Risposte domande di Fisica

Alessandro Sanino

19 luglio 2017

Indice

1 La legge di azione e reazione (terza legge di Newton) per spiegare il moto di corpi a contatto. Enunciare la legge e fornirne un esempio quantitativo.

La terza legge di Newton e' enunciata come :

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} \tag{1}$$

Ovvero:
"Se un corpo A esercita una forza $\vec{F}_{A\to B}$ su un corpo B, esso reagisce esercitando una forza $\vec{F}_{B\to A}$ sul corpo A. Le due forze hanno modulo e direzione uguali, ma verso opposto."

Prendiamo come esempio due corpi a contatto, ad esempio una persona e il pianeta Terra, da cui si puo' evincere che

$$m_{persona} << m_{Terra} \tag{2}$$

$$\vec{F}_{Terra\to persona} = m_{persona}\vec{G} \tag{3}$$

$$\vec{F}_{persona\to Terra} = m_{Terra}\vec{a} \tag{4}$$

$$G \approx 9.81\frac{m}{s^2}$$

Le formule (3) e (4) sono una immediata conseguenza della seconda legge di Newton.
sapendo che (1) è valida possiamo affermare che:

$$\vec{F}_{persona\to Terra} = -\vec{F}_{Terra\to persona}$$

$$\vec{a}\cdot m_{Terra} = -\vec{G}\cdot m_{persona}$$

e siccome è valida (2) abbiamo che $a << G$.
Questo è il motivo per cui sembra che sul pianeta Terra non sia esercitata alcuna forza dalla persona: L'accelerazione dovuta a essa è talmente piccola da risultare trascurabile.

□

2 La legge di Coulomb ed il principio di sovrapposizione. Come esempio si calcoli il campo di un dipolo elettrico sul piano mediano del dipolo oppure lungo l'asse del dipolo.

La **Legge di Coulomb** dice che:

$$\vec{F}_{q_1,q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{1\to2}}\hat{r} \tag{5}$$

Dove:

- ε_0 Costante dielettrica nel vuoto
- $\hat{u}$ Versore della forza : le cariche di stesso segno si respingono, viceversa si attraggono
- q_1, q_2 Le cariche di riferimento
- $\vec{r_{1,2}}$ vettore che congiunge i 2 punti dove si trovano le cariche q_1 e q_2

Il **principio di sovrapposizione** dice che, date $\underline{n}$ cariche in prossimita di q_j, allora vale che:

$$\vec{F}_{q_j} = \sum_{i\neq j}^{n} \vec{F}_{q_j,q_i} \tag{6}$$

Con:

$$0 <= j < n$$

Si ricorda la formula del campo elettrico prodotto in un punto $\vec{r}$ da una carica q posizionata in un punto P :

$$\vec{E}\,(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}|^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{F}_{coulomb}(q, q_{test})}{q_{test}}$$

Grazie al principio di sovrapposizione prima citato possiamo affermare che, date due cariche $+q$ e $-q$:

$$\vec{E}\,(\vec{r}) = \vec{E}_{q_1}\,(\vec{r}) + \vec{E}_{q_2}\,(\vec{r}) \tag{7}$$

(per il campo elettrico sull'asse del dipolo vedere domanda 5 Esempio 1)

3 Calcolare il campo elettrostatico di una distribuzione lineare ed uniforme di carica elettrica mediante il teorema di Gauss.

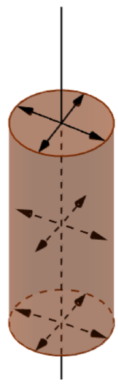
Per distribuzione lineare e uniforme di carica si intende una distribuzione di cariche su un filo nel piano xyz dove vi è una densitá lineare di carica λ costante per tutto il filo. Si noti che :

$$[\lambda] = \left[\frac{Q}{m}\right]$$

Secondo il teorema di Gauss per il campo elettrico, vale quanto segue:

$$\Phi_S\left(\vec{E}\right) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sum Q_{interne}}{\varepsilon_0}$$

Per calcolare il flusso del campo elettrico su tale distribuzione occorre quindi scegliere una opportuna superficie chiusa, per esempio un cilindro di altezza h e raggio r avente il centro delle sue basi sulla distribuzione.



