CALCOLO DELLE PROBABILITÁ E STATISTICA

Alessandro Zappatore

Università del Piemonte Orientale
Anno accademico 2024/2025, 2° semestre

Parte I
Elementi di probabilità

1 Introduzione

1.1 Insieme degli esiti

Notazione: denotiamo con

$$\Omega$$

l'**insieme degli esiti** di un sperimento, supposto noto.

Ex. 1 Nel caso di un dato possiamo prendere $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ex. 2 Nel caso di una moneta $\Omega = \{T, C\}$ dove T denota la faccia testa e C la faccia croce.

Ex. 3 In una gara di 4 cavalli, denotati 1,2,3 e 4, Ω è l'insieme delle quadruple ottenute permutando $(1, 2, 3, 4)$, cioè 24 esiti possibili:

$$\Omega = \{(1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (3, 2, 1, 4), \cdots\}$$

In un esperimento ci interessa sapere un sottoinsieme di Ω (Ex. ci interessa solo chi è arrivato primo).

1.2 Evento

Definizione: un sottoinsieme E di Ω è detto **evento**.

Ex. il cavallo 3 arriva primo se si verifica l'evento $E = \{(3, 1, 2, 4), (3, 2, 1, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (3, 2, 4, 1)\}$

1.3 Elemento elementare

Definizione: E è un **elemento elementare** se contiene un solo elemento.

Ex. nel lancio di un dado, l'evento $E = \{2\}$ corrisponde all'uscita della faccia 2 ed è un evento elementare. $E = \{1, 3, 5\}$ corrisponde all'uscita di un numero dispari e **non** è un evento elementare.

1.4 Insieme di tutti gli eventi

Notazione: denotiamo con

$$\mathcal{E}$$

l'**insieme di tutti gli eventi**, cioè l'insieme delle parti di Ω. Supponiamo che $\emptyset \in \mathcal{E}$.

ATTENZIONE: pensare agli eventi come a tutti i sottoinsiemi di Ω va bene **solo** se Ω è un insieme finito.

1.5 Verificarsi di un evento

Definizione: diciamo che **si verifica l'evento** E se l'esito dell'esperimento è un evento di E.
Un esperimento produce esiti (singoli punti di Ω), non eventi.

1.6 Operatori insiemistici

Dati due eventi E ed F in $\mathcal{E}$, si verifica:

- E **oppure** F se si verifica $E \cup F$.
- E **ed** F se si verifica $E \cap F$.

1.6.1 Incompatibilità

E ed F sono detti **incompatibili** se $E \cap F = \emptyset$.

Ex. Il cavallo 3 arriva primo se si verifica l'evento $E = \{(3,1,2,4),(3,2,1,4),(3,1,4,2),(3,4,1,2),$ $(3,4,2,1),(3,2,4,1)\}$
Il cavallo 3 arriva secondo se si verifica l'evento $F = \{(1,3,2,4),(1,3,4,2),(2,3,1,4),(2,3,4,1),$ $(4,3,1,2),(4,3,2,1)\}$
Il cavallo 1 arriva ultimo se si verifica l'evento $G = \{(2,3,4,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),(3,4,2,1)$ $(4,2,3,1),(4,3,2,1)\}$

- Il cavallo 3 arriva primo o secondo se si verifica $E \cup F$.
- Il cavallo 3 arriva primo e il cavallo 1 arriva ultimo se si verifica $E \cap G$.
- $E \cap G = \emptyset$ quindi E ed F sono eventi incompatibili.

1.7 Complemento

Definizione: dato un evento E, E **non si verifica** se si verifica E^C (E complemento).

$$E^C = \Omega \setminus E$$

1.8 Leggi di De Morgan

Dati gli eventi E ed F, si ha che:

- $(E \cup F)^C = E^C \cap F^C$
- $(E \cap F)^C = E^C \cup F^C$

2 Concetto di probabilità

Associamo ad ogni evento E un numero $\mathbb{P}[E]$ che misura il nostro grado di fiducia che E si verifichi e che soddisfa i seguenti 3 assiomi (**assiomi di KOLMOGOROV**):

1. $\mathbb{P}[E] \geq 0 \qquad \forall E \in \mathcal{E}$
2. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
3. $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] \qquad \forall E, F \in \mathcal{E}$ *tali che* $E \cap F = \emptyset$

Questa è detta definizione assiomatica di probabilità.

Osservazioni:

- $\mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[\Omega \cup \emptyset] = \mathbb{P}[\Omega] + \mathbb{P}[\emptyset] \Rightarrow \mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- dato $E \in \mathcal{E}$, si ha: $1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[E \cup E^C] \overset{(2^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[E^C] \overset{(1^\circ assioma)}{\geq} \mathbb{P}[E]$
in conclusione $\mathbb{P}[E] \leq 1$, e quindi $\mathbb{P}[E]$ è un numero tra 0 e 1.

2.0.1 Tipi di eventi

- Ω è anche detto **evento certo** ed ha probabilità 1.
- $\emptyset$ è anche detto evento impossibile ed ha probabilità 0.
- ogni altro evento E ha probabilità tra 0 e 1.

2.0.2 Grado di fiducia

Il grado di fiducia, la probabilità che si associa ad un evento, è intrinsecamente soggettivo.

2.1 Interpretazione frequentistica della probabilità

Ripetendo N volte l'esperimento, diciamo $\nu_N(E)$ il numero di volte in cui si è verificato un evento arbitrario E. Il numero:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{\nu_N(E)}{N} \tag{1}$$

soddisfa gli assiomi di Kolmogorov, e quindi è una probabilità.

1. $\mathbb{P}[E] \geq 0$ è ovvio.
2. $\mathbb{P}[\Omega] = 0$ poiché $\nu_N(\Omega) = N$
3. $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] \quad$ se $E \cap F = \emptyset$ perché $\nu_N(E \cup F) = \nu_N(E) + \nu_N(F)$

$N \to \infty$

$N \to \infty$ non ha senso perché $\frac{\nu_N(E)}{N}$ oscilla.

Ex. supponiamo di aver ottenuto i seguenti dati lanciando una moneta: T,C,T,T,C,C,T,T,T,T,C,C,C,C,T,T,T,T,T,T,T,T,$\cdots$
2^i teste seguite da 2^i croci.

$$\frac{\nu_N(\{T\})}{N} \quad con\ N = 2 \cdot 2^n \quad tende\ a\ \frac{1}{2}\ quando\ n \to \infty$$
$$\frac{\nu_N(\{T\})}{N} \quad con\ N = 3 \cdot 2^n \quad tende\ a\ \frac{2}{3}\ quando\ n \to \infty$$

La funzione continua ad oscillare tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ e il limite nono esiste se $n \to \infty$.

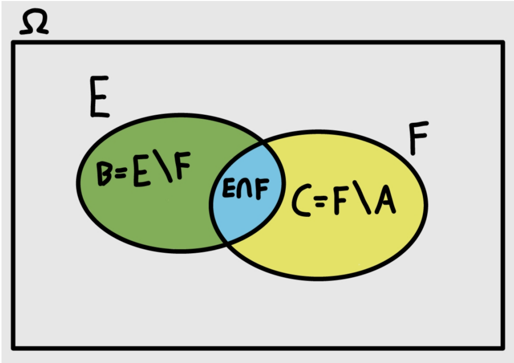
2.1.1 Proposizione

Dati due eventi E ed F, vale:

1. $\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E]$
2. $\mathbb{P}[E] \leq \mathbb{P}[F] \quad se \quad E \subseteq F$
3. $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$

Dimostrazione

1. $1 \overset{(2^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[E \cup E^C] \overset{(3^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[E^C] \Rightarrow \mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E]$
2. se $E \subseteq F$ allora $\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[E \cup (F \setminus E)] \overset{(3^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F \setminus E] \overset{(1^\circ assioma)}{\geq} \mathbb{P}[E]$
3. è banale se $E \cap F = \emptyset$. Supponiamo allora che $E \cap F \neq \emptyset$



- $A \cup B = \emptyset \qquad E = A \cup B$
- $A \cap C = \emptyset \qquad F = A \cup C$
- $B \cup C = \emptyset \qquad E \cup F = E \cup C \quad e \quad E \cap C = \emptyset$

Per il terzo assioma di Kolmogorov.

- $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
- $\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[C]$
- $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[A] =$
  $= \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$

Esercizio (Probabilità non fumatori)

Una persona fuma la sigaretta con probabilità 0.28, il sigaro con probabilità 0.07 ed entrambi con probabilità 0.05.
Qual è la probabilità che la persona non fumi?

Svolgimento Come prima cosa calcolo gli esiti e Ω.

- n: non fuma;
- s: fuma la sigaretta ma non il sigaro;
- c: fuma il sigaro ma non la sigaretta;
- e: fuma entrambi.

$\Omega = \{n, s, c, e\}$
L'esercizio ci chiede di calcolare: $\mathbb{P}[\{n\}]$

- La persona fuma la sigaretta se si verifica: $E = \{s, e\}$. $\mathbb{P}[E] = 0.28$.
- La persona fuma il sigaro se si verifica $F = \{c, e\}$. $\mathbb{P}[F] = 0.07$.
- La persona fuma entrambi se si verifica: $\mathbb{P}[\{e\}] = \mathbb{P}[E \cap F] = 0.05$.

Notiamo che:

$$\{n\})\{s, c, e\}^C$$

$$\{s, c, e\} = \{s, e\} \cup \{c, e\} = E \cup F$$

Il calcolo finale sarà:

$$\mathbb{P}[\{n\}] = \mathbb{P}[\{s, c, e\}^C] = 1 - \mathbb{P}[\{s, c, e\}] = 1 - \mathbb{P}[E \cup F] = 1 - \big[\mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]\big] =$$

$$= 1 - \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[F] + \mathbb{P}[E \cap F] = 1 - 0.28 - 0.07 + 0.05 = \mathbf{0.7}$$

2.2 Proposizione

Se $E_1 \cdots E_n \in \mathcal{E}$ sono n eventi incompatibili, cioè se $E_i \cap E_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, allora:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \sum_{i=1}^{n} = \mathbb{P}[E_i] \tag{2}$$

Dimostrazione Dato $l \in \{1 \cdots n-1\}$ si ha:

$$\bigcup_{i=1}^{l+1} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right) \cup E_{l+1}$$

inoltre

$$\left(\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right) \cap E_{l+1} = \emptyset$$

per ipotesi.
Quindi:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{l+1} E_i = \mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right) \cup E_{l+1}\right] \stackrel{(3^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right] + \mathbb{P}[E_{l+1}]\right.$$

Per provare la proposizione basta iterare questa formula da $l = 1$ a $l = n - 1$

$$\mathbb{P}[E_1 \cup E_2] = \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] \qquad (l = 1)$$

$$\mathbb{P}[E_1 \cup E_2 \cup E_3] = \mathbb{P}[E_1 \cup E_2] + \mathbb{P}[E_3] = \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] + \mathbb{P}[E_3] \qquad (l = 2)$$

2.3 Esperimento con esiti finiti ed equiprobabili

Consideriamo un esperimento con un numero finito di esisti equiprobabili: esiste $p \in [0, 1]$ tale che:

$$\mathbb{P}[\{\omega\}] = p \qquad \forall \omega \in \Omega$$

Ex. moneta per la moneta significa che $\mathbb{P}[\{T\}] = \mathbb{P}[\{c\}]$

Ex. dado per il dado significa che $\mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{2\}] = \mathbb{P}[\{3\}] = \mathbb{P}[\{4\}] = \mathbb{P}[\{5\}] = \mathbb{P}[\{6\}]$

Dico che $p = \frac{1}{|\Omega|}$ infatti:

$$1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in \Omega} p = p \cdot |\Omega|$$

Dato un evento E si ha:

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\omega \in E} \{\omega\}\right] = \sum_{\omega \in E} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in E} p = p \cdot |E| = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Dunque $\mathbb{P}[E]$ per esiti equiprobabili è il rapporto tra i casi favorevoli in E e tutti i casi in Ω.

Esercizio (Probabilità estrazione palline) (1)

Si estraggono a caso 2 palline da un urna che ne contiene 3 bianche e 2 nere. Quale è la probabilità che le due palline estratte abbiano colori diversi?

Svolgimento Numero le palline da 1 a 5=3+2 iniziando dalle bianche. Allora:

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),$$

$$,(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

$$|\Omega| = 20$$

Esercizio (Probabilità estrazione palline) (2)

$$E = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5,),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$$
$$|E| = 12$$

In conclusione:
$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

2.4 Prodotto cartesiano

Definizione: dati due insiemi arbitrari A e B, l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ si dice **prodotto cartesiano** di A e B e si denota con:

$$A \times B$$

Se A e B sono finiti, allora:
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Notazione

$$\{a, b\} = \{b, a\} \qquad (a, b) \neq (b, a)$$

Ex. 1 per una coppia di dadi $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \qquad |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

Ex. 2 per il lancio di una moneta e un dato $\Omega = \{T, C\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \qquad |\Omega| = 2 \cdots 6 = 12$

Ex. 3 per il lancio di due monete si ha $\Omega\{T, C\} \times \{T, C\} = \{(T, T),(T, C),(C, T),(C, C)\} \qquad |\Omega| = 2 \cdot 2 = 4$

2.5 Insieme delle k-uple ordinate

Definizione: dato un insieme arbitrario A e un intero positivo k, l'insieme di tutte le k-uple ordinate di elementi di A, cioè di elementi $a_1, a_2, \cdots, a_k \in A$ si denota con:

$$\times^k A := A \times A \times \cdots \times A \qquad k \textit{ volte}$$

Se $|A| \leq +\infty$ e l è un intero tra 1 e $k-1$, allora:

$$|\times^{l+1} A| = |(\times^l A) \times A| = |\times^l A| \cdot |A|$$

Iterando da $l = 1$ a $l = k-1$ si trova che:

$$|\times^k A| = |A|^k \tag{3}$$

Ex. $A = \{a, b\}$

$$\times^3 A = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(b,a,a),(a,b,b),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}$$

$|A| = 2^3 = 8$

Esercizio (Un 6 in 4 lanci)

Il lancio di quattro dadi ha esiti in $\Omega = \times^4\{1,2,3,4,5,6\} \qquad |\Omega| = 6^4$
L'evento che vede nessun 6 è $E = \times^4\{1,2,3,4,5\} \qquad |E| = 5^4$
$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5^4}{6^4}$ è la probabilità di vedere nessun 6 nel lancio di quattro dadi.
E^C è l'evento che vede uscire **almeno** un 6 ed ha probabilità $\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E] = 1 - (\frac{5}{6})^4 \simeq \mathbf{0.52}$

Esercizio (Doppio 6 in 24 lanci)

$A = \times^2\{1,2,3,4,5,6\}$ è l'insieme degli esiti di una coppia di dadi.
$B = A \setminus \{(6,6)\}$ è l'insieme di esiti che non vedono la coppia di 6.
$\Omega = \times^{24} A$ è l'insieme degli esiti di 24 lanci di una coppia di dadi.
$E = \times^{24} B$ è l'evento che non vede un doppio 6 in 24 lanci di una coppia di dadi.
E^C è l'evento che vede almeno un doppio 6 in 24 lanci di una coppia di dadi.

$$|A| = 36 \quad |B| = 35 \quad |\Omega| = |A|^{24} = 36^{24} \quad |E| = |B|^{24} = 35^{24}$$

In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = (\frac{35}{36})^{24} \qquad \mathbb{P}[E^C] = 1 - (\frac{35}{36})^{24} \simeq \mathbf{0.49}$$

Generalizzazione esercizio palline

Si estraggono due palline da un urna che contiene b palline bianche ed n palline nere. Quale è la probabilità che le due palline abbiano colori diversi?

Svolgimento Numeriamo le palline da 1 a $b+n$ partendo dalle bianche.
$\Omega = \times^2\{1 \cdots b+n\} \setminus \{(1,1),(2,2),\cdots,(b+n,b+n)\}$
$|\Omega| = (b+n)^2 - (b+n) = (b+n-1)(b+n)$

$E = \{1 \cdots b\} \times \{b+1 \cdots b+n\} \cup \{b+1 \cdots b+n\} \times \{1 \cdots b\}$
$|E| = b \cdot n + n \cdot b = 2bn$ In conclusione la probabilità cercata è:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2bn}{(b+n-1)(b+n)}$$

2.6 Disposizioni senza ripetizioni

Gli elementi di $\times^k A$ vengono anche detti **disposizioni con ripetizioni di classe k** degli elementi di A. *Definizione:* le **disposizioni senza ripetizione di classe k** degli elementi di A sono le k-uple di elementi di A tutti distinti fra loro.

