Appunti di Analisi III

Alessandro Sala

Indice

1 Introduzione Analisi Complessa

Definizione
Una funzione di variabile complessa è una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Numero complesso: $z = x + iy$ dove $x, y \in \mathbb{R}$ $i^2 = -1$
$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
Dunque ad ogni funzione complessa è possibile associare due funzioni reali in due variabili
$f \leftrightarrow u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Esempi di funzioni elementari

$$f(z) = z_0 \in \mathbb{C},\ z_0 = x_0 + iy_0,\ u = x_0,\ v = y_0$$

$$f(z) = Rez,\ z = x + iy,\ u(x, y) = x,\ v(x, y) = 0$$

$$f(z) = Imz,\ z = x + iy \implies f(z) = y$$

$$f(z) = |z|,\ f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} \implies u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ v(x, y) = 0$$

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

In questo ultimo caso è necessario calcolare manualmente le funzioni u, v associate

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ con } P, Q \text{ funzioni polinomiali}$$

Quest'ultima funzione non è definita $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = e^z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$$

Funzione Esponenziale
È l'estensione della funzione esponenziale nel campo dei reali

$$z = x + iy \implies e^z := e^x \cdot e^{iy} := e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Se $z = x \in R \implies e^z = e^x \implies$ è estensione della funzione reale
$u(x, y) = e^x \cos y,\ v(x, y) = e^x \sin y$

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi} = e^x(\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)) = e^z$$

Questo implica che la funzione esponenziale nel campo complesso è periodica di periodo $T = 2\pi i$ Inoltre,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$e^z = 0 \iff |e^z| = 0$$

$$|e^x(\cos y + i \sin y)| = |e^x|| \cos y + i \sin y| = e^x = 0 \quad \not\forall z$$

Funzioni coseno, seno

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Sono funzioni definite $\forall z \in \mathbb{C}$
Come per la funzione esponenziale sono estensioni delle funzioni reali
Dunque se $z = x \in R \implies \cos z = \cos x$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

$\implies \cos z$ è periodica sia nel campo dei reali sia nel campo dei complessi
Inoltre

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

Per le altre funzioni valgono proprietà analoghe essendo definite come estensioni
Formule alternative trigonometriche

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

2 Limiti

Definizione:

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z_0 \in \operatorname{acc}(\Omega), l \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \iff \forall V(l) \exists u(z_0) \text{ tc } \forall z \in (u(z_0) \cap \Omega \setminus \{z_0\}), f(z) \in V(l)$$

Definizione di continuità

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z_0 \in a(\Omega) \cap \Omega,\ f \text{ continua } z_0 \iff \exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Osservazioni
$z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, l = l_1 + il_2, f = u + iv$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = l_1 \\ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = l_2 \end{cases}$$

Con le stesse notazioni

$$f \text{ continua in } z_0 \iff u, v \text{ continue in } (x_0, y_0)$$

Sono continue (sul loro dominio di definizione) tutte le funzioni elementari introdotte nella lezione scorsa
Vale l'algebra dei limti e il teorema del limite della funzione composta ($\implies$ composizione di continue rimane continua)
Vale il teorema di unicità del limite

2.0.1 Infinito nei complessi

Un intorno di ∞ nei complessi è il complementare di un qualsiasi disco

$$z \to \infty \iff z \in u(\infty) \iff |z| > R \iff |z| \to +\infty$$

$$f(z) \to \infty \iff f(z) \in u(\infty) \iff |f(z)| > R \iff |f(z)| \to +\infty$$

2.1 Derivabilità

Definizione:

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z_0 \in \mathrm{acc}(\Omega) \cap \Omega$$

$$f \text{ derivabile (in senso complesso) in } z_0 \iff \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (\in \mathbb{C})$$

e tale limite si dice $f'(z_0)$
Definizioni alternative:

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \dots$$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda \cdot h + o(h) \quad \frac{o(h)}{h} \to 0$$

Dove λ è la derivata prima della funzione nel punto z_0
Quest'ultima è la definizione di differenziabilità
Attenzione Se u, v sono differenziabili ciò non implica la differenziabilità/derivabilità di f (Un esempio è $f(z) = Imz$)

Teorema (caratterizzazione della derivaibilità)

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z_0 \in \Omega \cap \mathrm{acc}(\Omega),\ z_0 = x_0 + iy_0,\ f = u + iv$$

$$f \text{ derivabile in } z_0 \iff u, v \text{ differenziabile in } (x_0, y_0),$$

$$\text{Inoltre } \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

(sistema, condizione di cauchy riemann) Inoltre, in tal caso

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Dimostrazione

$(\implies)$Per Hp $\exists f'(z_0) = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \implies f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + g,\ g = o(h)$

$$u(x_0+h_1, y_0+h_1)+iv(x_0+h_1, y_0+h_2) = u(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0)+(\alpha+i\beta)(h_1+ih_2)+g_1+ig_2$$

$$u(x_0 + h_1 + h_1, y_0 + h_2) = u(x_0, y_0) + (\alpha h_1 - \beta h_2) + g_1$$

$$v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = v(x_0, y_0) + (\beta h_1 + \alpha h_2) + g_2$$

Queste due equazioni indicanon che u, v sono differenziabili in (x_0, y_0), con

$$\begin{cases} \nabla u(x_0, y_0) = (\alpha, -\beta) \\ \nabla v(x_0, y_0) = (\beta, \alpha) \end{cases}$$

Questo dimostra inoltre che $f'(z_0) = \alpha + i\beta$
$(\impliedby)$ Procedere al contrario

3 Funzioni olomorfe

Definizione
f si dice olomorfa su Ω se è derivabile in $z_0 \forall z_0 \in \Omega$

3.1 Invertibilità locale

Teorema
Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω, e sia $z_0 \in \Omega$ tale che $f'(z_0) \neq 0$ allora f è "localmente invertibile in z_0"
($\exists u(z_0)$ tale che $f|_{u(z_0)}$ invertibile)
E la funzione inversa f^{-1} è derivabile in senso complesso in $f(z_0)$ e

$$(f^{-1})'|_{z_0} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Dimostrazione
$\Phi(u, v)$ definito su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \Omega$, se $detJ\Phi(x_0, y_0) \neq 0 \implies \Phi$ "localmente invertibile" e

$$J\Phi^{-1}(\Phi(x_0, y_0)) = (J\Phi(x_0, y_0))^{-1}$$

Dunque se $f = u + iv$ si riformula il teorema con $\Phi = (u, v)$

$$J\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \implies detJ\Phi(x_0, y_0) = \alpha^2 + \beta^2 = |f'(z_0)|^2$$

Poiché $f' = \alpha + i\beta$ e l'ipotesi del teorema è che $|f'(z_0)|^2 \neq 0$

$$J\Phi^{-1}(\Phi(x_0, y_0)) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\implies (f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\overline{f'(z_0)}}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

3.2 Ricerca delle primitive - antiderivazione

Problema: Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ esiste? unica? $F : \Omega \subseteq \mathbb{C}$ olomorfa in Ω tale che

$$F'(z) = f(z)$$

Una tale F si dice **primitiva** di f.

Richiamo - Teorema fondamentale del calcolo: Data $f : (a, b) \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, allora una primitiva di f è data da

$$F(x) = \int_a^x f$$

E tutte le altre primitive si ottengono aggiungendo una costante reale

---

Unicità: una primitiva, se esiste, è univocamente determinata a meno di costante additiva.

- F primitiva di f, $\lambda \in \mathbb{C} \implies F + \lambda$ primitiva di f poiché $(F+\lambda)' = F' + \lambda' = f$
- F_1, F_2 primitive di f $\implies \exists \lambda \in \mathbb{C} : F_1 - F_2 = \lambda$

$G := F_1 - F_2$, Tesi: G è costante, Dim:

$$G' = (F_1 - F_2)' = f - f = 0$$

$G = u + iv$ $G' = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ $G' = 0 \implies \nabla u(x_0, y_0) = \nabla v(x_0, y_0) = \underline{0}$
$\implies u$ costante, v costante
N.B vale se Ω è connesso

Esistenza
$f = u + iv$, $F = U + iV$ (f data, F incognita)
$F' = U_x - iU_y = V_y + iV_x = f = u + iv$

$$\implies \begin{cases} U_x = u \\ U_y = -v \end{cases} \quad \begin{cases} V_x = v \\ V_y = u \end{cases}$$

ovvero U potenziale per $w_1 := udx - vdy$
e V potenziale per $w_2 := vdx + udy$
Concludiamo che dire f ammette primitive $\iff$ ω_1, ω_2 esatte $\implies$ ω_1, ω_2 chiuse
Ovvero se la funzione f soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann dunque se f olomorfa

$$f \text{ ammette primitive } \iff \omega_i \text{ esatte } \implies f \text{ olomorfa } \iff w_i \text{ chiuse}$$

L'implicazione inversa è vera se Ω è semplicemente connesso
Dunque $F = U + iV$ dove U potenziale per ω_1, V potenziale per ω_2
Nota: ω chiusa $\implies \oint_\gamma \omega$ non cambia se sostituisco γ con un circuito omotopo.

Definizione
Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dato γ cammino in Ω parametrizzata da una funzione $r : [a,b] \to \Omega$, $r(t) = r_1(t) + ir_2(t)$

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(r(t))r'(t)dt$$

$$= \int_a^b (u+iv)(r_1' + ir_2')dt = \int_a^b (ur_1' - vr_2') + i \int_a^b vr_1' + ur_2')$$

$$= \int_\gamma \omega_1 + i \int_\gamma \omega_2$$

Riformulazione del calcolo di F

$$F(z) = \int_{\gamma : z_0 \to z} f$$

Questo implica che

$$\oint_\gamma f = 0$$

Teorema di Morera
$\oint_\gamma f = 0 \; \forall \gamma$ circuito $\subseteq \Omega \implies f$ olomorfa

Teorema di Cauchy
f olomorfa su $\Omega \implies \oint f$ non cambia se sostituisco un circuito $\gamma \subseteq \Omega$ con uno ad omotopo (In particolare, se γ omotopa ad un punto $\oint_\gamma f = 0$)

4 Funzioni analitiche in campo complesso

Definizione
$f : \Omega$ aperto $\subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice analitica su Ω se $\forall z_0 \in \Omega, \; \exists \; u(z_0)$ tale che

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in u(z_0)$$

4.1 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k$$

$$S_N(z) := \sum_{k=0}^{N} c_k (z - z_0)^k$$

Tipi di convergenza
La serie conv. puntualmente in $z \in \mathbb{C}$ se

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(z) \in \mathbb{C}$$

La serie conv. uniformemente in Ω a $S(z)$ se

$$\exists \lim_{N \to +\infty} \sup_{z \in \Omega} |S_N - S(z)| = 0$$

La serie conv. assolutamente in $z \in \mathbb{C}$ se converge

$$\sum_{k \geq 0} |c_k| |z - z_0|^k$$

Dominio di convergenza della serie

$$\mathcal{D} := \{ z \in \mathbb{C} : \text{ la serie converge puntualmente in } z \}$$

Proprietà
1. $\text{int}(\mathcal{D}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ dove R :=raggio di convergenza
$\Longrightarrow$ La serie converge assolutamente in $\text{int}(\mathcal{D})$
$\Longrightarrow$ La serie converge uniformemente su $\{|z - z_0| \leq \rho, \forall \rho < R\}$

2. $R = \frac{1}{L}$ dove
$$L = \lim_{k \to +\infty} (\sup) \sqrt{|c_k|}$$
Con la convenzione $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$

3. La serie delle derivate n-esime
$$\sum_{k \geq 0} D^n(c_k(z - z_0)^k)$$
ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza

Calcolo dei coefficienti c_k

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k(z - z_0)^k = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

$$f'(z) = \sum_{k \geq 1} kc_k(z - z_0)^{k-1} = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \dots$$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k \geq n} k(k-1)\dots(k-n+1)c_k(z - z_0)^{k-n}$$

Si ottiene infine
$$f(z_0) = c_0, \ f'(z_0) = c_1, \ f''(z_0) = 2c_2$$
$$f^{(n)}(z_0) = n!c_n$$
$$\Longrightarrow \ c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

4.2 Un altro modo di calcolare i coefficienti c_k

Sia f analitica in Ω, sia $z_0 \in \Omega$, $R :=$ raggio di conv.
Fissato $r \in (0, R)$, e fissato $k \geq 0$, calcoliamo
$$I_k := \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Dove $C_r(z_0)$ è una circonferenza centrata in z_0 di raggio r percorso una volta in senso antiorario parametrizzato $r(t) = z_0 + re^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$, scrivibile anche come $(x_0 + r\cos t) + i(y_0 + r\sin t)$

$$I_k = \int_{C_r(z_0)} \frac{\sum_{n \geq 0} c_n(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n \geq 0} c_n \int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^{n-k-1} dz$$

È permesso per la convergenza uniforme della serie.

$$\int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases}$$

Dunque tutti gli integrali nella somma si annullano tranne per $n - k - 1 = -1 \implies n = k$

$$= c_k \cdot 2\pi i \implies c_k = \frac{I_k}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

Formula di Cauchy per la derivata k-esima:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

In particolare con $k = 0$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Dove r è un qualsiasi raggio appartenente all'intervallo $(0, R)$

Osservazione:

$$z \mapsto \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \text{ è olomorfa su } D \setminus \{z_0\}$$

$$\implies \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \text{ è indipendente dalla scelta di } r \in (0, R)$$

Per $k = 0$ vale in realtà una proprietà più forte

Formula di Cauchy
f olomorfa su Ω contenente $\overline{B_r(z_0)}$, allora $\forall z \in B_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Precisazione: $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$
Questa formula è estremamente forte e generica poiché vale per tutte le funzioni olomorfe, non è necessaria l'ipotesi di funzione analitica.
Osservazione:

$$z \mapsto \frac{f_(\xi)}{\xi - z}$$

è somma della serie di potenze generica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_k z^k$$

È dunque una funzione analitica.

4.3 Analiticità e olomorfia

Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe
Sia f olomorfa su $\Omega \implies f$ analitica su Ω

Osservazioni

- $\impliedby$ (implicazione inversa) è ovvia
- Differenza rispetto al caso reale

Valgono gli sviluppi già noti dall'analisi reale.

5 Singolarità isolate e loro classificazione

Sia $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, si dice che z_0 è una **singolarità isolata** per f se $\exists u(z_0) \subseteq \Omega$ tale che f sia olomorfa se $u(z_0) \setminus \{z_0\}$

Sia z_0 una singolarità isolata per f.

5.0.1 Singolarità eliminabile

Si dice che z_0 è una **singolarità eliminabile** se

$$\exists u(z_0), \exists \tilde{f} : u(z_0) \to \mathbb{C} \text{ tale che } \tilde{f}|_{u(z_0)\setminus\{z_0\}} = f$$

e $\tilde{f}$ sia olomorfa in $u(z_0)$.

Esempio: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$
Osservazione: Se $\exists \tilde{f}$, $\tilde{f}$ è unica.
Se una g è olomorfa è anche continua:

$$\lim_{z\to z_0} [g(z) - g(z_0)] = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) = g'(z_0) \cdot 0 = 0$$

Ne consegue che il valore che assumera $\tilde{f}$ in z_0 è

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$$

Osservazione 2: z_0 singolarià eliminabile per $f \implies f$ limitata (in modulo) vicino a z_0.

$$\exists u(z_0), \exists M > 0 \text{ tale che } \|f(z)\| \leq M \forall u(z_0) - \{z_0\}$$

Infatti, se z_0 singolarità eliminabile per $f \implies \exists \lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

Teorema di rimozione della singolarità
Se f olomorfa e limitata in $u(z_0) \setminus \{z_0\} \implies z_0$ è singolarità eliminabile

Quindi, in conclusione, se f è olomorfa su $u(z_0) \setminus \{z_0\}$, z_0 singolarità eliminabile di $f \iff f$ limitata in $u(z_0) \setminus \{z_0\}$

5.0.2 Polo

Si dice che z_0 è un **polo** per f se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

Esempio: $f(z) = \frac{1}{sz^m m}$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

5.0.3 Singolarità essenziale

Si dice che z_0 è una **singolarità essenziale** per f se è una singolarità isolata e non è né eliminabile né polo.

Esempio: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$
Teorema di Picard: z_0 singolarità essenziale per $f \implies \forall u(z_0), f(u(z_0))$ (ovvero l'immagine di f) è data da $\mathbb{C}$ oppure $\mathbb{C} \setminus \{1 \text{ punto}\}$.

5.1 Sviluppabilità in serie di Laurent

Teorema f olomorfa su $\Omega \setminus \{z_0\}$ aperto di $\mathbb{C}$, allora f è "sviluppabile in serie di Laurent di centro z_0", ovvero

$$\exists u(z_0) \subseteq \Omega \text{ tale che } \forall x \in u(z_0) \setminus \{z_0\}$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$$

$$= \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k<0} c_k (z - z_0)^k$$

Ovvero parte regolare dello sviluppo + parte singolare dello sviluppo
Inoltre, il calcolo dei coefficienti:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

In particolare:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} f(z) dz$$

C'è una relazione tra c_{-1} e gli integrali sui circoli. Esempio: $f(z) = \frac{1}{z}$
Tramite serie di Laurent è possibile riconoscere le singolarità
z_0 è singolarità eliminabile $\iff$ parte singolare dello sviluppo $= 0$.

6 Riconoscere le singolarità

- z_0 eliminabile $\iff$ parte singolare dello sviluppo $= 0$
- z_0 polo
- z_0 sing. essenziale

Idea: z_0 è un polo per $f \iff z_0$ è zero per la funzione $1/f$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f} = 0$$

6.0.1 Principio di identità

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e supposto Ω connesso
Sia $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$, sono equivalenti i seguenti fatti

1. $z_0 \in \operatorname{acc}(Z(f))$
2. $f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $Z(f)$ contiene un intorno di z_0
4. $Z(f) \equiv \Omega$

In conclusione: $Z(f)$

- È fatto da punti isolati, oppure
- Coincide con tutto Ω

6.0.2 Ordine di zeri

Sia f olomorfa su Ω connesso, $f \neq 0$ su Ω, sia $z_0 \in Z(f)$, Per il principio di identità, z_0 è uno zero isolato.
La (2) è quindi falsa $\implies \{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \neq 0$. Per il principio di buon ordinamento $\nu := \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$: **Ordine dello zero**.

Osservazione: ν è anche caratterizzato da:

$$f(z) = \sum_{n \geq \nu} c_n (z - z_0)^n = c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu$$

Inoltre

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^\nu} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

6.1 Ordine dei poli

z_0 polo per $f \iff z_0$ zero per $1/f$

> **Definizione:** Sia z_0 polo per f. Chiamiamo ordine del polo z_0 l'ordine di z_0 come z_0 per $1/f$

Definizione: In particolare si dice polo semplice un polo di ordine 1.
Osservazione: L'ordine di un polo è caratterizzato anche:

- z_0 polo di ordine ν per $f \iff z_0$ zero di ordine ν per $1/f \iff$

$$\begin{aligned} &\exists \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^\nu} \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ \implies &\exists \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^\nu f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \quad (*) \end{aligned}$$

- z_0 polo di ordine ν per $f \iff$

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \text{ con } c_{-\nu} \neq 0$$

Infatti

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \implies (z-z_0)^\nu f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{n+\nu}$$

(*) $\iff$ tutti i coefficienti c_n con $n+\nu<0$ e il coefficiente $c_{-\nu}\neq 0$.
Dunque, lo sviluppo di Laurent di una funzione che ha un polo ha parte singolare composta da un numero finito di termini.
È quindi possibile classificare le singolarità guardando lo sviluppo in serie di Laurent, guardando la parte singolare

- p. singolare nulla: ELIMINABILE
- p. singolare con numero finito di termini: POLO
- p. singolare con infiniti termini: ESSENZIALE

Osservazioni su zeri e poli

1. Se f, g hanno entrambe uno zero in z_0 o entrambe un polo, allora

$$\exists \lim_{z\to z_0} \frac{f}{g} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'}{g'}$$

Cenno di dim (Primo caso):

$$f(z) = c_\nu(z-z_0)^\nu + o(z-z_0)^\nu, g(z) = c_\eta(z-z_0)^\eta + o(x-x_0)^\eta$$

Sono possibili solo tre casi: $\eta=\nu \implies$ limite finito, $\nu>\eta$ limite 0, $\nu<\eta$ limite infinito.