Esempio grafico : scelta della superficie

In tale figura il contributo del campo elettrico al flusso è nullo per le basi del cilindro (dove le linee di campo sono parallele), mentre è massimo per la sua superficie laterale (in quanto ogni suo punto è normale alla linea di campo elettrico). Pertanto si ha che:

$$S = S_{laterale} = 2\pi r h$$

$$\sum Q_{interne} = h\lambda$$

$$\Phi_S \left(\vec{E}\right) = \frac{\sum Q_{interne}}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} = |\vec{E}| 2\pi r h$$

$$\frac{\cancel{h}\lambda}{\varepsilon_0} = |\vec{E}| 2\pi r \cancel{h}$$

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

$\square$

4 Calcolare il campo elettrostatico di una distribuzione piana ed uniforme di carica elettrica mediante il teorema di Gauss.

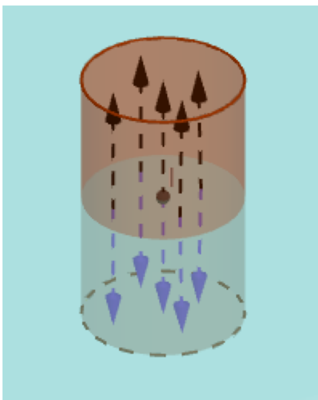
Per distribuzione piana e uniforme di carica si intende una distribuzione di cariche su un piano nel piano xyz dove vi è una densitá piana di carica σ costante per tutto il filo. Si noti che :

$$[\sigma] = \left[\frac{Q}{m^2}\right]$$

Secondo il teorema di Gauss per il campo elettrico, vale quanto segue:

$$\Phi_S\left(\vec{E}\right) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{\sum Q_{interne}}{\varepsilon_0}$$

Per calcolare il flusso del campo elettrico su tale distribuzione occorre quindi scegliere una opportuna superfcie chiusa, per esempio un cilindro di altezza h e raggio r tale che intersechi il perpendicolarmente la distribuzione piana.



Esempio grafico : scelta della superficie

In tale figura il contributo del campo elettrico al flusso è nullo per la superficie laterale del cilindro (dove le linee di campo sono parallele), mentre è massimo per la superficie delle basi (in quanto ogni suo punto è normale alla linea di campo elettrico). Pertanto si ha che:

$$S = 2S_{base} = 2\pi r^2$$

$$\sum Q_{interne} = \sigma S_{base}$$

$$\Phi_S\left(\vec{E}\right) = \frac{\sum Q_{interne}}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} = 2|\vec{E}|S_{base}$$

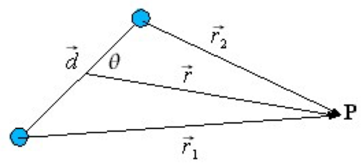
$$\frac{\sigma \cancel{S_{base}}}{\varepsilon_0} = 2|\vec{E}|\cancel{S_{base}}$$

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$\square$

5 Definire cos'è un dipolo elettrico e calcolare il campo elettrico sull'asse del dipolo ed il potenziale che questo produce.

Un **Dipolo elettrico** è un sistema composto da due cariche elettriche $+q$ e $-q$ poste a una distanza d, costante nel tempo.



Esempio grafico : in un dipolo elettrico è interessante calcolare campo elettrico o potenziale di un dipolo in un punto generico P.

Si definisce **momento di dipolo** il seguente valore :

$$\vec{p} = q\vec{d} \tag{8}$$

Esempio 1 : calcolo del campo elettrico lungo l'asse del dipolo.

Per comoditá si considera un dipolo di due cariche q_1 e q_2 situate nei punti A(+a, 0) e B(-a, 0), da cui ne ricaviamo il punto medio nell'origine del sistema di assi cartesiani di riferimento.

Sapendo che il campo elettrico ha la seguente definizione

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{9}$$

e per il **Principio di Sovrapposizione** sappiamo che

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=0}^{n_{cariche}} \vec{E}_i(\vec{r}) \tag{10}$$

Pertanto per il dipolo in questione il **Campo Elettrico** si definisce $\vec{r} = a\hat{i} + d\hat{j}$, dove $d(= 0)$ è la distanza del punto dall'asse del dipolo.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(r_x - a)^2} - \frac{q}{(r_x + a)^2}\right)\hat{i} =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(r_x - a)^2} - \frac{q}{(r_x + a)^2}\right)\hat{i} =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q(r_x+a)^2-q(r_x-a)^2}{(r_x^2-a^2)^2}\right)\hat{i}=$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\left[(r_x+a)^2-(r_x-a)^2\right]}{(r_x^2-a^2)^2}\right)\hat{i}$$

