Capitolo XV

Esercizi

<u>Esercizio 1.</u> Un treno parte da fermo e raggiunge la velocità di 90 Km/h in 50 s. Prosegue poi di moto rettilineo uniforme per 5 minuti. Infine decelera fino a fermarsi in 25 s. Quanto spazio ha percorso in tutto ?

Il treno raggiunge la velocità di 90 $Km/h = \frac{90}{3.6}\ m/s = 25\ m/s$ in 50 s, quindi la sua accelerazione è

$$a = \frac{v}{t} = \frac{25}{50}\ m/s^2 = 0.5\ m/s^2$$

in questo tempo percorre uno spazio

$$s_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 50^2\ m = 625\ m$$

Siccome prosegue poi di moto rettilineo uniforme per 5 $min = 300\ s$, percorre uno spazio

$$s_2 = vt = 25 \times 300 = 7500\ m$$

infine rallenta fino a fermarsi, cioè ad avere $v = 0$: quindi la sua decelerazione è pari a

$$d = \frac{v}{t'} = \frac{25}{25}\ m/s^2 = 1\ m/s^2$$

e percorre

$$s_3 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 25^2\ m = 312.5\ m$$

In tutto quindi ha percorso uno spazio di

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 625 + 7500 + 312.5\ m = 8437.5\ m$$

<u>Esercizio 2.</u> La pubblicità di un'automobile dichiara che questa è in grado di passare "da 0 a 100 Km/h in 4.2 secondi". Qual è l'accelerazione corrispondente ?

L'accelerazione (media) è data da

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{27.78}{4.2} \simeq 6.6\ m/s^2$$

dato che $v = 100\ km/h \simeq 27.78\ m/s$.

<u>Esercizio 3.</u> Un corpo di massa m scende lungo un piano inclinato con accelerazione pari a $\frac{1}{3}g$, e arriva a terra dopo 4 secondi. Quanto è lungo il piano ? Con che velocità la massa arriva a terra ? Il corpo prosegue poi di moto uniformemente decellerato fermandosi dopo 10 secondi: qual è la sua decellerazione ?

Lo spazio percorso vale

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

con $a = \frac{1}{3}g = 9.81/3 = 3.27\ m/s^2$, quindi

$$s = \frac{1}{2} \times 3.27 \times 4^2 = 26.16\ m$$

La velocità è data da

$$v = at = 3.27 \times 4 = 13.08\ m/s$$

Infine la decellerazione si ottiene da

$$d = \frac{v}{t'} = \frac{13.08}{10} = 1.308\ m/s^2$$

<u>Esercizio 4.</u> La controfigura di un famoso attore deve girare la scena di un film d'azione: lanciarsi in sella ad una potente moto da un dirupo alto 40 m. Se la moto deve atterrare su uno spiazzo a 70 m dal bordo del dirupo, quale

deve essere la velocità della moto al momento del lancio ? (Si trascuri l'attrito dell'aria)

Quando la moto lascia il bordo del dirupo descrive una traiettoria parabolica, la cui componente verticale è data dall'equazione

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

che permette di determinare il tempo che la moto impiega ad atterrare

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 40}{9.81}} \simeq 2.86 \ s$$

La componente orizzontale invece è descritta dall'equazione

$$x = vt$$

dalla quale si determina la velocità richiesta alla moto

$$v = \frac{s}{t} = \frac{70}{2.86} \simeq 24.48 \ m/s \simeq 88 \ km/h$$

la controfigura quindi dovrà lanciarsi a circa 90 km/h per raggiungere lo spiazzo.

<u>Esercizio 5.</u> **Una ruota di bicicletta ha un raggio di 40 cm e gira alla velocità tangenziale di 1.4 m/s. Quanti giri compie la ruota in 2 minuti ? Con quale frequenza gira ? Qual è l'angolo descritto dalla valvola della ruota in 0.2 secondi ?**

La velocità angolare (costante) è pari a

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1.4}{0.4} = 3.5 \ rad/s$$

quindi in due minuti

$$\vartheta = \omega t = 3.5 \times 120 = 420 \ rad \simeq 66.8 \ giri$$

e in 0.2 secondi

$$\vartheta_2 = \omega t_2 = 3.5 \times 0.2 = 0.7 \; rad$$

<u>Esercizio 6.</u> Il cestello di una lavatrice parte da fermo e raggiunge una velocità angolare di 5 giri/s in 8 secondi. A questo punto a seguito di una improvvisa mancanza di alimentazione il cestello rallenta fino a fermarsi in 12 secondi. Calcolare il numero di giri totale compiuti dal cestello.

Si tratta di due moti rotatori, il primo uniformemente accelerato e il secondo uniformemente decellerato. Nella prima parte l'accelerazione angolare vale

$$\alpha_1 = \frac{\omega}{t_1} = 0.625 \; giri/s^2$$

e il cestello compie

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 = 20 \; giri$$

Nella seconda parte la decellerazione vale

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{t_2} = 0.417 \; giri/s^2$$

e il cestello compie

$$\vartheta_2 = \omega t_2 - \frac{1}{2}\alpha_2 t_2^2 = 30 \; giri$$

In totale quindi il cestello compie $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 50 \; giri$.

<u>Esercizio 7.</u> Un riproduttore di CD audio fa girare il CD ad una velocità lineare costante v = 1.30 m/s. Si determini la velocità angolare all'inizio della traccia (r = 2.30 cm) e alla fine della traccia (r = 5.80 cm). Se la registrazione completa dura 74 min 33 sec, si trovi l'accelerazione media del CD e l'angolo totale compiuto dallo stesso (supponendo costante l'accelerazione).

La velocità angolare è data da

$$\omega = \frac{v}{r}$$

pertanto

$$\omega_i = \frac{1.3}{0.023} = 56.52\ rad/s = 9\ giri/s$$

$$\omega_f = \frac{1.3}{0.058} = 22.41\ rad/s = 3.57\ giri/s$$

L'accelerazione angolare media vale

$$\alpha_m = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{22.41 - 56.52}{4473} = -0.0076\ rad/s^2$$

e l'angolo totale

$$\vartheta_t = \frac{1}{2}\alpha_m t^2 + \omega_i t = 176784.59\ rad = 28150.41\ giri$$

<u>Esercizio 8.</u> La Luna ruota attorno alla Terra ad una distanza di $3.84{\cdot}10^5$ km con un periodo di circa 28 giorni. Calcolare il modulo dell'accelerazione centripeta e della velocità lineare.

Approssimando il moto della Luna ad un moto circolare uniforme, si ha

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

con $T = 28 \times 24 \times 3600 = 2.42 \cdot 10^6\ s$; quindi rimane

$$a = \left(\frac{2\pi}{2.42 \cdot 10^6}\right)^2 \times 3.84 \cdot 10^8 \simeq 2.59 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$$

Per la velocità

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T} R$$

rimane

$$v = \frac{2\pi}{2.42 \cdot 10^6} \times 3.84 \cdot 10^8 \simeq 996\ m/s \simeq 1\ Km/s = 3600\ Km/h$$

<u>Esercizio 9.</u> La Terra ruota attorno alla Sole ad una distanza di $1.49{\cdot}10^8$. Approssimando l'orbita con un moto circolare uniforme, calcolare il modulo della velocità tangenziale e dell'accelerazione centripeta.