2. z_0 zero di ordine ν per $f \iff \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)}{f(z)} = \nu$

Questa è una modalità per calcolare l'ordine. Dim: $f(z) = c_\nu(z-z_0)^\nu + \ldots$, $f'(z) = \nu c_\nu (z-z_0)^{(\nu-1)} + \ldots$

$$\implies \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu c_n u(z-z_0)^\nu + o(z-z_0)^\nu}{c_\nu(z-z_0)^\nu + o(z-z_0)^\nu} \to_{z-z_0} \nu$$

3. z_0 zero di ordine ν per f, con $\nu \geq 1 \implies z_0$ zero di ordine $\nu-1$ per f'.
   z_0 polo di ordine ν per f, con $\nu \geq -1 \implies z_0$ polo di ordine $\nu+1$ per f.
   Controllare su libro.

6.1.1 Unicità del prolungamento analitico

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ connesso, sia $S \subseteq \Omega$ tale che $\mathrm{acc}(S) \cap \Omega \neq 0$.
Data $f : S \to \mathbb{C}$, esiste al più una $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $\tilde{f}|_S = f$

Dimostrazione: Supponiamo $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ siano prolungamenti di f.
Tesi: $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2$
Considerando $g := \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$. Tesi: $g \equiv 0$.
g è olomorfa, $S \subseteq Z(g) \implies Z(g)$ ha punti di accumulazione in Ω, quindi $Z(g) \equiv \Omega$

7 Teorema dei residui

Motivazione dello studio del teorema: è il calcolo di integrali in campo complesso e anche in campo reale.
Se f è olomorfa su $\Omega \subseteq \mathbb{C} \implies \int_\gamma f(z)dz = 0$ dove γ è un circuito omotopo a un punto. Se f è olomorfa su Ω tranne che in un numero finito di punti, come si calcola $\int_\gamma f(z)dz$?

Definizione
Se z_0 è una singolarità isolata per f si dice residuo di f in z_0 il coefficiente c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent di f di centro z_0.

7.1 Calcolo dei residui

- Se z_0 è una singolarità eliminabile: $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$ poiché la parte singolare dello sviluppo $\equiv 0$
- z_0 singolarità essenziale: non c'è modo diretto di calcolare il residuo (serve calcolare lo sviluppo)
- Se z_0 è un polo di ordine ν

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(\nu - 1)!} D^{(\nu-1)}[(z - z_0)^\nu f(z)]$$

In particolare se z_0 è un polo semplice

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)f(z)]$$

Dimostrazione polo semplice

z_0 polo semplice $\implies f(z) = \sum_{n \geq -1} c_n(z - z_0)^n$, con $c_{-1} \neq 0$

$$(z - z_0)f(z) = \sum_{n \geq -1} c_n(z - z_0)^{n+1} = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + o(z - z_0)^2$$

$$\lim_{z \to z_0} [(z - z_0)f(z)] = c_{-1}$$

Osservazione: $\text{Res}(\frac{g}{h}, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ con g olomorfa, h con uno zero di ordine 1 in z_0.

Dimostrazione

Caso $g(z_0) \neq 0 \implies z_0$ polo semplice

$$(z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)}{h'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)} \to \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Tramite la formula per il residuo del polo semplice

$$\text{Res}(\frac{g}{h}, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Caso G(z0)=0 Dico che z_0 è una singolarità eliminabile

$$\frac{g}{h} = \frac{g'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)}{h'(z_0(z - z_0) + o(z - z_0)} \to \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)} \in \mathbb{C}$$

7.2 Definizione e calcolo dell'indice di avvolgimento

Definizione (intuitivia)
Sia γ circuito $\subseteq \mathbb{C}$ e sia $z_0 \notin \gamma$.
Si dice indice di avvolgimento di γ rispetto a z_0 è il numero di volte che γ gira attorno a z_0, contate con segno + nel caso di verso antiorario

Definizione (formale)
Sia $r(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ parametrizzazione di γ (γ) circuito $\subseteq \mathbb{C},\ z_0 \notin \mathbb{C}$.
Sia $\rho(t) := |r(t) - z_0|$. Allora $\exists \theta : [a, b] \to \mathbb{C}$ tale che $r(t) = z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)}$.

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

L'indice è un numero $\in \mathbb{Z}$ poiché $r(a) = r(b) \implies \rho(a) = |r(a) - z_0| = |r(b) - z_0| = \rho(b)$

$$r(a) = \rho(a) + e^{i\theta(a)}$$
$$r(b) = \rho(b) + e^{i\theta(b)}$$
$$\implies e^{i\theta(a)} = e^{i\theta(b)}$$
$$\implies i\theta(a) - i\theta(b) = 2k\pi i = \theta(a) - \theta(b) = 2k\pi$$

Osservazioni

1. L'indice non cambia per parametrizzazioni equivalenti (dello stesso circuito)

2. L'indice di avvolgimento non cambia sostituendo γ con un circuito omotopo a γ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

7.2.1 Modalità analitica per calcolare l'indice

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$$

Dimostrazione
$r(t) = z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)},\ t \in [a, b].$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)} - z_0} dt \\
&= \int_a^b \frac{\rho'(t)etsi\theta(t)}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} dt + i \int_a^b \frac{\rho(t)\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} dt \\
&= \log \rho(t)|_a^b + i[\theta(b) - \theta(a)] = i[\theta(b) - \theta(a)]
\end{aligned}$$

Dunque dividendo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

7.3 Teorema dei residui

Sia Ω aperto $\subseteq \mathbb{C}$ e sia $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ circuito omotopo a un punto (in Ω).
Sia $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ olomorfa, dove S "insieme singolare" soddisfa

- $\gamma \subseteq \Omega \setminus S$
- $\text{acc}(S) \cap \Omega = \emptyset$

Allora:
$\text{Ind}(\gamma, z_0) \neq 0$ per al più un numero finito di punti e vale

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S} \text{Res}(f, z_0)\text{Ind}(\gamma, z_0)$$

8 Applicazioni del teorema dei residui in campo reale

8.1 Primo tipo

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt = \int_0^{2\pi} g(e^{it})ie^{it}dt$$

$$\int_{C_1(0)} g(z)dz$$

Se g soddisfa le ipotesi del teorema dei residui su $C_1(0) \subseteq \Omega$, con $\gamma = C_1(0)$

$$= 2\pi i \sum_{|z_0|<1} \text{Res}(g, z_0)$$

Esempio: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t} dt$

8.2 Secondo tipo

$$\text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx := \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

La definizione cambia leggermente nel caso sia presente una singolarità su $\mathbb{R}$. Se f è integrabile (secondo Riemann) allora

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

In generale può accadere che il V.P. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \in \mathbb{R}$ ma f non è integrabile
Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 1 & x \in [0,1] \\ -1 & x \in [-1,0] \\ \frac{1}{x} & x \leq -1 \end{cases}$$

f non è integrabile secondo Riemann, ma il V.P. è uguale a 0.

Ipotesi: $f = f(z)$ abbia un numero finito di singolarità nel semipiano $\{\text{Im} z > 0\}$ (e nessuna singolarità sull'asse reale)+ (*) ipotesi di decadimento.

$$I = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{-R} f(x)dx + \int_{C_R^+(0)} f(z)dz - \int_{C_R^+(0)} f(z)dz$$

$$I = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz - \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R(0)^+} f(z)dz$$

Dove $\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0)$
Per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S, \\ \text{Im} z_0 > 0}} \text{Res}(f, z_0)$$

L'indice di avvolgimento è uguale a 1.

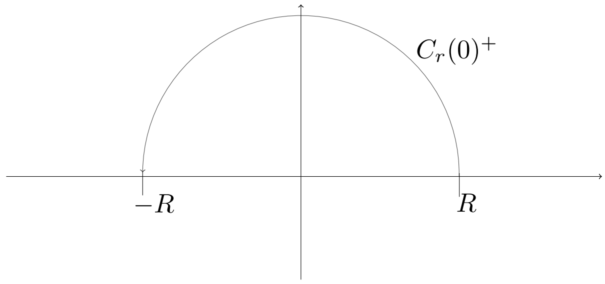

Figura 1: Semicirconferenza

8.2.1 Lemma tecnico di decadimento

Se $\exists \alpha > 1$ tale che $|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^\alpha}$ (per $|z|$ abbastanza grande) (*), allora

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)dz = 0$$

Aggiungendo l'ipotesi di decadimento all'integrale precedente si avrà il risultato scritto.
Si ha un calcolo analogo per il semipiano $\{\text{Im} < 0\}$

8.3 Terzo tipo

$$I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\omega x}dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S \\ \text{Im} z_0 > 0}}^{\infty} \text{Res}(f(z)e^{i\omega z}, z_0)$$

Dove $\omega \in \mathbb{R}^+$
Ipotesi: $f(z)e^{i\omega x}$ abbia un numero finito di singolarità nel semipiano $\{\text{Im} z > 0\}$ (e nessuna singolarità sull'asse reale) + (**) lemma di Jordan.

$$I = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{-R} f(z)e^{i\omega z}dz + \int_{C_R(0)^+} f(z)e^{i\omega z}dz - \int_{C_R(0)^+} f(z)e^{i\omega z}dz$$

$$I = \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\omega z}dz - \lim_{R \to +\infty} \int_{C_R(0)^+} f(z)e^{i\omega z}dz$$

Dove $\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0)$
Per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S, \\ \text{Im}(z_0) > 0}} \text{Res}(f(z)e^{i\omega x}, z_0)$$

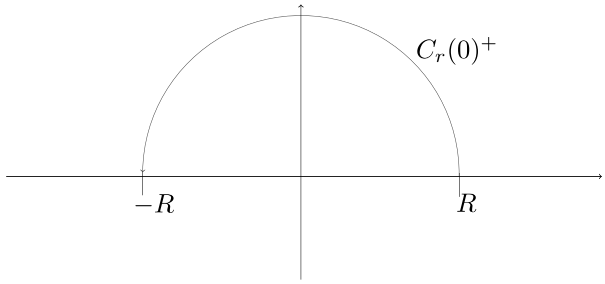

Figura 2: Semicirconferenza

L'indice di avvolgimento è uguale a 1.
Il secondo termine dell'integrale si elide grazie a il

8.3.1 Lemma di Jordan

Sotto l'ipotesi

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{z\in c_R^+(0)}|f(z)| = 0 \quad (**)$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)e^{i\omega x}dz = 0$$

Osservazione: Variante analoga nel semipiano $\{\mathrm{Im} z < 0\}$ quando $\omega \in \mathbb{R}^-$
Jordan vale anche per $\omega \in \mathbb{R}^-$ in $C_R^-(0)$
Esempio: $I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

8.4 Quarto tipo

$$I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

Ipotesi: $f(z)$ abbia un numero finito di singolarità su $\{\mathrm{Im} > 0\}$, $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)dz = 0$ (***) e abbia un numero finito di poli semplici su $\mathbb{R}$.

$$\gamma_{R,\varepsilon} = [-R, x_0 - \varepsilon] - C_\varepsilon^+(x_0) + [x_0 + \varepsilon, R] + C_R^+(0)$$

$$I = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon^+(x_0)} f(z)dz - \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)dz$$

8.4.1 Lemma del polo semplice

Se x_0 è un polo semplice

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon^+(x_0)} f(z)dz = \pi i \text{Res}(f, x_0)$$

Esempio: $I = (\text{V.P.}) \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos 2x}{x^2} dx$

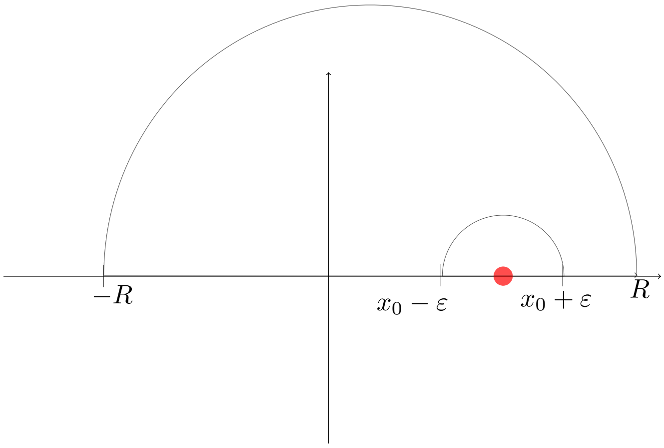

Figura 3: Quarto tipo

9 Cenni aggiuntivi sull'analisi complessa

9.1 Residuo all'infinito

Definizione: Diciamo che ∞ è una singolarità isolata per f se f olomorfa nel complementare di una palla

In modo equivalente: $g(z) = f(\frac{1}{z})$ ha una singolarità isolata nell'origine.

$$\text{Olomorfa su } \left|\frac{1}{z}\right| > R \iff |z| < R$$

$$\text{Res}(f, \infty) := \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

Teorema: La somma di tutti i residui di una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{\text{n. finito di punti}\}$ è zero. (compreso il punto all'infinito).

Da utilizzare quando si deve calcolare la somma di tanti residui al finito. (stesso indice di avvolgimento)

9.2 Funzioni polidrome

$z = |z|e^{i\text{Arg}z}$, Arg$z := \{\arg + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, arg$z$ argomento principale $\in [0, 2\pi]$.

$$\sqrt[n]{z} = \{ \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\text{Arg}z}{n}} \} = \{ \sqrt[n]{|z|} e^{i(\frac{\arg z}{n} + \frac{2k\pi}{n})} : k = 0, \dots, n-1\}$$

$$\log z = \{\log |z| + i\text{Arg}z\}$$

Alla radice sono associati n valori, al logaritmo ∞ valori.
$z \mapsto \sqrt[n]{z}, \log z$ non sono funzioni!
Per definire una radice n-esima funzione si può specificare l'intervallo di variabilità di Arg$z$. $z \in \mathbb{C} \mapsto \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\text{Arg}z}{n}}$ con Arg$z \in [\overline{\theta}, \overline{\theta} + 2\pi]$: Branca della radice n-esima.
Osservazione: Una branca della radice n-esima non è continua su $\mathbb{C}$. (è continua su $\mathbb{C} - \{\theta = \overline{\theta}\}$
Non è possibile incollare due branche diverse ottenendo una funzione olomrofa su $\mathbb{C}$.

9.3 Funzioni armoniche

Definizione: $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice armonica se

$$\nabla^2 u = 0 = u_{xx} + u_{yy}$$

Osservazione: $f = f(z)$ olomorfa, $f = u + iv \implies u, v$ armoniche.

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

Sommando le due equazioni

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(Analogamente per $\nabla^2 v = 0$
Osservazione 2: u armonica su Ω, con Ω semplicemente connesso $\implies \exists v$ armonica coniugata di u t.c. $f = u + iv$ olomorfa.

10 Analisi funzionale

Uno **spazio vettoriale** (su $\mathbb{R}$) è un insieme (V) su cui sono definite due operazioni:
Somma $+ : V \times V \to V$
Prodotto per scalare $\cdot : \mathbb{R} \times \to V$
Tali operazioni godono delle seguenti proprietà
Per la somma

- $u + v = v + u$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- $u + \underline{0} = u$
- $u + (-u) = \underline{0}$

Per il prodotto per scalare

- $(ts)u = t(su)$
- $t(u + v) = tu + tv$
- $(t + s)u = tu + su$
- $1 \cdot u = u$

10.0.1 Norma

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Una norma su V è una funzione $\|.\| : V \to \mathbb{R}^+$ tale che:

1. $\|v\| > 0 \forall v \in V - \{\underline{0}\}$ (positività)
2. $\|tv\| = |t|\|v\| \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ (omogeneità)
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \forall u, v \in V$ (dis. triangolare)

$(V, \|.\|)$ si dice **spazio vettoriale normato**.

Seguono le seguenti proprietà

4. $\|\underline{0}\| = 0$
5. $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \forall u, v \in V (dim)$

Norma euclidea:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} (|x|^p)^{\frac{1}{p}}$$

La disuguaglianza triangolare per la norma p, ovvero disuguaglianza di Minkowski, richiede l'ipotesi $p \geq 1$.

10.0.2 Norma su uno spazio funzionale di dimensione infinita

$V = C^0([a, b])$

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

Definizione: Sia $(V, \|.\|)$ sp. vettoriale normato. Allora $d(u,v) := \|\underline{u} - \underline{v}\|$ definisce una distanza su V, ovvero

$$d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

tale che

1. $d(u,v) \geq 0$ con $= 0 \iff u = v$ positività
2. $d(u,v) = d(v,u)$ simmetria
3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ disuguaglianza triangolare

$$d_p(x,y) = \|x - y\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i - y_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|$$

Definizione: (V, d) si dice spazio metrico

Osservazione: In uno spazio metrico possiamo definire le **sfere**: dato $r \geq 0, v_0 \in V$

$$B_r(v_0) := \{v \in V : d(v, v_0) < r\}$$

Si dice sfera chiusa se la disuguaglianza non è stretta.

Definizione: Se $\{v_n\} \subseteq (V, \|.\|)$, si dice che $v_n \to v$ in V se

$$d(v_n, v) \to 0, \text{ oppure } \|v_n - v\| \to 0$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : d(v_n, v) = \|v_n - v\| < \varepsilon \forall n \geq \nu)$$

Alcuni fatti veri in dimensione finita ma falsi in dimensione infinita:

1. Tutte le norme sono "equivalenti" fra loro
2. Tutte le successioni di Cauchy convergono
3. Tutti i sottospazi vettoriali sono chiusi

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$), consideriamo su V due possibili norme $\|.\|, |||.|||$.
Queste due norme si dicono **equivalenti** se:

1. $\exists c > 0 : \forall v \in V, \|v\| \leq c|||v|||$
2. $\exists c' > 0 : \forall v \in V, |||v||| \leq c\|v\|$

Le successioni convergenti nelle due norme sono le stesse.
Interpretazione geometrica:

$$\|.\|_\infty \leq \|.\|_1 \iff B_1^1(0) \subseteq B_1^\infty(0)$$

Teorema: Se $\dim V < +\infty \implies$ tutte le norme su V sono tra loro equivalenti

In uno spazio a dimensione infinita non è generalmente vero, ad esempio nello spazio delle funzioni continue su $[a, b]$

Definizione: Sia $(V, \|.\|)$ uno spazio vettoriale normato. Una successione $\{v_n\} \subseteq V$ si dice successione di cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : d(v_n, v_m) < \varepsilon \ \forall n, m \geq \nu$$

Osservazione: Vale sempre che se $\{v_n\}$ converge allora è di Cauchy.

$$(\|v_n - v_m\| = \|v_n - v + v - v_m\| \leq \|v_n - v\| + \|v_m - v\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Teorema: Se $\dim V < +\infty$ vale anche il viceversa, ovvero

$$\{v_n\} \text{ converge} \iff \{v_n\} \text{ di Cauchy}$$

Questo teorema è falso se $\dim V = +\infty$
Prendendo lo spazio delle funzioni $V = C^0([a, b])$ con norma 1, si può costruire una successione di Cauchy che non converge.

