

Analisi di euristiche per il calcolo del grado di autosimmetria di funzioni booleane non completamente specificate

Alessio Bardelli, 544270

Università di Pisa
Dipartimento di Informatica

A.A. 2019/2020

- Processo di **sintesi** di una funzione booleana.
- **Minimizzazione** di una funzione booleana.
- **Regolarità** di una funzione booleana.
- Grado di **autosimmetria**.
- L'**obiettivo** di questa tesi.

Richiami sulle funzione booleane non compl. specificate

Sia $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1, *\}$ una funzione booleana.

Richiami sulle funzione booleane non compl. specificate

Sia $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1, *\}$ una funzione booleana.

Definizione

L'insieme $f^{\text{on}} = \{x \in \{0, 1\}^n \mid f(x) = 1\}$ è detto **On-Set** di f .

Definizione

L'insieme $f^{\text{off}} = \{x \in \{0, 1\}^n \mid f(x) = 0\}$ è detto **Off-Set** di f .

Definizione

L'insieme $f^{\text{dc}} = \{x \in \{0, 1\}^n \mid f(x) = *\}$ è detto **Dc-Set** di f .

Richiami sulle funzione booleane non compl. specificate

Sia $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1, *\}$ una funzione booleana.

Definizione

L'insieme $f^{\text{on}} = \{x \in \{0, 1\}^n \mid f(x) = 1\}$ è detto **On-Set** di f .

Definizione

L'insieme $f^{\text{off}} = \{x \in \{0, 1\}^n \mid f(x) = 0\}$ è detto **Off-Set** di f .

Definizione

L'insieme $f^{\text{dc}} = \{x \in \{0, 1\}^n \mid f(x) = *\}$ è detto **Dc-Set** di f .

Definizione

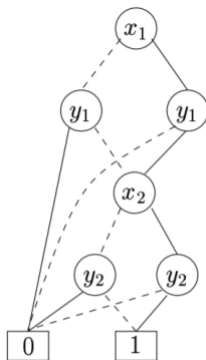
La funzione f si dice **non completamente specificata** se e solo se $f^{\text{dc}} \neq \emptyset$.

Rappresentazione di una funzione booleana

- Tabelle di verità e espressione booleane: **entrambi inadatti**.

Rappresentazione di una funzione booleana

- Tabelle di verità e espressione booleana: **entrambi inadatti**.
- Rappresentate tramite i **Binary Decision Diagram** (BDD). Di particolare interesse per i nostri scopi sono i **Reduced Ordered BDD** (ROBDD).



ROBDD per la funzione $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 \Leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \Leftrightarrow y_2)$.

Definizione

Una funzione booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ è detta **chiusa** rispetto ad un vettore $\alpha \in \{0, 1\}^n$ se $\forall \omega \in \{0, 1\}^n, \omega \oplus \alpha \in f^{on} \Leftrightarrow \omega \in f^{on}$.

Definizione

Una funzione booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ è detta **chiusa** rispetto ad un vettore $\alpha \in \{0, 1\}^n$ se $\forall \omega \in \{0, 1\}^n, \omega \oplus \alpha \in f^{on} \Leftrightarrow \omega \in f^{on}$.

- Ogni funzione f è **chiusa** rispetto al vettore nullo.
- Una funzione f che è **chiusa** rispetto a due vettori differenti $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}^n$, risulta essere chiusa rispetto alla loro somma $\alpha_1 \oplus \alpha_2$.

Definizione

Una funzione booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ è detta **chiusa** rispetto ad un vettore $\alpha \in \{0, 1\}^n$ se $\forall \omega \in \{0, 1\}^n, \omega \oplus \alpha \in f^{on} \Leftrightarrow \omega \in f^{on}$.

- Ogni funzione f è **chiusa** rispetto al vettore nullo.
- Una funzione f che è **chiusa** rispetto a due vettori differenti $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}^n$, risulta essere chiusa rispetto alla loro somma $\alpha_1 \oplus \alpha_2$.

Definizione

L'insieme $L_f = \{\beta \mid f \text{ è chiusa rispetto a } \beta\}$ è lo **spazio vettoriale** di f .

Definizione

Una funzione booleana $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ è detta **chiusa** rispetto ad un vettore $\alpha \in \{0, 1\}^n$ se $\forall \omega \in \{0, 1\}^n, \omega \oplus \alpha \in f^{on} \Leftrightarrow \omega \in f^{on}$.

