Appunti di

Topologia generale

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Catania

Anno Accademico 2014-2015

Introduzione

Questo documento contiene una rielaborazione personale di appunti presi durante il corso di Topologia generale tenuto dalla prof.ssa Grazia Raciti presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Catania.

Alessio Borzì

Indice

Capitolo 1

Spazi topologici

1.1 Definizione e primi esempi

Definizione 1.1.1. *Sia X un insieme e $\vartheta \subseteq \mathcal{P}(X)$, dove $\mathcal{P}(X)$ è l'insieme delle parti di X, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X.*
Diremo che (X, ϑ) è uno ***spazio topologico*** *se sono verificate le seguenti proprietà:*

A1. $X, \emptyset \in \vartheta$

A2. $\mathcal{A} \subseteq \vartheta \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \vartheta$

A3. $A_1, A_2 \in \vartheta \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \vartheta$

dove X è lo spazio, ϑ è la topologia e gli insiemi $A \in \vartheta$ sono detti aperti.

Esempio 1.1.2. *Un primo esempio di spazio topologico è $\vartheta_i = \{X, \emptyset\}$, che è detta topologia indiscreta, è facile verificare che (X, ϑ_i) soddisfa le proprietà $A1, A2, A3$.*

Esempio 1.1.3. *La topologia discreta $\vartheta_d = \mathcal{P}(X)$, in questo caso ogni sottoinsieme di X è un aperto.*

Esempio 1.1.4. *La topologia cofinita $\vartheta_c = \{X \backslash \{x_1, x_2, ..., x_n\} : n \in \mathbb{N}, x_i \in X\}$ (cioè gli aperti sono i complementari di insiemi finiti), osserviamo che se X è un insieme finito allora la topologia cofinita è uguale a quella discreta.*

Definizione 1.1.5. *Siano ϑ_1,ϑ_2 due topologie su X, diremo che ϑ_2 è più* ***fine*** *di ϑ_1 se $\vartheta_1 \subseteq \vartheta_2$, cioè se ogni aperto in ϑ_1 è anche aperto in ϑ_2.*

Osserviamo che per un qualsiasi insieme X la topologia indiscreta è la meno fine di tutte le topologie mentre la topologia discreta è la più fine di tutte le topologie.

Definizione 1.1.6. *Sia dato uno spazio topologico (X, ϑ), un insieme $C \subseteq X$ si dice* ***chiuso*** *se il suo complementare è aperto, cioè se $X \setminus C \in \vartheta$.*

La famiglia $\mathcal{C}$ degli insiemi chiusi soddisfa le seguenti proprietà:

C1. $X, \emptyset \in \mathcal{C}$

C2. $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C \in \mathcal{C}$

C3. $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$

Una topologia può essere assegnata a partire dagli insiemi chiusi, ricavando gli insiemi aperti come complementari dei chiusi. Ad esempio nella topologia cofinita (1.1.4) definiamo gli insiemi chiusi come tutti e soli gli insiemi finiti.

Definizione 1.1.7. *Sia $x \in X$ si definisce **intorno** di x un insieme $U \subseteq X$ tale che:*

$$\exists A \in \vartheta : x \in A \subseteq U$$

cioè se esiste un aperto che contiene x contenuto in U.

Una famiglia $\mathfrak{I}(x)$ di intorni di $x \in X$ gode delle seguenti proprietà:

I1. $\forall U \in \mathfrak{I}(x) \quad x \in U$

I2. $U, V \in \mathfrak{I}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{I}(x)$

I3. $U \in \mathfrak{I}(x), V \supseteq U \Rightarrow V \in \mathfrak{I}(x)$

I4. $\forall U \in \mathfrak{I}(x),\ \exists V \in \mathfrak{I}(x) : x \in V \subseteq U, \quad \forall y \in V \quad V \in \mathfrak{I}(y)$