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon, \ \int_a^b |f_n - f_m| = \int_a^b f_m - f_n$$

10.1 Spazio di Banach

Definizione: Uno spazio vettoriale normato $(V, \|.\|)$ si dice completo o di Banach se tutte le successioni di Cauchy convergono.

Teorema/osservazione: $V = (C^0([a, b], \|.\|_\infty)$ è di Banach
Generalizzazione:

$$V = C^k([a, b]) \ \ \|f\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

Teorema Sia $(V, \|.\|)$ spazio vettoriale normato. Se $\dim V < +\infty \implies$ tutti i sottospazi vettoriali W sono **chiusi**.

$$\{v_n\} \subseteq W, v_n \to v \text{ in } V \implies v \in W$$

Il teorema diventa falso se $\dim V = +\infty$, ad esempio $V = (C^0([a, b]), \|.\|_\infty)$.

11 Integrazione secondo Lebesgue

1. Misure e funzioni misurabili
2. Definizione di integrale di Lebesgue
3. Confronto con Riemann
4. Teoremi principali

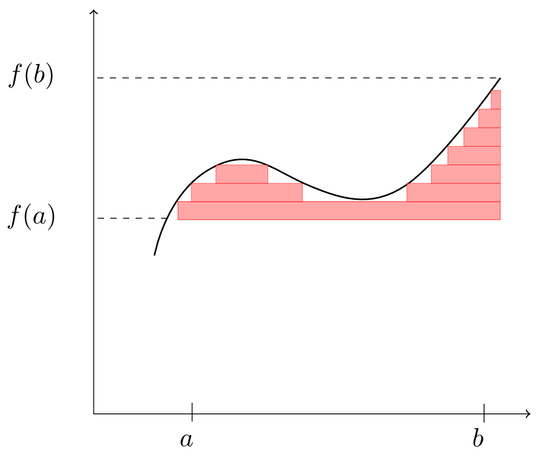

Figura 4: Integrale secondo Lebesgue, intuizione geometrica

$$\int_a^b f = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} l(f^{-1}(j_k)) \cdot y_k$$

11.0.1 Misure e funzioni misurabili

Definizione: Sia X insieme, e sia $F \subseteq P(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X.
F si dice una σ-algebra se:
(i) $\varnothing \in F$
(ii) $A \in F \implies X \setminus A \in F$
(iii) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F \implies \bigcup_n A_n \in F$

Osservazione: $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F \implies \bigcap_n A_n \in F$
Esempi

- X qualsiasi, $F = P(X) =$ parti di X
- $X = \mathbb{R}^n$, $F =$ la più piccola σ-algebra contenente gli aperti (σ di Borell)

Definizione: la coppia (X, F) si dice spazio misurabile

Definizione: Sia (X, F) spazio misurabile, una misura positiva su (X, F) è una funzione

$$\mu : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

tale che

1. $\mu(A) \geq 0 \forall A \in F$ (positività)
2. Se $\{A_n\}$ è una famiglia al più numerabile di insiemi di F 2 a 2 disgiunti allora

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

(additività, eventualmente $+\infty = +\infty$)

Esempi:

- $(X, P(X))$, $\mu(A) = \text{card} A$
- $(X, P(X))$ fissato $x_0 \in X$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 \text{ se } x_0 \in A \\ 0 \text{ se } x_0 \notin A \end{cases}$$

Osservazione: Seguono da 1), 2)

3. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots,\ A_i \in F$

$$\implies \mu(\cup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

4. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots,\ A_i \in F, \mu(A_1) < +\infty$

$$\implies \mu(\cap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Teorema: Esistono su $\mathbb{R}^n$ una σ-algebra M (misurabile secondo lebesgue) e una misura positiva m (misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$) tali che:

- Tutti gli insiemi aperti appartengono a M
- $A \in M$ e $m(A) = 0 \implies \forall B \subseteq A,\ B \in M$ e $m(B) = 0$ (completezza)
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i\ i = 1, \dots, n\}$

$$\implies m(A) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n)$$

[...]

Osservazione: Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili secondo Lebesgue.
Osservazione: La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ estende il concetto di volume n-dimensionale
Osservazione: Gli insiemi di misura nulla sono importanti

Definizione: Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice misurabile secondo Lebesgue se

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto},\ f^{-1}(A) \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

$$\forall C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso },\ f^{-1}(C) \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

Osservazione: f continua $\implies$ f misurabile secondo Lebesgue (f continua $\implies \forall A$ aperto $f^{-1}(A)$ aperto $\implies \forall A$ aperto $f^{-1}(A)$ misurabili
Osservazione 2: Sono misurabili anche limiti, inferiore, superiore di funzinoni continue (di funzioni misurabili)

Più in generale se

$$f : E \to \mathbb{R}$$

con E misurabile, f si dice misurabile secondo Lebesgue se $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $E \cap f^{-1}(A)$ misurabile secondo Lebesgue

11.0.2 Definzione di integrale secondo Lebesgue

Sia $f : E$ misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile.
Funzioni semplici
S funzione semplice è una funzione (misurabile) che assume un numero finito di valori (ciascuno su un insieme misurabile).

$$S = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{E_i},\ \chi_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dove gli E_i sono insiemi misurabili 2 a 2 disgiunti

$$\int_E S := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k m(E_k)$$

Precisazione: con la convenzione $0 \cdot \infty = 0$
Funzioni misurabili $f \geq 0$

$$\int_E f := \sup_{\substack{S \text{ semplici} \\ S \geq f}} \int_E S \quad \left(= \inf_{\substack{S \text{ semplici} \\ S \geq f}} \int_E^S \right)$$

Funzioni misurabili di segno qualsiasi
Data f misurabile su E misurabile, scriviamo:
$f = f^+ - f^-$ con $f^+, f^- \geq 0$, $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := -\min\{f, 0\}$

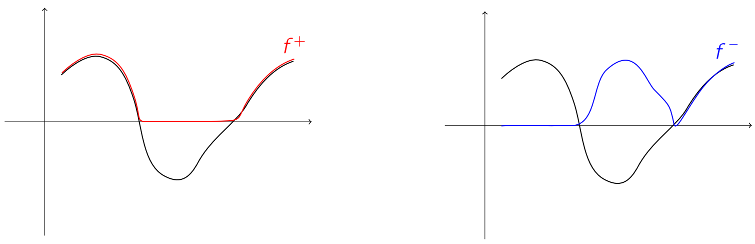

Figura 5: Funzioni di segno qualsiasi

$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-$$

A patto che almeno uno tra i due integrali sia finito, (eventualmente l'integrale vale $\pm\infty$

> **Definizione:** $f : E \to \mathbb{R}$ misurabile si dice *integrabile secondo Lebesgue* se
> $$\int_E f \in \mathbb{R}$$

Osservazione: f è integrabile secondo Lebesgue $\iff \int_E f^\pm \in \mathbb{R}$
Quindi f integrabile seconodo Lebesgue $\iff$ $|f|$ integrabile secondo Lebesgue, infatti

$$|f| = f^+ + f^-$$

11.0.3 Proprietà principali dell'integrale di Lebesgue

1) **Linearità:** f, g Lebesgue integrabili, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g$ Lebesgue integrabile e

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

2) **Monotonia:** f, g Lebesgue integrabili, $f \leq g$ q.o. su E

$$\implies \int_E^f \leq \int_E g$$

3) **Maggiorazione del modulo:** f Lebesgue integrabile

$$\implies \left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

Segue da 2), $-|f| \leq f \leq |f| \implies -\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|$

4) L'integrale di Lebesgue "non vede" gli insiemi di misura nulla.
Sia S semplice, $E \to \mathbb{R}$

$$S(x) = \begin{cases} 0 \text{ su } E \setminus N \\ 1 \text{ su } N \end{cases} \qquad m(N) = 0$$

$$\int_E S = m(E \setminus N) \cdot 0 + m(N) \cdot 1 = 0$$

Più in generale, se f misurabile: $E \to \mathbb{R}$ se f si annulla su E tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = 0$$

Conseguenza: se f, g misurabili: $E \to \mathbb{R}$ se $f = g$ su E tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = \int_E g$$

> **Definizione:** Si dice che una proprietà $P(x)$ vale per q.o. $x \in E$ se $P(x)$ vale $\forall x \in E \setminus N$, con $m(N) = 0$

Quindi

- $f = 0$ q.o. su $E \implies \int_E = 0$
- $f = g$ q.o. su $E \implies \int_E f = \int_E g$

11.1 Confronto Riemann-Lebesgue

11.1.1 Integrali propri

f R-integrabile $\implies$ f L-integrabile, in caso affermativo, i valori degli integrali coincidono, in generale non vale il viceversa.

($\implies$) Le funzioni semplici seconodo Lebesgue S_L sono una classe più ampia delle funzinoi semplici secondo Riemann S_R

$$\sup_{\substack{s\in S_R\\ s\leq f}}\int_E s \leq \sup_{\substack{s\in S_L\\ s\leq f}}\int_E s \leq \inf_{\substack{s\in S_L\\ s\geq f}}\int_E s \leq \inf_{\substack{s\in S_R\\ s\geq f}}\int_E s$$

Controesempio: $\exists f$ L-integrabile ma non R-integrabile.

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Non R-integrabile poiché approssimando da sotto e da sopra non si trova lo stesso valore

$$s \in S_R, s \geq f \implies s \geq 1 \text{ su } (0,1) \implies \int_0^1 s \geq 1$$

$$s \in S_R, s \leq f \implies s \leq 0 \text{ su } (0,1) \implies \int_0^1 s \leq 0$$

f è però L-integrabile, $\int_0^1 f = 0$

$$\int_0^1 f = 1 \cdot m(0,1) \cap \mathbb{Q} + 0 \cdot m((0,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = 0$$

11.1.2 Integrali impropri

In $\mathbb{R}$, supponiamo che f limitata, sia R-integrabile su $[-L, L] \forall L > 0$.
Allora: f L-integrabile su $\mathbb{R} \iff |f|$ R-integrabile (in senso improprio su $\mathbb{R}$).
E in tal caso l'integrale di Lebesgue di f coincide con l'integrale improprio di f.
Analogamente se f non è limitata.
Controesempio: una funazione R-integrabile ma non R-integrabile in modulo e quindi non L-integrabile.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ su } (0, +\infty)$$

Riemann integrabile su $(0, +\infty)$ (tramite analisi complessa)
Ma non è Riemann integrabile in modulo

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} = +\infty$$

(Tramite serie)

12 Spazi di Lebesgue

Definizione: Sia E misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$

$$L^1(E) := \{f : E \to \mathbb{R} \text{ L-integrabili}\}/_{\sim}$$

Tale insieme è uno spazio vettoriale per la linearità dell'integrale.

Definizione: Data $f \in L^1(E)$
$$\|f\|_1 := \int_E |f|$$

Tale norma rispetta le tre proprietà necessarie.
C'è un problema, $\int_E |f| = 0 \not\Longrightarrow f = 0$ su E, $\Longrightarrow f = 0$ q.o. su E.

Definizione: Date $f, g \in L^1(E)$ diciamo che f è equivalente a g se $f = g$ q.o. su E.

Proprietà di una relazione di equivalenza:

- $f \sim f$
- $f \sim g \iff g \sim f$
- $f \sim g$ e $g \sim h \implies f \sim h$

Dunque identifichiamo le funzioni equivalenti secondo l'ultima definizione.

Teorema: $(L^1(E), \|.\|)$ è uno spazio di Banach

Definizione:
$\{f_n\} \subseteq L^1(E), f_n \to f$ in $L^1(E) \iff \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$

ovvero
$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| dx = 0$$
Consideriamo per semplicità $f = 0$
Q: $f_n \to 0$ puntualmente q.o. su E , allora $\int_E f_n = 0$?
Controesempio 1
$$\exists f_n \subseteq L^1(\mathbb{R}) : \begin{cases} f_n \to 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R} \\ f_n \not\to \text{ in } L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$
$$f_n = \chi_{n,n+1} = \begin{cases} 1 & x \in (n, n+1) \\ 0 & x \notin (n, n+1) \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$
Fissato $x_0 \in \mathbb{R},\ f_(x_0) = 0$ definitivamente (per $n \gg 1$)
$$\int_{\mathbb{R}} \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(n,n+1)} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$$
Controesempio 2
$$\exists f_n \subseteq L^1(0,1) : \begin{cases} f_n \to 0 \text{ in } L^1(0,1) \\ f_n \not\to 0 \text{ q.o. su } (0,1) \end{cases}$$

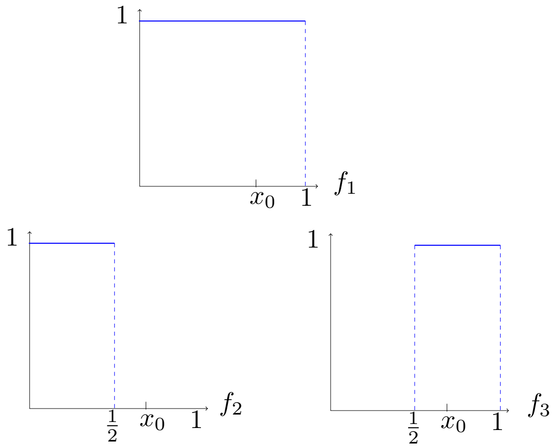

Figura 6: Successione

$f_n \to 0$ in $L^1(0,1)$, $\|f_n\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |f_n| \to 0$
$f_n \not\to 0 \forall x_0 \in (0,1)$
Fissato $x_0 \in (0,1), \exists\ K(n) : f_{K(n)}(x_0) = 1$

Proposizione: Se $f_n \to 0$ in $L^1(E)$, allora $\exists f_{K(n)} \to 0$ q.o. su E.

Osservazioni:

- Si può mettere f al posto di 0.
- Nell'esempio è vero
- Conseguenza: Se una successione f_n ammette limite in $L^1(E)$ allora questo limite deve coincidere col limtie puntuale q.o.

Infatti, $f_n \to f$ q.o. in $L^1(E)$ Allora $\exists\ f_{K(n)} \to f$ q.o. su E. (per la proposizione)
Quindi se $f_n \to g$ q.o. su E. ($\implies f_{K(n)} \to g$ q.o. su E, per l'unicità del limite puntuale quasi ovunque, $f = g$ q.o. su E)

Teorema di convergenza dominata (di Lebesgue)
Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$ e sia $f_n \to f$ q.o. su E
Supponiamo che $\exists g \in L^1(E)$ indipendente da n tale che

$$(*)\ |f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.o. } x \in E, \forall n \in \mathbb{N} \text{ (definitivamente)}$$

Allora $f_n \to f$ in $L^1(E)$

Osservazioni

- La (*) è un'ipotesi molto più debole della convergenza uniforme

- In particolare per $f_n(x) = x^n$ su $(0,1)$ la (*) è verificata, prendendo $g \equiv 1$
- Invece nel controesempio 1, se $|f_n(x)| \leq g$ q.o. su $\mathbb{R}, g \notin L^1(\mathbb{R})$
- È un teorema di passaggio al limite sotto integrale.

$$|f_n - f| \to 0 \text{ su } E \implies \int_E |f_n - f| \to 0$$

$\implies$ il limite degli integrali $\equiv$ l'integrale del limite.

Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi)
Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$, supponiamo che:

$$(**)\ f_n \geq 0 \text{ q.o. su } E,\ f_{n+1} \geq f_n \text{q.o. su } E$$

Allora

$$\int_E \lim_{n\to+\infty} f_n dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n$$

Osservazioni

- Il teorema si applica anche se $f_n \leq 0$ decrescente, basta considerare $g_n = -f_n \geq 0$

  B.L. a $g_n \implies \displaystyle\int_E \lim g_n = \lim \int_E g_n = \int_E \lim(-f_n) = \lim \int_E (-f_n)$
- Può valere come uguaglianza $+\infty = +\infty$

12.0.1 Integrali multipli

Teorema di Fubini
Sia f integrabile secondo Lebesgue, su $I = I_1 \times I_2$ $(I_1 \subseteq \mathbb{R}^m, I_2 \subseteq \mathbb{R}^n)$
Allora:

1. Per q.o. $x_1 \in I_1,\ x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ è L-integrabile su I_2
2. $x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2)dx_2$ L-integrabile su I_1
3. $\int_I f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int_{I_1}(\int_{I_2} f(x_1, x_2)dx_2)dx_1$

Osservazione: Si può scambiare il ruolo delle variabili.

$$\int_I f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x_1,x_2)dx_2\right)dx_1 = \int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(x_1,x_2)dx_1\right)dx_2$$

Teorema di Tonelli
Sia $f \geq 0$ misurabile sul precedente $I = I_1 \times I_2$.
Supponiamo che:

- Per q.o. $x_1 \in I_1,\ x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ è L-integrabile su I_2
- $x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2)dx_2$ L-integrabile su I_1

Allora: f L-integrabile su $I_1 \times I_2$ (e quindi per Fubini $\int_I f = \int_{I_1} \int_{I_2} f$)

Osservazione: Se ho una f che cambia segno, posso provare ad applicare Tonelli a $|f|$: se $|f|$ soddisfa 1) 2), Tonelli $\implies$ $|f|$ L-integrabile $\implies$ f L-integrabile $\implies$ posso applicare Fubini.

12.0.2 Spazi di Lebesgue (o spazi L^p)

Definizione: $p \in [1, +\infty)$, $L^p(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : |f|^p \text{ L-integrabile}\}/_{\sim}$, anch'esso risulta essere uno spazio vettoriale normato (di Banach)

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Teorema: $(L^p, \|.\|_p)$ è uno spazio di Banach.

