1 Spazi di Hilbert

Definizione: Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$
Un prodotto scalare su H è un'applicazione $(\ ,\ ) : H \times H \to \mathbb{R}$ tale che

1. $(x,x) \geq 0\ \forall x \in H$ con $(x,x) = 0 \iff x = 0$ *positività*
2. $(x,y) = (y,x)\ \forall x,y \in H$ *simmetria*
3. $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1,y) + \alpha_2(x_2,y)$ *bilinearità*

Definizione: $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ è detta *norma associata* (o indotta) dal prodotto scalare

Esempi

- $H = \mathbb{R}^n$; $(x,y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$; $\sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \|x\|_2$; ovvero la norma euclidea
- $H = L^2(\Omega)$ $(f,g) = \int_\Omega fg$; $\sqrt{(f,f)} = (\int_\Omega f^2)^{1/2} = \|f\|_2$
- $H = W^{1,2}(\Omega)$; $(f,g) := \int_\Omega fg + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} = \int_\Omega fg + \nabla f \cdot \nabla g$

$$\sqrt{(f,f)} = \left(\int_\Omega f^2 + |\nabla f|^2\right)^{1/2} \simeq \|f\|_{H^1}$$

norma equivalente alla norma di H^1

1.1 Disuguaglianza di Cauchy Schwartz

Se $(\ ,\ )$ è un prodotto scalare su H, allora

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|\ \forall x,y \in H$$

Inoltre vale $= \iff x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
Dimostrazione
$\forall t \in \mathbb{R}\ 0 \leq (x-ty, x-ty) = (x,x) - 2t(x,y) + t^2(y,y)$
Dunque

$$0 \leq \|x\|^2 - 2t(x,y) + t^2\|y\|^2 \implies \Delta \leq 0$$
$$\Delta = 4(x,y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$
$$\implies |(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Se vale $=$, $\Delta = 0 \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x-\lambda y, x-\lambda y) = 0 \implies x - \lambda y = 0$ (Viceversa se $x = \lambda y$)

Proposizione: Se $(,) : H \times H \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare,

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)} \text{ è una norma}$$

Dimostrazione

- $\|x\| \geq 0$ con $= \iff x = 0$ vera per la prop. (1)
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x} = |\lambda|\sqrt{(x, x)} = \lambda\|x\|$
- $$\begin{aligned}\|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} &= \sqrt{\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2} \\ &\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

1.1.1 Legge del parallelogramma

Teorema: Sia H uno spazio vettoriale con prodotto scalare $(,)$ e sia $\|.\|$ la norma indotta da esso. Allora

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ \forall x, y \in H$$

Figura 1: Legge del parallelogramma in $\mathbb{R}^2$

Dimostrazione

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = (x+y, x+y)+(x-y, x-y) = \|x\|^2+2(x-y)+\|y\|^2+\|x\|^2-2(x, y)+\|y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

Osservazione: Può servire a verificare se una norma proviene o meno da un prodotto scalare.
Le norme di $\mathbb{R}^n, L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega)$ con $p \neq 2$ non provengono da un prodotto scalare.
Esempio: $\Omega = (0, 1)$ in $L^p(0, 1)$ con $p \neq 2$, la norma non proviene da un prodotto scalare
Fisso $t \in (0, 1)$, considero le funzioni

- $f = \chi_{(0,t)}$
- $g = \chi_{(t,1)}$

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^t 1\right)^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{1}{p}}$$
$$\|g\|_p = \left(\int_0^1 |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_t^1 1\right)^{\frac{1}{p}} = (1-t)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|f + g\|_p = 1$$
$$\|f - g\|_p = 1$$

L'identità del parallelogramma diventa:

$$2 = 2t^{\frac{2}{p}} + 2(1-t)^{\frac{2}{p}}$$
$$1 = t^{\frac{2}{p}} + (1-t)^{\frac{2}{p}}$$

Valida $\iff p = 2$

Definizione: Uno *spazio di Hilbert* è uno spazio di Banach in cui la norma proviene da un prodotto scalare.

