Estatística com Apoio Computacional

Teste de hipóteses

Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

Paulo Regis Menezes Sousa

paulo_regis@uvanet.br

Intervalo de confiança

Intervalo de confiança para uma proporção

Intervalo de confiança para uma média

Teste de hipóteses

Teste t (de Student)

Para uma média

Para duas médias

- Os resultados das pesquisas são expressos de maneiras diferentes. Duas formas comuns são: por meio de uma **proporção** e por meio de uma **média**.

Exemplo 1: proporção

Um dentista examinou 100 crianças que ingressavam no ensino fundamental e verificou que 33 delas não tinham cárie. A proporção de crianças sem cárie na amostra é 33/100, ou seja, 0,33. Essa proporção é uma estimativa da probabilidade de uma criança, da mesma população de onde proveio a amostra, não ter cáries.

Exemplo 2: média

Um professor de Fisioterapia obteve dados biométricos dos alunos que ingressaram na faculdade. A média da pressão sanguínea sistólica de 100 alunos foi 120,3mmHg com desvio padrão de 14,0mmHg.

- O fato de sabermos a proporção de determinado evento em uma amostra não nos garante o conhecimento da proporção desse evento na população.
- O que podemos fazer é calcular um intervalo que possa incluir a proporção do evento na população (o parâmetro).
- A maioria dos pesquisadores considera aceitável um intervalo de 95% de confiança.

–> *95% dos intervalos construídos da mesma forma conterão o **parâmetro**.*

- A proporção de valores X, obtida com base em uma amostra, é:

$$\bar{p} = \frac{X}{n} \quad \text{(estimativa)} \tag{1}$$

- O desvio padrão é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\bar{p} \times (1 - \bar{p})}{n}} \tag{2}$$

- O intervalo de 95% de confiança para a probabilidade p, é dado por:

$$\bar{p} = \pm 1,96 \sqrt{\frac{\bar{p} \times (1 - \bar{p})}{n}} \tag{3}$$

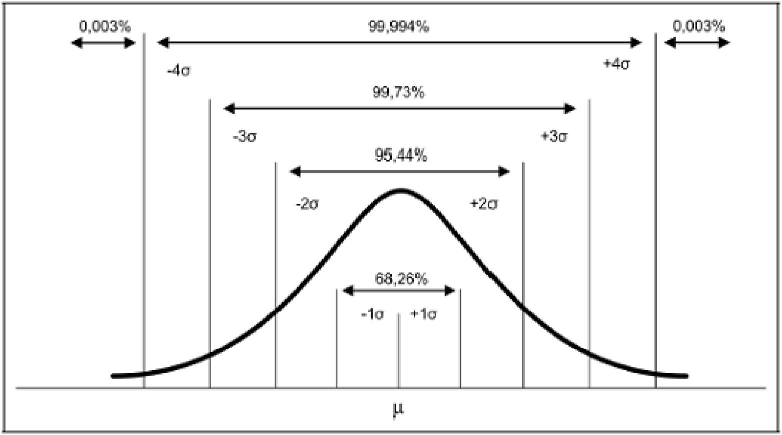


Figura: Algumas áreas importantes.

Exemplo 3: Uma proporção

Um dentista examinou 100 crianças que ingressavam no ensino fundamental e verificou que 33 delas não tinham cárie. A proporção de crianças sem cárie na amostra é 33/100, ou seja, 0,33. Essa proporção é uma estimativa da probabilidade de uma criança, da mesma população de onde proveio a amostra, não ter cáries. Será uma boa estimativa?

```
# Intervalo de confiança a 95%
p <- 0.33
n <- 100
p0 <- p - 1.96 * sqrt(p*(1-p)/n)
p1 <- p + 1.96 * sqrt(p*(1-p)/n)
int.conf <- c(p0, p1)
int.conf
```

- O intervalo de confiança, desta forma, fornece a margem de erro da estimativa. Essa margem é dada pela **amplitude do intervalo de confiança**.

Exemplo 4: Margem de erro: amostra pequena

Um dentista examinou 100 crianças que ingressavam no ensino fundamental e verificou que 33 delas não tinham cárie. A proporção de crianças sem cárie na amostra é 0,33. O dentista obteve o intervalo de 95% de confiança. Os limites desse intervalo são 0,238 e 0,422. Qual é a margem de erro?