- Ogni funzione f è **chiusa** rispetto al vettore nullo.
- Una funzione f che è **chiusa** rispetto a due vettori differenti $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}^n$, risulta essere chiusa rispetto alla loro somma $\alpha_1 \oplus \alpha_2$.

Definizione

L'insieme $L_f = \{\beta \mid f \text{ è chiusa rispetto a } \beta\}$ è lo **spazio vettoriale** di f .

Definizione

Una funzione booleana è detta **k-autosimmetrica** se il suo spazio vettoriale L_f ha dimensione k .

Autosimmetria generalizzata

Se f su n variabili è k -autosimmetrica, allora può essere proiettata su una funzione più piccola f_k che dipende solo da $n - k$ variabili e ha un on-set più piccolo.

Autosimmetria generalizzata

Se f su n variabili è k -autosimmetrica, allora può essere proiettata su una funzione più piccola f_k che dipende solo da $n - k$ variabili e ha un on-set più piccolo.

Definizione

$$S = \{\alpha \mid \forall \omega \in \{0, 1\}^n, \omega \in f^{on} \Rightarrow \omega \oplus \alpha \in f^{on} \cup f^{dc}\}.$$

Autosimmetria generalizzata

Se f su n variabili è **k -autosimmetrica**, allora può essere proiettata su una funzione più piccola f_k che dipende solo da $n - k$ variabili e ha un on-set più piccolo.

Definizione

$$S = \{\alpha \mid \forall \omega \in \{0, 1\}^n, \omega \in f^{on} \Rightarrow \omega \oplus \alpha \in f^{on} \cup f^{dc}\}.$$

Definizione

Sia f una funzione booleana non completamente specificata, sia L_S il più grande spazio vettoriale contenuto nell'insieme S . Il **grado di autosimmetria** di f è pari alla dimensione di L_S .

Algoritmo enumerativo esatto

Ricerca esaustiva di uno spazio vettoriale contenuto in S , in ordine di dimensione decrescente a partire da $d = \lfloor \log_2 |S| \rfloor$.

Ricerca esaustiva di uno spazio vettoriale contenuto in S , in ordine di dimensione decrescente a partire da $d = \lfloor \log_2 |S| \rfloor$.

- Si devono enumerare tutti i possibili sottoinsiemi di i vettori linearmente indipendenti di S .
- Il numero di tali sottoinsiemi è limitato superiormente dal coefficiente binomiale gaussiano $\binom{r}{i}_2 = \mathcal{O}(2^{i(r-i)})$. Dove r è il numero massimo di vettori L.I. di S e $1 \leq i \leq d$.

Ricerca esaustiva di uno spazio vettoriale contenuto in S , in ordine di dimensione decrescente a partire da $d = \lfloor \log_2 |S| \rfloor$.

- Si devono enumerare tutti i possibili sottoinsiemi di i vettori linearmente indipendenti di S .
- Il numero di tali sottoinsiemi è limitato superiormente dal coefficiente binomiale gaussiano $\binom{r}{i}_2 = \mathcal{O}(2^{i(r-i)})$. Dove r è il numero massimo di vettori L.I. di S e $1 \leq i \leq d$.
- **complessità computazionale esponenziale.**

Funzione completamente specificata f_0 definita come $f_0^{on} = f^{on}$ e $f_0^{off} = f^{dc} \cup f^{off}$. Si consideri lo spazio vettoriale L_0 della funzione f_0 .

Funzione completamente specificata f_0 definita come $f_0^{on} = f^{on}$ e $f_0^{off} = f^{dc} \cup f^{off}$. Si consideri lo spazio vettoriale L_0 della funzione f_0 .

Teorema

Lo spazio vettoriale L_0 è contenuto nell'insieme S .

Funzione completamente specificata f_0 definita come $f_0^{on} = f^{on}$ e $f_0^{off} = f^{dc} \cup f^{off}$. Si consideri lo spazio vettoriale L_0 della funzione f_0 .

Teorema

Lo spazio vettoriale L_0 è contenuto nell'insieme S .

- Partendo dallo spazio vettoriale L_0 , si decide di volta in volta se è possibile espanderlo con lo spazio affine $A = \alpha \oplus L_S$, dove α è un mintermine scelto dallo spazio $S \setminus L_S$. L_S inizialmente è uguale a L_0 .
- Tale approccio ha una complessità computazionale che potrebbe risultare esponenziale in $|f_0|$.