L'insieme di tutte le disposizioni senza ripetizione di classe k degli elementi di A è un sottoinsieme di $\times^k A$ che denotiamo con:

$$D_k(A) \tag{4}$$

La cardinalità vale:

$$|D_k(A)| = |A| \cdot (|A|-1) \cdot (|A|-2) \cdots (|A|-k+1)$$

$D_k(A) = \emptyset$ se $k > |A|$

2.6.1 Fattoriale

Definizione: dato un intero n non negativo, chiamiamo n fattoriale il numero:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)(n-2)\cdots 1 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

La cardinalità delle disposizioni senza ripetizioni vale:

$$|D_k(A)| = |A| \cdot (|A|-1) \cdots (|A|-2) \cdots (|A|-k+1) \cdot \frac{(a-k)!}{(a-k)!} = \frac{|A|!}{(|A|-k)!} \tag{5}$$

2.7 Permutazioni degli elementi

Definizione: $D_{|A|}(A)$ è anche detto **insieme delle permutazioni** degli elementi di A. Si ha:

$$|D_{|A|}(A)| = |A|! \tag{6}$$

Esercizio (Estrazione con e senza reinserimento)

Si estraggono in successione due palline da un urna che ne contiene n, numerate da 1 a n. Qual è la probabilità di estrarre la k-esima pallina in un esperimento con reinserimento e in uno senza?

Caso con reinserimento
$\Omega = \times^2\{1, \cdots, n\}$
$E = \{(i, j) \in \Omega : i = k \text{ oppure } j = k\}$

$|\Omega| = n^2$
$|E| = n + (n-1) = 2n - 1$

$$\mathbb{P}[E]\frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2n-1}{n^2} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$$

Caso senza reinserimento
$\Omega = D_2(\{1, \cdots, n\})$
$E = \{(i, j) \in \Omega : i = k \text{ oppure } j = k\}$

$|\Omega| = n(n-1)$
$|E| = 2n - 2$

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n-1)}} = \frac{2}{n}$$

Esercizio (Problema del compleanno)

Qual è la probabilità che in gruppo di n persone ve ne siano **almeno** due nati lo stesso giorno? Supponiamo che ogni anno abbia 365 giorni e diciamo A l'insieme dei 365 giorni dell'anno.

$$\Omega = \times^n A \qquad |\Omega| = 365^n$$

Non ci sono persone nate lo stesso giorno se si verifica l'evento:

$$E = D_n(A) \qquad |E| = \frac{365!}{(365-n)!}$$

La probabilità che non ci siano due persone nate lo stesso giorno è:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

Vi sono almeno due persone nate lo stesso giorno con probabilità:

$$\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E] = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

Se $n = 23$ $\qquad \mathbb{P}[E^C] \simeq \mathbf{0.51}$
Se $n = 50$ $\qquad \mathbb{P}[E^C] \simeq \mathbf{0.97}$

2.8 Evento completamente incerto

Un evento $E \in \mathcal{E}$ è completamente incerto se $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E^C]$. D'altra parte $\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E]$. Quindi un evento è completamente incerto se $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E^C] = \frac{1}{2}$

Esercizio (Permutazioni)

Un corso di probabilità è frequentato da 10 studenti, 4 ragazze e 6 ragazzi. All'esame gli studenti prendono voti tutti diversi. Qual è la probabilità che le ragazze siano andate meglio dei ragazzi?

Svolgimento Numeriamo da 1 a 10 gli studenti partendo dalle ragazze.
$\Omega = D_{10}(\{1, \cdots, 10\})$ l'insieme delle permutazioni dei primi dieci interi.
$E = \{$insieme di permutazioni tali che 1,2,3,4 sono nelle prime quattro posizioni$\}$.

$|\Omega| = 10!$
$|E| = 4! \cdot 6!$
In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{\Omega} = \frac{4! \cdot 6!}{10!} = \frac{1}{210} \simeq \mathbf{0.005}$$

2.9 Combinazioni

Definizione: una **combinazione** di classe $k \leq |A|$ degli elementi di A è un sottoinsieme di A di cardinalità k.

L'insieme di tutte le combinazioni di classe k è denotato con:

$$C_k(A) \tag{7}$$

La cardinalità si calcola:

$$C_k(A) = \frac{D_k(A)}{k!} = \frac{|A|!}{k!(|A|-k)!} = \binom{|A|}{k} \tag{8}$$

Ex. $A = \{a, b, c\}$

$$D_2(A) = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$$
$$C_2(A) = \big\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\big\}$$

2.10 Coefficiente binomiale

Dati gli interi $0 \leq k \leq n$, diciamo **coefficiente binomiale** il numero:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{9}$$

Esercizio (Circolo)

Un circolo è costituito da n persone, in quanti modi si possono eleggere un presidente, un tesoriere e un segretario? In quanti modi posso scegliere 3 persone nel circolo?

Svolgimento domanda 1 Posso fare un presidente, un tesoriere e un segretario in:

$$n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!} \; nodi$$

Svolgimento domanda 2 Posso scegliere 3 persone in:

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{n!(n-3)!} \; nodi$$

Esercizio (Commissione)

Una commissione di 5 persone viene selezioanta da un gruppo di 9 donne e 6 uomini. Qual è la probabilità che la commissione sia formata da 2 donne e 3 uomini?

Svolgimento Sia D l'insieme delle donne e U quello degli uomini.

$$|D| = 9 \qquad |U| = 6$$

$\Omega = C_5(D \cup U)$ è l'insieme di tutte le possibili commissioni.
$|\Omega| = |C_5(D \cup U)| = \binom{D \cup U}{5} = \binom{15}{5}$

$E = \{d \cup u : d \in C_2(D), u \in C_3(U)\}$
$|E| = |C_2(D)| \cdot |C_3(U)| = \binom{9}{2} \cdot \binom{6}{3}$
In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{9}{2}\binom{6}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001} \simeq \mathbf{0.24}$$

Esercizio (Formazione di 2 squadre)

Vengono formate due squadre di $2n$ ragazzi, scelti fra $2n$ persone bianche e $2n$ persone nere. Qual è la probabilità che tutti i ragazzi bianchi siano in una stessa squadra? E qual è la probabilità che ogni squadra sia composta da n bianchi e n neri?

Svolgimento Siano B l'insieme delle persone bianche, N l'insieme delle persone nere e $B \cup N$ l'insieme di tutte le persone.
$\Omega = C_{2n}(B \cup N)$ la prima squadra.
$|\Omega| = \binom{|B \cup N|}{2n} = \binom{4n}{2n}$

$E = \{B, N\}$ evento che vede squadre di tutti bianchi o tutti neri.
$|E| = 2$
$F = \{b \cup \nu, b \in C_n(B) \ e \ \nu \in C_n(N)\}$
$|F| = |C_n(B)| \cdot |C_n(N)| = \binom{2n}{n} \cdot \binom{2n}{n}$

$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2}{\binom{4n}{2n}}$
$\mathbb{P}[F] = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2n}{n}^2}{\binom{4n}{2n}}$

Esercizio (Oggetto k in n oggetti)

Identifichiamo un oggetto in un insieme di n oggetti. Se scegliamo a caso un sottoinsieme di k oggetti fra quelli disponibili, qual è la probabilità che quello identificato sia uno di loro?

Svolgimento Sia n l'oggetto identificato.
$\Omega = C_k(\{1, \cdots, n\})$
$E = \{\omega \in C_k\{1, \cdots, n\} : n \in \omega\} = \{\nu \cup \{n\} : \nu \in C_{k-1}(\{1, \cdots, n-1\})\}$

$|\Omega| = \binom{n}{k}$
$|E| = \binom{n-1}{k-1}$

$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)\cancel{(n-k)!}}}{\frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{k!}{n!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(k-1)!}} \cdot \frac{k\cancel{(k-1)!}}{n\cancel{(n-1)!}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}$

3 Probabilità condizionata

É stato effettuato un esperimento e si è verificato l'evento $F \in \mathcal{E}$. Dato un altro evento $E \in \mathcal{E}$, la **probabilità condizionata** di E ed F, denotata $\mathbb{P}[E \mid F]$, è il nostro grado di fiducia che si sia verificato anche E.

Ripeto N volte l'esperimento e dico $\nu_N(F)$ il numero di volte in cui si è verificato F e $\nu_N(E \cap F)$ il numero di volte in cui si è verificato anche E. É ragionevole porre:

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \frac{\nu_N(E \cap F)}{\nu_N(F)}$$

$$\mathbb{P}[F] = \frac{\nu_N(F)}{N} \qquad \mathbb{P}[E \cap F] = \frac{\nu_N(E \cap F)}{N}$$

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \frac{\nu_N(E \cap F)/N}{\nu_N(F)/N} = \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[F]} \qquad \text{ha senso se } \mathbb{P}[F] > 0$$

In un esperimento con esiti equiprobabili è ragionevole porre:

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{|E \cap F|/|\Omega|}{|F|/|\Omega|} = \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[F]} \qquad \text{ha senso se } \mathbb{P}[F] > 0$$

Definizione si dice **probabilità condizionata** di $E \in \mathcal{E}$ a $F \in \mathcal{E}$ il numero:

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[F]} & \text{se } \mathbb{P}[F] > 0 \\ 0 & \text{se } \mathbb{P}[F] = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Esercizio (Cena in azienda)

L'azienda per cui lavora Mario organizza una cena per i dipendenti maschi che hanno almeno un figlio maschio. Mario ha due figli ed è invitato a cena. Qual è la probabilità che entrambi i figli di Mario siano maschi.

Svolgimento Definiamo:
$\Omega = \{(m, m), (f, m), (m, f), (f, f)\}$ dove, ad esempio, (f,m) significa che il primo figlio di Mario è femmina e il secondo è maschio.
$F = \{(m, m), (f, m), (m, f)\}$
$E = \{(m, m)\}$

$\mathbb{P}[F] = \frac{3}{4} \qquad \mathbb{P}[E] = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E] = \frac{1}{4}$

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[F]} & \text{se } \mathbb{P}[F] > 0 \\ 0 & \text{se } \mathbb{P}[F] = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E \mid F] \cdot \mathbb{P}[F]$$

Esercizio (Cena in azienda)

La signora Marta pensa che ci sia una probabilità di 0.3 che la sua azienda apra una sede a Vercelli. Ella crede di essere promossa a direttrice di una nuova sede con probabilità 0.6. Qual è la probabilità che Marta diventi direttrice a Vercelli?

Svolgimento Definiamo:
$E = \{\text{Marta diventa direttrice}\}$
$F = \{\text{Viene aperta una sede a Vercelli}\}$
$\mathbb{P}[E \cap F] = \{\text{Marta diventa direttrice a Vercelli}\}$

$\mathbb{P}[E \mid F] = 0.6$
$\mathbb{P}[F] = 0.3$
$\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E \mid F] \cdot \mathbb{P}[F] = 0.6 \cdot 0.3 = \mathbf{0.18}$

3.1 Formula di disintegrazione delle probabilità

Siano dati k eventi $F_1, \cdots, F_k \in \mathcal{E}$ tali che $F_i \cap F_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$ e

$$\bigcup_{j=1}^{k} F_i = \Omega \tag{11}$$

Quindi $F_1, \cdots, F_k$ è una partizione di Ω.

Dato $E \in \mathcal{E}$ osserviamo che

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} (E \cap F_i) \text{ e che } (E \cap F_i) \cap (E \cap F_j) = \emptyset \text{ per ogni } i \neq j$$

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{k} (E \cap F_i)\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[E \cap F_i] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[E \mid F_i] \cdot \mathbb{P}[F_i]$$

Esercizio (Studente in orario)

Per andare in università uno studente utilizza l'autobus il 56% delle volte, la metropolitana il 15% delle volte e il treno nei restanti casi. Con l'autobus lo studente arriva in orario con probabilità 0.32, con la metropolitana con probabilità 0.78 e con il treno con probabilità 0.55. Qual è la probabilità che lo studente arrivi in orario?

Svolgimento Definiamo:
$F_1 = \{\text{Lo studente usa l'autobus}\}$
$F_2 = \{\text{Lo studente usa la metro}\}$
$F_3 = \{\text{Lo studente usa il treno}\}$
$E = \{\text{Lo studente arriva in orario}\}$

$\mathbb{P}[F_1] = 0.56 \qquad \mathbb{P}[F_2] = 0.15 \qquad \mathbb{P}[F_3] = 1 - 0.56 - 0.15 = 0.29$
$\mathbb{P}[E \mid F_1] = 0.32 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_2] = 0.78 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_3] = 0.55$

$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1] + \mathbb{P}[E \mid F_2]\mathbb{P}[F_2] + \mathbb{P}[E \mid F_3]\mathbb{P}[F_3] = 0.32 \cdot 0.56 + 0.78 \cdot 0.15 + 0.55 \cdot 0.29 \simeq \mathbf{0.45}$

Esercizio (Società assicurativa)

Una società di assicurazioni divide le persone fra *"inclini a fare incidenti"* e *"non inclini a fare incidenti"*: le prime fanno un incidente all'anno con probabilità 0.4 le seconde con probabilità 0.2. Se la probabilità che una persona sia del primo tipo è 0.3, qual è la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dalla stipula del contratto?

Svolgimento Definiamo:
$F_1 = \{\text{Persone inclini a un incidente all'anno}\}$
$F_2 = F_1^C$
$E = \{\text{Incidente entro un anno dalla stipula del contratto}\}$

$\mathbb{P}[F_1] = 0.3 \qquad \mathbb{P}[F_2] = 1 - \mathbb{P}[F_1] = 0.7$
$\mathbb{P}[E \mid F_1] = 0.4 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_2] = 0.2$

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1] + \mathbb{P}[E \mid F_2]\mathbb{P}[F_2] = 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = \mathbf{0.26}$$

3.2 Formula di Bayes

$$\mathbb{P}[F_i \mid E] = \frac{\mathbb{P}[F_i \cap E]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_i] \cdot \mathbb{P}[F_i]}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}[E \mid F_j] \cdot \mathbb{P}[F_j]} \tag{12}$$

Esercizio (Società assicurativa dopo un anno)

Se il nuovo assicurato ha fatto un incidente entro l'anno dalla stipula del contratto, qual è la probabilità che sia una persona incline a fare incidenti?

Svolgimento

$$\mathbb{P}[F_1 \mid E] = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.26} \simeq \mathbf{0.46}$$

Esercizio (Esame a risposte multiple)

In una prova a risposte multiple uno studente può conoscere la risposta oppure tirare a indovinarla. Sia p la probabilità che conosca la risposta e sia m il numero di risposte alternative. Qual è la probabilità che lo studente conosca la risposta ad una domanda a cui ha risposto correttamente?

Svolgimento Definiamo:
$F_1 = \{\text{Lo studente conosce la risposta}\}$
$F_2 = F_1^C$
$E = \{\text{Lo studente ha risposto correttamente}\}$

$\mathbb{P}[F_1] = p \qquad \mathbb{P}[F_2] = 1 - \mathbb{P}[F_1] = 1 - p$
$\mathbb{P}[E \mid F_1] = 1 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_2] = \frac{1}{m}$
$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1] + \mathbb{P}[E \mid F_2]\mathbb{P}[F_2] = p + \frac{1-p}{m}$

$$\mathbb{P}[F_1 \mid E] = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p} + \frac{\mathbf{1-p}}{\mathbf{m}}} > \mathbf{p}$$

Esercizio (Analisi del sangue)

Un'analisi del sangue rileva una certa malattia, dove presente, con probabilità 0.99, il metodo produce falsi positivi con probabilità 0.02. Se questa malattia incide sulla popolazione con probabilità 0.005, qual è la probabilità di essere malati se risultati positivi?

Svolgimento Definiamo:
$F_1 = \{\text{Malato}\}$
$F_2 = \{\text{Sano}\} = F_1^C$
$E = \{\text{Positivo}\}$

$\mathbb{P}[F_1] = 0.005 \qquad \mathbb{P}[F_2] = 0.995$
$\mathbb{P}[E \mid F_1] = 0.99 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_2] = 0.02$
$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1] + \mathbb{P}[E \mid F_2]\mathbb{P}[F_2] = 0.99 \cdot 0.005 + 0.02 \cdot 0.995 \simeq 0.025$

$$\mathbb{P}[F_1 \mid E] = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.025} \simeq \mathbf{0.2}$$

Esercizio (Incidente aereo)

Un aereo cade in una fra 5 regioni. La probabilità di non riuscire a trovare l'aereo nella regione i-esima è p_i. Qual è la probabilità che l'aereo si trovi in ognuna di queste regioni se una ricerca nella prima ha dato esito negativo?

Svolgimento Definiamo:
$F_i = \{\text{L'aereo è caduto nella regione } i\}$
$E = \{\text{Non è stato trovato nella prima regione}\}$

$\mathbb{P}[F_i] = \frac{1}{5} \quad \forall i$
$\mathbb{P}[E \mid F_1] = p_1 \qquad \mathbb{P}[E \mid F_2] = \mathbb{P}[E \mid F_3] = \mathbb{P}[E \mid F_4] = \mathbb{P}[E \mid F_5] = 1$
$\mathbb{P}[E] = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}[E \mid F_i]\mathbb{P}[F_i] = p_1\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{4+p_1}{5}$

$$\mathbb{P}[F_1 \mid E] = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_1]\mathbb{P}[F_1]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{p + \frac{1}{5}}{\frac{4+p_1}{5}} = \frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{4 + p_1}}$$

$$\mathbb{P}[F_2 \mid E] = \mathbb{P}[F_3 \mid E] = \mathbb{P}[F_4 \mid E] = \mathbb{P}[F_5 \mid E] = \frac{\mathbb{P}[E \mid F_2]\mathbb{P}[F_2]}{\mathbb{P}[E]} = \frac{\frac{1}{\cancel{5}}}{\frac{4+p_1}{\cancel{5}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4 + p_1}}$$

3.3 Eventi indipendenti

Può succedere che $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \mid F]$. Si dice che l'evento E è indipendente da F.

$$\mathbb{P}[E \mid F] = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[F]} & \text{se } \mathbb{P}[F] > 0 \\ 0 & \text{se } \mathbb{P}[F] = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[E \cap F] \Rightarrow \mathbb{P}[F] = \frac{\mathbb{P}[E \cap F]}{\mathbb{P}[E]} = \mathbb{P}[F \mid E]$$

Anche F è indipendente da E.
Definizione: Dati due eventi $E, F \in \mathcal{E}$, questi sono detti **indipendenti** se $\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[F]$.
Se E ed F sono **incompatibili**, allora:

$$\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0 \tag{13}$$

Quindi E ed F sono anche indipendenti solo se $\mathbb{P}[E] = 0$ oppure $\mathbb{P}[F] = 0$.