A margem de erro é dada pela amplitude do intervalo, ou seja, pela diferença:

$$0,422 - 0,238 = 0,184 \quad (18{,}4\%) \tag{4}$$

- Para diminuir a margem de erro, é preciso aumentar a amostra. Daí a insistência dos estatísticos em dizer que a amostra deva ser tão grande quanto possível.

Exemplo 5: Margem de erro: amostra grande

Um dentista examinou 1000 crianças que ingressavam no ensino fundamental e verificou que 330 delas não tinham cárie. A proporção de crianças sem cárie na amostra é 0,33.

```r
p <- 0.33
n <- 1000
p0 <- p - 1.96 * sqrt(p*(1-p)/n)
p1 <- p + 1.96 * sqrt(p*(1-p)/n)
int.conf <- c(p0, p1)
int.conf
amp <- int.conf[2] - int.conf[1]
amp
```

- Imagine uma amostra casual simples de **n** elementos. A média dos dados dessa amostra constitui uma **estimativa** da média da população de onde essa amostra proveio.
- O intervalo de confiança para a média indica a **precisão** da estimativa.
- Esta estimativa leva em consideração a estimativa do erro padrão da média dado pela expressão:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

- O erro padrão da média é uma estimativa da **variabilidade das médias** que seriam obtidas, caso o pesquisador tivesse tomado, nas mesmas condições, um grande número de amostras.

Exemplo 6: Erro padrão da média

A média da pressão sanguínea sistólica de 100 alunos foi 120,3mmHg com desvio padrão de 14,0mmHg. Qual é o erro padrão da média?

```
# Erro padrão da média
S <- 14.0
n <- 100

Sx <- function(S,n){
  return(S/sqrt(n))
}
```

Cálculo do intervalo de confiança para uma média

- O intervalo de 95% de confiança para a média μ, desde que a amostra seja suficientemente grande, é dado por:

$$\mu = \pm\, 1,96\ S_{\bar{x}} \tag{6}$$

```r
# Intervalo de confiança para a média
m.est <- 120.3
m0 <- m.est - 1.96 * Sx(S,n)
m1 <- m.est + 1.96 * Sx(S,n)
int.conf.m <- c(m0,m1);
int.conf.m
```

- A **margem de erro** da estimativa é dada pela *amplitude* do intervalo de confiança. Quanto maior a amostra, menor é a margem de erro.

- No caso de variáveis contínuas, desde que a distribuição seja aproximadamente normal, é possível calcular o intervalo de confiança para a média de maneira similar.

$$\bar{x} \;\pm\; t_{(n-1)}\; S_{\bar{x}} \tag{7}$$

em que $t_{(n-1)}$ é um valor encontrado na Tabela da **distribuição t**.

- Para achar o valor de t que se usa na fórmula, siga os passos:
  1. O tamanho da amostra é n. Digamos que $n = 15$. Ache os graus de liberdade, isto é $n - 1$. Por exemplo 15 - 1 = 14.
  2. Escolha o nível de confiança que você quer. Ache o valor de α. subtraindo o nível de confiança de 100%. Para 95% de confiança, calcule $\alpha = 100\% - 95\% = 5\%$.
  3. Procure, na Tabela de valores de *t*, o valor que fica no cruzamento da coluna "$\alpha = 5\%$"com a linha "graus de liberdade 14".
  4. Você acha *t* = 2,145.

Então, o intervalo de 95% de confiança é:

$$\bar{x} \;\pm\; 2,145\; S_{\bar{x}} \tag{8}$$

Pequenas amostras

G. de liberdade	0,01	**0,025**	0,05
11	3,106	2,201	1,796
12	3,055	2,179	1,782
13	3,012	2,160	1,771
14	2,977	**2,145**	1,761
15	2,947	2,131	1,753
16	2,921	2,120	1,746

Tabela: Tabela (parcial) da distribuição t

```
> # Consulta equivalente no R
> alpha <- 0.05
> qt(alpha/2, 14, lower.tail=FALSE)
[1] 2.144787
```

Exemplo 7

O tempo de reação de um novo medicamento pode ser considerado como tendo distribuição Normal e deseja-se fazer inferência sobre a média que é desconhecida obtendo um intervalo de confiança. Vinte spacientes foram sorteados e tiveram seu tempo de reação anotado. Os dados foram os seguintes (em minutos):