La velocità è data da

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T} R$$

con $T = 365 \times 24 \times 3600 = 3.15 \cdot 10^7\ s$; quindi rimane

$$v = \frac{2\pi}{3.15 \cdot 10^7} \times 1.49 \cdot 10^{11} \simeq 2.97 \cdot 10^4\ m/s = 29.7\ Km/s \simeq 100000\ Km/h$$

L'accelerazione invece è pari a

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

ovvero

$$a = \left(\frac{2\pi}{3.15 \cdot 10^7}\right)^2 \times 1.49 \cdot 10^{11} \simeq 5.93 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$$

<u>Esercizio 10.</u> **Il Sole ruota attorno al centro della Galassia ad una distanza di circa 30000 anni luce (1 anno luce = 9.5·10^{15} m) impiegando 220 milioni di anni per compiere una rotazione completa. Supponendo che l'orbita sia perfettamente circolare e il moto uniforme, si calcolino il modulo della velocità tangenziale e dell'accelerazione centripeta.**

Per un moto circolare uniforme si ha

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T} R$$

con $T = 220 \cdot 10^6 \times 3.15 \cdot 10^7 = 6.93 \cdot 10^{15}\ s$ e $R = 3 \cdot 10^4 \times 9.5 \cdot 10^{15} = 2.85 \cdot 10^{20}\ m$, quindi

$$v = \frac{2\pi}{6.93 \cdot 10^{15}} \times 2.85 \cdot 10^{20} \simeq 2.58 \cdot 10^5\ m/s = 258\ Km/s \simeq 930000\ Km/h$$

L'accelerazione poi è data da

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

ovvero

$$a = \left(\frac{2\pi}{6.93 \cdot 10^{15}}\right)^2 \times 2.85 \cdot 10^{20} \simeq 2.34 \cdot 10^{-10}\ m/s^2$$

<u>**Esercizio 11.**</u> **Due forze $\bar{\mathbf{F}}_1$ = (-6$\bar{\mathbf{i}}$ - 4$\bar{\mathbf{j}}$) N e $\bar{\mathbf{F}}_2$ = (-3$\bar{\mathbf{i}}$ + 7$\bar{\mathbf{j}}$) N agiscono su una particella di massa 2 kg inizialmente ferma nell'origine. Determinare dopo 10 s le componenti della velocità e la posizione della particella.**

La forza totale agente sulla particella ha componenti

$$\mathbf{F} = F_i\mathbf{i} + F_j\mathbf{j} = (F_{i,1} + F_{i,2})\ \mathbf{i} + (F_{j,1} + F_{j,2})\ \mathbf{i} = (-9\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\ N$$

L'accelerazione quindi è data da

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{F_i}{m}\ \mathbf{i} + \frac{F_j}{m}\ \mathbf{j} = (-4.5\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j})\ m/s^2$$

Pertanto dopo $t = 10\ s$ la velocità p̀ari a

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\ t = (a_i t)\ \mathbf{i} + (a_j t)\ \mathbf{j} = (-45\mathbf{i} + 15\mathbf{j})\ m/s$$

e la particella si trova in

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}t^2\mathbf{a} = (\frac{1}{2}a_i t^2)\ \mathbf{i} + (\frac{1}{2}a_j t^2)\ \mathbf{j} = (-225\mathbf{i} + 75\mathbf{j})\ m$$

<u>**Esercizio 12.**</u> **Spiderman, la cui massa è di 80 Kg, è appeso ad una delle sue ragnatele lunga 12 m. Dondolandosi riesce a raggiungere il davanzale di una finestra; in quella posizione la ragnatela forma un angolo di 60°. Determinare il lavoro compiuto da Spiderman contro la forza di gravità.**

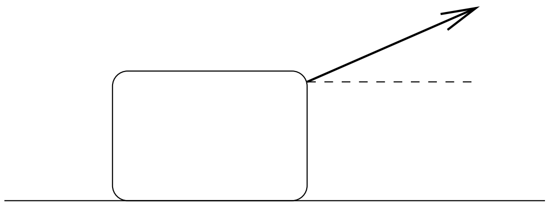
Se l è la lunghezza della ragnatela, l'altezza raggiunta da Spiderman è pari a

$$h = l - l\cos\varphi = 12 - 12\cos 60^\circ = 6\ m$$

quindi il lavoro compiuto contro la forza di gravità vale

$$L = -Fs = -mgh = -80 \times 9.81 \times 6 \simeq -4700\ J$$

<u>**Esercizio 13.**</u> **Una passeggera all'aeroporto trasporta la sua valigia di 20 Kg a velocità costante, agendo su una cinghia che forma un angolo ϑ con l'orizzontale. La donna esercita una forza di 35 N, e il coefficiente di attrito dinamico è pari a 0.102. Determinare l'angolo formato dalla cinghia con l'orizzontale.**



Se la valigia si muove a velocità costante, la risultante delle forze applicate deve essere nulla. Sulla valigia agiscono due forze, la componente orizzontale della forza applicata dalla donna e la forza di attrito dinamico. Quindi dovrà essere in valore assoluto

$$F\cos\vartheta = F_d$$

dove $F_d = k_d mg$. Pertanto

$$\cos\vartheta = \frac{F_d}{F} = \frac{k_d mg}{F} = \frac{0.102\times 20\times 9.81}{35} \simeq \frac{20.01}{35} \simeq 0.5718$$

da cui $\vartheta \simeq 55.12°$.

<u>Esercizio 14.</u> Un'automobile di massa 1500 Kg, che si muove su una strada orizzontale piana, affronta una curva di 35 m di raggio. Se il coefficiente di attrito tra gli pneumatici e il terreno è 0.573, trovare la velocità massima che l'auto può mantenere durante la curva.

Durante la curva lo slittamento radiale è impedito dalla forza di attrito (statico, perché il tratto di gomma a contatto con la strada è istantaneamente fermo) fra le ruote e il terreno, che agisce radialmente verso l'interno. La massima velocità che l'auto può assumere è quella per la quale la forza di attrito eguaglia la forza centripeta necessaria a mantenerla in curva. Quest'ultima in modulo è pari a $F_c = ma_c = m\frac{v^2}{R}$. Pertanto si ha la condizione

$$F_a = F_c \qquad \Longrightarrow \qquad k_a mg = m\frac{v_{max}^2}{R}$$

da cui

$$v_{max} = \sqrt{k_a gR} = \sqrt{0.573\times 9.81\times 35} \simeq 14.03\ m/s = 50.5\ km/h$$

Si noti che la massima velocità scala con la radice quadrata del coefficiente di attrito e non dipende dalla massa del veicolo.

<u>**Esercizio 15.**</u> **Un'automobile viaggia ad una velocità di 50 km/h, quando per l'improvvisa comparsa di un ostacolo il conducente è costretto a frenare bruscamente arrestando le ruote. Se l'auto si ferma dopo 16 m, si calcoli il coefficiente di attrito delle ruote col terreno (si trascuri il tempo di reazione del conducente).**

Durante la frenata l'energia cinetica dell'auto viene spesa nel lavoro della forza di attrito. Si ha quindi

$$\frac{1}{2}mv^2 = F_a s = \mu_d mgs \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}v^2 = \mu_d gs$$

da cui, sostituendo $s = 16\ m$ e $v = 50\ km/h \simeq 13.89\ m/s$, si ottiene

$$\mu_d = \frac{v^2}{2gs} = \frac{13.89^2}{2 \times 9.81 \times 16} \simeq 0.615$$

(il coefficiente di attrito degli pneumatici col terreno varia da ~ 0.8 in caso di strada asciutta e fondo ruvido a ~ 0.05 in caso di strada ghiacciata).

<u>**Esercizio 16.**</u> **Una tempesta di neve fa accumulare neve fresca su una pista da sci. Se il coefficiente di attrito statico tra la neve fresca e la neve sottostante è pari a 0.46, qual è l'angolo di massima inclinazione del pendio per cui lo strato di neve fresca può aderire ?**

Lo strato di neve fresca caduto sul pendio può essere schematizzato come una massa m posata su un piano inclinato che forma un angolo ϑ con l'orizzontale. Se lo strato rimane fermo, la forza totale $\mathbf{F}$ che agisce su di esso deve essere nulla.

