1 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Problema: Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, come definire $\hat{T}$?
Idea: Scaricare $\mathcal{F}$ sulle funzioni test, dal momento che sappiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}u = \int_{\mathbb{R}^n} v\hat{u}$$

Data $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, potremmo definire $\hat{T}$

$$\left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

La definizione posta non ha senso, perché

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \;\not\Longrightarrow\; \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

cioé $\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \not\to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la trasformata di una $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è analitica, quindi non può avere supporto compatto.
Si utilizzano quindi funzini test in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si introduce quindi una convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definizione: Data $\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, diciamo che $\varphi_h \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se

$$\forall \alpha, \beta,\; x^\alpha D^\beta \varphi_h \to x^\alpha D^\beta \varphi \text{ uniformemente su } \mathbb{R}^n$$

Osservazioni

1. Data $\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Riferimento a convergenza in $\mathcal{D}$)

$$\varphi_h \to \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \varphi_h \to \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

2. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è lineare e continuo, ovvero $\varphi_h \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi}_h \to \hat{\varphi}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

   $\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}_h \to \xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$, rispettivamente$D^\alpha(\hat{x^\beta \varphi_h})$ $D^\alpha(\hat{x^\beta \varphi})$

   perché $D^\alpha(x^\beta \varphi_h) \to D^\alpha(x^\beta \varphi)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ completare con esempio

1.1 Spazio delle funzioni temperate

Definizione: Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si dice *distribuzione temperata* se

$$\varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_h \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \varphi_h \rangle \to 0$$

Definizione: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{\text{distribuzioni temperate}\}$

Esempi

1. $u(x) = p(x)$ polinomio $\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dico che $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi_h \leq \int_{\mathbb{R}} |\frac{u}{p} p\varphi_h| dx \leq \|\frac{u}{p}\|_{L^1} \|p\varphi_h\|_{L^\infty} \to 0 \text{ se } _h \to 0$$
dove p polinomio tale che $u/p \in L^1(\mathbb{R})$
2. $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si dice a *crescita lenta* se $u = qw$ con q polinomio e $w \in L^1(\mathbb{R})$, Tutte le funzioni a crescita lenta stanno in $\mathcal{S}'$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
$$|\int_{\mathbb{R}} u\varphi| \leq \int_{\mathbb{R}} |wq\varphi| \leq \|w\|_{L^1} \|q\varphi\|_{L^\infty}$$
Quindi, se $\varphi_h \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\|q\varphi_h\|_\infty \to 0$
3. Come caso particolare: $u \in L^p(\mathbb{R}) \implies$ u è a crescita lenta, e quindi sta in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Data $u \in L^p(\mathbb{R})$, $u = qw$ con q polinomio e $w \in L^1(\mathbb{R})$.
   - $u \in L^1(\mathbb{R}) \to$ prendo $q = 1$, w completare
   - $u \in L^\infty(\mathbb{R}) \implies$ prendo $q : 1/q \in L^1(\mathbb{R})$, $u = q \cdot \frac{u}{q}$, $w = u/q \in L^1(\mathbb{R})$ applicando Holder.
   - $u \in L^p(\mathbb{R}) \implies$ prendo $q : 1/q \in L^{p'}(\mathbb{R})$, $u = q \cdot \frac{u}{q}$, $w = \frac{u}{q} \in L^p(\mathbb{R})$, sempre per Holder.
4. $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $D^{(k)}\delta_0 \in S'(\mathbb{R})$
$$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \varphi_h \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \langle \delta_0, \varphi_h \rangle \to 0$$
Avendo la convergenza uniforme di φ_h, si avrà anche la convergenza puntuale (in $\varphi_h(0)$.

Altre osservazioni su $\mathcal{S}'$

1. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \implies T$ può agire più in generale su funzioni test di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
Infatti, se $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, posso definire
$$\langle T, \varphi \rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ come } \lim_{h \to +\infty} \langle T, \varphi_h \rangle \text{ dove } \varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_h \to \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora vale:
$$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } \varphi_h \to 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \varphi_h \rangle \to 0$$

Trasformata di Fourier in S'(Rn)
Data $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definisco $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come
$$\left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Osservazioni

1. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Quindi $\langle T, \hat{\varphi} \rangle$ ha senso perché $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

2. Verifichiamo che $\hat{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\{\varphi_h \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \left\langle \hat{T}, \varphi_h \right\rangle \to 0\}$$

   Infatti $\{\varphi_h\} \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi_h} \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \hat{\varphi_h} \rangle \to 0$ perché $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

3. Si ha anche $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (vedere sopra)

Le **proprietà** della trasformata valgono anche in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, tutte le proprietò di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Inversione:

$$\not{\hat{T}} = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{T}}$$

Dimostrazione

$$\left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n} \left\langle T, \hat{\hat{\varphi}} \right\rangle = (2\pi)^{-n} \left\langle \hat{\hat{T}}, \varphi \right\rangle$$

Esempi

1. $T = \delta_0$

$$\left\langle \hat{\delta_0}, \varphi \right\rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi = \langle 1, \varphi \rangle$$

$$\implies \hat{\delta_0} = 1$$

2. $\hat{1} = \hat{\hat{\delta_0}} = 2\pi \not{\delta}_0 = (2\pi)\delta_0$, poiché

$$\not{\delta}_0, \varphi = \langle \delta_0, \not{\varphi} \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

3. $\hat{x} = \mathcal{F}(x \cdot 1) = i(\hat{1})' = 2\pi i (\delta_0)'$