

Indice

1	Introduzione Analisi Complessa	1
2	Limiti	2
2.0.1	Infinito nei complessi	2
2.1	Derivabilità	3
3	Funzioni olomorfe	4
3.1	Invertibilità locale	4
3.2	Ricerca delle primitive - antiderivazione	4
4	Funzioni analitiche in campo complesso	6
4.1	Serie di potenze in \mathbb{C}	6
4.2	Un altro modo di calcolare i coefficienti c_k	7
4.3	Analiticità e olomorfia	9
5	Singularità isolate e loro classificazione	9
5.0.1	Singularità eliminabile	9
5.0.2	Polo	10
5.0.3	Singularità essenziale	10
5.1	Sviluppabilità in serie di Laurent	10
6	Riconoscere le singularità	11
6.0.1	Principio di identità	11
6.0.2	Ordine di zeri	11
6.1	Ordine dei poli	11
6.1.1	Unicità del prolungamento analitico	13
7	Teorema dei residui	13
7.1	Calcolo dei residui	13
7.2	Definizione e calcolo dell'indice di avvolgimento	14
7.2.1	Modalità analitica per calcolare l'indice	15
7.3	Teorema dei residui	15
8	Applicazioni del teorema dei residui in campo reale	15
8.1	Primo tipo	15
8.2	Secondo tipo	16
8.2.1	Lemma tecnico di decadimento	17
8.3	Terzo tipo	17
8.3.1	Lemma di Jordan	18
8.4	Quarto tipo	18
8.4.1	Lemma del polo semplice	19
9	Cenni aggiuntivi sull'analisi complessa	19
9.1	Residuo all'infinito	19
9.2	Funzioni polidrome	20
9.3	Funzioni armoniche	20

10 Analisi funzionale	20
10.0.1 Norma	21
10.0.2 Norma su uno spazio funzionale di dimensione infinita . . .	21
10.1 Spazio di Banach	23
11 Integrazione secondo Lebesgue	24
11.0.1 Misure e funzioni misurabili	24
11.0.2 Definizione di integrale secondo Lebesgue	26
11.0.3 Proprietà principali dell'integrale di Lebesgue	28
11.1 Confronto Riemann-Lebesgue	28
11.1.1 Integrali propri	28
11.1.2 Integrali impropri	29
12 Spazi di Lebesgue	29
12.0.1 Integrali multipli	32
12.0.2 Spazi di Lebesgue (o spazi L^p)	33
12.0.3 Caso limite L infinito	33
12.1 Risultati di confronto	34
12.1.1 Disuguaglianza di Holder	35
12.1.2 Conseguenze di Holder sul confronto tra i vari spazi . . .	35
12.2 Approssimazione con funzioni regolari	37
12.3 Supporto e Classe C_0	37
12.4 Prodotto di convoluzione	37
12.5 Teorema fondamentale del calcolo	40
13 Operatori lineari tra spazi vettoriali normati	41
14 Distribuzioni	44
14.1 Convergenza	46
14.2 Delta di Dirac	46
14.2.1 Ovvie generalizzazioni	47
14.2.2 idk	47
14.2.3 Derivazione di distribuzioni	48
14.2.4 Motivo della definizione di derivata	48
15 Esempi di distribuzioni	48
15.1 Generalizzazione	49
15.1.1 Operatori differenziali	49
16 Spazi di Sobolev	50
16.0.1 Disuguaglianza di Poincaré	51
17 Spazi di Hilbert	52
17.1 Disuguaglianza di Cauchy Schwartz	52
17.1.1 Legge del parallelogramma	53
17.1.2 Teorema di proiezione su un convesso chiuso	55
17.2 Teoremi di Rappresenzazione	57
17.2.1 Teorema di Reisz	57
17.2.2 Forme bilineari	58
17.2.3 Teorema di Lax Milgram	59
17.2.4 Commenti sulla proprietà variazionale di u	60

18 Equazioni alle derivate parziali	60
18.1 Formulazione variazionali di problemi ellittici	60
18.1.1 PDE ellittiche del secondo ordine	60
18.1.2 Formulazione variazionale del problema di Dirichlet . . .	61
18.1.3 Formulazione variazionale del problema di Neumann . . .	61
18.1.4 Esistenza delle soluzioni	62
18.1.5 Esistenza delle soluzioni per Neumann	63
18.1.6 Richiamo di Analisi Vettoriale	63
18.1.7 Dimostrazione proposizione di Dirichlet	64
19 Serie di Fourier in spazi di Hilbert	65
19.0.1 Convergenza in H	65
19.0.2 Sottospazio generato	66
19.0.3 Disuguaglianza di Bessel	66
19.0.4 Dimostrazione teorema di convergenza delle serie di Fourier	66
20 Serie di Fourier in L^2	68
20.0.1 Modi equivalenti di scrivere (*)	69
21 Applicazioni delle serie di Fourier alle equazioni differenziali	70
22 Trasformata di Fourier	71
22.1 Varianti in letteratura	72
22.2 Operatore Trasformata	72
22.3 Trasformate notevoli	72
22.4 Teorema di Riemann-Lebesgue	73
22.5 Proprietà algebriche	74
22.6 Proprietà differenziali	74

1 Introduzione Analisi Complessa

Definizione

Una funzione di variabile complessa è una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Numero complesso: $z = x + iy$ dove $x, y \in \mathbb{R}$ $i^2 = -1$

$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Dunque ad ogni funzione complessa è possibile associare due funzioni reali in due variabili

$f \leftrightarrow u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Esempi di funzioni elementari

$$f(z) = z_0 \in \mathbb{C}, \quad z_0 = x_0 + iy_0, \quad u = x_0, \quad v = y_0$$

$$f(z) = \operatorname{Re} z, \quad z = x + iy, \quad u(x, y) = x, \quad v(x, y) = 0$$

$$f(z) = \operatorname{Im} z, \quad z = x + iy \implies f(z) = y$$

$$f(z) = |z|, \quad f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} \implies u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = 0$$

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

In questo ultimo caso è necessario calcolare manualmente le funzioni u, v associate

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ con } P, Q \text{ funzioni polinomiali}$$

Quest'ultima funzione non è definita $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = e^z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$$

Funzione Esponenziale

È l'estensione della funzione esponenziale nel campo dei reali

$$z = x + iy \implies e^z := e^x \cdot e^{iy} := e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Se $z = x \in \mathbb{R} \implies e^z = e^x \implies$ è estensione della funzione reale
 $u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y$

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^z$$

Questo implica che la funzione esponenziale nel campo complesso è periodica di periodo $T = 2\pi i$ Inoltre,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$e^z = 0 \iff |e^z| = 0$$

$$|e^x(\cos y + i \sin y)| = |e^x| |\cos y + i \sin y| = e^x = 0 \quad \nexists z$$

Funzioni coseno, seno

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Sono funzioni definite $\forall z \in \mathbb{C}$

Come per la funzione esponenziale sono estensioni delle funzioni reali

Dunque se $z = x \in \mathbb{R} \implies \cos z = \cos x$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

$\implies \cos z$ è periodica sia nel campo dei reali sia nel campo dei complessi

Inoltre

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Per le altre funzioni valgono proprietà analoghe essendo definite come estensioni

Formule alternative

2 Limiti

Definizione:

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \text{acc}(\Omega), l \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \forall V(l) \exists u(z_0) \text{ t.c. } \forall z \in (u(z_0) \cap \Omega \setminus \{z_0\}), f(z) \in V(l)$$

Definizione di continuità

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in a(\Omega) \cap \Omega, f \text{ continua } z_0 \iff \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Osservazioni

$$z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, l = l_1 + il_2, f = u + iv$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = l_1 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = l_2 \end{cases}$$

Con le stesse notazioni

$$f \text{ continua in } z_0 \iff u, v \text{ continue in } (x_0, y_0)$$

Sono continue (sul loro dominio di definizione) tutte le funzioni elementari introdotte nella lezione scorsa

Vale l'algebra dei limiti e il teorema del limite della funzione composta (\implies composizione di continue rimane continua)

Vale il teorema di unicità del limite

2.0.1 Infinito nei complessi

Un intorno di ∞ nei complessi è il complementare di un qualsiasi disco

$$z \rightarrow \infty \iff z \in u(\infty) \iff |z| > R \iff |z| \rightarrow +\infty$$

$$f(z) \rightarrow \infty \iff f(z) \in u(\infty) \iff |f(z)| > R \iff |f(z)| \rightarrow +\infty$$

2.1 Derivabilità

Definizione:

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \text{acc}(\Omega) \cap \Omega$$

$$f \text{ derivabile (in senso complesso) in } z_0 \iff \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (\in \mathbb{C})$$

e tale limite si dice $f'(z_0)$

Definizioni alternative:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \dots$$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda \cdot h + o(h) \quad \frac{o(h)}{h} \rightarrow 0$$

Dove λ è la derivata prima della funzione nel punto z_0

Quest'ultima è la definizione di differenziabilità

Attenzione Se u, v sono differenziabili ciò non implica la differenziabilità/derivabilità di f (Un esempio è $f(z) = \text{Im}z$)

Teorema (caratterizzazione della derivabilità)

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \Omega \cap \text{acc}(\Omega), z_0 = x_0 + iy_0, f = u + iv$$

$$f \text{ derivabile in } z_0 \iff u, v \text{ differenziabile in } (x_0, y_0),$$

$$\text{Inoltre } \begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

(sistema, condizione di cauchy riemann) Inoltre, in tal caso

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Dimostrazione

$$(\implies) \text{ Per Hp } \exists f'(z_0) = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \implies f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + g, g = o(h)$$

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + iv(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (\alpha + i\beta)(h_1 + ih_2) + g_1 + ig_2$$

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = u(x_0, y_0) + (\alpha h_1 - \beta h_2) + g_1$$

$$v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = v(x_0, y_0) + (\beta h_1 + \alpha h_2) + g_2$$

Queste due equazioni indicano che u, v sono differenziabili in (x_0, y_0) , con

$$\begin{cases} \nabla u(x_0, y_0) = (\alpha, -\beta) \\ \nabla v(x_0, y_0) = (\beta, \alpha) \end{cases}$$

Questo dimostra inoltre che $f'(z_0) = \alpha + i\beta$

(\impliedby) Procedere al contrario

3 Funzioni olomorfe**Definizione**

f si dice olomorfa su Ω se è derivabile in $z_0 \forall z_0 \in \Omega$

3.1 Invertibilità locale**Teorema**

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in Ω , e sia $z_0 \in \Omega$ tale che $f'(z_0) \neq 0$ allora f è "localmente invertibile in z_0 "

($\exists u(z_0)$ tale che $f|_{u(z_0)}$ invertibile)

E la funzione inversa f^{-1} è derivabile in senso complesso in $f(z_0)$ e

$$(f^{-1})'|_{z_0} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Dimostrazione

$\Phi(u, v)$ definito su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \Omega$, se $\det J\Phi(x_0, y_0) \neq 0 \implies \Phi$ "localmente invertibile" e

$$J\Phi^{-1}(\Phi(x_0, y_0)) = (J\Phi(x_0, y_0))^{-1}$$

Dunque se $f = u + iv$ si riformula il teorema con $\Phi = (u, v)$

$$J\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \implies \det J\Phi(x_0, y_0) = \alpha^2 + \beta^2 = |f'(z_0)|^2$$

Poiché $f' = \alpha + i\beta$ e l'ipotesi del teorema è che $|f'(z_0)|^2 \neq 0$

$$J\Phi^{-1}(\Phi(x_0, y_0)) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ \implies (f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\overline{f'(z_0)}}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

3.2 Ricerca delle primitive - antiderivazione

Problema: Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ esiste? unica? $F : \Omega \subseteq \mathbb{C}$ olomorfa in Ω tale che

$$F'(z) = f(z)$$

Una tale F si dice **primitiva** di f .

Richiamo - Teorema fondamentale del calcolo: Data $f : (a, b) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora una primitiva di f è data da

$$F(x) = \int_a^x f$$

E tutte le altre primitive si ottengono aggiungendo una costante reale

Unicità: una primitiva, se esiste, è univocamente determinata a meno di costante additiva.

- F primitiva di $f, \lambda \in \mathbb{C} \implies F + \lambda$ primitiva di f poiché $(F + \lambda)' = F' + \lambda' = f$
- F_1, F_2 primitive di $f \implies \exists \lambda \in \mathbb{C} : F_1 - F_2 = \lambda$

$G := F_1 - F_2$, Tesi: G è costante, Dim:

$$G' = (F_1 - F_2)' = f - f = 0$$

$$G = u + iv \quad G' = u_x - iu_y = v_y + iv_x \quad G' = 0 \implies \nabla u(x_0, y_0) = \nabla v(x_0, y_0) = \underline{0}$$

$\implies u$ costante, v costante

N.B vale se Ω è connesso

Esistenza

$f = u + iv, F = U + iV$ (f data, F incognita)
 $F' = U_x - iU_y = V_y + iV_x = f = u + iv$

$$\implies \begin{cases} U_x = u \\ U_y = -v \end{cases} \quad \begin{cases} V_x = v \\ V_y = u \end{cases}$$

ovvero U potenziale per $w_1 := udx - vdy$

e V potenziale per $w_2 := vdx + udy$

Concludiamo che dire f ammette primitive $\iff \omega_1, \omega_2$ esatte $\implies \omega_1, \omega_2$ chiuse

Ovvero se la funzione f soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann dunque se f olomorfa

$$f \text{ ammette primitive} \iff \omega_i \text{ esatte} \implies f \text{ olomorfa} \iff \omega_i \text{ chiuse}$$

L'implicazione inversa è vera se Ω è semplicemente connesso

Dunque $F = U + iV$ dove U potenziale per ω_1 , V potenziale per ω_2

Nota: ω chiusa $\implies \oint_{\gamma} \omega$ non cambia se sostituisco γ con un circuito omotopo.

Definizione

Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dato γ cammino in Ω parametrizzata da una funzione $r : [a, b] \rightarrow \Omega$, $r(t) = r_1(t) + ir_2(t)$

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_a^b f(r(t))r'(t)dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b (u + iv)(r'_1 + ir'_2)dt = \int_a^b (ur'_1 - vr'_2) + i \int_a^b vr'_1 + ur'_2 \\ &= \int_{\gamma} \omega_1 + i \int_{\gamma} \omega_2 \end{aligned}$$

Riformulazione del calcolo di F

$$F(z) = \int_{\gamma: z_0 \rightarrow z} f$$

Questo implica che

$$\oint_{\gamma} f = 0$$

Teorema di Morera

$\oint_{\gamma} f = 0 \forall \gamma \text{ circuito} \subseteq \Omega \implies f \text{ olomorfa}$

Teorema di Cauchy

f olomorfa su $\Omega \implies \oint_{\gamma} f$ non cambia se sostituisco un circuito $\gamma \subseteq \Omega$ con uno ad omotopo (In particolare, se γ omotopa ad un punto $\oint_{\gamma} f = 0$)

4 Funzioni analitiche in campo complesso

Definizione

$f : \Omega \text{ aperto } \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice analitica su Ω se $\forall z_0 \in \Omega, \exists u(z_0)$ tale che

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in u(z_0)$$

4.1 Serie di potenze in \mathbb{C}

$$\sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k$$

$$S_N(z) := \sum_{k=0}^N c_k (z - z_0)^k$$

Tipi di convergenza

La serie conv. puntualmente in $z \in \mathbb{C}$ se

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(z) \in \mathbb{C}$$

La serie conv. uniformemente in Ω a $S(z)$ se

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{z \in \Omega} |S_N - S(z)| = 0$$

La serie conv. assolutamente in $z \in \mathbb{C}$ se converge

$$\sum_{k \geq 0} |c_k| |z - z_0|^k$$

Dominio di convergenza della serie

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : \text{la serie converge puntualmente in } z\}$$

Proprietà

1. $\text{int}(\mathcal{D}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ dove $R := \text{raggio di convergenza}$

\implies La serie converge assolutamente in $\text{int}(\mathcal{D})$

\implies La serie converge uniformemente su $\{|z - z_0| \leq \rho, \forall \rho < R\}$

2. $R = \frac{1}{L}$ dove

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\sup) \sqrt[k]{|c_k|}$$

Con la convenzione $\frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0$

3. La serie delle derivate n-esime

$$\sum_{k \geq 0} D^n (c_k (z - z_0)^k)$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza

Calcolo dei coefficienti c_k

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

$$f'(z) = \sum_{k \geq 1} k c_k (z - z_0)^{k-1} = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \dots$$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k \geq n} k(k-1) \dots (k-n+1) c_k (z - z_0)^{k-n}$$

Si ottiene infine

$$f(z_0) = c_0, \quad f'(z_0) = c_1, \quad f''(z_0) = 2c_2$$

$$f^{(n)}(z_0) = n! c_n$$

$$\implies c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

4.2 Un altro modo di calcolare i coefficienti c_k

Sia f analitica in Ω , sia $z_0 \in \Omega$, $R :=$ raggio di conv.

Fissato $r \in (0, R)$, e fissato $k \geq 0$, calcoliamo

$$I_k := \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Dove $C_r(z_0)$ è una circonferenza centrata in z_0 di raggio r percorso una volta in senso antiorario parametrizzato $r(t) = z_0 + r e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$, scrivibile anche come $(x_0 + r \cos t) + i(y_0 + r \sin t)$

$$I_k = \int_{C_r(z_0)} \frac{\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n \geq 0} c_n \int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^{n-k-1} dz$$

È permesso per la convergenza uniforme della serie.

$$\int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases}$$

Dunque tutti gli integrali nella somma si annullano tranne per $n - k - 1 = -1 \implies n = k$

$$= c_k \cdot 2\pi i \implies c_k = \frac{I_k}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Formula di Cauchy per la derivata k-esima:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

In particolare con $k = 0$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Dove r è un qualsiasi raggio appartenente all'intervallo $(0, R)$

Osservazione:

$$z \mapsto \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \text{ è olomorfa su } D \setminus \{z_0\}$$

$$\Rightarrow \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \text{ è indipendente dalla scelta di } r \in (0, R)$$

Per $k = 0$ vale in realtà una proprietà più forte

Formula di Cauchy

f olomorfa su Ω contenente $\overline{B_r(z_0)}$, allora $\forall z \in B_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Precisazione: $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

Questa formula è estremamente forte e generica poiché vale per tutte le funzioni olomorfe, non è necessaria l'ipotesi di funzione analitica.

Osservazione:

$$z \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

è somma della serie di potenze generica

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_k z^k$$

È dunque una funzione analitica.

4.3 Analiticità e olomorfia

Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe

Sia f olomorfa su $\Omega \Rightarrow f$ analitica su Ω

Osservazioni

- \Leftarrow (implicazione inversa) è ovvia
- Differenza rispetto al caso reale

Valgono gli sviluppi già noti dall'analisi reale.

5 Singolarità isolate e loro classificazione

Sia $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, si dice che z_0 è una **singolarità isolata** per f se $\exists u(z_0) \subseteq \Omega$ tale che f sia olomorfa su $u(z_0) \setminus \{z_0\}$

Sia z_0 una singolarità isolata per f .

5.0.1 Singolarità eliminabile

Si dice che z_0 è una **singolarità eliminabile** se

$$\exists u(z_0), \exists \tilde{f} : u(z_0) \rightarrow \mathbb{C} \text{ tale che } \tilde{f}|_{u(z_0) \setminus \{z_0\}} = f$$

e \tilde{f} sia olomorfa in $u(z_0)$.

