CALCOLO DELLE PROBABILITÁ E STATISTICA

Alessandro Zappatore

Università del Piemonte Orientale
Anno accademico 2024/2025, 2° semestre

1 Introduzione

1.1 Insieme degli esiti

Notazione: denotiamo con

$$\Omega$$

l'**insieme degli esiti** di un sperimento, supposto noto.

Ex. 1 Nel caso di un dato possiamo prendere $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ex. 2 Nel caso di una moneta $\Omega = \{T, C\}$ dove T denota la faccia testa e C la faccia croce.

Ex. 3 In una gara di 4 cavalli, denotati 1,2,3 e 4, Ω è l'insieme delle quadruple ottenute permutando $(1, 2, 3, 4)$, cioè 24 esiti possibili:

$$\Omega = \{(1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (3, 2, 1, 4), \cdots\}$$

In un esperimento ci interessa sapere un sottoinsieme di Ω (Ex. ci interessa solo chi è arrivato primo).

1.2 Evento

Definizione: un sottoinsieme E di Ω è detto **evento**.

Ex. il cavallo 3 arriva primo se si verifica l'evento $E = \{(3, 1, 2, 4), (3, 2, 1, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (3, 2, 4, 1)\}$

1.3 Elemento elementare

Definizione: E è un **elemento elementare** se contiene un solo elemento.

Ex. nel lancio di un dado, l'evento $E = \{2\}$ corrisponde all'uscita della faccia 2 ed è un evento elementare. $E = \{1, 3, 5\}$ corrisponde all'uscita di un numero dispari e **non** è un evento elementare.

1.4 Insieme di tutti gli eventi

Notazione: denotiamo con

$$\mathcal{E}$$

l'**insieme di tutti gli eventi**, cioè l'insieme delle parti di Ω. Supponiamo che $\emptyset \in \mathcal{E}$.

ATTENZIONE: pensare agli eventi come a tutti i sottoinsiemi di Ω va bene **solo** se Ω è un insieme finito.

1.5 Verificarsi di un evento

Definizione: diciamo che **si verifica l'evento** E se l'esito dell'esperimento è un evento di E.

Un esperimento produce esiti (singoli punti di Ω), non eventi.

1.6 Operatori insiemistici

Dati due eventi E ed F in $\mathcal{E}$, si verifica:

- E **oppure** F se si verifica $E \cup F$.
- E **ed** F se si verifica $E \cap F$.

1.6.1 Incompatibilità

E ed F sono detti **incompatibili** se $E \cap F = \emptyset$.

Ex. Il cavallo 3 arriva primo se si verifica l'evento $E = \{(3,1,2,4),(3,2,1,4),(3,1,4,2),(3,4,1,2),(3,4,2,1),(3,2,4,1)\}$
Il cavallo 3 arriva secondo se si verifica l'evento $F = \{(1,3,2,4),(1,3,4,2),(2,3,1,4),(2,3,4,1),(4,3,1,2),(4,3,2,1)\}$
Il cavallo 1 arriva ultimo se si verifica l'evento $G = \{(2,3,4,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),(3,4,2,1)\ (4,2,3,1),(4,3,2,1)\}$

- Il cavallo 3 arriva primo o secondo se si verifica $E \cup F$.
- Il cavallo 3 arriva primo e il cavallo 1 arriva ultimo se si verifica $E \cap G$.
- $E \cap G = \emptyset$ quindi E ed F sono eventi incompatibili.

1.7 Complemento

Definizione: dato un evento E, E **non si verifica** se si verifica E^C (E complemento).

$$E^C = \Omega \setminus E$$

1.8 Leggi di De Morgan

Dati gli eventi E ed F, si ha che:

- $(E \cup F)^C = E^C \cap F^C$
- $(E \cap F)^C = E^C \cup F^C$

2 Concetto di probabilità

Associamo ad ogni evento E un numero $\mathbb{P}[E]$ che misura il nostro grado di fiducia che E si verifichi e che soddisfa i seguenti 3 assiomi (**assiomi di KOLMOGOROV**):

1. $\mathbb{P}[E] \geq 0 \qquad \forall E \in \mathcal{E}$
2. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
3. $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] \qquad \forall E, F \in \mathcal{E}$ *tali che* $E \cap F = \emptyset$

Questa è detta definizione assiomatica di probabilità.

Osservazioni:

- $\mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[\Omega \cup \emptyset] = \mathbb{P}[\Omega] + \mathbb{P}[\emptyset] \Rightarrow \mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- dato $E \in \mathcal{E}$, si ha: $1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[E \cup E^C] \overset{(2^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[E^C] \overset{(1^\circ assioma)}{\geq} \mathbb{P}[E]$
in conclusione $\mathbb{P}[E] \leq 1$, e quindi $\mathbb{P}[E]$ è un numero tra 0 e 1.

2.0.1 Tipi di eventi

- Ω è anche detto **evento certo** ed ha probabilità 1.
- $\emptyset$ è anche detto evento impossibile ed ha probabilità 0.
- ogni altro evento E ha probabilità tra 0 e 1.

2.0.2 Grado di fiducia

Il grado di fiducia, la probabilità che si associa ad un evento, è intrinsecamente soggettivo.

2.1 Interpretazione frequentistica della probabilità

Ripetendo N volte l'esperimento, diciamo $\nu_N(E)$ il numero di volte in cui si è verificato un evento arbitrario E. Il numero:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{\nu_N(E)}{N}$$

soddisfa gli assiomi di Kolmogorov, e quindi è una probabilità.

1. $\mathbb{P}[E] \geq 0$ è ovvio.
2. $\mathbb{P}[\Omega] = 0$ poiché $\nu_N(\Omega) = N$
3. $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] \quad$ se $E \cap F = \emptyset$ perché $\nu_N(E \cup F) = \nu_N(E) + \nu_N(F)$

$N \to \infty$

$N \to \infty$ non ha senso perché $\frac{\nu_N(E)}{N}$ oscilla.

Ex. supponiamo di aver ottenuto i seguenti dati lanciando una moneta: T,C,T,T,C,C,T,T,T,T,C,C,C,C,T,T,T,T,T,T,T,T,$\cdots$
2^i teste seguite da 2^i croci.

$$\frac{\nu_N(\{T\})}{N} \quad con\ N = 2 \cdot 2^n \quad tende\ a\ \frac{1}{2}\ quando\ n \to \infty$$

$$\frac{\nu_N(\{T\})}{N} \quad con\ N = 3 \cdot 2^n \quad tende\ a\ \frac{2}{3}\ quando\ n \to \infty$$

La funzione continua ad oscillare tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ e il limite nono esiste se $n \to \infty$.

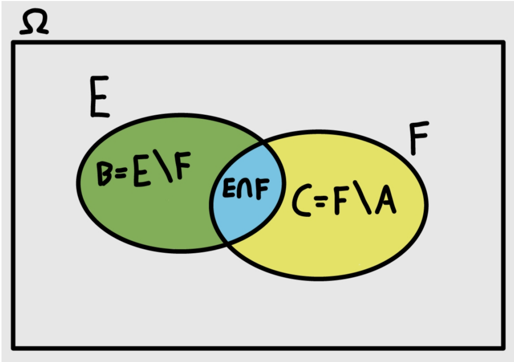
2.1.1 Proposizione

Dati due eventi E ed F, vale:

1. $\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E]$
2. $\mathbb{P}[E] \leq \mathbb{P}[F] \quad se \quad E \subseteq F$
3. $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$

Dimostrazione

1. $1 \overset{(2^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[E \cup E^C] \overset{(3^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[E^C] \Rightarrow \mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E]$
2. se $E \subseteq F$ allora $\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[E \cup (F \setminus E)] \overset{(3^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F \setminus E] \overset{(1^\circ assioma)}{\geq} \mathbb{P}[E]$
3. è banale se $E \cap F = \emptyset$. Supponiamo allora che $E \cap F \neq \emptyset$



- $A \cup B = \emptyset \qquad E = A \cup B$
- $A \cap C = \emptyset \qquad F = A \cup C$
- $B \cup C = \emptyset \qquad E \cup F = E \cup C \quad e \quad E \cap C = \emptyset$

Per il terzo assioma di Kolmogorov.