Sulla neve agiscono due forze, la componente della forza peso lungo il pendio, $F_p = mg\sin\vartheta$, e la forza di attrito statico $F_s = k_s mg\cos\vartheta$, giacché è proporzionale alla componente della forza peso perpendicolare alla superficie del pendio. Quindi dovrà essere

$$F_p = F_s \qquad \Longrightarrow \qquad mg\sin\vartheta = k_s mg\cos\vartheta$$

da cui $\tan\vartheta = k_s$. Pertanto l'inclinazione massima del pendio sarà $\vartheta = \arctan k_s = \arctan(0.46) \simeq 25°$.

<u>Esercizio 17.</u> **Un ascensore di massa 1000 kg ha una portata massima di 800 Kg. Una forza di attrito costante di 4000 N ritarda il suo moto verso l'alto. Quale deve essere la minima potenza erogata dal motore per far salire l'ascensore con una velocità costante di 3 m/s? Quale potenza deve fornire il motore se l'ascensore deve muoversi con una accelerazione di 1 m/s^2 verso l'alto ?**

Sull'ascensore agiscono tre forze: la tensione T del cavo che lo tira verso l'alto, la forza di attrito costante F_a che si oppone al moto e la forza peso, entrambe verso il basso. Poiché l'ascensore sale con velocità costante, la forza totale è nulla, $F = T - F_a - Mg = 0$. Di conseguenza

$$T = F_a + Mg = 4000 + (1000 + 800) \times 9.81 \simeq 21600\ N$$

Pertanto la potenza fornita dal motore dell'ascensore è pari a

$$W = Tv = 21600 \times 3 \simeq 65\ kW$$

Invece quando l'acensore sale con moto accelerato, la forza totale non è più nulla ma pari a $F = T - F_a - Mg = Ma$. In questo caso la tensione del cavo vale

$$T = Ma + Mg + F_a = M(a + g) + F_a = (1000 + 800) \times (1 + 9.81) + 4000 \simeq 23500\ N$$

In questo caso la potenza non è costante ma dipende linearmente dalla velocità istantanea, e vale $W = (23500\ v)\ W$.

<u>Esercizio 18.</u> **Una massa di 3 Kg si muove ad una velocità di 15 m/s. Quanta energia possiede ? Durante il suo moto sale ad una altezza di 4 m. Quanta energia cinetica gli rimane ?**

Il corpo possiede una energia cinetica di

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 15^2\ J = 337.5\ J$$

Salendo ad una altezza $h = 4\ m$ acquista una energia potenziale di

$$V = mgh = 3 \times 9.8 \times 4\ J = 117.6\ J$$

Gli rimane quindi una energia cinetica di

$$K' = K - V = 337.5 - 117.6 = 219.9\ J$$

<u>Esercizio 19.</u> Una massa di 10 Kg viene accelerata da ferma ad una velocità di 10 m/s in 4 secondi. Quanto lavoro viene speso per tale operazione ? Qual è stata l'intensità della forza applicata ? La massa si sposta poi su una superficie con coefficiente di attrito dinamico $\mathbf{k_d = 0.2}$: dopo quanti metri la massa si ferma ?

Il lavoro speso è pari all'energia acquistata dalla massa, quindi

$$L = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^2 = 500\ J$$

L'accelerazione cui è stata sottoposta la massa è pari a

$$a = \frac{v}{t} = \frac{10}{4} = 2.5\ m/s^2$$

e quindi la forza ha intensità

$$F = ma = 10 \times 2.5 = 25\ N$$

Muovendosi sulla superficie con attrito la massa perde energia, e poiché si ferma il lavoro della forza è uguale all'energia posseduta dalla massa. Dato che la forza di attrito in modulo vale

$$F_a = k_d mg = 0.2 \times 10 \times 9.81 = 19.62\ N$$

rimane

$$s = \frac{L}{F_a} = \frac{500}{19.62} \simeq 25.48\ m$$

<u>Esercizio 20.</u> **Un'automobile con una massa di 1000 Kg viaggia in piano ad una velocità costante di 108 Km/h. Quanta energia cinetica possiede ? Ad un certo punto inizia una salita per affrontare la quale perde 137500 J. Qual è la sua velocità alla fine della salita ? Supponendo di trascurare gli attriti, come si potrebbe determinare l'altezza della salita ?**

Dato che l'automobile si muove ad una velocità $v = 108\ Km/h = 30\ m/s$, possiede una energia cinetica pari a

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 30^2 = 450000\ J$$

Dopo la salita l'energia cinetica residua è

$$K' = 450000 - 137500 = 312500\ J$$

per cui la sua velocità finale è

$$v' = \sqrt{2K'/m} = 25\ m/s = 90\ Km/h$$

Poiché l'energia totale si conserva, l'auto perde energia cinetica e acquista energia potenziale $V = mgh = 137500\ J$, e perciò

$$h = \frac{V}{mg} = \frac{137500}{1000 \times 9.81} \simeq 14\ m$$

<u>Esercizio 21.</u> **Una palla rimbalzando sul pavimento perde il 20% della propria energia cinetica. Determinare con che velocità deve essere lanciata verso il basso da una altezza di 2 m per vederla rimbalzare alla stessa altezza. (Si trascuri l'attrito dell'aria)**

L'energia meccanica si conserva durante tutto il moto della palla. Sia v_0 la velocità con cui viene lanciata verso il basso da una altezza h e v_s la velocità con cui tocca il suolo: allora durante il moto verso il basso si ha

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_s^2$$

Nel momento in cui rimbalza verso l'alto la sua energia cinetica sarà solo più 0.8 $\frac{1}{2}mv_s^2$; questa energia deve essere sufficiente a far ritornare la palla all'altezza h: quindi durante il moto verso l'alto si ha

$$0.8\ \frac{1}{2}mv_s^2 = mgh$$

Ricavando 1/2 mv_s^2 dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si ottiene

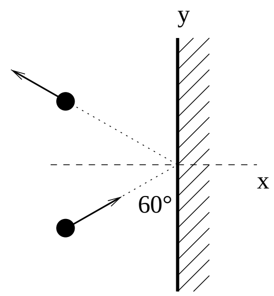
$$v_0 = \sqrt{2gh\left(\frac{1}{0.8} - 1\right)} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 2 \times 0.25} \simeq 3.13\ m/s$$

<u>Esercizio 22.</u> Un giocatore di tennis riceve una palla, di massa m = 60 g, che viaggia orizzontalmente ad una velocità di 50 m/s, e la ribatte con la racchetta così da farla tornare indietro con una velocità di 40 m/s. Calcolare l'impulso trasferito.

L'impulso trasferito è pari alla variazione della quantità di moto $I = \Delta q$, che vale (considerando che la palla torna indietro e quindi le due velocità hanno segno opposto)

$$I = q_f - q_i = mv_f - mv_i = 0.06 \times (40 + 50) = 5.4\ Kg\ m/s$$

<u>Esercizio 23.</u> Una palla di acciaio di 3 Kg colpisce un muro con una velocità di 10 m/s, che forma un angolo di 60° con la parete. La palla rimbalza con la stessa velocità e lo stesso angolo. Se la palla rimane a contatto con la parete per 0.2 s, trovare la forza media esercitata dal muro sulla palla.