Esempio: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

Osservazione: Se $\exists \tilde{f}$, \tilde{f} è unica.

Se una g è olomorfa è anche continua:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [g(z) - g(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) = g'(z_0) \cdot 0 = 0$$

Ne consegue che il valore che assumera \tilde{f} in z_0 è

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

Osservazione 2: z_0 singolarità eliminabile per $f \implies f$ limitata (in modulo) vicino a z_0 .

$$\exists u(z_0), \exists M > 0 \text{ tale che } \|f(z)\| \leq M \forall u(z_0) - \{z_0\}$$

Infatti, se z_0 singolarità eliminabile per $f \implies \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

Teorema di rimozione della singolarità

Se f olomorfa e limitata in $u(z_0) \setminus \{z_0\} \implies z_0$ è singolarità eliminabile

Quindi, in conclusione, se f è olomorfa su $u(z_0) \setminus \{z_0\}$, z_0 singolarità eliminabile di $f \iff f$ limitata in $u(z_0) \setminus \{z_0\}$

5.0.2 Polo

Si dice che z_0 è un **polo** per f se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

Esempio: $f(z) = \frac{1}{sz^m}$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

5.0.3 Singolarità essenziale

Si dice che z_0 è una **singolarità essenziale** per f se è una singolarità isolata e non è né eliminabile né polo.

Esempio: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

Teorema di Picard: z_0 singolarità essenziale per $f \implies \forall u(z_0), f(u(z_0))$ (ovvero l'immagine di f) è data da \mathbb{C} oppure $\mathbb{C} \setminus \{1 \text{ punto}\}$.

5.1 Sviluppabilità in serie di Laurent

Teorema f olomorfa su $\Omega \setminus \{z_0\}$ aperto di \mathbb{C} , allora f è "sviluppabile in serie di Laurent di centro z_0 ", ovvero

$$\exists u(z_0) \subseteq \Omega \text{ tale che } \forall x \in u(z_0) \setminus \{z_0\}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k < 0} c_k (z - z_0)^k \end{aligned}$$

Ovvero parte regolare dello sviluppo + parte singolare dello sviluppo
Inoltre, il calcolo dei coefficienti:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

In particolare:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} f(z) dz$$

C'è una relazione tra c_{-1} e gli integrali sui circoli. Esempio: $f(z) = \frac{1}{z}$
Tramite serie di Laurent è possibile riconoscere le singolarità
 z_0 è singolarità eliminabile \iff parte singolare dello sviluppo = 0.

6 Riconoscere le singolarità

- z_0 eliminabile \iff parte singolare dello sviluppo = 0
- z_0 polo
- z_0 sing. essenziale

Idea: z_0 è un polo per $f \iff z_0$ è zero per la funzione $1/f$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f} = 0$$

6.0.1 Principio di identità

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e supposto Ω connesso

Sia $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$, sono equivalenti i seguenti fatti

1. $z_0 \in \text{acc}(Z(f))$
2. $f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $Z(f)$ contiene un intorno di z_0
4. $Z(f) \equiv \Omega$

In conclusione: $Z(f)$

- È fatto da punti isolati, oppure
- Coincide con tutto Ω

6.0.2 Ordine di zeri

Sia f olomorfa su Ω connesso, $f \neq 0$ su Ω , sia $z_0 \in Z(f)$, Per il principio di identità, z_0 è uno zero isolato.

La (2) è quindi falsa $\implies \{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \neq \emptyset$. Per il principio di buon ordinamento $\nu := \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$: **Ordine dello zero**.

Osservazione: ν è anche caratterizzato da:

$$f(z) = \sum_{n \geq \nu} c_n (z - z_0)^n = c_\nu (z - z_0)^\nu + o(z - z_0)^\nu$$

Inoltre

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^\nu} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

6.1 Ordine dei poli

z_0 polo per $f \iff z_0$ zero per $1/f$

Definizione: Sia z_0 polo per f . Chiamiamo ordine del polo z_0 l'ordine di z_0 come zero per $1/f$

Definizione: In particolare si dice polo semplice un polo di ordine 1.

Osservazione: L'ordine di un polo è caratterizzato anche:

- z_0 polo di ordine ν per $f \iff z_0$ zero di ordine ν per $1/f \iff$

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^\nu} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \implies & \exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^\nu f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (*) \end{aligned}$$

- z_0 polo di ordine ν per $f \iff$

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \text{ con } c_{-\nu} \neq 0$$

Infatti

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \implies (z-z_0)^\nu f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{n+\nu}$$

(*) \iff tutti i coefficienti c_n con $n+\nu < 0$ e il coefficiente $c_{-\nu} \neq 0$.

Dunque, lo sviluppo di Laurent di una funzione che ha un polo ha parte singolare composta da un numero finito di termini.

È quindi possibile classificare le singolarità guardando lo sviluppo in serie di Laurent, guardando la parte singolare

- p. singolare nulla: ELIMINABILE
- p. singolare con numero finito di termini: POLO
- p. singolare con infiniti termini: ESSENZIALE

Osservazioni su zeri e poli

1. Se f, g hanno entrambe uno zero in z_0 o entrambe un polo, allora

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f}{g} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'}{g'}$$

Cenno di dim (Primo caso):

$$f(z) = c_\nu(z-z_0)^\nu + o(z-z_0)^\nu, g(z) = c_\eta(z-z_0)^\eta + o(z-z_0)^\eta$$

Sono possibili solo tre casi: $\eta = \nu \implies$ limite finito, $\nu > \eta$ limite 0, $\nu < \eta$ limite infinito.

2. z_0 zero di ordine ν per $f \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0)}{f(z)} = \nu$

Questa è una modalità per calcolare l'ordine. Dim: $f(z) = c_\nu(z-z_0)^\nu + \dots$, $f'(z) = \nu c_\nu(z-z_0)^{(\nu-1)} + \dots$

$$\implies \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu c_\nu(z-z_0)^\nu + o(z-z_0)^\nu}{c_\nu(z-z_0)^\nu + o(z-z_0)^\nu} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \nu$$

3. z_0 zero di ordine ν per f , con $\nu \geq 1 \implies z_0$ zero di ordine $\nu-1$ per f' .
 z_0 polo di ordine ν per f , con $\nu \geq -1 \implies z_0$ polo di ordine $\nu+1$ per f .
 Controllare su libro.

6.1.1 Unicità del prolungamento analitico

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ connesso, sia $S \subseteq \Omega$ tale che $\text{acc}(S) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Data $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, esiste al più una $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che $\tilde{f}|_S = f$

Dimostrazione: Supponiamo $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ siano prolungamenti di f .

Tesi: $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2$

Considerando $g := \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$. Tesi: $g \equiv 0$.

g è olomorfa, $S \subseteq Z(g) \implies Z(g)$ ha punti di accumulazione in Ω , quindi $Z(g) \equiv \Omega$

7 Teorema dei residui

Motivazione dello studio del teorema: è il calcolo di integrali in campo complesso e anche in campo reale.

Se f è olomorfa su $\Omega \subseteq \mathbb{C} \implies \int_{\gamma} f(z)dz = 0$ dove γ è un circuito omotopo a un punto. Se f è olomorfa su Ω tranne che in un numero finito di punti, come si calcola $\int_{\gamma} f(z)dz$?

Definizione

Se z_0 è una singolarità isolata per f si dice residuo di f in z_0 il coefficiente c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent di f di centro z_0 .

7.1 Calcolo dei residui

- Se z_0 è una singolarità eliminabile: $\text{Res}(f, z_0) = 0$ poiché la parte singolare dello sviluppo $\equiv 0$
- z_0 singolarità essenziale: non c'è modo diretto di calcolare il residuo (serve calcolare lo sviluppo)
- Se z_0 è un polo di ordine ν

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(\nu-1)!} D^{(\nu-1)}[(z-z_0)^{\nu} f(z)]$$

In particolare se z_0 è un polo semplice

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)]$$

Dimostrazione polo semplice

z_0 polo semplice $\implies f(z) = \sum_{n \geq -1} c_n (z-z_0)^n$, con $c_{-1} \neq 0$

$$(z-z_0)f(z) = \sum_{n \geq -1} c_n (z-z_0)^{n+1} = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + o(z-z_0)^2$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)] = c_{-1}$$

Osservazione: $\text{Res}(\frac{g}{h}, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ con g olomorfa, h con uno zero di ordine 1 in z_0 .

Dimostrazione

Caso $g(z_0) \neq 0 \implies z_0$ polo semplice

$$(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)}{h'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)} \rightarrow \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Tramite la formula per il residuo del polo semplice

$$\text{Res}(\frac{g}{h}, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Caso $G(z_0)=0$ Dico che z_0 è una singolarità eliminabile

$$\frac{g}{h} = \frac{g'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)}{h'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)} \rightarrow \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)} \in \mathbb{C}$$

7.2 Definizione e calcolo dell'indice di avvolgimento

Definizione (intuitiva)

Sia γ circuito $\subseteq \mathbb{C}$ e sia $z_0 \notin \gamma$.

Si dice indice di avvolgimento di γ rispetto a z_0 è il numero di volte che γ gira attorno a z_0 , contate con segno $+$ nel caso di verso antiorario

Definizione (formale)

Sia $r(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ parametrizzazione di γ (γ) circuito $\subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \notin \mathbb{C}$.

Sia $\rho(t) := |r(t) - z_0|$. Allora $\exists \theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $r(t) = z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)}$.

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

L'indice è un numero $\in \mathbb{Z}$ poiché $r(a) = r(b) \implies \rho(a) = |r(a) - z_0| = |r(b) - z_0| = \rho(b)$

$$r(a) = \rho(a) + e^{i\theta(a)}$$

$$r(b) = \rho(b) + e^{i\theta(b)}$$

$$\implies e^{i\theta(a)} = e^{i\theta(b)}$$

$$\implies i\theta(a) - i\theta(b) = 2k\pi i = \theta(a) - \theta(b) = 2k\pi$$

Osservazioni

1. L'indice non cambia per parametrizzazioni equivalenti (dello stesso circuito)
2. L'indice di avvolgimento non cambia sostituendo γ con un circuito omotopo a γ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

7.2.1 Modalità analitica per calcolare l'indice

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

Dimostrazione

$r(t) = z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)}$, $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{z_0 + \rho(t)e^{i\theta(t)} - z_0} dt \\ &= \int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)}}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} dt + i \int_a^b \frac{\rho(t)\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} dt \\ &= \log \rho(t) \Big|_a^b + i[\theta(b) - \theta(a)] = i[\theta(b) - \theta(a)] \end{aligned}$$

Dunque dividendo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

7.3 Teorema dei residui

Sia Ω aperto $\subseteq \mathbb{C}$ e sia $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ circuito omotopo a un punto (in Ω).
Sia $f : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, dove S "insieme singolare" soddisfa

- $\gamma \subseteq \Omega \setminus S$
- $\text{acc}(S) \cap \Omega = \emptyset$

Allora:

$\text{Ind}(\gamma, z_0) \neq 0$ per al più un numero finito di punti e vale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S} \text{Res}(f, z_0) \text{Ind}(\gamma, z_0)$$

8 Applicazioni del teorema dei residui in campo reale

8.1 Primo tipo

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) dt$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} g(e^{it}) i e^{it} dt$$
$$\int_{C_1(0)} g(z) dz$$

Se g soddisfa le ipotesi del teorema dei residui su $C_1(0) \subseteq \Omega$, con $\gamma = C_1(0)$

$$= 2\pi i \sum_{|z_0| < 1} \text{Res}(g, z_0)$$

Esempio: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin t} dt$

8.2 Secondo tipo

$$\text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

La definizione cambia leggermente nel caso sia presente una singolarità su \mathbb{R} . Se f è integrabile (secondo Riemann) allora

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx$$

In generale può accadere che il V.P. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \in \mathbb{R}$ ma f non è integrabile

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 1 & x \in [0, 1] \\ -1 & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{x} & x \leq -1 \end{cases}$$

f non è integrabile secondo Riemann, ma il V.P. è uguale a 0.

Ipotesi: $f = f(z)$ abbia un numero finito di singolarità nel semipiano $\{\text{Im}z > 0\}$ (e nessuna singolarità sull'asse reale) + (*) ipotesi di decadimento.

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{-R} f(x)dx + \int_{C_R^+(0)} f(z)dz - \int_{C_R^+(0)} f(z)dz$$

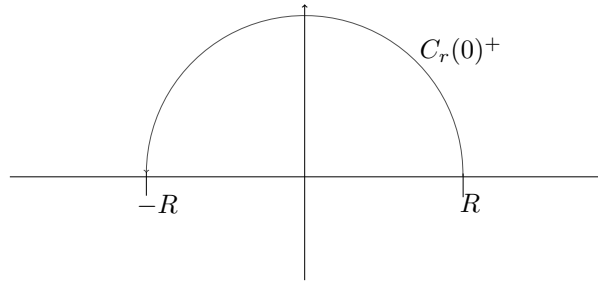


Figura 1: Semicirconferenza

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R(0)^+} f(z)dz$$

Dove $\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0)$

Per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S, \\ \text{Im} z_0 > 0}} \text{Res}(f, z_0)$$

L'indice di avvolgimento è uguale a 1.

8.2.1 Lemma tecnico di decadimento

Se $\exists \alpha > 1$ tale che $|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^\alpha}$ (per $|z|$ abbastanza grande) (*), allora

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) dz = 0$$

Aggiungendo l'ipotesi di decadimento all'integrale precedente si avrà il risultato scritto.

Si ha un calcolo analogo per il semipiano $\{\text{Im} < 0\}$

8.3 Terzo tipo

$$I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S \\ \text{Im} z_0 > 0}}^{\infty} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, z_0)$$

Dove $\omega \in \mathbb{R}^+$

Ipotesi: $f(z) e^{i\omega z}$ abbia un numero finito di singolarità nel semipiano $\{\text{Im} z > 0\}$ (e nessuna singolarità sull'asse reale) + (**) lemma di Jordan.

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{-R} f(z) e^{i\omega z} dz + \int_{C_R(0)^+} f(z) e^{i\omega z} dz - \int_{C_R(0)^+} f(z) e^{i\omega z} dz$$

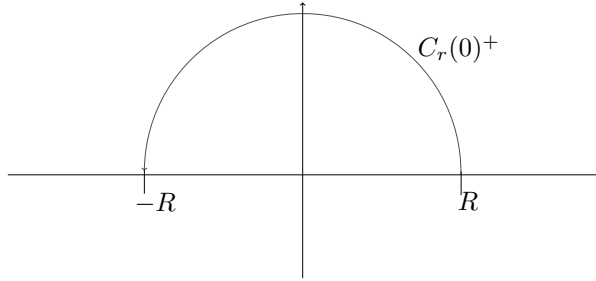


Figura 2: Semicirconferenza

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\omega z} dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R(0)^+} f(z) e^{i\omega z} dz$$

Dove $\gamma_R = [-R, R] + C_R^+(0)$

Per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in S \\ \text{Im}(z_0) > 0}} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, z_0)$$

L'indice di avvolgimento è uguale a 1.
 Il secondo termine dell'integrale si elide grazie a il

8.3.1 Lemma di Jordan

Sotto l'ipotesi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{z \in C_R^+(0)} |f(z)| = 0 \quad (**)$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) e^{i\omega x} dz = 0$$

Osservazione: Variante analoga nel semipiano $\{\text{Im} z < 0\}$ quando $\omega \in \mathbb{R}^-$.
 Jordan vale anche per $\omega \in \mathbb{R}^-$ in $C_R^-(0)$

Esempio: $I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

8.4 Quarto tipo

$$I = \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

Ipotesi: $f(z)$ abbia un numero finito di singolarità su $\{\text{Im} z > 0\}$,
 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) dz = 0$ (***) e abbia un numero finito di poli semplici su \mathbb{R} .

$$\gamma_{R,\varepsilon} = [-R, x_0 - \varepsilon] - C_\varepsilon^+(x_0) + [x_0 + \varepsilon, R] + C_R^+(0)$$

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^+(x_0)} f(z) dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z) dz$$

8.4.1 Lemma del polo semplice

Se x_0 è un polo semplice

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^+(x_0)} f(z) dz = \pi i \text{Res}(f, x_0)$$

Esempio: $I = (\text{V.P.}) \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx$

9 Cenni aggiuntivi sull'analisi complessa

9.1 Residuo all'infinito

Definizione: Diciamo che ∞ è una singolarità isolata per f se f olomorfa nel complementare di una palla

In modo equivalente: $g(z) = f(\frac{1}{z})$ ha una singolarità isolata nell'origine.

$$\text{Olomorfa su } \left| \frac{1}{z} \right| > R \iff |z| < R$$

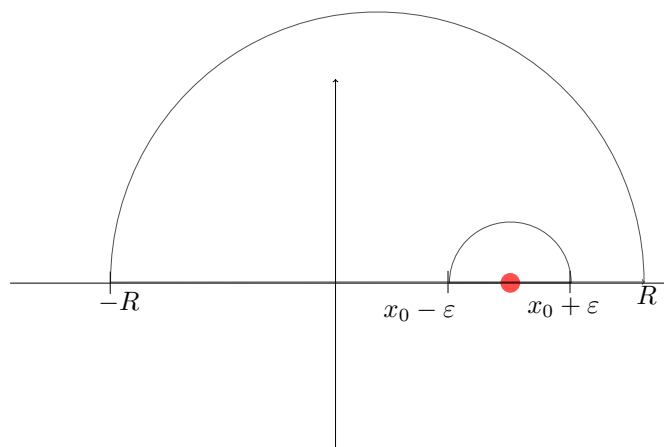


Figura 3: Quarto tipo

$$\text{Res}(f, \infty) := \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

Teorema: La somma di tutti i residui di una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{\text{n. finito di punti}\}$ è zero. (compreso il punto all'infinito).

Da utilizzare quando si deve calcolare la somma di tanti residui al finito. (stesso indice di avvolgimento)

9.2 Funzioni polidrome

$z = |z|e^{i\text{Arg}z}$, $\text{Arg}z := \{\arg + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\arg z$ argomento principale $\in [0, 2\pi]$.

$$\sqrt[n]{z} = \{\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\text{Arg}z}{n}}\} = \{\sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\arg z}{n} + \frac{2k\pi}{n})} : k = 0, \dots, n-1\}$$

$$\log z = \{\log |z| + i\text{Arg}z\}$$

Alla radice sono associati n valori, al logaritmo ∞ valori.

$z \mapsto \sqrt[n]{z}, \log z$ non sono funzioni!

Per definire una radice n -esima funzione si può specificare l'intervallo di variabilità di $\text{Arg}z$. $z \in \mathbb{C} \mapsto \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\text{Arg}z}{n}}$ con $\text{Arg}z \in [\bar{\theta}, \bar{\theta} + 2\pi]$: Branca della radice n -esima.

Osservazione: Una branca della radice n -esima non è continua su \mathbb{C} . (è continua su $\mathbb{C} - \{\theta = \bar{\theta}\}$)

Non è possibile incollare due branche diverse ottenendo una funzione olomorfa su \mathbb{C} .

9.3 Funzioni armoniche

Definizione: $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice armonica se

$$\nabla^2 u = 0 = u_{xx} + u_{yy}$$

Osservazione: $f = f(z)$ olomorfa, $f = u + iv \implies u, v$ armoniche.

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

Sommando le due equazioni

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(Analogamente per $\nabla^2 v = 0$)

Osservazione 2: u armonica su Ω , con Ω semplicemente connesso $\implies \exists v$ armonica coniugata di u t.c. $f = u + iv$ olomorfa.

