CALCOLO DELLE PROBABILITÁ E STATISTICA

Alessandro Zappatore

Università del Piemonte Orientale
Anno accademico 2024/2025, 2° semestre

1 Introduzione

1.1 Insieme degli esiti

Notazione: denotiamo con

$$\Omega$$

l'**insieme degli esiti** di un sperimento, supposto noto.

Ex. 1 Nel caso di un dato possiamo prendere $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ex. 2 Nel caso di una moneta $\Omega = \{T, C\}$ dove T denota la faccia testa e C la faccia croce.

Ex. 3 In una gara di 4 cavalli, denotati 1,2,3 e 4, Ω è l'insieme delle quadruple ottenute permutando $(1, 2, 3, 4)$, cioè 24 esiti possibili:

$$\Omega = \{(1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (3, 2, 1, 4), \cdots\}$$

In un esperimento ci interessa sapere un sottoinsieme di Ω (Ex. ci interessa solo chi è arrivato primo).

1.2 Evento

Definizione: un sottoinsieme E di Ω è detto **evento**.

Ex. il cavallo 3 arriva primo se si verifica l'evento $E = \{(3, 1, 2, 4), (3, 2, 1, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (3, 2, 4, 1)\}$

1.3 Elemento elementare

Definizione: E è un **elemento elementare** se contiene un solo elemento.

Ex. nel lancio di un dado, l'evento $E = \{2\}$ corrisponde all'uscita della faccia 2 ed è un evento elementare. $E = \{1, 3, 5\}$ corrisponde all'uscita di un numero dispari e **non** è un evento elementare.

1.4 Insieme di tutti gli eventi

Notazione: denotiamo con

$$\varepsilon$$

l'**insieme di tutti gli eventi**, cioè l'insieme delle parti di Ω. Supponiamo che $\emptyset \in \varepsilon$.

ATTENZIONE: pensare agli eventi come a tutti i sottoinsiemi di Ω va bene **solo** se Ω è un insieme finito.

1.5 Verificarsi di un evento

Definizione: diciamo che **si verifica l'evento** E se l'esito dell'esperimento è un evento di E.
Un esperimento produce esiti (singoli punti di Ω), non eventi.

1.6 Operatori insiemistici

Dati due eventi E ed F in ε, si verifica:

- E **oppure** F se si verifica $E \cup F$.
- E **ed** F se si verifica $E \cap F$.

1.6.1 Incompatibilità

E ed F sono detti **incompatibili** se $E \cap F = \emptyset$.

Ex. Il cavallo 3 arriva primo se si verifica l'evento $E = \{(3,1,2,4),(3,2,1,4),(3,1,4,2),(3,4,1,2),$
$(3,4,2,1),(3,2,4,1)\}$
Il cavallo 3 arriva secondo se si verifica l'evento $F = \{(1,3,2,4),(1,3,4,2),(2,3,1,4),(2,3,4,1),$
$(4,3,1,2),(4,3,2,1)\}$
Il cavallo 1 arriva ultimo se si verifica l'evento $G = \{(2,3,4,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),(3,4,2,1)$
$(4,2,3,1),(4,3,2,1)\}$

- Il cavallo 3 arriva primo o secondo se si verifica $E \cup F$.
- Il cavallo 3 arriva primo e il cavallo 1 arriva ultimo se si verifica $E \cap G$.
- $E \cap G = \emptyset$ quindi E ed F sono eventi incompatibili.

1.7 Complemento

Definizione: dato un evento E, E **non si verifica** se si verifica E^C (E complemento).

$$E^C = \Omega \setminus E$$

1.8 Leggi di De Morgan

Dati gli eventi E ed F, si ha che:

- $(E \cup F)^C = E^C \cap F^C$
- $(E \cap F)^C = E^C \cup F^C$

2 Concetto di probabilità

Associamo ad ogni evento E un numero $\mathbb{P}[E]$ che misura il nostro grado di fiducia che E si verifichi e che soddisfa i seguenti 3 assiomi (**assiomi di KOLMOGOROV**):

1. $\mathbb{P}[E] \geq 0 \qquad \forall E \in \varepsilon$
2. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
3. $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] \qquad \forall E, F \in \varepsilon \textit{ tali che } E \cap F = \emptyset$

Questa è detta definizione assiomatica di probabilità.

