1 Problemi di Cauchy per l'equazione del calore e delle onde

Si tratta di problemi di evoluzione, ovvero l'incognita è $u = u(x_1, \ldots, x_n, t)$

$$u_t - \Delta u = f \text{ equazione del calore (parabolica)}$$

$$u_{tt} - \Delta u = f \text{ equazione delle onde (iperbolica)}$$

Ad entrambe è associata l'equazione di Poisson $-\Delta u = f$ (ellittica)
In dimensione $n = 2$, le equazioni omogenee diventano

$$u_t - u_{xx} = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$$

$$c$$

Si ha una terminologia simile alla classificazione delle coniche

1.1 Problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ipotesi: $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$
Strategia: Applicare $\mathcal{F}_{(x \to \xi)}$ (Fourier rispetto a x)

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}_{x \to \xi}(u(x,t)) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-i\xi x} dx$$

1. Trasformare il problema

$$\widehat{u_t} - \widehat{u_{xx}} = 0$$

$$\hat{u_t} = (\hat{u})_t \text{ purché } u \text{ sia sufficientemente regolare}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-i\xi x} dx\right) = \int_{\mathbb{R}} {}^c etare$$

$$\hat{u_{xx}} = (i\xi)^2 \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$$

L'equazione soddisfatta da $\hat{u}$ è

$$(\hat{u})_t + \xi^2 \hat{u} = 0$$

Il dato iniziale trasformato è

$$\hat{u}(\xi, 0) = \int_{\mathbb{R}} u_0 e^{-i\xi x} dx$$

Il problema risolto da $\hat{u}$ è

$$\begin{cases} (\hat{u})_t + \xi^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

Ovvero una ODE, lineare, omogenea, del I ordine.

2. Determinare $\hat{u}$
   Se poniamo $\varphi(t) := \hat{u}(\xi,t)$ (per ξ fissato), il problema risolto da φ :

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -\xi^2\varphi(t) \\ \varphi(0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases} \implies \varphi(t) = Ce^{-\xi^2 t}$$

$$\varphi(0) = C = \hat{u}_0(\xi) \implies \varphi(t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-\xi^2 t}$$

3. Determinare u a partire da $\hat{u}$

$$u_(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{x\to\xi}(\hat{u}_0(\xi)) * \mathcal{F}^{-1}_{x\to\xi}(e^{-\xi^2 t})$$

$$u_1(x,t) *_x u_2(x,t) = \int_{\mathbb{R}} u_1(x-y,t)u(y,t)dy$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}}$$

Commenti

- Avendo preso $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, il prodotto di convoluzione ha senso ($u_0 \in L^2$, gaussiana $\in L^2$)
- Se il prodotto scritto ha senso per $t > 0$, si può far vedere che:

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = u_0(x) \text{ in } L^2(\mathbb{R})$$

  Infatti

$$\|u(x,t)-u_0(x)\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-1}\|\hat{u}(\xi,t)-\hat{u}_0(\xi)\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}|\hat{u}(\xi,t)-\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}|\hat{u}_0(\xi)e^{-\xi^2 t} - \hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi =$$

$$(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}|\hat{u}_0(\xi)|^2|e^{-\xi^2 t} - 1|^2 d\xi \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

  Per Plancherel. Inoltre il limite per $t \to 0$ passa sotto integrale per convergenza dominata.

1.2 Effetto regolarizzante dell'operatore calore

$\forall t > 0, x \mapsto u(x,t)$ è di classe C^∞ per le proprietà del prod. di convoluzione.
La formula mostra anche quella che si dice *velocità di propagazione infinita* dell'operatore $\partial_t - \partial_{xx}$
Ovvero: anche se $u_0(x)$ è a supporto compatto

$$\forall t > 0, x \mapsto u(x,t) \text{ è diversa da } 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1.3 Problema di Cauchy per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = u_1(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ipotesi: $u_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), u_1 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$
Spezzando (P) in due problemi distinti

$$(P_1) \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \\ v(x,0) = u_0(x) \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

Se trovo v e w soluzioni dei due problemi $\implies u = v + w$ soluzioni di (P)
Risolvo (P_1)

1. $\hat{v_{tt}} - \hat{v_{xx}} = 0$, se v sufficientemente regolare

$$(\hat{v})_{tt} = -\xi^2 \hat{v}$$
$$\hat{v}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi)$$
$$\hat{v}_t(\xi, 0) = 0$$

Problema di Cauchy per un'ODE (lineare, omogenea del II ordine) Completare

$$\implies \varphi(t) = C_1 e^{i\xi t} + C_2 e^{-i\xi t}$$

Imponiamo i dati iniziali

$$\varphi(0) = C_1 + C_2 = \hat{u}_0(\xi)$$
$$\varphi'(0)|_{t=0} = i\xi C_1 e^{(i\xi t)} - i\xi C_2 e^{-i\xi t}|_{t=0} = i_1 - i\xi C_2 = 0 \iff C_1 = C_2$$

Quindi $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\hat{u}_0(\xi)$

$$\implies \varphi(t) = \hat{v}(\xi, t) = \frac{1}{2}\hat{u}_0(\xi) e^{i\xi t} + \frac{1}{2}\hat{u}_0(\xi) e^{-i\xi t}$$

2. Ricavo v a partire da $\hat{v}$, ricordando la regola di trasformazione (traslazione):

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)]$$

Somma di due onde, (progressiva e regressiva) che hanno stessa forma di u_0 e metà ampiezza Procedendo in maniera analoga:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}(U_1(x+t) - U_1(x-t)) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy$$

Conclusione: **Formula di d'alembert**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy$$

Commenti

- Non c'è effetto regolarizzante, nelle ipotesi sopra u è di classe $C^2(\mathbb{R})$.
  Si può dimostrare che D'Alembert vale più in generale.
- La velocità di propagazione è finita