10 Analisi funzionale

Uno **spazio vettoriale** (su \mathbb{R}) è un insieme (V) su cui sono definite due operazioni:

Somma $+$: $V \times V \rightarrow V$

Prodotto per scalare \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

Tali operazioni godono delle seguenti proprietà

Per la somma

- $u + v = v + u$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- $u + \underline{0} = u$
- $u + (-u) = \underline{0}$

Per il prodotto per scalare

- $(ts)u = t(su)$
- $t(u + v) = tu + tv$
- $(t + s)u = tu + su$
- $1 \cdot u = u$

10.0.1 Norma

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Una norma su V è una funzione $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che:

1. $\|v\| > 0 \forall v \in V - \{\underline{0}\}$ (positività)
2. $\|tv\| = |t|\|v\| \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ (omogeneità)
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \forall u, v \in V$ (dis. triangolare)

$(V, \|\cdot\|)$ si dice **spazio vettoriale normato**.

Seguono le seguenti proprietà

4. $\|\underline{0}\| = 0$
5. $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \forall u, v \in V(\dim)$

Norma euclidea:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sum_{i=1}^n (x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \right)$$

La disuguaglianza triangolare per la norma p , ovvero disuguaglianza di Minkowski, richiede l'ipotesi $p \geq 1$.

10.0.2 Norma su uno spazio funzionale di dimensione infinita

$V = C^0([a, b])$

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

Definizione: Sia $(V, \|\cdot\|)$ sp. vettoriale normato. Allora $d(u, v) := \|\underline{u} - \underline{v}\|$ definisce una distanza su V , ovvero

$$d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

tale che

1. $d(u, v) \geq 0$ con $= 0 \iff u = v$ positività
2. $d(u, v) = d(v, u)$ simmetria
3. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ disuguaglianza triangolare

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i - y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|$$

Definizione: (V, d) si dice spazio metrico

Osservazione: In uno spazio metrico possiamo definire le **sfere**: dato $r \geq 0, v_0 \in V$

$$B_r(v_0) := \{v \in V : d(v, v_0) < r\}$$

Si dice sfera chiusa se la disuguaglianza non è stretta.

Definizione: Se $\{v_n\} \subseteq (V, \|\cdot\|)$, si dice che $v_n \rightarrow v$ in V se

$$d(v_n, v) \rightarrow 0, \text{ oppure } \|v_n - v\| \rightarrow 0$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : d(v_n, v) = \|v_n - v\| < \varepsilon \forall n \geq \nu)$$

Alcuni fatti veri in dimensione finita ma falsi in dimensione infinita:

1. Tutte le norme sono "equivalenti" fra loro
2. Tutte le successioni di Cauchy convergono
3. Tutti i sottospazi vettoriali sono chiusi

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale (su \mathbb{R}), consideriamo su V due possibili norme $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$.

Queste due norme si dicono **equivalenti** se:

1. $\exists c > 0 : \forall v \in V, \|v\| \leq c\|v\|'$
2. $\exists c' > 0 : \forall v \in V, \|v\|' \leq c\|v\|$

Le successioni convergenti nelle due norme sono le stesse.

Interpretazione geometrica:

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \iff B_1^1(0) \subseteq B_1^\infty(0)$$

Teorema: Se $\dim V < +\infty \implies$ tutte le norme su V sono tra loro equivalenti

In uno spazio a dimensione infinita non è generalmente vero, ad esempio nello spazio delle funzioni continue su $[a, b]$

Definizione: Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Una successione $\{v_n\} \subseteq V$ si dice successione di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : d(v_n, v_m) < \varepsilon \forall n, m \geq \nu$$

Osservazione: Vale sempre che se $\{v_n\}$ converge allora è di Cauchy.

$$(\|v_n - v_m\| = \|v_n - v + v - v_m\| \leq \|v_n - v\| + \|v - v_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon)$$

Teorema: Se $\dim V < +\infty$ vale anche il viceversa, ovvero

$$\{v_n\} \text{ converge} \iff \{v_n\} \text{ di Cauchy}$$

Questo teorema è falso se $\dim V = +\infty$
Prendendo lo spazio delle funzioni $V = C^0([a, b])$ con norma 1, si può costruire una successione di Cauchy che non converge.

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon, \quad \int_a^b |f_n - f_m| = \int_a^b f_m - f_n$$

10.1 Spazio di Banach

Definizione: Uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ si dice completo o di Banach se tutte le successioni di Cauchy convergono.

Teorema/osservazione: $V = (C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ è di Banach
Generalizzazione:

$$V = C^k([a, b]) \quad \|f\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

Teorema Sia $(V, \|\cdot\|)$ spazio vettoriale normato. Se $\dim V < +\infty \implies$ tutti i sottospazi vettoriali W sono **chiusi**.

$$\{v_n\} \subseteq W, v_n \rightarrow v \text{ in } V \implies v \in W$$

Il teorema diventa falso se $\dim V = +\infty$, ad esempio $V = (C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.

11 Integrazione secondo Lebesgue

1. Misure e funzioni misurabili
2. Definizione di integrale di Lebesgue
3. Confronto con Riemann
4. Teoremi principali

$$\int_a^b f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N l(f^{-1}(j_k)) \cdot y_k$$

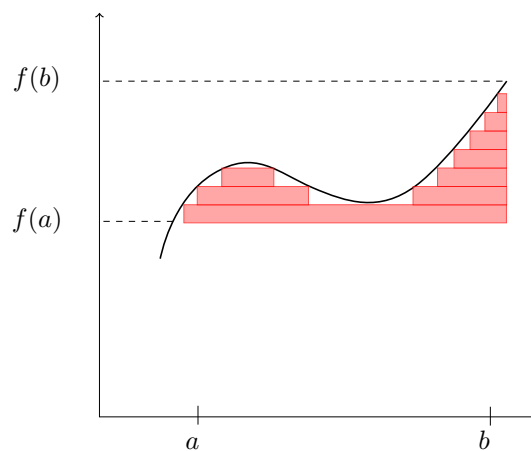


Figura 4: Integrale secondo Lebesgue, intuizione geometrica

11.0.1 Misure e funzioni misurabili

Definizione: Sia X insieme, e sia $F \subseteq P(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X .

F si dice una σ -algebra se:

- (i) $\emptyset \in F$
- (ii) $A \in F \implies X \setminus A \in F$
- (iii) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F \implies \bigcup_n A_n \in F$

Osservazione: $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F \implies \bigcap_n A_n \in F$

Esempi

- X qualsiasi, $F = P(X) =$ parti di X
- $X = \mathbb{R}^n$, $F =$ la più piccola σ -algebra contenente gli aperti (σ di Borell)

Definizione: la coppia (X, F) si dice spazio misurabile

Definizione: Sia (X, F) spazio misurabile, una misura positiva su (X, F) è una funzione

$$\mu : F \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

tale che

1. $\mu(A) \geq 0 \forall A \in F$ (positività)
2. Se $\{A_n\}$ è una famiglia al più numerabile di insiemi di F 2 a 2 disgiunti allora

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

(additività, eventualmente $+\infty = +\infty$)

Esempi:

- $(X, P(X)), \mu(A) = \text{card} A$
- $(X, P(X))$ fissato $x_0 \in X$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

Osservazione: Seguono da 1), 2)

3. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, A_i \in F$

$$\implies \mu(\cup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

4. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots, A_i \in F, \mu(A_1) < +\infty$

$$\implies \mu(\cap_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Teorema: Esistono su \mathbb{R}^n una σ -algebra M (misurabile secondo Lebesgue) e una misura positiva m (misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n) tali che:

- Tutti gli insiemi aperti appartengono a M
- $A \in M$ e $m(A) = 0 \implies \forall B \subseteq A, B \in M$ e $m(B) = 0$ (completezza)
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \ i = 1, \dots, n\}$

$$\implies m(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

[...]

Osservazione: Non tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n sono misurabili secondo Lebesgue.

Osservazione: La misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n estende il concetto di volume n-dimensionale

Osservazione: Gli insiemi di misura nulla sono importanti

Definizione: Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice misurabile secondo Lebesgue se

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto, } f^{-1}(A) \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

$$\forall C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso, } f^{-1}(C) \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

Osservazione: f continua $\implies f$ misurabile secondo Lebesgue (f continua $\implies \forall A$ aperto $f^{-1}(A)$ aperto $\implies \forall A$ aperto $f^{-1}(A)$ misurabili)

Osservazione 2: Sono misurabili anche limiti, inferiore, superiore di funzioni continue (di funzioni misurabili)

Più in generale se

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

con E misurabile, f si dice misurabile secondo Lebesgue se $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $E \cap f^{-1}(A)$ misurabile secondo Lebesgue

11.0.2 Definizione di integrale secondo Lebesgue

Sia $f : E$ misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile.

Funzioni semplici

S funzione semplice è una funzione (misurabile) che assume un numero finito di valori (ciascuno su un insieme misurabile).

$$S = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{E_k}, \quad \chi_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dove gli E_i sono insiemi misurabili 2 a 2 disgiunti

$$\int_E S := \sum_{k=1}^N \alpha_k m(E_k)$$

Precisazione: con la convenzione $0 \cdot \infty = 0$

Funzioni misurabili $f \geq 0$

$$\int_E f := \sup_{\substack{S \text{ semplici} \\ S \geq f}} \int_E S \quad \left(= \inf_{\substack{S \text{ semplici} \\ S \geq f}} \int_E S \right)$$

Funzioni misurabili di segno qualsiasi

Data f misurabile su E misurabile, scriviamo:

$$f = f^+ - f^- \text{ con } f^+, f^- \geq 0, f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := -\min\{f, 0\}$$

$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-$$

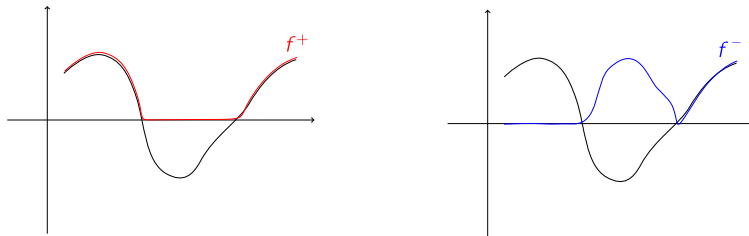


Figura 5: Funzioni di segno qualsiasi

A patto che almeno uno tra i due integrali sia finito, (eventualmente l'integrale vale $\pm\infty$)

Definizione: $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile si dice *integrabile secondo Lebesgue* se

$$\int_E f \in \mathbb{R}$$

Osservazione: f è integrabile secondo Lebesgue $\iff \int_E f^\pm \in \mathbb{R}$

Quindi f integrabile secondo Lebesgue $\iff |f|$ integrabile secondo Lebesgue, infatti

$$|f| = f^+ + f^-$$

11.0.3 Proprietà principali dell'integrale di Lebesgue

1) **Linearità:** f, g Lebesgue integrabili, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g$ Lebesgue integrabile e

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

2) **Monotonia:** f, g Lebesgue integrabili, $f \leq g$ q.o. su E

$$\implies \int_E f \leq \int_E g$$

3) **Maggiorazione del modulo:** f Lebesgue integrabile

$$\implies \left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

Segue da 2), $-|f| \leq f \leq |f| \implies -\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|$

4) L'integrale di Lebesgue "non vede" gli insiemi di misura nulla.
Sia S semplice, $E \rightarrow \mathbb{R}$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } E \setminus N \\ 1 & \text{su } N \end{cases} \quad m(N) = 0$$

$$\int_E S = m(E \setminus N) \cdot 0 + m(N) \cdot 1 = 0$$

Più in generale, se f misurabile: $E \rightarrow \mathbb{R}$ se f si annulla su E tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = 0$$

Conseguenza: se f, g misurabili: $E \rightarrow \mathbb{R}$ se $f = g$ su E tranne che su un insieme di misura nulla

$$\int_E f = \int_E g$$

Definizione: Si dice che una proprietà $P(x)$ vale per q.o. $x \in E$ se $P(x)$ vale $\forall x \in E \setminus N$, con $m(N) = 0$

Quindi

- $f = 0$ q.o. su $E \implies \int_E f = 0$
- $f = g$ q.o. su $E \implies \int_E f = \int_E g$

11.1 Confronto Riemann-Lebesgue

11.1.1 Integrali propri

f R-integrabile $\implies f$ L-integrabile, in caso affermativo, i valori degli integrali coincidono, in generale non vale il viceversa.

(\implies) Le funzioni semplici secondo Lebesgue S_L sono una classe più ampia delle funzioni semplici secondo Riemann S_R

$$\sup_{\substack{s \in S_R \\ s \leq f}} \int_E s \leq \sup_{\substack{s \in S_L \\ s \leq f}} \int_E s \leq \inf_{\substack{s \in S_L \\ s \geq f}} \int_E s \leq \inf_{\substack{s \in S_R \\ s \geq f}} \int_E s$$

Controesempio: $\exists f$ L-integrabile ma non R-integrabile.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Non R-integrabile poiché approssimando da sotto e da sopra non si trova lo stesso valore

$$s \in S_R, s \geq f \implies s \geq 1 \text{ su } (0, 1) \implies \int_0^1 s \geq 1$$

$$s \in S_R, s \leq f \implies s \leq 0 \text{ su } (0, 1) \implies \int_0^1 s \leq 0$$

f è però L-integrabile, $\int_0^1 f = 0$

$$\int_0^1 f = 1 \cdot m((0, 1) \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot m((0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = 0$$

11.1.2 Integrali impropri

In \mathbb{R} , supponiamo che f limitata, sia R-integrabile su $[-L, L] \forall L > 0$.

Allora: f L-integrabile su $\mathbb{R} \iff |f|$ R-integrabile (in senso improprio su \mathbb{R}).

E in tal caso l'integrale di Lebesgue di f coincide con l'integrale improprio di f .

Analogamente se f non è limitata.

Controesempio: una funzione R-integrabile ma non R-integrabile in modulo e quindi non L-integrabile.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ su } (0, +\infty)$$

Riemann integrabile su $(0, +\infty)$ (tramite analisi complessa)

Ma non è Riemann integrabile in modulo

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} = +\infty$$

(Tramite serie)

12 Spazi di Lebesgue

Definizione: Sia E misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$

$$L^1(E) := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ L-integrabili}\} / \sim$$

Tale insieme è uno spazio vettoriale per la linearità dell'integrale.

Definizione: Data $f \in L^1(E)$

$$\|f\|_1 := \int_E |f|$$

Tale norma rispetta le tre proprietà necessarie.

C'è un problema, $\int_E |f| = 0 \not\Rightarrow f = 0$ su E , $\implies f = 0$ q.o. su E .

Definizione: Date $f, g \in L^1(E)$ diciamo che f è equivalente a g se $f = g$ q.o. su E .

Proprietà di una relazione di equivalenza:

- $f \sim f$
- $f \sim g \iff g \sim f$
- $f \sim g$ e $g \sim h \implies f \sim h$

Dunque identifichiamo le funzioni equivalenti secondo l'ultima definizione.

Teorema: $(L^1(E), \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach

Definizione:

$$\{f_n\} \subseteq L^1(E), f_n \rightarrow f \text{ in } L^1(E) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n - f| dx = 0$$

Consideriamo per semplicità $f = 0$

Q: $f_n \rightarrow 0$ puntualmente q.o. su E , allora $\int_E f_n = 0$?

Controesempio 1

$$\exists f_n \subseteq L^1(\mathbb{R}) : \begin{cases} f_n \rightarrow 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R} \\ f_n \not\rightarrow 0 \text{ in } L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$f_n = \chi_{(n, n+1)} = \begin{cases} 1 & x \in (n, n+1) \\ 0 & x \notin (n, n+1) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, $f_n(x_0) = 0$ definitivamente (per $n \gg 1$)

$$\int_{\mathbb{R}} \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(n, n+1)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Controesempio 2

$$\exists f_n \subseteq L^1(0, 1) : \begin{cases} f_n \rightarrow 0 \text{ in } L^1(0, 1) \\ f_n \not\rightarrow 0 \text{ q.o. su } (0, 1) \end{cases}$$

$$f_n \rightarrow 0 \text{ in } L^1(0, 1), \quad \|f_n\|_{L^1(0, 1)} = \int_0^1 |f_n| \rightarrow 0$$

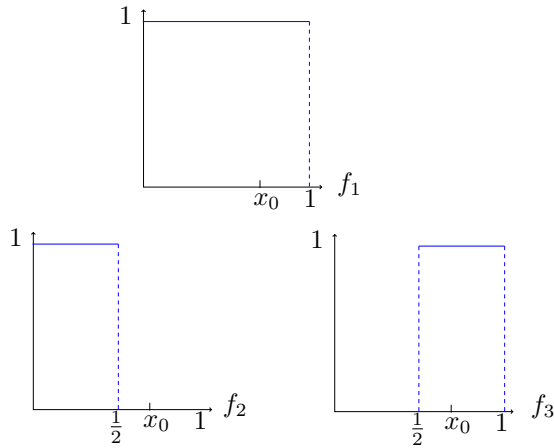


Figura 6: Successione

$$f_n \not\rightarrow 0 \quad \forall x_0 \in (0, 1)$$

$$\text{Fissato } x_0 \in (0, 1), \exists K(n) : f_{K(n)}(x_0) = 1$$

Proposizione: Se $f_n \rightarrow 0$ in $L^1(E)$, allora $\exists f_{K(n)} \rightarrow 0$ q.o. su E .

Osservazioni:

- Si può mettere f al posto di 0.
- Nell'esempio è vero
- Conseguenza: Se una successione f_n ammette limite in $L^1(E)$ allora questo limite deve coincidere col limite puntuale q.o.

Infatti, $f_n \rightarrow f$ q.o. in $L^1(E)$ Allora $\exists f_{K(n)} \rightarrow f$ q.o. su E . (per la proposizione)

Quindi se $f_n \rightarrow g$ q.o. su E . ($\implies f_{K(n)} \rightarrow g$ q.o. su E , per l'unicità del limite puntuale quasi ovunque, $f = g$ q.o. su E)

Teorema di convergenza dominata (di Lebesgue)

Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$ e sia $f_n \rightarrow f$ q.o. su E

Supponiamo che $\exists g \in L^1(E)$ indipendente da n tale che

$$(*) |f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.o. } x \in E, \forall n \in \mathbb{N} \text{ (definitivamente)}$$

Allora $f_n \rightarrow f$ in $L^1(E)$

Osservazioni

- La (*) è un'ipotesi molto più debole della convergenza uniforme
- In particolare per $f_n(x) = x^n$ su $(0, 1)$ la (*) è verificata, prendendo $g \equiv 1$
- Invece nel controesempio 1, se $|f_n(x)| \leq g$ q.o. su \mathbb{R} , $g \notin L^1(\mathbb{R})$
- È un teorema di passaggio al limite sotto integrale.

$$|f_n - f| \rightarrow 0 \text{ su } E \implies \int_E |f_n - f| \rightarrow 0$$

\implies il limite degli integrali \equiv l'integrale del limite.

Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi)

Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$, supponiamo che:

$$(**) f_n \geq 0 \text{ q.o. su } E, f_{n+1} \geq f_n \text{ q.o. su } E$$

Allora

$$\int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n$$

Osservazioni

- Il teorema si applica anche se $f_n \leq 0$ decrescente, basta considerare $g_n = -f_n \geq 0$
- B.L. a $g_n \implies \int_E \lim g_n = \lim \int_E g_n = \int_E \lim(-f_n) = \lim \int_E (-f_n)$
- Può valere come uguaglianza $+\infty = +\infty$

12.0.1 Integrali multipli

Teorema di Fubini

Sia f integrabile secondo Lebesgue, su $I = I_1 \times I_2$ ($I_1 \subseteq \mathbb{R}^m, I_2 \subseteq \mathbb{R}^n$)
Allora:

1. Per q.o. $x_1 \in I_1$, $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ è L-integrabile su I_2
2. $x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2$ L-integrabile su I_1
3. $\int_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{I_1} (\int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2) dx_1$

Osservazione: Si può scambiare il ruolo delle variabili.

$$\int_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

Teorema di Tonelli

Sia $f \geq 0$ misurabile sul precedente $I = I_1 \times I_2$.
Supponiamo che:

- Per q.o. $x_1 \in I_1$, $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ è L-integrabile su I_2
- $x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2$ L-integrabile su I_1

Allora: f L-integrabile su $I_1 \times I_2$ (e quindi per Fubini $\int_I f = \int_{I_1} \int_{I_2} f$)

Osservazione: Se ho una f che cambia segno, posso provare ad applicare Tonelli a $|f|$: se $|f|$ soddisfa 1) 2), Tonelli $\implies |f|$ L-integrabile $\implies f$ L-integrabile \implies posso applicare Fubini.

12.0.2 Spazi di Lebesgue (o spazi L^p)

Definizione: $p \in [1, +\infty)$, $L^p(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : |f|^p \text{ L-integrabile}\} / \sim$,
anch'esso risulta essere uno spazio vettoriale normato (di Banach)

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Teorema: $(L^p, \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach.

- Caso particolarmente importante: $p = 2$
- Caso limite: $p = +\infty$
- Definizione e teoremi di completezza
- Criteri di convergenza
- Risultati di confronto

- Approssimazione con funzioni regolari (prodotto di convoluzione)
- Teorema di differenziazione (funzioni assolutamente continue)

Appartenenza a L^p : verifica dell'integrale

$$f \in L^p(E) \iff \int_E |f|^p < +\infty$$

Convergenza in L^p

$$\{f_n\} \subseteq L^p(E), f \in L^p(E), \left(\int_E |f_n - f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

Candidato limite: f limite puntuale q.o.

$$\lim_n \int_E |f_n - f|^p = \int_E \lim |f_n - f|^p ?$$

12.0.3 Caso limite L infinito

Definizione:

$$L^\infty := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili} : \text{ess-sup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty\} / \sim$$

$$\sup_{x \in E} |f(x)| := \min\{M : |f(x)| \leq M \forall x \in E\}$$

$$\text{ess-sup}_{x \in E} |f(x)| := \min\{M : |f(x)| \leq M \text{ q.o. } x \in E\}$$

Teorema: $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach

Osservazioni

$$f \in L^\infty(E) \iff \text{ess-sup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty$$

Convergenza

$$\{f_n\} \subseteq L^\infty(E), f \in L^\infty(E) : \text{ess-sup}_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

Dunque convergenza uniforme a meno di un insieme di misura nulla.

Esempi di funzioni in $L^\infty(\mathbb{R})$

$$f(x) = c > 0, \|f\|_\infty = c$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{N} \\ n & x = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Osservazione: Se $f \in L^p(E), \forall p \in [1, +\infty]$

$$\implies \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Analogo in \mathbb{R}^2

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

12.1 Risultati di confronto

$p \leq q, p, q \in [1, +\infty] \implies L^p(E) \subseteq$ oppure $\supseteq L^q(E)$?

In generale no

Controesempio 1: $L^1(0, +\infty), L^2(0, +\infty), L^\infty(0, +\infty)$

$$f(x) = 1, \text{ ess-sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1, \int_{\mathbb{R}_+} |f| = \int_{\mathbb{R}_+} |f|^2 = +\infty$$

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^1(\mathbb{R}_+), f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$$

Controesempio 2:

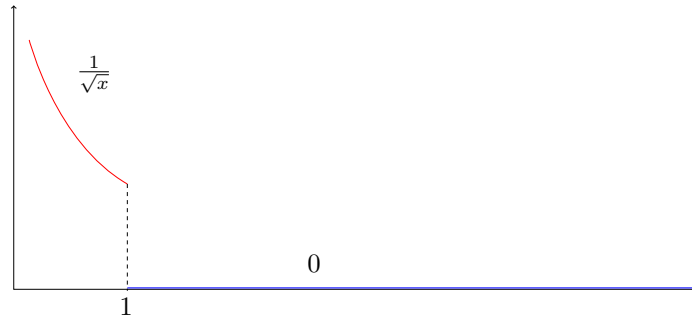


Figura 7: Controesempio 2

$$\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < +\infty, \text{ ess-sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = +\infty = \int_0^{+\infty} |f|^2$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+), f \notin L^2(\mathbb{R}_+)$$

Controesempio 3: Si ricava in modo immediato che

$$f \in L^2(\mathbb{R}_+) \text{ ma } f \notin L^\infty(\mathbb{R}_+), f \notin L^1(\mathbb{R}_+)$$

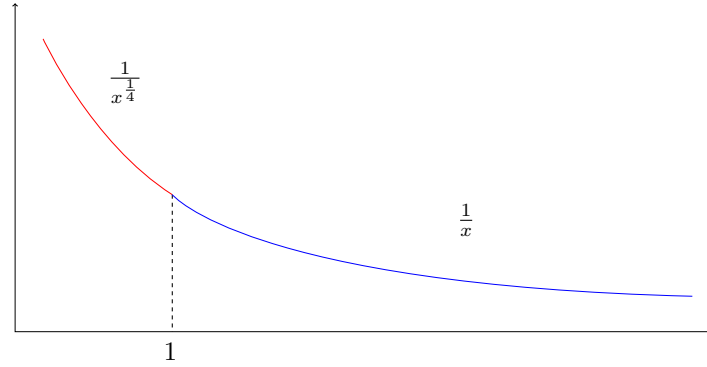


Figura 8: Controesempio 3

12.1.1 Disuguaglianza di Holder

Sia E misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$ qualsiasi, e $p \in [1, +\infty]$.

Siano $f \in L^p(E)$, $g \in L^{p'}(E)$, con $p' :=$ esponente coniugato di p

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Con la convenzione $\frac{1}{\infty} = 0$

Disuguaglianza di Holder: Sia $f \in L^p(E)$, $g \in L^{p'}(E)$

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

12.1.2 Conseguenze di Holder sul confronto tra i vari spazi

Proprietà di immersione (1)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m(E) < +\infty$ e sia $q \geq p$, allora $L^q(E) \subseteq L^p(E)$, e

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{qp}} \|f\|_{L^q(E)} \quad \forall f \in L^q(E)$$

In particolare se $q = +\infty$ ho che $\forall p \in [1, +\infty)$, $L^\infty(E) \subseteq L^p(E)$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Infatti

$$\int_E |f|^p \leq \int_E \text{ess-sup}_{x \in E} |f|^p = m(E) \cdot (\text{ess-sup}_{x \in E} |f|)^p$$

Elevando a $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (m(E))^{\frac{1}{p}} \text{ess-sup}_{x \in E} |f| = m(E)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

Dimostrazione di (1) a partire da Holder

Suppongo $f \in L^q(E)$, $\implies f \in L^{\frac{q}{p}}$

$$\int_E |f|^p = \int_E |f|^p \chi_E \leq \|f^p\|_{L^{\frac{q}{p}}} \cdot \|\chi_E\|_{L^{(q/p)'}}$$

- $f \in L^{q/p}$ infatti
- $\chi_E \in L^{(q/p)'}$ infatti

$$\int_E |\chi_E|^{(q/p)'} = \left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{q}{q-p}$$

$$\| |f|^p \|_{L^{q/p}} = \left(\int_E |f|^q \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\|\chi_E\|_{L^{(q/p)'}} = \left(\int_E |\chi_E|^{(\frac{q}{p})'} \right)^{\frac{1}{p'}} = m(E)^{\frac{q-p}{q}}$$

Quindi

$$\int_E |f|^p \leq m(E)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_E |f|^q \right)^{\frac{p}{q}}$$

Elevando tutto alla $\frac{1}{p}$

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq m(E)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|f\|_{L^q(E)}$$

Proprietà di interpolazione (2)

Se $f \in L^p(E) \cap L^q(E)$, con $p \leq q \implies f \in L^r(E) \forall r \in [p, q]$ e

$$\|f\|_{L^r(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)}^\alpha \cdot \|f\|_{L^q(E)}^{1-\alpha}$$

Dove $\alpha \in (0, 1)$ tale che $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$

Esempio: Se $f \in L^1(E) \cap L^\infty(E) \implies f \in L^r(E) \forall r \in [1, +\infty]$

12.2 Approssimazione con funzioni regolari

Teorema di approssimazione con funzioni regolari

Sia $p \in [1, +\infty)$, e sia E misurabile in \mathbb{R}^n

$C_0^\infty(E)$ è un sottospazio *denso* in $L^p(E)$

$C_0^\infty(E) := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^\infty \text{ e aventi supporto compatto in } E\}$

Ovvero

$$\forall f \in L^p(E) \exists \{f_n\} \subseteq C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall f \in L^p(E), \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|\varphi - f\|_{L^p} < \varepsilon$$

Osservazione: Falso nel caso $p = +\infty$

12.3 Supporto e Classe C_0

Ovvero:

$$\forall f \in L^p(E) \exists \{\varphi_n\} \subseteq C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|\varphi_n - f\| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall f \in L^p(E), \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in C_0^\infty(E) \text{ tale che } \|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$$

Falso nel caso $p = \infty$

Definizione: Data $\varphi \in C^\infty(E)$ il supporto di φ è

$$\overline{\{x \in E : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è limitato e chiuso

$C_0^\infty(E) := \{\varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ derivabili infinite volte tali che } \text{supp}(\varphi) \text{ è un sottoinsieme compatto di } E\}$

12.4 Prodotto di convoluzione

Osservazione: $f, g \in L^1(E) \not\Rightarrow f \cdot g \in L^1(E)$

Nel caso $E = \mathbb{R}$ si può definire un prodotto che rimanga interno a $L^1(\mathbb{R})$

Proposizione 1

Siano $f, g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ Si definisce prodotto di convoluzione

$$f * g := \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y)dy$$

1. $f * g$ esiste finito per q.o. $x \in \mathbb{R}$, ovvero q.o. $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile su \mathbb{R}
2. $f * g \in L^1(\mathbb{R})$
3. $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$

Dimostrazione

Consideriamo $H(x, y) := f(x-y)g(y)$, a priori non sappiamo se $H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$, dunque non è possibile applicare direttamente Fubini.

Quindi consideriamo $|H| \geq 0$ e applichiamo il teorema di Tonelli.

Verificando le ipotesi:

- Integro prima in dx

$$\int_{\mathbb{R}_x} |H(x, y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}_x} |f(x, y)| dx$$

Con la sostituzione $z = x - y$

$$= |g(y)| \int_{\mathbb{R}_z} |f(z)| dz = |g(y)| \cdot \|f\|_1 < +\infty$$

- Integro in dy

$$\int_{\mathbb{R}_y} \left[\int_{\mathbb{R}_x} |H(x, y)| dx \right] dy = \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)| dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty$$

Dunque per Tonelli $|H| \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y) \implies H \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$

A questo punto posso applicare Fubini ad H

Dunque per q.o. $x, y \mapsto H(x, y) = f(x, y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}_y)$

Dimostrazione 3 (che implica 2)

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}_x} |f * g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}_x} \left| \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y) dy \right| dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_x} \int_{\mathbb{R}_y} |f(x-y)||g(y)| dy dx \leq \int_{\mathbb{R}_y} \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)||g(y)| dy dx \end{aligned}$$

(Per Fubini)

$$= \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)| \int_{\mathbb{R}_x} |f(x-y)| dx dy = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}_y} |g(y)| dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Osservazione

- vale la proposizione 1 anche su \mathbb{R}^n
- $f * g = g * f$
- le funzioni devono essere definite su tutto lo spazio

Estensione: $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^p(\mathbb{R}) \implies$

1. $f * g(x)$ esiste per q.o. x
2. $f * g \in L^p(\mathbb{R})$
3. $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

$$H(x, y) = |f(x-y)|^p |g(y)|^p$$

Proposizione 2

Siano $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) (\subseteq L^1(\mathbb{R}))$, $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora:

1. $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$
2. $(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g \quad \forall k$

Idea della dimostrazione:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f(x-y)g(y) dy$$

$$(f * g)'(x) = \int_{\mathbb{R}_y} f'(x-y)g(y) dy$$

Osservazione 1: Vale con k al posto di ∞

Osservazione 2: In generale nelle ip. della Prop.2 $f * g$ non è a supporto

compatto.

Idea della dim. del teorema di approssimazione di funzioni L^p con funzioni regolari

Prendiamo $p = 1$, data $f \in L^1(\mathbb{R})$, vogliamo costruire $\varphi_n \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R})$. Prendiamo

$$f_n := f * \rho_n$$

Dove ρ_n successione di mollificatori

$\rho_n(x) = n\rho(nx)$ dove ρ è un nucleo di convoluzione

- $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\rho \geq 0$, $\text{supp}(\rho) \subseteq [-1, 1]$, $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$
- $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_n \geq 0$, $\text{supp}(\rho_n) \subseteq [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) dx = 1$

Si può dimostrare usando i teoremi di convergenza dominata che $\varphi_n \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R})$.

Osservazione: Per guadagnare anche il supporto compatto, occorre prima "trovare" f , cioè considerare

$$f_k = f \cdot \chi_{[-k, k]} = \begin{cases} f & \text{se } x \in [-k, k] \\ 0 & \text{se } x \notin [-k, k] \end{cases}$$

Approssimo f per convoluzione:

$$f_k * \rho_n \in C_0^\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_k \\ \varphi_n = f_{k(n)} * \rho_n$$

12.5 Teorema fondamentale del calcolo

Teorema di differenziazione nella teoria di Lebesgue

Sia $f \in L^1([a, b])$, sia $F(x) := \int_a^x f(t) dt$, essa è derivabile q.o. su $[a, b]$ e

$$F'(x) = f(x) \text{ per q.o. } x \in (a, b)$$

Esempio: $f(x) = \text{sign}(x)$, $x \in [-1, 1]$.

Definizione: Diciamo che $F \in \text{A.C.}([a, b])$, ovvero lo spazio delle funzioni assolutamente continue su $[a, b]$ se $\exists f \in L^1([a, b])$ tale che

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Osservazione 1: Tale spazio è vettoriale (per la linearità della derivata e dell'integrale).

Osservazione 2: $F \in \text{AC}([a, b]) \implies$

$$F(b) - F(a) = \left[\int_a^b f(t) dt + c \right] - \left[\int_a^a f + c \right] = \int_a^b f(t) dt$$

Osservazione 3: $F \in AC([a, b]), F' = 0$ q.o. su $[a, b] \implies F = c \forall x \in [a, b]$

Questa implicazione è falsa se togliamo l'ipotesi che $F \in AC([a, b])$

Esistono funzioni (non in $AC([a, b])$) che sono derivabili q.o. con derivata prima nulla q.o. ma non costanti.

Esempio: una funzione derivabile f continua con $f' = 0$ q.o. su $(0, 1)$ ma f non costante (scala di Cantor).

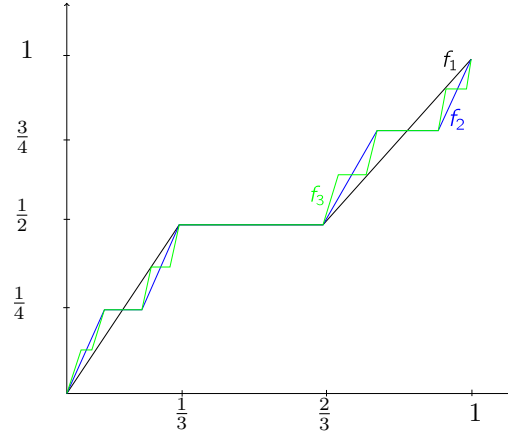


Figura 9: Scala di Cantor

La successione $\{f_n\} \subseteq C^0([0, 1])$ risulta di Cauchy in $\|\cdot\|_\infty$.

Poiché $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach:

$$\exists f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in C^0([0, 1])$$

$f(0) = 0, f(1) = 1$, con $f' = 0$ q.o. su $(0, 1)$

Proposizione (caratterizzazione puntuale di AC)

$F \in AC([a, b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che \forall famiglia $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N}$

di intervalli a 2 a 2 disgiunti $\subseteq (a, b)$ con

$$\sum_{k=1}^N |y_k - x_k| < \delta, \text{ si ha } \sum_{k=1}^N |F(x_k) - F(y_i)| < \varepsilon$$

Osservazione: Per $N = 1$ si ha continuità uniforme

$\implies AC([a, b]) \subseteq \{\text{funzioni uniformemente continue su } [a, b]\}$

Conseguenze della proposizione

• $F, G \in AC([a, b]) \implies F, G \in AC([a, b])$

• $F, G \in AC([a, b]) \implies$

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b (F \cdot G)'(t) dt = \int_a^b (F'G + FG') dt$$

Ovvero

$$\int_a^b fG = - \int_a^b Fg + F \cdot G|_a^b$$

\implies vale in AC la formula di integrazione per parti.

13 Operatori lineari tra spazi vettoriali normati

Definizione: Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali normati. Un operatore lineare da V in W è una funzione $T : V \rightarrow W$ tale che

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Esempi

1) $V = W = \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$T(v) = A \cdot v, \text{ con } A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$$

2) $V = C^0([a, b])$, fisso $x_0 \in (a, b)$, $W = \mathbb{R}$

$$T : V \rightarrow W \text{ definita da } T(f) = f(x_0)$$

3) $V = C^1([a, b])$, $W = C^0([a, b])$

$$T : V \rightarrow W \text{ definita da } T(f) = f'$$

Osservazione: T operatore lineare $\implies T(0) = 0$

Definizione: $T : V \rightarrow W$ op. lineare, si dice *continuo* se, $\forall v \in V$, T è continuo in v , ovvero:

$$v_n \rightarrow v \implies T(v_n) \rightarrow T(v)$$

Rispettivamente nella norma di V e W .

Osservazione: Sia $T : V \rightarrow W$ op. lineare, allora T è continuo su $V \iff T$ è continuo in $v = 0$.

Dimostrazione

(\implies) è immediata

(\impliedby) Verifichiamo che se la proprietà vale per $v = 0$, vale per v qualsiasi.

Sia v qualsiasi, e sia $v_n \rightarrow v$; considero $v_n - v \rightarrow 0$, quindi, per ipotesi $T(v_n - v) \rightarrow T(0)$

Ovvero $T(v_n) - T(v) \rightarrow 0$, cioè $T(v_n) \rightarrow T(v)$.

Definizione: Sia T op. lineare: $(V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$.

Si dice che T è limitato se:

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \|T(v)\|_W \leq M\|v\|_V \quad \forall v \in V$$

ovvero

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

$$\exists M > 0 \text{ tale che } \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq M$$

Esempi:

1) $T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definito da $T(v) = v_0 \cdot v$ operatore lineare.

T è limitato, $M = \|v_0\|$

2) $T : (C^1([a, b]), \|\cdot\|_{C^1}) \rightarrow (C^0([a, b]), \|\cdot\|_{C^0})$, $T(f) = f'$ op. lineare.