Attenzione

$E \quad F = E^C \Rightarrow E \cap F = \emptyset$ [incompatibilità e indipendenza non sono la stessa cosa]

Esercizio (Estrazione di un asso)

Sia E l'evento che vede pescato un asso in un mazzo di 52 carte. Sia F l'evento che vede pescata una carta di picche.

Svolgimento Le probabilità sono:
$\mathbb{P}[E] = \frac{4}{52} \qquad \mathbb{P}[F] = \frac{13}{52} \qquad \mathbb{P}[E \cap F] = \frac{1}{52}$
$\mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[F] = \frac{4 \cdot 13}{52 \cdot 52} = \frac{1}{52}$
Dunque $\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[F]$
E ed F sono indipendenti.

Esercizio (Somma di due dadi)

Si tirano due dadi. Sia E l'evento che la somma dei dadi è 7. Sia F l'evento che il primo dado è 4 e sia G l'evento che il secondo dado è 3.

Svolgimento Definiamo:
$\Omega = \times^2\{1, \cdots, 6\}$
$E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
$F = \{(4,1),(4,2),(4,2),(4,4),(4,5),(4,6)\}$
$G = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$
$E \cap F = \{(4,3)\} \qquad E \cap G = \{(4,3)\} \qquad F \cap G = \{(4,3)\}$
$\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E \cap G] = \mathbb{P}[F \cap G] = \frac{1}{36}$

$$\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[F] \text{ E e F sono indipendenti}$$

$$\mathbb{P}[E \cap G] = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[G] \text{ E e G sono indipendenti}$$

$$\mathbb{P}[F \cap G] = \mathbb{P}[F]\mathbb{P}[G] \text{ F e G sono indipendenti}$$

Ora poniamo $H = F \cap G = \{(4,3)\}$ l'evento E e H sono indipendenti?
$E \cap H = R \cap F \cap G = \{(4,3)\}$
$\mathbb{P}[E \cap H] = \frac{1}{36} \qquad \mathbb{P}[H] = \frac{1}{36} \qquad \mathbb{P}[E] = \frac{1}{6}$

$$\mathbb{P}[E \cap H] \neq \mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[H] \text{ E e H sono dipendenti}$$

Attenzione

L'indipendenza a coppie non vuol dire che una qualunque combinazione sia indipendente, invece per l'incompatibilità sì.

3.4 Indipendenza con 3 o più insiemi

Definizione: Gli eventi $k_1, \cdots, k_2 \in \mathcal{E}$ sono indipendenti se per ogni $l \in \{1 \cdots k\}$ e indici $l \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq k$ si ha:

$$\mathbb{P}[E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_l}] = \mathbb{P}[E_{i_1}] \cdot \mathbb{P}[E_{i_2}] \cdots \mathbb{P}[E_{i_l}] \tag{14}$$

Proposizione: Se $E_1 \cdots E_k$ sono k eventi indipendenti in $\mathcal{E}$, allora $F_1 \cdots F_k$ sono indipendenti con $F_i = E_i$ oppure $F_i = E_i^C$ per ogni i.
Dimostrazione: Per $k = 2$. Per ipotesi $\mathbb{P}[E_1 \cap E_2] = \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[E_2]$. Dobbiamo provare che:

1. $\mathbb{P}[E_1^C \cap E_2] = \mathbb{P}[E_1^C]\mathbb{P}[E_2]$
2. $\mathbb{P}[E_1 \cap E_2^C] = \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[E_2^C]$
3. $\mathbb{P}[E_1^C \cap E_2^C] = \mathbb{P}[E_1^C]\mathbb{P}[E_2^C]$

3.4.1 Dimostrazione per 1

$(E_1 \cap E_2) \cup (E_1^C \cap E_2) = E_2 \qquad (E_1 \cap E_2) \cap (E_1^C \cap E_2) = \emptyset$
Per il 3° assioma $\mathbb{P}[E_2] = \mathbb{P}[E_1 \cap E_2] + \mathbb{P}[E_1^C \cap E_2]$

$$\mathbb{P}[E_1^C \cap E_2] = \mathbb{P}[E_2] - \mathbb{P}[E_1 \cap E_2] \stackrel{\text{Ipotesi indipendenza}}{=} \mathbb{P}[E_2] - \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[E_2] = \mathbb{P}[E_2]\{1 - \mathbb{P}[E_1]\} = \mathbb{P}[E_2]\mathbb{P}[E_1^C]$$

3.4.2 Dimostrazione per 2

Uguale alla dimostrazione per 1 cambiando il ruolo di E_1 e E_2.

3.4.3 Dimostrazione per 3

$$\mathbb{P}[E_1^C \cap E_2^C] \stackrel{\text{De Morgan}}{=} \mathbb{P}[(E_1 \cap E_2)^C] = 1 - \mathbb{P}[E_1 \cup E_2] = 1 - \{\mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] - \mathbb{P}[E_1 \cap E_2]\} \stackrel{\text{Ipotesi indipendenza}}{=}$$
$$= 1 - \mathbb{P}[E_1] - \mathbb{P}[E_2] + \mathbb{P}[E_1]\mathbb{P}[E_2] = \{1 - \mathbb{P}[E_1]\}\{1 - \mathbb{P}[E_2]\} = \mathbb{P}[E_1^C]\mathbb{P}[E_2^C]$$

Esercizio (Sistema in parallelo) (1)

Un sistema costituto da n componenti si dice in **parallelo** se funziona fino a quando almeno uno dei componenti funziona. Se il componente i-esimo funziona con probabilità p_i t tutti i componenti sono indipendenti, qual è la probabilità che il sistema funzioni?

Svolgimento (1° modo, smart)

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \qquad E^C = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^C$$

$$\mathbb{P}[E^C] \stackrel{\text{Per indipendenza}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[E_i^C]$$

$$1 - \mathbb{P}[E] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[E_i^c] = \prod_{i=1}^{n} \{1 - \mathbb{P}[E_i]\} = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{E}] = \mathbf{1} - \prod_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{1} - \mathbf{p_i})$$

Svolgimento (2° modo)

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

$F_1 = E_1$ il primo componente funziona.
$F_2 = E_1^C \cap E_2$ non funziona il primo ma il secondo sì.
$F_3 = E_1^C \cap E_2^C \cap E_3$
$F_i = E_1^C \cap E_2^C \cap \cdots \cap E_{i-1}^C \cap E_i$ non funzionano $n-1$ componenti, funziona solo l'ultimo.

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \qquad F_i \cap F_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

$$\mathbb{P}[E] \neq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[E_i] \qquad \mathbb{P}[E] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[F_i]$$

$\mathbb{P}[F_1] = \mathbb{P}[E_1] = p_1$
$\mathbb{P}[F_2] = \mathbb{P}[E_1^C \cap E_2] = \mathbb{P}[E_1^C]\mathbb{P}[E_2] = (1 - p_1) \cdot p_2$
$\mathbb{P}[F_i] = \mathbb{P}[E_1^C \cap \cdots \cap E_{i-1}^C \cap E_i] = \mathbb{P}[E_1^C] \cdots \mathbb{P}[E_{i-1}^C]\mathbb{P}[E_i] = (1-p_1) \cdots (1-p_{i-1})p_i = \prod_{j=1}^{i-1}(1-p_j)p_i$

Esercizio (Sistema in parallelo)(2)

$$\mathbb{P}[E] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[F_i] = p_1 + \sum_{i-2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (1-p_j)p_i$$

$p_i = 1 - (1 - p_i)$

Somme telescopiche

$$\sum_{i=h}^{k} (a_i - a_{i-1}) = \cancel{a_h} - a_{h-1} + \cancel{a_{h+1}} - \cancel{a_h} + \cdots + a_k - \cancel{a_{k-1}} = a_k - a_{h-1}$$

$$\mathbb{P}[E] = p_1 + \sum_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (1-p_j)\{1-(1-p_i)\} = p_1 + \sum_{i=2}^{n} \left\{ \overbrace{\prod_{j=1}^{i-1}(1-p_j)}^{a_{i-1}} - \overbrace{\prod_{j=1}^{i}(1-p_j)}^{a_i} \right\} =$$

$$= p_1 + a_1 + a_n = \cancel{p_1} + 1 - \cancel{p_1} - \prod_{j=1}^{n}(1-p_j) = \mathbf{1} - \prod_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{1} - \mathbf{p_j})$$

3.5 Spazio di probabilità (NON RICHIESTO ALL'ESAME)

L'insieme degli eventi $\mathcal{E}$ di Ω è assunto costituire una σ-algebra:

1. $\Omega \in \mathcal{E}$
2. se $E \in \mathcal{E}$, allora $E^C \in \mathcal{E}$
3. se $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{E}$, allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$

Se $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{E}$ allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$.
Se $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{E}$, allora $E_1^C, E_2^C \cdots \in \mathcal{E}$. Quindi $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^C \in \mathcal{E}$. Segue che $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^C)^C \in \mathcal{E}$
Una funzione $\mathbb{P}$ da $\mathcal{E}$ a $\mathbb{R}$ è una probabilità se valgono i 3 assiomi di Kolmogorov:

1. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
2. $\mathbb{P}[E] \geq 0 \qquad \forall E \in \mathcal{E}$
3. se $E_1, E_2, \cdots$ sono eventi in E tali che $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$, allora $\mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_n]$

La terna $(\Omega, E, \mathbb{P})$ è detta **spazio di probabilità**.

Parte II
Variabili aleatorie

4 Variabili aleatorie

Definizione: Una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ è detta **variabile aleatoria** se per ogni numero $a \in \mathbb{R}$:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{E} \tag{15}$$

Se Ω è finito, $\mathcal{E}$ è l'insieme delle parti di Ω e una qualsiasi funzione X su Ω è una **variabile aleatoria**.

Ex. La somma di due dadi è una variabile aleatoria, $\Omega = \times^2\{1 \cdots 6\} \qquad X = (i,j) \in \Omega \to i + j$

4.1 Funzione indicatrice

Dato $E \in \mathcal{E}$ diciamo **funzione indicatrice** di E la funzione:

$$I_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in E \\ 0 & \text{se } \omega \notin E \end{cases} \tag{16}$$

$X = I_E$ Mostriamo che per ogni $a \in \mathbb{R}$:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $a < 0$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} = \emptyset \in \mathcal{E}$$

Se $0 \leq a < 1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} = E^C \in \mathcal{E}$$

Se $a \geq 1$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} = \Omega \in \mathcal{E}$$

Notazione

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \text{ lo scriverò come } \{X \in A\}$$
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \text{ lo scriverò come } \mathbb{P}[X \in A]$$

4.2 Funzione di ripartizione (cumulativa)

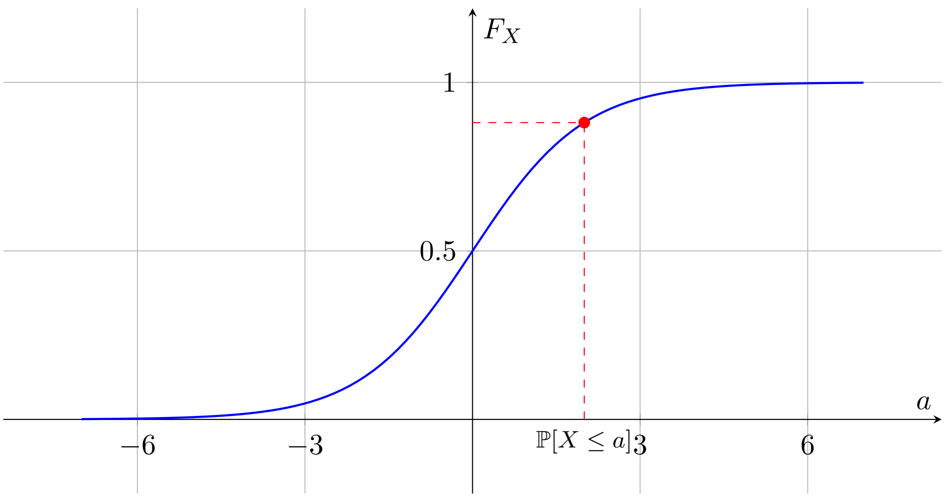
Dato $a \in \mathbb{R}$, se X è una variabile aleatoria è definita la probabilità dell'evento $\{X \leq a\}$. Diciamo **funzione di ripartizione**, o **cumulativa**, la funzione che mappa a nel numero:

$$F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a]$$

Se $b > a$ allora:

$$F_X(b) = \mathbb{P}[X \leq b] \geq \mathbb{P}[X \leq a] = F_X(a)$$

1. F_X è una funzione NON decrescente.
2. $\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$
3. $\lim_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$



Esercizio (Funzione di ripartizione somma di due dadi)

Calcolare la funzione di ripartizione F_X della variabile X somma di due dadi.

Svolgimento Definiamo:

$$\Omega = \times^2\{1\cdots 6\} \qquad X : \Omega \to \mathbb{R} \quad (i,j) \mapsto X((i,j)) = i+j$$

$\{X = k\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$
$\{X = 2\} = \{(1,1)\}$
$\{X = 3\} = \{(1,2),(2,1)\}$
$\{X = 4\} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$
$\{X = 5\} = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$
$\{X = 6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$
$\{X = 7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
$\{X = 8\} = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$
$\{X = 9\} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$
$\{X = 10\} = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$
$\{X = 11\} = \{(5,6),(6,5)\}$
$\{X = 12\} = \{(6,6)\}$

$$\downarrow F_X(a) := \mathbb{P}[X \le a] \downarrow$$

$$\begin{cases}
0 & \text{se } a < 2 \\
\mathbb{P}[\{X = 2\}] = \frac{1}{36} & \text{se } 2 \le a < 3 \\
\mathbb{P}[\{X = 2,3\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} & \text{se } 3 \le a < 4 \\
\mathbb{P}[\{X = 2,3,4\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} & \text{se } 4 \le a < 5 \\
\mathbb{P}[\{X = 2,3,4,5\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} & \text{se } 5 \le a < 6 \\
\mathbb{P}[\{X = 2,3,4,5,6\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36} & \text{se } 6 \le a < 7 \\
\mathbb{P}[\{X = 2,3,4,5,6,7\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{21}{36} & \text{se } 7 \le a < 8 \\
\mathbb{P}[\{X = 2,3,4,5,6,7,8\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{26}{36} & \text{se } 8 \le a < 9 \\
\mathbb{P}[\{X = \cdots 9\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{30}{36} & \text{se } 9 \le a < 10 \\
\mathbb{P}[\{X = \cdots 10\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{33}{36} & \text{se } 10 \le a < 11 \\
\mathbb{P}[\{X = \cdots 11\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{35}{36} & \text{se } 11 \le a < 12 \\
\mathbb{P}[\{X = \cdots 12\}] = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} & \text{se } a \ge 12
\end{cases}$$

In generale F_X è una funzione continua da destra.

$$F_X(a) := \mathbb{P}[X \le a]$$

Dati $a < b$, $\{X \le b\} = \{X \le a\} \cup \{a < X \le b\}$
$\mathbb{P}[X \le b] = \mathbb{P}[X \le a] + \mathbb{P}[a < X \le b]$
$F_X(b) = f_X(a) + \mathbb{P}[a < X \le b]$

$$\mathbb{P}[a < X \le b] = f_X(b) - f_X(a)$$

Esercizio (Funzione di ripartizione)(1)

Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 1 - e^{-a} \text{ se} & \text{a¿0} \end{cases}$$

- Quanto vale $\mathbb{P}[X \le 0]$?
- Quanto vale $\mathbb{P}[\ln 2 < X \le \ln 3]$?
- Quanto vale $\mathbb{P}[X > 7]$?

Esercizio (Funzione di ripartizione)(2)

- $\mathbb{P}[X \leq 0] = f_x(0) = 0$
- $\mathbb{P}[X \in (\ln 2, \ln 3)] = f_X(\ln 3) - f_X(\ln 2) = (1 - \frac{1}{3}) - (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}[X > 7] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 7] = f_X(7) = e^{-7}$

4.3 Funzione di massa di probabilità

Definizione: La **funzione di massa di probabilità** di una variabile aleatoria X è la funzione che mappa $X \in \mathbb{R}$ in:

$$p_X(x) := \mathbb{P}[X = x] \tag{17}$$

4.4 Variabile aleatoria discreta

Definizione: Una variabile aleatoria X è detta **discreta** se prende al più un numero numerabile di valori distinti.

