1 Applicazioni del teorema dei residui in campo reale

1.1 Primo tipo

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$
$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt = \int_0^{2\pi} g(e^{it})ie^{it}dt$$

$$\int_{C_1(0)} g(z)dz$$

Se g soddisfa le ipotesi del teorema dei residui su $C_1(0) \subseteq \Omega$, con $\gamma = C_1(0)$

$$= 2\pi i \sum_{|z_0|<1} \mathrm{Res}(g, z_0)$$

Esempio: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t}dt$

1.2 Secondo tipo

$$\text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx := \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

La definizione è cambia leggermente nel caso sia presente una singolarità su $\mathbb{R}$. Se f è integrabile (secondo Riemann) allora

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

In generale può accadere che il V.P. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \in \mathbb{R}$ ma f non è integrabile
Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 1 & x \in [0,1] \\ -1 & x \in [-1,0] \\ \frac{1}{x} & x \leq -1 \end{cases}$$

f non è integrabile secondo Riemann, ma il V.P. è uguale a 0.

Ipotesi: $f = f(z)$ abbia un numero finito di singolarità nel semipiano $\{\text{Im} z > 0\}$ (e nessuna singolarità sull'asse reale)+ (*) ipotesi di decadimento.

$$I = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{-R} f(x)dx + \int_{C_R^+(0)} f(z)dz - \int_{C_R^+(0)} f(z)dz$$

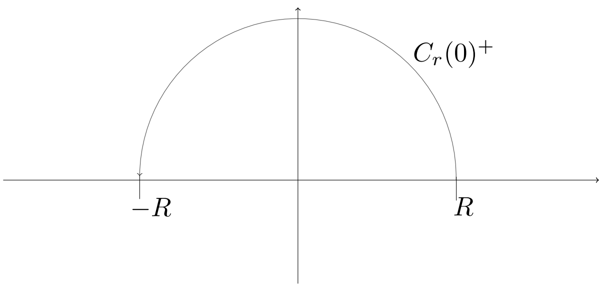

Figura 1: Semicirconferenza

$$I = \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz - \lim_{R \to +\infty} \int_{C_R(0)^+} f(z)dz$$

Dove $\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0)$
Per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S, \\ \text{Im} z_0 > 0}} \text{Res}(f, z_0)$$

L'indice di avvolgimento è uguale a 1.

1.2.1 Lemma tecnico di decadimento

Se $\exists \alpha > 1$ tale che $|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^\alpha}$ (per $|z|$ abbastanza grande) (*), allora

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)dz = 0$$

Aggiungendo l'ipotesi di decadimento all'integrale precedente si avrà il risultato scritto.
Si ha un calcolo analogo per il semipiano $\{\text{Im} < 0\}$

1.3 Terzo tipo

$$I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\omega x}dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S \\ \text{Im} z_0 > 0}}^{\infty} \text{Res}(f(z)e^{i\omega z}, z_0)$$

Dove $\omega \in \mathbb{R}^+$
Ipotesi: $f(z)e^{i\omega x}$ abbia un numero finito di singolarità nel semipiano $\{\text{Im} z > 0\}$ (e nessuna singolarità sull'asse reale) + (**) lemma di Jordan.

$$I = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{-R} f(z)e^{i\omega z}dz + \int_{C_R(0)^+} f(z)e^{i\omega z}dz - \int_{C_R(0)^+} f(z)e^{i\omega z}dz$$

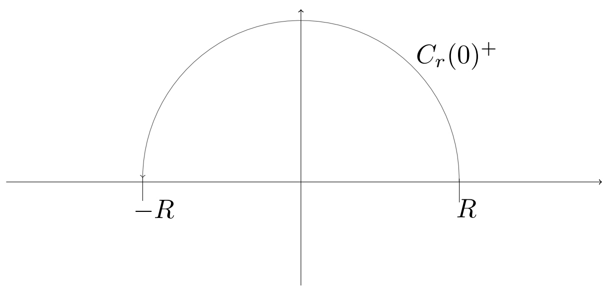

Figura 2: Semicirconferenza

$$I = \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\omega z}dz - \lim_{R \to +\infty} \int_{C_R(0)^+} f(z)e^{i\omega z}dz$$

Dove $\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0)$
Per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S, \\ \text{Im}(z_0) > 0}} \text{Res}(f(z)e^{i\omega x}, z_0)$$

L'indice di avvolgimento è uguale a 1.
Il secondo termine dell'integrale si elide grazie a il

1.3.1 Lemma di Jordan

Sotto l'ipotesi

$$\lim_{R \to +\infty} \sup_{z \in c_R^+(0)} |f(z)| = 0 \quad (**)$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)} f(z)e^{i\omega x}dz = 0$$

Osservazione: Variante analoga nel semipiano $\{\mathrm{Im} z < 0\}$ quando $\omega \in \mathbb{R}^-$
Jordan vale anche per $\omega \in \mathbb{R}^-$ in $C_R^-(0)$
Esempio: $I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$

1.4 Quarto tipo

$$I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

Ipotesi: $f(z)$ abbia un numero finito di singolarità su $\{\mathrm{Im} > 0\}$, $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)} f(z)dz = 0$ (***) e abbia un numero finito di poli semplici su $\mathbb{R}$.

$$\gamma_{R,\varepsilon} = [-R, x_0 - \varepsilon] - C_\varepsilon^+(x_0) + [x_0 + \varepsilon, R] + C_R^+(0)$$

$$I = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon^+(x_0)} f(z)dz - \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^+(0)} f(z)dz$$

1.4.1 Lemma del polo semplice

Se x_0 è un polo semplice

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon^+(x_0)} f(z)dz = \pi i \mathrm{Res}(f, x_0)$$

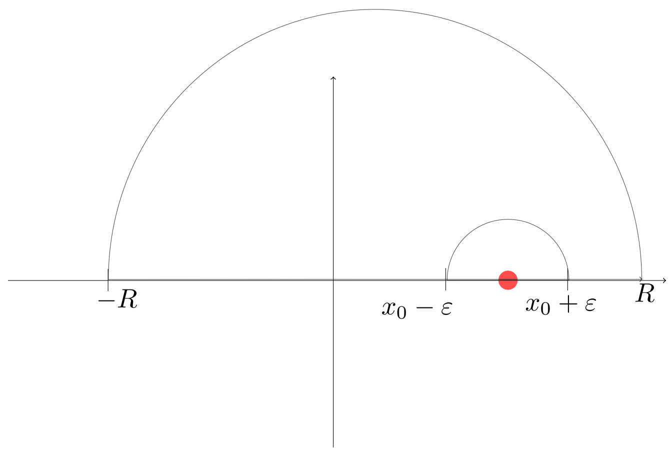

Figura 3: Quarto tipo