Esame di Analisi I, 07/02/2022

Fila 1

NOME...................................... COGNOME....................................
MATRICOLA..

1. Dato l'insieme $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}(e^{-n}, 1+n^{-e})$, si determini l'estremo superiore, quello inferiore ed eventuali minimi e massimi.

   (a) $\inf_A = 1/e$, $\sup_A = 2$.
   (b) $\inf_A = 0$, $\sup_A = 2$.
   (c) $\inf_A = 0$, $\sup_A = 1$.
   (d) $\inf_A = 1/e$, $\sup_A = 1$.

2. Date $f(x) = \sqrt{\arcsin(x^2-1)}$, $g(x) = \ln(\arcsin(1-x^2))$, dire quale delle seguenti è falsa.

   (a) f ha dominio $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$.
   (b) g ha dominio $(-1, 1)$.
   (c) L'intersezione dei domini di f e g è vuota.
   (d) f ha immagine in $[0, \sqrt{\pi/2}]$.

3. L'equazione $\Im(i\bar{z})\Re(iz) = 1$ ha

   (a) infinite soluzioni reali.
   (b) infinite soluzioni immaginarie.
   (c) infinite soluzioni a due a due coniugate.
   (d) nessuna delle precedenti.

4. Quale delle seguenti affermazioni equivale a $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$?

   (a) $\forall M > 0\ \exists K > 0 : x > K \Rightarrow f(x) < -M$
   (b) $\forall M > 0\ \exists K > 0 : x < K \Rightarrow f(x) < -M$
   (c) $\forall M > 0\ \exists K > 0 : x < K \Rightarrow f(x) < M$
   (d) $\forall M > 0\ \exists K > 0 : x > K \Rightarrow f(x) < M$

5. Si scelga un valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt[5]{1+10x}-1}{\sin(3x)}\right)^{\alpha} & x > 0\ , \\ \left(\frac{4}{9}\right)^{x+\alpha^2} & x \leq 0\ ; \end{cases}$$

   è continua in $x = 0$.

   (a) $\alpha = 1$.
   (b) $\alpha = \frac{1}{2}$.
   (c) $\alpha = \frac{1}{3}$.
   (d) $\alpha = \frac{1}{4}$.

6. Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^{\arcsin x}$ nel punto $x = \frac{1}{2}$.

   (a) $y = e^{\pi/6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3} - 1\right)$
   (b) $y = e^{\pi/6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}\right)$
   (c) $y = e^{\pi/6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)$
   (d) $y = e^{\pi/6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

7. Calcolare lo sviluppo di Taylor in $x = 0$ di $f(x) = \cos x e^{\sinh x}$ fino all'ordine 4.

   (a) $T_0^4 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.
   (b) $T_0^4 f(x) = 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.
   (c) $T_0^4 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$.
   (d) $T_0^4 f(x) = 1 + x + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$.

8. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(\arctan(\ln(x)) - f(0)}{x-1}\ .$$

   (a) $f'(0)$
   (b) $\frac{1}{2}f'(0)$
   (c) $-f'(0)$
   (d) $2f'(0)$

9. Si calcoli il seguente integrale definito.

$$I = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{4-\ln^2 x}} dx \ .$$

(a) $\frac{\pi}{3}$. (b) $\frac{\pi}{6}$. (c) $\frac{\pi}{2}$. (d) $\frac{\pi}{4}$.

10. Si determini, per quale valore del parametro reale α, il seguente integrale improprio è divergente

$$J = \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{(((1+x)^2+x)^3+x)^4} \ .$$

(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = 10$ (c) $\alpha = 20$ (d) $\alpha = 30$

11. Si trovi la soluzione $x(t)$ al seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 3x(t) = 0 \\ x(0) = 1, x'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

(a) $x(t) = e^{-t}(\cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t))$ (b) $x(t) = e^{-t}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}t) + \sin(\sqrt{2}t))$

(c) $x(t) = e^{-t}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}t) - \sin(\sqrt{2}t))$ (d) $x(t) = e^{-t}(\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t))$

12. Si calcoli in seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (3\ln(e+t^4) - 3)\, dt}{\sin^2 x \ln(x^3+1)}$$

(a) $\frac{3}{5e}$ (b) $\frac{1}{5e}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{1}{5}$

13. Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^{\arccos x} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}} dt \ ,$$

determinare quale delle seguenti affermazioni è vera.

(a) F ha un massimo globale in $x = -1$. (b) F ha un minimo locale in $x = 0$.

(c) F non ammette minimio massimi locali. (d) Nessuna delle precedenti.

14. Data la soluzione $u(t)$ al problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt{3}\tan\left(\arccos(\ln(t))\right) u(t) \\ u(\sqrt{e}) = 1 \ ; \end{cases}$$

si dica quale delle seguenti affermazioni descrive il comportamento della soluzione $u(t)$ nell'intorno di $t = \sqrt{e}$.

(a) u è crescente ed è concava verso il basso (b) u è crescente ed è concava verso l'alto

(c) u è decrescente ed è concava verso il basso (d) u è decrescente ed è concava verso l'alto

15. Data la successione definita da

$$a_n = \int_0^\pi e^{-nt}\sin(n^2 t) dt \ ,$$

si indichi per quale valore di β fra quelli indicati, $\lim_{n\to\infty} n^\beta a_n = 1$.

(a) $\beta = 0$ (b) $\beta = 1$ (c) $\beta = 2$ (d) $\beta = 3$