La quarta proprietà è un corollario della seguente

Proposizione 1.1.8. *Un insieme $A \subseteq X$ è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto*

$$A \in \vartheta \Longleftrightarrow \forall x \in A \quad A \in \mathfrak{I}(x)$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \in A$ allora A è intorno di x dato che esiste un aperto che contiene x contenuto in A (lo stesso insieme A).
$\Leftarrow$ Per ipotesi $\forall x \in A$, $\exists A_x \in \vartheta : x \in A_x \subseteq A$, dunque avremo

$$A = \bigcup_{x \in A} A_x \in \vartheta$$

□

Assegnata per ogni $x \in X$ una famiglia di insiemi $\mathfrak{I}(x)$ che gode delle proprietà $I1, I2, I3, I4$, esiste una e una sola topologia tale che la famiglia assegnata è una famiglia di intorni per x.

Definizione 1.1.9. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico, si definisce una **base di aperti** $\mathcal{B}$ una famiglia di aperti tale che ogni insieme $A \in \vartheta$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$. In altre parole deve accadere:*

$$\forall A \in \vartheta,\ \forall x \in A,\ \exists\, B \in \mathcal{B} :\ x \in B \subseteq A.$$

Una base di aperti $\mathcal{B}$ gode delle seguenti proprietà:

B1. $\forall x \in X,\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B$

B2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ \forall x \in B_1 \cap B_2,\ \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$

Assegnata una famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X che gode delle proprietà $B1, B2$, esiste una e una sola topologia ϑ su X per la quale $\mathcal{B}$ risulta una base.

Esempio 1.1.10. *Assegniamo una topologia su $\mathbb{R}$ attraverso una base che gode delle proprietà $B1$, $B2$. Sia $\mathcal{B}$ una famiglia di insiemi tale che*

$$\mathcal{B} = \{\,]a,b[: a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

chiamiamo ϑ_e la topologia euclidea in cui gli insiemi aperti sono unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Esempio 1.1.11. *Definiamo ancora su $\mathbb{R}$ la topologia di Sorgenfrey ϑ_s in cui gli aperti sono unione di elementi della base $\mathcal{B}$, che si può verificare goda delle proprietà $B1$, $B2$, assegnata come segue*

$$\mathcal{B} = \{\, [a,b[: a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}\,.$$

Osservazione 1.1.12. *La topologia di Sorgenfrey è più fine della topologia euclidea, infatti ogni aperto in ϑ_e è anche aperto in ϑ_s poiché:*

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right[$$

dunque la base di aperti di ϑ_e è un sottoinsieme della base di aperti di ϑ_s, dunque si ha $\vartheta_e \subseteq \vartheta_s$.

1.2 Chiusura e Interno di un insieme

In questo paragrafo siano (X, ϑ) uno spazio topologico ed $M \subseteq X$ un sottoinsieme di X. Diamo le seguenti definizioni:

Definizione 1.2.1. *Un punto $x \in X$ si dice **aderente** ad M se ogni intorno U di x interseca M, cioè se:*

$$\forall U \in \mathfrak{I}(x) \quad U \cap M \neq \emptyset$$

Definizione 1.2.2. *Un punto $x \in X$ si dice di **accumulazione** per M se ogni intorno U di x interseca M in almeno un punto diverso da x, cioè se:*

$$\forall U \in \mathfrak{I}(x) \quad (U \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$$

Definizione 1.2.3. *Un punto $x \in X$ si dice di **frontiera** per M se x è aderente ad M e ad $X \setminus M$.*

Definizione 1.2.4. *Un punto $x \in X$ si dice **isolato** se esiste un intorno di x che interseca M nel solo punto x, cioè se:*

$$\exists\, U \in \mathfrak{I}(x) \quad U \cap M = \{x\}$$

Diamo ora la definizione di chiusura di un insieme

Definizione 1.2.5. *Sia dato un insieme $M \subseteq X$, si definisce* ***chiusura*** *di M, e si indica con $\overline{M}$, l'intersezione di tutti i chiusi che contengono M:*

$$\mathcal{F} = \{C \in \mathcal{C} : C \supseteq M\}, \quad \overline{M} = \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$$

cioè il più piccolo insieme chiuso che contiene M.