Osservazioni:

- $\mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[\Omega \cup \emptyset] = \mathbb{P}[\Omega] + \mathbb{P}[\emptyset] \Rightarrow \mathbb{P}[\emptyset] = 0$
- dato $E \in \varepsilon$, si ha: $1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[E \cup E^C] \overset{(2^\circ assioma)}{=} \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[E^C] \overset{(1^\circ assioma)}{\geq} \mathbb{P}[E]$
  in conclusione $\mathbb{P}[E] \leq 1$, e quindi $\mathbb{P}[E]$ è un numero tra 0 e 1.

2.0.1 Tipi di eventi

- Ω è anche detto **evento certo** ed ha probabilità 1.
- $\emptyset$ è anche detto evento impossibile ed ha probabilità 0.
- ogni altro evento E ha probabilità tra 0 e 1.

2.0.2 Grado di fiducia

Il grado di fiducia, la probabilità che si associa ad un evento, è intrinsecamente soggettivo.

2.1 Interpretazione frequentistica della probabilità

Ripetendo N volte l'esperimento, diciamo $\nu_N(E)$ il numero di volte in cui si è verificato un evento arbitrario E. Il numero:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{\nu_N(E)}{N}$$

soddisfa gli assiomi di Kolmogorov, e quindi è una probabilità.

1. $\mathbb{P}[E] \geq 0$ è ovvio.
2. $\mathbb{P}[\Omega] = 0$ poiché $\nu_N(\Omega) = N$
3. $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] \quad$ se $E \cap F = \emptyset$ perché $\nu_N(E \cup F) = \nu_N(E) + \nu_N(F)$

$N \to \infty$

$N \to \infty$ non ha senso perché $\frac{\nu_N(E)}{N}$ oscilla.

Ex. supponiamo di aver ottenuto i seguenti dati lanciando una moneta: T,C,T,T,C,C,T,T,T,T,C,C,C,C,T,T,T,T,T,T,T,T,$\cdots$
2^i teste seguite da 2^i croci.

$$\frac{\nu_N(\{T\})}{N} \quad \textit{con } N = 2 \cdot 2^n \quad \textit{tende a } \frac{1}{2} \textit{ quando } n \to \infty$$

$$\frac{\nu_N(\{T\})}{N} \quad \textit{con } N = 3 \cdot 2^n \quad \textit{tende a } \frac{2}{3} \textit{ quando } n \to \infty$$

La funzione continua ad oscillare tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ e il limite nono esiste se $n \to \infty$.

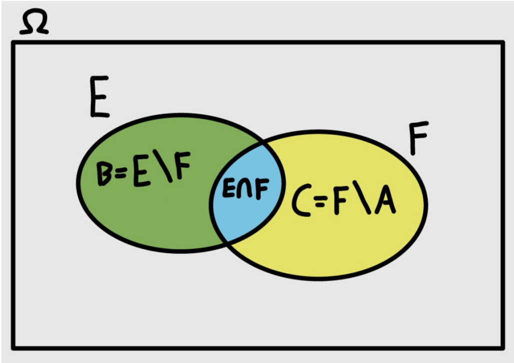
2.1.1 Proposizione

Dati due eventi E ed F, vale:

1. $\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E]$
2. $\mathbb{P}[E] \leq \mathbb{P}[F] \quad \textit{se} \quad E \subseteq F$
3. $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$