- $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
- $\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[C]$
- $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[A] =$
  $= \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$

Esercizio (Probabilità non fumatori)

Una persona fuma la sigaretta con probabilità 0.28, il sigaro con probabilità 0.07 ed entrambi con probabilità 0.05.
Qual è la probabilità che la persona non fumi?

Svolgimento Come prima cosa calcolo gli esiti e Ω.

- n: non fuma;
- s: fuma la sigaretta ma non il sigaro;
- c: fuma il sigaro ma non la sigaretta;
- e: fuma entrambi.

$\Omega = \{n, s, c, e\}$
L'esercizio ci chiede di calcolare: $\mathbb{P}[\{n\}]$

- La persona fuma la sigaretta se si verifica: $E = \{s, e\}$. $\mathbb{P}[E] = 0.28$.
- La persona fuma il sigaro se si verifica $F = \{c, e\}$. $\mathbb{P}[F] = 0.07$.
- La persona fuma entrambi se si verifica: $\mathbb{P}[\{e\}] = \mathbb{P}[E \cap F] = 0.05$.

Notiamo che:

$$\{n\})\{s, c, e\}^C$$

$$\{s, c, e\} = \{s, e\} \cup \{c, e\} = E \cup F$$

Il calcolo finale sarà:

$$\mathbb{P}[\{n\}] = \mathbb{P}[\{s, c, e\}^C] = 1 - \mathbb{P}[\{s, c, e\}] = 1 - \mathbb{P}[E \cup F] = 1 - \big[\mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]\big] =$$

$$= 1 - \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[F] + \mathbb{P}[E \cap F] = 1 - 0.28 - 0.07 + 0.05 = \mathbf{0.7}$$

2.2 Proposizione

Se $E_1 \cdots E_n \in \mathcal{E}$ sono n eventi incompatibili, cioè se $E_i \cap E_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, allora:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \sum_{i=1}^{n} = \mathbb{P}[E_i]$$

Dimostrazione Dato $l \in \{1 \cdots n-1\}$ si ha:

$$\bigcup_{i=1}^{l+1} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right) \cup E_{l+1}$$

inoltre

$$\left(\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right) \cap E_{l+1} = \emptyset$$

per ipotesi.
Quindi:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{l+1} E_i = \mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right) \cup E_{l+1}\right] \overset{(3^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right] + \mathbb{P}[E_{l+1}]\right.$$

Per provare la proposizione basta iterare questa formula da $l = 1$ a $l = n - 1$

$$\mathbb{P}[E_1 \cup E_2] = \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] \qquad (l = 1)$$

$$\mathbb{P}[E_1 \cup E_2 \cup E_3] = \mathbb{P}[E_1 \cup E_2] + \mathbb{P}[E_3] = \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] + \mathbb{P}[E_3] \qquad (l = 2)$$

2.3 Esperimento con esiti finiti ed equiprobabili

Consideriamo un esperimento con un numero finito di esisti equiprobabili: esiste $p \in [0, 1]$ tale che:

$$\mathbb{P}[\{\omega\}] = p \qquad \forall \omega \in \Omega$$

Ex. moneta per la moneta significa che $\mathbb{P}[\{T\}] = \mathbb{P}[\{c\}]$

Ex. dado per il dado significa che $\mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{2\}] = \mathbb{P}[\{3\}] = \mathbb{P}[\{4\}] = \mathbb{P}[\{5\}] = \mathbb{P}[\{6\}]$

Dico che $p = \frac{1}{|\Omega|}$ infatti:

$$1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in \Omega} p = p \cdot |\Omega|$$

Dato un evento E si ha:

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\omega \in E} \{\omega\}\right] = \sum_{\omega \in E} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in E} p = p \cdot |E| = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Dunque $\mathbb{P}[E]$ per esiti equiprobabili è il rapporto tra i casi favorevoli in E e tutti i casi in Ω.

Esercizio (Probabilità estrazione palline) (1)

Si estraggono a caso 2 palline da un urna che ne contiene 3 bianche e 2 nere. Quale è la probabilità che le due palline estratte abbiano colori diversi?

Svolgimento Numero le palline da 1 a 5=3+2 iniziando dalle bianche. Allora:

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),$$

$$,(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

$$|\Omega| = 20$$

Esercizio (Probabilità estrazione palline) (2)

$$E = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5,),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$$

$$|E| = 12$$

In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

2.4 Prodotto cartesiano

Definizione: dati due insiemi arbitrari A e B, l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ si dice **prodotto cartesiano** di A e B e si denota con:

$$A \times B$$

Se A e B sono finiti, allora:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Notazione

$$\{a, b\} = \{b, a\} \qquad (a, b) \neq (b, a)$$

Ex. 1 per una coppia di dadi $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ $\qquad |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

Ex. 2 per il lancio di una moneta e un dato $\Omega = \{T, C\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ $\qquad |\Omega| = 2 \cdots 6 = 12$

Ex. 3 per il lancio di due monete si ha $\Omega\{T, C\} \times \{T, C\} = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\}$ $\qquad |\Omega| = 2 \cdot 2 = 4$

2.5 Insieme delle k-uple ordinate

Definizione: dato un insieme arbitrario A e un intero positivo k, l'insieme di tutte le k-uple ordinate di elementi di A, cioè di elementi $a_1, a_2, \cdots, a_k \in A$ si denota con:

$$\times^k A := A \times A \times \cdots \times A \qquad k \textit{ volte}$$

Se $|A| \leq +\infty$ e l è un intero tra 1 e $k-1$, allora:

$$| \times^{l+1} A| = |(\times^l A) \times A| = | \times^l A| \cdot |A|$$

Iterando da $l = 1$ a $l = k-1$ si trova che:

$$| \times^k A| = |A|^k$$

Ex. $A = \{a, b\}$

$$\times^3 A = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(b,a,a),(a,b,b),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}$$

$|A| = 2^3 = 8$

Esercizio (Un 6 in 4 lanci)

Il lancio di quattro dadi ha esiti in $\Omega = \times^4\{1,2,3,4,5,6\}$ $\qquad |\Omega| = 6^4$
L'evento che vede nessun 6 è $E = \times^4\{1,2,3,4,5\}$ $\qquad |E| = 5^4$
$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5^4}{6^4}$ è la probabilità di vedere nessun 6 nel lancio di quattro dadi.
E^C è l'evento che vede uscire **almeno** un 6 ed ha probabilità $\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E] = 1 - (\frac{5}{6})^4 \simeq \mathbf{0.52}$

Esercizio (Doppio 6 in 24 lanci)

$A = \times^2\{1,2,3,4,5,6\}$ è l'insieme degli esiti di una coppia di dadi.
$B = A \setminus \{(6,6)\}$ è l'insieme di esiti che non vedono la coppia di 6.
$\Omega = \times^{24}A$ è l'insieme degli esiti di 24 lanci di una coppia di dadi.
$E = \times^{24}B$ è l'evento che non vede un doppio 6 in 24 lanci di una coppia di dadi.
E^C è l'evento che vede almeno un doppio 6 in 24 lanci di una coppia di dadi.

$$|A| = 36 \quad |B| = 35 \quad |\Omega| = |A|^{24} = 36^{24} \quad |E| = |B|^{24} = 35^{24}$$

In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = (\frac{35}{36})^{24} \qquad \mathbb{P}[E^C] = 1 - (\frac{35}{36})^{24} \simeq \mathbf{0.49}$$

Generalizzazione esercizio palline

Si estraggono due palline da un urna che contiene b palline bianche ed n palline nere. Quale è la probabilità che le due palline abbiano colori diversi?

