|_{L^2(I)}^2 = (f, p_0)^2 + \sum_{k \geq 1} (f, p_k)^2 + (f, q_k)^2$$

Dunque  $f \in L^2(I) \iff$  i suoi coefficienti di Fourier  $\in \ell^2$

- Possiamo sostituire  $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  con

$$L_T^2(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}) : T\text{-periodiche}\}$$

è uno spazio di Hilbert, con  $(f, g) = \int_{-T/2}^{T/2} f g$

- I coefficienti di Fourier hanno senso anche per  $f \in L^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

$$|a_k| = \frac{2}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(\xi_k x) dx \right| \leq \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| < +\infty$$

lo stesso per i  $b_k$

- Se  $f \in \text{A.C.}([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$  e  $f(-\frac{T}{2}) = f(\frac{T}{2})$  posso estenderla a una funzione continua periodica su  $\mathbb{R}$ . (l'estensione  $f$  appartiene a  $L_T^2(\mathbb{R})$ )  
Ha senso calcolare i coefficienti di Fourier sia di  $f$  che di  $f'$ .

$a_k, b_k$  siano i coefficienti di Fourier di  $f$

$a'_k, b'_k$  siano i coefficienti di Fourier di  $f'$

$$\begin{aligned} a'_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x) \cos(\xi_k x) dx = 0 + \frac{2}{T} \xi_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(\xi_k x) dx \\ &= \xi_k b_k \end{aligned}$$

Analogamente

$$b'_k = -\xi_k a_k$$

Dunque

$$\hat{f}'_k = i\xi_k \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

## 21 Applicazioni delle serie di Fourier alle equazioni differenziali

Ricerca di soluzioni periodiche di ODE lineari (tramite serie di Fourier)  
Consideriamo un'ODE su  $\mathbb{R}$  della forma

$$\sum_{j=0}^n a_j u^{(j)} = f \in L_T^2(\mathbb{R}) \quad x \in \mathbb{R}$$

**Problema:** esistono soluzioni T-periodiche (in  $L_T^2(\mathbb{R})$ )?  
La seguente equazione differenziale equivale a chiedere:

$$\sum_{j=0}^n a_j \widehat{u^{(j)}}_k = \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{j=0}^n a_j (i\xi_k)^{(j)} \hat{u}_k = \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sistema di infinite eq. algebriche.

$$P(i\xi_k) \hat{u}_k = \hat{f}_k$$

(forma equivalente)

Ciascuna eq. è un'equazione lineare di 1° grado in  $\hat{u}_k$ !!!

- Caso 1:  $P(i\xi_k) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\implies \hat{u}_k = \frac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)}$$

- Caso 2:  $P(i\xi_k) = 0$  per  $k = k_1^*, \dots, k_p^*$ , allora  
 $\hat{f}_k = 0$  per  $k = k_1^*, \dots, k_p^* \implies$  infinite soluzioni, ovvero

$$\hat{u}_k = \begin{cases} \frac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)} & k \neq k_1^*, \dots, k_p^* \\ \text{arbitrario} & k = k_1^*, \dots, k_p^* \end{cases}$$

Se però  $\hat{f}_k \neq 0$  per qualche  $k \in \{k_1^*, \dots, k_p^*\} \implies$  no soluzioni

**Osservazione:** Ci sono altri sistemi ortonormali completi in  $L^2(I)$ .

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

$\rightarrow$  polinomi di Legendre

**Esempio** in  $L^2(-1, 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{3} + x^2\right)$$

Data  $f \in L^2(I)$ , per minimizzare la distanza in  $L^2(I)$  da un polinomio di grado  $\leq 3$ , dovrò considerare la somma delle serie di Fourier di  $f$  fatta rispetto ai polinomio di Legendre

## 22 Trasformata di Fourier

**Definizione:** Sia  $u \in L^1(\mathbb{R})$ . La sua *Trasformata di Fourier* è la funzione definita per  $\xi \in \mathbb{R}$  da:

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \quad \xi \in \mathbb{R}$$

### Osservazioni

- La dipendenza da  $\xi$  appare in  $e^{-i\xi x} \implies \hat{u}(\xi)$  è un integrale dipendente dal parametro
- Formalmente c'è analogia con i coefficienti di Fourier

$$\hat{u}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x) e^{-i\xi_k x} dx \quad k \in \mathbb{Z}$$