T è limitato con la scelta $M = 1$

3) $T : (L^2(0, 1), \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $T(f) = \int_0^1 f_0 \cdot f dx$ dove $f_0 \in L^2(0, 1)$

T è limitato con la scelta $M = \|f_0\|_2$ (Tramite disuguaglianza di Holder)

Osservazione: Considerando $T : (L^p(0, 1), \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definito da $T(f) = \int_0^1 f_0 f dx$ questo è lineare continuo prendendo $f_0 \in L^{p'}(0, 1)$.

Proposizione: Sia $T : (V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$ lineare. Allora

$$T \text{ continuo} \iff T \text{ limitato}$$

Dimostrazione

(\Leftarrow) Supposto T limitato, basta mostrare che T è continuo in 0, ovvero: se $v_n \rightarrow 0$, allora $T(v_n) \rightarrow T(0) = 0$

$$\|T(v_n)\|_W \leq M\|v_n\|_V \rightarrow 0$$

(\Rightarrow) Supposto T non limitato mostriamo T non continuo

$$\sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} = +\infty \implies \exists \{v_n\} \subseteq V \setminus \{0\} : \frac{\|T(v_n)\|_W}{\|v_n\|_V} \rightarrow +\infty$$

ovvero, siccome T è lineare:

$$\left\| T\left(\frac{v_n}{\|v_n\|_V}\right) \right\|_W \rightarrow +\infty$$

Quindi se considero $u_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_V}$, ha che

$$\begin{cases} \|u_n\|_V = 1 \\ \|T(u_n)\|_W \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Posso costruire una successione y_n tale che $y_n \rightarrow 0$ ma $T(y_n) \not\rightarrow 0$ Ponendo

$$y_n = \frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}$$

- $y_n \rightarrow 0$ poiché

$$\|y_n\|_V = \left\| \frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W} \right\|_V \rightarrow 0$$

- $T(y_n) = 1$ perché

$$T(y_n) = T\left(\frac{u_n}{\|T(u_n)\|_W}\right) = \frac{T(u_n)}{\|T(u_n)\|_W} \not\rightarrow 0$$

Definizione: Dati $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ spazi normati

$$\mathcal{L}(V, W) := \{\text{op. lineari limitati da } V \text{ in } W\}$$

È uno spazio vettoriale munito delle operazioni naturali

È possibile introdurre su questo spazio una norma, ponendo

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V, W)} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

ovvero, per definizione, la più piccola costante M tale che $\|T(v)\|_W \leq M\|v\|_V \forall v \in V$.

Osservazione: Si può verificare che quella definita sopra è effettivamente una norma.

In particolare

Definizione: Quando $W = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$\mathcal{L}(V, W) = V' \text{ spazio duale di } V$$

$$\|T\|_{V'} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|T(v)|_{\mathbb{R}}}{\|v\|_V}$$

Esempi: Vedere i casi 1) e 3)

14 Distribuzioni

Definizione: Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\text{funzioni } C^\infty \text{ su } \Omega \text{ con supporto compatto in } \Omega\}$$

È uno spazio vettoriale

Muniamo C_0^∞ di una **convergenza**

Definizione: Sia $\{\varphi_h\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$. Diciamo che

$$\varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } C_0^\infty(\Omega) \text{ se}$$

1. $\exists K$ compatto, indipendente da h , tale che $\text{supp}(\varphi_h) \subseteq K \forall h \gg \nu$
2. $\varphi_h \rightarrow 0$ uniformemente su K con tutte le derivate $\forall \alpha$ multiindice $D^\alpha \varphi_h \rightarrow 0$ unif. su K

Definizione: Lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ munito della convergenza definita sopra si indica con $\mathcal{D}(\Omega)$ e si chiama *spazio delle funzioni test*

Definizione: Lo spazio delle distribuzioni su Ω , che si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$ è lo spazio degli operatori $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ lineari e continui rispetto alla convergenza introdotta su $\mathcal{D}(\Omega)$.

Ovvero, una distribuzione è un operatore $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- T lineare
- T continuo ($\varphi_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies T(\varphi_h) \rightarrow 0$ in \mathbb{R})

Esempi

1. Sia $u \in L^1(\Omega)$, ad u posso associare una distribuzione $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_u(\varphi) := \int_{\Omega} u \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

È ben definito:

$$\left| \int_{\Omega} u \varphi \right| \leq \int_{\Omega} |u \varphi| \leq \int_K \max |\varphi| |u| \leq \max_K |\varphi| \int_K |u|$$

È lineare:

$$T_u(\alpha \varphi + \beta \psi) = \int_{\Omega} u(\alpha \varphi + \beta \psi) = \alpha \int_{\Omega} u \varphi + \beta \int_{\Omega} u \psi = \alpha T_u(\varphi) + \beta T_u(\psi)$$

È continuo:

$$\{\varphi_h\} \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \implies T_u(\varphi_h) \rightarrow 0$$

Poiché, sia $\{\varphi_h\} \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$

$$|T_u(\varphi_h)| = \left| \int_{\Omega} u \varphi_h \right| \leq \max_K |\varphi_h| \cdot \int_K |u| \rightarrow 0$$

Osservazioni sull'esempio

L'associazione tra u , T_u è iniettiva su $L^1(\Omega)$

Se $u_1 = u_2$ q.o. su $\Omega \implies T_{u_1} = T_{u_2}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ poiché $T_{u_1}(\varphi) = T_{u_2}(\varphi)$

Si può dimostrare che $T_{u_1} = T_{u_2}$ in $\mathcal{D}'(\Omega) \implies u_1 = u_2$ q.o. su Ω (*)

$$\int_{\Omega} u_1 \varphi = \int_{\Omega} u_2 \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega$$

$$\int_{\Omega} (u_1 - u_2)\varphi = 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u_1 = u_2 \text{ q.o. su } \Omega$$

Notazione: Invece di $T_u(\varphi)$ si scrive spesso $\langle u, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))}$

Per definire T_u , basta una condizione più debole:

$$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_K |u| < +\infty \forall K \text{ compatto } \subseteq \Omega\}$$

Esempio: $\Omega = (0, 1)$, $u(x) = \frac{1}{x} \notin L^1(\Omega)$ ma $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

In particolare, possiamo associare una distribuzione a qualsiasi $u \in L^p(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty]$

Infatti $L^p(\Omega) \not\subseteq L^1(\Omega)$, ma

$$L^p(\Omega) \subseteq L^p_{\text{loc}}(\Omega), \forall p \in [1, +\infty] :$$

$$u \in L^p(\Omega) \implies u \in L^p(K) \forall K \subset\subset \Omega$$

Poiché $|K| < +\infty$.

$$\implies u \in L^1(K) \forall K \subset\subset \Omega \implies u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

Tutte le funzioni $u \in L^p(\Omega)$ possono essere viste come distribuzioni.

$$u \in L^p(\Omega) \mapsto T_u$$

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} := \int_{\Omega} u\varphi dx$$

Essendo \mathcal{D}' vettoriale

$$(T_1 + T_2)(\varphi) := T_1(\varphi) + T_2(\varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$(\lambda T) := \lambda T(\varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

14.1 Convergenza

Definizione:

$$\{T_h\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega), T_h \xrightarrow{\text{in } \mathcal{D}'(\Omega)} 0 \text{ se } T_h(\varphi) \rightarrow 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$T_h \rightarrow T \text{ se } T_h(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Esempio: $T_h = T_{u_h}$, con $u_h \subseteq L^1(\Omega)$

$$u_h \rightarrow 0 \text{ in } L^1(\Omega) \implies T_{u_h} \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Dato che

$$|T_{u_h}(\varphi)| = \left| \int_{\Omega} u_h \varphi \right| \leq \int_{K=\text{supp}\varphi} |u_h| |\varphi| \leq \max_K |\varphi| \cdot \int_K |u_h| \rightarrow 0$$

14.2 Delta di Dirac

$$\{u_h\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$$

Questa successione non converge in $L^1(\mathbb{R})$

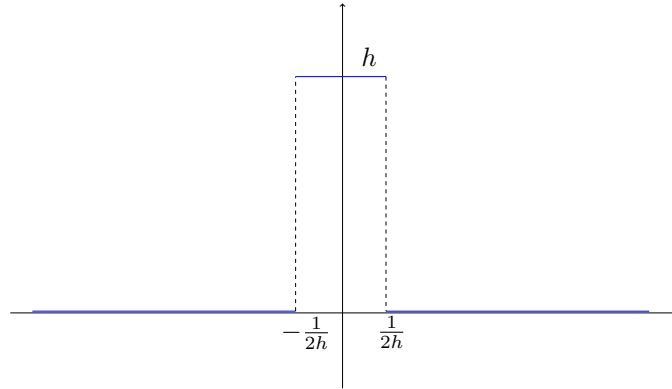


Figura 10: Delta di Dirac

$u_h \rightarrow 0$ q.o. su $\mathbb{R} \implies$ se $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} u_h$ in $L^1(\mathbb{R})$ allora $\lim_{h \rightarrow +\infty} u_h = 0$.
Ma $\lim_{h \rightarrow +\infty} u_h \neq 0$ in $L^1(\mathbb{R})$ perché

$$\|u_h\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} h = 1$$

Converge però in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle u_h, \varphi \rangle = T_{u_h}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} u_h \varphi = h \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} \varphi \rightarrow \varphi(0)$$

Definizione: δ_0 delta di Dirac in 0

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle := \varphi(0)$$

Osservazioni:

- Se $u_h = h \cdot \chi_{[-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}]}$, allora $u_h \rightarrow \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- Verifica che $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(i) lineare: $\delta_0(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\delta_0(\varphi) + \beta\delta_0(\psi)$?

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(0) = \alpha\varphi(0) + \beta\psi(0)$$

(ii) continuo: $\varphi_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \delta_0(\varphi_h) \rightarrow 0$

vero per la definizione di convergenza in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\text{supp}(\varphi_h) \subseteq K$ compatto, $\varphi_h \rightarrow 0$ uniformemente.

14.2.1 Ovvie generalizzazioni

Punto generico x_0

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$$

Caso n-dimensionale, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0), \quad \delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

14.2.2 idk

δ_0 non è associata ad alcuna funzione di $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo $\delta_0 = T_u$, con $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

In particolare, posso prendere $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi = \varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Ricordando l'osservazione sull'esempio

$$0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \cdot \varphi$$

Applicando tale proprietà si avrà

$$u = 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies u = 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R}$$

$$\implies \int_{\mathbb{R}} u \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Assurdo.

14.2.3 Derivazione di distribuzioni

Definizione: $\Omega \subseteq \mathbb{R}$

Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definisco $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$ come:

$$\langle T', \varphi \rangle := - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

T' è una distribuzione

(i) è lineare:

$$\begin{aligned} \langle T', \alpha\varphi + \beta\psi \rangle &= - \langle T, \alpha\varphi' + \beta\psi' \rangle \\ &= -\alpha \langle T, \varphi' \rangle - \beta \langle T, \psi' \rangle = +\alpha \langle T', \varphi \rangle + \beta \langle T', \psi \rangle \end{aligned}$$

(ii) è continuo

$$\varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \implies \langle T', \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

Infatti $\varphi_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies \varphi'_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Questo perché $\exists K$ tale che $\text{supp} \varphi'_h \subset K \forall h$ e $\varphi'_h \rightarrow 0$ uniformemente su K con tutte le derivate.

Quindi $\langle T, \varphi'_h \rangle \rightarrow 0$ perché $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

14.2.4 Motivo della definizione di derivata

Considerando il caso $T = T_u$ con $u \in C^1(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

Si avrà in $\mathcal{D}'(\Omega)$ che $(T_u)' = T_{u'}$

Dimostrazione

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle = -\int_{\Omega} u \varphi'$$

$$\langle T_{u'}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u' \varphi$$

Integrando per parti si avrà

$$\int_{\Omega} u' \varphi = u \varphi - \int_{\Omega} u \varphi'$$

Essendo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u \varphi|_a^b = 0$ (dove a, b estremi di Ω) Si avrà:

$$\int_{\Omega} u' \varphi = -\int_{\Omega} u \varphi'$$

15 Esempi di distribuzioni

1. $T = T_u$ con $u \in C^1(\Omega) \implies (T_u)' = T_{u'}$
2. $T = T_u$ con $u(x) = |x|$ su $\Omega = (-1, 1)$

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle = -\int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \varphi(x) dx + x \varphi \Big|_0^1 - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + x \varphi(x) \Big|_{-1}^0 = \int_{-1}^1 \varphi(x) \cdot \text{sign}(x) dx \\ &\implies (T_{|x|})' = T_{\text{sign}(x)} \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \end{aligned}$$

Notazione: $(|x|)' = \text{sign}(x)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

Più in generale: se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ $u' = v$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, significa $(T_u)' = T_v$ ovvero

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle (T_u)', \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle = \langle T_v, \varphi \rangle$$

$$-\int_{\Omega} u \varphi' = \int_{\Omega} v \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

3. $u(x) = \text{sign}(x)$, $u' = ?$

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \text{sign}(x) \varphi'(x) dx &= -\int_0^1 \varphi' + \int_{-1}^0 \varphi' = -\varphi(1) + 2\varphi(0) - \varphi(-1) = 2\varphi(0) \\ &= 2 \langle \delta_0, \varphi \rangle \end{aligned}$$

4. $T = \delta_0$ $T' = ?$

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

15.1 Generalizzazione

- $n = 1$ Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $T^{(k)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle := (-1)^k \langle T, \varphi^k \rangle$$

Osservazione: $T^{(k)}$ definisce una distribuzione, lineare e continua, infatti se $\varphi_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_h^{(k)} \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega) \implies \langle T, \varphi_h^{(k)} \rangle \rightarrow 0$.

Osservazione 2: se $T = T_u$ con $u \in C^k(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega) \implies (T_u)^{(k)} = T_{u^{(k)}}$

Esempio: $u(x) = |x| \implies u'' = 2\delta_0$

- $n \geq 1$ Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall \alpha$ multiindice

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Osservazione: $D^\alpha T$ definiscono delle distribuzioni $\forall \alpha$

Osservazione: Si possono calcolare le derivate di tutti gli ordini, di qualsiasi $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Osservazione: Il risultato non dipende dall'ordine di derivazione

15.1.1 Operatori differenziali

Data $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si possono definire $\nabla T, \nabla^2 T, \text{rot} T, \dots$

16 Spazi di Sobolev

Sono gli spazi dove si trovano le soluzioni di problemi al contorno per P.D.E.

Esempio Equazione di Poisson

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = f & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Definizione: Fissato Ω aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

Con $\frac{\partial}{\partial x_i}$ intesa nel senso delle distribuzioni

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \iff \exists v_i \in L^p(\Omega) \text{ tali che}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \varphi = \int_{\Omega} v_i \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Esempi ($n = 1$, $\Omega = (-1, 1)$)

- $u \in C_0^1(\Omega) \implies u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$(1) \quad p < +\infty \quad \int_{\Omega} |u|^p < +\infty ; \quad \int_{\Omega} |u'|^p < +\infty$$

$$(2) \quad p = +\infty \quad \text{ess-sup}_{\Omega} |u| < +\infty ; \quad \text{ess-sup}_{\Omega} |u'| < +\infty$$

- $u(x) = \text{sign}(x) \quad u \notin W^{1,2}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u|^2 = \int_{-1}^1 |\text{sign} x|^2 < +\infty \implies u \in L^2(\Omega)$$

$$\text{MA: } u'(x) = 2\delta_0 \notin L^2(\Omega)$$

Definizione: Fissato Ω aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$, $k \in \mathbb{N}$

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha} u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \text{ multiindice con } |\alpha| \leq k\}$$

Caso particolare $p = 2$

$$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$$

Osservazione: $W^{k,p}(\Omega)$ sono spazi vettoriali

Definizione: Norma su $W^{1,p}(\Omega)$ sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

Definizione: Norma su $W^{k,p}(\Omega)$ sia $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_p + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_p$$

Teorema: Per ogni $p \in [1, +\infty]$, $W^{1,p}(\Omega)$ sono spazi di Banach

Osservazione: $u_h \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ se

$$\|u_h - u\|_{1,p} \rightarrow 0$$

$$= \|u_h - u\|_p + \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

ovvero

$$\begin{cases} u_h \rightarrow u \text{ in } L^p(\Omega) \\ \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ in } L^p(\Omega) \end{cases}$$

Definizione

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \text{chiusura di } \mathcal{D}(\Omega) \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

ovvero

$$\begin{aligned} &= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che } \varphi_n \rightarrow u \text{ in } W^{1,p}\} \\ &= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \exists \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che } \varphi_n \rightarrow u \text{ in } L^p \text{ e } \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \rightarrow u \text{ in } L^p\} \end{aligned}$$

Osservazione Se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ allora

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff u = 0 \text{ su } \Omega$$

16.0.1 Disuguaglianza di Poincaré

Teorema Sia Ω aperto, limitato di \mathbb{R}^n . Allora esiste una costante $C_p = C_p(\Omega)$ tale che, per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(\Omega) \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Dunque, su $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{cases} \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p \text{ norma su } W^{1,p}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_p \text{ norma equivalente} \end{cases}$$

Falso su $W_0^{1,p}(\Omega)$, verificabile prendendo $u = 1$

Osservazione per $n = 1$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt \implies |u(x)| \leq \int_0^x |u'| \leq \int_0^1 |u'| \leq \left(\int_0^1 |u'|^2 \right)^{1/2}$$

Integrando

$$\|u\|_{L^1(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega)$$

17 Spazi di Hilbert

Definizione: Sia H uno spazio vettoriale su \mathbb{R}

Un prodotto scalare su H è un'applicazione $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. $(x, x) \geq 0 \ \forall x \in H$ con $(x, x) = 0 \iff x = 0$ *positività*
2. $(x, y) = (y, x) \ \forall x, y \in H$ *simmetria*
3. $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$ *bilinearità*

Definizione: $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ è detta *norma associata* (o indotta) dal prodotto scalare

Esempi

- $H = \mathbb{R}^n$; $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$; $\sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \|x\|_2$; ovvero la norma euclidea
- $H = L^2(\Omega)$ $(f, g) = \int_{\Omega} f g$; $\sqrt{(f, f)} = (\int_{\Omega} f^2)^{1/2} = \|f\|_2$
- $H = W^{1,2}(\Omega)$; $(f, g) := \int_{\Omega} f g + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} = \int_{\Omega} f g + \nabla f \cdot \nabla g$

$$\sqrt{(f, f)} = \left(\int_{\Omega} f^2 + |\nabla f|^2 \right)^{1/2} \simeq \|f\|_{H^1}$$

norma equivalente alla norma di H^1

17.1 Disuguaglianza di Cauchy Schwartz

Se (\cdot, \cdot) è un prodotto scalare su H , allora

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \ \forall x, y \in H$$

Inoltre vale $\iff x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Dimostrazione

$$\forall t \in \mathbb{R} \ 0 \leq (x - ty, x - ty) = (x, x) - 2t(x, y) + t^2(y, y)$$

Dunque

$$0 \leq \|x\|^2 - 2t(x, y) + t^2\|y\|^2 \implies \Delta \leq 0$$

$$\Delta = 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

$$\implies |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Se vale $\implies \Delta = 0 \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x - \lambda y, x - \lambda y) = 0 \implies x - \lambda y = 0$ (Viceversa se $x = \lambda y$)

Proposizione: Se $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ è un prodotto scalare,

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} \text{ è una norma}$$

Dimostrazione

- $\|x\| \geq 0$ con $= \iff x = 0$ vera per la prop. (1)
- $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2}$
 $\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|$

17.1.1 Legge del parallelogramma

Teorema: Sia H uno spazio vettoriale con prodotto scalare (\cdot, \cdot) e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da esso. Allora

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$$

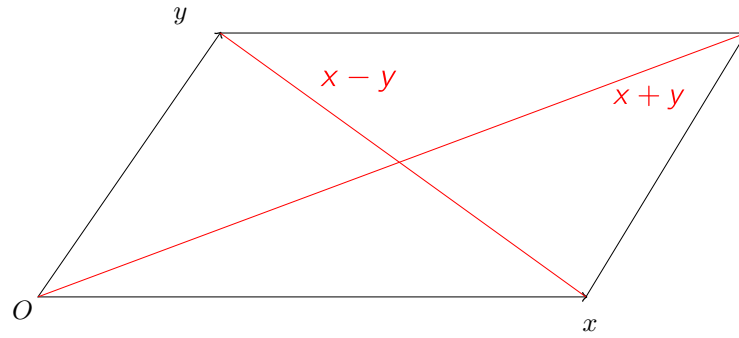


Figura 11: Legge del parallelogramma in \mathbb{R}^2

Dimostrazione

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Osservazione: Può servire a verificare se una norma proviene o meno da un prodotto scalare.