Usando il metodo della **differenza dei quadrati** $[a^2-b^2=(a+b)(a-b)]$:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\left[(2r_x)(2a)\right]}{(r_x^2-a^2)^2}\right)\hat{i}=$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4qar_x}{(r_x^2-a^2)^2}\right)\hat{i}$$

imponendo $2a=d$ (poichè $+a$ e $-a$ rappresentano dove si trovano le cariche sull'asse e la loro distanza è appunto $2a$):

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2qdr_x}{\left[r_x^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^2}\right)\hat{i}$$

in termini del **momento di dipolo** dato da (8):

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2pr_x}{\left[r_x^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^2}\right)\hat{i}$$

Ipotizzando che $r_x >> d$ si ottiene:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2pr_x}{(r_x^2)^2}\hat{i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cancel{r_x}}{r_x^{\cancel{4}3}}\hat{i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r_x^3}\hat{i}$$

□

Esempio 2 : Calcolo del **potenziale elettrico** del dipolo sull'asse del dipolo.
Si ricorda la formula del potenziale elettrico come:

$$V(r_x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Anche qui vale il **Principio di Sovrapposizione**:

$$V(r)=\sum_{k=0}^{n_{cariche}}V_i(r)$$

Si fanno le stesse premesse dell'esempio 1.

$$V(r_x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_x - a} - \frac{q}{r_x + a}\right) =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q(r_x + a) - q(r_x - a)}{r_x^2 - a^2}\right) =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\left[\cancel{r_x} + a - \cancel{r_x} + a\right]}{r_x^2 - a^2}\right) =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2aq}{r_x^2 - a^2}\right) =$$

imponendo $2a = d$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{dq}{r_x^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right) =$$

in termini del **momento di dipolo** dato da (8):

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{r_x^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right)$$

Ipotizzando che $r_x >> d$ si ottiene:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{r_x^2}\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r_x^2}$$

$\square$

6 Dimostrare che la forza di Coulomb è una forza conservativa e discutere brevemente le conseguenze di questo.

Si dice che una forza è conservativa quando:

$$L_{\vec{r}_a \to \vec{r}_b} = U(B) - U(A)$$

Si definisce il lavoro come :

$$L_{\vec{r}_a \to \vec{r}_b} = \int_A^B \vec{F_{\vec{r}_a \to \vec{r}_b}} \cdot \vec{ds}$$

Un'esempio di forza non conservativa è l'attrito. Per quanto riguarda la forza di Coulomb invece si puo' affermare che:

$$L_{\vec{r}_a \to \vec{r}_b} = \int_A^B \vec{F_{\vec{r}_a \to \vec{r}_b}} \cdot \vec{ds} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(r_b - r_a)^2} \hat{u}_{r_a \to r_b} \cdot \vec{ds}$$

Definiamo $\vec{r} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$ e riscriviamo come

$$\int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \cdot \vec{ds} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_A^B \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{dr}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{q_1 q_2}{r} \right]_A^B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_A} - \frac{q_1 q_2}{r_B} \right) = U(r_A) - U(r_B)$$

Come conseguenza di questo si puo' affermare che il **Lavoro** compiuto dalla forza di Coulomb su un percorso chiuso è nullo:

$$L_{A \to B} + L_{B \to A} = 0$$

Si puo' inoltre affermare che il Lavoro compiuto dalla Forza di Coulomb non dipende dal percorso fra A e B. □

7 Definire potenziale, energia potenziale e lavoro del campo elettrico e mostrare le relazioni tra queste grandezze.

Per **Energia Potenziale Elettrica** di un sistema di cariche si intende il lavoro compiuto da tale sistema per potersi spostare da una configurazione all'infinito (dove per convenzione l'energia potenziale è nulla) da una configurazione data. Nel caso di due cariche puntiformi q_1 e q_2, in cui :

$$U_{q_1}(r) = 0$$

poiché è inserita per prima nel sistema

$$U_{q_1,q_2}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

poiché ora è soggetta a una forza fra q_1 e q_2.

Il lavoro necessario a tale forza per muovere le cariche da una configurazione A a infinito è:

$$L_{A\to\infty} = \int_A^\infty \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_A^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{u}_r\cdot\vec{ds} =$$
$$\int_A^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{dr} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^\infty = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - 0\right) =$$
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_A}$$

Per **Potenziale Elettrico** di una carica Q si intende l'energia potenziale U di un sistema composto da Q e una carica di prova q_{test}, cioé come :

$$V(r) = \frac{U}{q_{test}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\cancel{q_{test}}}{r}\frac{1}{\cancel{q_{test}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