Dimostrazione

1. $1 \overset{(2° assioma)}{=} \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[E \cup E^C] \overset{(3° assioma)}{=} \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[E^C] \Rightarrow \mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E]$
2. se $E \subseteq F$ allora $\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[E \cup (F \setminus E)] \overset{(3° assioma)}{=} \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F \setminus E] \overset{(1° assioma)}{\geq} \mathbb{P}[E]$
3. è banale se $E \cap F = \emptyset$. Supponiamo allora che $E \cap F \neq \emptyset$



- $A \cup B = \emptyset \qquad E = A \cup B$
- $A \cap C = \emptyset \qquad F = A \cup C$
- $B \cup C = \emptyset \qquad E \cup F = E \cup C \quad e \quad E \cap C = \emptyset$

Per il terzo assioma di Kolmogorov.

- $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
- $\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[C]$
- $\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[A] =$
  $= \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]$

Esercizio (Probabilità non fumatori)

Una persona fuma la sigaretta con probabilità 0.28, il sigaro con probabilità 0.07 ed entrambi con probabilità 0.05.
Qual è la probabilità che la persona non fumi?

Svolgimento Come prima cosa calcolo gli esiti e Ω.

- n: non fuma;
- s: fuma la sigaretta ma non il sigaro;
- c: fuma il sigaro ma non la sigaretta;
- e: fuma entrambi.

$\Omega = \{n, s, c, e\}$
L'esercizio ci chiede di calcolare: $\mathbb{P}[\{n\}]$

- La persona fuma la sigaretta se si verifica: $E = \{s, e\}$. $\mathbb{P}[E] = 0.28$.
- La persona fuma il sigaro se si verifica $F = \{c, e\}$. $\mathbb{P}[F] = 0.07$.
- La persona fuma entrambi se si verifica: $\mathbb{P}[\{e\}] = \mathbb{P}[E \cap F] = 0.05$.

Notiamo che:

$$\{n\})\{s, c, e\}^C$$

$$\{s, c, e\} = \{s, e\} \cup \{c, e\} = E \cup F$$

Il calcolo finale sarà:

$$\mathbb{P}[\{n\}] = \mathbb{P}[\{s, c, e\}^C] = 1 - \mathbb{P}[\{s, c, e\}] = 1 - \mathbb{P}[E \cup F] = 1 - \big[\mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[E \cap F]\big] =$$

$$= 1 - \mathbb{P}[E] - \mathbb{P}[F] + \mathbb{P}[E \cap F] = 1 - 0.28 - 0.07 + 0.05 = \mathbf{0.7}$$

2.2 Proposizione

Se $E_1 \cdots E_n \in \varepsilon$ sono n eventi incompatibili, cioè se $E_i \cap E_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$, allora:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \sum_{i=1}^{n} = \mathbb{P}[E_i]$$

Dimostrazione Dato $l \in \{1 \cdots n-1\}$ si ha:

$$\bigcup_{i=1}^{l+1} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right) \cup E_{l+1}$$

inoltre

$$\left(\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right) \cap E_{l+1} = \emptyset$$

per ipotesi.
Quindi:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{l+1} E_i = \mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right) \cup E_{l+1}\right] \overset{(3°assioma)}{=} \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{l} E_i\right] + \mathbb{P}[E_{l+1}]\right.$$

Per provare la proposizione basta iterare questa formula da $l = 1$ a $l = n-1$

$$\mathbb{P}[E_1 \cup E_2] = \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] \qquad (l = 1)$$

$$\mathbb{P}[E_1 \cup E_2 \cup E_3] = \mathbb{P}[E_1 \cup E_2] + \mathbb{P}[E_3] = \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] + \mathbb{P}[E_3] \qquad (l = 2)$$