- La definizione di  $\hat{u}(\xi)$  è "ben posta" grazie all'ipotesi  $u \in L^1(\mathbb{R})$

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| |e^{-i\xi x}| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx < +\infty$$

- $e^{-i\xi x} = \cos(\xi x) - i \sin(\xi x) \implies \hat{u}(\xi)$  è a valori in  $\mathbb{C}$

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cos(\xi x) dx - i \int_{\mathbb{R}} u(x) \sin(\xi x) dx$$

- Generalizzazioni: si può partire da  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
- Da  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ )

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

- $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$
- *Non si trasformano mai* funzioni definite su sottoinsiemi propri di  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^n$

## 22.1 Varianti in letteratura

$e^{-i\xi x}$  rimpiazzato da  $e^{i\xi x}$ , oppure  $e^{i2\pi\xi x}$

## 22.2 Operatore Trasformato

La trasformata  $\mathcal{F}$  di Fourier è l'operatore che manda  $u$  in  $\hat{u}$

$$\mathcal{F} : u \rightarrow \hat{u}$$

### Osservazioni

- $\mathcal{F}$  è lineare:

$$\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v)$$

## 22.3 Trasformate notevoli

1.  $u(x) = \chi_{(a,b)}(x)$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\sin(\xi b) - \sin(\xi a)}{\xi} + i \frac{\cos(\xi b) - \cos(\xi a)}{\xi}$$

2.  $u(x) = e^{-|x|}$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}$$

Diversamente dal caso precedente, la trasformata è sempre reale, e  $\hat{u}$  è di nuovo  $L^1(\mathbb{R})$ .

3.  $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\hat{u}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$$

Partendo da  $u(x) = e^{-|x|}$  trasformando due volte si ottiene  $\hat{\hat{u}}(x) = 2\pi e^{-|x|} = 2\pi u(x)$

## 22.4 Teorema di Riemann-Lebesgue

**Teorema:** Sia  $u \in L^1(\mathbb{R})$ . Allora  $\hat{u}$  ha le seguenti proprietà:

1.  $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$
2.  $\hat{u}$  è continua
3.  $\hat{u}$  è infinitesima all'infinito

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \hat{u}(\xi) = 0$$

### Dimostrazione

1.  $|\hat{u}(x)| \leq \|u\|_1$ , passo all'ess-sup al variare di  $\xi$

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Ne consegue che (con  $M = 1$ , da dimostrare)

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \text{ lineare continuo}$$

2. Facciamo vedere che  $\hat{u}(\xi)$  è continua in  $\xi$  fissato in  $\mathbb{R}$ , ovvero

$$\xi_n \rightarrow \xi \implies \hat{u}(\xi_n) \rightarrow \hat{u}(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi_n x} dx$$

$$d'etare \hat{u}(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi_n x} dx$$

$$f_n(x) = u(x) e^{-i\xi_n x} \rightarrow u(x) e^{-i\xi x} = f(x)$$

Si può passare sotto il segno di integrale per conv. dominata, perché

$$|f_n(x)| = |u(x)| |e^{-i\xi_n x}| = |u(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

3. Vero se  $u = \chi_{(a,b)}$  (vedere esempio sopra)

Vero se  $u$  è "a scalino",  $u = \sum_k^N c_k \chi_{I_k}$  poiché l'operatore trasf. è lineare

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^N c_k \hat{\chi}_{I_k}$$

Vero  $\forall u \in L^1(\mathbb{R}) : \exists \varphi_n$  "a scalino"  $\xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u$

Sappiamo che  $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$  op.continuo:  $\varphi_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u \implies \hat{\varphi}_n \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{R})} \hat{u}$

So che  $\hat{\varphi}_n$  sono "infinitesime all'infinito", dunque anche  $\hat{u}$  ha la stessa proprietà.