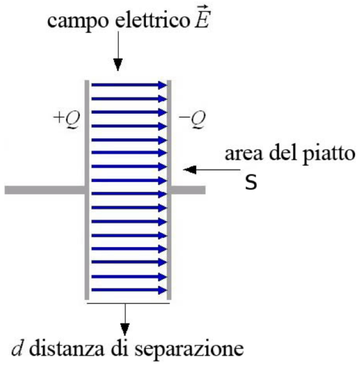
Per **Lavoro** del campo elettrico si intende il lavoro necessario per spostare una carica q immersa in un campo elettrico $\vec{E}$ dovuto a una carica Q da un punto A a un punto B e corrisponde a :

$$L_{r_A\to r_B} = \int_A^B q\vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B q\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot\vec{ds} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\vec{ds} =$$
$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{1}{r^2}\vec{dr} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right) =$$
$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = U(r_A) - U(r_B)$$

□

8 Condensatore piano: calcolare l'andamento del campo elettrico, e del potenziale dentro e fuori il condensatore e la sua capacità.

Il condensatore piano è un sistema costituito da due superfici *piane* di materiale conduttore, di superficie S, posti a una distanza d e in modo da costituire due piani paralleli. Inoltre una superficie è caricata positivamente e l'altra negativamente.



Esempio grafico : come si puo' notare, all'interno di un condensatore piano vi è un campo elettrico uniforme.
Si definisce come **Capacitá** di un condensatore la quantitá di carica immagazzinabile sulle armature per unitá di differenza di potenziale ai capi delle armature.

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

All'esterno del condensatore il campo elettrico è nullo, poiché esso è isolato. $\left(\vec{E} = 0\right)$ Per calcolare il campo elettrico all'interno sfruttiamo il **Teorema di Gauss per il campo elettrico**:
È il caso della distribuzione piana di carica, assumiamo σ come densita piana di carica:

$$[\sigma] = \left[\frac{Q}{L^2}\right]$$

Intersechiamo un cilindro di raggio r e lunghezza l con un piano del condensatore, in modo tale che esso abbia entrambe le basi parallele al piano.

Grazie a cio' possiamo affermare che il contributo al flusso delle basi è nullo, mentre è massimizzato sulla superficie laterale(dove le linee di campo sono perpendicolari).

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\sum Q_{interne}}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}$$

Formalizziamo la affermazione precedente:

$$S = 2S_{base} = \pi r^2$$

inoltre si ha che

$$\sum Q_{interne} = \sigma S_{base}$$

e calcoliamo il campo elettrico:

$$\frac{\sum Q_{interne}}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}$$

$$\frac{\sigma S_{base}}{\varepsilon_0} = \oint_S E$$

$$\frac{\sigma \cancel{S}}{\varepsilon_0} = 2E\cancel{S}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Si noti che il capo elettrico in realtá è per una sola delle armature, pertanto

$$E_{totale} = 2E = \cancel{2}\frac{\sigma}{\cancel{2}\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Per il calcolo della Capacitá bisogna calcolare la differenza di potenziale ΔV come :

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

Dove d è la distanza fra le armature.
Pertanto:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = Q\frac{\varepsilon_0}{\sigma d} = \cancel{\sigma} S\frac{\varepsilon_0}{\cancel{\sigma} d} = \frac{S\varepsilon_0}{d}$$

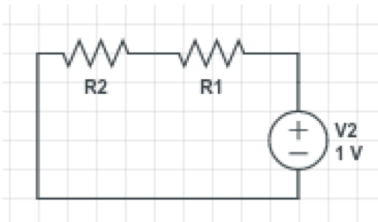
□

9 Spiegazione del comportamento di resistori in serie ed in parallelo. Determinazione della resistenza equivalente.

Si definisce **Resistenza Equivalente** di una rete di resistori la resistenza di un singolo resistore che, sottoposto alla stessa differenza di potenziale ΔV a cui è soggetta la rete, assorbe la stessa corrente elettrica.