Sia X una variabile discreta e siano $x_1, x_2, \cdots$ i valori che prende.

$$F_X(a) := \mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\substack{i=1 \\ x_i \leq a}}^{\infty} \{X = x_i\}\right] = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \leq a}}^{\infty} \mathbb{P}[X = x_i] = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \leq a}}^{\infty} p_X(x_i) \tag{18}$$

Se prendo il limite di $a \to \infty$ ottengo:

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) \qquad \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\}$$

4.5 Somma geometrica

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, consideriamo:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda^i = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$$

Se $\lambda = 1$ allora

$$\sum_{i=0}^{n} = \lambda^i = n + 1$$

Se $\lambda \neq 1$ allora

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda^i = \frac{1-\lambda}{1-\lambda} \sum_{i=0}^{n} \lambda^i = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=0}^{n} (\overset{\text{Somma telescopica}}{\lambda^i - \lambda^{i+1}}) = \frac{(1 - \cancel{\lambda}) + (\cancel{\lambda} - \cancel{\lambda^2}) + \cdots + (\cancel{\lambda^n} - \lambda^{n+1})}{1-\lambda} = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1-\lambda} \tag{19}$$

Mando n a infinito:

- se $\lambda \geq 1$ allora $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = +\infty$
- se $\lambda \in (0, 1)$ allora $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \frac{1}{1-\lambda}$

Esercizio (Variabile aleatoria discreta)

É data una variabile aleatoria discreta X che prende valori interi non negativi con funzione di massa di probabilità.

$$p_X(i) = C\lambda^i \qquad \text{per } i = 0, 1, 2, \cdots$$

dove $\lambda \in (0, 1)$ è un parametro. Quanto vale C?

Svolgimento Uso il fatto che $\sum_{i=0}^{\infty} p_X(i) = 1$ cioè:

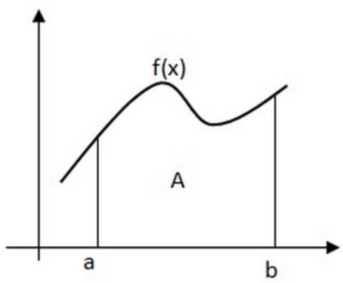
$$1 - \sum_{i=0}^{\infty} C\lambda^i = C \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \frac{C}{1-\lambda}$$

da cui:

$$\mathbf{C = 1 - \lambda}$$

4.6 Integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \text{area sotto } f \text{ su } [a, b]$$



Una funzione F è **primitiva** di f se $F'(x) = f(x)$ per ogni x.

4.6.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se F è primitiva di f allora:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

f	**F**
$e^{-\lambda x}$	$-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + c$
x^γ	$\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} + c$
1	$x + c$
$\alpha f + \beta g, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\alpha F + \beta G$

$$G(x) := \int_a^x f(y)dy + c \text{ è primitiva di } f$$

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$G(x) = F(x) - F(a) + x \Rightarrow \frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

4.6.2 Integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \{F(b) - F(a)\}$$

4.7 Variabili continue

Definizione: Una variabile aleatoria X si dice continua se esiste una funzione non negativa f_X tale che:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

4.7.1 Densità di probabilità

La funzione $f(x)$ è detta **densità di probabilità** di X.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
- $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \int_a^b f_X(x)dx$

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 0 \\ 1 - e^{-a} & \text{se } a > 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx \text{ con } f : X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 0 \\ \int_0^a e^{-x}dx = -e^{-a} - (-e^{-a}) = 1 - e^{-a} & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

Se X è una variabile continua con densità di probabilità f_X allora F_X è primitiva di f_X.

Esercizio (Densità di probabilità)

Sia X una variabile continua con densità di probabilità:

$$F_X(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & \text{se } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quanto vale c?

Svolgimento Uso $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^2 f_X(x)dx = \int_0^2 c(4x - 2x^2)dx = c\int_0^2 (4x - 2x^2)dx$$

Quindi:

$$c = \frac{1}{\int_0^2 (4x - 2^2}) dx$$

$$\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 4\int_0^2 xdx - 2\int_0^2 x^2dx = 4(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}) - 2(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}) = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\mathbf{x = \frac{3}{8}}$$

Se X è continua allora,

$$p_X(x) := \mathbb{P}[X = x] = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Fisso $x \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}[X = x] = \mathbb{P}[x - \varepsilon < X \leq x] = \int_{x-\varepsilon}^{x} f_X(y)dy$$

Mando ε a zero e trovo

$$\mathbb{P}[X = x] = 0$$

Differenza fondamentale con le variabili continue

In particolare $p_X \neq f_X$ se è continua!!!

Esercizio (Variabile aleatoria continua)

Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mostrare che $Y = X^2$ è una variabile aleatoria continua e calcolarne la densità di probabilità.

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad Y : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega) \qquad \omega \mapsto Y(\omega) = X^2(\omega)$$

Se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, allora $Z = \phi(X)$ è una variabile aleatoria.

$$Z : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto Z(\omega) = \phi(X(\omega))$$

Svolgimento Bisogna mostrare che esiste una funzione non negativa f_Y tale che:

$$F_Y(a) := \mathbb{P}[Y \leq a] = \int_{-\infty}^{a} f_Y(y)dy$$

$$\mathbb{P}[Y \leq a] = \mathbb{P}[X^2 \leq a] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X^2(\omega) \leq a\}] = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ \mathbb{P}[-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a}] & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

Per $a \geq 0$

$$\mathbb{P}[-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a}] = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} f_X(x)dx = \int_{0}^{\sqrt{a}} f_X(x)dx = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{a}} 1dx = \sqrt{a} & \text{se } a \leq 1 \\ \int_0^1 1dx = 1 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[Y \leq a] = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ \sqrt{a} & \text{se } 0 \leq a \leq 1 \\ 1 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{se } 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{a} f_Y(y)dy = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 0 \\ \int_0^a \frac{1}{2\sqrt{y}}dy & \text{se } 0 < a \leq 1 = \mathbb{P}[Y \leq a] \\ \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{y}}dy = 1 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Y è una variabile aleatoria continua.

4.8 Funzione cumulativa congiunta

Date le variabili aleatorie X e Y, si chiama **funzione cumulativa congiunta** la funzione F_{XY} definita da:

$$F_{XY}(a,b) := \mathbb{P}[X \leq a \text{ e } Y \leq b] \tag{20}$$

4.8.1 Funzione di massa di probabilità congiunta

Si chiama **funzione di massa di probabilità congiunta** la funzione:

$$p_{X,Y}(x,y) := \mathbb{P}[X = x \text{ e } Y = y] \tag{21}$$

Se X e Y sono discrete, e prendono i valori distinti $x_1, x_2, \cdots$ e $y_1, y_2, \cdots$ rispettivamente, allora:

$$\{(X,Y) \in A\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X = x_i \text{ e } Y = y_i\}$$

Il 3° assioma di Kolmogorov mi da:

$$\mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Se $A = \{x_i\} \times \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Esplicitazione $A = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : X = x_i\}$ $\{(X,Y) \in A\} = \{X = x_i\}$

$$\mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \mathbb{P}[X = x_i] = p_X(x_i) \Rightarrow p_X(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Dalla funzione di massa di probabilità congiunta posso ottenere la funzione di X.

p_X è **marginale** della funzione di massa di probabilità congiunta.

$$p_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Prendi $A = \mathbb{R} \times \{y_j\}$

Osservazione

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Esercizio (3 valori di X e 4 valori di Y)(1)

Sia X una variabile discreta che prende 3 valori e Y una variabile discreta che prende 4 valori con funzione di massa di probabilità congiunta data dalla seguente tabella:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$
X_2	$\frac{1}{4}$	α	0	$\frac{1}{12}$
X_3	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	α

Con α un parametro.
Determinare α e i marginali p_X e p_Y.

Esercizio (3 valori di X e 4 valori di Y)(2)

Svolgimento Per determinare α osserviamo che la somma di tutti i valori della tabella deve essere 1.

$$1 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} p_{X,Y}(x_i, y_j) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \alpha + 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{24} + \alpha = 2\alpha + \frac{11}{12}$$

$$\alpha = \mathbf{\frac{1}{24}}$$

Sommando sulle righe trovo:

$$p_X(x_i) = \sum_{j=1}^{4} p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_{X,Y}(x_i, y_1) + p_{X,Y}(x_i, y_2) + p_{X,Y}(x_i, y_3) + p_{X,Y}(x_i, y_4) =$$

$$= \begin{cases} p_X(x_1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{11}{24} \\ p_X(x_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{3}{8} \\ p_X(x_3) = \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Sommando sulle colonne trovo:

$$\begin{cases} p_Y(y_1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \\ p_Y(y_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + 0 = \frac{1}{8} \\ p_Y(y_3) = \frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \\ p_Y(y_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8} \end{cases}$$

4.9 Variabili aleatorie congiuntamente continue

Definizione: Due variabili aleatorie sono **congiuntamente continue** se esiste una funzione non negativa $f_{X,Y}$ su $\mathbb{R}^2$ tale che per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \int_A f_{X,Y}(x, y)dxdy \tag{22}$$

Osservazione

Se prendo $A = \mathbb{R}^2$ trovo:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y)dxdy$$

Se $A = [a, b] \times \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \mathbb{P}\big[X \in [a, b]\big]$$

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \int_A f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_{[a,b]\times\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_{[a,b]} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dy \right\} dx$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$$

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \int_{[a,b]} f_X(x)dx \Rightarrow \mathbb{P}\big[X \in [a, b]\big] = \int_{[a,b]} f_X(x)dx$$

In conclusione X è continua con densità di probabilità marginale:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$$

Si ha anche Y è continua con densità di probabilità marginale:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Siano X e Y variabili discrete e $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$A = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ e } y \in [\psi(x), \phi(y)]\}$$

$$\mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in [a,b]}}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ y_j \in [\psi(x_i),\phi(x_i)]}}^{\infty} p_{X,Y}(x_i, y_j) \right\} \qquad \int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f_{X,Y}(x,y)dy \right\} dx$$

Esercizio (Variabili congiuntamente continue)

Siano X ed Y due variabili congiuntamente continue con densità di probabilità:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quanto valgono i marginali di $f_{X,Y}$ e quanto vale $\mathbb{P}[X < Y]$?

Svolgimento

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_0^{+\infty} 2e^{-x-2y} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\int_0^{+\infty} 2e^{-x-2y}dy = 2e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = e^{-x}$ perché $\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy = \frac{1}{2}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ 2e^{-2y} & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X < Y] = \mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_x^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \right\} dx$$

$$\int_x^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_x^{+\infty} 2e^{-x-2y}dy & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\int_x^{+\infty} 2e^{-x-2y} = 2e^{-x}\int_x^{+\infty} e^{-2y}dy = \cancel{2}e^{-x} \cdot \frac{e^{-2x}}{\cancel{2}} = e^{-3x}$$

$$\int_x^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-3x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{X} < \mathbf{Y}] = \int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \mathbf{e^{-3x}dx} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

4.10 Variabili indipendenti

Definizione: Due variabili aleatorie X ed Y sono **indipendenti** se gli eventi $\{X \leq a\}$ e $\{Y \leq b\}$ sono indipendenti per ogni a e b. Questo vuol dire:

$$\mathbb{P}[X \leq a \mid Y \leq b] = \mathbb{P}[X \leq a]$$

Cioè

$$\mathbb{P}[X \leq a \text{ e } Y \leq b] = \mathbb{P}[X \leq a]\mathbb{P}[Y \leq b]$$

Cioè

$$F_{X,Y}(a,b) = F_X(a)F_Y(b) \tag{23}$$

Quindi possiamo anche dire che X e Y sono indipendenti se $F_{X,Y}(a,b) = F_X(a)F_Y(b)$.

Se le variabili sono discrete la richiesta di indipendenza equivale a:

$$p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

Se sono continue la richiesta di indipendenza è equivalente a:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} 2e^{-2y} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0 \end{cases} = f_X(x)f_Y(y)$$

Se ho k variabili aleatorie, queste sono descritte da una funzione di massa di probabilità con k argomenti se discreta, altrimenti sono descritte da densità di probabilità con k argomenti se continua. Funzione di massa di probabilità:

$$p_{X_1,\cdots,X_k}$$

La densità di probabilità è:

$$f_{X1,\cdots,X_k}$$

Le k variabili continue $X_1, \cdots, X_k$ sono indipendenti se:

$$f_{X_1,\cdots,X_K}(x_1 \cdots x_k) = \prod_{e=1}^{k} f_{X_e}(x_e)$$

Notazione

Chiamo $\mathcal{R}_X$ l'insieme dei valori assunti da una variabile discreta X.

Ex. Se X è la somma di due dadi, allora:

$$\mathcal{R}_X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

4.11 Valore atteso / aspettazione

Definizione: Se X è una variabile discreta che assume valori nell'insieme $\mathcal{R}_X$, si chiama **valore atteso**, o **aspettazione**, il numero (se esiste):

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} x p_X(x) \tag{24}$$

Ex. 1 Se X è il numero di un lancio di un dado, allora $\mathcal{R}_X = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $p_X(x) = \frac{1}{6}$ per ogni x e:

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

Ex. 2 Se X è la funzione indicatrice di un evento $E \in \mathcal{E}$, allora $\mathcal{R}_X = \{0,1\}$ e $p_X(1) = \mathbb{P}[E]$ e $p_X(0) = \mathbb{P}[E^C]$. Segue che:

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \mathbb{P}[E^C] + 1 \cdot \mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E]$$

Definizione: Se X è una variabile continua, diciamo **valore atteso**, o **aspettazione**, il numero (se esiste):

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \tag{25}$$

4.12 Integrazione per parti

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) + f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

$\int_a^b \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \int_a^b [\frac{d}{dx}f(x)]g(x)dx + \int_a^b f(x)[\frac{d}{dx}g(x)]dx \Rightarrow f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{26}$$

Ex. 1 $f(x) = x$ e $g(x) = e^{-\lambda x}$

$$-\lambda \int_a^b xe^{-\lambda x}dx = be^{-\lambda b} - ae^{-\lambda a} - \int_a^b 1 \cdot e^{-\lambda x}dx$$

$$\int_a^b e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a}$$

$$-\lambda \int_a^b xe^{-\lambda x}dx = be^{-\lambda b} - ae^{-\lambda a} - \left\{ -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a}\right\} \overset{\text{Divido per } -\lambda}{=} \frac{ae^{-\lambda a} - be^{-\lambda b}}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{\lambda^2}$$

Se $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ex. 2 $\int_a^b x^k e^{-\lambda x}dx$ con k intero positivo. $f(x) = x^k$ e $g(x) = e^{-\lambda x}$

$$-\lambda \int_a^b x^k e^{-\lambda x}dx = b^k e^{-\lambda b} - a^k e^{-\lambda a} - \int_a^b kx^{k-1}e^{-\lambda x}dx$$

Se $a = 0$:

$$-\lambda \int_0^b x^k e^{-\lambda x}dx = b^k e^{-\lambda b} - k\int_0^b x^{k-1}e^{-\lambda x}dx$$

Se $\lambda > 0$ e $b \to \infty$:

$$\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx = \frac{k}{\lambda}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-\lambda x}dx$$

Per $k = 2$:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^3}$$

Per $k = 3$:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\lambda x}dx = \frac{3}{\lambda}\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{3 \cdot 2}{\lambda^4}$$

Per $k = 4$:

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\lambda x}dx = \frac{4}{\lambda}\int_0^\infty x^3 e^{-\lambda x}dx = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{\lambda^5}$$

$$\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} \tag{27}$$

Esercizio (Aspettazione)

Sia X una variabile aleatoria continua con densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 2e^{-2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

Svolgimento Per definizione:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^\infty x2e^{-2x}dx = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Esercizio (Aspettazione non esistente)

Consideriamo una variabile continua con densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Con $\alpha > 0$ un parametro.

Svolgimento

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_1^{\infty} x \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \int_1^{\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha}} dx$$

$$\int_1^b \frac{\alpha}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{\alpha b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \ln b - \ln 1 & \alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \frac{d}{dx} x^{1-\alpha} = (1-\alpha)x^{-\alpha} \text{ se } \alpha \neq 1 \\ \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \end{matrix} \qquad \frac{d}{dx}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = x^{-\alpha}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\alpha}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

La variabile continua con densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

ha aspettazione uguale a $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ solo se $\alpha > 1$.

