1 Introduzione Analisi Complessa

Definizione
Una funzione di variabile complessa è una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Numero complesso: $z = x + iy$ dove $x, y \in \mathbb{R}$ $i^2 = -1$
$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
Dunque ad ogni funzione complessa è possibile associare due funzioni reali in due variabili
$f \leftrightarrow u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Esempi di funzioni elementari

$$f(z) = z_0 \in \mathbb{C},\ z_0 = x_0 + iy_0,\ u = x_0,\ v = y_0$$

$$f(z) = Rez,\ z = x + iy,\ u(x, y) = x,\ v(x, y) = 0$$

$$f(z) = Imz,\ z = x + iy \implies f(z) = y$$

$$f(z) = |z|,\ f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} \implies u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ v(x, y) = 0$$

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

In questo ultimo caso è necessario calcolare manualmente le funzioni u, v associate

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ con } P, Q \text{ funzioni polinomiali}$$

Quest'ultima funzione non è definita $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = e^z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$$

Funzione Esponenziale È l'estinsione della funzione nel campo dei reali

$$z = x + iy \implies e^z := e^x \cdot e^{iy} := e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Se $z = x \in R \implies e^z = e^x \implies$ è estensione della funzione reale
$u(x, y) = e^x \cos y,\ v(x, y) = e^x \sin y$

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi} = e^x(\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)) = e^z$$

Questo implica che la funzione esponenziale nel campo complesso è periodica di periodo $T = 2\pi i$ Inoltre,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$e^z = 0 \iff |e^z| = 0$$

$$e^x(\cos y + i \sin y) =$$

Completare il modulo
Funzioni cos, sin

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Sono funzioni circolari, definite $\forall z \in \mathbb{C}$
Come per la funzione esponenziale sono estensioni delle funzioni reali
Dunque se $z = x \in R \implies \cos z = \cos x$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

$\implies$ $\cos z$ è periodica sia nel campo dei reali sia nel campo dei complessi

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

Per le altre funzioni valgono proprietà analoghe essendo definite come estensioni