Nel caso di resistori in serie avviene che:

$$\begin{cases} V_A - V_B = iR_1 \\ V_B - V_C = iR_2 \\ V_A - V_C = iR_{eq} \\ V_A - V_B + V_B - V_C = V_A - V_C \\ \\ \text{Passaggi Algebrici:} \\ \cancel{i}R_1 + \cancel{i}R_2 = \cancel{i}R_{eq} \\ R_1 + R_2 = R_{eq} \end{cases}$$

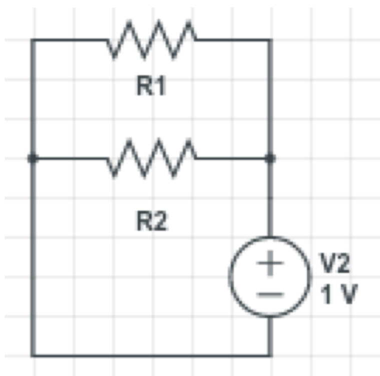


Pertanto la R_{eq} vale $R_1 + R_2$.
Nel caso di n resistori vale la seguente formula:

$$R_{eq} = \sum R_i \tag{11}$$

Dove tutte le R_i sono in serie sullo stesso ramo.

$$\begin{cases} V_A - V_B = i_1 R_1 \\ V_A - V_B = i_2 R_2 \\ V_A - V_B = iR_{eq} \\ i = i_1 + i_2 \\ \\ \text{Passaggi Algebrici:} \\ R_{eq} = \frac{V_A - V_B}{i_1 + i_2} = \\ = \frac{V_A - V_B}{\frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2}} = \\ = \frac{\cancel{V_A - V_B}}{\frac{R_1 \cancel{V_A - V_B} + R_2 \cancel{V_A - V_B}}{R_1 \cdot R_2}} = \\ = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \end{cases}$$



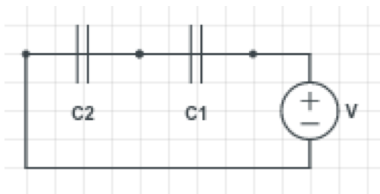
Pertanto la R_{eq} vale $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$. □

10 Spiegazione del comportamento di condensatori in serie ed in parallelo. Determinazione della capacitá equivalente.

Si definisce **Capacitá Equivalente** di una rete di condensatori la capacitá di un singolo condensatore che, sottoposto alla stessa differenza di potenziale ΔV a cui è soggetta la rete, assorbe la stessa corrente elettrica.

Nel caso di condensatori in serie avviene che, essendoci su tutto il ramo la stessa quantitá di carica :

$$\begin{cases} V_A - V_B = \frac{1}{C_1}Q_1 \\ V_B - V_C = \frac{1}{C_2}Q_2 \\ V_A - V_C = \frac{1}{C_{eq}}Q_{eq} \\ V_A - V_B + V_B - V_C = V_A - V_C \\ Q_1 = Q_2 = Q_{eq} = Q \\ \\ \text{Passaggi Algebrici:} \\ \frac{1}{C_1}\cancel{Q} + \frac{1}{C_2}\cancel{Q} = \frac{1}{C_{eq}}\cancel{Q} \\ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}} \end{cases}$$

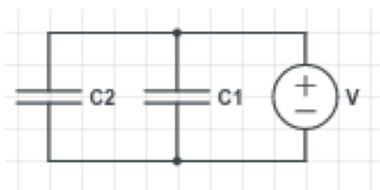


Pertanto la C_{eq} vale $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.
Nel caso di n condensatori vale la seguente formula:

$$C_{eq} = \sum \frac{1}{C_i} \tag{12}$$

Dove tutte le C_i sono in serie sullo stesso ramo.

$$\begin{cases} V_A - V_B = \frac{Q_1}{C_1} \rightarrow C_1 = \frac{Q_1}{V_A - V_B} \\ V_A - V_B = \frac{Q_2}{C_2} \rightarrow C_2 = \frac{Q_2}{V_A - V_B} \\ V_A - V_B = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}} \\ Q_{eq} = Q_1 + Q_2 \\ \\ \text{Passaggi Algebrici:} \\ V_A - V_B = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_{eq}} = \\ \frac{C_1(V_A - V_B) + C_2(V_A - V_B)}{C_{eq}} = \\ \frac{(V_A - V_B)(C_1 + C_2)}{C_{eq}} \rightarrow \cancel{(V_A - V_B)} = \frac{\cancel{(V_A - V_B)}(C_1 + C_2)}{C_{eq}} \\ C_{eq} = C_1 + C_2 \end{cases}$$



Pertanto la C_{eq} vale $C_1 + C_2$.
Nel caso di n resistori vale la seguente formula:

$$R_{eq} = \sum C_i \tag{13}$$

Dove tutte le C_i sono in parallelo sullo stesso ramo.
[**Opzionale, dimostrare (11), (12), (13) e (14) per induzione su n**]