## 22.5 Proprietà algebriche

Sia  $u \in L^1(\mathbb{R})$

- $v(x) = u(x - a), a \in \mathbb{R} \implies \hat{v}(\xi) = e^{-i\xi a} \hat{u}(\xi)$
- $v(x) = e^{iax} u(x) \implies \hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi - a)$   
Esempio: è possibile calcolare  $u(x) \cos(ax)$  (Definizione complessa del coseno)
- $v(x) = u(x/a) a \in \mathbb{R} - \{0\} \implies \hat{v}(\xi) = |a| \hat{u}(a\xi)$  In particolare, con  $a = -1$ , si ha

$$\begin{cases} u \text{ pari} \implies \hat{u} \text{ pari (reale)} \\ u \text{ dispari} \implies \hat{u} \text{ dipari (puramente immaginaria)} \end{cases}$$

Queste proprietà sono dimostrabili tramite cambi di variabili negli integrali

## 22.6 Proprietà differenziali

**Proposizione 1:** Sia  $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap A.C.(\mathbb{R})$  (con tali ipotesi  $u$  derivabile q.o. su  $\mathbb{R}$ , con  $u' \in L^1(\mathbb{R})$ ). Allora

$$\widehat{u'}(\xi) = i\xi \hat{u}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare, nelle ipotesi della proposizione

$$u' \in L^1(\mathbb{R}) \implies \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \widehat{u'}(\xi) = 0$$

ovvero

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \xi \hat{u}(\xi) = 0$$

ovvero

$$\hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

Iterando:

$$u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R}), u' \in AC(\mathbb{R})$$

$$\widehat{u''}(\xi) = (i\xi)^2 \hat{u}(\xi) = -\xi^2 \hat{u}(\xi)$$

$$\text{e } \hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$$

**Morale:** maggior regolarità di  $u$  implica maggior rapidità di convergenza a 0 all'infinito di  $\hat{u}$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} \hat{u'}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} u' e^{-i\xi x} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L u'(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \lim_{L \rightarrow +\infty} u(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-L}^L + i\xi \int_{-L}^L u(x) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$



$$= i\xi \hat{u}(\xi)$$

$$u(\pm L)e^{i\xi \pm L} \text{ per } L \rightarrow +\infty$$

Infatti, per  $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap \text{A.C.}(\mathbb{R})$ ,  $u(L) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 0$

$$\begin{aligned} u(L) &= u(0) + \int_0^L u'(t) dt \\ &= u(0) + \int_0^{+\infty} u'(t) \chi_{(0,L)}(t) dt \\ &= u(0) + \int_0^{+\infty} u'(t) dt \end{aligned}$$

Poiché  $f_L(t) = u'(t) \chi_{(0,L)}(t)$ .

**Proposizione 2:** Sia  $u \in L^1(\mathbb{R})$  tale che  $xu \in L^1(\mathbb{R})$   
Allora:

$$(\hat{u})'(\xi) = -i\widehat{xu}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare, siccome la trasformata di  $xu$  è continua (per RL), allora  $(\hat{u})'$  continua, cioè  $\hat{u} \in C^1(\mathbb{R})$

Iterando:  $u \in L^1(\mathbb{R}) : xu \in L^1(\mathbb{R}), x^2u \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{u} \in C^2(\mathbb{R})$

$u \sim \frac{M}{x^\alpha}$  per  $x \rightarrow \pm\infty$  con  $\alpha > k \implies x^{k-1}u(x) \sim \frac{M}{x^{\alpha-k+1}}$  ( $\alpha - k + 1 > 1$ )  $\implies$

$$x^{k-1}u \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{u} \in C^{k-1}(\mathbb{R})$$

**Morale:** maggior rapidità di decrescenza a 0 per  $u$  implica maggior regolarità di  $\hat{u}$

**Dimostrazione (cenno)**

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx$$

Posso derivare sotto  $\int$ :

$$(\hat{u}(\xi))' = \int_{\mathbb{R}} (u(x) e^{-i\xi x})' dx = -i \int_{\mathbb{R}} xu(x) e^{-i\xi x} dx = -i\widehat{xu(x)}(\xi)$$

## 23 Applicazione della trasformata di Fourier alle equazioni differenziali

Data un'equazione differenziale in  $u = u(x)$ , applicando la trasformata si ottiene un'equazione algebrica in  $\hat{u}$ . Risolvendo per  $\hat{u}$ , si trova quindi  $u$ .