Esempi: sono spazi di Hilbert

- $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$
- $L^2(\Omega)$
- $H^1(\Omega)$

Non sono di Hilbert

- $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p$ con $p \neq 2$
- $L^p(\Omega)$ con $p \neq 2$
- $W^{1,p}(\Omega)$ con $p \neq 2$
- $C^0([a, b]),\ \|f\|_2 = (\int_a^b |f|^2)^{1/2}$ la norma viene da un prodotto scalare MA non è uno spazio di Banach, dunque non è uno spazio di Hilbert

1.1.2 Teorema di proiezione su un convesso chiuso

Un insieme K si dice *convesso* se $\forall x, y \in K,\ \forall \lambda \in (0, 1) \implies \lambda x + (1-\lambda)y \in K$
Un insieme K si dice *chiuso* se $\forall \{x_n\} \subseteq K : x_n \to x \in H \implies x \in K$

Teorema: Sia H uno spazio di Hilbert, e sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso
Allora $\forall f \in H$ esiste unico $u \in K$ tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

Inoltre: $u = P_k f \iff (f - u, v - u) \leq 0\ \forall v \in K$

Figura 2: Rappresentazione grafica della proiezione su convesso

Corollario, Teorema di proiezione su un sottospazio chiuso
Sia H uno spazio di Hilbert e M un sottospazio vettoriale chiuso.
(M è convesso, non è necessariamente chiuso senza ipotesi)
Allora: $\forall f \in H \exists$ unico $u = P_M f$ tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in M} \|f - v\|$$

Inoltre
$$u = P_M f \iff (f - u, v) = 0\ \forall v \in M$$

Figura 3: Rappresentazione grafica della proiezione su un sottospazio chiuso

Definizione: Se $(,)$ è un prodotto scalare su H

- $x \perp y \iff (x, y) = 0$ (definizione)
- $M^{\perp} := \{x \in H : (x, y) = 0\ \forall y \in M\}$

Osservazione: $f \perp g$ in $L^2(0,1)$ se $\int_0^1 fg = 0$
Esempio: $M = \{\text{funzioni costanti in } L^2(0,1)\}$

$$\begin{aligned} M^\perp &= \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 fc = 0 \ \forall c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f = 0\} \end{aligned}$$

Osservazione:

$$x \perp y \implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Dimostrazione

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Osservazione: $M \cap M^\perp = \{0\}$. Infatti $x \in M \cap M^\perp \implies (x,x) = 0$ valido $\iff x = 0$

> **Teorema delle proiezioni**
> Sia H insieme di Hilbert e M un sottospazio chiuso.
> Allora $\forall x \in H$ $\exists$ un'unica rappresentazione di x come:
>
> $$x = y + z \text{ con } y \in M \text{ e } z \in M^\perp$$
>
> Inoltre, le applicazioni $x \mapsto y = P_M(x)$, $x \mapsto z = P_{M^\perp}(x)$, sono operatori lineari, limitati, di norma 1.

Dimostrazione
Basta prendere come $y = P_M(x)$ (che esiste dal teorema precedente): sappiamo che $(x - P_M(x), v) = 0 \ \forall v \in M \implies x - P_M(x) \in M^\perp$, ovvero $z := x - y \in M^\perp$
L'unicità è data da $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \implies y_1 - y_2 \in M,\ z_2 - z_1 \in M^\perp$ ma $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$, dunque per queste ultime due condizioni si avrà $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0$
Dimostrazione Linearità
$x_1 = y_1 + z_1$
$x_2 = y_2 + z_2$
Dunque $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + z_1 + z_2$, con $y_k \in M,\ z_k \in M^\perp$, per l'unicità $y_1 + y_2 = P_M(x_1 + x_2),\ z_1 + z_2 = P_{M^\perp}(x_1 + x_2)$
Limitatezza
P_m limitato: $x = y + y = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$$

$$\implies \|P_m(x)\| \leq \|x\|^2 \implies P_M \text{ limitato con norma } \leq 1$$

$\|P_M\| = 1$: basta prendere $x \in M \implies x = P_M(x) \implies$ vale l'uguaglianza $\|P_M(x)\| = \|x\|$

1.2 Teoremi di Rappresenzatione

1.2.1 Teorema di Reisz

Problema: Dato H di Hilbert, caratterizzare H' (duale di H).

$$H' = \{\varphi : H \to \mathbb{R} \text{ lineari e continui}\} = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$$

Osservazione: Fissato $u \in H$ possiamo associare ad u un elemento $\varphi_u \in H'$

$$\varphi_u(v) : H \to \mathbb{R},\ \varphi_u(v) = (u, v)\ \forall v \in H$$

Verifica che $\varphi_u \in H'$:

- lineare: $\varphi_u(\alpha v_1 + \alpha_2 v_2) = (u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 \varphi_u(v_1) + \alpha_2 \varphi_u(v_2)$
- continuo (limitato): $|\varphi_u(v)| \leq M\|v\|$ valida con $M = \|u\|$ per la disuguaglianza di Cauchy Scwhartz

Inoltre:

$$\|\varphi_u\|_{H'} = \|u\|_H$$

cioé $M = \|u\|$ è la costante migliore possibile ($v = u$)
In conclusione, $H \subseteq H'$ (immersione isometrica), ovvero la norma si conserva.
Esempi:

- $H = \mathbb{R}^n$ $(u, v) = \sum_{k=1}^n u_k v_k$ $\varphi_u(v) = \sum_{k=1}^n u_k v_k$
- $H = L^2(\Omega)$, $(u, v) = \int_\Omega uv$, $\varphi_u(v) = \int_\Omega uv\ \forall v \in L^2(\Omega)$
- $H = H^1(\Omega)$, $(u, v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v$

$$\varphi_u(v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v\ \forall v \in H^1(\Omega)$$

Teorema di Riesz
Sia H spazio di Hilbert e sia $\varphi \in H'$.
Allora, esiste unico $u \in H$ tale che $\varphi = \varphi_u$ ovvero

$$\varphi(v) = (u, v)\ \forall v \in H$$

Inoltre

$$\|\varphi\|_{H'} = \|u\|_H$$

Dunque $H" = "H'$.

1.2.2 Forme bilineari

Definizione: Sia H di Hilbert. Una *forma bilineare* su H è per definizione un'applicazione

$$a : H \times H \to \mathbb{R}$$

tale che:

- $a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v)$

Esempi:

- In H Hilbert qualsiasi $a(u,v) = (u,v)$
- $H = H^1(\Omega)$, $a(u,v) = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v$, $a(u,v) = \int_\Omega uv$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$

Definizione: Sia $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare

- a *simmetrica* se
$$a(u,v) = a(v,u)\ \forall u,v \in H$$
- a *continua* se
$$\exists C > 0 \text{ tale che } |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|\ \forall u,v \in H$$
- a *coerciva* se
$$\exists \alpha > 0 \text{ tale che } a(u,v) \geq \alpha\|u\|^2\ \forall u \in H$$

Esempi:
1) In H di Hilbert qualsiasi, $a(u,v) = (u,v)$ è

- simmetrica (per definizione di prodotto scalare
- continua (limitata per Cauchy Schwartz)
- coerciva ($(u,u) = 1 \cdot \|u\|^2$)

2) In $H = H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.

- simmetrica
- continua: (tramite Holder)
$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| \leq \|\nabla v\|_2 \|\nabla v\|_2$$
$$\leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\ \forall u,v \in H^1(\Omega)$$
- coerciva: (per Poincaré)
$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \alpha\|u\|_{H^1}^2$$

Osservazione: $a(u,v)$ non sarebbe coerciva su $H^1(\Omega)$ poiché non vale la disuguaglianza di Poicaré (verificabile con $u = \text{cost} > 0$

1.2.3 Teorema di Lax Milgram

Teorema di Lax-Milgram
Sia H Hilbert, e sia $\varphi' \in H'$
Sia $a : H \times H \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, continua e coerciva. Allora esiste unico $u \in H$ tale che

$$\varphi(v) = a(u, v)\ \forall v \in H$$

Inoltre u è caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$E(v) := \frac{1}{2}a(v, v) = \varphi(v)\ \forall v \in H$$

si ha

$$\min_{v \in H} E(v) = E(u)$$

Esempio (Ω limitato)
$H = H_0^1(\Omega)$, $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$, $\varphi(v) = \int_\Omega fv$ dove $f \in L^2(\Omega)$

$$\varphi \in H' : \left| \int_\Omega fv \right| \le \int_\Omega |fv| \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1}$$

Per Lax-Milgram: $\exists u$ unico $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $\varphi(v) = a(u, v)\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega fvdx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdx\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Quest'ultima è una formulazione debole del seguente problema:

$$\begin{cases} -\nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Inoltre il teorema dice che u risolve

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv$$

1.2.4 Commenti sulla proprietà variazionale di u

$E(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}a(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - \varphi(u + \varepsilon v)$

$$= \frac{1}{2}[a(u, u) + 2\varepsilon a(u, v) + \varepsilon^2 a(v, v)] - \varphi(u) - \varepsilon\varphi(v)$$

$$= [\frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u)] + \varepsilon[a(u, v) - \varphi(v)] + \frac{\varepsilon^2}{2}a(u, v)$$

$$\implies E(u + \varepsilon v) - E(u) = \varepsilon[a(u, v) - \varphi(v)] + o(\varepsilon)$$

$$\implies \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E(u + \varepsilon v) - E(u)}{\varepsilon} = a(u, v) - \varphi(v) = 0$$

Se $a(u,v) = \varphi(v)\ \forall v \in H$,

$$E(u + \varepsilon v) - E(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,v) \geq 0$$

Quindi u minimizza E.
Viceversa, se u minimizza E :

$$E(u + \varepsilon v) \geq E(u)\ \forall v \in H\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\implies a(u,v) - \varphi(v) = 0\ \forall v \in H$$