Svolgimento Numeriamo le palline da 1 a $b+n$ partendo dalle bianche.
$\Omega = \times^2\{1\cdots b+n\} \setminus \{(1,1),(2,2),\cdots,(b+n,b+n)\}$
$|\Omega| = (b+n)^2 - (b+n) = (b+n-1)(b+n)$

$E = \{1\cdots b\} \times \{b+1\cdots b+n\} \cup \{b+1\cdots b+n\} \times \{1\cdots b\}$
$|E| = b\cdot n + n\cdot b = 2bn$ In conclusione la probabilità cercata è:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2bn}{(b+n-1)(b+n)}$$

2.6 Disposizioni senza ripetizioni

Gli elementi di $\times^k A$ vengono anche detti **disposizioni con ripetizioni di classe k** degli elementi di A. *Definizione:* le **disposizioni senza ripetizione di classe k** degli elementi di A sono le k-uple di elementi di A tutti distinti fra loro.

L'insieme di tutte le disposizioni senza ripetizione di classe k degli elementi di A è un sottoinsieme di $\times^k A$ che denotiamo con:

$$D_k(A)$$

La cardinalità vale:

$$|D_k(A)| = |A|\cdot(|A|-1)\cdot(|A|-2)\cdots(|A|-k+1)$$

$D_k(A) = \emptyset$ se $k > |A|$

2.6.1 Fattoriale

Definizione: dato un intero n non negativo, chiamiamo n fattoriale il numero:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 1 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

La cardinalità delle disposizioni senza ripetizioni vale:

$$|D_k(A)| = |A|\cdot(|A|-1)\cdots(|A|-2)\cdots(|A|-k+1)\cdot\frac{(a-k)!}{(a-k)!} = \frac{|A|!}{(|A|-k)!}$$

2.7 Permutazioni degli elementi

Definizione: $D_{|A|}(A)$ è anche detto **insieme delle permutazioni** degli elementi di A. Si ha:

$$|D_{|A|}(A)| = |A|!$$

Esercizio (Estrazione con e senza reinserimento)

Si estraggono in successione due palline da un urna che ne contiene n, numerate da 1 a n. Qual è la probabilità di estrarre la k-esima pallina in un esperimento con reinserimento e in uno senza?

Caso con reinserimento
$\Omega = \times^2\{1, \cdots, n\}$
$E = \{(i,j) \in \Omega : i = k \text{ oppure } j = k\}$

$|\Omega| = n^2$
$|E| = n + (n-1) = 2n - 1$

$$\mathbb{P}[E]\frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2n-1}{n^2} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$$

Caso senza reinserimento
$\Omega = D_2(\{1, \cdots, n\})$
$E = \{(i,j) \in \Omega : i = k \text{ oppure } j = k\}$

$|\Omega| = n(n-1)$
$|E| = 2n - 2$

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n-1)}} = \frac{2}{n}$$

Esercizio (Problema del compleanno)

Qual è la probabilità che in gruppo di n persone ve ne siano **almeno** due nati lo stesso giorno? Supponiamo che ogni anno abbia 365 giorni e diciamo A l'insieme dei 365 giorni dell'anno.

$$\Omega = \times^n A \qquad |\Omega| = 365^n$$

Non ci sono persone nate lo stesso giorno se si verifica l'evento:

$$E = D_n(A) \qquad |E| = \frac{365!}{(365-n)!}$$

La probabilità che non ci siano due persone nate lo stesso giorno è:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

Vi sono almeno due persone nate lo stesso giorno con probabilità:

$$\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E] = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

Se $n = 23$ $\quad\mathbb{P}[E^C] \simeq \mathbf{0.51}$
Se $n = 50$ $\quad\mathbb{P}[E^C] \simeq \mathbf{0.97}$

2.8 Evento completamente incerto

Un evento $E \in \mathcal{E}$ è completamente incerto se $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E^C]$. D'altra parte $\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E]$. Quindi un evento è completamente incerto se $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E^C] = \frac{1}{2}$

Esercizio (Permutazioni)

Un corso di probabilità è frequentato da 10 studenti, 4 ragazze e 6 ragazzi. All'esame gli studenti prendono voti tutti diversi. Qual è la probabilità che le ragazze siano andate meglio dei ragazzi?

Svolgimento Numeriamo da 1 a 10 gli studenti partendo dalle ragazze.
$\Omega = D_{10}(\{1, \cdots, 10\})$ l'insieme delle permutazioni dei primi dieci interi.
$E = \{$insieme di permutazioni tali che 1,2,3,4 sono nelle prime quattro posizioni$\}$.

$|\Omega| = 10!$
$|E| = 4! \cdot 6!$
In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{\Omega} = \frac{4! \cdot 6!}{10!} = \frac{1}{210} \simeq \mathbf{0.005}$$

2.9 Combinazioni

Definizione: una **combinazione** di classe $k \leq |A|$ degli elementi di A è un sottoinsieme di A di cardinalità k.

L'insieme di tutte le combinazioni di classe k è denotato con:

$$C_k(A)$$

La cardinalità si calcola:

$$C_k(A) = \frac{D_k(A)}{k!} = \frac{|A|!}{k!(|A|-k)!} = \binom{|A|}{k}$$

Ex. $A = \{a, b, c\}$

$$D_2(A) = \{(a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b)\}$$
$$C_2(A) = \big\{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\big\}$$

2.10 Coefficiente binomiale

Dati gli interi $0 \leq k \leq n$, diciamo **coefficiente binomiale** il numero:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esercizio (Circolo)

Un circolo è costituito da n persone, in quanti modi si possono eleggere un presidente, un tesoriere e un segretario? In quanti modi posso scegliere 3 persone nel circolo?

Svolgimento domanda 1 Posso fare un presidente, un tesoriere e un segretario in:

$$n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!} \; nodi$$

Svolgimento domanda 2 Posso scegliere 3 persone in:

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{n!(n-3)!} \; nodi$$

Esercizio (Commissione)

Una commissione di 5 persone viene selezioanta da un gruppo di 9 donne e 6 uomini. Qual è la probabilità che la commissione sia formata da 2 donne e 3 uomini?

Svolgimento Sia D l'insieme delle donne e U quello degli uomini.

$$|D| = 9 \qquad |U| = 6$$

$\Omega = C_5(D \cup U)$ è l'insieme di tutte le possibili commissioni.
$|\Omega| = |C_5(D \cup U)| = \binom{D\cup U}{5} = \binom{15}{5}$

$E = \{d \cup u : d \in C_2(D), u \in C_3(U)\}$
$|E| = |C_2(D)| \cdot |C_3(U)| = \binom{9}{2} \cdot \binom{6}{3}$
In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{9}{2}\binom{6}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001} \simeq \mathbf{0.24}$$

Esercizio (Formazione di 2 squadre)

Vengono formate due squadre di $2n$ ragazzi, scelti fra $2n$ persone bianche e $2n$ persone nere. Qual è la probabilità che tutti i ragazzi bianchi siano in una stessa squadra? E qual è la probabilità che ogni squadra sia composta da n bianchi e n neri?

Svolgimento Siano B l'insieme delle persone bianche, N l'insieme delle persone nere e $B \cup N$ l'insieme di tutte le persone.
$\Omega = C_{2n}(B \cup N)$ la prima squadra.
$|\Omega| = \binom{|B\cup N|}{2n} = \binom{4n}{2n}$

$E = \{B, N\}$ evento che vede squadre di tutti bianchi o tutti neri.
$|E| = 2$
$F = \{b \cup \nu, b \in C_n(B) \ e \ \nu \in C_n(N)\}$
$|F| = |C_n(B)| \cdot |C_n(N)| = \binom{2n}{n} \cdot \binom{2n}{n}$

$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2}{\binom{4n}{2n}}$
$\mathbb{P}[F] = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2n}{n}^2}{\binom{4n}{2n}}$

Esercizio (Oggetto k in n oggetti)

Identifichiamo un oggetto in un insieme di n oggetti. Se scegliamo a caso un sottoinsieme di k oggetti fra quelli disponibili, qual è la probabilità che quello identificato sia uno di loro?

