1 Funzioni analitiche in campo complesso

Definizione
$f : \Omega$ aperto $\subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice analitica su Ω se $\forall z_0 \in \Omega,\ \exists\ u(z_0)$ tale che

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k(z-z_0)^k \quad \forall z \in u(z_0)$$

1.1 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k\geq 0} c_k(z-z_0)^k$$

$$S_N(z) := \sum_{k=0}^{N} c_k(z-z_0)^k$$

Tipi di convergenza
La serie conv. puntualmente in $z \in \mathbb{C}$ se

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(z) \in \mathbb{C}$$

La serie conv. uniformemente in Ω a $S(z)$ se

$$\exists \lim_{N\to+\infty} \sup_{z\in\Omega}|S_N - S(z)| = 0$$

La serie conv. assolutamente in $z \in \mathbb{C}$ se converge

$$\sum_{k\geq 0} |c_k||z-z_0|^k$$

Dominio di convergenza della serie

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : \text{ la serie converge puntualmente in } z\}$$

Proprietà
1. $in(D) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ dove $R :=$
2. $R = \frac{1}{L}$ dove

$$L = \lim_{k\to+\infty}(\sup)\sqrt{|c_k|}$$

Con la convenzione $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ 3. La serie delle derivate n-esime

$$\sum_{k\geq 0} D^n(c_k(z-z_0)^k)$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza
Calcolo dei coefficienti c_k

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k(z-z_0)^k = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$$f'(z) = \sum_{k\geq 1} kc_k(z-z_0)^{k-1} = c_1 + 2c_2(z-z_0) + \dots$$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k\geq n} k(k-1)\dots(k-n+1)c_k(z-z_0)^{k-n}$$

Si ottiene infine

$$f(z_0) = c_0,\ f'(z_0) = c_1,\ f''(z_0) = 2c_2$$
$$f^{(n)}(z_0) = n!c_n$$
$$\implies c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

1.2 Un altro modo di calcolare i coefficienti c_k

Sia f analitica in Ω, sia $z_0 \in \Omega$, $R :=$ raggio di conv.
Fissato $r \in (0, R)$, e fissato $k \geq 0$, calcoliamo

$$I_k := \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

Dove $C_r(z_0)$ è una circonferenza centrata in z_0 di raggio r percorso una volta in senso antiorario parametrizzato $r(t) = z_0 + re^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$, scrivibile anche come $(x_0 + r\cos t) + i(y_0 + r\sin t)$

$$I_k = \int_{C_r(z_0)} \frac{\sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n\geq 0} c_n \int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^{n-k-1} dz$$

È permesso per la convergenza uniforme della serie

$$\int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases}$$

Dunque tutti gli integrali nella somma si annullano tranne per $n - k - 1 = -1 \implies n = k$

$$= c_k \cdot 2\pi i \implies c_k = \frac{I_k}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

Formula di Cauchy per la derivata k-esima:

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

In particolare con $k = 0$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Dove r è un qualsiasi raggio appartenente all'intervallo $(0, R)$
Osservazione: $z \to \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ è olomorfa su $D\{z_0\}$

$$\implies \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \text{ è indipendente dalla scelta di } r \in (0, R)$$

Per $k = 0$ vale in realtà una proprietà più forte

Formula di Cauchy
f olomorfa su Ω contenente $\overline{B_r(z_0)}$, allora $\forall z \in B_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Precisazione: $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$
Questa formula è estremamente forte e generica poiché vale per tutte le funzioni olomorfe, non è necessaria l'ipotesi di funzione analitica.
Osservazione: $z \to \frac{f_(\xi)}{\xi - z}$ è somma di una serie di potenze

$$\frac{1}{1-z} = \sum_k z^k$$

È dunque una funzione analitica.

1.3 Analiticità e olomorfia

Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe
Sia f olomorfa su $\Omega \implies f$ analitica su Ω

Osservazioni

- $\Longleftarrow$ (implicazione inversa) è ovvia
- Differenza rispetto al caso reale

Valgono gli sviluppi già noti dall'analisi reale.