Le norme di \mathbb{R}^n , $L^p(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$ con $p \neq 2$ non provengono da un prodotto scalare.

Esempio: $\Omega = (0, 1)$ in $L^p(0, 1)$ con $p \neq 2$, la norma non proviene da un prodotto scalare

Fisso $t \in (0, 1)$, considero le funzioni

- $f = \chi_{(0,t)}$
- $g = \chi_{(t,1)}$

$$\begin{aligned}\|f\|_p &= \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^t 1 \right)^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{1}{p}} \\ \|g\|_p &= \left(\int_0^1 |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_t^1 1 \right)^{\frac{1}{p}} = (1-t)^{\frac{1}{p}} \\ \|f+g\|_p &= 1 \\ \|f-g\|_p &= 1\end{aligned}$$

L'identità del parallelogramma diventa:

$$2 = 2t^{\frac{2}{p}} + 2(1-t)^{\frac{2}{p}}$$

$$1 = t^{\frac{2}{p}} + (1-t)^{\frac{2}{p}}$$

Valida $\iff p = 2$

Definizione: Uno *spazio di Hilbert* è uno spazio di Banach in cui la norma proviene da un prodotto scalare.

Esempi: sono spazi di Hilbert

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$
- $L^2(\Omega)$
- $H^1(\Omega)$

Non sono di Hilbert

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ con $p \neq 2$
- $L^p(\Omega)$ con $p \neq 2$
- $W^{1,p}(\Omega)$ con $p \neq 2$
- $C^0([a,b])$, $\|f\|_2 = (\int_a^b |f|^2)^{1/2}$ la norma viene da un prodotto scalare MA non è uno spazio di Banach, dunque non è uno spazio di Hilbert

17.1.2 Teorema di proiezione su un convesso chiuso

Un insieme K si dice *convesso* se $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in (0, 1) \implies \lambda x + (1-\lambda)y \in K$

Un insieme K si dice *chiuso* se $\forall \{x_n\} \subseteq K : x_n \rightarrow x \in H \implies x \in K$

Teorema: Sia H uno spazio di Hilbert, e sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso
Allora $\forall f \in H$ esiste unico $u \in K$ tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

Inoltre: $u = P_K f \iff (f - u, v - u) \leq 0 \forall v \in K$

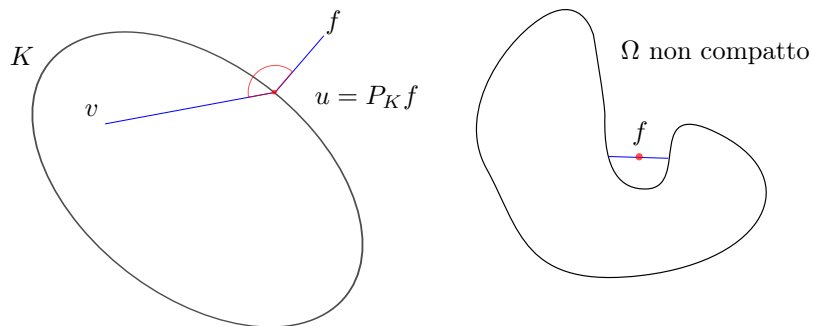


Figura 12: Rappresentazione grafica della proiezione su convesso

Corollario, Teorema di proiezione su un sottospazio chiuso

Sia H uno spazio di Hilbert e M un sottospazio vettoriale chiuso.

(M è convesso, non è necessariamente chiuso senza ipotesi)

Allora: $\forall f \in H \exists$ unico $u = P_M f$ tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in M} \|f - v\|$$

Inoltre

$$u = P_M f \iff (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

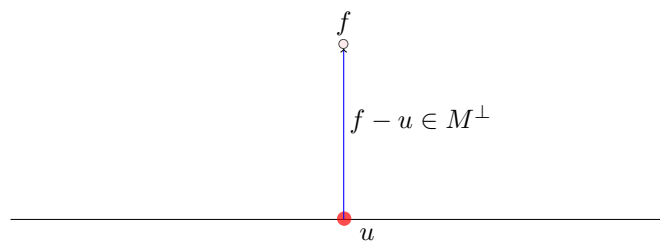


Figura 13: Rappresentazione grafica della proiezione su un sottospazio chiuso

Definizione: Se $(,)$ è un prodotto scalare su H

- $x \perp y \iff (x, y) = 0$ (definizione)
- $M^\perp := \{x \in H : (x, y) = 0 \forall y \in M\}$

Osservazione: $f \perp g$ in $L^2(0, 1)$ se $\int_0^1 fg = 0$

Esempio: $M = \{\text{funzioni costanti in } L^2(0, 1)\}$

$$\begin{aligned} M^\perp &= \{f \in L^2(0, 1) : \int_0^1 fc = 0 \forall c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f \in L^2(0, 1) : \int_0^1 f = 0\} \end{aligned}$$

Osservazione:

$$x \perp y \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Dimostrazione

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Osservazione: $M \cap M^\perp = \{0\}$. Infatti $x \in M \cap M^\perp \implies (x, x) = 0$ valido $\iff x = 0$

Teorema delle proiezioni

Sia H insieme di Hilbert e M un sottospazio chiuso.

Allora $\forall x \in H \exists$ un'unica rappresentazione di x come:

$$x = y + z \text{ con } y \in M \text{ e } z \in M^\perp$$

Inoltre, le applicazioni $x \mapsto y = P_M(x)$, $x \mapsto z = P_{M^\perp}(x)$, sono operatori lineari, limitati, di norma 1.

Dimostrazione

Basta prendere come $y = P_M(x)$ (che esiste dal teorema precedente): sappiamo che $(x - P_M(x), v) = 0 \forall v \in M \implies x - P_M(x) \in M^\perp$, ovvero $z := x - y \in M^\perp$. L'unicità è data da $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \implies y_1 - y_2 \in M$, $z_2 - z_1 \in M^\perp$ ma $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$, dunque per queste ultime due condizioni si avrà $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0$

Dimostrazione Linearità

$$x_1 = y_1 + z_1$$

$$x_2 = y_2 + z_2$$

Dunque $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + z_1 + z_2$, con $y_k \in M$, $z_k \in M^\perp$, per l'unicità $y_1 + y_2 = P_M(x_1 + x_2)$, $z_1 + z_2 = P_{M^\perp}(x_1 + x_2)$

Limitatezza

P_m limitato: $x = y + z = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$$

$$\implies \|P_m(x)\| \leq \|x\| \implies P_M \text{ limitato con norma } \leq 1$$

$\|P_M\| = 1$: basta prendere $x \in M \implies x = P_M(x) \implies$ vale l'uguaglianza $\|P_M(x)\| = \|x\|$

17.2 Teoremi di Rappresentazione

17.2.1 Teorema di Reisz

Problema: Dato H di Hilbert, caratterizzare H' (duale di H).

$$H' = \{\varphi : H \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineari e continui}\} = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$$

Osservazione: Fissato $u \in H$ possiamo associare ad u un elemento $\varphi_u \in H'$

$$\varphi_u(v) : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_u(v) = (u, v) \quad \forall v \in H$$

Verifica che $\varphi_u \in H'$:

- lineare: $\varphi_u(\alpha v_1 + \alpha_2 v_2) = (u, \alpha v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \varphi_u(v_1) + \alpha_2 \varphi_u(v_2)$
- continuo (limitato): $|\varphi_u(v)| \leq M \|v\|$ valida con $M = \|u\|$ per la disuguaglianza di Cauchy Schwartz

Inoltre:

$$\|\varphi_u\|_{H'} = \|u\|_H$$

cioè $M = \|u\|$ è la costante migliore possibile ($v = u$)

In conclusione, $H \subseteq H'$ (immersione isometrica), ovvero la norma si conserva.

Esempi:

- $H = \mathbb{R}^n$ $(u, v) = \sum_{k=1}^n u_k v_k$ $\varphi_u(v) = \sum_{k=1}^n u_k v_k$
- $H = L^2(\Omega)$, $(u, v) = \int_{\Omega} uv$, $\varphi_u(v) = \int_{\Omega} uv \quad \forall v \in L^2(\Omega)$
- $H = H^1(\Omega)$, $(u, v) = \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v$

$$\varphi_u(v) = \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Teorema di Riesz

Sia H spazio di Hilbert e sia $\varphi \in H'$.

Allora, esiste unico $u \in H$ tale che $\varphi = \varphi_u$ ovvero

$$\varphi(v) = (u, v) \quad \forall v \in H$$

Inoltre

$$\|\varphi\|_{H'} = \|u\|_H$$

Dunque $H'' = H$.

17.2.2 Forme bilineari

Definizione: Sia H di Hilbert. Una *forma bilineare* su H è per definizione un'applicazione

$$a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

- $a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v)$

Esempi:

- In H Hilbert qualsiasi $a(u, v) = (u, v)$
- $H = H^1(\Omega)$, $a(u, v) = \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v$, $a(u, v) = \int_{\Omega} uv$, $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$

Definizione: Sia $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare

- a *simmetrica* se

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H$$

- a *continua* se

$$\exists C > 0 \text{ tale che } |a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H$$

- a *coerciva* se

$$\exists \alpha > 0 \text{ tale che } a(u, v) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

Esempi:

1) In H di Hilbert qualsiasi, $a(u, v) = (u, v)$ è

- simmetrica (per definizione di prodotto scalare)
- continua (limitata per Cauchy Schwartz)
- coerciva ($(u, u) = 1 \cdot \|u\|^2$)

2) In $H = H_0^1(\Omega)$, $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$.

- simmetrica
- continua: (tramite Holder)

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \leq \|\nabla v\|_2 \|\nabla u\|_2 \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

- coerciva: (per Poincaré)

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

Osservazione: $a(u, v)$ non sarebbe coerciva su $H^1(\Omega)$ poiché non vale la disuguaglianza di Poicaré (verificabile con $u = \text{cost} > 0$)

17.2.3 Teorema di Lax Milgram

Teorema di Lax-Milgram

Sia H Hilbert, e sia $\varphi' \in H'$

Sia $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, continua e coerciva.

Allora esiste unico $u \in H$ tale che

$$\varphi(v) = a(u, v) \quad \forall v \in H$$

Inoltre u è caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$E(v) := \frac{1}{2}a(v, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H$$

si ha

$$\min_{v \in H} E(v) = E(u)$$

Esempio (Ω limitato)

$H = H_0^1(\Omega)$, $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$, $\varphi(v) = \int_{\Omega} f v$ dove $f \in L^2(\Omega)$

$$\varphi \in H' : \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \int_{\Omega} |f v| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1}$$

Per Lax-Milgram: \exists unico $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $\varphi(v) = a(u, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Quest'ultima è una formulazione debole del seguente problema:

$$\begin{cases} -\nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Inoltre il teorema dice che u risolve

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v$$

17.2.4 Commenti sulla proprietà variazionale di u

$$E(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}a(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - \varphi(u + \varepsilon v)$$

$$= \frac{1}{2}[a(u, u) + 2\varepsilon a(u, v) + \varepsilon^2 a(v, v)] - \varphi(u) - \varepsilon \varphi(v)$$

$$= [\frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u)] + \varepsilon[a(u, v) - \varphi(v)] + \frac{\varepsilon^2}{2}a(u, v)$$

$$\implies E(u + \varepsilon v) - E(u) = \varepsilon[a(u, v) - \varphi(v)] + o(\varepsilon)$$

$$\implies \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E(u + \varepsilon v) - E(u)}{\varepsilon} = a(u, v) - \varphi(v) = 0$$

Se $a(u, v) = \varphi(v) \forall v \in H$,

$$E(u + \varepsilon v) - E(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} a(v, v) \geq 0$$

Quindi u minimizza E .

Viceversa, se u minimizza E :

$$\begin{aligned} E(u + \varepsilon v) &\geq E(u) \quad \forall v \in H \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \implies a(u, v) - \varphi(v) &= 0 \quad \forall v \in H \end{aligned}$$

18 Equazioni alle derivate parziali

18.1 Formulazione variazionali di problemi ellittici

$-a\Delta u + cu = f$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, limitato e regolare, $u = u(x_1, \dots, x_n)$

Ipotesi

- $a > 0$
- $c \in L^\infty(\Omega)$
- $f(x) \in L^2(\Omega)$

Se $c = 0$, $a = 1 \implies -\nabla^2 u = f$ (Equazione di Poisson)

Condizione di Dirichlet (omogenea): $u = 0$ su $\partial\Omega$

Condizione di Neumann (omogenea): $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$

18.1.1 PDE ellittiche del secondo ordine

ODE lineare del 2° ordine

$$au'' + bu' + cu = f$$

Alle derivate parziali (PDE del 2° ordine), $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$-A(x) \cdot \nabla^2 u(x) + b(x) \cdot \nabla u(x) + cu = f$$

si dice ellittica se A è definita positiva

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

In particolare se $A(x) = I$

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x) u_{x_i, x_j} = \sum_{i=1}^n u_{x_i, x_i} = \Delta u$$

18.1.2 Formulazione variazionale del problema di Dirichlet

$(D)_c$ Trovare $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$(D)_v$ Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che:

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Proposizione (D): Nelle ipotesi sopra:

1. u sol. classica $\implies u$ sol. variazionale
2. u sol. variazionale, c, f continue, $u \in C^2(\overline{\Omega}) \implies u$ sol. classica

18.1.3 Formulazione variazionale del problema di Neumann

$(N)_c$ Trovare $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che:

$$\begin{cases} -a\Delta u + cu = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$(N)_v$ Trovare $u \in H^1(\Omega)$ tale che:

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Proposizione (N): Nelle ipotesi sopra:

1. u sol. classica $\implies u$ sol. variazionale
2. u sol. variazionale, c, f continue, $u \in C^2(\overline{\Omega}) \implies u$ sol. classica

18.1.4 Esistenza delle soluzioni

Teorema: Nelle ip. sopra definite, il problema $(D)_v$: trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Ammette una e una sola soluzione. Inoltre u è caratterizzata nel modo seguente:

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a |\nabla v|^2 + cv^2) - \int_{\Omega} f v$$

Dimostrazione

Considero $H = H_0^1(\Omega)$, munito di $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_2$

- $\varphi(v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H$
- $b(u, v) = \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + c u v$

φ è lineare continuo, $b(u, v)$ è bilineare simmetrica, continua, coerciva Per Lax-Milgram \exists unico $u \in H$ tale che

$$\varphi(v) = b(u, v) \quad \forall v \in H$$

ovvero:

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + c u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H$$

Inoltre u risolve

$$\min_H E(v) := \frac{1}{2} b(u, v) - \varphi(v)$$

Verifica ip. Lax-Milgram:

- φ (lineare) continuo: $\exists M : |\varphi(v)| \leq M \|v\|_H$

$$\int_{\Omega} f v \leq \int_{\Omega} |f v| \leq_H \|f\|_2 \|v\|_2 \leq_P C_p(\Omega) \|f\|_2 \|\nabla v\|_2$$

Si avrà dunque $M = C_p(\Omega) \|f\|_2$ e $\|\nabla v\|_2 = \|v\|_2$

- $b(u, v)$ è bilineare simmetrica (dimostrazione semplice)
- $b(u, v)$ continua

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + c u v \right| \leq \int_{\Omega} |a \nabla u \cdot \nabla v + c u v| \leq \int_{\Omega} a |\nabla u \cdot \nabla v| + c |u v| \\ &\leq \int_{\Omega} a |\nabla u \cdot \nabla v| + \|c\|_{\infty} \int_{\Omega} |u v| \leq a \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|c\|_{\infty} \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &\leq a \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|c\|_{\infty} C_p^2(\Omega) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \\ &= (a + \|c\|_{\infty} C_p^2(\Omega)) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 = (a + \|c\|_{\infty} C_p^2(\Omega)) \|u\|_H \|v\|_H \end{aligned}$$

- $b(u, v)$ coerciva

$$b(u, v) = \int_{\Omega} a |\nabla u|^2 + c u^2 \geq \int_{\Omega} a |\nabla u|^2 = a \|\nabla u\|_2^2 = \alpha \|u\|_H^2$$

18.1.5 Esistenza delle soluzioni per Neumann

Teorema: Nelle ip. sopra definite, supponiamo anche $c(x) > 0$ il problema $(D)_v$: trovare $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + c u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Ammette una e una sola soluzione. Inoltre u è caratterizzata nel modo seguente:

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a |\nabla v|^2 + c v^2) - \int_{\Omega} f v$$

Dimostrazione

Analoga al caso di Dirichlet lavorando su $H = H^1(\Omega)$ munito di $\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$
Tranne che per la coercività di b :

$$\begin{aligned} b(u, u) &= \int_{\Omega} a|\nabla u|^2 + cu^2 \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2? \\ &\geq \int_{\Omega} a|\nabla u|^2 + c_0 u^2 \geq \min\{a, c_0\} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^2 \end{aligned}$$

18.1.6 Richiamo di Analisi Vettoriale

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \quad \forall X \in C^1(\Omega)$$

$$X = v \nabla u, \quad v \in C^1, \quad u \in C^2$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v \nabla u) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u \end{aligned}$$

Formula di Gauss-Green

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + v \nabla u = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad v \in C^1, u \in C^2$$

Lemma di DuBois-Raymond

Se $u \in C(\bar{\Omega})$ è tale che:

$$\int_{\Omega} u \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \implies u \equiv 0 \text{ in } \Omega$$

Per dimostrarlo si procede per assurdo

18.1.7 Dimostrazione proposizione di Dirichlet

1. Sia u sol. di $(D)_c$

Allora $u \in H_0^1(\Omega)$ ($u, v \nabla u \in C(\bar{\Omega}) \subseteq L^2(\Omega), u = 0$ su $\partial\Omega$)
Moltiplico l'equazione per $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$-a \Delta u \cdot v + cuv = fv \text{ in } \Omega$$

Integrando

$$\int_{\Omega} -a \Delta u \cdot v + cuv = \int_{\Omega} fv$$

Per Gauss Green

$$\int_{\Omega} av \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v_n + cuv_n = \int_{\Omega} f v_n \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Data $v \in H_0^1(\Omega)$, $\exists \{v_n\} \subseteq C_0^\infty(\Omega) : v_n \xrightarrow{H^1} v$ (per definizione di $H_0^1(\Omega)$)
 Passando al limite