2.9	3.4	3.5	4.1	4.6	4.7	4.5	3.8	5.3	4.9
4.8	5.7	5.8	5.0	3.4	5.9	6.3	4.6	5.5	6.2

Cálculo do intervalo de confiança para uma média

```
# Intervalo de confiança para a média
tempo <- c(2.9, 3.4, 3.5, 4.1, 4.6, 4.7, 4.5, 3.8, 5.3, 4.9,
           4.8, 5.7, 5.8, 5.0, 3.4, 5.9, 6.3, 4.6, 5.5, 6.2)
tem.n <- length(tempo)
tem.S <- sd(tempo)
tem.m <- mean(tempo)

tem.m0 <- tem.m - 1.96 * Sx(tem.S,tem.n)
tem.m1 <- tem.m + 1.96 * Sx(tem.S,tem.n)
tem.ic <- c(tem.m0,tem.m1);
tem.ic

# Função teste t
t.test(tempo)
```

- As pesquisas são feitas com o objetivo de responder perguntas.
- Para responder perguntas, são necessárias informações que são, quase sempre, obtidas por meio de amostras.
- Podemos generalizar os achados para toda a população, desde que a generalização seja fundamentada em um **teste de hipóteses**.
- Para fazer o teste, a pergunta do pesquisador é transformada em duas hipóteses, ou seja, é escrita na forma de duas afirmativas que se contradizem.

Exemplo 8: Hipóteses: inocente ou culpado

Um réu está sendo julgado. Quais são as hipóteses possíveis?

- O réu é inocente do ato que o acusam.
- O réu é culpado do ato que o acusam.

- Qualquer inferência estatística começa com uma hipótese nula implícita ou explícita.
- Essa é a nossa premissa de partida, que será rejeitada ou não com base em análise estatística subsequente.
- Se rejeitamos a hipótese nula, então geralmente aceitamos alguma hipótese alternativa que seja mais consistente com os dados observados.
- Num tribunal a hipótese nula, é que *o réu é inocente*. A tarefa da promotoria é persuadir o juiz ou o júri a rejeitar essa premissa e aceitar a **hipótese alternativa**, ou seja, que *o réu é culpado*.

- Consideremos alguns exemplos:

Hipótese nula a nova droga experimental não é mais efetiva em prevenir a malária do que um placebo.

Hipótese alternativa a nova droga experimental pode ajudar a prevenir a malária.

Hipótese nula tratamento para abuso de substâncias químicas para detentos não reduz sua taxa de reincidência após deixarem a prisão.

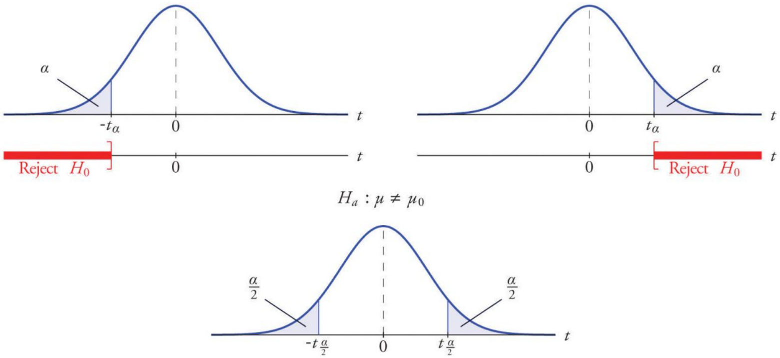
Hipótese alternativa tratamento para abuso de substâncias químicas para detentos reduzirá sua probabilidade de reincidência depois de soltos.

- A hipótese nula é comumente definida por H_0 e a hipótese alternativa H_a.
- Podemos caracterizar os testes de hipóteses como:

  Unilateral à esquerda $H_a : \mu_a < \mu_0$.

  Unilateral à direita $H_a : \mu_a > \mu_0$.

  Bilateral $H_a : \mu_a \neq \mu_0$.



- Tipos de erro que podem ocorrer no teste:
  - **Erro tipo I**: rejeitar a hipótese nula quando essa hipótese é verdadeira.
  - **Erro tipo II**: não rejeitar a hipótese nula quando essa hipótese é falsa.
- O teste de hipóteses fornece o **p-valor** (valor de probabilidade).

