Analisi Matematica 1 - Prima Prova Intermedia
3 Novembre 2022

Nome e cognome ______________________ Numero di matricola ________________

1. Dato il sistema di equazioni in $\mathbb{C}$
$$\begin{cases} |z-3+i| \leq 1 \\ -3i(z-\overline{z})+2(z+\overline{z})-6\dfrac{z\overline{z}}{|z|^2} \geq 0 \end{cases}$$
l'insieme delle sue soluzioni è

   a) un semipiano b) un semicerchio c) l'insieme vuoto d) un punto

2. Si consideri l'insieme $S = \left\{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0,\ \log(x^2) < \sqrt{3}\right\}$; allora

   a) $\inf S = 0$, $\sup S = e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ b) $\min S = -e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$, $\sup S = 0$

   c) $\inf S = e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$, $\sup S = +\infty$ d) $\inf S = -\infty$, $\sup S = -e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$

3. Determinare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ che rende la seguente funzione continua in 0.
$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^{-\alpha}) - \alpha, & x > 0 \\ \arccos(1+x), & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

   a) $-\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$

4. Determinare l'estremo superiore di
$$\left\{\left(1+(-1)^n\frac{1}{3n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right),\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$$

   a) $\frac{7}{6}$ b) -1 c) $-\frac{4}{3}$ d) 1

5. Determinare l'insieme dei $\beta \in \mathbb{R}$ tali che
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\cos(\log(1+x^3))} - 1}{\arctan(x^\beta)} = 0$$

   a) $\{6 > \beta \geq 3\}$ b) $\{\beta > 3\}$ c) $\{\beta < 6\}$ d) $\{0 \leq \beta < 3\}$

6. Dato il numero complesso $z = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^3$,

   a) $\arg(z) = -\pi$ b) $\arg(z) = 0$ c) $|z| = \frac{1}{\sqrt{8}}$ d) $|z| = \sqrt{8}$

7. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\log\left(\frac{x^2\sin(x)}{2} + e^x\right)$$

   a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) 1

8. Data la funzione $f(x) = \sqrt{1-\log(x)}$, determinare la retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ nel punto $(\sqrt{1-\log(2)}, 2)$.

   a) $y = -\frac{1}{4\sqrt{1-\log(2)}}x + \frac{3-2\log(2)}{2\sqrt{1-\log(2)}}$ b) $y = -2\sqrt{1-\log(2)}x + 3 - 2\log(2)$

   c) $y = -\frac{1}{2\sqrt{1-\log(2)}}x + \frac{3-2}{2\sqrt{1-\log(2)}}$ d) $y = -4\sqrt{1-\log(2)}x + 2(3-2\log(2))$

9. Determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[x]{x} + \frac{\sqrt[x]{x}}{x} \right)^x + \alpha x + \beta = 0$$

   a) $\alpha = -e$, $\beta = 0$ b) $\alpha = -e$, $\beta = \frac{e}{2}$ c) $\alpha = e/2$, $\beta = e$ d) $\alpha = e/2$, $\beta = 0$

10. Data $f(x) = \sqrt[6]{1+\log(\sin(x))}$, calcolare $f^{(4)}(\pi/2)$.

   a) $-\frac{4}{3}$ b) $-\frac{1}{32}$ c) $-\frac{3}{4}$ d) $-\frac{1}{18}$

11. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(5x)\right)$$

   a) Diverge a $+\infty$ b) $\frac{1}{5}$ c) 0 d) $-\frac{1}{5}$

12. Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 = e$, calcolare

$$\lim_{t\to1} \frac{f(e^t) - f(e)}{t-1}$$

   a) $ef'(e)$ b) $f'(e^1)$ c) $\frac{1}{e}f'(1)$ d) $f'(\log(e))$

13. Data la successione $(s_n)_n$ di seguito descritta calcolarne, se esiste, il limite.

$$s_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+5n}}$$

   a) 0 b) 5 c) Diverge a $+\infty$ d) 1

14. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado 4 avente radice $z = \sqrt{5}e^{-i\pi/7}$ e tale che $P(0) = P'(0) = 0$ e il coefficiente del termine di quarto grado a_4 sia uguale a 1. Allora il coefficiente del termine di grado 3 è

   a) $-2\sqrt{5}\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ b) 5 c) 0 d) $2\sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

15. Data $f(x) = \exp(\cos(\arcsin(x)) - 1)$, determinarne il polinomio di Taylor centrato in 0 fino al sesto ordine.

   a) $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$ b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + o(x^6)$

   c) $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{48} + o(x^6)$ d) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{48} + o(x^6)$