Analisi Matematica 1 - Seconda Prova Intermedia
21 Dicembre 2022

Nome e cognome ____________________ Numero di matricola ______________

1. Calcolare il valore di

$$\int_1^{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$$

a) $-\sqrt{3}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log(2)$ b) $\sqrt{3}\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\log(2)$ c) $\sqrt{3}\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log(2)$ d) $-\sqrt{3}\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log(2)$

2. Il lato maggiore del rettangolo inscritto in una circonferenza di raggio r di area massima misura

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ b) $\sqrt{2}r$ c) $\frac{r}{2}$ d) r

3. Data la funzione $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua in $[-1,1]$, derivabile in $(-1,1)$ e tale che $f(-1) = \pi/2$, $f(1) = -\pi/2$, allora

a) esiste $\xi \in (-1,1)$ con $f'(\xi) = \frac{\pi}{2}$ b) esiste $\xi \in (-1,1)$ con $f'(\xi) = -\frac{2}{\pi}$
c) esiste $\xi \in (-1,1)$ con $f'(\xi) = \frac{2}{\pi}$ d) esiste $\xi \in (-1,1)$ con $f'(\xi) = -\frac{\pi}{2}$

4. Determinare il polinomio di Taylor di grado due e di centro $x_0 = 1$ della funzione

$$F(x) = \int_{2x}^{2x^2} \cos(2\pi t)\, dt$$

a) $2(x-1)+2(x-1)^2$ b) $2(x-1)+4(x-1)^2$ c) $(x-1)-2(x-1)^2$ d) $2(x-1)$

5. Determinare per quale n vale che

$$\int_0^{\pi/2} \sin(nt)\cos(t)\, dt = \frac{1}{10}$$

a) 9 b) 7 c) 10 d) 6

6. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_1^2 \frac{e^{tx^2} - \cos(tx)}{\sqrt{t^2+x}}\, dt$$

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{7}{4}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{2}$

7. Determinare per quali valori del parametro $\alpha > 0$ il seguente integrale di Riemann è improprio ed esiste.

$$\int_0^2 \frac{\sin(3\sqrt{x})}{x^\alpha(3-x^\alpha)}\, dx$$

a) $\alpha \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ b) $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ c) $\alpha \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ d) $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

8. Detta $u(t)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy, calcolare $u\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)$.

$$\begin{cases} u'(t) = t^2 u(t)^2 - 4t^2 \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

a) $\frac{5-e}{5+e}$ b) $\frac{1}{2}\frac{5-e}{5+e}$ c) $2\frac{5+e}{5-e}$ d) $2\frac{5}{e}$

9. Trovare una soluzione della seguente equazione differenziale in $(-1, 1)$.

$$u'(t) = \frac{2}{(t^2-1)}u(t) + \frac{4}{(1-t)^2}$$

a) $\frac{t-1}{t+1} + \frac{t+1}{1-t}$ b) $\frac{t-1}{t+1} - \frac{t+1}{1-t}$ c) $\frac{t-1}{t+1} + \frac{t+1}{t-1}$ d) 0

10. Determinare il comportamento della soluzione del seguente problema di Cauchy in un intorno di 0.

$$\begin{cases} \cos(t^2+1)u'(t) = \sin(u(t)) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

a) u è crescente e concava b) u è decrescente e concava
c) u è crescente e convessa d) u è decrescente e convessa

11. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) = -\pi^2 u(t) \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = -1 \end{cases}$$

a) $u(t) = \cos(\pi t) - \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)$ b) $u(t) = \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)$
c) $u(t) = \frac{1}{\pi}\cos(\pi t) - \sin(\pi t)$ d) $u(t) = \frac{1}{\pi}\cos(\pi t) + \sin(\pi t)$

12. Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua,

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\int_9^{x^2} f(x)\,dx =$$

a) $f(9)$ b) $6f(9)$ c) $+\infty$ d) 0

13. Sia $F\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{\arccos(x)} \sin^4(t)\,dt \qquad \left(\text{Ricorda : } \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}\right)$$

a) F ammette un massimo globale in 1 b) F non ammette minimo globale
c) F ammette un massimo globale in -1 d) F è costante

14. Calcolare, se esiste,

$$\int_{+\infty}^{1} \frac{1}{\arctan(t)}\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

a) $\log\left(\frac{\pi}{2}\right)$ b) $\log(2)$ c) non esiste d) $-\log(2)$

15. Determinare una primitiva $F(x)$ della seguente funzione tale che $F(0) = 1$

$$f(x) = \cos^2(x)$$

a) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)$ b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) - 1$ c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + 1$ d) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cos(2x) + 1$