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + cuv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Tale limite si dimostra

$$\left| \int_{\Omega} f v_n - f v \right| \leq \int_{\Omega} |f(v_n - v)| \leq_H \|f\|_2 \|v_n - v\|_2 \rightarrow 0$$

In modo analogo si verificano le altre convergenze

2. Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ sol. variazionale, supponendo $u \in C^2(\overline{\Omega})$, (c, f) continue)

$u = 0$ su $\partial\Omega$

Sappiamo che

$$\int_{\Omega} a \nabla v \cdot \nabla u + cuv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ in particolare } \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Tramite Gauss Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -a \Delta u \cdot v + cuv - f v &= 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \\ \implies \int_{\Omega} (-a \Delta u + cu - f) v &= 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

La funzione nelle parentesi è continua su $\overline{\Omega}$

Per il lemma di DBR

$$\implies -a \Delta u + cu - f = 0 \text{ in } \Omega$$

19 Serie di Fourier in spazi di Hilbert

Definizione: Sia H di Hilbert. Una famiglia di vettori $\{u_n\} \subseteq H$ si dice *sistema ortogonale* se $(u_n, u_m) = 0 \quad \forall n \neq m$.
 Si dice poi *sistema ortonormale* se è ortogonale e $(u_n, u_n) = 1 \quad \forall n$

Esempi:

- $H = \mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$
- $H = l^2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \text{ tali che } \sum_{n \geq 0} x_n^2 < +\infty\}$ è uno spazio vettoriale

$$\|x\|_{l^2} = \left(\sum_{n \geq 0} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

è di Hilbert poiché $((x_n), (y_n)) = \sum x_n y_n$
 $e_n = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

Definizione: Sia H di Hilbert e sia (u_n) sistema ortonormale.
Dato $u \in H$

- $(u, u_n) \in \mathbb{R}$ *coefficienti di Fourier* di u (rispetto a (u_n))
- $\sum_n (u, u_n) u_n$ *serie di Fourier* di u (rispetto a (u_n))

Esempi

- $H = \mathbb{R}^3$, $\{e_1\}$, $(u, e_1)e_1 = P(u)$ su $\langle e_1 \rangle$
- $\{e_1, e_2\}$, $(u, e_1)e_1 + (u, e_2)e_2 = P(u)$ su $\langle e_1, e_2 \rangle$
- $\{e_1, e_2, e_3\}$, $(u, e_1)e_1 + \dots = P(u)$ su $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$
- $H = l^2$, $\{e_1\} = \{(1, 0, \dots, 0)\}$, $(u, e_1)e_1 = P_{\langle e_1 \rangle}(u)$
 $\{e_i\}$ pari $\sum_k (u, e_{2k})e_{2k}$
 $\{e_n\}$ con n qualsiasi $\sum_k (u, e_k)e_k = u$

Teorema di convergenza per serie di Fourier

Sia H Hilbert, sia $\{u_n\}$ sistema ortonormale fissato.
Dato $u \in H$, la serie di Fourier di u converge in H e

$$\sum_n (u, u_n) u_n = u'$$

Dove u' è la proiezione ortogonale di u su M , dove M è la chiusura del sottospazio generato dal sistema.

19.0.1 Convergenza in H

$\sum_n (u, u_n) u_n$ corrisponde a $S_N(u) = \sum_{n=0}^N (u, u_n) u_n$, converge a u' se

$$\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(u) = u' \iff \lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(u) - u'\| = 0$$

19.0.2 Sottospazio generato

Il sottospazio generato, indicato con $\langle u_n \rangle$ è definito come

$$\langle u_n \rangle := \{\text{combinazioni lineari degli } u_n\}$$

$$M = \overline{\langle u_n \rangle} := \{\text{limiti di comb. lineari degli } u_n\}$$

M è un sottospazio chiuso.

19.0.3 Disuguaglianza di Bessel

Teorema: Sia H Hilbert, e sia (u_n) sistema ortonormale, dato $u \in H$, vale

$$\sum_n (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$$

Dimostrazione

Fisso $N \in \mathbb{N}$ e mostriamo

$$\sum_{n=0}^N (u, u_n)^2 \leq \|u\|^2$$

la tesi è dimostrata passando al limite, dunque:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n\|^2 &= (u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n, u - \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n) = \\ &= \|u\|^2 - 2 \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 + \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 \\ &= \|u\|^2 - \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2 \end{aligned}$$

L'ultima somma vale poiché siamo in un sistema ortonormale:

$$((u, u_1)u_1 + (u, u_2)u_2, (u, u_1)u_1 + (u, u_2)u_2) = (u, u_1)^2 + (u, u_2)^2$$

19.0.4 Dimostrazione teorema di convergenza delle serie di Fourier

Per dimostrare la convergenza della serie, basta mostrare che $S_N(u)$ è di Cauchy:

$$\forall \varepsilon \exists \nu : \|S_N - S_M(u)\|^2 < \varepsilon \quad \forall N, M \geq \nu$$

ovvero: (supposto $N > M$)

$$\begin{aligned} \|S_N(u) - S_M(u)\|^2 &= (S_N(u) - S_M(u), S_N(u) - S_M(u)) = \\ &= \left(\sum_{n=M+1}^N (u, u_n) u_n, \sum_{n=M+1}^N (u, u_n) u_n \right) \\ &= \sum_{n=M+1}^N (u, u_n)^2 = |T_N(u) - T_M(u)| \end{aligned}$$

dove $T_N = \sum_{n \leq N} (u, u_n)^2$

Bessel $\implies \{T_N(u)\}$ è di Cauchy

Essendo in un Hilbert $S_N(u)$ converge

Sia ora $u' := \sum_n (u, u_n) u_n$

Per dimostrare $u' = P_M(u)$ basta mostrare che

1. $u' \in M$
2. $u - u' \in M^\perp$

Per l'unicità nel teorema delle proiezioni, $u' = P_M(u)$, $u - u' = P_{M^\perp}(u)$

Infatti

1. $u' \in M$ vale per costruzione:

$$u' = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(u) \in \overline{\langle u_n \rangle}, \quad u' \text{ è limite di comb. lineari degli } u_n$$

$$S_N(u) = \sum_{n \leq N} (u, u_n) u_n \in \langle u_n \rangle \text{ sono comb. lineari degli } u_n$$

2. Per mostrare che $u - u' \in M^\perp$ basta far vedere che $(u - u', u_n) = 0 \forall n$, questo assicura che $u - u'$ sarà ortogonale a tutti i limiti delle combinazioni lineari degli u_n , ovvero a tutti gli elementi di M .

$$(u - u', u_m) = (u - \sum_n (u, u_n) u_n, u_m) = (u, u_m) - (u, u_m)(u_m, u_m) = 0$$

Definizione: Sia H di Hilbert e sia (u_n) sistema ortonormale. Si dice che (u_n) è *sistema completo* se è massimale rispetto all'inclusione. Ovvero: $\exists (v_n)$ sistema ortonormale che contenga propriamente (u_n)

Proposizione di caratterizzazione di sistemi ortonormali completi

Sia (u_n) ortonormale in un Hilbert.

Sono equivalenti:

1. (u_n) è completo
2. $u \in H : (u, u_n) = 0 \forall n \implies u = 0$
3. Posto $M := \overline{\langle u_n \rangle}$, si ha $M \equiv H$
4. $\sum_n (u, u_n) u_n = u \forall u \in H$
5. $\sum_n (u, u_n)(v, u_n) = (u, v) \forall u, v \in H$ (identità di Parseval)
6. $\sum_n (u, u_n)^2 = \|u\|^2 \forall u \in H$ (identità di Bessel)

Dimostrazione

(1) \iff (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5) \implies (6) \implies (2)

Dimostrazione 1 se e solo se 2

Se è falsa la 2 implica che è falsa la 1

$$\exists u \in H : (u, u_n) = 0 \forall n \text{ MA } u \neq 0$$

Allora (u_n) non è massimale. Se è falsa la 1 implica che è falsa la 2 se (u_n) non è massimale, posso aggiungere almeno un elemento $\implies \exists u \in H$ per cui la 2 è falsa.

Dimostrazione 2 implica 3

Per mostrare $M \equiv H$, basta mostrare $M^\perp = \{0\}$, vero per la 2

$$\text{se } u \in M^\perp \text{ allora } u = 0$$

Dimostrazione 3 implica 4

Se M coincide con H , allora $u' = P_M(u) = u$

Dimostrazione 4 implica 5 Per la quattro ogni elemento è la sua serie di Fourier, dunque

$$(u, v) = \left(\sum (u, u_n) u_n, \sum (v, u_n) u_n \right) = \sum (u, u_n)(v, u_n)$$

Dimostrazione 5 implica 6

Prendere $u = v$ in Parseval

Dimostrazione 6 implica 2

Se $(u, u_n) = 0 \ \forall n, \sum 0 = 0$

20 Serie di Fourier in L^2

Si considera $L^2(I)$ dove $I = (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, e il prodotto scalare è definito come

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x)dx$$

Sistema ortonormale dei polinomi trigonometrici

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad p_k = \cos \frac{\xi_k x}{\sqrt{\frac{T}{2}}}, \quad q_k = \frac{\sin(\xi_k x)}{\sqrt{\frac{T}{2}}}, \quad k \geq 1$$

dove

$$\xi_k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^k \quad (\text{se } T = 2\pi, \quad \xi_k = k)$$

formano un sistema ortonormale

Dunque, data $f \in L^2(I)$ la sua serie di Fourier rispetto a questo sistema è la serie

$$(f, p_0)p_0 + \sum_{k \geq 1} (f, p_k)p_k + (f, q_k)q_k \quad (*)$$

20.0.1 Modi equivalenti di scrivere (*)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(\xi_k x) + b_k \sin(\xi_k x) \quad (**)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_I f(x) \cos(\xi_k x) dx \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_I f(x) \sin(\xi_k x) dx \quad k \geq 1$$

Oppure

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{i\xi_k x} \quad (***)$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\xi_k x} dx \quad z \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{f}_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\hat{f}_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

Teorema: Il sistema (p_0, p_k, q_k) è ortonormale completo in $L^2(I)$

Dimostrazione usando la (3) delle equivalenze

$$\langle p_0, p_k, q_k \rangle \equiv L^2(I)$$

\subseteq sempre vero ($\overline{M} \subseteq H$)

$\supseteq \forall f \in L^2(I)$, f può essere approssimata con elementi di $\langle p_0, p_k, q_k \rangle$

Passo 1 Mostriamo che quanto sopra è vero se $f = \varphi \in C_0^\infty(I)$.

Infatti, posso estendere φ a $\tilde{\varphi} \in C_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R})$.

Sappiamo (Analisi 2) che la serie di Fourier di $\tilde{\varphi}$ converge uniformemente su $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \implies$ converge uniformemente in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

\implies La successione delle somme parziali della serie di Fourier di $\tilde{\varphi}$ fornisce una successione in $\langle p_0, p_k, q_k \rangle$, che converge a $\tilde{\varphi} = \varphi$ in $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

Passo 2 Data $f \in L^2(I)$ posso approssimarla con una successione $\varphi_k \subset C_0^\infty(I)$.

$$\varphi_k \xrightarrow{L^2(I)} f$$

Concludo prendendo una successione diagonale.

Oppure:

$$\|f - S\| \leq \|f - \varphi\| + \|\varphi - S\| < \varepsilon$$

S somma parziale della serie di Fourier di φ

Osservazioni

- Data $f \in L^2(I)$, per il teorema sopra:

$$f = (f, p_0)p_0 + \sum_{k \geq 1} (f, p_k)p_k + (f, q_k)q_k$$

- Data $f \in L^2(I)$, vale l'id. di Bessel:

$$\|f\|_{L^2(I)}^2 = (f, p_0)^2 + \sum_{k \geq 1} (f, p_k)^2 + (f, q_k)^2$$

Dunque $f \in L^2(I) \iff$ i suoi coefficienti di Fourier $\in \ell^2$

- Possiamo sostituire $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ con

$$L_T^2(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}) : T\text{-periodiche}\}$$

è uno spazio di Hilbert, con $(f, g) = \int_{-T/2}^{T/2} f g$

- I coefficienti di Fourier hanno senso anche per $f \in L^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

$$|a_k| = \frac{2}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(\xi_k x) dx \right| \leq \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| < +\infty$$

lo stesso per i b_k

- Se $f \in \text{A.C.}([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ e $f(-\frac{T}{2}) = f(\frac{T}{2})$ posso estenderla a una funzione continua periodica su \mathbb{R} . (l'estensione f appartiene a $L_T^2(\mathbb{R})$)
Ha senso calcolare i coefficienti di Fourier sia di f che di f' .

a_k, b_k siano i coefficienti di Fourier di f

a'_k, b'_k siano i coefficienti di Fourier di f'

$$\begin{aligned} a'_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x) \cos(\xi_k x) dx = 0 + \frac{2}{T} \xi_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(\xi_k x) dx \\ &= \xi_k b_k \end{aligned}$$

Analogamente

$$b'_k = -\xi_k a_k$$

Dunque

$$\hat{f}'_k = i\xi_k \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

21 Applicazioni delle serie di Fourier alle equazioni differenziali

Ricerca di soluzioni periodiche di ODE lineari (tramite serie di Fourier)
Consideriamo un'ODE su \mathbb{R} della forma

$$\sum_{j=0}^n a_j u^{(j)} = f \in L_T^2(\mathbb{R}) \quad x \in \mathbb{R}$$

Problema: esistono soluzioni T-periodiche (in $L_T^2(\mathbb{R})$)?
La seguente equazione differenziale equivale a chiedere:

$$\sum_{j=0}^n a_j \widehat{u^{(j)}}_k = \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{j=0}^n a_j (i\xi_k)^{(j)} \hat{u}_k = \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sistema di infinite eq. algebriche.

$$P(i\xi_k) \hat{u}_k = \hat{f}_k$$

(forma equivalente)

Ciascuna eq. è un'equazione lineare di 1° grado in \hat{u}_k !!!

- Caso 1: $P(i\xi_k) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\implies \hat{u}_k = \frac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)}$$

- Caso 2: $P(i\xi_k) = 0$ per $k = k_1^*, \dots, k_p^*$, allora
 $\hat{f}_k = 0$ per $k = k_1^*, \dots, k_p^* \implies$ infinite soluzioni, ovvero

$$\hat{u}_k = \begin{cases} \frac{\hat{f}_k}{P(i\xi_k)} & k \neq k_1^*, \dots, k_p^* \\ \text{arbitrario} & k = k_1^*, \dots, k_p^* \end{cases}$$

Se però $\hat{f}_k \neq 0$ per qualche $k \in \{k_1^*, \dots, k_p^*\} \implies$ no soluzioni

Osservazione: Ci sono altri sistemi ortonormali completi in $L^2(I)$.

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

\rightarrow polinomi di Legendre

Esempio in $L^2(-1, 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{3} + x^2\right)$$

Data $f \in L^2(I)$, per minimizzare la distanza in $L^2(I)$ da un polinomio di grado ≤ 3 , dovrò considerare la somma delle serie di Fourier di f fatta rispetto ai polinomi di Legendre

22 Trasformata di Fourier

Definizione: Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$. La sua *Trasformata di Fourier* è la funzione definita per $\xi \in \mathbb{R}$ da:

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Osservazioni

- La dipendenza da ξ appare in $e^{-i\xi x} \implies \hat{u}(\xi)$ è un integrale dipendente dal parametro
- Formalmente c'è analogia con i coefficienti di Fourier

$$\hat{u}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x) e^{-i\xi_k x} dx \quad k \in \mathbb{Z}$$

- La definizione di $\hat{u}(\xi)$ è "ben posta" grazie all'ipotesi $u \in L^1(\mathbb{R})$

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| |e^{-i\xi x}| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx < +\infty$$

- $e^{-i\xi x} = \cos(\xi x) - i \sin(\xi x) \implies \hat{u}(\xi)$ è a valori in \mathbb{C}

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cos(\xi x) dx - i \int_{\mathbb{R}} u(x) \sin(\xi x) dx$$

- Generalizzazioni: si può partire da $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
- Da $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($u \in L^1(\mathbb{R}^n)$)

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

- $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$
- *Non si trasformano mai* funzioni definite su sottoinsiemi propri di \mathbb{R} o \mathbb{R}^n

22.1 Varianti in letteratura

$e^{-i\xi x}$ rimpiazzato da $e^{i\xi x}$, oppure $e^{i2\pi\xi x}$

22.2 Operatore Trasformato

La trasformata \mathcal{F} di Fourier è l'operatore che manda u in \hat{u}

$$\mathcal{F} : u \rightarrow \hat{u}$$

Osservazioni

- \mathcal{F} è lineare:

$$\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v)$$

22.3 Trasformate notevoli

1. $u(x) = \chi_{(a,b)}(x)$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\sin(\xi b) - \sin(\xi a)}{\xi} + i \frac{\cos(\xi b) - \cos(\xi a)}{\xi}$$

2. $u(x) = e^{-|x|}$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}$$

Diversamente dal caso precedente, la trasformata è sempre reale, e \hat{u} è di nuovo $L^1(\mathbb{R})$.

3. $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\hat{u}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$$

Partendo da $u(x) = e^{-|x|}$ trasformando due volte si ottiene $\hat{\hat{u}}(x) = 2\pi e^{-|x|} = 2\pi u(x)$

22.4 Teorema di Riemann-Lebesgue

Teorema: Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$. Allora \hat{u} ha le seguenti proprietà:

1. $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$
2. \hat{u} è continua
3. \hat{u} è infinitesima all'infinito

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \hat{u}(\xi) = 0$$

Dimostrazione

1. $|\hat{u}(x)| \leq \|u\|_1$, passo all'ess-sup al variare di ξ

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Ne consegue che (con $M = 1$, da dimostrare)

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \text{ lineare continuo}$$

2. Facciamo vedere che $\hat{u}(\xi)$ è continua in ξ fissato in \mathbb{R} , ovvero

$$\xi_n \rightarrow \xi \implies \hat{u}(\xi_n) \rightarrow \hat{u}(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi_n x} dx$$

$$d'etare \hat{u}(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi_n x} dx$$

$$f_n(x) = u(x) e^{-i\xi_n x} \rightarrow u(x) e^{-i\xi x} = f(x)$$

Si può passare sotto il segno di integrale per conv. dominata, perché

$$|f_n(x)| = |u(x)| |e^{-i\xi_n x}| = |u(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

3. Vero se $u = \chi_{(a,b)}$ (vedere esempio sopra)

Vero se u è "a scalino", $u = \sum_k^N c_k \chi_{I_k}$ poiché l'operatore trasf. è lineare

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^N c_k \hat{\chi}_{I_k}$$

Vero $\forall u \in L^1(\mathbb{R}) : \exists \varphi_n$ "a scalino" $\xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u$

Sappiamo che $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$ op.continuo: $\varphi_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u \implies \hat{\varphi}_n \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{R})} \hat{u}$

So che $\hat{\varphi}_n$ sono "infinitesime all'infinito", dunque anche \hat{u} ha la stessa proprietà.