### 23.1 Esempio

$$u'(x) - u(x) = e^{-x} H(x) \quad H(x) := \begin{cases} 1 & \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Da risolvere per q.o.  $x \in \mathbb{R}$ .  
Cerco soluzioni  $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$

$$\hat{u}' - \hat{u} = \widehat{e^{-x}H(x)}$$

$$i\xi\hat{u} - \hat{u} = \frac{1}{1+i\xi}$$

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2} \implies u(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

### 23.2 Formule di inversione per la trasformata di Fourier in $L^1$

Sia  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tale che  $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Allora:

$$u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{u}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\check{u}(x) := u(-x)$$

**Problema:** Esiste uno spazio  $X$  tale che

$$\mathcal{F} : X \rightarrow X$$

e valga in  $X$  la formula di inversione?

**Risposta:** Sì,  $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Sia  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{u}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Ma chi è  $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$ ?

$$|\hat{u}(\xi)| < +\infty \text{ se } u \in L^1(\mathbb{R})$$

### 23.3 Trasformata di Fourier in $L^2$

**Spazio delle funzioni a decrescenza rapida**

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$  tali che

$$\forall \alpha, \beta \text{ multiindici} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty$$

**Osservazioni**

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\gamma u, D^\gamma u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$
- Valgono in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  le seguenti formule:

$$1. \widehat{D^\alpha u} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}$$

$$2. D^\alpha \hat{u} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha u}$$

- Formula di inversione in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$   
Sia  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Allora  $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\check{u} = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\hat{u}}$$

**Dimostrazione:** Se dimostro che  $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , allora vale la formula di inversione. (come conseguenza di quelle in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , perché  $u, \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ ).

- $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  perché  $\forall \alpha, x^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\alpha u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$$

Dunque per la prop. 2  $\hat{u}$  ha derivate di ogni ordine

- $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{u}(\xi)| < +\infty \forall \alpha, \beta$   
Perché  $\xi^\alpha D^\beta \hat{u}$  è la trasformata di una funzione di  $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{u} \sim \widehat{\xi^\alpha x^\beta u} \sim \widehat{D^\alpha(x^\beta u)}$$

E  $D^\alpha(x^\beta u)$  appartiene a  $L^1(\mathbb{R}^n)$  perché appartiene a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$   
Quindi per Riemann-Lebesgue la sua trasformata sta in  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

### 23.3.1 Altre proprietà di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}v = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}u$$

**Identità di Plancherel**

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2$$

**Prodotto di convoluzione**

$$\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v}$$

$$\widehat{uv} = (2\pi)^{-n} \hat{u} * \hat{v}$$

**Definizione:** Sia  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , e sia  $\{u_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tale che  $u_h \rightarrow u$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .  
Considero  $\hat{u}_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e definisco

$$\hat{u} := \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h$$

(\*) Esiste una tale  $u_h$  perché  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  è denso in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Idea**

$$\mathcal{S} \ni u_h \rightarrow u \in L^2$$

Applico Fourier

$$\mathcal{S} \ni \hat{u}_h \rightarrow \hat{u} \in L^2$$

**Osservazioni**

- $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h$  (in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ) perché  $\hat{u}_h$  è di Cauchy: infatti

$$\|\hat{u}_h - \hat{u}_k\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|u_h - u_k\|_2 \text{ (identità di Plancherel)}$$

e la successione è di Cauchy

- $\lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h$  è indipendente dalla scelta di  $u_h$ :  $u_h \xrightarrow{L^2} u, v_h \xrightarrow{L^2} v$   
 Dunque  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{v}_h$   
 perché  $u_h - v_h \xrightarrow{L^2} 0 \xRightarrow{\text{Plancherel}} \hat{u}_h - \hat{v}_h \rightarrow 0$
- Se  $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ , allora le trasformate coincidono  
 Infatti, prendendo  $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tale che (possibile tramite mollificatori)

$$\begin{cases} u_h \xrightarrow{L^1} u \\ u_h \xrightarrow{L^2} u \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{cases} \hat{u}_h \xrightarrow{L^\infty} \hat{u} \text{ Trasformata in } L^1, \text{ perché } \mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty \text{ continuo} \\ \hat{u}_h \xrightarrow{L^2} \hat{u} \text{ Trasformata in } L^2, \text{ per definizione di } \mathcal{F} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

- Vale l'id. di Plancherel in  $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Infatti, presa  $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : u_h \xrightarrow{L^2} u$ :

$$\|u_h\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}_h\|_{L^2}^2 \quad \forall h$$

Passando al limite si ottiene l'identità.