2.3 Esperimento con esiti finiti ed equiprobabili

Consideriamo un esperimento con un numero finito di esisti equiprobabili: esiste $p \in [0, 1]$ tale che:

$$\mathbb{P}[\{\omega\}] = p \qquad \forall \omega \in \Omega$$

Ex. moneta per la moneta significa che $\mathbb{P}[\{T\}] = \mathbb{P}[\{c\}]$

Ex. dado per il dado significa che $\mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{2\}] = \mathbb{P}[\{3\}] = \mathbb{P}[\{4\}] = \mathbb{P}[\{5\}] = \mathbb{P}[\{6\}]$

Dico che $p = \frac{1}{|\Omega|}$ infatti:

$$1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in \Omega} p = p \cdot |\Omega|$$

Dato un evento E si ha:

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{\omega \in E} \{\omega\}\right] = \sum_{\omega \in E} \mathbb{P}[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in E} p = p \cdot |E| = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Dunque $\mathbb{P}[E]$ per esiti equiprobabili è il rapporto tra i casi favorevoli in E e tutti i casi in Ω.

Esercizio (Probabilità estrazione palline) (1)

Si estraggono a caso 2 palline da un urna che ne contiene 3 bianche e 2 nere. Quale è la probabilità che le due palline estratte abbiano colori diversi?

Svolgimento Numero le palline da 1 a 5=3+2 iniziando dalle bianche. Allora:

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),$$

$$,(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

$$|\Omega| = 20$$

Esercizio (Probabilità estrazione palline) (2)

$$E = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5,),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$$
$$|E| = 12$$

In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

2.4 Prodotto cartesiano

Definizione: dati due insiemi arbitrari A e B, l'insieme di tutte le coppie ordinate (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$ si dice **prodotto cartesiano** di A e B e si denota con:

$$A \times B$$

Se A e B sono finiti, allora:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Notazione

$$\{a,b\} = \{b,a\} \qquad (a,b) \neq (b,a)$$

Ex. 1 per una coppia di dadi $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

Ex. 2 per il lancio di una moneta e un dato $\Omega = \{T,C\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad |\Omega| = 2 \cdots 6 = 12$

Ex. 3 per il lancio di due monete si ha $\Omega\{T,C\} \times \{T,C\} = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\}$ $\quad |\Omega| = 2 \cdot 2 = 4$

2.5 Insieme delle k-uple ordinate

Definizione: dato un insieme arbitrario A e un intero positivo k, l'insieme di tutte le k-uple ordinate di elementi di A, cioè di elementi $a_1, a_2, \cdots, a_k \in A$ si denota con:

$$\times^k A := A \times A \times \cdots \times A \qquad k \textit{ volte}$$

Se $|A| \leq +\infty$ e l è un intero tra 1 e $k-1$, allora:

$$|\times^{l+1} A| = |(\times^l A) \times A| = |\times^l A| \cdot |A|$$

Iterando da $l = 1$ a $l = k-1$ si trova che:

$$|\times^k A| = |A|^k$$

Ex. $A = \{a,b\}$

$$\times^3 A = \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(b,a,a),(a,b,b),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}$$

$|A| = 2^3 = 8$

Esercizio (Un 6 in 4 lanci)

Il lancio di quattro dadi ha esiti in $\Omega = \times^4\{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad |\Omega| = 6^4$
L'evento che vede nessun 6 è $E = \times^4\{1,2,3,4,5\}$ $\quad |E| = 5^4$
$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5^4}{6^4}$ è la probabilità di vedere nessun 6 nel lancio di quattro dadi.
E^C è l'evento che vede uscire **almeno** un 6 ed ha probabilità $\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E] = 1 - (\frac{5}{6})^4 \simeq$ **0.52**

Esercizio (Doppio 6 in 24 lanci)

$A = \times^2\{1,2,3,4,5,6\}$ è l'insieme degli esiti di una coppia di dadi.
$B = A \setminus \{(6,6)\}$ è l'insieme di esiti che non vedono la coppia di 6.
$\Omega = \times^{24} A$ è l'insieme degli esiti di 24 lanci di una coppia di dadi.
$E = \times^{24} B$ è l'evento che non vede un doppio 6 in 24 lanci di una coppia di dadi.
E^C è l'evento che vede almeno un doppio 6 in 24 lanci di una coppia di dadi.