L'impulso esercitato dalla forza è pari alla variazione di quantità di moto della palla

$$\mathbf{F_m}\Delta t = \Delta \mathbf{q}$$

Lungo l'asse Y non c'è variazione di quantitá di moto

$$q_{i,y} = mv_{i,y} = mv_{f,y} = q_{f,y}$$

dove $v_{i,y} = v_{f,y} = v\cos\alpha$ è la componente della velocità lungo Y. Invece lungo X la quantità di moto varia di

$$\Delta q_x = q_{f,x} - q_{i,x} = mv_{f,x} - mv_{i,x}$$

dove $v_{i,x} = v\sin\alpha$ e $v_{f,x} = -v\sin\alpha$ per come è orientato l'asse X. Quindi $\Delta q = -2mv\sin\alpha$ e pertanto la forza media ha direzione perpendicolare alla parete, verso diretto lungo le X negative e modulo

$$F_m = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{-2mv\sin\alpha}{\Delta t} = -\frac{2\times 3\times 10\times \sin 60°}{0.2} \simeq -260\ N$$

Esercizio 24. Un'auto di massa $\mathbf{M_1}$ = 1800 Kg ferma ad un semaforo viene tamponata da una seconda auto di massa $\mathbf{M_2}$ = 900 Kg che viaggia ad una velocità $\mathbf{v}_i$ = 20.0 m/s. Nell'ipotesi che le due auto proseguano unite, si calcoli la velocità dopo l'urto. (Si trascurino gli attriti)

Durante l'urto si conserva la quantità di moto $q_i = q_f$. Ora

$$q_i = M_1 \cdot 0 + M_2 v_i = M_2 v_i$$

$$q_f = (M_1 + M_2) v_f$$

pertanto

$$M_2 v_i = (M_1 + M_2) v_f \qquad \longrightarrow \qquad v_f = \frac{M_2 v_1}{M_1 + M_2} = 6.67\ m/s$$

Esercizio 25. Un sistema è composto di due punti materiali, $\mathbf{m_1}$ = 2 kg che si muove con velocità $\mathbf{v_1}$ di componenti $\mathbf{v}_{1,x}$ = 2 m/s e $\mathbf{v}_{1,y}$ = -3 m/s, e $\mathbf{m_2}$ = 3 kg che si muove con velocità $\mathbf{v_2}$ di componenti $\mathbf{v}_{2,x}$ = 1 m/s e $\mathbf{v}_{2,y}$ = 6 m/s. Determinare la velocità del centro di massa e la sua quantità di moto.

La componente x della posizione del centro di massa è data da

$$r_{CM,x} = \frac{m_1 r_{1,x} + m_2 r_{2,x}}{m_1 + m_2}$$

e derivando rispetto al tempo rimane

$$v_{CM,x} = \frac{m_1 v_{1,x} + m_2 v_{2,x}}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 2 + 3 \times 1}{2 + 3} = 1.4\ m/s$$

e analogamente

$$v_{CM,y} = \frac{m_1 v_{1,y} + m_2 v_{2,y}}{m_1 + m_2} = \frac{-2 \times 3 + 3 \times 6}{2 + 3} = 2.4\ m/s$$

Le componenti della quantità di moto poi sono date da

$$q_x = (m_1 + m_2) v_{CM,x} = 7\ kg\ m/s$$

$$q_y = (m_1 + m_2) v_{CM,y} = 12\ kg\ m/s$$

<u>Esercizio 26.</u> Una palla da biliardo che viaggia con una velocità $\mathbf{v}_i = \mathbf{5\ m/s}$ colpisce una seconda palla di massa uguale e ferma, e prosegue con una velocità $\mathbf{v}_1 = \mathbf{4.33\ m/s}$ inclinata di $\mathbf{30^\circ}$ rispetto alla direzione di arrivo. Calcolare la velocità $\mathbf{v}_2$ con cui si muove la seconda palla dopo l'urto e la sua inclinazione. (Si trascurino gli attriti e i moti rotatori)

Essendo l'urto di tipo elastico si conserva l'energia cinetica: pertanto si avrà

$$\frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

da cui

$$v_2 = \sqrt{v_i^2 - v_1^2} = \sqrt{5^2 - 4.33^2} = 2.5\ m/s$$

Inoltre durante l'urto si conserva la quantità di moto del sistema. In particolare nella direzione perpendicolare a $\mathbf{v}_i$ si ha

$$q_i = 0 = q_f = m v_1 \sin\vartheta + m v_2 \sin\alpha$$

e quindi

$$\sin\alpha = -\frac{v_1 \sin\vartheta}{v_2} = -\frac{4.33 \times 0.5}{2.5} = 0.866 \qquad \longrightarrow \qquad \alpha = \arcsin 0.866 \simeq 60°$$

<u>Esercizio 27.</u> Tre palle da biliardo di ugual massa m = 300 g sono poste ai vertici di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano a = 30 cm e b = 40 cm. Si calcoli la forza gravitazionale cui è sottoposta la palla al vertice per effetto delle altre due.

La forza esercitata dalla palla 2 sulla palla 1 è data da

$$F_{12} = G\frac{m\ m}{a^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \times \frac{0.3 \times 0.3}{(0.3)^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N$$

diretta lungo la congiungente i centri delle due palle; analogamente la forza esercitata dalla palla 3 sulla palla 1 è pari a

$$F_{13} = G\frac{m\ m}{b^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \times \frac{0.3 \times 0.3}{(0.4)^2} \simeq 3.75 \cdot 10^{-11}\ N$$

La forza risultante avrà modulo

$$F_{ris} = \sqrt{F_{12}^2 + F_{13}^2} \simeq 7.65 \cdot 10^{-11}\ N$$

e formerà un angolo ϑ con la forza $\mathbf{F}_{12}$ tale che

$$\tan\vartheta = \frac{F_{13}}{F_{12}}$$

e quindi $\vartheta = \arctan(F_{13}/F_{12}) \simeq 60.65°$.

Si noti come la forza sia molto piccola e del tutto irrilivente nella stragrande maggioranza delle situazioni.

<u>Esercizio 28.</u> Miranda, satellite di Urano, ha un raggio di 242 km ed una massa di 6.68·10^{19} kg: quanto vale l'accelerazione di gravità alla sua superficie ? Si immagini di lanciare orizzontalmente un oggetto da un monte alto 5 km con

una velocità di 8.50 m/s: a quale distanza atterrerebbe tale oggetto ? Per quanto tempo rimarrebbe in volo ?

Alla superficie l'accelerazione vale

$$g = G\frac{M}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \times \frac{6.68 \cdot 10^{19}}{(242 \cdot 10^3)^2} = 0.076\ m/s^2 = 7.6\ cm/s^2$$

Un oggetto lanciato da una altezza h impiega un tempo $t = \sqrt{2h/g}$ per giungere a terra: in questo caso

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \cdot 10^3}{0.076}} \simeq 362.74\ s$$

Poiché l'oggetto è lanciato orizzontalmente, la gittata è pari a

$$d = v_0 t = 8.50 \times 362.74 \simeq 3083.29\ m \simeq 3.1\ km$$

<u>Esercizio 29.</u> **Il periodo di rivoluzione di Giove attorno al Sole $\mathbf{T_G}$ è 12 volte il periodo di rivoluzione della Terra $\mathbf{T_T}$. Assumendo circolari le orbite dei pianeti, trovare a) il rapporto fra la distanza di Giove dal Sole $\mathbf{R_G}$ e la distanza della Terra dal Sole $\mathbf{R_T}$, b) la velocità e l'accelerazione di Giove rispetto al sistema di riferimento del Sole. (Si tenga presente che la luce impiega circa 8 minuti per percorrere la distanza Terra–Sole.)**