$\square$

11 Circuiti RC: carica e scarica del condensatore. Comportamento alla stazionarietà.

Per **Processo di carica** del condensatore si intende l'accumulo di carica sulle armature dello stesso quando è applicata una differenza di potenziale ΔV.
Allo stesso modo si definisce **Processo di scarica** del condensatore il rilascio delle cariche precedentemente accumulate, facendo generare allo stesso una differenza di potenziale.
Fase di carica :
Vale la seguente legge:

$$Q(t) = Q_{MAX}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$Q(t) = C\Delta V\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$t < 0$ Condensatore scarico, $\Delta V = 0$

$t \to 0$ Condensatore in carica, $\Delta V = \varepsilon$ carica il condensatore :

$$Q(t) = Q_{MAX}\left(1 - e^{-\frac{0}{RC}}\right) = Q\left(1 - 1\right) = 0$$

$t \to \infty$ Condensatore carico a regime, $\Delta V(t)$ carica il condensatore:

$$Q(t) = Q_{MAX}\left(1 - e^{-\frac{\infty}{RC}}\right) = Q_{MAX}\left(1 - e^{-\infty}\right) = Q_{MAX}\left(1 - 0\right) = Q_{MAX} = C\varepsilon$$

Fase di scarica : Vale la seguente legge :

$$Q(t) = C\Delta V\left(e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$t < 0$ Il condensatore è carico. $\Delta V = \varepsilon$, $Q(t) = Q_{MAX} = C\varepsilon$

$t \to 0$ Il condensatore inizia a scaricarsi.
$\Delta V = 0$, $Q(t) = Q_{MAX}\left(e^{-\frac{0}{RC}}\right) = Q_{MAX}\left(e^{0}\right) = C\varepsilon$
Si comporta come un **generatore di corrente** :

$$\varepsilon_C = \frac{Q_C}{C}$$

$t \to \infty$ Il condensatore è scarico.
$\Delta V = 0$, $Q(t) = Q_{MAX}\left(e^{-\frac{\infty}{RC}}\right) = Q_{MAX}\left(e^{-\infty}\right) = Q_{MAX} \cdot 0 = 0$

□

12 Leggi di Ohm microscopica e derivazione della legge macroscopica a partire da quella microscopica.

Si definisce **Intensitá di corrente** la quantitá di carica che passa in un conduttore per unitá di tempo.

$$[I] = \left[\frac{Q}{t}\right]$$

Per dare una definizione microscopica della legge di Ohm occorre considerare gli elettroni che si muovono all'interno di conduttore di sezione S. Applicando ai suoi estremi una differenza di potenziale si crea un campo elettrico, che fa muovere gli elettroni di una velocitá v_d (velocitá di deriva) in modo collettivo e ordinato, oltre che del canonico moto casuale dovuto alla instabilitá dell'elettrone stesso.
Ora la nuova definizione di intensitá di corrente è la seguente:

$$I = nev_dS$$

Dove:

- n Il numero di elettroni che passano per unita di volume
- e La carica dell'elettrone
- v_d La velocitá di deriva
- S La sezione del conduttore

Ora si introduce la grandezza *conduttivitá elettrica* indicata con σ e il vettore $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ "densitá di corrente".

$$\sigma = nev_d$$
$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

La densitá di corrente rappresenta la "facilitá" con cui gli elettroni si muovono all'interno del campo elettrico nel conduttore. Consideriamo un tratto di lunghezza l del conduttore: allora si puo' affermare che (assumendo il campo elettrico ORTOGONALE alla sezione del conduttore):

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int \sigma E \cdot d\vec{S} = \sigma ES$$

Considerando il campo elettrico uniforme, abbiamo che $E = \frac{V}{l}$, pertanto:

$$I = \sigma \frac{V}{l} S \to V = \frac{l}{\sigma S} \to V = RI$$

$\square$

13 Descrivere le equazioni del moto di una carica elettrica in un campo magnetico uniforme.

Una carica elettrica immersa in un campo magnetico è soggetta a una forza (chiamata **Forza di Lorentz**) cosi definita:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Dove:

q La carica elettrica.

$\vec{v}$ La velocitá del moto della carica.

$\vec{B}$ Il campo magnetico in cui la carica è immersa.

A seconda dei casi il contributo è differente :

caso $\vec{v} \parallel \vec{B}$ Il prodotto vettoriale è nullo, pertanto la particella non è soggetta a forza magnetica.

caso $\vec{v} \perp \vec{B}$ Il prodotto vettoriale è massimizzato e di direzione perpendicolare al piano contenente $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Per il verso si usa la regola della mano destra. Nel caso B sia costante si ha un moto su traiettoria circolare.

caso : moto a elica Si scompone il vettore $\vec{v}$ in 2 componenti perpendicolari fra loro : $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ dove:

- $\vec{v}_{\parallel}$ non da alcun contributo alla forza.
- $\vec{v}_{\perp}$ produce una forza ortogonale al piano contenente $\vec{v}$ e $\vec{B}$.