### 23.3.2 Calcolo nella pratica

Basta osservare che la successione

$$\begin{aligned} u_h &= u \cdot \chi(-h, h) \\ u_h &\rightarrow u \text{ in } L^2(\mathbb{R}) \\ \implies \hat{u}_h &\rightarrow \hat{u} \text{ in } L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Per Plancherel.

Quindi,

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h(\xi) \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} u_h(x) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

La formula di inversione vale in  $L^2$ , basta prendere  $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), u_h \xrightarrow{L^2} u$   
 Sappiamo:

$$\tilde{u}_h = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{u}}_h \quad \forall h$$

Basta passare al limite per  $h \rightarrow +\infty$

$$\tilde{u} = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{u}}$$

## 24 Trasformata di Fourier di distribuzioni

**Problema:** Data  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , come definire  $\hat{T}$ ?

**Idea:** Scaricare  $\mathcal{F}$  sulle funzioni test, dal momento che sappiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}u = \int_{\mathbb{R}^n} v\hat{u}$$

Data  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , potremmo definire  $\hat{T}$

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

La definizione posta non ha senso, perché

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

cioè  $\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \not\rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , la trasformata di una  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  è analitica, quindi non può avere supporto compatto.

Si utilizzano quindi funzini test in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Si introduce quindi una convergenza in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

**Definizione:** Data  $\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , e  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , diciamo che  $\varphi_h \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se

$$\forall \alpha, \beta, x^\alpha D^\beta \varphi_h \rightarrow x^\alpha D^\beta \varphi \text{ uniformemente su } \mathbb{R}^n$$

### Osservazioni

1. Data  $\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (Riferimento a convergenza in  $\mathcal{D}$ )

$$\varphi_h \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \varphi_h \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

2.  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  è lineare e continuo, ovvero  $\varphi_h \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi}_h \rightarrow \hat{\varphi}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}_h \rightarrow \xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi} \text{ uniformemente su } \mathbb{R}^n$$

(Poiché rispettivamente  $\xi^\alpha D^\beta = D^\alpha(\widehat{x^\beta \varphi_h})$ ,  $\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi} = D^\alpha(\widehat{x^\beta \varphi})$ .)

Perché  $D^\alpha(x^\beta \varphi_h) \rightarrow D^\alpha(x^\beta \varphi)$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$

### Esempio

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|D^\alpha(x^\beta \varphi_h) - D^\alpha(x^\beta \varphi)|}{1+x^2} (1+x^2) &\leq \\ \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(x^\beta \varphi_h) - D^\alpha(x^\beta \varphi)| (1+x^2) &\cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

### 24.1 Spazio delle funzioni temperate

**Definizione:** Una distribuzione  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  si dice *distribuzione temperata* se

$$\varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

**Definizione:**  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{\text{distribuzioni temperate}\}$

### Esempi

1.  $u(x) = p(x)$  polinomio  $\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , dico che  $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi_h \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u}{p} p \varphi_h \right| dx \leq \left\| \frac{u}{p} \right\|_{L^1} \|p \varphi_h\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \text{ se } \varphi_h \rightarrow 0$$

dove  $p$  polinomio tale che  $u/p \in L^1(\mathbb{R})$

2.  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  si dice a *crescita lenta* se  $u = qw$  con  $q$  polinomio e  $w \in L^1(\mathbb{R})$ , Tutte le funzioni a crescita lenta stanno in  $\mathcal{S}'$ . Per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \varphi \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |w q \varphi| \leq \|w\|_{L^1} \|q \varphi\|_{L^\infty}$$

Quindi, se  $\varphi_h \rightarrow 0$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\|q \varphi_h\|_{L^\infty} \rightarrow 0$

3. Come caso particolare:  $u \in L^p(\mathbb{R}) \implies u$  è a crescita lenta, e quindi sta in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .  
Data  $u \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $u = qw$  con  $q$  polinomio e  $w \in L^1(\mathbb{R})$ .