Secondo la terza legge di Keplero il rapporto T^2/R^3 è costante per tutti i pianeti: pertanto

$$\frac{T_G^2}{R_G^3} = \frac{T_T^2}{R_T^3}$$

da cui

$$\frac{R_G^3}{R_T^3} = \frac{T_G^2}{T_T^2}$$

e quindi

$$\frac{R_G}{R_T} = \sqrt[3]{\frac{T_G^2}{T_T^2}} = \sqrt[3]{144} \simeq 5.24$$

La velocità e l'accelerazione di Giove sono date dalle formule

$$v_G = \frac{2\pi}{T_G} R_G = \frac{2\pi}{12\ T_T}\ \sqrt[3]{144} R_T \qquad \text{e} \qquad a_G = \left(\frac{2\pi}{T_G}\right)^2 R_G = \left(\frac{2\pi}{12\ T_T}\right)^2\ \sqrt[3]{144} R_T$$

Ora $T_T = (365 \times 24 \times 3600)\ s$ e $R_T = (8 \times 60 \times 3 \cdot 10^8)\ m$, da cui

$$v_G \simeq 12.5\ Km/s \qquad \text{e} \qquad a_G \simeq 2.1 \cdot 10^{-4}\ m/s^2$$

<u>Esercizio 30.</u> Un materasso ad acqua ha le dimensioni di 2 m per 2 m ed una altezza di 30 cm. Si calcoli la pressione esercitata sul pavimento. La si confronti con quella di un letto tradizionale del peso di 100 kg che poggia sul pavimento mediante quattro piedi cilindrici di raggio 2 cm.

Il volume del materasso è $V = 2 \times 2 \times 0.3\ m^3 = 1.2\ m^3$ e la sua massa è pari a $M = \rho V = 1 \cdot 10^3\ Kg/m^3 \times 1.2\ m^3 = 1200\ kg$. Poiché la sua area di base vale $S = 2 \times 2\ m^2 = 4\ m^2$ la pressione esercitata è di

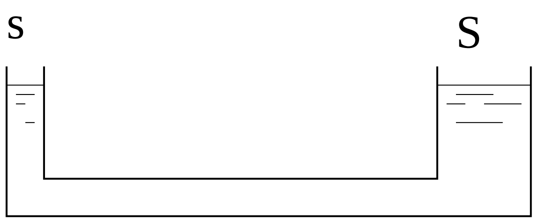
$$P_a = \frac{F_a}{S} = \frac{Mg}{S} = \frac{1200 \times 9.81}{4} \simeq 2.94 \cdot 10^3\ Pa$$

L'area di base di ciascun piede del letto tradizionale vale $A = \pi r^2 = \pi \times 0.02^2 \simeq 1.26 \cdot 10^{-3}\ m^2$, e la pressione esercitata è pari a

$$P_t = \frac{F_t}{4A} = \frac{mg}{4A} = \frac{100 \times 9.81}{4 \times 1.26 \cdot 10^{-3}} \simeq 1.95 \cdot 10^5\ Pa$$

cioè due ordini di grandezza maggiore, sebbene il peso sia dieci volte inferiore.

<u>Esercizio 31.</u> In un torchio idraulico (V. Figura) viene esercitata una forza di 1500 N su una superficie di 30 cm^2. Qual è l'intensità della forza che si riesce a bilanciare se la superficie sulla quale agisce è di 120 cm^2 ? Se la prima superficie si abbassa di 1 cm, di quanto si alza la seconda ? (Si supponga che il fluido all'interno del torchio sia incomprimibile.)



La pressione esercitata sulla prima superficie $S = 30\ cm^2 = 3 \cdot 10^{-3}\ m^2$ è

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1500}{3 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^5\ Pa$$

pertanto la forza equilibrata sulla superficie $S' = 120\ cm^2 = 1.2 \cdot 10^{-2}\ m^2$ vale

$$F' = pS' = 5 \cdot 10^5 \times 1.2 \cdot 10^{-2} = 6000\ N$$

Se la prima superficie si abbassa di $l = 1\ cm = 0.01\ m$, la prima forza compie un lavoro

$$L = Fs = 1500 \times 0.01 = 15\ J$$

e poichè l'energia si conserva, anche la seconda forza deve compiere lo stesso lavoro: quindi la seconda superficie si sposterà di

$$l' = \frac{L}{F'} = \frac{15}{6000} = 2.5 \cdot 10^{-3}\ m = 2.5\ mm$$

Esercizio 32. Si calcoli la pressione assoluta a 1000 m di profondità nel mare (si assuma $\rho = 1024$ kg/m^3 come densità dell'acqua di mare, e $p_a = 102.3$ kPa la pressione dell'aria alla superficie del mare). Quale forza deve esercitare la cornice dell'oblò di un sottomarino del diametro di 30 cm per sopportare tale pressione ?

Dalla legge di Stevino si ha

$$p = p_a + \rho g h = 1.023 \cdot 10^5 + 1024 \times 9.81 \times 1000 \simeq 1.023 \cdot 10^5 + 1.005 \cdot 10^7 \simeq 1.015 \cdot 10^7\ Pa$$

La superficie dell'oblò è pari a $S = \pi(d/2)^2 \simeq 7.1 \cdot 10^{-2}\ m^2$ e pertanto la forza esercitata dalla pressione vale $F = pS \simeq 7.21 \cdot 10^5\ N$ che deve essere bilanciata da una uguale forza da parte della cornice per evitare che l'oblò imploda verso l'interno del sommergibile.

Esercizio 33. Un aeroplano di massa $1.6 \cdot 10^4$ kg vola a quota costante. Sapendo che ciascuna ala ha un'area di 40 m^2 e che la pressione dell'aria sulla

loro faccia inferiore è di 7·10^4 Pa, si calcoli la pressione su ciascuna faccia superiore.

La forza diretta dal basso verso l'alto su entrambe le ali vale

$$F_u = 2S_{ala}p_a = 2 \times 40 \times 7 \cdot 10^4 = 5.6 \cdot 10^6 \ N$$

questa forza equilibra la forza peso dell'aereo più la forza di pressione sulla superficie superiore delle ali, che è pari a

$$F_d = F_u - Mg = 5.6 \cdot 10^6 - 1.6 \cdot 10^4 \times 9.81 \simeq 5.44 \cdot 10^6 \ N$$

cui corrisponde una pressione su ciascuna ala di

$$p = \frac{F_u}{2S_{ala}} = \frac{5.44 \cdot 10^6}{2 \times 40} \simeq 6.8 \cdot 10^4 \ Pa$$

<u>**Esercizio 34.**</u> **Una bomboletta spray contiene un gas propellente alla pressione di 2 atm (202 kPa), che occupa un volume di 125 cm^3 alla temperatura di 22°C. Successivamente viene riscaldata fino a 195°C: qual è la pressione del gas ?**

Supponendo che il volume della bomboletta non cambi, si può applicare la legge dei gas perfetti che implica

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}$$

ed essendo $V_i = V_f$ rimane

$$p_f = \frac{T_f}{T_i} p_i = \frac{468}{295} \times 202 \simeq 320 \ kPa$$

avendo trasformato tutte le temperature in temperature assoulte in gradi Kelvin.

<u>**Esercizio 35.**</u> **Un cilindro verticale di sezione A = 0.008 m^2 è limitato superiormente da un pistone di massa m = 20 kg, che può scorrere senza**

attrito. Se ci sono n = 0.1 moli di gas perfetto nel cilindro a temperatura T = 300 K, determinare l'altezza h a cui il pistone è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso.