Euristica di espansione L_0 e L_1

- f_0 e f_1 funzioni completamente specificate tali che: $f_0^{on} = f^{on}$ e $f_1^{on} = f^{on} \cup f^{dc}$.
- L_0 e L_1 gli spazi vettoriali associati a f_0 e f_1 .

- f_0 e f_1 funzioni completamente specificate tali che: $f_0^{on} = f^{on}$ e $f_1^{on} = f^{on} \cup f^{dc}$.
- L_0 e L_1 gli spazi vettoriali associati a f_0 e f_1 .

Teorema

Lo spazio vettoriale L_1 è contenuto nell'insieme S .

Euristica di espansione L_0 e L_1

- f_0 e f_1 funzioni completamente specificate tali che: $f_0^{on} = f^{on}$ e $f_1^{on} = f^{on} \cup f^{dc}$.
- L_0 e L_1 gli spazi vettoriali associati a f_0 e f_1 .

Teorema

Lo spazio vettoriale L_1 è contenuto nell'insieme S .

Si espandono i due spazi vettoriali L_0 e L_1 per poi restituire come risultato lo spazio espanso che ha dimensione maggiore e che è contenuto in S .

Definizione

La **copertura lineare di un'insieme** è il più piccolo spazio vettoriale che contiene l'insieme considerato.

Definizione

La **copertura lineare di un'insieme** è il più piccolo spazio vettoriale che contiene l'insieme considerato.

- Si calcolano i vettori L.I. di S , tramite la Gauss-Jordan Elimination.
- Sono una base, che chiamiamo B , per la copertura lineare di S .
- Si procede considerando tutti i possibili sottoinsiemi di vettori appartenenti alla base B , in ordine di dimensione decrescente a partire da $d = \lfloor \log_2 |S| \rfloor$.
- Se lo spazio vettoriale generato dai vettori considerati è contenuto in S , abbiamo finito.

Introduzione alla sperimentazione effettuata:

- Funzioni fornite secondo lo standard Espresso.
- Gestione dei BDD tramite la libreria CUDD.
- Algoritmi implementati in C.

Implementazione e risultati sperimentali 2

Funzione, n, m	Euristica di esp. di L_0			Euristica di contrazione			Algo. enumerativo esatto		
	k	Max	Time	k	Max	Time	k	Max	Time
alu2, 10, 8	3.375	7	4.177	3.375	7	4.909	3.375	7	5.027
alu3, 10, 8	2.750	6	3.288	2.750	6	3.451	2.750	6	3.396
apla, 10, 12	4.417	6	41.733	3.250	6	53.136	-	-	-
b10, 15, 11	2.636	15	10.006	2.636	15	11.351	2.636	15	54.840
bcc, 26, 45	10.755	14	59.558	10.755	14	53.864	10.755	14	60.919
bcd.div3, 4, 4	1.500	2	0.203	1.500	2	0.792	1.500	2	0.903
bench, 6, 8	1.875	3	1.937	1.750	3	3.759	2.000	3	210.973
dekoder, 4, 7	1.285	2	0.403	1.000	1	1.523	1.285	2	1.489
dk17, 10, 11	5.727	7	21.873	4.909	7	37.886	-	-	-
dk27, 9, 9	6.444	8	5.436	6.222	8	12.677	-	-	-
dk48, 15, 17	11.588	12	131.919	11.941	13	10212.934	-	-	-
exam, 10, 10	4.100	10	28.322	4.000	10	47.231	-	-	-
exp, 8, 18	1.444	8	2.101	1.444	8	6.809	1.444	8	7.699
exps, 8, 38	0.395	4	2.490	0.263	3	13.520	-	-	-
fout, 6, 10	0.100	1	0.260	0.100	1	3.208	0.100	1	2.999
inc, 7, 9	1.888	4	0.778	1.888	4	2.415	1.888	4	2.179
l8err, 8, 8	4.000	8	0.432	4.000	8	2.006	4.000	8	1.826
p1, 8, 18	3.222	8	15.285	2.883	8	18.098	3.500	8	90.018
p3, 8, 14	3.786	8	11.309	3.375	8	13.451	4.071	8	87.273
pdc, 16, 40	9.875	14	757.339	9.600	14	5976.430	-	-	-
spla, 16, 46	3.978	13	27899.712	3.695	13	7807.671	-	-	-
t2, 17, 16	9.500	13	22.802	9.062	12	1035.178	-	-	-
t4, 12, 8	6.875	8	19.487	7.000	10	35.667	-	-	-
test4, 8, 30	0.633	1	19.609	0.666	2	28.654	0.700	2	34.740
x1dn, 27, 6	12.500	16	846.334	13.000	16	136.116	-	-	-
wim, 4, 7	1.285	2	0.361	1.000	1	1.350	1.285	2	2.591
Totale	115.933	200	29907.154	112.064	200	25524.086	-	-	-

