1 Esempi di distribuzioni

1. $T = T_u$ con $u \in C^1(\Omega) \implies (T_u)' = T_{u'}$
2. $T = T_u$ con $u(x) = |x|$ su $\Omega = (-1, 1)$

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = - \langle T_u, \varphi' \rangle = - \int_{-1}^{1} |x| \varphi'(x) dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x) dx + x\varphi \Big|_0^1 - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + x\varphi(x) \Big|_{-1}^0 = \int_{-1}^1 \varphi(x) \cdot \mathrm{sign}(x) dx$$

$$\implies (T_{|x|})' = T_{\mathrm{sign}(x)} \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Notazione: $(|x|)' = \mathrm{sign}(x)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$
Più in generale: se $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $u' = v$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, significa $(T_u)' = T_v$ ovvero

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \;\; \langle (T_u)', \varphi \rangle = - \langle T_u, \varphi' \rangle = \langle T_v, \varphi \rangle$$

$$- \int_\Omega u\varphi' = \int_\Omega v\varphi \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

3. $u(x) = \mathrm{sign}(x)$, $u' = ?$

$$- \int_\Omega \mathrm{sign}(x)\varphi'(x) dx = - \int_0^1 \varphi' + \int_{-1}^0 \varphi' = -\varphi(1) + 2\varphi(0) - \varphi(-1) = 2\varphi(0)$$

$$= 2 \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

4. $T = \delta_0$ $T' = ?$

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle = - \langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0) \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

1.1 Generalizzazione

- $n = 1$ Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $T^{(k)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\left\langle T^{(k)}, \varphi \right\rangle := (-1)^k \left\langle T, \varphi^k \right\rangle$$

Osservazione: $T^{(k)}$ definisce una distribuzione, lineare e continua, infatti se $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_h^{(k)} \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies \left\langle T, \varphi_h^{(k)} \right\rangle \to 0$.
Osservazione 2: se $T = T_u$ con $u \in C^k(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \implies (T_u)^{(k)} = T_{u^{(k)}}$
Esempio: $u(x) = |x| \implies u'' = 2\delta_0$

- $n \geq 1$ Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall \alpha$ multiindice

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Osservazione: $D^\alpha T$ definiscono delle distribuzioni $\forall \alpha$
Osservazione: Si possono calcolare le derivate di tutti gli ordini, di qualsiasi $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$
Osservazione: Il risultato non dipende dall'ordine di derivazione

1.1.1 Operatori differenziali

Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si possono definire $\nabla T, \nabla^2 T, \text{rot}T, \ldots$

2 Spazi di Sobolev

Sono gli spazi dove si trovano le soluzioni di problemi al contorno per P.D.E.
Esempio Equazione di Poisson

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = f \text{ su } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

Definizione: Fissato Ω aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $\in [1, +\infty]$

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Con $\frac{\partial}{\partial x_i}$ intesa nel senso delle distribuzioni

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \iff \exists v_i \in L^p(\Omega) \text{ tali che}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \varphi = \int_\Omega v_i \varphi \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Esempi $(n = 1,\ \Omega = (-1, 1))$

- $u \in C_0^1(\Omega) \implies u \in W^{1,p}(\Omega)$ compleatare
- $u(x) = \text{sign}(x)$ $u \notin W^{1,2}(\Omega)$ completare

Definizione: Fissato Ω aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \forall \alpha \text{ multiindice con } |\alpha| \leq k\}$$

Caso particolare $p = 2$

$$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$$

Osservazione: $W^{k,p}(\Omega)$ sono spazi vettoriali

Definizione: Norma su $W^{1,p}(\Omega)$ sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

Definizione: Norma su $W^{k,p}(\Omega)$ sia $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_p + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha\|_p$$

Teorema: Per ogni $p \in [1, +\infty]$, $W^{1,p}(\Omega)$ sono spazi di Banach

completare conv.

Definizione

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \text{chiusura di } \mathcal{D}(\Omega) \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

ovvero

$$= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists \{\varphi_n\}\}$$

completare