Perché il pistone sia in equilibrio la forza di pressione del gas $F_p = pA$ deve uguagliare la pressione esterna data dalla somma della pressione atmosferica e della pressione dovuta alla forza peso $F_g = mg$ del pistone stesso. La pressione a sua volta è data dalla legge dei gas perfetti $p = nRT/V$ dove il volume è pari a $V = Ah$. Si ha pertanto

$$p_a A + mg = \frac{nRT}{V} A = \frac{nRT}{Ah} A = \frac{nRT}{h}$$

e quindi

$$h = \frac{nRT}{p_a A + mg} = \frac{0.1 \times 8.31 \times 300}{20 \times 9.81 + 1.023 \cdot 10^5 \times 0.008} \simeq 0.246\ m$$

<u>**Esercizio 36.**</u> **Un recipiente è riempito di elio alla temperatura di 298 K. Stimare la velocità media delle molecole di gas sapendo che il peso molecolare dell'elio è M = 4.003 g/mol.**

La temperatura di un gas è legata al valor medio della velocità al quadrato dalla relazione

$$T = \frac{2}{3} \frac{N}{nR} \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{N}_A}{R} \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right)$$

da cui si ricava il valor medio della velocità al quadrato

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{\mathcal{N}_A m}$$

dove $\mathcal{N}_A m$ è proprio la massa molare M. Rimane quindi

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 298}{4.003 \cdot 10^{-3}}} \simeq 1362\ m/s$$

<u>**Esercizio 37.**</u> **Una particolare macchina ciclica ha in uscita una potenza di 5 kW e un rendimento del 25%. Se la macchina cede 8000 J di energia per**

ciascun ciclo, trovare l'energia assorbita in ciascun ciclo e il tempo necessario a compiere un ciclo.

Il rendimento è definito come

$$\eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}$$

pertanto

$$Q_a = \frac{Q_c}{1-\eta} = \frac{8000}{1-0.25} \simeq 10700\ J$$

Poiché la potenza è data da $P = L/t$, il tempo per compiere un ciclo è pari a $t = L/P$. Ora da

$$\eta = \frac{L}{Q_a}$$

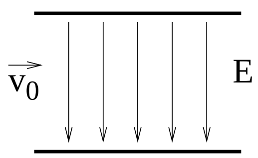
si ottiene

$$L = \eta Q_a = 0.25 \times 10700 \simeq 2700\ J$$

e quindi

$$t = \frac{L}{P} = \frac{2700}{5000} \simeq 0.55\ s$$

<u>Esercizio 38.</u> Un elettrone ($\mathbf{m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}}$ kg), muovendosi orizzontalmente con una velocità $\mathbf{v = 3 \cdot 10^6}$ m/s, entra in una regione di lunghezza $\mathbf{l =}$ 0.1 m in cui è presente un campo elettrico uniforme diretto verso il basso di intensità $\mathbf{E = 200}$ N/C. Si determini l'accelerazione acquistata dall'elettrone, il tempo necessario ad attraversare la regione di campo elettrico e lo spostamento verticale subìto.



All'interno della regione di campo elettrico l'elettrone si muove di moto parabolico. L'accelerazione è solo verticale e vale in modulo

$$a = \frac{F}{m} = \frac{q_e E}{m_e} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \times 200}{9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq 3.51 \cdot 10^{13}\ m/s^2$$

Il tempo per attraversare la regione di campo dipende invece dalla componente orizzontale del moto, che è un moto rettilineo uniforme dato che l'accelerazione non ha una componente orizzontale

$$t = \frac{l}{v} = \frac{0.1}{3 \cdot 10^6} \simeq 3.33 \cdot 10^{-8}\ s$$

Lo spostamento verticale infine è calcolabile a partire dal moto uniformemente accelerato che costituisce la componente verticale del moto parabolico dell'elettrone

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 3.5 \cdot 10^{13} \times \left(3.33 \cdot 10^{-8}\right)^2 \simeq 0.0195\ m \simeq 2\ cm$$

Esercizio 39. Sulla superficie della Terra esiste un campo elettrico di circa 150 V/m. Due sfere identiche di massa m = 0.540 kg vengono lasciate cadere da una altezza h = 2 m. Le due sfere hanno carica $q_1 = 650\ \mu C$ e $q_2 = -650\ \mu C$. Trascurando l'attrito dell'aria calcolare la differenza di velocità quando entrambe arrivano a terra. (Si suggerisce di usare la conservazione dell'energia.)

L'energia potenziale delle due sfere prima della caduta vale

$$U_1 = mgh + q_1 \Delta V \qquad \text{e} \qquad U_2 = mgh + q_2 \Delta V$$

con $\Delta V = Eh$. A terra tutta l'energia potenziale si sarà trasformata in energia cinetica $1/2\ mv^2$. La velocità della prima sfera sarà dunque

$$v_1 = \sqrt{2gh + \frac{2q_1 Eh}{m}} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 2 + \frac{2 \times 650 \cdot 10^{-6} \times 150 \times 2}{0.540}} \simeq 6.32\ m/s$$

e la velocità della seconda

$$v_2 = \sqrt{2gh + \frac{2q_2 Eh}{m}} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 2 - \frac{2 \times 650 \cdot 10^{-6} \times 150 \times 2}{0.540}} \simeq 6.21\ m/s$$

La differenza di velocità (in valore assoluto) è quindi $\Delta v = |v_1 - v_2| = 0.11\ m/s$.

<u>Esercizio 40.</u> **Un condensatore piano a facce parallele nel vuoto, costituito da due armature di area A = 7.60 cm² poste ad una distanza d = 1.80 mm, è sottoposto ad una differenza di potenziale ΔV = 20 V. Si calcoli l'intensità del campo elettrico fra le piastre (supposto uniforme dovunque), la capacità del condensatore e la densità di carica su ciascuna armatura.**

L'intensità del campo elettrico è data da

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{20}{1.80 \cdot 10^{-3}} \simeq 1.11 \cdot 10^4\ N/C$$

La capacità del condensatore è pari a

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8.85 \cdot 10^{-12} \times \frac{7.60 \cdot 10^{-4}}{1.80 \cdot 10^{-3}} \simeq 3.74 \cdot 10^{-12}\ F = 3.74\ pF$$

La carica accumulata su ciascuna armatura è

$$Q = C\Delta V = 3.74 \cdot 10^{-12} \times 20 \simeq 7.47 \cdot 10^{-11}\ C = 74.7\ pC$$

e perciò la densità di carica è

$$\rho = \frac{Q}{A} = \frac{7.47 \cdot 10^{-11}}{7.60 \cdot 10^{-4}} \simeq 9.83 \cdot 10^{-8}\ C/m^2 = 98.3\ nC/m^2$$

avendo espresso ogni grandezza in unità del Sistema Internazionale.

<u>Esercizio 41.</u> **Un condensatore piano a facce parallele, costituito da due armature di area A = 2.0 cm² poste ad una distanza d = 0.5 mm, è collegato ad una batteria che fornisce 12 V e poi staccato. Qual è il valore della carica accumulata sulle armature ? Se le armature vengono allontanate fino ad una distanza d' = 0.75 mm di quanto varia la carica ? Quanto vale la differenza di potenziale in questa nuova configurazione ? Quanto lavoro è stato compiuto per allontanare le armature ?**

La carica sulle piastre del condensatore è pari (in valore assoluto) a $Q = CV$. Ora la capacità del condensatore vale

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8.85 \cdot 10^{-12} \times \frac{2.0 \cdot 10^{-4}}{0.5 \cdot 10^{-3}} \simeq 3.54 \cdot 10^{-12}\ F = 3.54\ pF$$

e quindi

$$Q = CV = 3.54 \cdot 10^{-12} \times 12 \simeq 4.25 \cdot 10^{-11}\ C$$

Allontanando le armature la carica sulle stesse non cambia, pertanto nella nuova configurazione $Q' = Q$. Cambia invece la capacità del condensatore e quindi la differenza di potenziale ai suoi capi $V' = Q/C'$. Ora

$$C' = \varepsilon_0 \frac{A}{d'} = 8.85 \cdot 10^{-12} \times \frac{2.0 \cdot 10^{-4}}{0.75 \cdot 10^{-3}} \simeq 2.36 \cdot 10^{-12}\ F = 2.36\ pF$$