Svolgimento Sia n l'oggetto identificato.
$\Omega = C_k(\{1, \cdots, n\})$
$E = \{\omega \in C_k\{1, \cdots, n\} : n \in \omega\} = \{\nu \cup \{n\} : \nu \in C_{k-1}(\{1, \cdots, n-1\})\}$

$|\Omega| = \binom{n}{k}$
$|E| = \binom{n-1}{k-1}$

$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)\cancel{(n-k)!}}}{\frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{k!}{n!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(k-1)!}} \cdot \frac{k\cancel{(k-1)!}}{n\cancel{(n-1)!}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}$

3 Probabilità condizionata

É stato effettuato un esperimento e si è verificato l'evento $F \in \mathcal{E}$. Dato un altro evento $E \in \mathcal{E}$, la **probabilità condizionata** di E ed F, denotata $\mathbb{P}[E \mid F]$, è il nostro grado di fiducia che si sia verificato anche E.

Ripeto N volte l'esperimento e dico $\nu_N(F)$ il numero di volte in cui si è verificato F e $\nu_N(E \cap F)$ il numero di volte in cui si è verificato anche E. É ragionevole porre:

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \frac{\nu_N(E \cap F)}{\nu_N(F)}$$

$$\mathbb{P}[F] = \frac{\nu_N(F)}{N} \qquad \mathbb{P}[E \cap F] = \frac{\nu_N(E \cap F)}{N}$$

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \frac{\nu_N(E \cap F)/N}{\nu_N(F)/N} = \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[F]} \qquad \text{ha senso se } \mathbb{P}[F] > 0$$

In un esperimento con esiti equiprobabili è ragionevole porre:

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{|E \cap F|/|\Omega|}{|F|/|\Omega|} = \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[F]} \qquad \text{ha senso se } \mathbb{P}[F] > 0$$

Definizione si dice **probabilità condizionata** di $E \in \mathcal{E}$ a $F \in \mathcal{E}$ il numero:

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[F]} & \text{se } \mathbb{P}[F] > 0 \\ 0 & \text{se } \mathbb{P}[F] = 0 \end{cases}$$

Esercizio (Cena in azienda)

L'azienda per cui lavora Mario organizza una cena per i dipendenti maschi che hanno almeno un figlio maschio. Mario ha due figli ed è invitato a cena. Qual è la probabilità che entrambi i figli di Mario siano maschi.

Svolgimento Definiamo:
$\Omega = \{(m,m),(f,m),(m,f),(f,f)\}$ dove, ad esempio, (f,m) significa che il primo figlio di Mario è femmina e il secondo è maschio.
$F = \{(m,m),(f,m),(m,f)\}$
$E = \{(m,m)\}$

$\mathbb{P}[F] = \frac{3}{4} \qquad \mathbb{P}[E] = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E] = \frac{1}{4}$

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[F]} & \text{se } \mathbb{P}[F] > 0 \\ 0 & \text{se } \mathbb{P}[F] = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E \mid F] \cdot \mathbb{P}[F]$$

Esercizio (Cena in azienda)

La signora Marta pensa che ci sia una probabilità di 0.3 che la sua azienda apra una sede a Vercelli. Ella crede di essere promossa a direttrice di una nuova sede con probabilità 0.6. Qual è la probabilità che Marta diventi direttrice a Vercelli?

Svolgimento Definiamo:
$E = \{\text{Marta diventa direttrice}\}$
$F = \{\text{Viene aperta una sede a Vercelli}\}$
$\mathbb{P}[E \cap F] = \{\text{Marta diventa direttrice a Vercelli}\}$

$\mathbb{P}[E \mid F] = 0.6$
$\mathbb{P}[F] = 0.3$
$\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E \mid F] \cdot \mathbb{P}[F] = 0.6 \cdot 0.3 = \mathbf{0.18}$

3.1 Formula di disintegrazione delle probabilità

Siano dati k eventi $F_1, \cdots, F_k \in \mathcal{E}$ tali che $F_i \cap F_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$ e

$$\bigcup_{j=1}^{k} F_i = \Omega$$

Quindi $F_1, \cdots, F_k$ è una partizione di Ω.

Dato $E \in \mathcal{E}$ osserviamo che

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} (E \cap F_i) \text{ e che } (E \cap F_i) \cap (E \cap F_j) = \emptyset \text{ per ogni } i \neq j$$

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{k} (E \cap F_i)\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[E \cap F_i] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[E \mid F_i] \cdot \mathbb{P}[F_i]$$

Esercizio (Studente in orario)

Per andare in università uno studente utilizza l'autobus il 56% delle volte, la metropolitana il 15% delle volte e il treno nei restanti casi. Con l'autobus lo studente arriva in orario con probabilità 0.32, con la metropolitana con probabilità 0.78 e con il treno con probabilità 0.55. Qual è la probabilità che lo studente arrivi in orario?

Svolgimento Definiamo:
$F_1 = \{\text{Lo studente usa l'autobus}\}$
$F_2 = \{\text{Lo studente usa la metro}\}$
$F_3 = \{\text{Lo studente usa il treno}\}$
$E = \{\text{Lo studente arriva in orario}\}$

$\mathbb{P}[F_1] = 0.56 \qquad \mathbb{P}[F_2] = 0.15 \qquad \mathbb{P}[F_3] = 1 - 0.56 - 0.15 = 0.29$
$\mathbb{P}[E \mid F_1] = 0.32 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_2] = 0.78 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_3] = 0.55$

$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1] + \mathbb{P}[E \mid F_2]\mathbb{P}[F_2] + \mathbb{P}[E \mid F_3]\mathbb{P}[F_3] = 0.32 \cdot 0.56 + 0.78 \cdot 0.15 + 0.55 \cdot 0.29 \simeq \mathbf{0.45}$

Esercizio (Società assicurativa)

Una società di assicurazioni divide le persone fra *"inclini a fare incidenti"* e *"non inclini a fare incidenti"*: le prime fanno un incidente all'anno con probabilità 0.4 le seconde con probabilità 0.2. Se la probabilità che una persona sia del primo tipo è 0.3, qual è la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dalla stipula del contratto?

Svolgimento Definiamo:
$F_1 = \{\text{Persone inclini a un incidente all'anno}\}$
$F_2 = F_1^C$
$E = \{\text{Incidente entro un anno dalla stipula del contratto}\}$

$\mathbb{P}[F_1] = 0.3 \qquad \mathbb{P}[F_2] = 1 - \mathbb{P}[F_1] = 0.7$
$\mathbb{P}[E \mid F_1] = 0.4 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_2] = 0.2$

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1] + \mathbb{P}[E \mid F_2]\mathbb{P}[F_2] = 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = \mathbf{0.26}$$

3.2 Formula di Bayes

$$\mathbb{P}[F_i \mid E] = \frac{\mathbb{P}[F_i \cap E]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_i] \cdot \mathbb{P}[F_i]}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}[E \mid F_j] \cdot \mathbb{P}[F_j]}$$

Esercizio (Società assicurativa dopo un anno)

Se il nuovo assicurato ha fatto un incidente entro l'anno dalla stipula del contratto, qual è la probabilità che sia una persona incline a fare incidenti?

Svolgimento

$$\mathbb{P}[F_1 \mid E] = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.26} \simeq \mathbf{0.46}$$

Esercizio (Esame a risposte multiple)

In una prova a risposte multiple uno studente può conoscere la risposta oppure tirare a indovinarla. Sia p la probabilità che conosca la risposta e sia m il numero di risposte alternative. Qual è la probabilità che lo studente conosca la risposta ad una domanda a cui ha risposto correttamente?

