Analisi Matematica 1 - Prima Prova Intermedia
3 Novembre 2022

Nome e cognome ______________________ Numero di matricola ______________

1. Dato il sistema di equazioni in $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} |z+i| \leq 1 \\ -3i(z-\overline{z}) + 2(z+\overline{z}) - 6\dfrac{z\overline{z}}{|z|^2} \geq 0 \end{cases}$$

l'insieme delle sue soluzioni è

a) un semipiano b) un semicerchio c) l'insieme vuoto d) un punto

2. Si consideri l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 0,\ \log(x^2) > \sqrt{3}\}$; allora

a) $\inf S = 0$, $\sup S = e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ b) $\min S = -e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$, $\sup S = 0$

c) $\inf S = e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$, $\sup S = +\infty$ d) $\inf S = -\infty$, $\sup S = -e^{\sqrt{\frac{3}{4}}}$

3. Determinare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ che rende la seguente funzione continua in 0.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^{\pi/4}) + \dfrac{\pi}{4}, & x > 0 \\ \arccos\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\alpha\right), & -1 + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\alpha \leq x \leq 0 \end{cases}$$

a) $-\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$

4. Determinare l'estremo inferiore di

$$\left\{\left(1 + (-1)^n \frac{1}{3n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right),\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$$

a) $\frac{7}{6}$ b) -1 c) $-\frac{4}{3}$ d) 1

5. Determinare l'insieme dei $\beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan(x^\beta)}{\sqrt{\cos(\log(1 + x^{3/2})) - 1}} = 0$$

a) $\{6 > \beta \geq 3\}$ b) $\{\beta > 3\}$ c) $\{\beta < 6\}$ d) $\{0 \leq \beta < 3\}$

6. Dato il numero complesso $z = (-1+i)^{-3}$,

a) $\arg(z) = -\pi$ b) $\arg(z) = 0$ c) $|z| = \frac{1}{\sqrt{8}}$ d) $|z| = \sqrt{8}$

7. Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \log\left(\frac{x^2 \sin(x)}{2} + e^x\right)$$

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) 1

8. Data la funzione $f(x) = \sqrt{1-\log(x)}$, determinare la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(2, \sqrt{1-\log(2)})$.

   a) $y = -\frac{1}{4\sqrt{1-\log(2)}}x + \frac{3-2\log(2)}{2\sqrt{1-\log(2)}}$
   b) $y = -2\sqrt{1-\log(2)}x + 3 - 2\log(2)$
   c) $y = -\frac{1}{2\sqrt{1-\log(2)}}x + \frac{3-2}{2\sqrt{1-\log(2)}}$
   d) $y = -4\sqrt{1-\log(2)}x + 2(3 - 2\log(2))$

9. Determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[x]{x} + \frac{\sqrt[x]{x}}{x}\right)^x - 2\alpha x + \beta = \frac{e}{2}$$

   a) $\alpha = -e$, $\beta = 0$
   b) $\alpha = -e$, $\beta = \frac{e}{2}$
   c) $\alpha = e/2$, $\beta = e$
   d) $\alpha = e/2$, $\beta = 0$

10. Data $f(x) = \sqrt[3]{1+\log(\sin(x))}$, calcolare $f^{(4)}(\pi/2)$.

   a) $-\frac{4}{3}$
   b) $-\frac{1}{32}$
   c) $-\frac{3}{4}$
   d) $-\frac{1}{18}$

11. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x)\left(\arccos(5x^3) - \frac{\pi}{2}\right)$$

   a) Diverge a $+\infty$
   b) $\frac{1}{5}$
   c) 0
   d) $-\frac{1}{5}$

12. Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 = 1$, calcolare

$$\lim_{t\to e} \frac{f(\log(t)) - f(1)}{t-e}$$

   a) $ef'(e)$
   b) $f'(e^1)$
   c) $\frac{1}{e}f'(1)$
   d) $f'(\log(e))$

13. Data la successione $(s_n)_n$ di seguito definita, calcolarne, se esiste, il limite.

$$s_n = \frac{1}{\sqrt[3]{(5n)^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(5n)^3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{(5n)^3+5n}}$$

   a) 0
   b) 5
   c) Diverge a $+\infty$
   d) 1

14. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado 4 avente radice $z = \sqrt{5}e^{-i\pi/7}$ e tale che $P(0) = P'(0) = 0$ e il coefficiente del termine di quarto grado a_4 sia uguale a 1. Allora il coefficiente del termine di grado 2 è

   a) $-2\sqrt{5}\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$
   b) 5
   c) 0
   d) $2\sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

15. Data $f(x) = \log(\cos(\arcsin(x)))$, determinarne il polinomio di Taylor centrato in 0 fino al sesto ordine.

   a) $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$
   b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + o(x^6)$
   c) $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{48} + o(x^6)$
   d) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{48} + o(x^6)$