- Caso particolarmente importante: $p = 2$
- Caso limite: $p = +\infty$
- Definizione e teoremi di completezza
- Criteri di convergenza
- Risultati di confronto
- Approssimazione con funzioni regolari (prodotto di convoluzione)
- Teorema di differenziazione (funzioni assolutamente continue)

Appartenenza a L^p: verifica dell'integrale

$$f \in L^p(E) \iff \int_E |f|^p < +\infty$$

Convergenza in L^p

$$\{f_n\} \subseteq L^p(E),\ f \in L^p(E),\ \left(\int_E |f_n - f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

Candidato limite: f limite puntuale q.o.

$$\lim_n \int_E |f_n - f|^p = \int_E \lim |f_n - f|^p \ ?$$

12.0.3 Caso limite L infinito

Definizione:

$$L^{\infty} := \{f : E \to \mathbb{R} \text{ misurabili : } \operatorname{ess-}\sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty\}/_{\sim}$$

$$\sup_{x \in E} |f(x)| := \min\{M : |f(x)| \leq M \ \forall x \in E\}$$

$$\operatorname{ess-}\sup_{x \in E} |f(x)| := \min\{M : |f(x)| \leq M \text{ q.o. } x \in E\}$$

Teorema: $(L^{\infty}(E), \|.\|_{\infty})$ è uno spazio di Banach

Osservazioni

$$f \in L^{\infty}(E) \iff \text{ess-sup}_{x \in E}|f(x)| < +\infty$$

Convergenza

$$\{f_n\} \subseteq L^{\infty}(E),\ f \in L^{\infty}(E) : \text{ess-sup}_{x \in E}|f_n(x) - f(z)| \to 0$$

Dunque convergenza uniforme a meno di un insieme di misura nulla.
Esempi di funzioni in $L^{\infty}(\mathbb{R})$

$$f(x) = c > 0,\ \|f\|_{\infty} = c$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{N} \\ n & x = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Osservazione: Se $f \in L^p(E),\ \forall p \in [1, +\infty]$

$$\implies \lim_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^{\infty}(E)}$$

Analogo in $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \lim_{p \to +\infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

12.1 Risultati di confronto

$p \leq q \; p, q \in [1, +\infty] \implies L^p(E) \subseteq$ oppure $\supseteq L^q(E)$?
In generale no
Controesempio 1: $L^1(0, +\infty), \; L^2(0, +\infty), L^\infty(0, +\infty)$

$$f(x) = 1, \text{ ess-sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1, \int_{\mathbb{R}_+} |f| = \int_{\mathbb{R}_+} |f|^2 = +\infty$$

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^1(\mathbb{R}_+), f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$$

Controesempio 2:

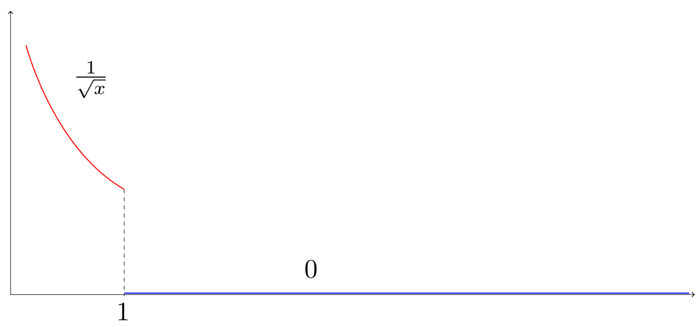

Figura 7: Controesempio 2

$$\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < +\infty, \text{ ess-sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = +\infty = \int_0^{+\infty} |f|^2$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+), \; f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$$

Controesempio 3: Si ricava in modo immediato che

$$f \in L^2(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+), \; f \notin L^1(\mathbb{R}_+)$$

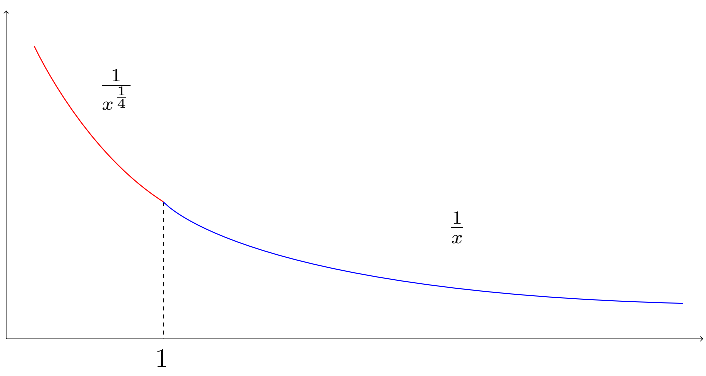

Figura 8: Controesempio 3

12.1.1 Disuguaglianza di Holder

Sia E misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$ qualsiasi, e $p \in [1, +\infty]$.
Siano $f \in L^p(E),\ g \in L^{p'}(E)$, con $p' :=$ esponente coniugato di p

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Con la convenzione $\frac{1}{\infty} = 0$

Disuguaglianza di Holder: Sia $f \in L^p(E),\ g \in L^{p'}(E)$

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

12.1.2 Conseguenze di Holder sul confronto tra i vari spazi

Proprietà di immersione (1)
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m(E) < +\infty$ e sia $q \geq p$, allora $L^q(E) \subseteq L^p(E)$, e

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{qp}} \|f\|_{L^q(E)} \quad \forall f \in L^q(E)$$

In particolare se $q = +\infty$ ho che $\forall p \in [1, +\infty), L^\infty(E) \subseteq L^p(E)$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Infatti

$$\int_E |f|^p \leq \int_E \text{ess-sup}_{x \in E} |f|^p = m(E) \cdot (\text{ess-sup}_{x \in E} |f|)^p$$

Elevando a $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (m(E))^{\frac{1}{p}} \text{ess-sup}_{x \in E} |f| = m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Dimostrazione di (1) a partire da Holder
Suppongo $f \in L^q(E)$, $\implies f \in L^{\frac{q}{p}}$

$$\int_E |f|^p = \int_E |f|^p \chi_E \leq \|f^p\|_{L^{\frac{q}{p}}} \cdot \|\chi_E\|_{L^{(q/p)'}}$$

- $f \in L^{q/p}$ infatti
- $\chi_E \in L^{q/p)'}$ infatti

$$\int_E |\chi_E|^{(q/p)'} = \left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{q}{q-p}$$

$$\||f|^p\|_{L^{q/p}} = \left(\int_E |f|^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\|\chi_E\|_{L^{(q/p)'}} = \left(\int_E |\chi_E|^{(\frac{q}{p})'}\right)^{\frac{1}{\frac{q}{p})'}} = m(E)^{\frac{q-p}{q}}$$

Quindi

$$\int_E |f|^p \leq m(E)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_E |f|^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

Elevando tutto alla $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|f\|_{L^q(E)}$$

Proprietà di interpolazione (2)
Se $f \in L^p(E) \cap L^q(E)$, con $p \leq q \implies f \in L^r(E)$ $\forall r \in [p, q]$ e

$$\|f\|_{L^r(E)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(E)} \cdot \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(E)}$$

Dove $\alpha \in (0, 1)$ tale che $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$
Esempio: Se $f \in L^1(E) \cap L^{\infty}(E) \implies f \in L^r(E) \forall r \in [1, +\infty]$

12.2 Approssimazione con funzioni regolari

Teorema di approssimazione con funzioni regolari
Sia $p \in [1, +\infty)$, e sia E misurabile in $\mathbb{R}^n$
$C_0^{\infty}(E)$ è un sottospazio *denso* in $L^p(E)$
$C_0^{\infty}(E) := \{f : E \to \mathbb{R}$ di classe C^{∞} e aventi supporto compatto in $E\}$

Ovvero

$$\forall f \in L^p(E) \exists \{f_n\} \subseteq C_0^{\infty}(E) \text{ tale che } \|f_n - f\|_{L^p} \to_{n\to+\infty} 0$$

$$\forall f \in L^p(E),\ \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in C_0^{\infty}(E) \text{ tale che } \|\varphi - f\|_{L^p} < \varepsilon$$

Osservazione: Falso nel caso $p = +\infty$

12.3 Supporto e Classe C_0

Ovvero:

$$\forall f \in L^p(E)\ \exists \{\varphi_n\} \subseteq C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|\varphi_n - \varphi\| \to_{n\to+\infty} 0$$

$$\forall f \in L^p(E), \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi \in C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$$

Falso nel caso $p = \infty$

Definizione: Data $\varphi \in C^\infty(E)$ il supporto di φ è

$$\overline{\{x \in E : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è limitato e chiuso

$C_0^\infty(E) := \{\varphi : E \to \mathbb{R}$ derivabili infinite volte tali che $\text{supp}(\varphi)$ è un sottoinsieme compatto di $E\}$

12.4 Prodotto di convoluzione

Osservazione: $f, g \in L^1(E) \ \not\Longrightarrow\ f \cdot g \in L^1(E)$
Nel caso $E = \mathbb{R}$ si può definire un prodotto che rimanga interno a $L^1(\mathbb{R})$

Proposizione 1
Siano $f, g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ Si definisce prodotto di convoluzione

$$f * g := \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y)dy$$

1. $f * g$ esiste finito per q.o. $x \in \mathbb{R}$, ovvero q.o. $x \in \mathbb{R},\ y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile su $\mathbb{R}$
2. $f * g \in L^1(\mathbb{R})$
3. $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$

Dimostrazione
Consideriamo $H(x, y) := f(x-y)g(y)$, a priori non sappiamo se $H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_x)$, dunque non è possibile applicare direttamente fubini.
Quindi consideriamo $|H| \geq 0$ e applichiamo il teorema di Tonelli.
Verificando le ipotesi:

- Integro prima in dx

$$\int_{\mathbb{R}_x} |H(x,y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}_x} |f(x,y)|dx$$

Con la sostituzione $z = x - y$

$$= |g(y)| \int_{\mathbb{R}_z} |f(z)|dz = |g(y)| \cdot \|f\|_1 < +\infty$$

- Integro in dy

$$\int_{\mathbb{R}_y}\left[\int_{\mathbb{R}_x}|H_(x,y)|dx\right]dy = \|f\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}_y}|g(y)|dy = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} < +\infty$$

Dunque per Tonelli $|H| \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y) \implies H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$
A questo punto posso applicare Fubini ad H
Dunque per q.o. $x,\ y \mapsto H(x,y) = f(x,y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}_y)$
Dimostrazione 3 (che implica 2)

$$\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}_x}|f*g(x)|dx = \int_{\mathbb{R}_x}\left|\int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y)dy\right|dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_x}\int_{\mathbb{R}_y}|f(x-y)||g(y)|dydx \leq \int_{\mathbb{R}_y}\int_{\mathbb{R}_x}|f(x-y)||g(y)|dydx$$

(Per Fubini)

$$= \int_{\mathbb{R}_y}|g(y)|\int_{\mathbb{R}_x}|f(x-y)dxdy = \|f\|_1\int_{\mathbb{R}_y}|g(y)|dy = \|f\|_1\cdot\|g\|_1$$

Osservazione

- vale la proposizione 1 anche su $\mathbb{R}^n$
- $f*g = g*f$
- le funzioni devono essere deinite su tutto lo spazio

Estensione: $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^p(\mathbb{R}) \implies$

1. $f*g(x)$ esiste per q.o. x
2. $f*g \in L^p(\mathbb{R})$
3. $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$

$$H(x,y) = |f(x-y)|^p|g(y)|^p$$

Proposizione 2
Siano $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})(\subseteq L^1(\mathbb{R})),\ g \in L^1(\mathbb{R})$, allora:

1. $f*g \in C^\infty(\mathbb{R})$
2. $(f*g)^{(k)} = f^{(k)}*g\ \forall k$

Idea della dimostrazione:

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y)dy$$

$$(f*g)'(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f'(x-y)g(y)dy$$

Osservazione 1: Vale con k al posto di ∞
Osservazione 2: In generale nelle ip. della Prop.2 $f*g$ non è a supporto

compatto.

Idea della dim. del teorema di approssimazione di funzioni L^p con funzioni regolari
Prendiamo $p = 1$, data $f \in L^1(\mathbb{R})$, vogliamo costruire $\varphi_n \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$. Prendiamo

$$f_n := f * \rho_n$$

Dove ρ_n successione di mollificatori

$$\rho_n(x) = n\rho(nx) \text{ dove } \rho \text{ è un nucleo di convoluzione}$$

- $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \rho \geq 0,\ \text{supp}(\rho) \subseteq [-1, 1],\ \int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$
- $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \rho_n \geq 0,\ \text{supp}(\rho_n) \subseteq [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}],\ \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx = 1$

Si può dimostrare usando i teoremi di convergenza dominata che $\varphi_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$.
Osservazione: Per guadagnare anche il supporto compatto, occorre prima "trovare" f, cioè considerare

$$f_k = f \cdot \chi_{[-k,k]} = \begin{cases} f & \text{se } x \in [-k, k] \\ 0 & \text{se } x \notin [-k, k] \end{cases}$$

Approssimo f per convoluzione:

$$f_k * \rho_n \in C_o^\infty \to_{n \to +\infty} f_k$$

$$\varphi_n = f_{k(n)} * \rho_n$$

12.5 Teorema fondamentale del calcolo

Teorema di differenziazione nella teoria di Lebesgue
Sia $f \in L^1([a, b])$, sia $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, essa è derivabile q.o. su $[a, b]$ e

$$F'(x) = f(x) \text{ per q.o. } x \in (a.b)$$

Esempio: $f(x) = \text{sign}(x)$, $x \in [-1, 1]$.

Definizione: Diciamo che $F \in$ A.C.$([a, b])$, ovvero lo spazio delle funzioni assolutamente continue su $[a, b]$ se $\exists f \in L^1([a, b])$ tale che

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Osservazione 1: Tale spazio è vettoriale (per la linearità della derivata e dell'integrale).
Osservazione 2: $F \in \text{AC}([a, b]) \implies$

$$F(b) - F(a) = \left[\int_a^b f(t)dt + c\right] - \left[\int_a^a f + c\right] = \int_a^b f(t)dt$$

Osservazione 3: $F \in \mathrm{AC}([a,b])$, $F' = 0$ q.o. su $[a,b] \implies F = c\ \forall x \in [a,b]$
Questa implicazione è falsa se togliamo l'ipotesi che $F \in \mathrm{AC}([a,b])$
Esistono funzioni (non in $\mathrm{AC}([a,b])$ che sono derivabili q.o. con derivata prima nulla q.o. ma non costanti.
Esempio: una funzione derivabile f continua con $f' = 0$ q.o. su $(0,1)$ ma f non costante (scala di Cantor).

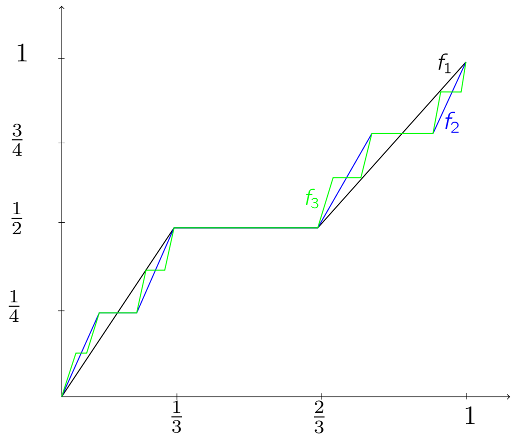

Figura 9: Scala di Cantor

La successione $\{f_n\} \subseteq C^0([0,1])$ risulta di Cauchy in $\|.\|_\infty$.
Poiché $(C^0([0,1]), \|.\|_\infty\ )$ è uno spazio di Banach:

$$\exists f = \lim_{n \to +\infty} f_n \in C^0([0,1])$$

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, con $f' = 0$ q.o. su $(0,1)$

Proposizione (caratterizzazione puntuale di AC)

$F \in \mathrm{AC}([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists\ \delta > 0$ tale che $\forall$ famiglia $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,N}$

di intervalli a 2 a 2 disgiunti $\subseteq (a,b)$ con

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k - x_k| < \delta, \text{ si ha } \sum_{k=1}^{N} |F(x_k) - F(y_i)| < \varepsilon$$

Osservazione: Per $N = 1$ si ha continuità uniforme
$\implies \mathrm{AC}([a,b]) \subseteq \{$funzioni uniformemente continue su $[a,b]\}$
Conseguenze della proposizione

- $F, G \in \mathrm{AC}([a,b]) \implies F, G \in AC([a,b])$
- $F, G \in \mathrm{AC}([a,b]) \implies$

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) = \int_a^b (F \cdot G)'(t)dt = \int_a^b (F'G + FG')dt$$

Ovvero
$$\int_a^b fG = -\int_a^b Fg + F \cdot G|_a^b$$
$\implies$ vale in AC la formula di integrazione per parti.

13 Operatori lineari tra spazi vettoriali normati

Definizione: Siano $(V, \|.\|_V)$ e $(W, \|.\|_W)$ due spazi vettoriali normati. Un operatore lineare da V in W è una funzione $T : V \to W$ tale che
$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \ \forall v_1, v_2 \in V, \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Esempi

1) $V = W = \mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$$T(v) = A \cdot v, \text{ con } A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$$
2) $V = C^0([a, b])$, fisso $x_0 \in (a, b)$, $W = R$
$$T : V \to W \text{ definita da } T(f) = f(x_0)$$
3) $V = C^1([a, b])$, $W = C^0([a, b])$
$$T : V \to W \text{ definita da } T(f) = f'$$
Osservazione: T operatore lineare $\implies T(0) = 0$

Definizione: $T : V \to W$ op. lineare, si dice *continuo* se, $\forall v \in V$, T è continuo in v, ovvero:
$$v_n \to v \implies T(v_n) \to T(v)$$
Rispettivamente nella norma di V e W.

Osservazione: Sia $T : V \to W$ op. lineare, allora T è continuo su $V \iff T$ è continuo in $v = 0$.

Dimostrazione

($\implies$) è immediata

($\impliedby$) Verifichiamo che se la proprietà vale per $v = 0$, vale per v qualsiasi.
Sia v qualsiasi, e sia $v_n \to v$; considero $v_n - v \to 0$, quindi, per ipotesi $T(v_n - v) \to T(0)$
Ovvero $T(v_n) - T(v) \to 0$, cioè $T(v_n) \to T(v)$.

Definizione: Sia T op. lineare: $(V, \|.\|_V) \to (W, \|.\|_W)$.
Si dice che T è limitato se:

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \|T(v)\|_W \leq M\|v\|_V \ \forall v \in V$$

ovvero

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M \ \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M$$

Esempi:
1) $T : (\mathbb{R}^2, \|.\|_2) \to (\mathbb{R}, |.|)$ definito da $T(v) = v_0 \cdot v$ operatore lineare.
T è limitato, $M = \|v_0\|$
2) $T : (C^1([a,b]), \|.\|_{C^1}) \to (C^0([a,b]), \|.\|_{C^0})$, $T(f) = f'$ op. lineare.
T è limitato con la scelta $M = 1$
3) $T : (L^2(0,1), \|.\|_2) \to (\mathbb{R}, |.|)$, $T(f) = \int_0^1 f_0 \cdot f dx$ dove $f_0 \in L^2(0,1)$
T è limitato con la scelta $M = \|f_0\|_2$ (Tramite disuguaglianza di Holder)
Osservazione: Considerando $T : (L^p(0,1), \|.\|_p) \to (\mathbb{R}, |.|)$ definito da $T(f) = \int_0^1 f_0 f dx$ questo è lineare continuo prendendo $f_0 \in L^{p'}(0,1)$.