Svolgimento Definiamo:
$F_1 = \{\text{Lo studente conosce la risposta}\}$
$F_2 = F_1^C$
$E = \{\text{Lo studente ha risposto correttamente}\}$

$\mathbb{P}[F_1] = p \qquad \mathbb{P}[F_2] = 1 - \mathbb{P}[F_1] = 1 - p$
$\mathbb{P}[E \mid F_1] = 1 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_2] = \frac{1}{m}$
$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1] + \mathbb{P}[E \mid F_2]\mathbb{P}[F_2] = p + \frac{1-p}{m}$

$$\mathbb{P}[F_1 \mid E] = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p} + \frac{\mathbf{1-p}}{\mathbf{m}}} > \mathbf{p}$$

Esercizio (Analisi del sangue)

Un'analisi del sangue rileva una certa malattia, dove presente, con probabilità 0.99, il metodo produce falsi positivi con probabilità 0.02. Se questa malattia incide sulla popolazione con probabilità 0.005, qual è la probabilità di essere malati se risultati positivi?

Svolgimento Definiamo:
$F_1 = \{\text{Malato}\}$
$F_2 = \{\text{Sano}\} = F_1^C$
$E = \{\text{Positivo}\}$

$\mathbb{P}[F_1] = 0.005 \qquad \mathbb{P}[F_2] = 0.995$
$\mathbb{P}[E \mid F_1] = 0.99 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_2] = 0.02$
$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1] + \mathbb{P}[E \mid F_2]\mathbb{P}[F_2] = 0.99 \cdot 0.005 + 0.02 \cdot 0.995 \simeq 0.025$

$$\mathbb{P}[F_1 \mid E] = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.025} \simeq \mathbf{0.2}$$

Esercizio (Incidente aereo)

Un aereo cade in una fra 5 regioni. La probabilità di non riuscire a trovare l'aereo nella regione i-esima è p_i. Qual è la probabilità che l'aereo si trovi in ognuna di queste regioni se una ricerca nella prima ha dato esito negativo?

Svolgimento Definiamo:
$F_i = \{\text{L'aereo è caduto nella regione } i\}$
$E = \{\text{Non è stato trovato nella prima regione}\}$

$\mathbb{P}[F_i] = \frac{1}{5} \quad \forall i$
$\mathbb{P}[E \mid F_1] = p_1 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_2] = \mathbb{P}[E \mid F_3] = \mathbb{P}[E \mid F_4] = \mathbb{P}[E \mid F_5] = 1$
$\mathbb{P}[E] = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}[E \mid F_i]\mathbb{P}[F_i] = p_1\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{4+p_1}{5}$

$$\mathbb{P}[F_1 \mid E] = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{p + \frac{1}{5}}{\frac{4+p_1}{5}} = \frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{4+p_1}}$$

$$\mathbb{P}[F_2 \mid E] = \mathbb{P}[F_3 \mid E] = \mathbb{P}[F_4 \mid E] = \mathbb{P}[F_5 \mid E] = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_2]\mathbb{P}[F_2]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{\frac{1}{\cancel{5}}}{\frac{4+p_1}{\cancel{5}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4+p_1}}$$

3.3 Eventi indipendenti

Può succedere che $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \mid F]$. Si dice che l'evento E è indipendente da F.

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[F]} & \text{se } \mathbb{P}[F] > 0 \\ 0 & \text{se } \mathbb{P}[F] = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[E \cap F] \Rightarrow \mathbb{P}[F] = \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[E]} = \mathbb{P}[F \mid E]$$

Anche F è indipendente da E.
Definizione: Dati due eventi $E, F \in \mathcal{E}$, questi sono detti **indipendenti** se $\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[F]$.
Se E ed F sono **incompatibili**, allora:

$$\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0$$

Quindi E ed F sono anche indipendenti solo se $\mathbb{P}[E] = 0$ oppure $\mathbb{P}[F] = 0$.

Attenzione

$E \quad F = E^C \Rightarrow E \cap F = \emptyset$ [incompatibilità e indipendenza non sono la stessa cosa]

Esercizio (Estrazione di un asso)

Sia E l'evento che vede pescato un asso in un mazzo di 52 carte. Sia F l'evento che vede pescata una carta di picche.

Svolgimento Le probabilità sono:
$\mathbb{P}[E] = \frac{4}{52} \qquad \mathbb{P}[F] = \frac{13}{52} \qquad \mathbb{P}[E \cap F] = \frac{1}{52}$
$\mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[F] = \frac{4 \cdot 13}{52 \cdot 52} = \frac{1}{52}$
Dunque $\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[F]$
E ed F sono indipendenti.

Esercizio (Somma di due dadi)

Si tirano due dadi. Sia E l'evento che la somma dei dadi è 7. Sia F l'evento che il primo dado è 4 e sia G l'evento che il secondo dado è 3.

Svolgimento Definiamo:
$\Omega = \times^2\{1, \cdots, 6\}$
$E = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$
$F = \{(4,1), (4,2), (4,2), (4,4), (4,5), (4,6)\}$
$G = \{(1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3)\}$
$E \cap F = \{(4,3)\} \qquad E \cap G = \{(4,3)\} \qquad F \cap G = \{(4,3)\}$
$\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E \cap G] = \mathbb{P}[F \cap G] = \frac{1}{36}$

$$\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[F] \text{ E e F sono indipendenti}$$

$$\mathbb{P}[E \cap G] = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[G] \text{ E e G sono indipendenti}$$

$$\mathbb{P}[F \cap G] = \mathbb{P}[F]\mathbb{P}[G] \text{ F e G sono indipendenti}$$

Ora poniamo $H = F \cap G = \{(4,3)\}$ l'evento E e H sono indipendenti?
$E \cap H = R \cap F \cap G = \{(4,3)\}$
$\mathbb{P}[E \cap H] = \frac{1}{36} \qquad \mathbb{P}[H] = \frac{1}{36} \qquad \mathbb{P}[E] = \frac{1}{6}$

$$\mathbb{P}[E \cap H] \neq \mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[H] \text{ E e H sono dipendenti}$$

Attenzione

L'indipendenza a coppie non vuol dire che una qualunque combinazione sia indipendente, invece per l'incompatibilità sì.

3.4 Indipendenza con 3 o più insiemi

Definizione: Gli eventi $k_1, \cdots, k_2 \in \mathcal{E}$ sono indipendenti se per ogni $l \in \{1 \cdots k\}$ e indici $l \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq k$ si ha:

$$\mathbb{P}[E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_l}] = \mathbb{P}[E_{i_1}] \cdot \mathbb{P}[E_{i_2}] \cdots \mathbb{P}[E_{i_l}]$$

. *Proposizione:* Se $E_1 \cdots E_k$ sono k eventi indipendenti in $\mathcal{E}$, allora $F_1 \cdots F_k$ sono indipendenti con $F_i = E_i$ oppure $F_i = E_i^C$ per ogni i.
Dimostrazione: Per $k = 2$. Per ipotesi $\mathbb{P}[E_1 \cap E_2] = \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[E_2]$. Dobbiamo provare che:

1. $\mathbb{P}[E_1^C \cap E_2] = \mathbb{P}[E_1^C]\mathbb{P}[E_2]$
2. $\mathbb{P}[E_1 \cap E_2^C] = \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[E_2^C]$
3. $\mathbb{P}[E_1^C \cap E_2^C] = \mathbb{P}[E_1^C]\mathbb{P}[E_2^C]$

3.4.1 Dimostrazione per 1

$(E_1 \cap E_2) \cup (E_1^C \cap E_2) = E_2 \qquad (E_1 \cap E_2) \cap (E_1^C \cap E_2) = \emptyset$
Per il 3° assioma $\mathbb{P}[E_2] = \mathbb{P}[E_1 \cap E_2] + \mathbb{P}[E_1^C \cap E_2]$

$$\mathbb{P}[E_1^C \cap E_2] = \mathbb{P}[E_2] - \mathbb{P}[E_1 \cap E_2] \overset{\text{Ipotesi indipendenza}}{=} \mathbb{P}[E_2] - \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[E_2] = \mathbb{P}[E_2]\{1 - \mathbb{P}[E_1]\} = \mathbb{P}[E_2]\mathbb{P}[E_1^C]$$

3.4.2 Dimostrazione per 2

Uguale alla dimostrazione per 1 cambiando il ruolo di E_1 e E_2.

