1 Analisi funzionale

Uno **spazio vettoriale** (su $\mathbb{R}$) è un insieme (V) su cui sono definite due operazioni:
Somma $+ : V \times V \to V$
Prodotto per scalare $\cdot : \mathbb{R} \times \to V$
Tali operazioni godono delle seguenti proprietà
Per la somma

- $u + v = v + u$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- $u + \underline{0} = u$
- $u + (-u) = \underline{0}$

Per il prodotto per scalare

- $(ts)u = t(su)$
- $t(u + v) = tu + tv$
- $(t + s)u = tu + su$
- $1 \cdot u = u$

1.0.1 Norma

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Una norma su V è una funzione $\|.\| : V \to \mathbb{R}^+$ tale che:

- $\|v\| > 0 \forall v \in V - \{\underline{0}\}$ (positività)
- $\|tv\| = |t|\|v\| \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ (omogeneità)
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \forall u, v \in V$ (dis. triangolare)

$(V, \|.\|)$ si dice **spazio vettoriale normato**.

Seguono le seguenti proprietà (resettare counter)

1. $\|\underline{0}\| = 0$
2. $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \forall u, v \in V(dim)$

Norma euclidea:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} (|x|^p)^{\frac{1}{p}}$$

La disuguaglianza triangolare per la norma p, ovvero disuguaglianza di Minkowski, richiede l'ipotesi $p \geq 1$.

1.0.2 Norma su uno spazio funzionale di dimensione infinita

$V = C^0([a,b])$

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|dx$$

Definizione: Sia $(V, \|.\|)$ sp. vettoriale normato. Allora $d(u,v) := \|\underline{u} - \underline{v}\|$ definisce una distanza su V, ovvero

$$d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

tale che

1. $d(u,v) \geq 0$ con $= 0 \iff u = v$ positività
2. $d(u,v) = d(v,u)$ simmetria
3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ disuguaglianza triangolare

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i - y_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|$$

Definizione: (V,d) si dice spazio metrico

Osservazione: In uno spazio metrico possiamo definire le **sfere**: dato $r \geq 0, v_0 \in V$

$$B_r(v_0) := \{v \in V : d(v, v_0) < r\}$$

Si dice sfera chiusa se la disuguaglianza non è stretta.

Definizione: Se $\{v_n\} \subseteq (V, \|.\|)$, si dice che $v_n \to v$ in V se

$$d(v_n, v) \to 0, \text{ oppure } \|v_n - v\| \to 0$$

$$(\forall\varepsilon > 0 \exists\nu \in \mathbb{N} : d(v_n, v) = \|v_n - v\| < \varepsilon \forall n \geq \nu)$$

Alcuni fatti veri in dimensione finita ma falsi in dimensione infinita:

1. Tutte le norme sono "equivalenti" fra loro
2. Tutte le successioni di Cauchy convergono
3. Tutti i sottospazi vettoriali sono chiusi

1) Norme equivalenti
Definizione: Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$), consideriamo su V due possibili norme $\|.\|, |\|.\||$.
Queste due norme si dicono **equivalenti** se:

1. $\exists c > 0 : \forall v \in V, \|v\| \leq c|\|v\||$
2. $\exists c' > 0 : \forall v \in V, |\|v\|| \leq c\|v\|$

Le successioni convergenti nelle due norme sono le stesse.
Interpretazione geometrica:

$$\|.\|_\infty \leq \|.\|_1 \iff B_1^1(0) \subseteq B_1^\infty(0)$$

Teorema: Se $\dim V < +\infty \implies$ tutte le norme su V sono tra loro equivalenti

In uno spazio a dimensione infinita non è generalmente vero, ad esempio nello spazio delle funzioni continue su $[a, b]$

Definizione: Sia $(V, \|.\|)$ uno spazio vettoriale normato. Una successione $\{v_n\} \subseteq V$ si dice successione di cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : d(v_n, v_m) < \varepsilon \ \forall n, m \geq \nu$$

Osservazione: Vale sempre che se $\{v_n\}$converge allora è di Cauchy.

$$(\|v_n - v_m\| = \|v_n - v + v - v_m\| \leq \|v_n - v\| + \|v_m - v\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Teorema: Se $\dim V < +\infty$ vale anche il viceversa, ovvero

$$\{v_n\} \text{ converge } \iff \{v_n\} \text{ di Cauchy}$$

Questo teorema è falso se $\dim V = +\infty$
Prendendo lo spazio delle funzioni $V = C^0([a, b])$ con norma 1, si può costruire una successione di Cauchy che non converge.

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon, \ \int_a^b |f_n - f_m| = \int_a^b f_m - f_n$$

1.1 Spazio di Banach

Definizione: Uno spazio vettoriale normato $(V, \|.\|)$ si dice completo o di Banach se tutte le successioni di Cauchy convergono.

Teorema/osservazione: $V = (C^0([a,b], \|.\|_\infty)$ è di Banach
Generalizzazione:

$$V = C^k([a,b]) \quad \|f\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

Teorema Sia $(V, \|.\|)$ spazio vettoriale normato. Se dim$V < +\infty \implies$ tutti i sottospazi vettoriali W sono **chiusi**.

$$\{v_n\} \subseteq W, v_n \to v \text{ in } V \implies v \in W$$

Il teorema diventa falso se dim$V = +\infty$, ad esempio $V = (C^0([a,b]), \|.\|_\infty)$.