- $u \in L^1(\mathbb{R}) \rightarrow$  prendo  $q = 1$ ,  $w \in L^1(\mathbb{R})$
- $u \in L^\infty(\mathbb{R}) \implies$  prendo  $q : 1/q \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $u = q \cdot \frac{u}{q}$ ,  $w = u/q \in L^1(\mathbb{R})$  applicando Holder.
- $u \in L^p(\mathbb{R}) \implies$  prendo  $q : 1/q \in L^{p'}(\mathbb{R})$ ,  $u = q \cdot \frac{u}{q}$ ,  $w = \frac{u}{q} \in L^p(\mathbb{R})$ , sempre per Holder.

4.  $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,  $D^{(k)}\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}), \varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \langle \delta_0, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

Avendo la convergenza uniforme di  $\varphi_h$ , si avrà anche la convergenza puntuale (in  $\varphi_h(0)$ ).

### Altre osservazioni su $\mathcal{S}'$

1.  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \implies T$  può agire più in generale su funzioni test di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$   
Infatti, se  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , posso definire

$$\langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \lim_{h \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi_h \rangle \text{ dove } \varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_h \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

2. Se  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , allora vale:

$$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } \varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

### Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Data  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , definisco  $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  come

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

### Osservazioni

1.  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Quindi  $\langle T, \hat{\varphi} \rangle$  ha senso perché  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

2. Verifichiamo che  $\hat{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\{\varphi_h\} \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \langle \hat{T}, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

Infatti  $\{\varphi_h\} \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi}_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \hat{\varphi}_h \rangle \rightarrow 0$   
perché  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

3. Si ha anche  $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  (vedere sopra)

Tutte le proprietà di  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  valgono anche in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,

**Inversione:**

$$\check{T} = (2\pi)^{-n} \hat{T}$$

**Dimostrazione**

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle T, \hat{\hat{\varphi}} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{T}, \varphi \rangle$$

**Esempi**

1.  $T = \delta_0$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle &= \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi = \langle 1, \varphi \rangle \\ &\implies \hat{\delta}_0 = 1 \end{aligned}$$

2.  $\hat{1} = \hat{\delta}_0 = 2\pi\check{\delta}_0 = (2\pi)\delta_0$ , poiché

$$\langle \check{\delta}_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \check{\varphi} \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

3.  $\hat{x} = \mathcal{F}(x \cdot 1) = i(\hat{1})' = 2\pi i(\delta_0)'$

## 24.2 Lista trasformate studiate

Ricapitolando, sono state studiate le seguenti trasformate:

$$\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$$

$$\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$$

## 25 Problemi di Cauchy per l'equazione del calore e delle onde

Si tratta di problemi di evoluzione, ovvero l'incognita è  $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$

$u_t - \Delta u = f$  equazione del calore (parabolica)

$u_{tt} - \Delta u = f$  equazione delle onde (iperbolica)

Ad entrambe è associata l'equazione di Poisson  $-\Delta u = f$  (ellittica)

In dimensione  $n = 2$ , le equazioni omogenee diventano

$$u_t - u_{xx} = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{tt} & u_{tx} \\ u_{xt} & u_{xx} \end{pmatrix} \quad \det A = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A < 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A > 0$$

Si ha una terminologia simile alla classificazione delle coniche

### 25.1 Problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Ipotesi:**  $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$

**Strategia:** Applicare  $\mathcal{F}_{(x \rightarrow \xi)}$  (Fourier rispetto a  $x$ )

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(u(x, t)) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-i\xi x} dx$$

1. Trasformare il problema

$$\widehat{u_t} - \widehat{u_{xx}} = 0$$

$\hat{u}_t = (\hat{u})_t$  purché  $u$  sia sufficientemente regolare

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-i\xi x} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-i\xi x} dx$$

$$\widehat{u_{xx}} = (i\xi)^2 \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$$

L'equazione soddisfatta da  $\hat{u}$  è

$$(\hat{u})_t + \xi^2 \hat{u} = 0$$

Il dato iniziale trasformato è

$$\hat{u}(\xi, 0) = \int_{\mathbb{R}} u_0 e^{-i\xi x} dx$$

Il problema risolto da  $\hat{u}$  è

$$\begin{cases} (\hat{u})_t + \xi^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

Ovvero una ODE, lineare, omogenea, del I ordine.