3.4.3 Dimostrazione per 3

$$\mathbb{P}[E_1^C \cap E_2^C] \overset{\text{De Morgan}}{=} \mathbb{P}[(E_1 \cap E_2)^C] = 1 - \mathbb{P}[E_1 \cup E_2] = 1 - \{\mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] - \mathbb{P}[E_1 \cap E_2]\} \overset{\text{Ipotesi indipendenza}}{=}$$
$$= 1 - \mathbb{P}[E_1] - \mathbb{P}[E_2] + \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[E_2] = \{1 - \mathbb{P}[E_1]\}\{1 - \mathbb{P}[E_2]\} = \mathbb{P}[E_1^C]\mathbb{P}[E_2^C]$$

Esercizio (Sistema in parallelo) (1)

Un sistema costituto da n componenti si dice in **parallelo** se funziona fino a quando almeno uno dei componenti funziona. Se il componente i-esimo funziona con probabilità p_i t tutti i componenti sono indipendenti, qual è la probabilità che il sistema funzioni?

Svolgimento (1° modo, smart)

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \qquad E^C = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^C$$

$$\mathbb{P}[E^C] \overset{\text{Per indipendenza}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[E_i^C]$$

$$1 - \mathbb{P}[E] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[E_i^c] = \prod_{i=1}^{n} \{1 - \mathbb{P}[E_i]\} = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{E}] = \mathbf{1} - \prod_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{1} - \mathbf{p_i})$$

Svolgimento (2° modo)

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

$F_1 = E_1$ il primo componente funziona.
$F_2 = E_1^C \cap E_2$ non funziona il primo ma il secondo sì.
$F_3 = E_1^C \cap E_2^C \cap E_3$
$F_i = E_1^C \cap E_2^C \cap \cdots \cap E_{i-1}^C \cap E_i$ non funzionano $n - 1$ componenti, funziona solo l'ultimo.

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \qquad F_i \cap F_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

$$\mathbb{P}[E] \neq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[E_i] \qquad \mathbb{P}[E] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[F_i]$$

$\mathbb{P}[F_1] = \mathbb{P}[E_1] = p_1$
$\mathbb{P}[F_2] = \mathbb{P}[E_1^C \cap E_2] = \mathbb{P}[E_1^C]\mathbb{P}[E_2] = (1 - p_1) \cdot p_2$
$\mathbb{P}[F_i] = \mathbb{P}[E_1^C \cap \cdots \cap E_{i-1}^C \cap E_i] = \mathbb{P}[E_1^C] \cdots \mathbb{P}[E_{i-1}^C]\mathbb{P}[E_i] = (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1})p_i = \prod_{j=1}^{i-1}(1 - p_j)p_i$

Esercizio (Sistema in parallelo)(2)

$$\mathbb{P}[E] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[F_i] = p_1 + \sum_{i-2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (1-p_j)p_i$$

$p_i = 1 - (1 - p_i)$

Somme telescopiche

$$\sum_{i=h}^{k} (a_i - a_{i-1}) = \cancel{a_h} - a_{h-1} + \cancel{a_{h+1}} - \cancel{a_h} + \cdots + a_k - \cancel{a_{k-1}} = a_k - a_{h-1}$$

$$\mathbb{P}[E] = p_1 + \sum_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (1-p_j)\{1-(1-p_i)\} = p_1 + \sum_{i=2}^{n} \left\{ \overbrace{\prod_{j=1}^{i-1} (1-p_j)}^{a_{i-1}} - \overbrace{\prod_{j=1}^{i} (1-p_j)}^{a_i} \right\} =$$

$$= p_1 + a_1 + a_n = \cancel{p_1} + 1 - \cancel{p_1} - \prod_{j=1}^{n} (1-p_j) = \mathbf{1} - \prod_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{1} - \mathbf{p_j})$$

3.5 Spazio di probabilità (NON RICHIESTO ALL'ESAME)

L'insieme degli eventi $\mathcal{E}$ di Ω è assunto costituire una σ-algebra:

1. $\Omega \in \mathcal{E}$
2. se $E \in \mathcal{E}$, allora $E^C \in \mathcal{E}$
3. se $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$, allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$

Se $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$ allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$.
Se $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$, allora $E_1^C, E_2^C \dots \in \mathcal{E}$. Quindi $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^C \in \mathcal{E}$. Segue che $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^C)^C \in \mathcal{E}$
Una funzione $\mathbb{P}$ da $\mathcal{E}$ a $\mathbb{R}$ è una probabilità se valgono i 3 assiomi di Kolmogorov:

1. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
2. $\mathbb{P}[E] \geq 0 \qquad \forall E \in \mathcal{E}$
3. se $E_1, E_2, \cdots$ sono eventi in E tali che $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$, allora $\mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_n]$

La terna $(\Omega, E, \mathbb{P})$ è detta **spazio di probabilità**.

Parte I
Variabili aleatorie

4 Variabili aleatorie

Definizione: Una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ è detta **variabile aleatoria** se per ogni numero $a \in \mathbb{R}$:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{E}$$

Se Ω è finito, $\mathcal{E}$ è l'insieme delle parti di Ω e una qualsiasi funzione X su Ω è una **variabile aleatoria**.

Ex. La somma di due dadi è una variabile aleatoria, $\Omega = \times^2\{1 \cdots 6\} \qquad X = (i,j) \in \Omega \to i + j$

4.1 Funzione indicatrice

Dato $E \in \mathcal{E}$ diciamo **funzione indicatrice** di E la funzione:

$$I_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in E \\ 0 & \text{se } \omega \notin E \end{cases}$$

$X = I_E$ Mostriamo che per ogni $a \in \mathbb{R}$:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $a < 0$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} = \emptyset \in \mathcal{E}$$

Se $0 \leq a < 1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} = E^C \in \mathcal{E}$$

Se $a \geq 1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} = \Omega \in \mathcal{E}$$

Notazione

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \text{ lo scriverò come } \{X \in A\}$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \text{ lo scriverò come } \mathbb{P}[X \in A]$$

4.2 Funzione di ripartizione (cumulativa)

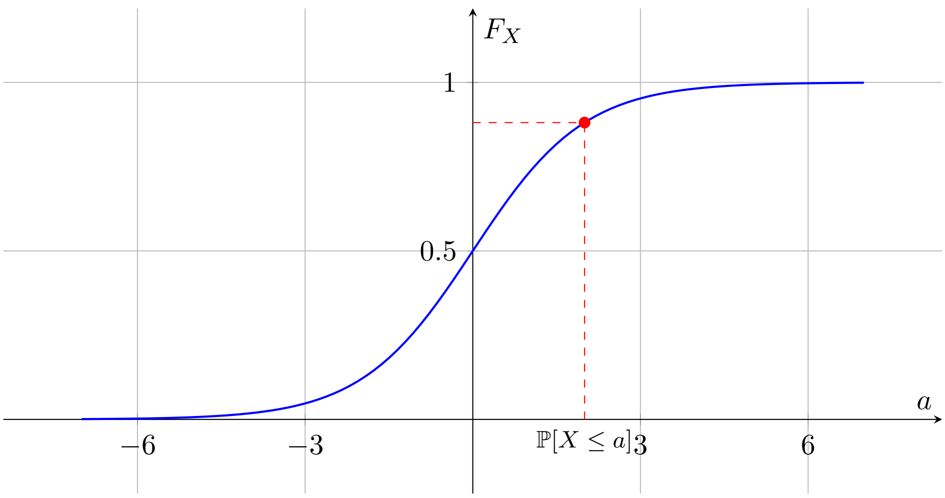
Dato $a \in \mathbb{R}$, se X è una variabile aleatoria è definita la probabilità dell'evento $\{X \leq a\}$. Diciamo **funzione di ripartizione**, o **cumulativa**, la funzione che mappa a nel numero:

$$F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

Se $b > a$ allora:

$$F_X(b) = \mathbb{P}[X \leq b] \geq \mathbb{P}[X \leq a] = F_X(a)$$

1. F_X è una funzione NON decrescente.
2. $\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$
3. $\lim_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$



Esercizio (Funzione di ripartizione somma di due dadi)

Calcolare la funzione di ripartizione F_X della variabile X somma di due dadi.

