1 Integrazione secondo Lebesgue

1. Misure e funzioni misurabili
2. Definizione di integrale di Lebesgue
3. Confronto con Riemann
4. Teoremi principali

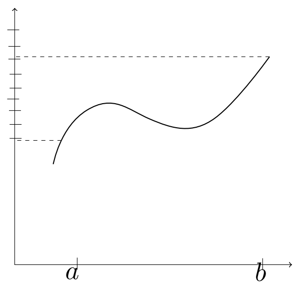

Figura 1: Lebesgue

$$\int_a^b f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} l(f^{-1}(j_k)) \cdot y_k$$

1.0.1 Misure e funzioni misurabili

Definizione: Sia X insieme, e sia $F \subseteq P(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X.
F si dice una σ-algebra se:
(i) $\varnothing \in F$
(ii) $A \in F \implies X \setminus A \in F$
(iii) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F \implies \cup_n A_n \in F$

Osservazione: $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F \implies \cap_n A_n \in F$

Esempi

- X qualsiasi, $F = P(X) =$ parti di X
- $X = \mathbb{R}^n$, $F =$ la più piccola sigma algebra contenente gli aperti (sigma di Borell)

Definizione: $(X; F) spaziomisurabile$

Definizione: Sia $X, F)$ spazio misurabile, una misura positiva su (X, F) è una funzione

$$\mu : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

tale che

1. $\mu(A) \geq 0 \forall A \in F$ (positività)
2. Se $\{A_n\}$ è una famiglia al più numerabile di insiemi di F 2 a 2 disgiunti allora

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

(additività, eventualmente $+\infty = +\infty$)

Esempi:

- $(X, P(X)),\ \mu(A) = \text{card} A$
- $(X, P(X))$ finire

Osservazione: Seguono da 1) 2)

1. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots,\ A \in F \implies \mu(\cup_n A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$
2. $A_1 con A_2 con A_3,\ A_i \in F, \mu A_1) < +\infty \implies \mu(\cap_n A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$

Teorema Esistono su $\mathbb{R}^n$ una sigma algebra M (misurabile secondo lebesgue) e una misura positiva m (misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$) tali che:

- tutti gli insiemi aperti appartengono a M
- $A \in M$ e $m(A) = 0 \implies \forall B \subseteq A,\ B \in M e m(B) = 0$ (completezza)
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i\ i = 1, \ldots, n\} \implies m(A) = \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$

$(\ldots)$

Osservazione: Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili secondo Lebesgue.
Osservazione: La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ estende il concetto di volume n-dimensionale
Osservazione: Gli insiemi di misura nulla sono importanti

Definizione: Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice misurabile secondo Lebesgue se

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto, } f^{-1}(A) \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

$$\forall C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso , } f^{-1}(C) \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

Osservazione: f continua $\implies$ f misurabile secondo Lebesgue (f continua $\implies$ $\forall A$ aperto $f^{-1}(A)$ aperto $\implies$ $\forall A$ aperto $f^{-1}(A)$ misurabili
Osservazione 2: Sono misurabili anche limiti, inferiore, superiore di funzinoni continue (di funzioni misurabili)

Più in generale se

$$f : E \to \mathbb{R}$$

con E misurabile, f si dice misurabile secondo Lebesgue se $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $E \cap f^{-1}(A)$ misraubile secondo Lebesgue

1.0.2 Definzione di integrale secondo Lebesgue

Sia $f : E$ misurabile $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile.
Funzioni semplici
S funzione semplice è una funzione (misurabile) che assume un numero finito di valori (ciascuno su un insieme misurabile).

$$S = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{E_i}, \ \chi_E = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Dove gli E_i sono insiemi misurabili 2 a 2 disgiunti

$$\int_E S := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k m(E_k)$$

Precisazione: con la convenzione $0 \cdot \infty = 0$ (2) **Funzioni misurabili** $f \geq 0$

$$\int_E f := \sup_{S semplici S \geq f} \int_E^S (= \inf_{S semplici S \geq f} \int_E^S$$