$$|A| = 36 \quad |B| = 35 \quad |\Omega| = |A|^{24} = 36^{24} \quad |E| = |B|^{24} = 35^{24}$$

In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = (\frac{35}{36})^{24} \qquad \mathbb{P}[E^C] = 1 - (\frac{35}{36})^{24} \simeq \mathbf{0.49}$$

Generalizzazione esercizio palline

Si estraggono due palline da un urna che contiene b palline bianche ed n palline nere. Quale è la probabilità che le due palline abbiano colori diversi?

Svolgimento Numeriamo le palline da 1 a $b+n$ partendo dalle bianche.
$\Omega = \times^2\{1 \cdots b+n\} \setminus \{(1,1),(2,2),\cdots,(b+n,b+n)\}$
$|\Omega| = (b+n)^2 - (b+n) = (b+n-1)(b+n)$

$E = \{1 \cdots b\} \times \{b+1 \cdots b+n\} \cup \{b+1 \cdots b+n\} \times \{1 \cdots b\}$
$|E| = b \cdot n + n \cdot b = 2bn$ In conclusione la probabilità cercata è:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2bn}{(b+n-1)(b+n)}$$

2.6 Disposizioni senza ripetizioni

Gli elementi di $\times^k A$ vengono anche detti **disposizioni con ripetizioni di classe k** degli elementi di A. *Definizione:* le **disposizioni senza ripetizione di classe k** degli elementi di A sono le k-uple di elementi di A tutti distinti fra loro.

L'insieme di tutte le disposizioni senza ripetizione di classe k degli elementi di A è un sottoinsieme di $\times^k A$ che denotiamo con:

$$D_k(A)$$

La cardinalità vale:

$$|D_k(A)| = |A| \cdot (|A|-1) \cdot (|A|-2) \cdots (|A|-k+1)$$

$D_k(A) = \emptyset$ se $k > |A|$

2.6.1 Fattoriale

Definizione: dato un intero n non negativo, chiamiamo n fattoriale il numero:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)(n-2)\cdots 1 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

La cardinalità delle disposizioni senza ripetizioni vale:

$$|D_k(A)| = |A| \cdot (|A|-1) \cdots (|A|-2) \cdots (|A|-k+1) \cdot \frac{(a-k)!}{(a-k)!} = \frac{|A|!}{(|A|-k)!}$$

2.7 Permutazioni degli elementi

Definizione: $D_{|A|}(A)$ è anche detto **insieme delle permutazioni** degli elementi di A. Si ha:

$$|D_{|A|}(A)| = |A|!$$

Esercizio (Estrazione con e senza reinserimento)

Si estraggono in successione due palline da un urna che ne contiene n, numerate da 1 a n. Qual è la probabilità di estrarre la k-esima pallina in un esperimento con reinserimento e in uno senza?

Caso con reinserimento
$\Omega = \times^2\{1, \cdots, n\}$
$E = \{(i, j) \in \Omega : i = k \text{ oppure } j = k\}$

$|\Omega| = n^2$
$|E| = n + (n-1) = 2n - 1$

$$\mathbb{P}[E]\frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2n-1}{n^2} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$$

Caso senza reinserimento
$\Omega = D_2(\{1, \cdots, n\})$
$E = \{(i, j) \in \Omega : i = k \text{ oppure } j = k\}$

$|\Omega| = n(n-1)$
$|E| = 2n - 2$

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{2\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n-1)}} = \frac{2}{n}$$

Esercizio (Problema del compleanno)

Qual è la probabilità che in gruppo di n persone ve ne siano **almeno** due nati lo stesso giorno? Supponiamo che ogni anno abbia 365 giorni e diciamo A l'insieme dei 365 giorni dell'anno.

