- Definizione e teoremi di completezza
- Criteri di convergenza
- Risultati di confronto
- Approssimazione con funzioni regolari (prodotto di convoluzione)
- Teorema di differenziazione (funzioni assolutamente continue)

Appartenenza a L^p: verifica dell'integrale

$$f \in L^p(E) \iff \int_E |f|^p < +\infty$$

Convergenza in L^p

$$\{f_n\} \subseteq L^p(E),\ f \in L^p(E),\ \left(\int_E |f_n - f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

Candidato limite: f limite puntuale q.o.

$$\lim_n \int_E |f_n - f|^p = \int_E \lim |f_n - f|^p \ ?$$

0.0.1 Caso limite L infinito

Definizione:

$$L^\infty := \{f : E \to \mathbb{R} \text{ misurabili} : \text{ ess-}\sup_{x\in E} |f(x)| < +\infty\}/\sim$$

$$\sup_{x\in E} |f(x)| := \min\{M : |f(x)| \leq M\ \forall x \in E\}$$
$$\text{ess-}\sup_{x\in E} |f(x)| := \min\{M : |f(x)| \leq M \text{ q.o. } x \in E\}$$

Teorema: $(L^\infty(E), \|.\|_\infty)$ è uno spazio di Banach

Osservazioni

$$f \in L^\infty(E) \iff \text{ess-sup}_{x\in E}|f(x)| < +\infty$$

Convergenza

$$\{f_n\} \subseteq L^\infty(E),\ f \in L^\infty(E) : \text{ess-sup}_{x\in E}|f_n(x) - f(z)| \to 0$$

Dunque convergenza uniforme a meno di un insieme di misura nulla.
Esempi di funzioni in $L^\infty(\mathbb{R})$

$$f(x) = c > 0,\ \|f\|_\infty = c$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{N} \\ n & x = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Osservazione: Se $f \in L^p(E),\ \forall p \in [1, +\infty]$

$$\implies \lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Analogo in $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to+\infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

0.1 Risultati di confronto

$p \leq q$ $p, q \in [1, +\infty] \implies L^p(E) \subseteq$ oppure $\supseteq L^q(E)$?
In generale no
Controesempio 1: $L^1(0, +\infty),\ L^2(o, +\infty), L^\infty(0, +\infty)$

$$f(x) = 1,\ \text{ess-sup}_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| = 1,\ \int_{\mathbb{R}_+} |f| = \int_{\mathbb{R}_+} |f|^2 = +\infty$$

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^1(\mathbb{R}_+), f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$$

Controesempio 2:

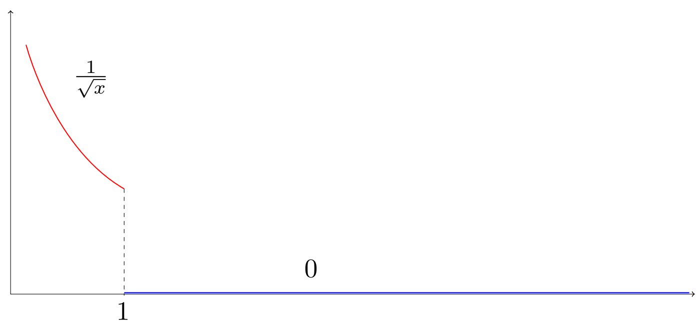

Figura 1: Controesempio 2

$$\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < +\infty,\ \text{ess-sup}_{x\in\mathbb{R}_+}|f(x)| = +\infty = \int_0^{+\infty} |f|^2$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+),\ f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$$

Controesempio 3: Si ricava in modo immediato che

$$f \in L^2(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+),\ f \notin L^1(\mathbb{R}_+)$$