2. Determinare  $\hat{u}$

Se poniamo  $\varphi(t) := \hat{u}(\xi, t)$  (per  $\xi$  fissato), il problema risolto da  $\varphi$  :

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -\xi^2 \varphi(t) \\ \varphi(0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases} \implies \varphi(t) = C e^{-\xi^2 t}$$

$$\varphi(0) = C = \hat{u}_0(\xi) \implies \varphi(t) = \hat{u}_0(\xi) e^{-\xi^2 t}$$

3. Determinare  $u$  a partire da  $\hat{u}$

$$u(x, t) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}^{-1}(\hat{u}_0(\xi)) * \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}^{-1}(e^{-\xi^2 t})$$

$$u_1(x, t) *_x u_2(x, t) = \int_{\mathbb{R}} u_1(x - y, t) u_2(y, t) dy$$

$$u(x, t) = u_0(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

#### Commenti

- Avendo preso  $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ , il prodotto di convoluzione ha senso ( $u_0 \in L^2$ , gaussiana  $\in L^1$ )
- Se il prodotto scritto ha senso per  $t > 0$ , si può far vedere che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x) \text{ in } L^2(\mathbb{R})$$

Infatti

$$\begin{aligned} \|u(x, t) - u_0(x)\|_{L^2}^2 &= (2\pi)^{-1} \|\hat{u}(\xi, t) - \hat{u}_0(\xi)\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi, t) - \hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi) e^{-\xi^2 t} - \hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi)|^2 |e^{-\xi^2 t} - 1|^2 d\xi \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Per Plancherel. Inoltre il limite per  $t \rightarrow 0$  passa sotto integrale per convergenza dominata.

## 25.2 Effetto regolarizzante dell'operatore calore

$\forall t > 0, x \mapsto u(x, t)$  è di classe  $C^\infty$  per le proprietà del prod. di convoluzione. La formula mostra anche quella che si dice *velocità di propagazione infinita* dell'operatore  $\partial_t - \partial_{xx}$ .  
Ovvero: anche se  $u_0(x)$  è a supporto compatto

$$\forall t > 0, x \mapsto u(x, t) \text{ è diversa da } 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

### 25.3 Problema di Cauchy per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Ipotesi:**  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), u_1 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$

Spezzando (P) in due problemi distinti

$$(P_1) \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \\ v(x, 0) = u_0(x) \\ v_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

Se trovo  $v$  e  $w$  soluzioni dei due problemi  $\implies u = v + w$  soluzioni di (P)

Risolvo  $(P_1)$

1.  $\widehat{v_{tt}} - \widehat{v_{xx}} = 0$ , se  $v$  sufficientemente regolare

$$(\hat{v})_{tt} = -\xi^2 \hat{v}$$

$$\hat{v}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi)$$

$$\hat{v}_t(\xi, 0) = 0$$

Problema di Cauchy per un'ODE (lineare, omogenea del II ordine) Completare

$$\implies \varphi(t) = C_1 e^{i\xi t} + C_2 e^{-i\xi t}$$

Imponiamo i dati iniziali

$$\varphi(0) = C_1 + C_2 = \hat{u}_0(\xi)$$

$$\varphi'(0)|_{t=0} = i\xi C_1 e^{i\xi t}|_{t=0} - i\xi C_2 e^{-i\xi t}|_{t=0} = i\xi C_1 - i\xi C_2 = 0 \iff C_1 = C_2$$

Quindi  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \hat{u}_0(\xi)$

$$\implies \varphi(t) = \hat{v}(\xi, t) = \frac{1}{2} \hat{u}_0(\xi) e^{i\xi t} + \frac{1}{2} \hat{u}_0(\xi) e^{-i\xi t}$$

2. Ricavo  $v$  a partire da  $\hat{v}$ , ricordando la regola di trasformazione (traslazione):

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)]$$

Somma di due onde, (progressiva e regressiva) che hanno stessa forma di  $u_0$  e metà ampiezza Procedendo in maniera analoga:

$$w(x, t) = \frac{1}{2} (U_1(x+t) - U_1(x-t)) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$$

Conclusione: **Formula di d'Alembert**

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$$

#### Commenti

- Non c'è effetto regolarizzante, nelle ipotesi sopra  $u$  è di classe  $C^2(\mathbb{R})$ . Si può dimostrare che D'Alembert vale più in generale.
- La velocità di propagazione è finita