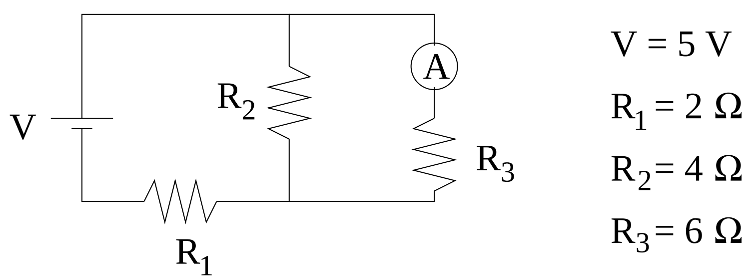
e quindi

$$V' = \frac{Q}{C'} = \frac{4.25 \cdot 10^{-11}}{2.36 \cdot 10^{-12}} \simeq 18\ V$$

L'energia accumulata inizialmente nel condensatore vale $U = \frac{1}{2}CV^2$, mentre l'energia nella nuova configurazione è pari a $U' = \frac{1}{2}C'V'^2$. La differenza è il lavoro compiuto per allontanare le armature

$$L = U' - U = \frac{1}{2}(C'V'^2 - CV^2) = \frac{1}{2}(2.36 \cdot 10^{-12} \times 18^2 - 3.54 \cdot 10^{-12} \times 12^2) \simeq 1.27 \cdot 10^{-10}\ J$$

<u>Esercizio 42.</u> Dato il seguente circuito, che valore legge l'amperometro A ?



Il parallelo tra R_2 e R_3 equivale ad una resistenza

$$R_{23} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = 2.4\ \Omega$$

per cui la corrente fornita dal generatore è

$$I = \frac{V}{R_1 + R_{23}} \simeq 1.14\ A$$

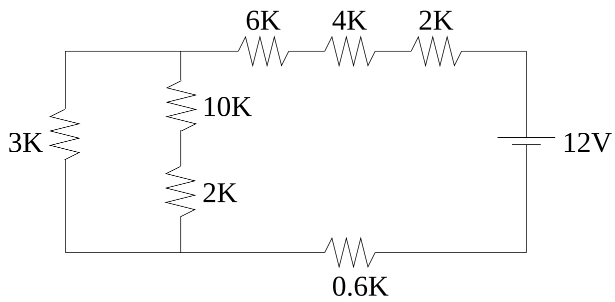
La caduta di potenziale ai capi del parallelo è quindi

$$\Delta V = I R_{23} \simeq 2.74\ V$$

da cui la corrente nel ramo dell'amperometro

$$I_A = \frac{\Delta V}{R_3} \simeq 0.46\ A$$

<u>Esercizio 43.</u> Si risolva il seguente circuito.



Il parallelo tra la resistenza da 3 $K\Omega$ e la serie da 10 $K\Omega + 2\ K\Omega = 12\ K\Omega$ vale 2.4 $K\Omega$. La resistenza totale vista dal generatore è allora di 15 $K\Omega$, e la corrente che fluisce nel circuito vale

$$I = \frac{12}{15K} = 0.8\ mA$$

Essendo la potenza dissipata

$$P = I^2 R$$

si ha

$$P_2 = 1.28\ mW \qquad P_4 = 2.56\ mW$$
$$P_6 = 3.84\ mW \qquad P_{0.6} = 0.384\ mW$$

Inoltre la caduta di potenziale ai capi del parallelo è

$$\Delta V_{\parallel} = I_{\parallel} R_{\parallel} = 0.8 \cdot 10^{-3} \times 2.4 \cdot 10^3 = 1.92\ V$$

per cui la corrente che scorre nel ramo da 3 $K\Omega$ e la potenza dissipata valgono

$$I_3 = \frac{1.92}{3K} = 0.64\ mA \qquad P_3 = I_3^2 R_3 \simeq 1.23\ mW$$

mentre la corrente che scorre nell'altro ramo è

$$I_{10+2} = \frac{1.92}{12K} = 0.16\ mA$$

e le potenze dissipate valgono

$$P_{10} = 0.256\ mW \qquad \text{e} \qquad P_2 = 51.2\ \mu W$$

<u>**Esercizio 44.**</u> **Una corrente di 2 A percorre un conduttore di resistenza 100 Ω. Qual è la differenza di potenziale ai suoi capi ? Qual è la potenza dissipata ? Se la corrente viene raddoppiata, come cambiano i precedenti valori ?**

La differenza di potenziale ai capi del conduttore è data da

$$V = Ri = 100 \times 2 = 200\ V$$

La potenza dissipata (per effetto Joule) è pari a

$$W = Ri^2 = 100 \times 2^2 = 400\ W$$

Se la corrente viene raddoppiata, anche la differenza di potenziale raddoppia

$$V' = 2V = 400\ V$$

mentre la potenza dissipata quadruplica

$$W' = 4W = 1600\ W$$

<u>**Esercizio 45.**</u> **Sono date due resistenze da 50 Ω e 80 Ω : calcolare la corrente che le percorre e la potenza assorbita quando sono collegate a una differenza di potenziale di 10 V.**

La coorente nei due casi vale

$$i_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{10}{50} = 0.2\ A$$

$$i_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{10}{80} = 0.125\ A$$

mentre la potenza assorbita è

$$W_1 = R_1 i_1^2 = 50 \times 0.2^2 = 2\ W$$

$$W_2 = R_2 i_2^2 = 80 \times 0.125^2 = 1.25\ W$$

Esercizio 46. Un filo conduttore rettilineo di lunghezza l e sezione S = 1 mm^2 ha una resistenza specifica di $\rho = 1.8 \cdot 10^{-7}$ Ωm. Ad esso viene applicata una d.d.p. ΔV = 10 V e in un tempo t = 30 s fluisce una carica q = 0.3 C. Calcolare la corrente, la lunghezza del conduttore e il campo elettrico medio al suo interno.

La corrente è data da

$$i = \frac{q}{t} = 10\ mA$$

Essendo poi $R = \rho \frac{l}{S}$ e $\Delta V = Ri = R\frac{q}{t}$, si ricava

$$l = \frac{\Delta V S t}{\rho q} = 0.55 \cdot 10^4\ m$$

Infine il campo elettrico può essere calcolato o come

$$E = \frac{\Delta V}{l} = \frac{\rho q}{S t} = 1.8 \cdot 10^{-3}\ V/m$$

Esercizio 47. Un filo rettilineo infinito è percorso da una corrente di 75 A. Si trovi il modulo di B a) a 10 cm, b) a 50 cm, c) a 2 m dal centro del filo.