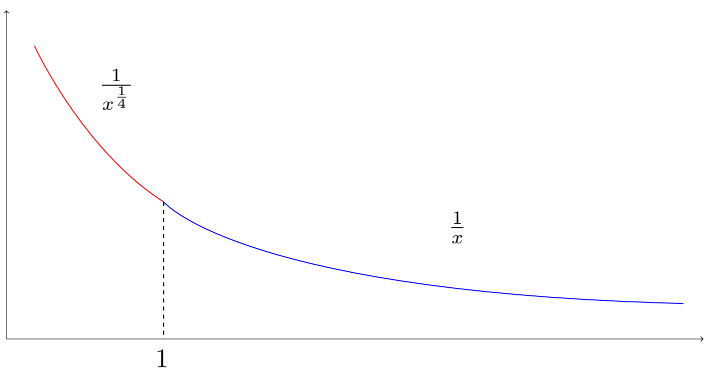

Figura 2: Controesempio 3

0.1.1 Disuguaglianza di Holder

Sia E misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$ qualsiasi, e $p \in [1, +\infty]$.
Siano $f \in L^p(E),\ g \in L^{p'}(E)$, con $p' :=$ esponente coniugato di p

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Con la convenzione $\frac{1}{\infty} = 0$

Disuguaglianza di Holder: Sia $f \in L^p(E),\ g \in L^{p'}(E)$

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

0.1.2 Conseguenze di Holder sul confronto tra i vari spazi

Proprietà di immersione (1)
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m(E) < +\infty$ e sia $q \geq p$, allora $L^q(E) \subseteq L^p(E)$, e

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{qp}}\ \|f\|_{L^q(E)} \quad \forall f \in L^q(E)$$

In particolare se $q = +\infty$ ho che $\forall p \in [1, +\infty), L^\infty(E) \subseteq L^p(E)$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Infatti

$$\int_E |f|^p \leq \int_E \text{ess-sup}_{x \in E} |f|^p = m(E) \cdot (\text{ess-sup}_{x \in E} |f|)^p$$

Elevando a $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (m(E))^{\frac{1}{p}} \text{ess-sup}_{x \in E} |f| = m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Dimostrazione di (*) a partire da Holder
Suppongo $f \in L^q(E)$, $\implies f \in L^{\frac{q}{p}}$

$$\int_E |f|^p = \int_E |f|^p \chi_E \leq \|f^p\|_{L^{\frac{q}{p}}} \cdot \|\chi_E\|_{L^{(q/p)'}}$$

- $f \in L^{q/p}$ infatti
- $\chi_E \in L^{q/p)'}$ infatti

$$\int_E |\chi_E|^{(q/p)'} = \left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{q}{q-p}$$

$$\||f|^p\|_{L^{q/p}} = \left(\int_E |f|^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\|\chi_E\|_{L^{(q/p)'}} = \left(\int_E |\chi_E|^{(\frac{q}{p})'}\right)^{\frac{1}{\frac{q}{p})'}} = m(E)^{\frac{q-p}{q}}$$

Quindi

$$\int_E |f|^p \leq m(E)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_E |f|^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

Elevando tutto alla $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|f\|_{L^q(E)}$$

Proprietà di interpolazione (2)
Se $f \in L^p(E) \cap L^q(E)$, con $p \leq q \implies f \in L^r(E)\ \forall r \in [p, q]$ e

$$\|f\|_{L^r(E)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(E)} \cdot \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(E)}$$

Dove $\alpha \in (0,1)$ tale che $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$
Esempio: Se $f \in L^1(E) \cap L^\infty(E) \implies f \in L^r(E) \forall r \in [1, +\infty]$

0.2 Approssimazione con funzioni regolari

Teorema di approssimazione con funzioni regolari
Sia $p \in [1, +\infty)$, e sia E misurabile in $\mathbb{R}^n$
$C^\infty_o(E)$ è un sottospazio *denso* in $L^p(E)$
$C^\infty_0(E) := \{f : E \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e aventi supporto compatto in $E\}$

Ovvero

$$\forall f \in L^p(E) \exists \{f_n\} \subseteq C^\infty_0(E) \text{ tale che } \|f_n - f\|_{L^p} \to_{n\to+\infty} 0$$

$$\forall f \in L^p(E),\ \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in C^\infty_0(E) \text{ tale che } \|\varphi - f\|_{L^p} < \varepsilon$$

Osservazione: Falso nel caso $p = +\infty$