Proposizione: Sia $T : (V, \|.\|_V) \to (W, \|.\|_W)$ lineare. Allora

$$T \text{ continuo} \iff T \text{ limitato}$$

Dimostrazione
($\Longleftarrow$) Supposto T limitato, basta mostrare che T è continuo in 0, ovvero: se $v_n \to 0$, allora $T(v_n) \to T(0) = 0$

$$\|T(v_n)\|_W \leq M\|v_n\|_V \to 0$$

($\Longrightarrow$) Supposto T *non limitato* mostriamo T non continuo

$$\sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T\|_W}{\|v\|_V} = +\infty \implies \exists \{v_n\} \subseteq V \setminus \{0\} : \frac{\|T(v_n)\|_W}{\|v_n\|_V} \to +\infty$$

ovvero, siccome T è lineare:

$$\left\| T\left(\frac{v_n}{\|v_n\|_V}\right) \right\|_W \to +\infty$$

Quindi se considero $u_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_V}$, ha che

$$\begin{cases} \|u_n\|_V = 1 \\ \|T(u_n)\|_W \to +\infty \end{cases}$$

Posso costruire una successione y_n tale che $y_n \to 0$ ma $T(y_n) \not\to 0$ Ponendo $y_n = \frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}$

- $y_n \to 0$ poiché

$$\|y_n\|_V = \left\| \frac{u_n}{\|T(u_n)_W\|} \right\|_V \to 0$$

- $T(y_n) = 1$ perché

$$T(y_n) = T\left(\frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W} \right) = \frac{T(u_n)}{\|T(u_n)\|_W} \not\to 0$$

Definizione: Dati $(V, \|.\|_V), (W, \|.\|_W)$ spazi normati

$$\mathcal{L}(V, W) := \{\text{op. lineari limitati da } V \text{ in } W\}$$

È uno spazio vettoriale munito delle operazioni naturali

È possibile introdurre su questo spazio una norma, ponendo

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

ovvero, per definizione, la più piccola costante M tale che $\|T(v)\|_W \leq M\|v\|_V \ \forall v \in V$.
Osservazione: Si può verificare che quella definita sopra è effettivamente una norma.
In particolare

Definizione: Quando $W = (\mathbb{R}, |.|)$

$$\mathcal{L}(V, W) = V' \text{ spazio duale di } V$$

$$\|T\|_{V'} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|T(v)|_{\mathbb{R}}}{\|v\|_V}$$

Esempi: Vedere i casi 1) e 3)

14 Distribuzioni

Definizione: Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\text{funzioni } C^\infty \text{ su } \Omega \text{ con supporto compatto in } \Omega\}$$

È uno spazio vettoriale

Muniamo C_0^∞ di una **convergenza**

Definizione: Sia $\{\varphi_h\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$. Diciamo che

$$\varphi_h \to 0 \text{ in } C_0^\infty(\Omega) \text{ se}$$

1. $\exists K$ compatto, indipendente da h, tale che $\text{supp}(\varphi_h) \subseteq K \ \forall h >> \nu$
2. $\varphi_h \to 0$ uniformemente su K con tutte le derivate $\forall \alpha$ multiindice $D^\alpha \varphi_h \to 0$ unif. su K

Definizione: Lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ munito della convergenza definita sopra si indica con $\mathcal{D}(\Omega)$ e si chiama *spazio delle funzioni test*

Definizione: Lo spazio delle distribuzioni su Ω, che si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$ è lo spazio degli operatori $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineari e continui rispetto alla convergenza introdotta su $\mathcal{D}(\Omega)$.
Ovvero, una distribuzione è un operatore $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che

- T lineare
- T continuo ($\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies T(\varphi_h) \to 0$ in $\mathbb{R}$)

Esempi

1. Sia $u \in L^1(\Omega)$, ad u posso associare una distribuzione $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_u(\varphi) := \int_\Omega u\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

È ben definito:

$$\left| \int_\Omega u\varphi \right| \leq \int_\Omega |u\varphi| \leq \int_K \max |\varphi||u| \leq \max_k |\varphi| \int_K |u|$$

È lineare:

$$T_u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \int_\Omega u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_\Omega u\varphi + \beta \int_\Omega u\psi = \alpha T_u(\varphi) + \beta T_u(\psi)$$

È continuo:

$$\{\varphi_h\} \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \implies T_u(\varphi_h) \to 0$$

Poiché, sia $\{\varphi_h\} \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$

$$|T_u(\varphi_h)| = \left| \int_\Omega u\varphi_h \right| \leq \max_K |\varphi_h| \cdot \int_K |u| \to 0$$

Osservazioni sull'esempio
L'associazione tra $u,\ T_u$ è iniettiva su $L^1(\Omega)$
Se $u_1 = u_2$ q.o. su $\Omega \implies T_{u_1} = T_{u_2}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ poiché $T_{u_1}(\varphi) = T_{u_2}(\varphi)$
Si può dimostrare che $T_{u_1} = T_{u_2}$ in $\mathcal{D}'(\Omega) \implies u_1 = u_2$ q.o. su Ω (*)

$$\int_\Omega u_1\varphi = \int_\Omega u_2\varphi \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega$$

$$\int_\Omega (u_1 - u_2)\varphi = 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega$$

Notazione: Invece di $T_u(\varphi)$ si scrive spesso $< u, \varphi >_{(\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega))}$

Per definire T_u, basta una condizione più debole:

$$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \int_K |u| < +\infty \ \forall K \text{ compatto } \subseteq \Omega\}$$

Esempio: $\Omega = (0,1),\ u(x) = \frac{1}{x} \notin L^1(\Omega)$ ma $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$
In particolare, possiamo associare una distribuzione a qualsiasi $u \in L^p(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty]$
Infatti $L^p(\Omega) \nsubseteq L^1(\Omega)$, ma

$$L^p(\Omega) \subseteq L^p_{\text{loc}}(\Omega),\ \forall p \in [1, +\infty] :$$

$$u \in L^p(\Omega) \implies u \in L^p(K)\ \forall K \subset\subset \Omega$$

Poiché $|K| < +\infty$.

$$\implies u \in L^1(K)\ \forall K \subset\subset \Omega \implies u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

Tutte le funzioni $u \in L^p(\Omega)$ possono essere viste come distribuzioni.

$$u \in L^p(\Omega) \mapsto T_u$$

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} := \int_\Omega u\varphi dx$$

Essendo $\mathcal{D}'$ vettoriale

$$(T_1 + T_2)(\varphi) := T_1(\varphi) + T_2(\varphi)\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$(\lambda T) := \lambda T(\varphi)\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

14.1 Convergenza

Definizione:

$$\{T_h\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega),\ T_h \to^{\text{in } \mathcal{D}'(\Omega)} 0 \text{ se } T_h(\varphi) \to 0\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$T_h \to T \text{ se } T_h(\varphi) \to T(\varphi)\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Esempio: $T_h = T_{u_h}$, con $u_h \subseteq L^1(\Omega)$

$$u_h \to 0 \text{ in } L^1(\Omega) \implies T_{u_h} \to 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Dato che

$$|T_{u_h}(\varphi)| = \left| \int_\Omega u_h \varphi \right| \leq \int_{K = \text{supp}\varphi} |u_h||\varphi| \leq \max_K |\varphi| \cdot \int_K |u_h| \to 0$$

14.2 Delta di Dirac

$$\{u_h\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$$

Questa successione non converge in $L^1(\mathbb{R})$

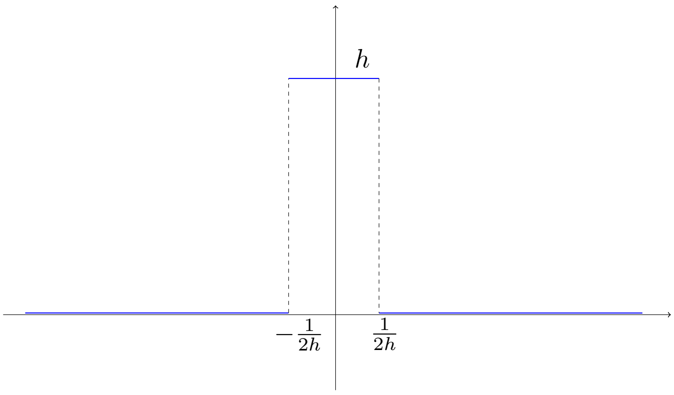

Figura 10: Delta di Dirac

$u_h \to 0$ q.o. su $\mathbb{R} \implies$ se $\exists \lim_{h\to+\infty} u_h$ in $L^1(\mathbb{R})$ allora $\lim_{h\to+\infty} u_h = 0$.
Ma $\lim_{h\to+\infty} u_h \neq 0$ in $L^1(\mathbb{R})$ perché

$$\|u_h\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} h = 1$$

Converge però in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle u_h, \varphi \rangle = T_{u_h}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} u_h \varphi = h \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} \varphi \to \varphi(0)$$

Definizione: δ_0 *delta di Dirach* in 0

$$< \delta_0, \varphi >:= \varphi(0)$$

Osservazioni:

- Se $u_h = h \cdot \chi_{[-\frac{1}{2h},\frac{1}{2h}]}$, allora $u_h \to \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- Verifica che $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(i) lineare: $\delta_0(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\delta_0(\varphi) + \beta\delta_0(\psi)$?

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(0) = \alpha\varphi(0) + \beta\psi(0)$$

(ii) continuo: $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \delta_0(\varphi_h) \to 0$
vero per la definizione di convergenza in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\text{supp}(\varphi_h) \subseteq K$ compatto, $\varphi_h \to 0$ uniformemente.

14.2.1 Ovvie generalizzazioni

Punto generico x_0

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$$

Caso n-dimensionale, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0),\ \delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

14.2.2 Commento sulla Delta

δ_0 non è associata ad alcuna funzione di $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$
Dimostrazione
Supponiamo per assurdo $\delta_0 = T_u$, con $u \in L^1 loc(R)$

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi dx = \varphi(0)\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

In particolare, posso prendere $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi = \varphi(0) = 0\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Ricordando l'osservazione sull'esempio

$$0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \cdot \varphi$$

Applicando tale proprietà si avrà

$$u = 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R} - \setminus\{0\} \implies u = 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R}$$

$$\implies \int_{\mathbb{R}} u\varphi dx = 0\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Assurdo.

14.2.3 Derivazione di distribuzioni

> **Definizione:** $\Omega \subseteq \mathbb{R}$
> Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definisco $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$ come:
>
> $$< T', \varphi >:= - < T, \varphi' > \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

T' è una distribuzione
(i) è lineare:

$$< T', \alpha\varphi + \beta\psi >= - < T, \alpha\varphi' + \beta\psi' >$$

$$= -\alpha < T, \varphi' > -\beta < T, \psi' >= +\alpha < T', \varphi > +\beta < T', \psi >$$

(ii) è continuo

$$\varphi_h \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \implies \langle T', \varphi_h \rangle \to 0$$

Infatti $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies \varphi'_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.
Questo perché $\exists K$ tale che supp$\varphi'_h \subset K \forall h$ e $\varphi'_h \to 0$ uniformemente su K con tutte le derivate.
Quindi $\langle T, \varphi'_h \rangle \to 0$ perché $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

14.2.4 Motivo della definizione di derivata

Considerando il caso $T = T_u$ con $u \in C^1(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$
Si avrà in $\mathcal{D}'(\Omega)$ che $(T_u)' = T_{u'}$
Dimostrazione

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = - \langle T_u, \varphi' \rangle = - \int_\Omega u\varphi'$$

$$\langle T_{u'}, \varphi \rangle = \int_\Omega u'\varphi$$

Integrando per parti si avrà

$$\int_\Omega u'\varphi = u\varphi - \int_\Omega u\varphi'$$

Essendo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u\varphi|_a^b = 0$ (dove a, b estremi di Ω) Si avrà:

$$\int_\Omega u'\varphi = - \int_\Omega u\varphi'$$

15 Esempi di distribuzioni

1. $T = T_u$ con $u \in C^1(\Omega) \implies (T_u)' = T_{u'}$

2. $T = T_u$ con $u(x) = |x|$ su $\Omega = (-1, 1)$

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = - \langle T_u, \varphi' \rangle = - \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x)dx + x\varphi\Big|_0^1 - \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx + x\varphi(x)\Big|_{-1}^{0} = \int_{-1}^{1} \varphi(x) \cdot \text{sign}(x)dx$$

$$\implies (T_{|x|})' = T_{\text{sign}(x)} \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Notazione: $(|x|)' = \text{sign}(x)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$
Più in generale: se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ $u' = v$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, significa $(T_u)' = T_v$ ovvero

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ \langle (T_u)', \varphi \rangle = - \langle T_u, \varphi' \rangle = \langle T_v, \varphi \rangle$$

$$- \int_\Omega u\varphi' = \int_\Omega v\varphi \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

3. $u(x) = \text{sign}(x)$, $u' = ?$

$$- \int_\Omega \text{sign}(x)\varphi'(x)dx = - \int_0^1 \varphi' + \int_{-1}^{0} \varphi' = -\varphi(1) + 2\varphi(0) - \varphi(-1) = 2\varphi(0)$$

$$= 2 \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

4. $T = \delta_0$ $T' = ?$

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle = - \langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

15.1 Generalizzazione

- $n = 1$ Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $T^{(k)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\left\langle T^{(k)}, \varphi \right\rangle := (-1)^k \left\langle T, \varphi^k \right\rangle$$

Osservazione: $T^{(k)}$ definisce una distribuzione, lineare e continua, infatti se $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_h^{(k)} \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies \left\langle T, \varphi_h^{(k)} \right\rangle \to 0$.
Osservazione 2: se $T = T_u$ con $u \in C^k(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega) \implies (T_u)^{(k)} = T_{u^{(k)}}$
Esempio: $u(x) = |x| \implies u'' = 2\delta_0$

- $n \geq 1$ Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall \alpha$ multiindice

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Osservazione: $D^\alpha T$ definiscono delle distribuzioni $\forall \alpha$
Osservazione: Si possono calcolare le derivate di tutti gli ordini, di qualsiasi $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$
Osservazione: Il risultato non dipende dall'ordine di derivazione

15.1.1 Operatori differenziali

Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si possono definire $\nabla T, \nabla^2 T, \text{rot}T, \ldots$

16 Spazi di Sobolev

Sono gli spazi dove si trovano le soluzioni di problemi al contorno per P.D.E.
Esempio Equazione di Poisson

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = f \text{ su } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

Definizione: Fissato Ω aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Con $\frac{\partial}{\partial x_i}$ intesa nel senso delle distribuzioni

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \iff \exists v_i \in L^p(\Omega) \text{ tali che}$$
$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \varphi = \int_\Omega v_i \varphi \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Esempi $(n = 1,\ \Omega = (-1, 1))$

- $u \in C_0^1(\Omega) \implies u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$(1)\quad p < +\infty \quad \int_\Omega |u|^p < +\infty \ ; \ \int_\Omega |u'|^p < +\infty$$

$$(2)\quad p = +\infty \quad \operatorname*{ess-sup}_\Omega |u| < +\infty \ ; \ \operatorname*{ess-sup}_\Omega |u'| < +\infty$$

- $u(x) = \text{sign}(x)\ u \notin W^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega |u|^2 = \int_{-1}^{1} |\text{sign}x|^2 < +\infty \implies u \in L^2(\Omega)$$

MA: $u'(x) = 2\delta_0 \notin L^2(\Omega)$

Definizione: Fissato Ω aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$

$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ \forall \alpha$ multiindice con $|\alpha| \leq k\}$

Caso particolare $p = 2$

$$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$$

Osservazione: $W^{k,p}(\Omega)$ sono spazi vettoriali

Definizione: Norma su $W^{1,p}(\Omega)$ sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

Definizione: Norma su $W^{k,p}(\Omega)$ sia $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_p + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha\|_p$$

Teorema: Per ogni $p \in [1, +\infty]$, $W^{1,p}(\Omega)$ sono spazi di Banach

Osservazione: $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ se

$$\|u_h - u\|_{1,p} \to 0$$

$$= \|u_h - u\|_p + \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

ovvero

$$\begin{cases} u_h \to u \text{ in } L^p(\Omega) \\ \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ in } L^p(\Omega) \end{cases}$$

Definizione

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \text{chiusura di } \mathcal{D}(\Omega) \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

ovvero

$$= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che} \varphi_n \to u \text{ in } W^{1,p}\}$$

$$= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che } \varphi_n \to u \text{ in } L^p \text{ e } \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \to u \text{ in } L^p\}$$

Osservazione Se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ allora

$$u \in W_o^{1,p}(\Omega) \iff u = 0 \text{ su } \Omega$$

16.0.1 Disuguaglianza di Poincaré

Teorema Sia Ω aperto, limitato di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una costante $C_p = C_p(\Omega)$ tale che, per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(\Omega) \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Dunque, su $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{cases} \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p \text{ norma su } W^{1,p}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_p \text{ norma equivalente} \end{cases}$$

Falso su $W_0^{1,p}(\Omega)$, verificabile prendendo $u = 1$

Osservazione per $n = 1$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)dt \implies |u(x)| \leq \int_0^x |u'| \leq \int_0^1 |u'| \leq \left(\int_0^1 |u'|^2\right)^{1/2}$$

Integrando

$$\|u\|_{L^1(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}$$
$$W_0^{1,p}(\Omega)$$

17 Spazi di Hilbert

Definizione: Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$
Un prodotto scalare su H è un'applicazione $(\, ,) : H \times H \to \mathbb{R}$ tale che

1. $(x, x) \geq 0 \; \forall x \in H$ con $(x, x) = 0 \iff x = 0$ *positività*
2. $(x, y) = (y, x) \; \forall x, y \in H$ *simmetria*
3. $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$ *bilinearità*

Definizione: $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ è detta *norma associata* (o indotta) dal prodotto scalare

Esempi

- $H = \mathbb{R}^n$; $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$; $\sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \|x\|_2$; ovvero la norma euclidea
- $H = L^2(\Omega)$ $(f, g) = \int_\Omega fg$; $\sqrt{(f, f)} = (\int_\Omega f^2)^{1/2} = \|f\|_2$
- $H = W^{1,2}(\Omega)$; $(f, g) := \int_\Omega fg + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} = \int_\Omega fg + \nabla f \cdot \nabla g$

$$\sqrt{(f, f)} = \left(\int_\Omega f^2 + |\nabla f|^2 \right)^{1/2} \simeq \|f\|_{H^1}$$

norma equivalente alla norma di H^1

17.1 Disuguaglianza di Cauchy Schwartz

Se $(\, ,)$ è un prodotto scalare su H, allora

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \; \forall x, y \in H$$

Inoltre vale $= \iff x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
Dimostrazione
$\forall t \in \mathbb{R}$ $0 \leq (x - ty, x - ty) = (x, x) - 2t(x, y) + t^2(y, y)$
Dunque

$$0 \leq \|x\|^2 - 2t(x, y) + t^2\|y\|^2 \implies \Delta \leq 0$$
$$\Delta = 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$
$$\implies |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Se vale $=$, $\Delta = 0 \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x - \lambda y, x - \lambda y) = 0 \implies x - \lambda y = 0$ (Viceversa se $x = \lambda y$)

Proposizione: Se $(,) : H \times H \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare,

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} \text{ è una norma}$$

Dimostrazione

- $\|x\| \geq 0$ con $= \iff x = 0$ vera per la prop. (1)
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x} = |\lambda|\sqrt{(x,x)} = \lambda\|x\|$
- $\|x+y\| = \sqrt{(x+y, x+y)} = \sqrt{\|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2}$
$$\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|$$

17.1.1 Legge del parallelogramma

Teorema: Sia H uno spazione vettoriale con prodotto scalare $(,)$ e sia $\|.\|$ la norma indotta da esso. Allora

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ \forall x, y \in H$$

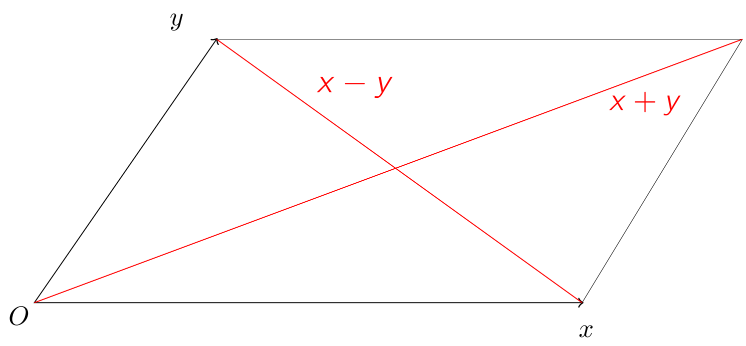

Figura 11: Legge del parallelogramma in $\mathbb{R}^2$

Dimostrazione

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = (x+y,x+y)+(x-y,x-y) = \|x\|^2+2(x-y)+\|y\|^2+\|x\|^2-2(x,y)+\|y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

Osservazione: Può servire a verificare se una norma proviene o meno da un prodotto scalare.
Le norme di $\mathbb{R}^n, L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega)$ con $p \neq 2$ non provengono da un prodotto scalare.
Esempio: $\Omega = (0,1)$ in $L^p(0,1)$ con $p \neq 2$, la norma non proviene da un prodotto scalare
Fisso $t \in (0,1)$, considero le funzioni

- $f = \chi_{(0,t)}$
- $g = \chi_{(t,1)}$

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^t 1\right)^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{1}{p}}$$

$$\|g\|_p = \left(\int_0^1 |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_t^1 1\right)^{\frac{1}{p}} = (1-t)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f+g\|_p = 1$$

$$\|f-g\|_p = 1$$

L'identità del parallelogramma diventa:

$$2 = 2t^{\frac{2}{p}} + 2(1-t)^{\frac{2}{p}}$$

$$1 = t^{\frac{2}{p}} + (1-t)^{\frac{2}{p}}$$

Valida $\iff p = 2$

Definizione: Uno *spazio di Hilbert* è uno spazio di Banach in cui la norma proviene da un prodotto scalare.