$$\Omega = \times^n A \qquad |\Omega| = 365^n$$

Non ci sono persone nate lo stesso giorno se si verifica l'evento:

$$E = D_n(A) \qquad |E| = \frac{365!}{(365-n)!}$$

La probabilità che non ci siano due persone nate lo stesso giorno è:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

Vi sono almeno due persone nate lo stesso giorno con probabilità:

$$\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E] = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

Se $n = 23$ $\qquad \mathbb{P}[E^C] \simeq \mathbf{0.51}$
Se $n = 50$ $\qquad \mathbb{P}[E^C] \simeq \mathbf{0.97}$

2.8 Evento completamente incerto

Un evento $E \in \varepsilon$ è completamente incerto se $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E^C]$. D'altra parte $\mathbb{P}[E^C] = 1 - \mathbb{P}[E]$. Quindi un evento è completamente incerto se $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E^C] = \frac{1}{2}$

Esercizio (Permutazioni)

Un corso di probabilità è frequentato da 10 studenti, 4 ragazze e 6 ragazzi. All'esame gli studenti prendono voti tutti diversi. Qual è la probabilità che le ragazze siano andate meglio dei ragazzi?

Svolgimento Numeriamo da 1 a 10 gli studenti partendo dalle ragazze.
$\Omega = D_{10}(\{1, \cdots, 10\})$ l'insieme delle permutazioni dei primi dieci interi.
$E = \{$insieme di permutazioni tali che 1,2,3,4 sono nelle prime quattro posizioni$\}$.

$|\Omega| = 10!$
$|E| = 4! \cdot 6!$
In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{\Omega} = \frac{4! \cdot 6!}{10!} = \frac{1}{210} \simeq \mathbf{0.005}$$

2.9 Combinazioni

Definizione: una **combinazione** di classe $k \leq |A|$ degli elementi di A è un sottoinsieme di A di cardinalità k.

L'insieme di tutte le combinazioni di classe k è denotato con:

$$C_k(A)$$

La cardinalità si calcola:

$$C_k(A) = \frac{D_k(A)}{k!} = \frac{|A|!}{k!(|A| - k)!} = \binom{|A|}{k}$$

Ex. $A = \{a, b, c\}$

$$D_2(A) = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$$
$$C_2(A) = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\big\}$$

2.10 Coefficiente binomiale

Dati gli interi $0 \leq k \leq n$, diciamo **coefficiente binomiale** il numero:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Esercizio (Circolo)

Un circolo è costituito da n persone, in quanti modi si possono eleggere un presidente, un tesoriere e un segretario? In quanti modi posso scegliere 3 persone nel circolo?

Svolgimento domanda 1 Posso fare un presidente, un tesoriere e un segretario in:

$$n(n - 1)(n - 2) = \frac{n!}{(n - 3)!}\ nodi$$

Svolgimento domanda 2 Posso scegliere 3 persone in:

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{n!(n - 3)!}\ nodi$$

Esercizio (Commissione)

Una commissione di 5 persone viene selezioanta da un gruppo di 9 donne e 6 uomini. Qual è la probabilità che la commissione sia formata da 2 donne e 3 uomini?

Svolgimento Sia D l'insieme delle donne e U quello degli uomini.

$$|D| = 9 \qquad |U| = 6$$

$\Omega = C_5(D \cup U)$ è l'insieme di tutte le possibili commissioni.
$|\Omega| = |C_5(D \cup U)| = \binom{D \cup U}{5} = \binom{15}{5}$

$E = \{d \cup u : d \in C_2(D), u \in C_3(U)\}$
$|E| = |C_2(D)| \cdot |C_3(U)| = \binom{9}{2} \cdot \binom{6}{3}$
In conclusione:

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{9}{2}\binom{6}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001} \simeq \mathbf{0.24}$$