Implementazione e risultati sperimentali 3

Funzione, n, m	All zeros test			All ones test			Euristica di esp. di L_0 e L_1		
	k	Max	Time	k	Max	Time	k	Max	Time
alu2, 10, 8	2.750	6	1.805	1.125	6	2.513	3.375	7	13.702
alu3, 10, 8	2.750	6	1.095	0.625	2	2.836	2.750	6	9.439
apla, 10, 12	0.166	1	1.439	0.083	1	2.713	4.500	6	77.206
b10, 15, 11	2.545	15	5.534	1.181	3	6.710	2.636	15	25.076
bcc, 26, 45	10.755	14	36.243	10.755	14	39.360	10.755	14	143.765
bcd.div3, 4, 4	0.500	2	0.130	0.250	1	0.130	1.500	2	0.432
bench, 6, 8	0.000	0	0.686	0.000	0	0.875	1.875	3	3.501
dekoder, 4, 7	0.000	0	0.252	0.285	1	0.133	1.285	2	0.756
dk17, 10, 11	0.090	1	0.877	0.090	1	1.029	5.727	7	41.845
dk27, 9, 9	0.333	1	0.468	0.111	1	0.503	6.555	8	10.377
dk48, 15, 17	0.176	2	1.620	0.058	1	1.805	11.647	12	237.318
exam, 10, 10	1.000	10	3.342	1.100	10	4.545	4.200	10	56.728
exp, 8, 18	1.111	8	1.605	0.000	0	3.232	1.444	8	12.900
exps, 8, 38	0.184	1	5.946	0.131	1	7.379	0.395	4	28.519
fout, 6, 10	0.000	0	1.135	0.000	0	0.923	0.100	1	4.366
inc, 7, 9	0.777	3	0.496	0.888	3	0.524	1.888	4	1.983
l8err, 8, 8	3.000	8	0.884	4.000	8	0.501	4.000	8	2.720
p1, 8, 18	1.111	8	1.624	0.000	0	3.452	3.277	8	28.023
p3, 8, 14	1.428	8	1.153	0.000	0	1.625	3.857	8	20.813
pdc, 16, 40	3.275	14	10.387	0.000	0	22.038	10.000	14	1724.054
spla, 16, 46	2.521	13	9.754	2.521	13	8.678	3.978	13	51957.550
t2, 17, 16	8.625	12	1.213	8.187	11	1.248	9.625	14	41.546
t4, 12, 8	2.250	3	0.810	2.250	3	0.900	6.875	8	27.282
test4, 8, 30	0.000	0	19.946	0.000	0	8.826	0.633	1	78.493
x1dn, 27, 6	9.166	13	2.894	3.000	3	5.923	12.833	16	1091.619
wim, 4, 7	0.142	1	0.140	0.285	1	0.125	1.285	2	0.789
Totale	54.655	150	111.478	36.925	84	128.526	116.995	201	55640.802

Dalla sperimentazione che ho effettuato emerge quanto segue:

- Per il 36.1% delle funzioni testate non è disponibile il grado di autosimmetria ottimo.
- Il 71.5% delle funzioni testate sono risultate essere autosimmetriche.
- L'*euristica di espansione di L_0 e L_1* è quella che ha rilevato l'autosimmetria maggiore.
- L'*euristica di contrazione della copertura lineare* è quella più efficiente e con il miglior rapporto qualità del risultato su tempo di esecuzione.

Rimane un problema teorico molto interessante quello di definire, in modo efficiente, lo **spazio vettoriale più grande contenuto in un dato insieme** di vettori booleani.

Grazie a tutti per l'attenzione!