Algoritmi e Strutture Dati 2

Esercizi

Francesco Pasquale

9 ottobre 2020

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema computazionale:
INPUT: Un insieme di punti del piano $\{p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2), \dots, p_n = (x_n, y_n)\} \subseteq \mathbb{R}^2$
OUTPUT: La coppia (una coppia, se ce n'è più di una) a distanza minima. Ossia, una coppia di punti distinti p_i, p_j, tali che

$$d(p_i, p_j) = \min\{d(p_h, p_k) \, : \, h, k = 1, \dots, n, \, h \neq k\}$$

dove $d(p_i, p_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ è la distanza Euclidea fra i due punti.

1. Osservare che esiste un algoritmo ovvio che ha running time $\mathcal{O}(n^2)$;
2. Usando la tecnica Divide et Impera, progettare un algoritmo con running time $o(n^2)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente algoritmo[1]

Algorithm 1 `Eu`(a, b)

INPUT: Due interi positivi a e b
OUTPUT: Il massimo comun divisore dei due interi in input

```
if b = 0 then
    return a
return Eu(b, a mod b)
```

1. Implementare l'algoritmo in un linguaggio di programmazione a piacere;
2. Dimostrare che l'algoritmo restituisce il massimo comun divisore fra i due interi in input;
3. Stimare il numero di chiamate ricorsive dell'algoritmo.

Esercizio 3. Si consideri il seguente algoritmo

Algorithm 2 `Eu2`(a, b)

INPUT: Due interi positivi a e b
OUTPUT: Una terna (d, x, y) dove d è il massimo comun divisore dei due interi in input, e x e y sono due interi tali che $ax + by = d$

```
if b = 0 then
    return (d, 1, 0)
(d, x', y') = Eu2(b, a mod b)
return (d, y', x' − ⌊a/b⌋y')
```

[1] Con a mod b si intende il resto della divisione di a per b. Per esempio, 10 mod 3 = 1, 15 mod 5 = 0

1. Implementare l'algoritmo in un linguaggio di programmazione a piacere;
2. Dimostrare la correttezza dell'algoritmo.

Esercizio 4. Progettare un algoritmo efficiente per *l'esponenziazione modulare*:
INPUT: Tre interi positivi x, y e n
OUTPUT: $x^y \mod n$