Esempi: sono spazi di Hilbert

- $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$
- $L^2(\Omega)$
- $H^1(\Omega)$

Non sono di Hilbert

- $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p$ con $p \neq 2$
- $L^p(\Omega)$ con $p \neq 2$
- $W^{1,p}(\Omega)$ con $p \neq 2$
- $C^0([a,b]),\ \|f\|_2 = (\int_a^b |f|^2)^{1/2}$ la norma viene da un prodotto scalare MA non è uno spazio di Banach, dunque non è uno spazio di Hilbert

17.1.2 Teorema di proiezione su un convesso chiuso

Un insieme K si dice *convesso* se $\forall x, y \in K,\ \forall \lambda \in (0,1) \implies \lambda x + (1-\lambda) y \in K$
Un insieme K si dice *chiuso* se $\forall \{x_n\} \subseteq K : x_n \to x \in H \implies x \in K$

Teorema: Sia H uno spazio di Hilbert, e sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso
Allora $\forall f \in H$ esiste unico $u \in K$ tale che

$$\|f-u\| = \min_{v \in K} \|f-v\|$$

Inoltre: $u = P_k f \iff (f-u, v-u) \leq 0\ \forall v \in K$

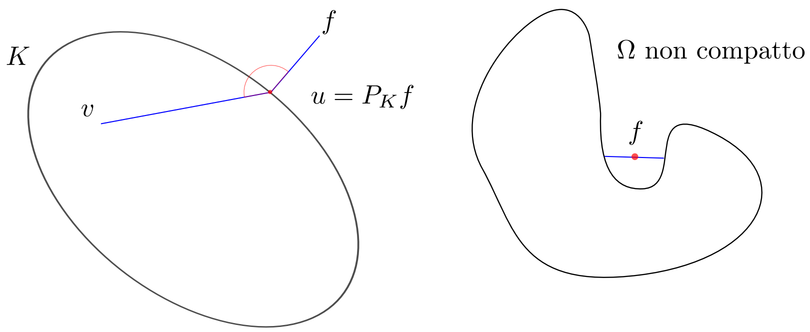

Figura 12: Rappresentazione grafica della proiezione su convesso

Corollario, Teorema di proiezione su un sottospazio chiuso
Sia H uno spazio di Hilbert e M un sottospazio vettoriale chiuso.
(M è convesso, non è necessariamente chiuso senza ipotesi)
Allora: $\forall f \in H \exists$ unico $u = P_M f$ tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in M} \|f - v\|$$

Inoltre

$$u = P_M f \iff (f - u, v) = 0 \; \forall v \in M$$

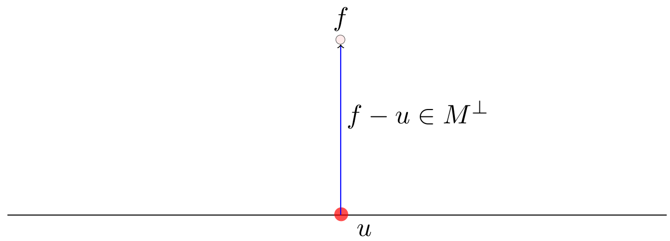

Figura 13: Rappresentazione grafica della proiezione su un sottospazio chiuso

Definizione: Se $(,)$ è un prodotto scalare su H

- $x \perp y \iff (x,y) = 0$ (definizione)
- $M^\perp := \{x \in H : (x,y) = 0 \ \forall y \in M\}$

Osservazione: $f \perp g$ in $L^2(0,1)$ se $\int_0^1 fg = 0$
Esempio: $M = \{$funzioni costanti in $L^2(0,1)\}$

$$M^\perp = \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 fc = 0 \ \forall c \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f = 0\}$$

Osservazione:

$$x \perp y \implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Dimostrazione

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Osservazione: $M \cap M^\perp = \{0\}$. Infatti $x \in M \cap M^\perp \implies (x,x) = 0$ valido $\iff x = 0$

Teorema delle proiezioni
Sia H insieme di Hilbert e M un sottospazio chiuso.
Allora $\forall x \in H \ \exists$ un'unica rappresentazione di x come:

$$x = y + z \text{ con } y \in M \text{ e } z \in M^\perp$$

Inoltre, le applicazioni $x \mapsto y = P_M(x)$, $x \mapsto z = P_{M^\perp}(x)$, sono operatori lineari, limitati, di norma 1.

Dimostrazione
Basta prendere come $y = P_M(x)$ (che esiste dal teorema precedente): sappiamo che $(x - P_M(x), v) = 0 \ \forall v \in M \implies x - P_M(x) \in M^\perp$, ovvero $z := x - y \in M^\perp$
L'unicità è data da $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \implies y_1 - y_2 \in M, \ z_2 - z_1 \in M^\perp$ ma $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$, dunque per queste ultime due condizioni si avrà $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0$
Dimostrazione Linearità
$x_1 = y_1 + z_1$
$x_2 = y_2 + z_2$
Dunque $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + z_1 + z_2$, con $y_k \in M, \ z_k \in M^\perp$, per l'unicità $y_1 + y_2 = P_M(x_1 + x_2), \ z_1 + z_2 = P_{M^\perp}(x_1 + x_2)$
Limitatezza
P_m limitato: $x = y + y = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$$
$$\implies \|P_m(x)\| \leq \|x\|^2 \implies P_M \text{ limitato con norma } \leq 1$$

$\|P_M\| = 1$: basta prendere $x \in M \implies x = P_M(x) \implies$ vale l'uguaglianza $\|P_M(x)\| = \|x\|$

17.2 Teoremi di Rappresenzatione

17.2.1 Teorema di Reisz

Problema: Dato H di Hilbert, caratterizzare H' (duale di H).

$$H' = \{\varphi : H \to \mathbb{R} \text{ lineari e continui}\} = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$$

Osservazione: Fissato $u \in H$ possiamo associare ad u un elemento $\varphi_u \in H'$

$$\varphi_u(v) : H \to \mathbb{R},\ \varphi_u(v) = (u, v)\ \forall v \in H$$

Verifica che $\varphi_u \in H'$:

- lineare: $\varphi_u(\alpha v_1 + \alpha_2 v_2) = (u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 \varphi_u(v_1) + \alpha_2 \varphi_u(v_2)$
- continuo (limitato): $|\varphi_u(v)| \leq M\|v\|$ valida con $M = \|u\|$ per la disuguaglianza di Cauchy Scwhartz

Inoltre:

$$\|\varphi_u\|_{H'} = \|u\|_H$$

cioé $M = \|u\|$ è la costante migliore possibile $(v = u)$
In conclusione, $H \subseteq H'$ (immersione isometrica), ovvero la norma si conserva.
Esempi:

- $H = \mathbb{R}^n$ $(u, v) = \sum_{k=1}^n u_k v_k$ $\varphi_u(v) = \sum_{k=1}^n u_k v_k$
- $H = L^2(\Omega)$, $(u, v) = \int_\Omega uv$, $\varphi_u(v) = \int_\Omega uv\ \forall v \in L^2(\Omega)$
- $H = H^1(\Omega)$, $(u, v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v$

$$\varphi_u(v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v\ \forall v \in H^1(\Omega)$$

Teorema di Riesz
Sia H spazio di Hilbert e sia $\varphi \in H'$.
Allora, esiste unico $u \in H$ tale che $\varphi = \varphi_u$ ovvero

$$\varphi(v) = (u, v)\ \forall v \in H$$

Inoltre

$$\|\varphi\|_{H'} = \|u\|_H$$

Dunque $H" = "H'$.

17.2.2 Forme bilineari

Definizione: Sia H di Hilbert. Una *forma bilineare* su H è per definizione un'applicazione

$$a : H \times H \to \mathbb{R}$$

tale che:

- $a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v)$

Esempi:

- In H Hilbert qualsiasi $a(u,v) = (u,v)$
- $H = H^1(\Omega)$, $a(u,v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v$, $a(u,v) = \int_\Omega uv$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$

Definizione: Sia $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare

- a *simmetrica* se
$$a(u,v) = a(v,u) \ \forall u,v \in H$$
- a *continua* se
$$\exists C > 0 \text{ tale che } |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \ \forall u,v \in H$$
- a *coerciva* se
$$\exists \alpha > 0 \text{ tale che } a(u,v) \geq \alpha\|u\|^2 \ \forall u \in H$$

Esempi:
1) In H di Hilbert qualsiasi, $a(u,v) = (u,v)$ è

- simmetrica (per definizione di prodotto scalare
- continua (limitata per Cauchy Schwartz)
- coerciva ($(u,u) = 1 \cdot \|u\|^2$)

2) In $H = H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.

- simmetrica
- continua: (tramite Holder)
$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| \leq \|\nabla v\|_2 \|\nabla v\|_2$$
$$\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \ \forall u,v \in H^1(\Omega)$$
- coerciva: (per Poincaré)
$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \alpha\|u\|_{H^1}^2$$

Osservazione: $a(u,v)$ non sarebbe coerciva su $H^1(\Omega)$ poiché non vale la disuguaglianza di Poicaré (verificabile con $u = \text{cost} > 0$

17.2.3 Teorema di Lax Milgram

Teorema di Lax-Milgram
Sia H Hilbert, e sia $\varphi' \in H'$
Sia $a : H \times H \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, continua e coerciva. Allora esiste unico $u \in H$ tale che

$$\varphi(v) = a(u, v) \; \forall v \in H$$

Inoltre u è caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$E(v) := \frac{1}{2}a(v, v) = \varphi(v) \; \forall v \in H$$

si ha

$$\min_{v \in H} E(v) = E(u)$$

Esempio (Ω limitato)
$H = H_0^1(\Omega)$, $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$, $\varphi(v) = \int_\Omega fv$ dove $f \in L^2(\Omega)$

$$\varphi \in H' : \left| \int_\Omega fv \right| \leq \int_\Omega |fv| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1}$$

Per Lax-Milgram: $\exists u$ unico $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $\varphi(v) = a(u, v) \; \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega fv dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \; \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Quest'ultima è una formulazione debole del seguente problema:

$$\begin{cases} -\nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Inoltre il teorema dice che u risolve

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv$$

17.2.4 Commenti sulla proprietà variazionale di u

$E(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}a(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - \varphi(u + \varepsilon v)$

$$= \frac{1}{2}[a(u, u) + 2\varepsilon a(u, v) + \varepsilon^2 a(v, v)] - \varphi(u) - \varepsilon\varphi(v)$$

$$= [\frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u)] + \varepsilon[a(u, v) - \varphi(v)] + \frac{\varepsilon^2}{2}a(u, v)$$

$$\implies E(u + \varepsilon v) - E(u) = \varepsilon[a(u, v) - \varphi(v)] + o(\varepsilon)$$

$$\implies \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E(u + \varepsilon v) - E(u)}{\varepsilon} = a(u, v) - \varphi(v) = 0$$

Se $a(u,v) = \varphi(v)\ \forall v \in H$,

$$E(u+\varepsilon v) - E(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,v) \geq 0$$

Quindi u minimizza E.
Viceversa, se u minimizza E :

$$E(u+\varepsilon v) \geq E(u)\ \forall v \in H\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\implies a(u,v) - \varphi(v) = 0\ \forall v \in H$$

18 Equazioni alle derivate parziali

18.1 Formulazione variazionali di problemi ellittici

$-a\Delta u + cu = f$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, limitato e regolare, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$

Ipotesi

- $a > 0$
- $c \in L^\infty(\Omega)$
- $f(x) \in L^2(\Omega)$

Se $c = 0,\ a = 1 \implies -\nabla^2 u = f$ (Equazione di Poisson)
Condizione di Dirichlet (omogenea): $u = 0$ su $\partial\Omega$
Condizione di Neumann (omogenea): $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$

18.1.1 PDE ellittiche del secondo ordine

ODE lineare del 2° ordine

$$au'' + bu' + cu = f$$

Alle derivate parziali (PDE del 2° ordine), $u = u(x),\ x \in \mathbb{R}^n$

$$-A(x) \cdot \nabla^2 u(x) + b(x) \cdot \nabla u(x) + cu = f$$

si dice ellittica se A è definita positiva

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

In particolare se $A(x) = \mathrm{I}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x) u_{x_i,x_j} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i,x_j} = \Delta u$$

18.1.2 Formulazione variazionale del problema di Dirichlet

$(D)_c$ Trovare $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$(D)_v$ Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che:

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_\Omega fv \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Proposizione (D): Nelle ipotesi sopra:

1. u sol. classica $\implies$ u sol. variazionale
2. u sol. variazionale, c, f continue, $u \in C^2(\overline{\Omega}) \implies u$ sol. classica

18.1.3 Formulazione variazionale del problema di Neumann

$(N)_c$ Trovare $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$(N)_v$ Trovare $u \in H^1(\Omega)$ tale che:

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_\Omega fv \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

Proposizione (N): Nelle ipotesi sopra:

1. u sol. classica $\implies$ u sol. variazionale
2. u sol. variazionale, c, f continue, $u \in C^2(\overline{\Omega}) \implies u$ sol. classica

18.1.4 Esistenza delle soluzioni

Teorema: Nelle ip. sopra definite, il problema $(D)_v$: trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_\Omega fv \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Ammette una e una sola soluzione. Inoltre u è caratterizzata nel modo seguente:

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega (a|\nabla v|^2 + cv^2) - \int_\Omega fv$$

Dimostrazione

Considero $H = H_0^1(\Omega)$, munito di $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_2$

- $\varphi(v) = \int_\Omega fv \; \forall v \in H$
- $b(u,v) = \int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv$

φ è lineare continuo, $b(u,v)$ è bilineare simmetrica, continua, coerciva Per Lax-Milgram $\exists$ unico $u \in H$ tale che

$$\varphi(v) = b(u,v) \; \forall v \in H$$

ovvero:

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_\Omega fv \; \forall v \in H$$

Inoltre u risolve

$$\min_H E(v) := \frac{1}{2}b(u,v) - \varphi(v)$$

Verifica ip. Lax-Milgram:

- φ (lineare) continuo: $\exists M : |\varphi(v)| \leq M\|v\|_H$

$$\int_\Omega |fv| \leq \int_\Omega |fv| \leq_H \|f\|_2\|v\|_2 \leq_P C_p(\Omega)\|f\|_2\|\nabla v\|_2$$

Si avrà dunque $M = C_p(\Omega)\|f\|_2$ e $\|\nabla v\|_2 = \|v\|_2$

- $b(u,v)$ è bilineare simmetrica (dimostrazione semplice)
- $b(u,v)$ continua

$$\begin{aligned}|b(u,v)| = \left|\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv\right| &\leq \int_\Omega |a\nabla u \cdot \nabla v + cuv| \leq \int_\Omega a|\nabla u \cdot \nabla v| + c|uv| \\ &\leq \int_\Omega a|\nabla u \cdot \nabla v| + \|c\|_\infty \int_\Omega |uv| \leq a\|\nabla u\|_2\|\nabla u\|_2 + \|c\|_\infty\|u\|_2\|v\|_2 \\ &\leq a\|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2 + \|c\|_\infty C_p^2(\Omega)\|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2 \\ &= (a + \|c\|_\infty C_p^2(\Omega))\|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2 = (a + \|c\|_\infty C_p^2(\Omega))\|u\|_H\|v\|_H\end{aligned}$$

- $b(u,v)$ coerciva

$$b(u,v) = \int_\Omega a|\nabla u|^2 + cu^2 \geq \int_\Omega a|\nabla u|^2 = a\|\nabla u\|_2^2 = \alpha\|u\|_H^2$$

18.1.5 Esistenza delle soluzioni per Neumann

Teorema: Nelle ip. sopra definite, supponiamo anche $c(x) > 0$ il problema $(D)_v$: trovare $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_\Omega fv \; \forall v \in H^1(\Omega)$$

Ammette una e una sola soluzione. Inoltre u è caratterizzata nel modo seguente:

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega (a|\nabla v|^2 + cv^2) - \int_\Omega fv$$

Dimostrazione
Analoga al caso di Dirichlet lavorando su $H = H^1(\Omega)$ munito di $\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$
Tranne che per la coercività di b:

$$b(u,u) = \int_\Omega a|\nabla u|^2 + cu^2 \geq \alpha\|u\|_{H^1}^2?$$

$$\geq \int_\Omega a|\nabla u|^2 + c_0u^2 \geq \min\{a, c_0\} \int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2$$

18.1.6 Richiamo di Analisi Vettoriale

$$\int_\Omega \text{div}X = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \ \forall X \in C^1(\Omega)$$

$X = v\nabla u$, $v \in C^1$, $u \in C^2$

$$\text{div}(v\nabla u) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \nabla u \cdot \nabla v + v\Delta u$$

Formula di Gauss-Green

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + v\nabla u = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} \ v \in C^1, u \in C^2$$

Lemma di DuBois-Raymond
Se $u \in C(\overline{\Omega})$ è tale che:

$$\int_\Omega u\varphi = 0 \ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \implies u \equiv 0 \text{ in } \Omega$$

Per dimostrarlo si procede per assurdo

18.1.7 Dimostrazione proposizione di Dirichlet

1. Sia u sol. di $(D)_c$

Allora $u \in H_0^1(\Omega)$ $(u, v\nabla u \in C(\overline{\Omega}) \subseteq L^2(\Omega), u = 0 \text{ su } \partial\Omega)$
Moltiplico l'equazione per $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$-a\Delta u \cdot v + cuv = fv \text{ in } \Omega$$

Integrando

$$\int_\Omega -a\Delta u \cdot v + cuv = \int_\Omega fv$$

Per Gauss Green

$$\int_\Omega av\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v_n + cuv_n = \int_\Omega fv_n \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Data $v \in H_0^1(\Omega), \exists \{v_n\} \subseteq C_0^\infty(\Omega) : v_n \xrightarrow{H^1} v$ (per definizione di $H_0^1(\Omega)$)
Passando al limite

$$\int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_\Omega fv \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Tale limite si dimostra

$$\left| \int_\Omega fv_n - fv \right| \leq \int_\Omega |f(v_n - v)| \leq_H \|f\|_2 \|v_n - v\|_2 \to 0$$

In modo analogo si verificano le altre convergenze

2. Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. variazionale, supponendo $u \in C^2(\overline{\Omega})$, ($c, f$ continue)

$u = 0$ su $\partial\Omega$
Sappiamo che

$$\int_\Omega a\nabla v \cdot \nabla u + cuv = \int_\Omega fv \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ in particolare } \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Tramite Gauss Green

$$\int_\Omega -a\Delta u \cdot v + cuv - fv = 0 \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\implies \int_\Omega (-a\Delta u + cu - f)v = 0 \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

La funzione nelle parentesi è continua su $\overline{\Omega}$
Per il lemma di DBR

$$\implies -a\Delta u + cu - f = 0 \text{ in } \Omega$$

19 Serie di Fourier in spazi di Hilbert

Definizione: Sia H di Hilbert. Una famiglia di vettori $\{u_n\} \subseteq H$ si dice *sistema ortogonale* se $(u_n, u_m) = 0 \ \forall n \neq m$.
Si dice poi *sistema ortonormale* se è ortogonale e $(u_n, u_n) = 1 \ \forall n$

Esempi:

- $H = \mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$
- $H = l^2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{n\geq 0} x_n^2 < +\infty\}$ è uno spazio vettoriale

$$\|x\|_{l^2} = \left(\sum_{n\geq 0} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

  è di Hilbert poiché $((x_n), (y_n)) = \sum x_n y_n$
  $e_n = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

Definizione: Sia H di Hilbert e sia (u_n) sistema ortonormale.
Dato $u \in H$

- $(u, u_n) \in \mathbb{R}$ *coefficienti di Fourier* di u (rispetto a (u_n))
- $\sum_n (u, u_n)u_n$ *serie di Fourier* di u (rispetto a (u_n))

Esempi

- $H = \mathbb{R}^3$, $\{e_1\}$, $(u, e_1)e_1 = P(u)$ su $\langle e_1 \rangle$
- "", $\{e_1, e_2\}$, $(u, e_1)e_1 + (u, e_2)e_2 = P(u)$ su $\langle e_1, e_2 \rangle$
- "", $\{e_1, e_2, e_3\}$, $(u, e_1)e_1 + \ldots = P(u)$ su $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$
- $H = l^2$, $\{e_1\} = \{(1, 0, \ldots, 0)\}$, $(u, e_1)e_1 = P_{\langle e_1 \rangle}(u)$
  ""$\{e_i\}$ pari $\sum_k (u, e_{2k})e_{2k}$
  ""$\{e_n\}$ con n qualsiasi $\sum_k (u, e_k)e_k = u$

Teorema di convergenza per serie di Fourier
Sia H Hilbert, sia $\{u_n\}$ sistema ortonormale fissato.
Dato $u \in H$, la serie di Fourier di u converge in H e

$$\sum_n (u, u_n)u_n = u'$$

Dove u' è la proiezione ortogonale di u su M, dove M è la chiusura del sottospazio generato dal sistema.