4.13 Funzioni di variabili aleatorie

$X : \Omega \to \mathbb{R}$
$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua
$Y : \Omega \to \mathbb{R}$
$\omega \mapsto Y(\omega) = \phi(X(\omega))$

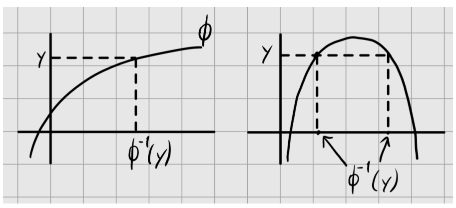
$$\mathbb{E}[Y]?$$

Se X è discreta con valori in $\mathcal{R}_X$, allora Y è discreta con valori in $\mathcal{R}_Y = \{\phi(x) : x \in \mathcal{R}_X\}$

$$\mathbb{E}[Y] := \sum_{y \in \mathcal{R}_Y} y p_Y(y)$$

Dato $y \in \mathcal{R}_Y$, sia $\phi^{-1}(y)$ l'insieme:

$$\phi^{-1}(y) = \{x \in \mathcal{R}_X : \phi(x) = y\}$$



Dato $y \in \mathcal{R}_Y$

$$p_Y(y) := \mathbb{P}[Y = y] = \mathbb{P}[x \in \phi^{-1}(y)] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{x\in\phi^{-1}(y)} \{X = x\}\right] \overset{\text{Kolmogorov}}{=} \sum_{x\in\phi^{-1}(y)} \mathbb{P}[X = x] = \sum_{x\in\phi^{-1}(y)} p_X(x)$$

$\{Y = y\} = \{x \in \phi^{-1}(y)\}$

$$p_Y(y) = \sum_{x\in\phi^{-1}(y)} p_X(x)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y\in\mathcal{R}_Y} y \sum_{x\in\phi^{-1}(y)} p_X(x) = \sum_{y\in\mathcal{R}_Y}\sum_{x\in\phi^{-1}(y)} \phi(x)p_X(x) = \sum_{x\in\mathcal{R}_X} \phi(x)p_X(x)$$

Proposizione: Sia X una variabile aleatoria discreta o continua, e sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora:

- se X è discreta $\phi(X)$ è discreta e:

$$\mathbb{E}[\phi(x)] = \sum_{x\in\mathcal{R}_X} \phi(x)p_X(x)$$

- se X è continua, $\phi(x)$ è continua e:

$$\mathbb{E}[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f_X(x)dx$$

Esercizio (Calcolare il valore atteso)

Sia X una variabile continua con densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 2e^{-2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Calcolare il valore atteso di X^3.

Svolgimento $\phi(x) = x^3$

$$\mathbb{E}[X^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx = 2\int_0^{\infty} x^3 e^{-2x}dx \overset{(\lambda=2,k=3)}{=} 2\cdot\frac{3!}{2^4} = \frac{3!}{2^3} = \frac{3}{4}$$

$\phi(x) = \alpha x + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta] = \alpha\mathbb{E}[X] + \beta\mathbb{E}[1] = \alpha\mathbb{E}[X] + \beta \qquad \mathbb{E}[1] = 1$$

Proposizione: Se $X_1, \cdots, X_k$ sono k variabili aleatorie, discrete o continue, e $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora:

- se $X_1 \cdots X_k$ sono discrete, $\phi(X_1, \cdots, X_k)$ è una variabile aleatoria aleatoria discreta e:

$$\mathbb{E}[\phi(X_1\cdots X_k)] = \sum_{x_1\in\mathcal{R}_{X_1}} \cdots \sum_{x_k\in\mathcal{R}_{X_k}} \phi(x_1\cdots x_k)p_{X_1\cdots X_k}(x_1\cdots x_k)$$

- se $X_1 \cdots X_k$ sono continue, allora $\phi(X_1, \cdots, X_k)$ è una variabile continua e:

$$\mathbb{E}[\phi(X_1\cdots X_k)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x_1\cdots x_k)f_{X_1\cdots X_k}(x_1\cdots x_k)dx_1\cdots dx_k$$

$\phi(x_1\cdots x_k) = x_1 + \cdots + x_k$

$$\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_k] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_k] \tag{28}$$

Esercizio (Gare d'appalto)(1)

Un'azienda concorre per tre gare d'appalto con profitti di 10000€, 20000€e 40000€. La probabilità di vincere le tre gare è rispettivamente 0.2, 0.8 e 0.3. Qual è il profitto totale medio?

Svolgimento Il profitto della prima gara è la variabile X_1 che prende valori in $\mathcal{R}_{X_1} = \{0, 10000\}$ con probabilità $p_{X_1}(10000) = 0.2$.
Il profitto della seconda gara è la variabile X_2 che prende valori in $\mathcal{R}_{X_2} = \{0, 20000\}$ con probabilità $p_{X_2}(20000) = 0.8$.
Il profitto della terza gara è la variabile X_3 che prende valori in $\mathcal{R}_{X_3} = \{0, 40000\}$ con probabilità $p_{X_3}(40000) = 0.3$.

Esercizio (Gare d'appalto)(2)

Il profitto totale è:

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

Il profitto totale medio è:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3]$$

$\mathbb{E}[X_1] = 0 \cdot 0.8 + 10000 \cdot 0.2 \qquad \mathbb{E}[X_2] = 20000 \cdot 0.8 \qquad \mathbb{E}[X_3] = 40000 \cdot 0.3$

$$\mathbb{E}[X] = 30000€$$

Esercizio (Guadagno medio gioco della k-esima carta)

n carte numerate da 1 a n sono estratte in successione. Per ogni k si vince un euro se alla k-esima estrazione si scopre la carta k. Qual è il guadagno medio di questo gioco?

Svolgimento Ω è l'insieme delle permutazioni $\omega = (\omega_1 \cdots \omega_n)$ dei primi n interi. $|\Omega| = n!$
Gli euro vinti alla k-esima estrazione sono valori della variabile:

$$X_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_k = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il guadagno totale è $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$
Dobbiamo calcolare:

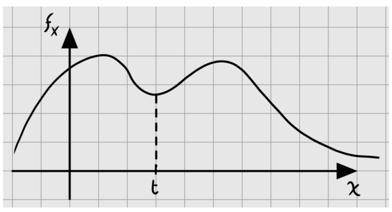
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k]$$

$\mathbb{E}[X_k] = 0 \cdot p_{X_k}(0) + 1 \cdot p_{X_k}(1) = p_{X_k}(1)$
$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} p_{X_k}(1)$
Fissato k:

$$p_{X_k}(1) = \frac{\text{numero di permutazioni che lasciano fisso k}}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \text{ In media vinco } 1€ \text{ a questo gioco.}$$

4.14 Baricentro dell'aspettazione



$$[X(\omega) - t]^2 \qquad \sqrt{\mathbb{E}[(x-t)^2]}$$

Notazione

$$\mu = \mathbb{E}[X]$$

$$(x-t)^2 = (x-\mu+\mu-t)^2 = (x-\mu)^2 + 2(x-\mu)(\mu-t) + (\mu-t)^2$$

$$\mathbb{E}[(X-t)^2] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] + \mathbb{E}[2(X-\mu)(\mu-t)] + \mathbb{E}[(\mu-t)^2] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] + 2(\mu-t)\mathbb{E}[X-\mu] + (\mu-t)^2$$

$$\mathbb{E}[X-\mu] = \mathbb{E}[X] - \mu\mathbb{E}[1] = \mathbb{E}[X] - \mu = 0$$

$$\mathbb{E}[(X-t)^2] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] + (\mu-t)^2 \geq \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$$

Dunque, per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[(X-t)^2] \geq \mathbb{E}[(X-\mu)^2] \tag{29}$$

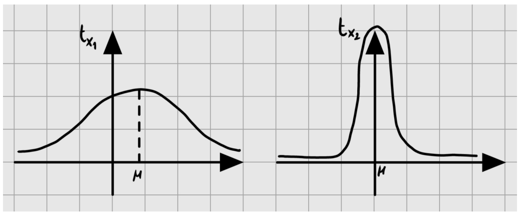
μ punto da cui i valori pesati con la probabilità sono più vicini.

4.15 Varianza

Definizione: Si dice **varianza** di X il numero:

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$$

Misura di quanto è lontano dal baricentro (μ media).



$$Var[X_1] > Var[X_2]$$

4.15.1 Deviazione standard

Definizione: Si chiama **deviazione standard** il numero:

$$\sqrt{Var[X]}$$

$$Var[X] := \mathbb{E}[(X-\mu)^2] \text{ con } \mu = \mathbb{E}[X] \begin{cases} = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} (x-\mu)^2 p_X(x) & \text{se } X \text{ è discreta} \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx & \text{se } X \text{ è continua} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$Var[\alpha X + \beta] = \mathbb{E}[(\alpha X + \cancel{\beta} - \mathbb{E}[\alpha X + \cancel{\beta})^2] = \alpha^2 \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X])^2] = \alpha^2 Var[X]$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \mathbb{E}[X] + \mu^2$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \tag{30}$$

Esercizio (Varianza funzione indicatrice)

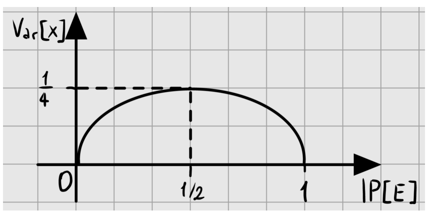
Sia $X = I_E$ la funzione indicatrice di un evento $E \in \mathcal{E}$. Allora $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}[E]$. Calcolare la varianza di X.

Svolgimento

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Osserviamo che $X^2 = X$ poiché $X \in \{0, 1\}$

$$Var[X] = \mathbb{P}[E] - (\mathbb{P}[E])^2 = \mathbb{P}[E]\{1 - \mathbb{P}[E]\} = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[E^C]$$



4.16 Covarianza

Definizione: Date due variabili X e Y, discrete e continue, diciamo **covarianza** di X e Y il numero:

$$Cov[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] \tag{31}$$

Osservazione:

$$Cov[X,X] = Var[X]$$

Posto $\mu = \mathbb{E}[X]$ e $\nu = \mathbb{E}[Y]$ si ha

$$\begin{cases} Cov[X,Y] = \sum_{x\in\mathcal{R}_X}\sum_{y\in\mathcal{R}_Y}(x-\mu)(y-\nu)p_{X,Y}(x,y) & \text{se le variabili sono discrete} \\ Cov[X,Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)(y-\nu)f_{X,Y}(x,y)dxdy & \text{se le variabili sono continue} \end{cases}$$

4.16.1 Positivamente correlate

Diciamo che X e Y sono **positivamente correlate** se $Cov[X,Y] > 0$, e questo vuol dire che X e Y tendono ad avere fluttuazioni dello stesso segno attorno al loro valore atteso.

4.16.2 Negativamente correlate

Diciamo che X e Y sono **negativamente correlate** se X e $-Y$ sono positivamente correlate.

4.16.3 Non correlate

Diciamo che X e Y sono **non correlate** se $Cov[X,Y] = 0$ questo vuol dire che i segni delle fluttuazioni delle due variabili attorno ai loro valori attesi non si influenzano l'uno con l'altro.

Posto $\mu = \mathbb{E}[X]$ e $\nu = \mathbb{E}[Y]$, si ha:

$$Cov[X,Y] = \mathbb{E}[(x-\mu)(Y-\nu)] = \mathbb{E}[XY-\mu Y-\nu X+\mu\nu] = \mathbb{E}[XY]-\mu\mathbb{E}[Y]-\nu\mathbb{E}[X]+\mu\nu = \mathbb{E}[XY]-\mu\nu$$

$$Cov[X,Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \tag{32}$$

Se X e Y discrete sono indipendenti, allora:

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x\in\mathcal{R}_X}\sum_{y\in\mathcal{R}_Y} xyp_{X,Y}(x,y) = \sum_{x\in\mathcal{R}_X}\sum_{y\in\mathcal{R}_Y} xyp_X(x)p_Y(y) \overset{\text{per l'indipendenza}}{=} \sum_{x\in\mathcal{R}_X} xp_X(x)\sum_{y\in\mathcal{R}_Y} yp_Y(y)$$

Dunque se X e Y sono indipendenti:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Quindi:

$$Cov[X,Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

Proposizione: Date k variabili $X_1, \cdots, X_k$ discrete e continue si ha:

$$Var\left[\sum_{l=1}^{k} X_l\right] = \sum_{l=1}^{k} Var[X_l] + 2\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=l+1}^{k} Cov[X_l, X_m]$$

Se le variabili sono non correlate a due a due, allora:

$$Var\left[\sum_{l=1}^{k} X_l\right] = \sum_{l=1}^{k} Var[X_l]$$

Quadrato di binomio e trinomio

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Dati k numeri $a_1 \cdots a_k$

$$\left(\sum_{l=1}^{k} a_l\right)^2 = \sum_{l=1}^{k} a_l^2 + 2\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=l+1}^{k} a_l a_m$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{k} X_l - \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{k} X_l\right]\right]^2 = \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{k}\{X_l - \mathbb{E}[X_l]\}\right]^2 = \sum_{l=1}^{k}\mathbb{E}\{X_l - \mathbb{E}[X_l]\}^2 + 2\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=l+1}^{k}\mathbb{E}\{X_l - \mathbb{E}[X_l]\}\{X_m - \mathbb{E}[X_m]\}$$

Cioé:

$$Var\left[\sum_{l=1}^{k} X_l\right] = \sum_{l=1}^{k} Var[X_l] + 2\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=l+1}^{k} Cov[X_l, X_m]$$

Siano $X_1, \cdots, X_k$ k variabili aleatorie non correlate di uguale valore valore atteso μ e uguale varianza v.
Allora

$$\mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{k} X_l\right] = \sum_{l=1}^{k}\mathbb{E}[X_l] = k\mu$$

$$Var\left[\sum_{l=1}^{k} X_l\right] = \sum_{l=1}^{k} Var[X_l] = kv$$

$$\sqrt{Var\left[\sum_{l=1}^{k} X_l\right]} = \sqrt{kv}$$

4.17 Disuguaglianza di Chebyshev

Proposizione: Se X è una variabile aleatoria, discreta o continua di media μ e varianza v, allora per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}[|X - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{v}{\varepsilon^2} \tag{33}$$

Dimostrazione:

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

Dato $\varepsilon > 0$

$$v = \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} (x-\mu)^2 f_X(x)dx + \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} (x-\mu)^2 f_X(x)dx + \int_{-\mu+\varepsilon}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

$$v \geq \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} (x-\mu)^2 f_X(x)dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

Se $x \leq \mu - \varepsilon$ allora $|x-\mu| \geq \varepsilon$ e $(x-\mu)^2 \geq \varepsilon^2$
Se $x \geq \mu + \varepsilon$ allora $x - \mu \geq \varepsilon$ e $(x-\mu)^2 \geq \varepsilon^2$

$$v \geq \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} \varepsilon^2 f_X(x)dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon^2 f_X(x)dx$$

$$v \geq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} f_X(x)dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{+\infty} f_X(x)dx = \varepsilon^2(\mathbb{P}[X \leq \mu-\varepsilon] + \mathbb{P}[X \geq \mu+\varepsilon]) = \varepsilon^2\mathbb{P}[|X-\mu| \geq \varepsilon]$$

$$\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} = \{X \leq \mu-\varepsilon\} \cup \{X \geq \mu+\varepsilon\}$$

$$\{X \leq \mu-\varepsilon\} \cap \{X \geq \mu+\varepsilon\} = \emptyset$$

$$\mathbb{P}[|X-\mu| \geq \varepsilon] = \mathbb{P}[X \leq \mu-\varepsilon] + \mathbb{P}[X \geq \mu+\varepsilon]$$

$$v \geq \mathbb{P}[|X-\mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{v}{\varepsilon^2}$$

Esercizio (Pezzi prodotti da una fabbrica)

Il numero di pezzi prodotti da una fabbrica in una settimana è una variabile aleatoria di media 50 e varianza 25. Cosa si può dire sulla probabilità che la produzione sia compresa fra 40 e 60?

Svolgimento Se X + il numero di pezzi prodotti, allora $\{40 \leq X \leq 60\} = \{|X - \mu| \leq 10\}$

$$\mathbb{P}[40 \leq X \leq 60] = \mathbb{P}[|X - \mu| \leq 10] = 1 - \mathbb{P}[|X - \mu| > 10]$$

$$\mathbb{P}[|X - \mu| > 10] \leq \mathbb{P}[|X - \mu| \geq 10] \overset{\text{Chebyshev}}{=} \frac{v}{10^2} = 0.25$$

$$\mathbb{P}[40 \leq X \leq 60] \geq 1 - 0.25 = \mathbf{0.75}$$

Parte III

Teoremi limite

5 Teoremi limite

5.1 Prove ripetute

Un singolo esperimento è descritto da $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Ripeto N volte l'esperimento descritto da $(\Omega_N, \mathcal{E}_N, \mathbb{P}_N)$.
$\Omega_N = \times^N \Omega$
Dati $E_1, \cdots, E_N \in \mathcal{E}$ $\quad E_1 \times \cdots \times E_N \in \mathcal{E}_N$.
$\mathcal{E}_N$ più piccola $\sigma-$algebra che contiene i rettangolo $E_1 \times \cdots \times E_N$.
$\mathbb{P}_N[E_1 \times \cdots \times E_N] = \mathbb{P}[E_1] \cdots \mathbb{P}[[E_N]$
Un evento che parla della prova i-esima è:

$$E_i = \Omega \times \cdots \times \Omega \times E \times \Omega \times \cdots \times \Omega = \{(\omega_1 \cdots \omega_N) \in \Omega_N : \omega_i \in E\} \quad \text{con } E \in \mathcal{E}$$

$$F_j = \Omega \times \cdots \times \Omega \times F \times \Omega \times \cdots \times \Omega \quad \text{con } F \in \mathcal{E}$$

$$E_i \cap F_j = \Omega \times \cdots \times \Omega \times E \times \Omega \times \cdots \times \Omega \times F \times \Omega \times \cdots \times \Omega$$

$$\mathbb{P}_N[E_i] = \mathbb{P}_N[\Omega \times \cdots \times \Omega \times E \times \Omega \times \cdots \times \Omega] = \mathbb{P}[\Omega] \cdots \mathbb{P}[\Omega]\mathbb{P}[E]\mathbb{P}[\Omega] \cdots \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[E]$$

$$\mathbb{P}_N[F_j] = \mathbb{P}[F]$$

$$\mathbb{P}_N[E_i \cap F_j] = \mathbb{P}_N[\Omega \times \cdots \times \Omega \times E \times \Omega \times \cdots \times \Omega \times F \times \Omega \times \cdots \times \Omega] = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[F]$$

$$\mathbb{P}_N[E_i \cap F_j] = \mathbb{P}_N[E_i]\mathbb{P}_N[F_j]$$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\quad X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad (\Omega_N, \mathcal{E}_N, \mathbb{P}_N)$ $\quad X_i((\omega_i \cdots \omega_N)) = X(\omega_i)$ $\quad \forall (\omega_1 \cdots \omega_N) \in X^N\Omega$ Si può provare che $X_1 \cdots X_N$ sono indipendenti.