La combinazione dei due moti genera un moto elicoidale avente asse coincidente con $\hat{u}_B$

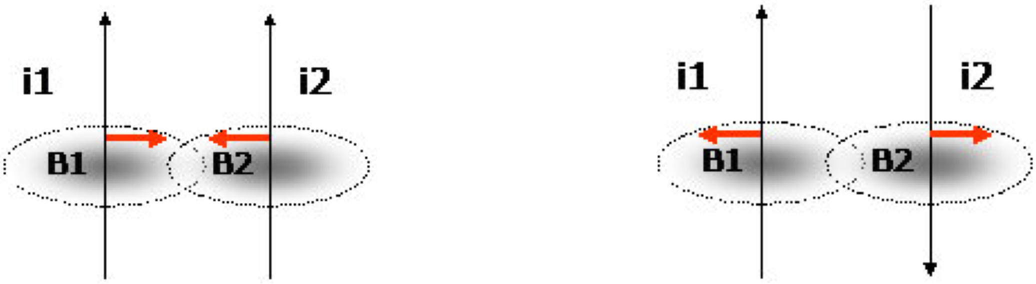
□

14 Determinare la forza tra due fili paralleli percorsi da correnti stazionarie e discutere la relazione con la terza legge di Newton.

Un filo rettilineo percorso da una corrente I produce a una distanza r una campo magnetico, il cui modulo è dato dalla seguente formula:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \tag{14}$$

Le cui linee di forza sono circonferenze aventi centro **sull'asse del filo stesso** (Il verso è determinato dal **verso della corrente**, attraverso la regola della mano destra).
Se si fanno interagire due fili paralleli, accade che vi è una mutua interazione:



Sul filo 1 vi è una forza dovuta al campo B_2 mentre sul filo 2 vi è una forza dovuta a B_1. Si ha pertanto che:

$$F_{1\to2} = B_2 I_1 d = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d} I_1 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l$$

$$F_{2\to1} = B_1 I_2 d = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d} I_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l$$

Dove d è la distanza fra i due fili e l è la lunghezza del tratto di filo considerato. La forza è attrattiva se i versi delle correnti sono **concordi**, mentre è repulsiva se sono **discordi**. Si noti che, proprio come in base alla Terza Legge di Newton, si ha che :

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$

□

15 Enunciare la legge di Biôt-Savàrt ed usarla per il calcolo del campo magnetico prodotto da una spira circolare percorsa da corrente stazionaria sull'asse della spira.

Secondo la **Legge di Biôt-Savàrt** vale che :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Dove :

- i Intensitá di corrente che scorre nella **spira circolare**.
- $d\vec{l}$ Tratto di lunghezza **infinitesima** del filo della spira.
- $\vec{r}$ Raggio-vettore che individua il punto P nel quale si vuole misurare il campo $d\vec{B}$.

INCOMPLETA!!!!

16 Enunciare la legge di Ampére ed usarla per il calcolo del campo magnetico all'interno di un solenoide rettilineo percorso da corrente stazionaria.

Secondo la **Legge di Ampére**:

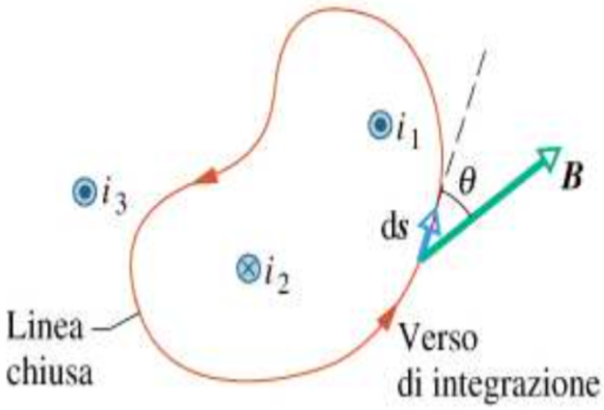
$$\Gamma_B = \mu_0 I_{conc}$$

Dove :

