1 Spazi di Lebesgue

Definizione: Sia E misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n$

$$L^1(E) := \{f : E \to \mathbb{R}\text{L-integrabili}\}/_\sim$$

Tale insieme è uno spazio vettoriale per la linearità dell'integrale.

Definizione: Data $f \in L^1(E)$

$$\|f\|_1 := \int_E |f|$$

Tale norma rispetta le tre proprietà necessarie.
C'è un problema, $\int_E |f| = 0 \;\not\Longrightarrow\; f = 0$ su E, $\implies f = 0$ q.o. su E.

Definizione: Date $f, g \in L^1(E)$ diciamo che f è equivalente a g se $f = g$ q.o. su E.

Proprietà di una relazione di equivalenza:

- $f \sim f$
- $f \sim g \iff g \sim f$
- $f \sim g$ e $g \sim h \implies f \sim h$

Dunque identifichiamo le funzioni equivalenti secondo l'ultima definizione.

Teorema: $(L^1(E), \|.\|)$ è uno spazio di Banach

Definizione:
$\{f_n\} \subseteq L^1(E), f_n \to f$ in $L^1(E) \iff \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$

ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| dx = 0$$

Consideriamo per semplicità $f = 0$
Q: $f_n \to 0$ puntualmente q.o. su E , allora $\int_E f_n = 0$?
Controesempio 1

$$\exists f_n \subseteq L^1(\mathbb{R}) : \begin{cases} f_n \to 0 \text{ q.o. su } \mathbb{R} \\ f_n \not\to \text{ in } L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$f_n = \chi_{n,n+1} = \begin{cases} 1 & x \in (n, n+1) \\ 0 & x \notin (n, n+1) \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R},\ f_(x_0) = 0$ definitivamente (per $n \gg 1$)

$$\int_{\mathbb{R}} \|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(n,n+1)} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Controesempio 2

$$\exists f_n \subseteq L^1(0,1) : \begin{cases} f_n \to 0 \text{ in } L^1(0,1) \\ f_n \not\to 0 \text{ q.o. su } (0,1) \end{cases}$$

$f_n \to 0$ in $L^1(0,1)$, $\|f_n\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |f_n| \to 0$

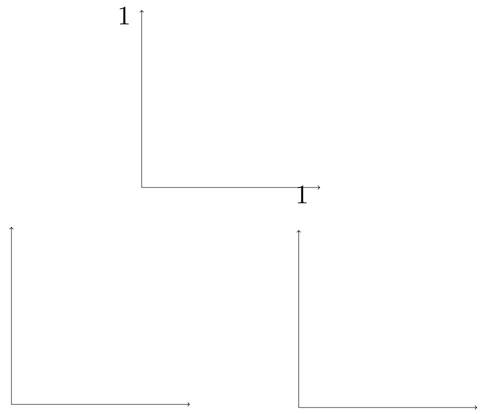

Figura 1: DISEGNO

$f_n \not\to 0 \forall x_0 \in (0,1)$
Fissato $x_0 \in (0,1), \exists\ K(n) : f_{K(n)}(x_0) = 1$

Proposizione: Se $f_n \to 0$ in $L^1(E)$, allora $\exists f_{K(n)} \to 0$ q.o. su E.

Osservazioni:

- Si può mettere f al posto di 0.
- Nell'esempio è vero
- Conseguenza: Se una successione f_n ammette limite in $L^1(E)$ allora questo limite deve coincidere col limtie puntuale q.o.

Infatti, $f_n \to f$ q.o. su E finire
Quindi se $f_n \to g$ q.o. su E. ($\implies f_{K(n)} \to g$ q.o. su E, per l'unicità del limite puntuale quasi ovunque, $f = g$ q.o. su E)

Teorema di convergenza dominata (di Lebesgue)
Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$ e sia $f_n \to f$ q.o. su E
Supponiamo che $\exists g \in L^1(E)$ indipendente da n tale che

$$(*)\ |f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.o. } x \in E, \forall n \in \mathbb{N} \text{ (definitivamente)}$$

Allora $f_n \to f$ in $L^1(E)$

Osservazioni

- La (*) è un'ipotesi molto più debole della convergenza uniforme
- In particolare per $f_n(x) = x^n$ su $(0,1)$ la (*) è verificata, prendendo $g \equiv 1$
- Invece nel controesempio 1, se $|f_n(x)| \leq g$ q.o. su $\mathbb{R}, g \notin L^1(\mathbb{R})$
- È un teorema di passaggio al limite sotto integrale.

$$|f_n - f| \to 0 \text{ su } E \implies \int_E |f_n - f| \to 0$$

$\implies$ il limite degli integrali $\equiv$ l'integrale del limite.

Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi)
Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(E)$, supponiamo che:

$$(**)\ f_n \geq 0 \text{ q.o. su } E,\ f_{n+1} \geq f_n \text{q.o. su } E$$

Allora

$$\int_E \lim_{n\to+\infty} f_n dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n$$

Osservazioni

- Il teorema si applica anche se $f_n \leq 0$ decrescente, basta considerare $g_n = -f_n \geq 0$

  B.L. a $g_n \implies \displaystyle\int_E \lim g_n = \lim \int_E g_n = \int_E \lim(-f_n) = \lim \int_E (-f_n)$
- Può valere come uguaglianza $+\infty = +\infty$

1.0.1 Integrali multipli

Teorema di Fubini
Sia f integrabile secondo Lebesgue, su $I = I_1 \times I_2$ ($I_1 \subseteq \mathbb{R}^m, I_2 \subseteq \mathbb{R}^n$)
Allora:

1. Per q.o. $x_1 \in I_1,\ x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ è L-integrabile su I_2
2. $x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2)dx_2$ L-integrabile su I_1
3. $\int_I f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{I_1}(\int_{I_2} f(x_1, x_2)dx_2)dx_1$

Osservazione: Si può scambiare il ruolo delle variabili.

$$\int_I f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x_1, x_2)dx_2\right)dx_1 = \int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(x_1, x_2)dx_1\right)dx_2$$

Teorema di Tonelli
Sia $f \geq 0$ misurabile sul precedente $I = I_1 \times I_2$.
Supponiamo che:

- Per q.o. $x_1 \in I_1,\ x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ è L-integrabile su I_2
- $x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1, x_2) dx_2$ L-integrabile su I_1

Allora: f L-integrabile su $I_1 \times I_2$ (e quindi per Fubini $\int_I f = \int_{I_1} \int_{I_2} f$)

Osservazione: Se ho una f che cambia segno, posso provare ad applicare Tonelli a $|f|$: se $|f|$ soddisfa 1) 2), Tonelli $\implies$ $|f|$ L-integrabile $\implies$ f L-integrabile $\implies$ posso applicare Fubini.

1.0.2 Spazi di Lebesgue (o spazi L^p

Definizione: $p \in [1, +\infty)$, $L^p(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : |f|^p \text{ L-integrabile}\}/_\sim$, anch'esso risulta essere uno spazio vettoriale normato (di Banach)

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Teorema: $(L^p, \|.\|_p)$ è uno spazio di Banach.

- Caso particolarmente importante: $p = 2$
- Caso limite: $p = +\infty$