5.2 Media empirica

Diciamo **media empirica** do $X_1 \cdots X_N$ sono indipendenti.

$$\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{34}$$

$$\mathbb{E}_N[\overline{X}_N] = \mathbb{E}_N\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{P}_N[X_i \in A] = \mathbb{P}[X \in A] \Rightarrow \mathbb{E}_N[X_i] = \mathbb{E}[X]$$

$$Var_N[\overline{X}_N] = Var_N\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \frac{1}{N^2}Var_N\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var_N[X_i] = \frac{1}{N^2}NVar[X] = \frac{Var[X]}{N}$$

5.3 Legge (debole) dei grandi numeri

Chebyshev dice che:

$$\mathbb{P}_N[|\overline{X}_N - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon] = 0$$

Dato un evento $E \in \mathcal{E}$ sia X la funzione indicatrice di E. Se $X_1 \cdots X_N$ sono le coppie indipendenti dalla funzione indicatrice I_E, allora:

$$\overline{X}_N = \frac{\text{\# di volte che si verifica E}}{N} \tag{35}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}[E] \qquad Var[X] = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[E^C]$$

$$\mathbb{P}_N[|\overline{X}_N - \mathbb{P}[E]| \geq \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{P}[E]\mathbb{P}[E^C]}{N\varepsilon^2}$$

$X_1 \cdots X_N$ copie indipendenti di X con media μ e varianza v.

$$\mathbb{E}_N[\overline{X}_N] = \mathbb{E}[X] = \mu$$

$$Var[\overline{X}_N] = \frac{Var[X]}{N} = \frac{v}{N} \qquad \sqrt{Var[\overline{X}_N]} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{N}}$$

La legge dei grandi numeri dice che:

$$\frac{\overline{X}_N - \mu}{\sqrt{Var[\overline{X}_N]}} = \frac{\overline{X}_N - \mu}{\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{N}}} \text{ ha media nulla e varianza unitaria}$$

$$Var_N\left[\frac{\overline{X}_N - \mu}{\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{N}}}\right] = \frac{Var_N[\overline{X}_N - \mu]}{\frac{v}{N}} = \frac{Var_N[\overline{X}_N]}{\frac{v}{N}} = \frac{\frac{v}{N}}{\frac{v}{N}} = 1$$

Vogliamo studiare:

$$\mathbb{P}_N\left[\frac{\overline{X}_N - \mu}{\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{N}}} \leq x\right] = F_{\frac{\overline{X}_N - \mu}{\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{N}}}}(x)$$

quando N diventa grande.

Funzione di ripartizione gaussiana

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Non esiste una derivata per cui la sua primitiva è $e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Però si può provare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

$$G(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \tag{36}$$

Proprietà di $G(x)$:

- $lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$
- G è crescente e continua
- $lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$

5.4 Teorema del limite centrale

Se $\overline{X}_N$ è la media empirica associata a una variabile aleatoria X e media μ e varianza v, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}_N\left[\frac{\overline{X}_N-\mu}{\sqrt{\frac{v}{N}}}\leq x\right] = G(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \tag{37}$$

G è detta funzione di ripartizione gaussiana

$$\frac{\overline{X}_N-\mu}{\sqrt{\frac{v}{N}}} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - \mu}{\sqrt{\frac{v}{N}}} = \frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - \mu}{\sqrt{vN}}$$

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}_N\left[\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - \mu}{\sqrt{vN}}\leq x\right] = G(x)$$

S N grande, se $X_1 \cdots X_N$ sono variabili $i.i.d^*$ di media μ e varianza v.

$$\mathbb{P}_N\left[\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - \mu}{\sqrt{vN}}\leq x\right] \approx G(x)$$

* $i.i.d$ =indipendenti e identicamente distribuite.

Esercizio (Polizze assicurative)

Una compagnia assicurativa ha 10000 polizze attive. Il risarcimento annuale dovuto ad ogni singolo assicurato è una variabile aleatoria di media 320€e devianza standard 500€. Qual è, approssimativamente, la probabilità che gli indennizzi totali in un anno superino 3.3 milioni di euro?

Svolgimento Diciamo X_N o soldi che la compagnia deve all'n-esimo assicurato per $n = 1\cdots N = 10000$. X_N ha media $\mu = 320$ e devianza standard $\sigma = 500$. $X = \sum_{n=1}^{N} X_N$ è l'esborso annuale totale per la compagnia assicurativa. Qual è $\mathbb{P}[X > 3\,300\,000]$?

$$X > 3\,300\,000 \text{ se e solo se } \frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - N\mu}{Nv} > \frac{3\,300\,000 - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} = \frac{3\,300\,000 - 10\,000\cdot 320}{500\cdot\sqrt{10\,000}} = 2$$

$$\mathbb{P}[X > 3\,300\,000] = \mathbb{P}\left[\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - N\mu}{Nv} > 2\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - N\mu}{Nv} \leq 2\right] \approx 1 - G(2) \simeq 0.02$$

$G(2) \simeq 0.98$ da tabella (essendo che è un integrale non calcolabile molti valori sono contenuti in tabelle pre calcolate)

Parte IV
Variabili aleatorie particolari

6 Variabili aleatorie discrete

6.1 Variabili di Bernoulli

Definizione: Dato un numero $p \in [0,1]$, una variabile aleatoria X è detta **variabile di Bernoulli** con parametro p se x prende valori 0 e 1 con probabilità $\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p$ e $\mathbb{P}[X = 1] = p$.

$X = 1$ è l'evento dove una certa proprietà di interesse è soddisfatta.

$X = 0$ evento dove la probabilità non è soddisfatta.

La funzione indicatrice di un evento E è una variabile di Bernoulli di parametro $p = \mathbb{P}[E]$.

$$\mathbb{E}[X] = 0\cdot\mathbb{P}[X = 0] + 1\cdot\mathbb{P}[X = 1] = p \tag{38}$$

Dato che $X^2 = X$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 = p(1-p) \tag{39}$$

6.2 Variabili Binomiale

Definizione: Dato un intero positivo k e un numero $p \in [0,1]$, una variabile aleatoria X è detta **binomiale** con parametri (k,p) se X prende valori $l \in \{0,1,\cdots,k\}$ con probabilità:

$$\mathbb{P}[X=l] = \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l} \tag{40}$$

Dimostrazione: Siano $B_1, B_2, \cdots, B_k$ k variabili indipendenti di Bernoulli con parametro p. Allora:

$$X = \sum_{l=1}^{k} B_l$$

è binomiale di parametri (k,p). X prende valori interi fra 0 e k.

$$\mathbb{P}[X=l] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{c \in C_l(\{1\cdots k\})} \{B_i = 1 \forall i \in c \text{ e } B_i = 0 \forall i \notin c\}\right] = \sum_{c \in C_l(\{1\cdots k\})} \mathbb{P}[B_i = 1 \forall i \in c \text{ e } B_i = 0 \forall i \notin c] =$$

$$\overset{\text{per indipendenza}}{=} \sum_{c \in C_l(\{1\cdots k\})} \prod_{i \in c} \mathbb{P}[B_i = 1] \prod_{i \neq c} \mathbb{P}[B_i = 0] = \sum_{c \in C_l(\{1\cdots k\})} p^{|c|}(1-p)^{k-|c|} = \sum_{c \in C_l(\{1\cdots k\})} p^l (1-p)^{k-l} =$$

$$|C_l(\{1\cdots k\})| p^l (1-p)^{k-l} = \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l}$$

Usando $X = \sum_{l=1}^{k} B_l$, abbiamo:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{l=1}^{k} \mathbb{E}[B_l] = kp \tag{41}$$

$$Var[X] = \sum_{l=1}^{k} Var[B_l] = kp(1-p) \tag{42}$$

Esercizio (Vendita di lampadine)

Un'azienda produce lampadine che sono difettose con probabilità 0.01 indipendentemente l'una dall'altra. Le lampadine sono vendute in confezioni da 10, che sono rimborsate se c'è più di una lampadina difettosa. Qual è la probabilità di rimborso? Se si comprano 3 confezioni, qual è la probabilità che esattamente una venga rimborsata?

Svolgimento prima domanda Dico X il numero di lampadine difettose $\mathbb{P}[X > 1]$? X è binomiale con parametri $(10, 0.01)$.

$$\mathbb{P}[X > 1] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 0] - \mathbb{P}[X = 1] =$$

$$= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.001^0 (1 - 0.001)^1 0 - \binom{10}{1} \cdot 0.001^1 (1 - 0.001)^9 \simeq \mathbf{0.0043}$$

Svolgimento seconda domanda Se Y è il numero di confezioni rimborsate su 3, allora Y è binomiale con parametri $(3, 0.0043)$. $\mathbb{P}[Y = 1]$?

$$\mathbb{P}[Y = 1] = \binom{3}{1} 0.0043^1 (1 - 0.0043)^2 \simeq \mathbf{0.013}$$

6.3 Variabili geometriche

Definizione: Dato un numero $p \in (0,1]$, la variabile aleatoria X è detta **geometrica** con parametro p se X prende valori interi positivi i con probabilità:

$$\mathbb{P}[X = i] = p(1-p)^{i-1} \tag{43}$$

Dimostrazione: Se $B_1, B_2, \cdots$ sono variabili di Bernoulli indipendenti con parametro $p \in (0,1]$, allora:

$$X = \min\{i : B_i = 1\}$$

è geometrica di parametro p.
$\{X = 1\} = \{B_1 = 1\}$
$\{X = 2\} = \{B_1 = 0 \text{ e } B_2 = 1\}$
$\{X = 3\} = \{B_1 = 0 \text{ e } B_2 = 0 \text{ e } B_3 = 1\}$
$\dots$
$\{X = i\} = \{B_1 = 0 \text{ e } \cdots \text{ e } B_{i-1} = 0 \text{ e } B_i = 1\}$

$\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[B_1 = 1] = p$
$\mathbb{P}[X = 2] = \mathbb{P}[B_1 = 0 \text{ e } B_2 = 1] \overset{\text{per indipendenza}}{=} \mathbb{P}[B_1 = 0]\mathbb{P}[B_2 = 1] = (1-p)p$
$\dots$
$\mathbb{P}[X = i] = \mathbb{P}[B_1 = 0 \text{ e } \cdots \text{ e } B_{i-1} = 0 \text{ e } B_i = 1 \overset{\text{per indipendenza}}{=} \mathbb{P}[B_1 = 0] \cdots \mathbb{P}[B_{i-1} = 0]\mathbb{P}[B_i = 1] = p(1-p)^{i-1}$

Sia X una variabile geometrica di parametro $p \in (0,1]$. Dato un intero positivo: $\mathbb{P}[X > i]$?

$$\mathbb{P}[X > i] = \sum_{j=i+1}^{\infty} \mathbb{P}[X = j] = \sum_{j=i+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = \sum_{j=i+1}^{\infty} \{(1-p)^{j-1} - (1-p)^j\} = (1-p)^i$$

6.3.1 Proprietà di assenza di memoria della variabile geometrica

Dati gli interi positivi i e j consideriamo:

$$\mathbb{P}[X = i+j \mid X > i] = \frac{\mathbb{P}[X = i+j \text{ e } X > i]}{\mathbb{P}[X > i]} = \frac{\mathbb{P}[X = i+j]}{\mathbb{P}[X > i]} = \frac{p(1-p)^{i+j+1}}{(1-p)^i} = p(1-p)^{k-1} = \mathbb{P}[X = j]$$

6.4 Funzione generatrice dei momenti

Definizione: Se X è una variabile aleatoria, discreta o continua, il **momento n-esimo** di X è il numero:

$$\mathbb{E}[X^n] \tag{44}$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[\overset{\text{Momento secondo}}{X^2}] - \mathbb{E}[\overset{\text{Momento primo}}{X}]^2$$

6.4.1 Funzione generatrice

Definizione: Chiamiamo funzione generatrice dei momenti di X la funzione che mappa $t \in \mathbb{R}$ in:

$$\phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}] \tag{45}$$

Richiamo delle derivate

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = e^{tX}X$$
$$\frac{d^2}{dt^2}e^{tX} = e^{tX}X^2$$
$$\frac{d^n}{dt^n}e^{tX} = e^{tX}X^n$$

Se ϕ_X è finita in un intervallo aperto che contiene 0:

$$\frac{d^n}{dt^n}\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[\frac{d^n}{dt^n}e^{tX}\right] = \mathbb{E}[X^n e^{tX}] \text{ per t abbastanza vicino a 0}$$

Se X è geometrica con parametro $p \in (0,1]$:

$$\phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ti}\mathbb{P}[X = i] = \sum_{i=1}^{\infty} e^{ti}p(1-p)^{i-1} = pe^t \sum_{i=1}^{\infty}[e^t(1-p)]^{i-1}$$

Se $e^t(1-p) \geq 1$ allora:

$$\phi_X(t) = +\infty$$

Se $e^t(1-p) <$ allora:

$$\phi_X(t) = pe^t \frac{1-e^t(1-p)}{1-e^t(1-p)} \sum_{i=1}^{\infty} [e^t(1-p)]^{i-1} = \frac{pe^t}{1-e^t(1-p)} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [e^t(1-p)]^{i-1} - [e^t(1-p)^i] \right\} = \frac{pe^t}{1-e^t(1-p)}$$

$$e^t(1-p) < 1 \xrightarrow{\ln} t + \ln(1-p) < 0 \rightarrow t < \ln(1-p)$$

$$\phi_X(t) = \begin{cases} \frac{pe^t}{1-e^t(1-p)} & \text{se } t < -\ln(1-p) \\ +\infty & \text{se } t \geq -\ln(1-p) \end{cases}$$

Richiamo delle derivate

$$\frac{d}{dt} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)}$$

Per $t < -ln(1-p)$:

$$\frac{d}{dt^i} \phi_X(t) = \frac{d}{dt} \frac{pe^t}{1-e^t(1-p)} = \frac{pe^t[1-\cancel{e^t}(1-p)] + pe^t\cancel{e^t}(1-p)}{[1-e^t(1-p)]^2} = \frac{pe^t}{[1-e^t(1-p)]^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi_X(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \phi_X(t) \right) = \frac{d}{dt} \frac{pe^t}{[1-e^t(1-p)]^2} = \frac{pe^t[1-e^t(1-p)]^{\cancel{2}} + pe^t 2\cancel{[1-e^t(1-p)]}e^t(1-p)}{[1-e^t(1-e)]^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{e^t[1-e^t(1-p)] + pe^t 2e^t(1-p)}{[1-e^t(1-p)]^3} = \frac{pe^t + pe^{2t}(1-p)}{[1-e^t(1-p)]^3}$$

Momento primo

$$\mathbb{E}[X] = \frac{d}{dt} \phi_X(t) \bigg|_{t=0} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Momento secondo

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{d^2}{dt^2} \phi_X(t) \bigg|_{t=0} = \frac{p(2p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

Varianza

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

6.5 Variabili di Poisson

Definizione: Dato un numero $\lambda > 0$, una variabile aleatoria X è una **variabile di Poisson** con parametro λ se X prende valori interi non negativi i con probabilità:

$$\mathbb{P}[X = i] = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \tag{46}$$

Serie esponenziale

Per ogni $X \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!} = e^X$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$\phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti}\mathbb{P}[X=i] = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^i}{i!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda e^t-\lambda}$$

$$\frac{d}{dt}\phi_X(t) = \frac{d}{dt}e^{\lambda e^t-\lambda}\lambda e^t = \lambda e^{\lambda e^t+t-\lambda}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi_X(t) = \frac{d}{dt}\left[\lambda e^{\lambda e^t+t-\lambda}\right] = \lambda e^{\lambda e^t+t-\lambda}(\lambda e^t+1)$$

Momento primo

$$\mathbb{E}[X] = \frac{d}{dt}\phi_X(t)\bigg|_{t=0} = \lambda$$

Momento secondo

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{d^2}{dt^2}\phi_X(t)\bigg|_{t=0} = \lambda(\lambda+1)$$

Varianza

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} = \lambda$$

7 Variabili continue

7.1 Variabili uniformi

Definizione: Dati i numeri $\alpha < \beta$, una variabile aleatoria X è **uniforme** con parametri (α, β) se X è continua con densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione generatrice dei momenti

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x)dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} x^n dx = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(\beta-\alpha)(n+1)}$$

Momento primo

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{\cancel{(\beta-\alpha)}(\beta+\alpha)}{2\cancel{(\beta-\alpha)}} = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

Momento secondo

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)} = \frac{\cancel{(\beta-\alpha)}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{3\cancel{(\beta-\alpha)}} = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}$$

Varianza

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3} - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3} - \frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4} =$$

$$= \frac{4\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2}{12} = \frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{12} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$$

$$\sqrt{Var[X]} = \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}$$

7.1.1 Variabile uniforme standard

Definizione: Una variabile uniforme con parametri $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ è detta **standard**. La indichiamo una la lettera U.

