Esame di Analisi I, 07/02/2022

Fila 2

NOME...................................... COGNOME...................................
MATRICOLA...

1. Dato l'insieme $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}(2^{-n} - 2, 2 + 3^n)$, si determini l'estremo superiore, quello inferiore ed eventuali minimi e massimi.

   (a) $\inf_A = -3/2$, $\sup_A = 5$. (b) $\inf_A = -2$, $\sup_A = \infty$.

   (c) $\inf_A = -3/2$, $\sup_A = \infty$. (d) $\inf_A = -2$, $\sup_A = 5$.

2. L'equazione $\mathbf{Re}(iz\bar{z} + z + \bar{z} + 1/z) = 0$ ha

   (a) infinite soluzioni reali. (b) infinite soluzioni immaginarie.

   (c) nessuna soluzione. (d) finite soluzioni reali.

3. Dati due numeri complessi z_1, z_2, che rappresentati sul piano complesso sono simmetrici rispetto all'origine, si determini quale delle seguenti affermazioni è vera.

   (a) $z_1 = \bar{z}_2$.

   (b) z_1, z_2 sono reali.

   (c) z_1/z_2 ha argomento 0.

   (d) esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $z^2 = w$ ha come soluzioni z_1, z_2.

4. Si scelga un valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax^2)}{x(\sqrt{1+x}-1)} & x > 0\ , \\ a3^x + 2 & x \leq 0\ ; \end{cases}$$

   è continua in $x = 0$.

   (a) $a = 1$. (b) $a = 2$. (c) $a = 3$. (d) $a = 4$.

5. Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x \ln|x|$ nel punto $x = -e$.

   (a) $y = 2x - e$ (b) $y = 2x + e$ (c) $y = -2x - e$ (d) $y = -2x + e$

6. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto h(x)$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Se $h(-5) = -6$ e $h(-8) = 1$, allora esiste un punto $x_0 \in (5, 8)$ tale che

   (a) $h'(x_0) = -\frac{3}{7}$. (b) $h'(x_0) = \frac{7}{3}$.

   (c) $h'(x_0) = -\frac{7}{13}$. (d) nessuna delle precedenti.

7. Si calcoli, utilizzando il teorema di de l'Hospital, il seguente limite

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}.$$

   (a) $\sqrt{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $-\sqrt{2}$

8. Calcolare lo sviluppo di Taylor in $x = 0$ di $f(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}$ fino all'ordine 3.

   (a) $T_0^3 f(x) = 2x + x^2 - x^3 + o(x^3)$. (b) $T_0^3 f(x) = 2x + x^3 + o(x^3)$.

   (c) $T_0^3 f(x) = 2x - x^2 + x^3 + o(x^3)$. (d) $T_0^3 f(x) = 2x - x^3 + o(x^3)$.

9. Calcolare una primitiva $G(x)$ di $g(x) = 4x \arctan x$ e calcolare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x^2}.$$

(a) 0 (b) 1 (c) π (d) ∞

10. Si calcoli il seguente integrale definito.

$$I = \int_0^{\pi} \cos^3(x)dx \ .$$

(a) 0. (b) $\frac{\pi}{3}$. (c) $\frac{4}{3}$. (d) $\frac{\pi}{4}$.

11. Si calcoli direttamente il valore del seguente integrale improprio:

$$J = \int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan x}{1+x^2} \ .$$

(a) 0 (b) $-\frac{\pi^2}{8}$ (c) $-\frac{\pi^2}{4}$ (d) $-\infty$

12. Data la funzione $f(x) = e^{x^3-3x+1}$, si trovi quante soluzioni distinte ha l'equazione $f(x) = 3$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

13. Data la soluzione dell'equazione differenziale $x'(t)(1+t^2)+x^2 = 0$ tale che $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1/\pi$, si calcoli $x(\sqrt{3})$.

(a) $x\left(\sqrt{3}\right) = 0$ (b) $x\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3\pi}$ (c) $x\left(\sqrt{3}\right) = \frac{6}{5\pi}$ (d) $x\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4}{5\pi}$

14. Si trovi la soluzione $x(t)$ al seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0 \\ x(0) = 1, x'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

(a) $x(t) = e^{-2t}(2t+1)$ (b) $x(t) = (t-1)e^{-2t}$

(c) $x(t) = -(2-t)e^{-2t}$ (d) $x(t) = e^{-2t}(t-2)$

15. Data la soluzione $u(t)$ al problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) - u(t) = te^t \\ u(0) = -2, \ u'(0) = 0 \ ; \end{cases}$$

si il polinomio di Taylor di $u(t)$ nell'intorno di $t = 0$ fino all'ordine 4.

(a) $T_0^4 u(x) = -2 - t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(x^4)$. (b) $T_0^4 u(x) = -2 - t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(x^4)$.

(c) $T_0^4 u(x) = -2 - t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + o(x^4)$. (d) $T_0^4 u(x) = -2 - t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + o(x^4)$.