Svolgimento Definiamo:

$$\Omega = \times^2\{1\cdots 6\} \qquad X : \Omega \to \mathbb{R} \quad (i,j) \mapsto X((i,j)) = i + j$$

$\{X = k\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$
$\{X = 2\} = \{(1,1)\}$
$\{X = 3\} = \{(1,2),(2,1)\}$
$\{X = 4\} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$
$\{X = 5\} = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$
$\{X = 6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$
$\{X = 7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
$\{X = 8\} = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$
$\{X = 9\} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$
$\{X = 10\} = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$
$\{X = 11\} = \{(5,6),(6,5)\}$
$\{X = 12\} = \{(6,6)\}$

$$\downarrow F_X(a) := \mathbb{P}[X \leq a] \downarrow$$

$$\begin{cases} 0 & \text{se } a < 2 \\ \mathbb{P}[\{X = 2\}] = \frac{1}{36} & \text{se } 2 \leq a < 3 \\ \mathbb{P}[\{X = 2,3\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} & \text{se } 3 \leq a < 4 \\ \mathbb{P}[\{X = 2,3,4\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} & \text{se } 4 \leq a < 5 \\ \mathbb{P}[\{X = 2,3,4,5\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} & \text{se } 5 \leq a < 6 \\ \mathbb{P}[\{X = 2,3,4,5,6\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36} & \text{se } 6 \leq a < 7 \\ \mathbb{P}[\{X = 2,3,4,5,6,7\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{21}{36} & \text{se } 7 \leq a < 8 \\ \mathbb{P}[\{X = 2,3,4,5,6,7,8\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{26}{36} & \text{se } 8 \leq a < 9 \\ \mathbb{P}[\{X = \cdots 9\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{30}{36} & \text{se } 9 \leq a < 10 \\ \mathbb{P}[\{X = \cdots 10\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{33}{36} & \text{se } 10 \leq a < 11 \\ \mathbb{P}[\{X = \cdots 11\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{35}{36} & \text{se } 11 \leq a < 12 \\ \mathbb{P}[\{X = \cdots 12\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} & \text{se } a \geq 12 \end{cases}$$

In generale F_X è una funzione continua da destra.

$$F_X(a) := \mathbb{P}[X \leq a]$$

Dati $a < b$, $\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$
$\mathbb{P}[X \leq b] = \mathbb{P}[X \leq a] + \mathbb{P}[a < X \leq b]$
$F_X(b) = f_X(a) + \mathbb{P}[a < X \leq b]$

$$\mathbb{P}[a < X \leq b] = f_X(b) - f_X(a)$$

Esercizio (Funzione di ripartizione)(1)

Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 1 - e^{-a} \text{ se } & \text{a¿0} \end{cases}$$

- Quanto vale $\mathbb{P}[X \leq 0]$?
- Quanto vale $\mathbb{P}[\ln 2 < X \leq \ln 3]$?
- Quanto vale $\mathbb{P}[X > 7]$?

Esercizio (Funzione di ripartizione)(2)

- $\mathbb{P}[X \leq 0] = f_x(0) = 0$
- $\mathbb{P}[X \in (\ln 2, \ln 3)] = f_X(\ln 3) - f_X(\ln 2) = (1 - \frac{1}{3}) - (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}[X > 7] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 7] = f_X(7) = e^{-7}$

4.3 Funzione di massa di probabilità

Definizione: La **funzione di massa di probabilità** di una variabile aleatoria X è la funzione che mappa $X \in \mathbb{R}$ in:

$$p_X(x) := \mathbb{P}[X = x]$$

4.4 Variabile aleatoria discreta

Definizione: Una variabile aleatoria X è detta **discreta** se prende al più un numero numerabile di valori distinti.

Sia X una variabile discreta e siano $x_1, x_2, \cdots$ i valori che prende.

$$F_X(a) := \mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\substack{i=1 \\ x_i \leq a}}^{\infty} \{X = x_i\}\right] = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \leq a}}^{\infty} \mathbb{P}[X = x_i] = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \leq a}}^{\infty} p_X(x_i)$$

Se prendo il limite di $a \to \infty$ ottengo:

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) \qquad \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\}$$

4.5 Somma geometrica

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, consideriamo:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda^i = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$$

Se $\lambda = 1$ allora

$$\sum_{i=0}^{n} = \lambda^i = n + 1$$

Se $\lambda \neq 1$ allora

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda^i = \frac{1-\lambda}{1-\lambda} \sum_{i=0}^{n} \lambda^i = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=0}^{n} (\overbrace{\lambda^i - \lambda^{i+1}}^{\text{Somma telescopica}}) = \frac{(1 - \cancel{\lambda}) + (\cancel{\lambda} - \cancel{\lambda^2}) + \cdots + (\cancel{\lambda^n} - \lambda^{n+1})}{1-\lambda} = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1-\lambda}$$

Mando n a infinito:

- se $\lambda \geq 1$ allora $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = +\infty$
- se $\lambda \in (0, 1)$ allora $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \frac{1}{1-\lambda}$

Esercizio (Variabile aleatoria discreta)

É data una variabile aleatoria discreta X che prende valori interi non negativi con funzione di massa di probabilità.

$$p_X(i) = C\lambda^i \qquad \text{per } i = 0, 1, 2, \cdots$$

dove $\lambda \in (0, 1)$ è un parametro. Quanto vale C?

Svolgimento Uso il fatto che $\sum_{i=0}^{\infty} p_X(i) = 1$ cioè:

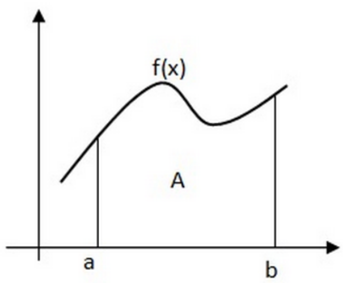
$$1 - \sum_{i=0}^{\infty} C\lambda^i = C\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \frac{C}{1-\lambda}$$

da cui:

$$\mathbf{C = 1 - \lambda}$$

4.6 Integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \text{area sotto } f \text{ su } [a, b]$$



Una funzione F è **primitiva** di f se $F'(x) = f(x)$ per ogni x.

4.6.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se F è primitiva di f allora:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$\mathbf{f}$	$\mathbf{F}$
$e^{-\lambda x}$	$-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + c$
x^γ	$\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} + c$
1	$x + x$
$\alpha f + \beta g, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\alpha F + \beta G$

$$G(x) := \int_a^x f(y)dy + c \text{ è primitiva di } f$$

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$G(x) = F(x) - F(a) + x \Rightarrow \frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

4.6.2 Integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \{F(b) - F(a)\}$$

4.7 Variabili continue

Definizione: Una variabile aleatoria X si dice continua se esiste una funzione non negativa f_X tale che:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

4.7.1 Densità di probabilità

La funzione $f(x)$ è detta **densità di probabilità** di X.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
- $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \int_a^b f_X(x)dx$

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 0 \\ 1 - e^{-a} & \text{se } a > 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx \text{ con } f : X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 0 \\ \int_0^a e^{-x}dx = -e^{-a} - (-e^{-a}) = 1 - e^{-a} & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

Se X è una variabile continua con densità di probabilità f_X allora F_X è primitiva di f_X.

Esercizio (Densità di probabilità)

Sia X una variabile continua con densità di probabilità:

$$F_X(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & \text{se } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quanto vale c?