22.5 Proprietà algebriche

Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$

- $v(x) = u(x - a), a \in \mathbb{R} \implies \hat{v}(\xi) = e^{-i\xi a} \hat{u}(\xi)$
- $v(x) = e^{iax} u(x) \implies \hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi - a)$
Esempio: è possibile calcolare $u(x) \cos(ax)$ (Definizione complessa del coseno)
- $v(x) = u(x/a) \quad a \in \mathbb{R} - \{0\} \implies \hat{v}(\xi) = |a| \hat{u}(a\xi)$ In particolare, con $a = -1$, si ha

$$\begin{cases} u \text{ pari} & \implies \hat{u} \text{ pari (reale)} \\ u \text{ dispari} & \implies \hat{u} \text{ dispari (puramente immaginaria)} \end{cases}$$

Queste proprietà sono dimostrabili tramite cambi di variabili negli integrali

22.6 Proprietà differenziali

Proposizione 1: Sia $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap \text{A.C.}(\mathbb{R})$ (con tali ipotesi u derivabile q.o. su \mathbb{R} , con $u' \in L^1(\mathbb{R})$). Allora

$$\widehat{u'}(\xi) = i\xi \hat{u}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare, nelle ipotesi della proposizione

$$u' \in L^1(\mathbb{R}) \implies \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \widehat{u'}(\xi) = 0$$

ovvero

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \xi \hat{u}(\xi) = 0$$

ovvero

$$\hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

Iterando:

$$u \in L^1(\mathbb{R}) \cap \text{AC}(\mathbb{R}), \quad u' \in \text{AC}(\mathbb{R})$$

$$\widehat{u''}(\xi) = (i\xi)^2 \hat{u}(\xi) = -\xi^2 \hat{u}(\xi)$$

$$\text{e } \hat{u}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$$

Morale: maggior regolarità di u implica maggior rapidità di convergenza a 0 all'infinito di \hat{u}

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \hat{u'}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} u' e^{-i\xi x} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L u'(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \lim_{L \rightarrow +\infty} u(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-L}^L + i\xi \int_{-L}^L u(x) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

$$= i\xi \hat{u}(\xi)$$

$$u(\pm L)e^{i\xi \pm L} \text{ per } L \rightarrow +\infty$$

Infatti, per $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap \text{A.C.}(\mathbb{R})$, $u(L) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 0$

$$\begin{aligned} u(L) &= u(0) + \int_0^L u'(t) dt \\ &= u(0) + \int_0^{+\infty} u'(t) \chi_{(0,L)}(t) dt \\ &= u(0) + \int_0^{+\infty} u'(t) dt \end{aligned}$$

Poiché $f_L(t) = u'(t) \chi_{(0,L)}(t)$.

Proposizione 2: Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $xu \in L^1(\mathbb{R})$
Allora:

$$(\hat{u})'(\xi) = -i\widehat{xu}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

In particolare, siccome la trasformata di xu è continua (per RL), allora $(\hat{u})'$ continua, cioè $\hat{u} \in C^1(\mathbb{R})$

Iterando: $u \in L^1(\mathbb{R}) : xu \in L^1(\mathbb{R}), x^2u \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{u} \in C^2(\mathbb{R})$

$u \sim \frac{M}{x^\alpha}$ per $x \rightarrow \pm\infty$ con $\alpha > k \implies x^{k-1}u(x) \sim \frac{M}{x^{\alpha-k+1}}$ ($\alpha - k + 1 > 1$) \implies

$$x^{k-1}u \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{u} \in C^{k-1}(\mathbb{R})$$

Morale: maggior rapidità di decrescenza a 0 per u implica maggior regolarità di \hat{u}

Dimostrazione (cenno)

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx$$

Posso derivare sotto \int :

$$(\hat{u}(\xi))' = \int_{\mathbb{R}} (u(x) e^{-i\xi x})' dx = -i \int_{\mathbb{R}} xu(x) e^{-i\xi x} dx = -i\widehat{xu(x)}(\xi)$$

23 Applicazione della trasformata di Fourier alle equazioni differenziali

Data un'equazione differenziale in $u = u(x)$, applicando la trasformata si ottiene un'equazione algebrica in \hat{u} . Risolvendo per \hat{u} , si trova quindi u .

23.1 Esempio

$$u'(x) - u(x) = e^{-x} H(x) \quad H(x) := \begin{cases} 1 & \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Da risolvere per q.o. $x \in \mathbb{R}$.
Cerco soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap AC(\mathbb{R})$

$$\hat{u}' - \hat{u} = \widehat{e^{-x}H(x)}$$

$$i\xi\hat{u} - \hat{u} = \frac{1}{1+i\xi}$$

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2} \implies u(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

23.2 Formule di inversione per la trasformata di Fourier in L^1

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:

$$u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{u}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\check{u}(x) := u(-x)$$

Problema: Esiste uno spazio X tale che

$$\mathcal{F} : X \rightarrow X$$

e valga in X la formula di inversione?

Risposta: Sì, $X = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$u(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{u}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Ma chi è $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$?

$$|\hat{u}(\xi)| < +\infty \text{ se } u \in L^1(\mathbb{R})$$

23.3 Trasformata di Fourier in L^2

Spazio delle funzioni a decrescenza rapida

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ tali che

$$\forall \alpha, \beta \text{ multiindici} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty$$

Osservazioni

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\gamma u, D^\gamma u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$
- Valgono in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ le seguenti formule:

$$1. \widehat{D^\alpha u} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}$$

$$2. D^\alpha \hat{u} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha u}$$

- Formula di inversione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Allora $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\check{u} = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\hat{u}}$$

Dimostrazione: Se dimostro che $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora vale la formula di inversione. (come conseguenza di quelle in $L^1(\mathbb{R}^n)$, perché $u, \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$).

- $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ perché $\forall \alpha, x^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\alpha u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$$

Dunque per la prop. 2 \hat{u} ha derivate di ogni ordine

- $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{u}(\xi)| < +\infty \forall \alpha, \beta$
Perché $\xi^\alpha D^\beta \hat{u}$ è la trasformata di una funzione di $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{u} \sim \widehat{\xi^\alpha x^\beta u} \sim \widehat{D^\alpha(x^\beta u)}$$

E $D^\alpha(x^\beta u)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$ perché appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Quindi per Riemann-Lebesgue la sua trasformata sta in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

23.3.1 Altre proprietà di \mathcal{F} in \mathcal{S}

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}v = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}u$$

Identità di Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2$$

Prodotto di convoluzione

$$\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v}$$

$$\widehat{uv} = (2\pi)^{-n} \hat{u} * \hat{v}$$

Definizione: Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e sia $\{u_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che $u_h \rightarrow u$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Considero $\hat{u}_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e definisco

$$\hat{u} := \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h$$

(*) Esiste una tale u_h perché $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Idea

$$\mathcal{S} \ni u_h \rightarrow u \in L^2$$

Applico Fourier

$$\mathcal{S} \ni \hat{u}_h \rightarrow \hat{u} \in L^2$$

Osservazioni

- $\exists \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h$ (in $L^2(\mathbb{R}^n)$) perché \hat{u}_h è di Cauchy: infatti

$$\|\hat{u}_h - \hat{u}_k\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|u_h - u_k\|_2 \text{ (identità di Plancherel)}$$

e la successione è di Cauchy

- $\lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h$ è indipendente dalla scelta di u_h : $u_h \xrightarrow{L^2} u$, $v_h \xrightarrow{L^2} v$
 Dunque $\lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{v}_h$
 perché $u_h - v_h \xrightarrow{L^2} 0 \xRightarrow{\text{Plancherel}} \hat{u}_h - \hat{v}_h \rightarrow 0$
- Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, allora le trasformate coincidono
 Infatti, prendendo $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che (possibile tramite mollificatori)

$$\begin{cases} u_h \xrightarrow{L^1} u \\ u_h \xrightarrow{L^2} u \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{cases} \hat{u}_h \xrightarrow{L^\infty} \hat{u} \text{ Trasformata in } L^1, \text{ perché } \mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty \text{ continuo} \\ \hat{u}_h \xrightarrow{L^2} \hat{u} \text{ Trasformata in } L^2, \text{ per definizione di } \mathcal{F} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

- Vale l'id. di Plancherel in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Infatti, presa $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : u_h \xrightarrow{L^2} u$:

$$\|u_h\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}_h\|_{L^2}^2 \quad \forall h$$

Passando al limite si ottiene l'identità.

23.3.2 Calcolo nella pratica

Basta osservare che la successione

$$\begin{aligned} u_h &= u \cdot \chi(-h, h) \\ u_h &\rightarrow u \text{ in } L^2(\mathbb{R}) \\ \implies \hat{u}_h &\rightarrow \hat{u} \text{ in } L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Per Plancherel.

Quindi,

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \hat{u}_h(\xi) \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} u_h(x) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

La formula di inversione vale in L^2 , basta prendere $u_h \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u_h \xrightarrow{L^2} u$
 Sappiamo:

$$\tilde{u}_h = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{u}}_h \quad \forall h$$

Basta passare al limite per $h \rightarrow +\infty$

$$\tilde{u} = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{u}}$$

24 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Problema: Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, come definire \hat{T} ?

Idea: Scaricare \mathcal{F} sulle funzioni test, dal momento che sappiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}u = \int_{\mathbb{R}^n} v\hat{u}$$

Data $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, potremmo definire \hat{T}

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

La definizione posta non ha senso, perché

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

cioè $\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \not\rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la trasformata di una $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è analitica, quindi non può avere supporto compatto.

Si utilizzano quindi funzini test in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si introduce quindi una convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definizione: Data $\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, diciamo che $\varphi_h \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se

$$\forall \alpha, \beta, \quad x^\alpha D^\beta \varphi_h \rightarrow x^\alpha D^\beta \varphi \text{ uniformemente su } \mathbb{R}^n$$

Osservazioni

1. Data $\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Riferimento a convergenza in \mathcal{D})

$$\varphi_h \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \varphi_h \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

2. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è lineare e continuo, ovvero $\varphi_h \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi}_h \rightarrow \hat{\varphi}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}_h \rightarrow \xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi} \text{ uniformemente su } \mathbb{R}^n$$

(Poiché rispettivamente $\xi^\alpha D^\beta = D^\alpha(\widehat{x^\beta \varphi_h})$, $\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi} = D^\alpha(\widehat{x^\beta \varphi})$.)

Perché $D^\alpha(x^\beta \varphi_h) \rightarrow D^\alpha(x^\beta \varphi)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$

Esempio

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|D^\alpha(x^\beta \varphi_h) - D^\alpha(x^\beta \varphi)|}{1+x^2} (1+x^2) &\leq \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} ||D^\alpha(x^\beta \varphi_h) - D^\alpha(x^\beta \varphi)|(1+x^2)| \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

24.1 Spazio delle funzioni temperate

Definizione: Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si dice *distribuzione temperata* se

$$\varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

Definizione: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{\text{distribuzioni temperate}\}$

Esempi

1. $u(x) = p(x)$ polinomio $\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dico che $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi_h \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u}{p} p \varphi_h \right| dx \leq \left\| \frac{u}{p} \right\|_{L^1} \|p \varphi_h\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \text{ se } \varphi_h \rightarrow 0$$

dove p polinomio tale che $u/p \in L^1(\mathbb{R})$

2. $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si dice a *crescita lenta* se $u = qw$ con q polinomio e $w \in L^1(\mathbb{R})$, Tutte le funzioni a crescita lenta stanno in \mathcal{S}' . Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \varphi \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |w q \varphi| \leq \|w\|_{L^1} \|q \varphi\|_{L^\infty}$$

Quindi, se $\varphi_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\|q \varphi_h\|_\infty \rightarrow 0$

3. Come caso particolare: $u \in L^p(\mathbb{R}) \implies u$ è a crescita lenta, e quindi sta in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Data $u \in L^p(\mathbb{R})$, $u = qw$ con q polinomio e $w \in L^1(\mathbb{R})$.

- $u \in L^1(\mathbb{R}) \rightarrow$ prendo $q = 1$, $w \in L^1(\mathbb{R})$
- $u \in L^\infty(\mathbb{R}) \implies$ prendo $q : 1/q \in L^1(\mathbb{R})$, $u = q \cdot \frac{u}{q}$, $w = u/q \in L^1(\mathbb{R})$ applicando Holder.
- $u \in L^p(\mathbb{R}) \implies$ prendo $q : 1/q \in L^{p'}(\mathbb{R})$, $u = q \cdot \frac{u}{q}$, $w = \frac{u}{q} \in L^p(\mathbb{R})$, sempre per Holder.

4. $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $D^{(k)}\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}), \varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \langle \delta_0, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

Avendo la convergenza uniforme di φ_h , si avrà anche la convergenza puntuale (in $\varphi_h(0)$).

Altre osservazioni su \mathcal{S}'

1. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \implies T$ può agire più in generale su funzioni test di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
Infatti, se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, posso definire

$$\langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \lim_{h \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi_h \rangle \text{ dove } \varphi_h \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi_h \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

2. Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, allora vale:

$$\{\varphi_h\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } \varphi_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Data $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definisco $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Osservazioni

1. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Quindi $\langle T, \hat{\varphi} \rangle$ ha senso perché $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

2. Verifichiamo che $\hat{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\{\varphi_h\} \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \langle \hat{T}, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$$

Infatti $\{\varphi_h\} \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi}_h \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \langle T, \hat{\varphi}_h \rangle \rightarrow 0$
perché $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

3. Si ha anche $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (vedere sopra)

Tutte le proprietà di \mathcal{F} in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ valgono anche in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

Inversione:

$$\check{T} = (2\pi)^{-n} \hat{T}$$

Dimostrazione

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle T, \hat{\hat{\varphi}} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{T}, \varphi \rangle$$

Esempi

1. $T = \delta_0$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle &= \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi = \langle 1, \varphi \rangle \\ &\implies \hat{\delta}_0 = 1 \end{aligned}$$

2. $\hat{1} = \hat{\delta}_0 = 2\pi\check{\delta}_0 = (2\pi)\delta_0$, poiché

$$\langle \check{\delta}_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \check{\varphi} \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

3. $\hat{x} = \mathcal{F}(x \cdot 1) = i(\hat{1})' = 2\pi i(\delta_0)'$

24.2 Lista trasformate studiate

Ricapitolando, sono state studiate le seguenti trasformate:

$$\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$$

$$\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$$

25 Problemi di Cauchy per l'equazione del calore e delle onde

Si tratta di problemi di evoluzione, ovvero l'incognita è $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$

$u_t - \Delta u = f$ equazione del calore (parabolica)

$u_{tt} - \Delta u = f$ equazione delle onde (iperbolica)

Ad entrambe è associata l'equazione di Poisson $-\Delta u = f$ (ellittica)

In dimensione $n = 2$, le equazioni omogenee diventano

$$u_t - u_{xx} = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{tt} & u_{tx} \\ u_{xt} & u_{xx} \end{pmatrix} \quad \det A = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A < 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A > 0$$

Si ha una terminologia simile alla classificazione delle coniche

25.1 Problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ipotesi: $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$

Strategia: Applicare $\mathcal{F}_{(x \rightarrow \xi)}$ (Fourier rispetto a x)

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(u(x, t)) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-i\xi x} dx$$

1. Trasformare il problema

$$\widehat{u_t} - \widehat{u_{xx}} = 0$$

$\hat{u}_t = (\hat{u})_t$ purché u sia sufficientemente regolare

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-i\xi x} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-i\xi x} dx$$

$$\widehat{u_{xx}} = (i\xi)^2 \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$$

L'equazione soddisfatta da \hat{u} è

$$(\hat{u})_t + \xi^2 \hat{u} = 0$$

Il dato iniziale trasformato è

$$\hat{u}(\xi, 0) = \int_{\mathbb{R}} u_0 e^{-i\xi x} dx$$

Il problema risolto da \hat{u} è

$$\begin{cases} (\hat{u})_t + \xi^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

Ovvero una ODE, lineare, omogenea, del I ordine.

2. Determinare \hat{u}

Se poniamo $\varphi(t) := \hat{u}(\xi, t)$ (per ξ fissato), il problema risolto da φ :

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -\xi^2 \varphi(t) \\ \varphi(0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases} \implies \varphi(t) = C e^{-\xi^2 t}$$

$$\varphi(0) = C = \hat{u}_0(\xi) \implies \varphi(t) = \hat{u}_0(\xi) e^{-\xi^2 t}$$

3. Determinare u a partire da \hat{u}

$$u(x, t) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}^{-1}(\hat{u}_0(\xi)) * \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}^{-1}(e^{-\xi^2 t})$$

$$u_1(x, t) *_x u_2(x, t) = \int_{\mathbb{R}} u_1(x - y, t) u_2(y, t) dy$$

$$u(x, t) = u_0(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Commenti

- Avendo preso $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, il prodotto di convoluzione ha senso ($u_0 \in L^2$, gaussiana $\in L^1$)
- Se il prodotto scritto ha senso per $t > 0$, si può far vedere che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x) \text{ in } L^2(\mathbb{R})$$

Infatti

$$\begin{aligned} \|u(x, t) - u_0(x)\|_{L^2}^2 &= (2\pi)^{-1} \|\hat{u}(\xi, t) - \hat{u}_0(\xi)\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi, t) - \hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi) e^{-\xi^2 t} - \hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi)|^2 |e^{-\xi^2 t} - 1|^2 d\xi \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Per Plancherel. Inoltre il limite per $t \rightarrow 0$ passa sotto integrale per convergenza dominata.

25.2 Effetto regolarizzante dell'operatore calore

$\forall t > 0, x \mapsto u(x, t)$ è di classe C^∞ per le proprietà del prod. di convoluzione. La formula mostra anche quella che si dice *velocità di propagazione infinita* dell'operatore $\partial_t - \partial_{xx}$.
Ovvero: anche se $u_0(x)$ è a supporto compatto

$$\forall t > 0, x \mapsto u(x, t) \text{ è diversa da } 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

25.3 Problema di Cauchy per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ipotesi: $u_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), u_1 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$

Spezzando (P) in due problemi distinti

$$(P_1) \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \\ v(x, 0) = u_0(x) \\ v_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

Se trovo v e w soluzioni dei due problemi $\implies u = v + w$ soluzioni di (P)

Risolvo (P_1)

1. $\widehat{v_{tt}} - \widehat{v_{xx}} = 0$, se v sufficientemente regolare

$$(\hat{v})_{tt} = -\xi^2 \hat{v}$$

$$\hat{v}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi)$$

$$\hat{v}_t(\xi, 0) = 0$$

Problema di Cauchy per un'ODE (lineare, omogenea del II ordine) Completare

$$\implies \varphi(t) = C_1 e^{i\xi t} + C_2 e^{-i\xi t}$$

Imponiamo i dati iniziali

$$\varphi(0) = C_1 + C_2 = \hat{u}_0(\xi)$$

$$\varphi'(0)|_{t=0} = i\xi C_1 e^{i\xi t}|_{t=0} - i\xi C_2 e^{-i\xi t}|_{t=0} = i\xi C_1 - i\xi C_2 = 0 \iff C_1 = C_2$$

Quindi $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \hat{u}_0(\xi)$

$$\implies \varphi(t) = \hat{v}(\xi, t) = \frac{1}{2} \hat{u}_0(\xi) e^{i\xi t} + \frac{1}{2} \hat{u}_0(\xi) e^{-i\xi t}$$

2. Ricavo v a partire da \hat{v} , ricordando la regola di trasformazione (traslazione):

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)]$$

Somma di due onde, (progressiva e regressiva) che hanno stessa forma di u_0 e metà ampiezza Procedendo in maniera analoga:

$$w(x, t) = \frac{1}{2} (U_1(x+t) - U_1(x-t)) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$$

Conclusione: **Formula di d'Alembert**

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$$

Commenti

- Non c'è effetto regolarizzante, nelle ipotesi sopra u è di classe $C^2(\mathbb{R})$. Si può dimostrare che D'Alembert vale più in generale.
- La velocità di propagazione è finita