19.0.1 Convergenza in H

$\sum_n (u, u_n)u_n$ corrisponde a $S_N(u) = \sum_{n=0}^{N} (u, u_n)u_n$, converge a u' se

$$\exists \lim_{N \to +\infty} S_N(u) = u' \iff \lim_{N \to +\infty} \|S_N(u) - u'\| = 0$$

19.0.2 Sottospazio generato

Il sottospazio generato, indicato con $\langle u_n \rangle$ è definito come

$$\langle u_n \rangle := \{\text{combinazioni lineari degli } u_n\}$$

$$M = \overline{\langle u_n \rangle} := \{\text{limiti di comb. lineari degli } u_n\}$$

M è un sottospazio chiuso.

19.0.3 Disuguaglianza di Bessel

Teorema: Sia H Hilbert, e sia (u_n) sistema ortonormale, dato $u \in H$, vale

$$\sum_n (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$$

Dimostrazione
Fisso $N \in \mathbb{N}$ e mostriamo
$$\sum_{n=0}^{N} (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$$
la tesi è dimostrata passando al limite, dunque:
$$0 \leq \|u - \sum_{n \leq N} (u, u_n)u_n\|^2 = (u - \sum_{n \leq N} (u, u_n)u_n, u - \sum_{n \leq N} (u, u_n)u_n) =$$
$$= \|u\|^2 - 2 \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 + \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2$$
$$= \|u\|^2 - \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2$$
L'ultima somma vale poiché siamo in un sistema ortonormale:
$$((u, u_1)u_1 + (u, u_2)u_2, ((u, u_1)u_1 + (u, u_2)u_2) = (u, u_1)^2 + (u, u_2)^2$$

19.0.4 Dimostrazione teorema di convergenza delle serie di Fourier

Per dimostrare la convergenza della serie, basta mostrare che $S_N(u)$ è di Cauchy:
$$\forall \varepsilon \exists \nu : \|S_N - S_M(u)\|^2 < \varepsilon \ \forall N, M \geq \nu$$
ovvero: (supposto $N > M$)
$$\|S_n(u) - S_M(u)\|^2 = (S_N(u) - S_M(u), S_N(u) - S_M(u)) =$$
$$\left(\sum_{n=M+1}^{N} (u, u_n)u_n, \sum_{n=M+1}^{N} (u, u_n)u_n \right)$$
$$= \sum_{n=M+1}^{N} (u, u_n)^2 = |T_N(u) - T_M(u)|$$
dove $T_N = \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2$
Bessel $\implies \{T_N(u)\}$ è di Cauchy
Essendo in un Hilbert $S_N(u)$ converge
Sia ora $u' := \sum_n (u, u_n)u_n$
Per dimostrare $u' = P_M(u)$ basta mostrare che

1. $u' \in M$
2. $u - u' \in M^\perp$

Per l'unicità nel teorema delle proiezioni, $u' = P_M(u), \ u - u' = P_{M^\perp}(u)$
Infatti

1. $u' \in M$ vale per costruzione:
$$u' = \lim_{N \to +\infty} S_N(u) \in \overline{\langle u_n \rangle}, \ u' \text{ è limite di comb. lineari degli } u_n$$
$$S_N(u) = \sum_{n \leq N} (u, u_n)u_n \in \langle u_n \rangle \text{ sono comb. lineari degli } u_n$$

2. Per mostrare che $u - u' \in M^{\perp}$ basta far vedere che $(u - u', u_n) = 0 \ \forall n$, questo assicura che $u - u'$ sarà ortogonale a tutti i limiti delle combinazioni lineari degli u_n, ovvero a tutti gli elementi di M.

$$(u - u', u_m) = (u - \sum_n (u, u_n)u_m, u_m) = (u, u_m) - (u, u_m)(u_m, u_m) = 0$$

Definizione: Sia H di Hilbert e sia (u_n) sistema ortonormale. Si dice che (u_n) è *sistema completo* se è massimale rispetto all'inclusione.
Ovvero: $\nexists (v_n)$ sistema ortonormale che che contenga propriamente (u_n)

Proposizione di caratterizzazione di sistemi ortonormali completi
Sia (u_n) ortonormale in un Hilbert.
Sono equivalenti:

1. (u_n) è completo
2. $u \in H : (u, u_n) = 0 \ \forall n \implies u = 0$
3. Posto $M := \overline{\langle u_n \rangle}$, si ha $M \equiv H$
4. $\sum_n (u, u_n)u_n = u \ \forall u \in H$
5. $\sum_n (u, u_n)(v, u_n) = (u, v) \ \forall u, v \in H$ (identità di Parseval)
6. $\sum_n (u, u_n)^2 = \|u\|^2 \ \forall u \in H$ (identtà di Bessel)

Dimostrazione
(1) $\iff$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4) $\implies$ (5) $\implies$ (6) $\implies$ (2)
Dimostrazione 1 se e solo se 2
Se è falsa la 2 implica che è falsa la 1

$$\exists u \in H : (u, u_n) = 0 \ \forall n \text{ MA } u \neq 0$$

Allora (u_n) non è massimale. Se è falsa la 1 implica che è falsa la 2
se (u_n) non è massimale, posso aggiungere almeno un elemento $\implies \exists u \in H$ per cui la 2 è falsa.
Dimostrazione 2 implica 3
Per mostrare $M \equiv H$, basta mostrare $M^{\perp} = \{0\}$, vero per la 2

$$\text{se } u \in M^{\perp} \text{ allora } u = 0$$

Dimostrazione 3 implica 4
Se M coincide con H, allora $u' = P_M(u) = u$
Dimostrazione 4 implica 5 Per la quattro ogni elemento è la sua serie di Fourier, dunque

$$(u, v) = (\sum (u, u_n)u_n, \sum (v, u_n)u_n) = \sum (u, u_n)(v, u_n)$$

Dimostrazione 5 implica 6
Prendere $u = v$ in Parseval
Dimostrazione 6 implica 2
Se $(u, u_n) = 0\ \forall n, \sum 0 = 0$

20 Serie di Fourier in L^2

Si considera $L^2(I)$ dove $I = (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, e il prodotto scalare è definito come

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x)dx$$

Sistema ortonormale dei polinomi trigonometrici

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{T}},\ p_k = \frac{\cos(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{T}{2}}},\ q_k = \frac{\sin(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{T}{2}}},\ k \geq 1$$

dove

$$\xi_k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)k \quad (\text{se } T = 2\pi,\ \xi_k = k)$$

formano un sistema ortonormale
Dunque, data $f \in L^2(I)$ la sua serie di Fourier rispetto a questo sistema è la serie

$$(f, p_0)p_0 + \sum_{k\geq 1}(f, p_k)p_k + (f, q_k)q_k \quad (*)$$

20.0.1 Modi equivalenti di scrivere (*)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k \cos(\xi_k x) + b_k \sin(\xi_k x) \quad (**)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_I f(x)\cos(\xi_k x)dx \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_I f(x)\sin(\xi_k x)dx \quad k \geq 1$$

Oppure

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{i\xi_k x} \quad (***)$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\xi_k x}dx \quad z \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{f}_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\hat{f_{-k}} = \frac{a_k + ibk}{2}$$

Teorema: Il sistema (p_0, p_k, q_k) è ortonormale completo in $L^2(I)$

Dimostrazione usando la (3) delle equivalenze
$\overline{\langle p_0, p_k, q_k\rangle} \equiv L^2(I)$
$\subseteq$ sempre vero ($\overline{M} \subseteq H$)
$\supseteq$ $\forall f \in L^2(I)$, f può essere approssimata con elementi di $\langle p_0, p_k, q_k\rangle$
Passo 1 Mostriamo che quanto sopra è vero se $f = \varphi \in C_0^\infty(I)$.
Infatti, posso estendere φ a $\tilde{\varphi} \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R})$.
Sappiamo (Analisi 2) che la serie di Fourier di $\tilde{\varphi}$ converge uniformemente su $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \implies$ converge uniformemente in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.
$\implies$ La successione delle somme parziali della serie di Fourier di $\tilde{\varphi}$ fornisce una successione in $\langle p_0, p_k, q_k\rangle$, che converge a $\tilde{\varphi} = \varphi$ in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$
Passo 2 Data $f \in L^2(I)$ posso approssimarla con una successione $\varphi_k \subset C_0^\infty(I)$.

$$\varphi_k \xrightarrow{L^2(I)} f$$

Concludo prendendo una successione diagonale.
Oppure:

$$\|f - S\| \leq \|f - \varphi\| + \|\varphi - S\| < \varepsilon$$

S somma parziale della serie di Fourier di φ
Osservazioni

- Data $f \in L^2(I)$, per il teorema sopra:

$$f = (f, p_0)p_0 + \sum_{k\geq 1}(f, p_k)p_k + (f, q_k)q_k$$

- Data $f \in L^2(I)$, vale l'id. di Bessel:

$$\|f\|^2_{L^2(I)} = (f, p_0)^2 + \sum_{k\geq 1}(f, p_k)^2 + (f, q_k)^2$$

  Dunque $f \in L^2(I) \iff$ i suoi coefficienti di Fourier $\in \ell^2$

- Possiamo sostituire $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ con

$$L^2_T(\mathbb{R}) = \{f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}) : \text{T-periodiche}\}$$

  è uno spazio di Hilbert, con $(f, g) = \int_{-T/2}^{T/2} fg$

- I coefficienti di Fourier hanno senso anche per $f \in L^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

$$|a_k| = \frac{2}{T}\left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\xi_k x)dx\right| \leq \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| < +\infty$$

  lo stesso per i b_k

- Se $f \in$ A.C.($[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$) e $f(-\frac{T}{2}) = f(\frac{T}{2})$ posso estenderla a una funzione continua periodica su $\mathbb{R}$. (l'estensione f appartiene a $L^2_T(\mathbb{R})$)
  Ha senso calcolare i coefficienti di Fourier sia di f che di f'.

$$a_k, b_k \text{ siano i coefficienti di Fourier di } f$$

$$a'_k, b'_k \text{ siano i coefficienti di Fourier di } f'$$

$$a'_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x)\cos(\xi_k x)dx = 0 + \frac{2}{T}\xi_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\xi_k x)dx$$
$$= \xi_k b_k$$

  Analogamente
$$b'_k = -\xi_k a_k$$

  Dunque
$$\hat{f}'_k = i\xi_k \hat{f}_k \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

21 Applicazioni delle serie di Fourier alle equazioni differenziali

Ricerca di soluzioni periodiche di ODE lineari (tramite serie di Fourier)
Consideriamo un'ODE su $\mathbb{R}$ della forma

$$\sum_{j=0}^{n} a_j u^{(j)} = f \in L^2_T(\mathbb{R}) \ \ x \in \mathbb{R}$$

Problema: esistono soluzioni T-periodiche (in $L^2_T(\mathbb{R})$)?
La seguente equazione differenziale equivale a chiedere:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \widehat{u^{(j)}}_k = \hat{f}_k \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (i\xi_k)^{(j)} \hat{u_k} = \hat{f}_k \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sistema di infinite eq. algebriche.

$$P(i\xi_k)\hat{u_k} = \hat{f}_k$$

(forma equivalente)
Ciascuna eq. è un'equazione lineare di 1° grado in $\hat{u_k}$!!!

- Caso 1: $P(i\xi_k) \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\implies \hat{u_k} = \frac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)}$$

- Caso 2: $P(i\xi_k) = 0$ per $k = k_1^*, \dots, k_p^*$, allora
  $\hat{f}_k = 0$ per $k = k_1^*, \dots, k_p^*$ $\implies$ infinite soluzioni, ovvero

$$\hat{u_k} = \begin{cases} \frac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)} k \neq k_1^*, \dots, k_p^* \\ \text{arbitrario} \quad k = k_1^*, \dots, k_p^* \end{cases}$$

  Se però $\hat{f}_k \neq 0$ per qualche $k \in \{k_1^*, \dots, k_p^*\}$ $\implies$ no soluzioni

Osservazione: Ci sono altri sistemi ortonormali completi in $L^2(I)$.

$$1, x, x^2, x3, \dots$$

$\rightarrow$ polinomi di Legendre
Esempio in $L^2(-1, 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}\Big(-\frac{1}{3} + x^2\Big)$$

Data $f \in L^2(I)$, per minimizzare la distanza in $L^2(I)$ da un polinomio di grado ≤ 3, dovrò considerare la somma delle serie di Fourier di f fatta rispetto ai polinomio di Legendre

22 Trasformata di Fourier

Definizione: Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$. La sua *Trasformata di Fourier* è la funzione definita per $\xi \in \mathbb{R}$ da:

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Osservazioni

- La dipendenza da ξ appare in $e^{-i\xi x}$ $\implies$ $\hat{u}(\xi)$ è un integrale dipendenta dal parametro
- Formalmente c'è analogia con i coefficienti di Fourier

$$\hat{u}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x) e^{-i\xi_k x} dx \quad k \in \mathbb{Z}$$

- La definizione di $\hat{u}(\xi)$ è "ben posta" grazie all'ipotesi $u \in L^1(\mathbb{R})$

$$|\hat{u}(\xi) \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)||e^{-i\xi x}| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx < +\infty$$

- $e^{-i\xi x} = \cos(\xi x) - i \sin(\xi x)$ $\implies$ $\hat{u}(\xi)$ è a valori in $\mathbb{C}$

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cos(\xi x) - i \int_{\mathbb{R}} u(x) \sin(\xi x) dx$$

- Generalizzazioni: si può partire da $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
- Da $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($u \in L^1(\mathbb{R}^n)$)

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

- $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$
- *Non si trasformano mai* funzioni definite su sottoinsiemi propri di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$

22.1 Varianti in letteratura

$e^{-i\xi x}$ rimpiazzato da $e^{i\xi x}$, oppure $e^{i2\pi\xi x}$

22.2 Operatore Trasformata

La trasformata $\mathcal{F}$ di Fourier è l'operatore che manda u in $\hat{u}$

$$\mathcal{F} : u \to \hat{u}$$

Osservazioni

- $\mathcal{F}$ è lineare:

$$\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v)$$

22.3 Trasformate notevoli

1. $u(x) = \chi_{(a,b)}(x)$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\sin(\xi b) - \sin(\xi a)}{\xi} + i \frac{\cos(\xi b) - \cos(\xi a)}{\xi}$$

2. $u(x) = e^{-|x|}$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}$$

Diversamente dal caso precedente, la trasformata è sempre reale, e $\hat{u}$ è di nuovo $L^1(\mathbb{R})$.

3. $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\hat{u}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$$

Partendo da $u(x) = e^{-|x|}$ trasformando due volte si ottiene $\hat{\hat{u}}(x) = 2\pi e^{-|x|} = 2\pi u(x)$

22.4 Teorema di Riemann-Lebesgue

Teorema: Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{u}$ ha le seguenti proprietà:

1. $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$
2. $\hat{u}$ è continua
3. $\hat{u}$ è infinitesima all'infinito

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{u}(\xi) = 0$$

Dimostrazione

1. $|\hat{u}(x)| \leq \|u\|_1$, passo all'ess-sup al variare di ξ

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Ne consegue che (con $M = 1$, da dimostrare)

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R}) \text{ lineare continuo}$$

2. Facciamo vedere che $\hat{u}(\xi)$ è continua in ξ fissato in $\mathbb{R}$, ovvero

$$\xi_n \to \xi \implies \hat{u}(\xi_n) \to \hat{u}(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi_n x} dx$$

$$d^c etare \hat{u}(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi_n x} dx$$

$$f_n(x) = u(x) e^{-i\xi_n x} \to u(x) e^{-i\xi x} = f(x)$$

Si può passare sotto il segno di integrale per conv. dominata, perché

$$|f_n(x) = |u(x)||e^{-i\xi_n x}| = |u(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

3. Vero se $u = \chi_{(a,b)}$ (vedere esempio sopra)
Vero se u è "a scalino", $u = \sum_k^N c_k \chi_{I_i}$ poiché l'operatore trasf. è lineare

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^N c_k \hat{\chi}_{I_k}$$

Vero $\forall u \in L^1(\mathbb{R}) : \exists \varphi_n$ "a scalino"$\xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u$
Sappiamo che $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$ op.continuo: $\varphi_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u \implies \hat{\varphi_n} \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{R})} \hat{u}$
So che $\hat{\varphi}_n$ sono "infinitesime all'infinito", dunque anche $\hat{u}$ ha la stessa proprietà.

22.5 Proprietà algebriche

Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$

- $v(x) = u(x-a), \; a \in \mathbb{R} \implies \hat{v}(x) = e^{-i\xi a}\hat{u}(\xi)$
- $v(x) = e^{iax}u(x) \implies \hat{\xi} = \hat{u}(\xi - a)$
  Esempio: è possibile calcolare $u(x)\cos(ax)$ (Definizione complessa del coseno)
- $v(x) = u(x/a) \; a \in \mathbb{R} - \{0\} \implies \hat{v}(\xi) = |a|\hat{u}(a\xi)$ In particolare, con $a = -1$, si ha

$$\begin{cases} u \text{ pari} \implies \hat{u} \text{ pari (reale)} \\ u \text{ dispari} \implies \hat{u} \text{ dipari (puramente immaginaria)} \end{cases}$$

Queste proprietà sono dimostrabili tramite cambi di variabili negli integrali

22.6 Proprietà differenziali

Proposizione 1: Sia $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap \text{A.C.}(\mathbb{R})$ (con tali ipotesi u derivabile q.o. su $\mathbb{R}$, con $u' \in L^1(\mathbb{R})$). Allora

$$\widehat{u'}(\xi) = i\xi\hat{u}(\xi) \; \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare, nelle ipotesi della proposizione

$$u' \in L^1(\mathbb{R}) \implies \lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{u'}(\xi) = 0$$

ovvero

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \xi\hat{u}(\xi) = 0$$

ovvero

$$\hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Iterando:

$$u \in L^1(\mathbb{R}) \cap \text{AC}(\mathbb{R}), \; u' \in \text{AC}(\mathbb{R})$$

$$\widehat{u''}(\xi) = (i\xi)^2\hat{u}(\xi) = -\xi^2\hat{u}(\xi)$$

$$\text{e } \hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$$

Morale: maggior regolarità di u implica maggior rapidità di convergenza a 0 all'infinito di $\hat{u}$

Dimostrazione

$$\hat{u'}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u' e^{-i\xi x} dx = \lim_{L \to +\infty} \int_{-L}^{L} u'(x) e^{-i\xi x} dx$$

$$= \lim_{L \to +\infty} u(x)e^{-i\xi x}\Big|_{-L}^{L} + i\xi \int_{-L}^{L} u(x)e^{-i\xi x} dx$$

$$= i\xi\hat{u}(\xi)$$

$$u(\pm L)e^{i\xi\pm L} \text{ per } L \to +\infty$$

Infatti, per $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap \text{A.C.}(\mathbb{R})$, $u(L) \xrightarrow{L\to+\infty} 0$

$$\begin{aligned} u(L) &= u(0) + \int_0^L u'(t)dt \\ &= u(0) + \int_0^{+\infty} u'(t)\chi_{(0,L)}(t)dt \\ &= u(0) + \int_0^{+\infty} u'(t)dt \end{aligned}$$

Poiché $f_L(t) = u'(t)\chi_{(0,L)}(t)$.