Il modulo del campo magnetico è dato da

$$B = \mu_0 \frac{i}{2\pi r}$$

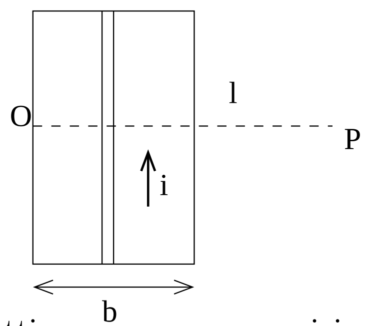
con $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m\ (= N/A^2)$, per cui

$$a)\quad B = 2 \cdot 10^{-7} \times \frac{75}{0.1} = 1.5 \cdot 10^{-4}\ T$$

$$b)\quad B = 2 \cdot 10^{-7} \times \frac{75}{0.5} = 3.0 \cdot 10^{-5}\ T$$

$$c)\quad B = 2 \cdot 10^{-7} \times \frac{75}{2} = 7.5 \cdot 10^{-6}\ T$$

Esercizio 48. **Una striscia conduttrice di larghezza b = 5 cm, spessore trascurabile e lunghezza indefinita è percorsa da una corrente i = 10 A costante e uniformemente distribuita sulla sezione. Si calcoli il modulo del campo magnetico generato in un punto posto ad una distanza l = 10 cm dal bordo della striscia.**



Il campo nel punto P si ottiene come sovrapposizione dei campi magnetici infinitesimi generati da strisce parallele ognuna spessa dx in cui si può pensare suddivisa la striscia, ciascuna delle quali si può considerare come un filo indefinito percorso da una corrente $\mathrm{d}i = \frac{i}{b}\mathrm{d}x$. Il campo generato da una di esse, posta a distanza x dall'origine, e quindi a distanza $b + l - x$ da P, è dato dalla legge di Biot–Savart

$$\mathrm{d}B = \mu_0 \frac{i}{2\pi b} \frac{\mathrm{d}x}{b + l - x}$$

Il campo totale sarà dato quindi da

$$B = \int_0^b \mathrm{d}B = \mu_0 \frac{i}{2\pi b} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{b + l - x} = \mu_0 \frac{i}{2\pi b} \left[-\ln(b + l - x)\right]_0^b = \mu_0 \frac{i}{2\pi b} \ln \frac{b + l}{l}$$

Sostituendo i valori numerici si trova $B = 1.62 \cdot 10^{-5}\ T$.

Si noti anche che per $b \to 0$ si ha $B \to \frac{\mu_0 i}{2\pi l}$ ritrovando così la legge di Biot–Savart (NB: il limite $\lim_{b\to 0} \frac{1}{b} \ln\left(\frac{b+l}{l}\right) = \frac{1}{l}$ è una forma indeterminata del tipo 0/0 e può essere facilmente calcolata usando la regola di de l'Hôpital)

Esercizio 49. Un filo rettilineo di lunghezza 12 cm persorso da una corrente di 30 A è immerso in un campo magnetico uniforme di intensità 0.9 T e forma un angolo di 60° con le linee di campo. Si calcoli il modulo della forza agente sul filo.

Per la legge di Laplace

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$

il cui modulo vale

$$F = IlB \sin\vartheta = 30 \times 0.12 \times 0.9 \times \sin 60^\circ \simeq 2.8N$$

Esercizio 50. Un elettrone ($m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg) si muove con velocità v = $2.0 \cdot 10^7$ m/s in un piano perpendicolare ad un campo magnetico uniforme di intensità 0.01 T. Si calcoli il raggio dell'orbita dell'elettrone.

Il raggio dell'orbita di una carica che si muove perpendicolarmente ad un campo magnetico uniforme è dato da

$$r = \frac{mv}{qB}$$

da cui

$$r = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \times 2 \cdot 10^7}{1.6 \cdot 10^{-19} \times 0.01} \simeq 1.1 \cdot 10^{-2}\ m = 1.1\ cm$$

Esercizio 51. Calcolare la forza (specificando se attrattiva o repulsiva) tra due correnti che fluiscono in senso concorde in due fili paralleli, lunghi 3 m, posti ad una distanza di 10 cm l'uno dall'altro, con intensità 12 A e 15 A.

Calcolare inoltre quale intensità assume la forza riducendo la distanza dei due fili a 3 cm, e quale valore deve assumere la seconda corrente per riportare l'intensità della forza al valore primitivo.

La forza esercitata per unità di lunghezza è data da

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i_1 i_2}{d}$$

per cui la forza complessiva (attrattiva in questo caso) è data da

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i_1 i_2}{d} l$$

quindi

$$F = 10^{-7} \times \frac{2 \times 12 \times 15}{0.1} \times 3 = 1.08 \cdot 10^{-3}\ N$$

Se la distanza tra i fili si riduce a 3 cm la forza (sempre attrattiva) diventa

$$F' = 10^{-7} \times \frac{2 \times 12 \times 15}{0.03} \times 3 = 3.6 \cdot 10^{-3}\ N$$

e per riportare la forza al valore primitivo la seconda corrente deve diventare

$$i_2 = \frac{4\pi}{\mu_0}\frac{F}{l}\frac{d'}{2i_1} = 4.5\ A$$

<u>Esercizio 52.</u> **Un conduttore rettilineo costituito da una superficie cilindrica di raggio R e spessore infinitesimo è percorso da una corrente costante I uniformemente distribuita lungo la sua superficie. Calcolare il modulo del campo magnetico all'interno e all'esterno del conduttore.**

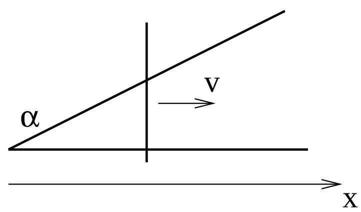
In questo caso è opportuno usare il teorema di Ampère. All'interno del conduttore, qualunque sia il percorso di integrazione scelto l'integrale è sempre nullo, giacché la somma della correnti concatenate al percorso è 0. All'esterno basta prendere come cammino di integrazione una circonferenza di raggio $r > R$: si ha allora

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

dato che la corrente totale è proprio I. Si ottiene quindi ancora la legge di Biot–Savart

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

<u>Esercizio 53.</u> **Una sbarretta conduttrice scorre a velocità costante sopra due guide conduttrici che formano un angolo α. Il circuito così costituito è immerso in una campo magnetico costante ortogonale ad esso. Assumendo che guide e sbarretta abbiano la stessa resistività per unità di lunghezza ρ si calcoli la corrente che circola nel circuito.**



A causa del moto della sbarretta si ha una variazione della superficie del circuito e quindi una variazione del flusso del campo magnetico concatenato ad esso. Questa variazione genera una differenza di potenziale indotta per la legge di Faraday–Lenz, e quindi una corrente indotta. Se x è la lunghezza della base del circuito, l'area dello stesso è data da

$$S = \frac{1}{2}x\ x\tan\alpha = \frac{1}{2}x^2\tan\alpha$$

per cui il flusso concatenato vale

$$\Phi = B\ S = \frac{1}{2}Bx^2\tan\alpha$$

La differenza di potenziale indotta (in valore assoluto) è quindi pari a

$$V_{in} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}B\tan\alpha\left(2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = xvB\tan\alpha$$

essendo $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v$ la velocità della barretta. La lunghezza del circuito è

$$l = x + x\tan\alpha + \frac{x}{\cos\alpha} = x\left(1 + \tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

e la sua resistenza

$$R = \rho l = \rho x \left(1 + \tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

Pertanto la corrente che vi circola è pari a

$$i = \frac{V_{in}}{R} = \frac{v}{\rho}\,\frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$$

Esercizio 54. Un trasformatore per radio portatili riduce la tensione della rete domestica da 240 V a 9 V. La bobina secondaria consta di 30 spire e la radio assorbe 400 mA. Trascurando le perdite, si calcoli il numero di spire dell'avvolgimento primario, la corrente che fluisce nel circuito primario e la potenza trasformata.

Per un trasformatore di tensione si ha

$$V_s = \frac{N_s}{N_p} V_p$$

e quindi il numero di spire del primario è dato da

$$N_p = \frac{V_p}{V_s} N_s = \frac{240}{9} \times 30 = 800$$

Per il principio di conservazione dell'energia la potenza si conserva, quindi

$$I_s V_s = I_p V_p$$

perciò

$$I_p = \frac{V_s}{V_p} I_s = \frac{9}{240} \times 0.4 = 0.015\ A = 15\ mA$$

mentre la potenza trasformata è pari a

$$I_s V_s = I_p V_p = 0.015 \times 240 = 0.4 \times 9 = 3.6\ W$$