Sia F una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tale che:

- F è non decrescente e continua da destra.
- $\lim_{a \to -\infty} F(a) = 0$
- $\lim_{a \to +\infty} F(a) = 1$

$\forall u \in (0, 1)$ pongo:

$$F^{-1}(U) = \inf\{a \in \mathbb{R} : F(a) \geq U\}$$

La condizione $F(a) \geq U$ è equivalente a $F^{-1}(U) \leq a$.
Sia $(a, U) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ tale che $F(a) \geq U$ e $X = F^{-1}(U)$

$$\mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[F^{-1}(U) \leq a] = \mathbb{P}[U \leq F(a)] = \int_{-\infty}^{F(a)} f_U(x)dx = \int_{0}^{F(a)} f_U(x)dx = \int_{0}^{F(a)} dx = F(a)$$

Esercizio (Generare X)

Sia X una variabile continua con densità di probabilità:

$$fX(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Con $\lambda > 0$ un parametro. Generare X.

Svolgimento

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 0 \\ \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda} \Big|_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$F(F^{-1}(U)) = U$$

Dunque:

$$U = F(F^{-1}(U)) = 1 - e^{-\lambda F^{-1}(U)} \Rightarrow F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

$$\mathbf{X} = -\frac{\mathbf{1}}{\lambda} \ln(\mathbf{1} - \mathbf{U})$$

7.2 Variabili esponenziali

Definizione: Dato un numero $\lambda > 0$, una variabile aleatoria X è **esponenziale** con parametro λ se X è continua con densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

Funzione generatrice dei momenti

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x)dx = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

Momento primo

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Momento secondo

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

Varianza

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tX} f_X(x) = dx = \int_0^\infty e^{tX} \lambda e^{-\lambda X} dx = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } t \geq \lambda \\ \frac{\lambda}{\lambda - t} & \text{se } t < \lambda \end{cases}$$

Per $t < 0$: $\frac{d}{dt}\phi_X(t) = \frac{d}{dt}\frac{\lambda}{\lambda-t} = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$
$\frac{d}{dt^2}\phi_X(t) = \frac{d}{dt}\lambda(\lambda-t)^{-2} = 2\lambda(\lambda-t)^{-3}$
$\frac{d}{dt^3}\phi_X(t) = \frac{d}{dt}2\lambda(\lambda-t)^{-3} = 6\alpha(\alpha-t)^{-4}$
$\cdots$
$\frac{d}{dt^n}\phi_X(t) = n!\lambda(\lambda-t)^{-n-1}$

7.2.1 Probabilità della coda

Dato $x > 0$:

$$\mathbb{P}[X > x] = \int_x^\infty f_X(y)dy) \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy = e^{-\lambda x} \tag{47}$$

7.2.2 Proprietà di assenza di memoria della variabile esponenziale

Dati $x, y > 0$ consideriamo:

$$\mathbb{P}[X > x+y \mid X > x] = \frac{\mathbb{P}[X > x+y \text{ e } X > x]}{\mathbb{P}[X > x]} = \frac{\mathbb{P}[X > x+y]}{\mathbb{P}[X > x]} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = \mathbb{P}[X > y] \tag{48}$$

7.2.3 Proprietà della variabile esponenziale

Siano $X_1, \cdots, X_k$ variabili **indipendenti** ed esponenziali di parametri $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$. Consideriamo:

$$X = \min\{X_1, \cdots, X_k\}$$

X è una variabile esponenziale con parametro $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

Dimostrazione: $X > x$ se e solo se $X_1 > x, \cdots, X_k > x$.

$$\mathbb{P}[X > x] = \mathbb{P}[X_1 > x \text{ e} \cdots \text{e } X_k > x] \overset{\text{per indipendenza}}{=} \mathbb{P}[X_1 > x] \cdot ... \cdot \mathbb{P}[X_k > x] = e^{-\lambda_1 x} \cdots e^{-\lambda_k x} = \\ = e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)x}$$

Dimostrazione passando al reciproco:

$$\mathbb{P}[X \leq x] = 1 - \mathbb{P}[X > x] = 1 - e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)x} = \int_{-\infty}^x f_X(y)dy$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Esercizio (Componenti in serie)

Un sistema si dice in serie se funziona fino a quando tutti i componenti funzionano. Supponiamo che i componenti abbiano una vita descritta da una variabile esponenziale, il primo con parametro λ_1, il secondo con parametro λ_2, ecc...

Svolgimento Allora la vita del sistema con k componenti è $\min\{X_1, \cdots, X_k\}$, che è una variabile esponenziale di parametro $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

7.2.4 Processo di Poisson

Siano $X_1, X_2, X_3, \cdots$ i tempi di attesa per l'arrivo di telefonate successive a un centralino. Supponiamo che $X_1, X_2, X_3, \cdots$ siano indipendenti ed esponenziali con parametro λ. La famiglia di variabili aleatorie N_t al variare di $t \geq 0$ si chiama **processo di Poisson**.

Le telefonate arrivano agli instanti: $T_0 = 0$, $T_1 = X_1$, $T_2 = X_1 + X_2$, $T_3 = X_1 + X_2 + X_3$, $T_n = X_1 + \cdots + X_n$. $T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$

Dato un tempo generico $T \geq 0$ indichiamo con N_t il numero di telefonate che arrivano fino al tempo t.

$$N_t = \max\{n : T_n \leq t\} = \begin{cases} 0 & t \in [T_0, T_1) \\ 1 & t \in [T_1, T_2) \\ 2 & t \in [T_2, T_3) \\ n & t \in [T_n, T_{n-1}) \end{cases}$$

7.2.5 Proprietà del processo di Poisson

- $N_0 = 0$
- N_t prende valori interi non negativi ed è decrescente rispetto a t
- Dati gli istanti $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ le variabili $N_{t_1} - N_{t_0}$, $N_{t_2} - N_{t_1}, \cdots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ sono indipendenti
- Per ogni $0 \leq t < \tau : N_\tau - N_t$ è una variabile di Poisson con parametri:
  $(\tau - t)\lambda : \mathbb{P}[N_\tau - N_t = i] = \frac{[(\tau-t)\lambda]^i}{i!} e^{-(\tau-t)\lambda}$
  $\mathbb{E}[N_\tau - N_t] = Var[N_\tau - N_t] = (\tau - t)\lambda$

7.3 Variabile Gaussiana (normale)

Definizione: Dati i numeri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ una variabile aleatoria X è detta gaussiana con parametri (μ, σ) se X è continua con densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \tag{49}$$

7.3.1 Variabile gaussiana standard

X è detta **variabile gaussiana standard** se è gaussiana con parametro (0,1). Se X è gaussiana standard allora:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$$

Equazione generatrice dei momenti

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tX} f_X(x)dx$$

Se X è gaussiana con parametri (μ, σ):

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{tX - \frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad x = \mu + \sigma y \qquad dx = \sigma dy$$

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}} \int_{\mathbb{R}} e^{t(\mu+\sigma y) - \frac{1}{2}y^2} \cancel{\sigma} dy = \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{t\sigma y - \frac{1}{2}y^2} dy = \frac{e^{t\mu + \frac{1}{2}(\sigma t)^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(y-t\sigma)^2} dy$$

$$z = y - t\sigma \qquad y = z + t\sigma \qquad dy = dz$$

$$\phi_X(t) = \frac{e^{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = e^{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Equazione generatrice dei momenti

$$\phi_X(t) = e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2t^2} \tag{50}$$
$$\frac{d}{dt}\phi_X(t) = [\mu+\sigma^2t]e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\phi_X(t) = \sigma^2e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2t^2} + [\mu+\sigma^2t]^2e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

Momento primo

$$\mathbb{E}[X] = \frac{d}{dt}\phi_X(t)\bigg|_{t=0} = \mu$$

Momento secondo

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{d^2}{dt^2}\phi_X(t)\bigg|_{t=0} = \sigma^2+\mu^2$$

Varianza

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2 = \sigma^2+\mu^2-\mu^2 = \sigma^2$$

μ è la media di X e σ è la deviazione standard.

Proposizione: Se X e Y sono due variabili aleatorie con funzione generatrice dei momenti ϕ_X e ϕ_Y e se esiste $\delta > 0$ tale che $\phi_X(t) < \infty$ e $\phi_Y(t) < \infty$ per ogni $t \in (-\delta, \delta)$, allora $f_X(a) = f_Y(a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Sia X una variabile gaussiana di media μ e deviazione standard σ. Siano α e β due numeri e sia $Y = \alpha X + \beta$

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{\alpha tX+t\beta}] = \mathbb{E}[e^{\alpha tX}\cdot e^{t\beta}] = e^{t\beta}\cdot\mathbb{E}[e^{(\alpha t)X}] = e^{t\beta}\phi_X(\alpha t) =$$
$$= e^{t\beta}e^{(\alpha t)\mu+\frac{1}{2}\sigma^2(\alpha t)^2} = e^{t(\alpha\mu+\beta)+\frac{1}{2}(\alpha\sigma)^2t^2} =$$

$=$ La funzione generatrice dei momenti di una variabile gaussiana di parametri $(\alpha\mu+\beta, \alpha\sigma)$

Proposizione: Se X è una variabile gaussiana di parametri (μ, σ) e α e β sono due numeri, allora $\alpha X + \beta$ è gaussiana con parametri $(\alpha\mu+\beta, \alpha\sigma)$

Se $\alpha = \frac{1}{\sigma}$ e $\beta = -\frac{\mu}{\sigma}$, allora:

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \text{ è gaussiana con parametri } (0,1)$$

Sia X gaussiana di parametri (μ, σ) e $a < b$ due numeri. Consideriamo:

$$\mathbb{P}[a < X \le b]$$
$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad a < X \le b \text{ se e solo se } \frac{a-\mu}{\sigma} < Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}$$
$$\mathbb{P}[a < X \le b] = \mathbb{P}[\frac{a-\mu}{\sigma} < Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}] = \mathbb{P}[Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}] - \mathbb{P}[Y \le \frac{a-\mu}{\sigma}] = G\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - G\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Valutare valori di G per x negativi

Le tabelle danno $G(x)$ per qualche $x > 0$.
Dato $x \in \mathbb{R}$:

$$G(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$z = -y$

$$G(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz + G(x) - G(x) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz + \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz\right\} - G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz - G(x) = 1 - G(x)$$
$$\mathbf{G(-x) = 1 - G(x)} \tag{51}$$

Esercizio (Calcolo valore tabellare negativo)

Sia X una variabile gaussiana di parametri $(3, 2)$. Calcolare $\mathbb{P}[2.96 < X \leq 5.12]$.

Svolgimento

$$\mathbb{P}[2.96 < X \leq 5.12] = G\left(\frac{5.12 - 3}{2}\right) - G\left(\frac{2.96 - 3}{2}\right) = G(1.06) - G(-0.02)$$

$$G(1.06) \simeq 0.85 \qquad G(0.02) \simeq 0.51 \qquad G(-0.02) \simeq 1 - 0.51 = 0.49$$

$$\mathbb{P}[2.96 < X \leq 5.12] \simeq 0.85 - 0.49 = \mathbf{0.36}$$

Esercizio (Trasmissione messaggi binari)

Per trasmettere un messaggio binario da una sorgente a un ricevente si manda un segnale elettrico $s = 3$ *volt* oppure $s = -3$ *volt* attraverso il filo elettrico. A causa del rumore il segnale ricevuto è $s + X$, dove X è una variabile gaussiana di media 0 *volt* e devianza standard 2 *volt*. La decodifica segue la regola che il messaggio inviato è positivo se $s + X \geq 0$ e negativo se $s + X < 0$. Con quali probabilità vengono codificati correttamente i segnali?

Svolgimento Se $s = 3$ *volt*, la probabilità cercata è $\mathbb{P}[3 + X \geq 0]$. Se $s = -3$ *volt*, la probabilità cercata è $\mathbb{P}[X - 3 < 0]$. $\mu = 0$ *volt* e $\sigma = 2$ *volt*.

$$\mathbb{P}[3 + X \geq 0] = \mathbb{P}[X \geq -3] = \mathbb{P}\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \geq -\frac{3}{2}\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq -\frac{3}{2}\right] =$$

$$= 1 - G(-1.5) = 1 - [1 - G(1.5)] = G(1.5)$$

$$\mathbb{P}[X - 3 < 0] = \mathbb{P}\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{3}{2}\right] = G(1.5)$$

$$\mathbf{G(1.5) \simeq 0.9332}$$

Proposizione: Siano X e Y variabili gaussiane indipendenti di parametri (μ, σ) e (ν, s) rispettivamente. Allora $X + Y$ è una variabile gaussiana di parametri $(\mu + \nu, \sqrt{\sigma^2 + s^2})$

Dimostrazione: Poniamo $Z = X + Y$

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{tX}e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tY}] = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

$$\phi_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \qquad \phi_Y(t) = e^{\nu t + \frac{1}{2}s^2 t^2}$$

$$\phi_Z(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \cdot e^{\nu t + \frac{1}{2}s^2 t^2} = e^{(\mu+\nu)t + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sigma^2 + s^2}\right)^2 t^2} =$$

= funzione generatrice dei momenti di una variabile gaussiana di media $\mu + \nu$ e deviazione standard $\sqrt{\sigma^2 + s^2}$

Quindi Z è gaussiana di parametri $(\mu + \nu, \sqrt{\sigma^2 + s^2})$

Esercizio (Danni strutturali al ponte) (1)

Il numero di tonnellate che un ponte può sopportare senza subire danni è una variabile gaussiana di media 200 e deviazione standard 20. Il peso dei veicoli che passano sul ponte è una variabile aleatoria di media 1.5 tonnellate e deviazione standard 0.15 tonnellate. Quanti veicoli devono passare contemporaneamente sul ponte affinché la probabilità di un danno strutturale sia maggiore o uguale a 0.1?

Esercizio (Danni strutturali al ponte) (2)

Svolgimento Sia N il numero di veicoli sul ponte, e sia X_1 il peso del primo, X_2 il peso del secondo e così via. Assumiamo che $X_1, \cdots, X_N$ siano variabili indipendenti di media 1.5 tonnellate e deviazione standard 0.15 tonnellate. Il peso del carico totale è $Y = X_1 + \cdots + X_N$. Il teorema del limite centrale dice che $\frac{Y - N \cdot 1.5}{0.15 \cdot \sqrt{N}}$ è approssimativamente gaussiana standard (a N grande).
Sia W il carico che può sopportare il ponte. W è una variabile gaussiana di media 200 tonnellate e deviazione standard 20 tonnellate.
Ho danno strutturale se $Y > W$. La probabilità di avere un danno strutturale è $\mathbb{P}[Y > W]$. Per quali N $\mathbb{P}[Y > W] \geq 0.1$?

- Y è gaussiana di parametri $(N \cdot 1.5, 0.15 \cdot \sqrt{N})$
- $-W$ è gaussiana di parametri $(-200, 20)$
- $Y - W = Y + (-W)$ è gaussiana di parametri $(N \cdot 1.5 - 200, \sqrt{0.15^2 \cdot N + 20^2})$

$$\mathbb{P}[Y - W > 0] = \mathbb{P}[Y - W - N1.5 + 200 > -N1.5 + 200] = \mathbb{P}\left[\frac{Y - W - N1.5 + 200}{\sqrt{0.15^2 N + 20^2}} > \frac{200 - N1.5}{\sqrt{0.15^2 N + 20^2}}\right] =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left[\frac{Y - W - N1.5 + 200}{\sqrt{0.15^2 N + 20^2}} > \frac{200 - N1.5}{\sqrt{0.15^2 N + 20^2}}\right] = 1 - G\left(\frac{200 - N1.5}{\sqrt{0.15^2 N + 20}}\right)$$

Dobbiamo trovare per quali N $\mathbb{P}[Y > W] = 1 - G\left(\frac{200 - N1.5}{\sqrt{0.15^2 N + 20}}\right) \geq 0.1$

Cioè:$G\left(\frac{200 - N1.5}{\sqrt{0.15^2 N + 20}}\right) \leq 0.9$

$$G(1.28) \simeq 0.9 \Rightarrow \frac{200 - N1.5}{\sqrt{0.15^2 N + 20^2}} \leq 1.28 \Rightarrow \mathbf{N \geq 117}$$

$X_1, \cdots, X_N$ variabili indipendenti gaussiane di media comune μ e deviazione standard comune σ.
$X_1 + X_2$ è gaussiana di parametri $(2\mu, \sigma\sqrt{2})$
$X_1 + X_2 + X_3 = (X_1 + X_2) + X_3$ è gaussiana di parametri $(3\mu, \sigma\sqrt{3})$
$X_1 + \cdots + X_N$ è gaussiana di parametri $(N\mu, \sigma\sqrt{N})$
$\frac{X_1 + \cdots + X_N + N\mu}{\sigma\sqrt{N}}$ è gaussiana standard per ogni N

Parte V
Statistica

8 Statistica

Immaginiamo che ci sia una funzione cumulativa F sottostante i dati:

- F è non decrescente e continua da destra
- $\lim_{a \to -\infty} F(a) = 0$
- $\lim_{a \to +\infty} F(a) = 1$

8.1 Campione statistico

Definizione: Un insieme di N variabili aleatorie $X_1 \cdots X_N$ indipendenti e tutte con funzione cumulativa F è detto **campione statistico** di taglia N della legge di probabilità F.