> O **p-valor** diz a probabilidade de se ocorrer aquele resultado, quando a hipótese nula é verdadeira.

- **Se o valor de p for pequeno**:
  - No caso da hipótese nula ser verdadeira: Estaremos diante de um evento muito raro, difícil de acontecer, pouco provável.
- Por convenção, se o *p-valor* for menor do que 0,05 ($p < 0{,}05$), conclui-se que a hipótese nula deve ser rejeitada.
- É comum dizer, nos casos em que $p < 0{,}05$, que os resultados são estatisticamente significantes.

- O **teste t** é bastante usado em várias situações de pesquisa quando se deseja, por exemplo, testar uma afirmação sobre a média populacional ou fazer comparações entre as médias de duas populações.
- Teste t no R

```r
t.test(x, y = NULL,
    alternative = c("two.sided", "less", "greater"),
    mu = 0,
    paired = FALSE,
    var.equal = FALSE,
    conf.level = 0.95)
```

Exemplo 9: Para uma média

Vamos testar se X tem média estatisticamente igual a 35 ou maior.

$$H_0 : \mu_x = 35$$
$$H_a : \mu_x > 35$$

```r
# Amostra x
x <- c(30.5, 35.3, 33.2, 40.8, 42.3,
        41.5, 36.3, 43.2, 34.6, 38.5)

# Teste t para uma média
t.test(x,                               #amostra a ser testada
    mu = 35,                            #hipótese de nulidade
    alternative = "less")    #unilateral a direita
```

Exemplo 10: Para uma média

Um geólogo afirmou que a resistência média à compressão de um itabirito silicoso (tipo de rocha) explorado na região da Zona da Mata Mineira é de 285MPa. Desconfiando dessa afirmação, um estudante resolveu fazer um teste de resistência utilizando amostras provenientes da mesma região e encontrou os seguintes valores (em MPa):

$$254{,}29 \quad 165{,}00 \quad 189{,}02 \quad 277{,}46 \quad 235{,}56 \quad 198{,}32$$

Se o estudante realizou um teste bilateral, para um nível de significância de 1%, a qual conclusão ele chegou?

```r
# Amostra de resistências do itabirito silicoso
amostra <- c(254.29, 165.0, 189.02,
               277.46, 235.56, 198.32)

t.test(amostra,                          #teste t
        mu = 285,                        #valor de referência
        alternative = "two.sided",       #teste bilateral
        conf.level = 0.99)               #significancia de 1%
```

Exemplo 11: Para duas médias independentes

Suponha que queiramos testar se X e Y possuem médias estatisticamente iguais, a 1% de significância, e que as amostras x e y sejam independentes e oriundas de distribuição normal.

$$H_0 : \mu_x = \mu_y$$
$$H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

```r
# Amostra x
x <- c(30.5, 35.3, 33.2, 40.8, 42.3,
       41.5, 36.3, 43.2, 34.6, 38.5)
# Amostra y
y <- c(28.2, 35.1, 33,2, 35.6, 40.2,
       37.4, 34.2, 42.1, 30.5, 38.4)

# Teste t para duas amostras
t.test(x, y, conf.level = 0.99)
```

Exemplo 12: Para duas médias independentes

Suponha que duas amostras de lampadas incandescentes de dois fabricantes A e B foram testadas quanto a duração do filamento de tungstênio. O experimento visou identificar o tempo em horas que se iniciava no momento em que a lampada era acesa e terminava com o rompimento do filamento. Os dados coletados no experimento encontram-se a seguir:

A:	147,84	153,54	101,52	111,53	181,50	148,73	157,55	113,51
B:	137,04	124,10	157,84	160,83	136,50	59,60	114,50	123,89
	137,36	172,78						

Verifique se as lâmpadas produzidas pelo fabricante A tem duração maior que as produzidas pelo outro fabricante, usando 5% de significância.

Teste t (de Student)

```r
# Amostra a
a <- c(147.84, 153.54, 101.52, 111.53,
        181.50, 148.73, 157.55, 113.51)
# Amostra b
b <- c(137.04, 124.1, 157.84, 160.83, 136.5,
        59.6, 114.5, 123.89, 137.36, 172.78)

t.test(a,b,                              #amostras a serem testadas
        alternative = "greater", #unilateral à direita a > b
        var.equal = T)                  #variâncias homogêneas
```