Analisi Matematica 1 - Primo Appello
9 Gennaio 2023

Nome e cognome ______________________ Numero di matricola ______________

1. Determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta > 0$ il seguente integrale di Riemann improprio esiste

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log(x^\alpha + 1) - \log(x^\beta - 1)}{\arctan\left(\frac{x}{x^3+1}\right)}\, dx$$

a) $\alpha = \beta, \beta > 3$ b) $\alpha > \beta, \beta > 3$ c) $\alpha < \beta, \alpha > 3$ d) $\alpha = \beta, \beta < 3$

2. Determinare per quale valore del parametro $\alpha < 0$ la seguente funzione è continua in $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(\alpha x)}{x^2}, & x < 0 \\ e^{1-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

a) $\sqrt{e}$ b) $-\sqrt{e}$ c) $\sqrt{2e}$ d) $-\sqrt{2e}$

3. Determinare l'estremo superiore dell'insieme

$$S = \bigcup_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$$

a) $\sup(S) = 3$ b) $\sup(S) = 2$ c) $\sup(S) = 0$ d) $\sup(S) = -1$

4. L'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni in $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} 2z\overline{z} - \operatorname{Im}(z)^2 + i(z - \overline{z}) - 2(z + \overline{z}) + 6 = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = 3 \end{cases}$$

è costituito da

a) l'insieme vuoto b) due punti c) una retta d) un punto

5. Se scriviamo

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \ell$$

allora

a) $\exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - \ell| = 0\ \forall x$ t.c. $|x| < \delta$ b) $\forall \delta > 0\ \exists x, |x| < \delta$ t.c. $|f(x) - \ell| > 1$
c) $\forall \delta > 0\ \exists x, |x| < \delta$ t.c. $|f(x) - \ell| = 0$ d) $\exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - \ell| < 1\ \forall x$ t.c. $|x| < \delta$

6. Trovare la soluzione $u(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2u'' + 3u' + 4u = 4t^2 + 6t \\ u(0) = -1,\ u'(0) = 1 \end{cases} \qquad \Big(\text{La soluzione particolare ha la forma } at^2 + bt + c\Big)$$

a) $u(t) = -\frac{4}{\sqrt{23}} e^{-3/4t} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4} t\right) + t^2 - 1$ b) $u(t) = -\frac{4}{\sqrt{23}} e^{-3/4t} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4} t\right) + t^2 - 1$
c) $u(t) = \frac{4}{\sqrt{23}} e^{-3/4t} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4} t\right) + t^2 - 1$ d) $u(t) = \frac{4}{\sqrt{23}} e^{-3/4t} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4} t\right) + t^2 - 1$

7. Determinare lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di $f(x) = \arctan(\cos(x))$ fino al quarto ordine

a) $\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ b) $\frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
c) $\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ d) $\frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

8. Determinare il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^{-\log(2)} \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

a) $\log\left(\frac{4}{3}\right)$ b) $\log\left(\frac{3}{2}\right)$ c) $\log\left(\frac{3}{4}\right)$ d) $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

9. Sapendo che $u(0) < -1$, determinare una soluzione di

$$u' = \frac{\sinh(t)}{u+1}$$

a) $u(t) = -1 - \sqrt{1+2\cosh(t)+c}$ b) $u(t) = 1 + \sqrt{1+2\cosh(t)+c}$
c) $u(t) = -1 + \sqrt{1+2\cosh(t)+c}$ d) $u(t) = 1 - \sqrt{1+2\cosh(t)+c}$

10. Determinare il comportamento della soluzione $u(t)$ del seguente problema di Cauchy in un intorno di $x = 0$

$$\begin{cases} \log(e+t)u'(t) = \sinh(u) - \arctan(\sqrt{t+1}) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

a) crescente e concava b) crescente e convessa
c) decrescente e concava d) decrescente e convessa

11. Data la funzione integrale $F\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1}{1+\cos(t)}\,dt \qquad \left(\text{Ricorda: } \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}\right)$$

allora

a) F ammette un massimo globale in $x = -1$ b) F ammette un minimo globale in $x = -1$
c) F non ammette massimo e minimo globali d) F è costante

12. Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log|x|} \int_x^{\pi/2} \frac{1}{\sin(t)}\,dt$$

a) 0 b) $-\infty$ c) -1 d) 1

13. Calcolare il limite della successione $(s_n)_n$,

$$s_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5n+1}+\sqrt{n}}$$

a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{5}-1}{6}$ c) $\frac{\sqrt{5}+1}{6}$ d) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

14. $P(x) = -x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ è un polinomio a coefficienti reali tale che $P(0) = 0$ e avente come radice $z = 2e^{i\pi/8}$. Allora a_2 è uguale a

a) $-2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ b) $-4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ c) $2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ d) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

15. Data una funzione $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile su $(-1,1)$ tale che $f(-1) = f(1)$, allora

a) esiste $\xi \in (-1,1)$ tale che $f'(\xi) = 2$ b) esiste $\xi \in (-1,1)$ tale che $f'(\xi) = -2$
c) esiste $\xi \in (-1,1)$ tale che $f'(\xi) = 0$ d) esiste $\xi \in (-1,1)$ tale che $f'(\xi) = 1$