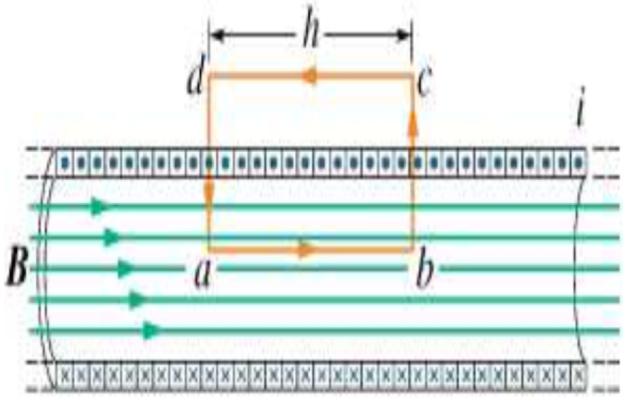
Γ_B è la circuitazione del campo magnetico B sulla linea chiusa l, ovvero :

$$\Gamma_B = \oint_l \vec{B} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

I_{conc} è la somma delle correnti concatenate al percorso **chiuso** su cui si esegue la circuitazione.



Un esempio di applicazione consiste nel considerare un solenoide lungo l avente n spire per unitá di lunghezza.
Esso è percorso da un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme, dove le sue linee sono orientate parallelamente all'asse. Scegliamo la circuitazione come un quadrato di lato h lungo i punti a, b, c, d come da immagine.



Abbiamo quindi che:

$$\Gamma_B = \oint_{abcd} \vec{B} = \oint_{ab} \vec{B} + \oint_{bc} \vec{B} + \oint_{cd} \vec{B} + \oint_{da} \vec{B}$$

Da cui assumiamo che :

$\oint_{cd} \vec{B} = 0$ Poiché cd non è all'interno del solenoide.

$\oint_{bc} \vec{B} = \oint_{da} \vec{B} = 0$ Poiché $\vec{bc} \perp \vec{B} \wedge da \perp \vec{B} \wedge \vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Longrightarrow \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$

$\oint_{ab} \vec{B}$ Siccome $\vec{ab} \parallel \vec{B}$ vale che:

$$\oint_{ab} \vec{B} = \int \vec{B} \cdot d\vec{ab} = Bh$$

Sfruttando questo eguagliamo:

$$\Gamma_B = \oint_{abcd} \vec{B} = \oint_{ab} \vec{B} = Bh$$

$$Bh = \mu_0 I_{conc}$$

Da cui si conclude che :

$$B = \mu_0 \frac{I_{conc}}{h} = \mu_0 \frac{n\cancel{h}i}{\cancel{h}} = \mu_0 ni$$

Dove :

n è il numero di spire per unitá di lunghezza

i è la corrente che scorre nel solenoide

Si noti che : $I_{conc} = nhi$. $\square$

17 Enunciare la legge di Faraday-Lenz e discutere la relazione con l'autoinduttanza.

Secondo la **Legge di Faraday-Lenz** :

$$\varepsilon_{indotta} = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} \tag{15}$$

Ovvero a una **variazione del flusso** del campo magnetico corrisponde una forza elettromotrice autoindotta che si oppone a tale variazione. (il flusso del campo magnetico puo' variare, ad esempio, per una **variazione della intensita di corrente** i).
Come esempio di applicazione prendiamo un solenoide di lunghezza l:
Facciamo variare i e ci accorgiamo della ε autoindotta, introducendo di conseguenza una $i_{indotta}$, di verso opposto a quello della corrente nel solenoide (fenomeno conosciuto come *autoinduzione*).
Sappiamo che:

$$\Phi_S(\vec{B}) = Li(t) = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}$$

Dove:

- S È la superficie della **sezione** della spira.
- $\vec{B}$ È il **campo magnetico**.
- L È il **Coefficiente di Induttanza** (si misura in Henry H)
- $i(t)$ È l'**intensitá di corrente** nel tempo.

Pertanto (assumendo che la induttanza L non vari nel tempo):

$$\Phi_S(\vec{B}) = Li(t) \rightarrow \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

$$\varepsilon_{indotta} = -L\frac{di}{dt}$$

Sfruttando la **legge di Ampere**, siccome siamo in un solenoide :

$$i_{conc} = nli_{sol}$$

Dove :

i_{conc} Corrente concatenata alla circuitazione del solenoide.

n Numero di spire (avvolgimenti) *per unitá di lunghezza*.

l Lunghezza del solenoide.

i_{sol} Corrente che scorre nel solenoide.

Pertanto:

$$\varepsilon_{indotta} = -L\frac{di_{conc}}{dt} = -nlL\frac{di_{sol}}{dt}$$

nel caso di un avvolgimento $n = 1$ quindi:

$$\varepsilon_{indotta} = -lL\frac{di_{sol}}{dt}$$

$\square$