Svolgimento Uso $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^2 f_X(x)dx = \int_0^2 c(4x - 2x^2)dx = c\int_0^2 (4x - 2x^2)dx$$

Quindi:

$$c = \frac{1}{\int_0^2 (4x - 2^2})dx$$

$$\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 4\int_0^2 xdx - 2\int_0^2 x^2dx = 4(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}) - 2(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}) = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\mathbf{x = \frac{3}{8}}$$

Se X è continua allora,

$$p_X(x) := \mathbb{P}[X = x] = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Fisso $x \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}[X = x] = \mathbb{P}[x - \varepsilon < X \leq x] = \int_{x-\varepsilon}^{x} f_X(y)dy$$

Mando ε a zero e trovo

$$\mathbb{P}[X = x] = 0$$

Differenza fondamentale con le variabili continue

In particolare $p_X \neq f_X$ se è continua!!!

Esercizio (Variabile aleatoria continua)

Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mostrare che $Y = X^2$ è una variabile aleatoria continua e calcolarne la densità di probabilità.

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad Y : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega) \qquad \omega \mapsto Y(\omega) = X^2(\omega)$$

Se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, allora $Z = \phi(X)$ è una variabile aleatoria.

$$Z : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto Z(\omega) = \phi(X(\omega))$$

Svolgimento Bisogna mostrare che esiste una funzione non negativa f_Y tale che:

$$F_Y(a) := \mathbb{P}[Y \leq a] = \int_{-\infty}^{a} f_Y(y)dy$$

$$\mathbb{P}[Y \leq a] = \mathbb{P}[X^2 \leq a] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X^2(\omega) \leq a\}] = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ \mathbb{P}[-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a}] & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

Per $a \geq 0$

$$\mathbb{P}[-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a}] = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} f_X(x)dx = \int_{0}^{\sqrt{a}} f_X(x)dx = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{a}} 1dx = \sqrt{a} & \text{se } a \leq 1 \\ \int_0^1 1dx = 1 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[Y \leq a] = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ \sqrt{a} & \text{se } 0 \leq a \leq 1 \\ 1 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{se } 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{a} f_Y(y)dy = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 0 \\ \int_0^a \frac{1}{2\sqrt{y}}dy & \text{se } 0 < a \leq 1 = \mathbb{P}[Y \leq a] \\ \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{y}}dy = 1 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Y è una variabile aleatoria continua.

4.8 Funzione cumulativa congiunta

Date le variabili aleatorie X e Y, si chiama **funzione cumulativa congiunta** la funzione F_{XY} definita da:

$$F_{XY}(a, b) := \mathbb{P}[X \leq a \text{ e } Y \leq b]$$

4.8.1 Funzione di massa di probabilità congiunta

Si chiama **funzione di massa di probabilità congiunta** la funzione:

$$p_{X,Y}(x, y) := \mathbb{P}[X = x \text{ e } Y = y]$$

Se X e Y sono discrete, e prendono i valori distinti $x_1, x_2, \cdots$ e $y_1, y_2, \cdots$ rispettivamente, allora:

$$\{(X, Y) \in A\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X = x_i \text{ e } Y = y_i\}$$

Il 3° assioma di Kolmogorov mi da:

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Se $A = \{x_i\} \times \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Esplicitazione $A = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : X = x_i\}$ $\{(X, Y) \in A\} = \{X = x_i\}$

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \mathbb{P}[X = x_i] = p_X(x_i) \Rightarrow p_X(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Dalla funzione di massa di probabilità congiunta posso ottenere la funzione di X.
p_X è **marginale** della funzione di massa di probabilità congiunta.

$$p_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Prendi $A = \mathbb{R} \times \{y_j\}$

Osservazione

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Esercizio (3 valori di X e 4 valori di Y)(1)

Sia X una variabile discreta che prende 3 valori e Y una variabile discreta che prende 4 valori con funzione di massa di probabilità congiunta data dalla seguente tabella:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$
X_2	$\frac{1}{4}$	α	0	$\frac{1}{12}$
X_3	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	α

Con α un parametro.
Determinare α e i marginali p_X e p_Y.

Esercizio (3 valori di X e 4 valori di Y)(2)

Svolgimento Per determinare α osserviamo che la somma di tutti i valori della tabella deve essere 1.

$$1 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} p_{X,Y}(x_i, y_j) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \alpha + 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{24} + \alpha = 2\alpha + \frac{11}{12}$$

$$\alpha = \mathbf{\frac{1}{24}}$$

Sommando sulle righe trovo:

$$p_X(x_i) = \sum_{j=1}^{4} p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_{X,Y}(x_i, y_1) + p_{X,Y}(x_i, y_2) + p_{X,Y}(x_i, y_3) + p_{X,Y}(x_i, y_4) =$$

$$= \begin{cases} p_X(x_1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{11}{24} \\ p_X(x_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{3}{8} \\ p_X(x_3) = \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Sommando sulle colonne trovo:

$$\begin{cases} p_Y(y_1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \\ p_Y(y_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + 0 = \frac{1}{8} \\ p_Y(y_3) = \frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \\ p_Y(y_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8} \end{cases}$$

4.9 Variabili aleatorie congiuntamente continue

Definizione: Due variabili aleatorie sono **congiuntamente continue** se esiste una funzione non negativa $f_{X,Y}$ su $\mathbb{R}^2$ tale che per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \int_A f_{X,Y}(x, y)dxdy$$

Osservazione

Se prendo $A = \mathbb{R}^2$ trovo:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y)dxdy$$

Se $A = [a, b] \times \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \mathbb{P}\big[X \in [a, b]\big]$$

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \int_A f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_{[a,b]\times\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_{[a,b]} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dy \right\} dx$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$$

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \int_{[a,b]} f_X(x)dx \Rightarrow \mathbb{P}\big[X \in [a, b]\big] = \int_{[a,b]} f_X(x)dx$$

In conclusione X è continua con densità di probabilità marginale:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$$

Si ha anche Y è continua con densità di probabilità marginale:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Siano X e Y variabili discrete e $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$A = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ e } y \in [\psi(x), \phi(y)]\}$$

$$\mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in [a,b]}}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ y_j \in [\psi(x_i), \phi(x_i)]}}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j) \right\} \qquad \int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f_{X,Y}(x,y)dy \right\} dx$$

Esercizio (Variabili congiuntamente continue)

Siano X ed Y due variabili congiuntamente continue con densità di probabilità:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quanto valgono i marginali di $f_{X,Y}$ e quanto vale $\mathbb{P}[X < Y]$?

Svolgimento

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_0^{+\infty} 2e^{-x-2y} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\int_0^{+\infty} 2e^{-x-2y}dy = 2e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = e^{-x}$ perché $\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy = \frac{1}{2}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ 2e^{-2y} & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X < Y] = \mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_x^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \right\} dx$$

$$\int_x^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_x^{+\infty} 2e^{-x-2y}dy & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\int_x^{+\infty} 2e^{-x-2y} = 2e^{-x}\int_x^{+\infty} e^{-2y}dy = \cancel{2}e^{-x} \cdot \frac{e^{-2x}}{\cancel{2}} = e^{-3x}$$

$$\int_x^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-3x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{X} < \mathbf{Y}] = \int_0^{+\infty} \mathbf{e^{-3x}dx} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

4.10 Variabili indipendenti

Definizione: Due variabili aleatorie X ed Y sono **indipendenti** se gli eventi $\{X \leq a\}$ e $\{Y \leq b\}$ sono indipendenti per ogni a e b. Questo vuol dire:

$$\mathbb{P}[X \leq a \mid Y \leq b] = \mathbb{P}[X \leq a]$$

Cioè

$$\mathbb{P}[X \leq a \text{ e } Y \leq b] = \mathbb{P}[X \leq a]\mathbb{P}[Y \leq b]$$

Cioè

$$F_{X,Y}(a,b) = F_X(a)F_Y(b)$$

Quindi possiamo anche dire che X e Y sono indipendenti se $F_{X,Y}(a,b) = F_X(a)F_Y(b)$.

Se le variabili sono discrete la richiesta di indipendenza equivale a:

$$p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

Se sono continue la richiesta di indipendenza è equivalente a:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} 2e^{-2y} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0 \end{cases} = f_X(x)f_Y(y)$$