8.1.1 Inferenza parametrica

F è nota a meno di qualche parametro e si vuole determinare il valore di quei parametri a partire dai dati.

8.1.2 Definizione di statistica

Definizione: Una variabile aleatoria della forma $T = t(X_1 \cdots X_N)$, dove $t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione che non dipende esplicitamente da F è detta **statistica**.

Se l'esito è $\omega \in \Omega_N$, il valore della statistica è $T(\omega) = t(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$

Ex. 1 $T = X_1[t(x_1 \cdots x_n) = x_1]$

Ex. 2 $T = X_3 + X_7 = [t(x_1 \cdots x_n) = x_3 + x_7]$

Ex. 3 $T = \min\{X_1 \cdots X_N\} = [t(x_1 \cdots x_n) = \min\{x_1 \cdots x_n\}]$

8.2 Media campionaria

La media empirica $\overline{X}_N$, anche detta **media campionaria**, è una statistica:

$$\overline{X}_N = t(X_1 \cdots X_N) \text{ con } t(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_N$$

8.3 Varianza campionaria

Definizione: Si dice **varianza campionaria** la variabile aleatoria:

$$S_N^2 := \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \overline{X}_N)^2 \tag{52}$$

8.3.1 Proprietà media e varianza campionaria

Se la media e la varianza di una variabile aleatoria con legge F sono μ e v, allora:

- $\mathbb{E}_N[\overline{X}_N] = \mu$
- $Var_N[\overline{X}_N] = \frac{v}{N}$

Mostriamo che $\mathbb{E}[S_N^2] = v$

$$(N-1)S_N^2 = \sum_{n=1}^{N}(X_n - \overline{X}_N)^2 = \sum_{n=1}^{N}(X_n - \mu + \mu + \overline{X}_N)^2 = \sum_{n=1}^{N}(X_n - \mu)^2 + 2\sum_{n=1}^{N}(X_n - \mu)^2(\mu\overline{X}_N)^2 + \sum_{n=1}^{N}(\overline{X}_N - \mu)^2$$

$$\sum_{n=1}^{N}(X_n - \mu)(\mu - \overline{X}_N) = (\mu - \overline{X}_N)\sum_{n=1}^{N}(X_n - \mu) = (\mu - \overline{X}_N)\left(\sum_{n=1}^{N} X_n - \mu N\right) = (\mu - \overline{X}_N)(N\overline{X}_N - \mu N) = -N(\overline{X}_N - \mu)^2$$

$$\mathbb{E}_N[S_N^2] = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}_N[(X_n - \mu)^2] - \frac{N}{N-1}\mathbb{E}_N[(\overline{X}_N - \mu)^2] = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N} v - \frac{N}{N-1} Var_N[\overline{X}_N] =$$

$$= \frac{N}{N-1}v - \frac{\cancel{N}}{N-1}\frac{v}{\cancel{N}} = v$$

Esiste una costante $c > 0$ indipendente da N tale che per ogni N:

$$Var[S_N^2] \leq \frac{c}{N}$$

8.4 Campione gaussiano

$X_1 \cdots X_N$ costituiscono un campione gaussiano, o **normale**, se F è la cumulativa di una variabile gaussiana.

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - N\mu}{\sqrt{Nv}} = \frac{\overline{X}_N - \mu}{\sqrt{\frac{v}{N}}} \text{ è una variabile gaussiana standard}$$

Quindi $\overline{X}_N$ è una variabile gaussiana di media μ e deviazione standard $\sqrt{\frac{v}{N}}$

8.5 Funzione Gamma di Eulero

La **funzione Gamma di Eulero** è la funzione che mappa $z > 0$ in

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{53}$$

Ex. 1: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$

Ex. $z+1$: $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = -\int_0^\infty t^z (\frac{d}{dt} e^{-t}) dt \overset{\text{int. per parti}}{=} \int_0^\infty (\frac{d}{dt} t^z) e^{-t} dt = z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)$

Ex. 2: $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

Ex. 3: $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$

Ex. 4: $\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3!$

8.5.1 In generale

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{54}$$

8.6 Variabile chi-quadro

Definizione: Una variabile aleatoria è detta **chi-quadro** a ν gradi di libertà, ed è denotata da χ_ν se è continua con densità di probabilità:

$$f_{\chi_\nu}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

8.7 Variabile t Student

Una variabile aleatoria è detta **t Student** con ν gradi di libertà, ed è denotata con t_ν, se è continua con densità di probabilità:

$$f_{t_\nu}(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi\nu} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} (1 + \frac{x^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{55}$$

É una funzione pari.

8.8 Teorema Campione gaussiano

Sia $X_1 \cdots X_N$ un campione gaussiano di media ν e deviazione standard σ. Allora:

- $\overline{X}_N$ e S_N^2 sono indipendenti;
- $\frac{\overline{X}_N - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ è una variabile gaussiana standard;
- $\frac{(N-1)S_N^2}{\sigma}$ è una chi quadro con $N-1$ gradi di libertà;
- $\frac{\overline{X}_N - \mu}{\sqrt{S_N^2/N}}$ è una t di Student con $N-1$ gradi di libertà.

8.9 Stimatori

Definizione: Uno stimatore T_N di un parametro di F è una statistica atta a stimare quel parametro dopo valutazione con i dati.

$$T_N = t_N(X_1, \cdots, X_N) \text{ con } t_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ indipendente da } F$$

$$T_N(\omega) = t_N\big(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\big)$$

Dati sperimentali $x_1, x_2, \cdots, x_N$ immaginiamo che esiste $\omega \in \Omega$ tale che $x_1 = X_1(\omega), x_2 = X_2(\omega), \cdots, x_N = X_N(\omega)$.

$T_N(\omega) = t_N\big(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\big)$ il numero $t_N(x_1, \cdots, x_N)$ viene chiamato **stima** del parametro

Possibili stimatori di μ

- $T_N = X_1 \qquad [t_N(x_1, \cdots, x_N) = x_1]$
- $T_N = \overline{X}_N \qquad [t_N(x_1, \cdots, x_N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n]$

Ex. $N = 3 \qquad x_1 = 351cm \qquad x_2 = 348cm \qquad x_3 = 360cm$

La stima della lunghezza della scrivania fornita dal primo stimatore è $351cm$ e quella fornita dal secondo è $(351 + 348 + 360)/3 = 353cm$

8.9.1 Bias

Sia θ il parametro da stimare il numero:

$$b[T_N] := \mathbb{E}_N[T_N] - \theta \tag{56}$$

è detto **bias** dello stimatore.

8.9.2 Stimatore corretto

Lo stimatore è detto **corretto** se:

$$b[T_N] = 0 \text{ cioè } \mathbb{E}_N[T_N] = 0$$

Ex. $\theta = \mu$

- $T'_N = X_1 \qquad \mathbb{E}[X_1] = \mu \Rightarrow b[T'_N] = 0$
- $T''_N = \overline{X}_N \qquad \mathbb{E}[\overline{X}_N] = \mu \Rightarrow b[T''_N] = 0$

8.10 Errore quadratico medio

Definizione: Si dice **errore quadratico medio** dello stimatore T_N di θ il numero:

$$r[T_N] := \mathbb{E}_N\big[(T_N - \theta)^2\big] \tag{57}$$

8.10.1 Stimatore consistente

Lo stimatore si dice **consistente** se:

$$\lim_{N\to\infty} r[T_N] = 0$$

- $T'_N = X_1 \qquad r[T'_N] = \mathbb{E}_N\big[(T'_N - \mu)^2\big] = \mathbb{E}_N\big[(X_1 - \mu)^2\big] = v$ non è consistente
- $T''_N = \overline{X}_N \qquad r[T''_N] = \mathbb{E}_N\big[(T''_N - \mu)^2\big] = \mathbb{E}_N\big[(\overline{X}_N - \mu)^2\big] = Var[\overline{X}_N] = \frac{v}{N}$ è consistente
- $\overline{X}_N$ è uno stimatore di μ corretto e consistente
- S_N^2 è uno stimatore di v corretto e consistente

Se T_N è corretto, cioè se $\mathbb{E}_N[T_N] = \theta$, allora:

$$r[T_N] := \mathbb{E}_N\left[(T_N - \theta)^2\right] = Var_N[T_N]$$

$r[T_N] = \mathbb{E}_N\left[(T_N - \theta)^2\right] = \mathbb{E}_N\left[(T_N - \mathbb{E}_N[T_N] + \mathbb{E}_N[T_N] - \theta)^2\right] = \mathbb{E}_N\left[(T_N - \mathbb{E}_N[T_N] + b[T_N])^2\right] = \mathbb{E}_N\left[(T_N - \mathbb{E}_N[T_N])^2 + 2b[T_N](T_N - \mathbb{E}_N[T_N]) + b^2[T_N]\right] = \mathbb{E}_N\left[(T_N - \mathbb{E}_N[T_N])^2\right] + 2b[T_N]\cancel{\mathbb{E}_N[T_N - \mathbb{E}_N[T_N]]} + b^2[T_N]$

$$r[T_N] = Var_N[T_N] + b^2[T_N] \tag{58}$$

8.11 Funzione di verosimiglianza

Sia $X_1 \cdots X_N$ un campione di taglia N della legge di probabilità F_θ. Supponiamo che $X_1 \cdots X_N$ siano discrete con funzione di massa di probabilità p_θ.

La probabilità di osservare $x_1 \cdots x_N$ è:

$$\prod_{n=1}^{N} p_\theta(x_N)$$

Dati $x_1 \cdots x_N$ la funzione di θ è detta **funzione di verosimiglianza**.

8.11.1 Massima verosimiglianza

Il **metodo della massima verosimiglianza** suggerisce di costruire la funzione $t_N(x_1 \cdots x_N)$ che definisce uno stimatore di θ come punto di massimo della funzione di verosimiglianza.

$$\prod_{n=1}^{N} p_{t_N(x_1 \cdots x_N)}(x_n) \geq \prod_{n=1}^{N} p_\theta(x_n) \quad \forall \theta$$

Supponiamo che $X_1 \cdots X_N$ siano continue con densità di probabilità f_θ.

$$L(\theta) := \prod_{n=1}^{N} f_\theta(x_N)$$

è detta funzione di verosimiglianza o di **likelihood**.

Il resto è uguale alle variabili discrete tranne:

$$\prod_{n=1}^{N} f_{t_N(x_1 \cdots x_N)}(x_n) \geq \prod_{n=1}^{N} f_\theta(x_n) \quad \forall \theta$$

Fissati $x_1 \cdots x_N$:

$$\frac{d}{d\theta} L(\theta)\Big|_{\theta = t_N(x_1 \cdots x_N)} = 0$$

Se $L(\theta)$ è derivabile e assume massimo non sul bordo del suo dominio.

Se T_N è uno stimatore di massima verosimiglianza e T'_N è un altro stimatore, allora:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{r[T'_N]}{r[T_N]} \geq 1$$

8.11.2 Variabili di Bernoulli

Siano $X_1 \cdots X_N$ variabili di Bernoulli di parametro $\theta \in [0,1]$, cioè $\mathbb{P}_N[X_1 = 1] = \theta$.

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \theta & \text{se } x = 1 \\ 1 - \theta & \text{se } x = 0 \end{cases} = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$$

Se osservo i valori $x_1 \cdots x_N \in \{0, 1\}$, la funzione di likelihood è:

$$\prod_{n=1}^{N} p_\theta(x_n) = \prod_{n=1}^{N} \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n} = \theta^{\sum_{n=1}^{N} x_n}(1-\theta)^{N - \sum_{n=1}^{N} x_n}$$

Quindi il numero $t_N(x_1 \cdots x_N)$ è il valore di θ che rende massima:

$$\theta^{\sum_{n=1}^N x_n}(1-\theta)^{N-\sum_{n=1}^N x_n}$$

$t_N(x_1 \cdots x_N)$ risolve l'equazione:

$$\frac{d}{d\theta}\theta^{\sum_{n=1}^N x_n}(1-\theta)^{N-\sum_{n=1}^N x_n}\Big|_{\theta=t_N(x_1\cdots x_N)} = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}\cdots = \sum_{n=1}^N \theta^{\sum_{n=1}^N x_n -1}(1-\theta)^{N\sum_{n=1}^N x_n} - \theta^{\sum_{n=1}^N x_n}(N-\sum_{n=1}^N x_N)(1-\theta)^{N-\sum_{n=1}^N x_n -1}$$

$$\frac{\sum_{n=1}^N x_n}{t_N(x_1\cdots x_N)} - \frac{N-\sum_{n=1}^N x_n}{1-t_N(x_1\cdots x_N)} = 0$$

$$(1-\cancel{t_N})\left(\sum_{n=1}^N x_n - t_N(N - \cancel{\sum_{n=1}^N x_n}\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^N x_n - Nt_N = 0 \qquad t_N(x_1\cdots x_N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n$$

$$T_N = t_N(X_1\cdots X_N) = \overline{X}_N$$

8.11.3 Variabili geometriche

Siano $X_1 \cdots X_N$ variabili geometriche di parametro $\theta \in (0,1]$

$$p_\theta(i) = \theta^N(1-\theta)^{\sum_{n=1}^N x_n - N}$$

$$\frac{d}{d\theta}\theta^N(1-\theta)^{\sum_{n=1}^N x_n - N}\Big|_{\theta=t_N(x_1\cdots x_N)} = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}\cdots = N\theta^{N-1}(1-\theta)^{\sum_{n=1}^N x_n - N} - \theta^N(\sum_{n=1}^N x_n - N)(1-\theta)^{\sum_{n=1}^N x_n - N-1}$$

Ponendo $\theta = t_N(x_1 \cdots x_N)$ e uguagliando a 0 trovo:

$$\frac{N}{t_N(x_1\cdots x_N)} - \frac{\sum_{n=1}^N x_n - N}{1-t_N(x_1\cdots x_N)} = 0 \qquad t_N(x_1\cdots x_N) = \frac{N}{\sum_{n=1}^N x_n}$$

$$T_N = t_N(x_1\cdots x_N) = \frac{1}{\overline{X}_N}$$

8.11.4 Variabili di Poisson

Siano $X_1 \cdots X_N$ variabili di Poisson di parametro $\theta > 0$:

$$p_\theta(i) := \mathbb{P}_N[X_i = i] = \frac{\theta^i}{i!}e^{-\theta} \quad \forall i \text{ intero non negativo}$$

$$\mathbb{E}_N[X_i] = Var_N[X_i] = \theta$$

$$\overline{X}_N \text{ e } S_N^2 \text{ sono stimatori corretti e consistenti di } \theta$$

Se osservo $x_1 \cdots x_N$ la funzione di likelihood è:

$$\prod_{n=1}^N p_\theta(x_n) = \frac{\theta^{\sum_{n=1}^N x_n}e^{-\theta N}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}$$

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\theta^{\sum_{n=1}^N x_n}e^{-\theta N}}{x_1!x_2!\cdots x_n!} = \frac{\sum_{n=1}^N x_n\theta^{\sum_{n=1}^N x_n -1}e^{-N\theta} - N\theta^{\sum_{n=1}^N x_n}e^{-N\theta}}{x_1!x_2!\cdots x_N!}$$

Pongo $\theta = t_N(x_1 \cdots x_N)$ e uguaglio a 0 trovando:

$$\frac{\sum_{n=1}^N x_n}{t_N(x_1\cdots x_N)} - N = 0 \quad t_N(x_1\cdots x_N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n$$

$$T_N = t_N(X_1\cdots X_N) = \overline{X}_N$$

8.11.5 Variabili esponenziali

Siano $X_1 \cdots X_N$ variabili esponenziali di parametro $\theta > 0$

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \theta e^{-\theta x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Osservati $x_1 \cdots x_N$ positivi, la funzione di likelihood è:

$$\prod_{n=1}^{N} f_\theta(x_n) = \theta^N e^{-\theta \sum_{n=1}^{N} x_n}$$

$$\left.\frac{d}{d\theta}\theta^N e^{-\theta \sum_{n=1}^{N} x_n}\right|_{\theta = t_N(x_1 \cdots x_N)} = 0$$

$$\frac{d}{d\theta} \cdots = N\theta^{N-1}e^{-\theta \sum_{n=1}^{N} x_n} - \sum_{n=1}^{N} x_n \theta^N e^{-\theta \sum_{n=1}^{N} x_n}$$

Pongo $\theta = t_N(x_1 \cdots x_N)$ e uguaglio a 0 ottengo:

$$\frac{N}{t_N(x_1 \cdots x_N)} - \sum_{n=1}^{N} x_N = 0 \quad t_N(x_1 \cdots x_N) = \frac{N}{\sum_{n=1}^{N} x_n}$$

$$T_N = t_N(X_1 \cdots X_N) = \frac{1}{\overline{X}_N}$$