> **Proposizione 2:** Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $xu \in L^1(\mathbb{R})$
> Allora:
> $$(\hat{u})'(\xi) = -i\widehat{xu}(\xi)\ \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare, siccome la trasformata di xu è continua (per RL), allora $(\hat{u})'$ continua, cioè $\hat{u} \in C^1(\mathbb{R})$
Iterando: $u \in L^1(\mathbb{R}) : xu \in L^1(\mathbb{R}), x^2u \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{u} \in C^2(\mathbb{R})$

$u \sim \dfrac{M}{x^\alpha}$ per $x \to \pm\infty$ con $\alpha > k \implies x^{k-1}u(x) \sim \dfrac{M}{x^{\alpha-k+1}}$ $(\alpha-k+1 > 1) \implies$

$$x^{k-1}u \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{u} \in C^{k-1}(\mathbb{R})$$

Morale: maggior rapidità di decrescenza a 0 per u implica maggior regolarità di $\hat{u}$
Dimostrazione (cenno)

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi x}dx$$

Posso derivare sotto $\int$:

$$(\hat{u}(\xi))' = \int_{\mathbb{R}} (u(x)e^{-i\xi x})'dx = -i\int_{\mathbb{R}} xu(x)e^{-i\xi x}dx = -i\widehat{xu(x)}(\xi)$$

23 Applicazione della trasformata di Fourier alle equazioni differenziali

Data un'equazione differenziale in $u = u(x)$, applicando la trasformata si ottiene un'equazione algebrica in $\hat{u}$. Risolvendo per $\hat{u}$, si trova quindi u.

23.1 Esempio

$$u'(x) - u(x) = e^{-x}H(x) \quad H(x) := \begin{cases} 1 & \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Da risolvere per q.o. $x \in \mathbb{R}$.
Cerco soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{AC}(\mathbb{R})$

$$\hat{u}' - \hat{u} = \widehat{e^{-x}H(x)}$$

$$i\xi\hat{u} - \hat{u} = \frac{1}{1+i\xi}$$

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2} \implies u(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

23.2 Formule di inversione per la trasformata di Fourier in L^1

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:

$$u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\hat{u}}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\check{u}(x) := u(-x)$$

Problema: Esiste uno spazio X tale che

$$\mathcal{F} : X \to X$$

e valga in X la formula di inversione?
Risposta: Sì, $X = L^2(\mathbb{R}^n)$.
Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\hat{u}}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Ma chi è $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$?

$$|\hat{u}(\xi)| < +\infty \text{ se } u \in L^1(\mathbb{R})$$

23.3 Trasformata di Fourier in L^2

Spazio delle funzioni a decrescenza rapida
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ tali che

$$\forall \alpha, \beta \text{ multiindici } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty$$

Osservazioni

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\gamma u, D^\gamma u \in S(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$
- Valgono in $S(\mathbb{R}^n)$ le seguenti formule:

1. $\widehat{D^\alpha u} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u}$

2. $D^\alpha \hat{u} = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha u}$

- Formula di inversione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
  Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Allora $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\check{u} = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\hat{u}}$$

Dimostrazione: Se dimostro che $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora vale la formula di inversione. (come conseguenza di quelle in $L^1(\mathbb{R}^n)$, perché $u, \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$).

- $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ perché $\forall\alpha,\ x^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\alpha u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$$

  Dunque per la prop. 2 $\hat{u}$ ha derivate di ogni ordine

- $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{u}(\xi)| < +\infty\ \forall\alpha,\beta$
  Perché $\xi^\alpha D^\beta \hat{u}$ è la trasformata di una funzione di $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{u} \sim \xi^\alpha \widehat{x^\beta u} \sim \widehat{D^\alpha(x^\beta u)}$$

  E $D^\alpha(x^\beta u)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$ perché appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
  Quindi per Riemann-Lebesgue la sua trasformata sta in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

23.3.1 Altre proprietà di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}v = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}u$$

Identità di Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2$$

Prodotto di convoluzione

$$\widehat{u * v} = \hat{u}\cdot\hat{v}$$
$$\widehat{uv} = (2\pi)^{-n}\hat{u} * \hat{v}$$

Definizione: Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e sia $\{u_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che $u_h \to u$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Considero $\hat{u_h} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e definisco

$$\hat{u} := \lim_{h\to+\infty} \hat{u}_h$$

(*) Esiste una tale u_h perché $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Idea

$$\mathcal{S} \ni u_h \to u \in L^2$$

Applico Fourier

$$\mathcal{S} \ni \hat{u}_h \to \hat{u} \in L^2$$

Osservazioni

- $\exists \lim_{h\to+\infty} \hat{u}_h$ (in $L^2(\mathbb{R}^n)$) perché $\hat{u}_h$ è di Cauchy: infatti
$$\|\hat{u}_h - \hat{u}_k\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\|u_h - u_k\|_2 \text{ (identità di Plancherel)}$$
e la successione è di Cauchy
- $\lim_{h\to+\infty} \hat{u}_h$ è indipendente dalla scelta di u_h: $u_h \xrightarrow{L^2} u$, $v_h \xrightarrow{L^2} v$
Dunque $\lim_{h\to+\infty} \hat{u}_h = \lim_{h\to+\infty} \hat{v}_h$
perché $u_h - v_h \xrightarrow{L^2} 0 \underset{\text{Plancherel}}{\Longrightarrow} \hat{u}_h - \hat{v}_h \to 0$
- Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, allora le trasformate coincidono
Infatti, prendendo $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che (possibile tramite mollificatori)
$$\begin{cases} u_h \xrightarrow{L^1} u \\ u_h \xrightarrow{L^2} u \end{cases}$$
si ha:
$$\begin{cases} \hat{u}_h \xrightarrow{L^\infty} \hat{u} \text{ Trasformata in } L^1, \text{ perché } \mathcal{F} : L^1 \to L^\infty \text{ continuo} \\ \\ \hat{u}_h \xrightarrow{L^2} \hat{u} \text{ Trasformata in } L^2, \text{ per definizione di } \mathcal{F} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$
- Vale l'id. di Plancherel in $L^2(\mathbb{R}^n)$
$$\|u\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n}\|\hat{u}\|_{L^2}^2 \ \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$
Infatti, presa $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : u_h \xrightarrow{L^2} u$:
$$\|u_h\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n}\|\hat{u}_h\|_{L^2}^2 \ \forall h$$
Passando al limite si ottiene l'identità.

23.3.2 Calcolo nella pratica

Basta osservare che la successione
$$u_h = u \cdot \chi_{(-h,h)}$$
$$u_h \to u \text{ in } L^2(\mathbb{R})$$
$$\implies \hat{u}_h \to \hat{u} \text{ in } L^2(\mathbb{R})$$
Per Plancherel.
Qunidi,
$$\hat{u}(\xi) = \lim_{h\to+\infty} \hat{u}_h(\xi)$$
$$= \lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_h(x)e^{-i\xi x}dx$$
La formula di inversione vale in L^2, basta prendere $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), u_h \xrightarrow{L^2} u$
Sappiamo:
$$\check{u}_h = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{u}}_h \ \forall h$$
Basta passare al limite per $h \to +\infty$
$$\check{u} = (2\pi)^{-n}\hat{\hat{u}}$$

24 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Problema: Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, come definire $\hat{T}$?
Idea: Scaricare $\mathcal{F}$ sulle funzioni test, dal momento che sappiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}u = \int_{\mathbb{R}^n} v\hat{u}$$

Data $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, potremmo definire $\hat{T}$

$$\left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

La definizione posta non ha senso, perché

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \not\Longrightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

cioé $\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \not\to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la trasformata di una $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è analitica, quindi non può avere supporto compatto.
Si utilizzano quindi funzini test in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si introduce quindi una convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definizione: Data $\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, diciamo che $\varphi_h \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se

$$\forall \alpha, \beta,\ x^\alpha D^\beta \varphi_h \to x^\alpha D^\beta \varphi \text{ uniformemente su } \mathbb{R}^n$$

Osservazioni

1. Data $\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Riferimento a convergenza in $\mathcal{D}$)

$$\varphi_h \to \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \varphi_h \to \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

2. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è lineare e continuo, ovvero $\varphi_h \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi}_h \to \hat{\varphi}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}_h \to \xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi} \text{ uniformemente su } \mathbb{R}^n$$

(Poiché rispettivamente $\xi^\alpha D^\beta = \widehat{D^\alpha(x^\beta \varphi_h)},\ \xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi} = \widehat{D^\alpha(x^\beta \varphi)}$.)
Perché $D^\alpha(x^\beta \varphi_h) \to D^\alpha(x^\beta \varphi)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$
Esempio

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|D^\alpha(x^\beta \varphi_h) - D^\alpha(x^\beta \varphi)|}{1+x^2}(1+x^2) \leq$$

$$\leq \sup_{\mathbb{R}^n} ||D^\alpha(x^\beta \varphi_h) - D^\alpha(x^\beta \varphi)|(1+x^2)| \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx \to 0$$

24.1 Spazio delle funzioni temperate

Definizione: Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si dice *distribuzione temperata* se

$$\varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_h \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \varphi_h \rangle \to 0$$

Definizione: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{\text{distribuzioni temperate}\}$

Esempi

1. $u(x) = p(x)$ polinomio $\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dico che $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi_h \leq \int_{\mathbb{R}} |\frac{u}{p}p\varphi_h|dx \leq \|\frac{u}{p}\|_{L^1}\|p\varphi_h\|_{L^\infty} \to 0 \text{ se } \varphi_h \to 0$$

dove p polinomio tale che $u/p \in L^1(\mathbb{R})$

2. $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si dice a *crescita lenta* se $u = qw$ con q polinomio e $w \in L^1(\mathbb{R})$, Tutte le funzioni a crescita lenta stanno in $\mathcal{S}'$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$|\int_{\mathbb{R}} u\varphi| \leq \int_{\mathbb{R}} |wq\varphi| \leq \|w\|_{L^1}\|q\varphi\|_{L^\infty}$$

Quindi, se $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\|q\varphi_h\|_\infty \to 0$

3. Come caso particolare: $u \in L^p(\mathbb{R}) \implies$ u è a crescita lenta, e quindi sta in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Data $u \in L^p(\mathbb{R})$, $u = qw$ con q polinomio e $w \in L^1(\mathbb{R})$.
   - $u \in L^1(\mathbb{R}) \to$ prendo $q = 1$, $w \in L^1(\mathbb{R})$
   - $u \in L^\infty(\mathbb{R}) \implies$ prendo $q : 1/q \in L^1(\mathbb{R})$, $u = q \cdot \frac{u}{q}$, $w = u/q \in L^1(\mathbb{R})$ applicando Holder.
   - $u \in L^p(\mathbb{R}) \implies$ prendo $q : 1/q \in L^{p'}(\mathbb{R})$, $u = q \cdot \frac{u}{q}$, $w = \frac{u}{q} \in L^p(\mathbb{R})$, sempre per Holder.

4. $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $D^{(k)}\delta_0 \in S'(\mathbb{R})$

$$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \varphi_h \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \langle\delta_0, \varphi_h\rangle \to 0$$

Avendo la convergenza uniforme di φ_h, si avrà anche la convergenza puntuale (in $\varphi_h(0)$.

Altre osservazioni su $\mathcal{S}'$

1. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \implies T$ può agire più in generale su funzioni test di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
Infatti, se $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, posso definire

$\langle T, \varphi\rangle\ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \lim_{h\to+\infty} \langle T, \varphi_h\rangle$ dove $\varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_h \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2. Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora vale:

$$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } \varphi_h \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \varphi_h\rangle \to 0$$

Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(R^n)$
Data $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definisco $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$\left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle := \langle T, \hat{\varphi}\rangle\ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Osservazioni

1. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
   Quindi $\langle T, \hat{\varphi} \rangle$ ha senso perché $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

2. Verifichiamo che $\hat{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\{\varphi_h\} \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \left\langle \hat{T}, \varphi_h \right\rangle \to 0$$

   Infatti $\{\varphi_h\} \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi_h} \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \hat{\varphi_h} \rangle \to 0$ perché $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

3. Si ha anche $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (vedere sopra)

Tutte le proprietà di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ valgono anche in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,
Inversione:

$$\check{T} = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{T}}$$

Dimostrazione

$$\left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n} \left\langle T, \hat{\hat{\varphi}} \right\rangle = (2\pi)^{-n} \left\langle \hat{\hat{T}}, \varphi \right\rangle$$

Esempi

1. $T = \delta_0$

$$\left\langle \hat{\delta_0}, \varphi \right\rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi = \langle 1, \varphi \rangle$$

$$\implies \hat{\delta_0} = 1$$

2. $\hat{1} = \hat{\hat{\delta_0}} = 2\pi \check{\delta_0} = (2\pi)\delta_0$, poiché

$$\left\langle \check{\delta_0}, \varphi \right\rangle = \langle \delta_0, \check{\varphi} \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

3. $\hat{x} = \mathcal{F}(x \cdot 1) = i(\hat{1})' = 2\pi i (\delta_0)'$

24.2 Lista trasformate studiate

Ricapitolando, sono state studiate le seguenti trasformate:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty \\ &\mathcal{F} : L^2 \to L^2 \\ &\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \\ &\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}' \end{aligned}$$

25 Problemi di Cauchy per l'equazione del calore e delle onde

Si tratta di problemi di evoluzione, ovvero l'incognita è $u = u(x_1, \ldots, x_n, t)$

$$u_t - \Delta u = f \text{ equazione del calore (parabolica)}$$

$$u_{tt} - \Delta u = f \text{ equazione delle onde (iperbolica)}$$

Ad entrambe è associata l'equazione di Poisson $-\Delta u = f$ (ellittica)
In dimensione $n = 2$, le equazioni omogenee diventano

$$u_t - u_{xx} = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{tt} & u_{tx} \\ u_{xt} & u_{xx} \end{pmatrix} \qquad \det A = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A < 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A > 0$$

Si ha una terminologia simile alla classificazione delle coniche

25.1 Problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ipotesi: $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$
Strategia: Applicare $\mathcal{F}_{(x \to \xi)}$ (Fourier rispetto a x)

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}_{x \to \xi}(u(x,t)) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-i\xi x} dx$$

1. Trasformare il problema
$$\widehat{u_t} - \widehat{u_{xx}} = 0$$
$$\hat{u}_t = (\hat{u})_t \text{ purché } u \text{ sia sufficientemente regolare}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-i\xi x} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) e^{-i\xi x} dx$$
$$\widehat{u_{xx}} = (i\xi)^2 \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$$
L'equazione soddisfatta da $\hat{u}$ è
$$(\hat{u})_t + \xi^2 \hat{u} = 0$$
Il dato iniziale trasformato è
$$\hat{u}(\xi, 0) = \int_{\mathbb{R}} u_0 e^{-i\xi x} dx$$
Il problema risolto da $\hat{u}$ è
$$\begin{cases} (\hat{u})_t + \xi^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$
Ovvero una ODE, lineare, omogenea, del I ordine.

2. Determinare $\hat{u}$
   Se poniamo $\varphi(t) := \hat{u}(\xi, t)$ (per ξ fissato), il problema risolto da φ :

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -\xi^2 \varphi(t) \\ \varphi(0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases} \implies \varphi(t) = Ce^{-\xi^2 t}$$

$$\varphi(0) = C = \hat{u}_0(\xi) \implies \varphi(t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-\xi^2 t}$$

3. Determinare u a partire da $\hat{u}$

$$u_(x, t) = \mathcal{F}^{-1}_{x \to \xi}(\hat{u}_0(\xi)) * \mathcal{F}^{-1}_{x \to \xi}(e^{-\xi^2 t})$$

$$u_1(x, t) *_x u_2(x, t) = \int_{\mathbb{R}} u_1(x - y, t)u(y, t)dy$$

$$\boxed{u(x, t) = u_0(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}}$$

Commenti

- Avendo preso $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, il prodotto di convoluzione ha senso ($u_0 \in L^2$, gaussiana $\in L^1$)
- Se il prodotto scritto ha senso per $t > 0$, si può far vedere che:

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = u_0(x) \text{ in } L^2(\mathbb{R})$$

  Infatti

$$\|u(x, t) - u_0(x)\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-1}\|\hat{u}(\xi, t) - \hat{u}_0(\xi)\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi, t) - \hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi)e^{-\xi^2 t} - \hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi =$$

$$(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi)|^2 |e^{-\xi^2 t} - 1|^2 d\xi \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

  Per Plancherel. Inoltre il limite per $t \to 0$ passa sotto integrale per convergenza dominata.

25.2 Effetto regolarizzante dell'operatore calore

$\forall t > 0, x \mapsto u(x, t)$ è di classe C^∞ per le proprietà del prod. di convoluzione.
La formula mostra anche quella che si dice *velocità di propagazione infinita* dell'operatore $\partial_t - \partial_{xx}$
Ovvero: anche se $u_0(x)$ è a supporto compatto

$$\forall t > 0, x \mapsto u(x, t) \text{ è diversa da } 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

25.3 Problema di Cauchy per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = u_1(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ipotesi: $u_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), u_1 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$
Spezzando (P) in due problemi distinti

$$(P_1) \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \\ v(x,0) = u_0(x) \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

Se trovo v e w soluzioni dei due problemi $\implies u = v + w$ soluzioni di (P)
Risolvo (P_1)

1. $\widehat{v_{tt}} - \widehat{v_{xx}} = 0$, se v sufficientemente regolare

$$(\hat{v})_{tt} = -\xi^2 \hat{v}$$
$$\hat{v}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi)$$
$$\hat{v}_t(\xi, 0) = 0$$

Problema di Cauchy per un'ODE (lineare, omogenea del II ordine) Completare

$$\implies \varphi(t) = C_1 e^{i\xi t} + C_2 e^{-i\xi t}$$

Imponiamo i dati iniziali

$$\varphi(0) = C_1 + C_2 = \hat{u}_0(\xi)$$

$$\varphi'(0)|_{t=0} = i\xi C_1 e^{(i\xi t)} - i\xi C_2 e^{-i\xi t}|_{t=0} = i\xi C_1 - i\xi C_2 = 0 \iff C_1 = C_2$$

Quindi $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\hat{u}_0(\xi)$

$$\implies \varphi(t) = \hat{v}(\xi, t) = \frac{1}{2}\hat{u}_0(\xi) e^{i\xi t} + \frac{1}{2}\hat{u}_0(\xi) e^{-i\xi t}$$

2. Ricavo v a partire da $\hat{v}$, ricordando la regola di trasformazione (traslazione):

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)]$$

Somma di due onde, (progressiva e regressiva) che hanno stessa forma di u_0 e metà ampiezza Procedendo in maniera analoga:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}(U_1(x+t) - U_1(x-t)) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy$$

Conclusione: **Formula di d'alembert**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy$$

Commenti

- Non c'è effetto regolarizzante, nelle ipotesi sopra u è di classe $C^2(\mathbb{R})$.
  Si può dimostrare che D'Alembert vale più in generale.
- La velocità di propagazione è finita