Siano $M, N \subseteq X$. Vediamo alcune proprietà di cui gode la chiusura.

1. $\overline{M}$ è chiuso
2. $M = \overline{M} \iff M$ è chiuso
3. $M \subseteq N \Rightarrow \overline{M} \subseteq \overline{N}$
4. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$

Dimostrazione proprietà 4. Dato che $M \subseteq \overline{M}$ e $N \subseteq \overline{N}$ si ha

$$M \cup N \subseteq \overline{M} \cup \overline{N} \Rightarrow \overline{M \cup N} \subseteq \overline{\overline{M} \cup \overline{N}} = \overline{M} \cup \overline{N}.$$

Analogamente, dato che $M \subseteq M \cup N$ e $N \subseteq M \cup N$ si ha $\overline{M} \subseteq \overline{M \cup N}$ e $\overline{N} \subseteq \overline{M \cup N}$. Pertanto

$$\overline{M} \cup \overline{N} \subseteq \overline{M \cup N}.$$

□

Vediamo adesso una caratterizzazione della chiusura di un insieme che verrà utilizzata frequentemente:

Teorema 1.2.6. *Se $M \subseteq X$ allora $\overline{M}$ è l'insieme dei punti aderenti ad M.*

Dimostrazione. Sia $x \notin \overline{M}$, dimostriamo che x non è aderente ad M.
Se $x \notin \overline{M}$ allora $\exists\, C \in \mathcal{C} : x \notin C,\ M \subseteq C \Rightarrow x \in X \setminus C \in \vartheta$. Quindi $X \setminus C$ è un intorno di x, ma, essendo $(X \setminus C) \cap M = \emptyset$, x non è aderente ad M.
Viceversa, se x non è aderente ad M allora $\exists\, U \in \mathfrak{I}(x) : U \cap M = \emptyset \Rightarrow \exists\, A \in \vartheta : x \in A \subseteq U$. Quindi si ha $A \cap M = \emptyset$, ma, essendo $X \setminus A$ chiuso con $x \notin X \setminus A \supseteq M$, $x \notin \overline{M}$. □

Definizione 1.2.7. *Si definisce* ***frontiera*** *di $M \subseteq X$ l'insieme dei punti di frontiera per M. Indichiamo la frontiera di M con $\mathscr{F}(M)$.*

Dalla definizione di punto di frontiera, un immediata conseguenza del teorema 1.2.6 è il seguente

Corollario 1.2.8. *Sia $M \subseteq X$ un insieme, allora $\mathscr{F}(M) = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$.*

Definizione 1.2.9. *Si definisce* ***derivato*** *di $M \subseteq X$ l'insieme dei punti di accumulazione per M. Indichiamo il derivato di M con $\mathscr{D}(M)$.*

Proposizione 1.2.10. *Se $M \subseteq X$, allora $\overline{M} = M \cup \mathscr{D}(M)$.*

Dimostrazione. Dalle definizioni ogni punto di accumulazione per M è anche aderente ad M, si ha $\mathscr{D}(M) \subseteq \overline{M}$, ma anche $M \subseteq \overline{M}$ ottenendo $M \cup \mathscr{D}(M) \subseteq \overline{M}$. Viceversa sia $x \in \overline{M}$, se $x \in M$ allora $x \in M \cup \mathscr{D}(M)$, che è la tesi; se $x \notin M$ allora dato che x è aderente ad M (poiché appartiene alla sua chiusura) ogni suo intorno interseca M in punti diversi da x, dunque x è di accumulazione per M, cioè $x \in M \cup \mathscr{D}(M)$, ottenendo infine $\overline{M} \subseteq M \cup \mathscr{D}(M)$. □

Definizione 1.2.11. *Un insieme $M \subseteq X$ si dice **denso** in X se $\overline{M} = X$.*

Vediamo adesso una caratterizzazione degli insiemi densi:

Proposizione 1.2.12. *Un insieme $M \subseteq X$ è denso in X se e solo se ogni aperto interseca M, cioè*

$$\overline{M} = X \Longleftrightarrow \forall A \in \vartheta \quad A \cap M \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Preso un qualsiasi aperto $A \in \vartheta$ sia $x \in A$, essendo A aperto allora sarà un intorno di x, osserviamo che si ha anche $x \in X$, dal fatto che $\overline{M} = X$ segue che x è aderente ad M, dunque ogni suo intorno interseca M ottenendo $A \cap M \neq \emptyset$.
$\Leftarrow$ Sia $x \in X$ preso un qualunque intorno $U \in \mathfrak{I}(x)$ allora per definizione di intorno $\exists\, A \in \vartheta : x \in A \subseteq U$, per ipotesi $A \cap M \neq \emptyset$ dunque $U \cap M \neq \emptyset$, quindi x è aderente ad M, dunque $x \in \overline{M}$ da cui segue $X = \overline{M}$. □

Diamo ora la definizione di interno di un insieme:

Definizione 1.2.13. *Sia dato un insieme $M \subseteq X$. Si definisce **interno** di M, e si indica con $\mathring{M}$, l'unione di tutti gli aperti contenuti in M:*

$$\mathcal{A} = \{A \in \vartheta : A \subseteq M\}, \quad \mathring{M} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,$$

cioè il più grande insieme aperto contenuto in M.

Siano $M, N \subseteq X$. Vediamo alcune proprietà di cui gode l'interno:

1. $\mathring{M}$ è aperto.
2. $M = \mathring{M} \Longleftrightarrow M$ è aperto
3. $M \subseteq N \Rightarrow \mathring{M} \subseteq \mathring{N}$
4. $(M \mathring{\cap} N) = \mathring{M} \cap \mathring{N}$

Definizione 1.2.14. *Un punto $x \in X$ si dice **interno** ad M se $x \in \mathring{M}$*

Una definizione equivalente di punto interno può essere ricavata a partire dalla seguente

Proposizione 1.2.15. *Un punto $x \in X$ è interno a M se e solo se esiste un intorno di x contenuto in M, cioè*

$$x \in \mathring{M} \Longleftrightarrow \exists\, U \in \mathfrak{I}(x) : \, x \in U \subseteq M$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Se $x \in \mathring{M}$ allora $\exists\, A \in \vartheta : \, x \in A \subseteq M$, ma A è aperto quindi è un intorno di x.
$\Leftarrow$ Sia $U \in \mathfrak{I}(x)$ con $U \subseteq M$, allora per definizione di intorno
$\exists\, A \in \vartheta : x \in A \subseteq U \subseteq M \Rightarrow x \in A \subseteq M$ dunque $x \in \mathring{M}$ poiché esiste un aperto che contiene x contenuto in M. □

1.3 Topologia indotta

Definizione 1.3.1. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$. Definiamo una topologia $\vartheta(Y)$ su Y tale che:*

$$A \in \vartheta(Y) \Longleftrightarrow \exists U \in \vartheta : A = U \cap Y$$

la topologia sopra definita è chiamata ***topologia indotta*** *da X su Y, lo spazio topologico $(Y, \vartheta(Y))$ si dice* ***sottospazio*** *di (X, ϑ).*

Verifichiamo che la topologia indotta verifica le proprietà $A1, A2$ e $A3$:

A1. $Y, \emptyset \in \vartheta(Y)$

Poiché $Y = X \cap Y$ e $\emptyset = \emptyset \cap Y$

A2. $\mathcal{A}' \subseteq \vartheta(Y) \Rightarrow \bigcup_{A' \in \mathcal{A}'} A' = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A \cap Y) = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right) \cap Y \in \vartheta(Y)$

A3. $A'_1, A'_2 \in \vartheta(Y) \Rightarrow A'_1 \cap A'_2 = (Y \cap A_1) \cap (Y \cap A_2) = Y \cap (A_1 \cap A_2) \in \vartheta(Y)$

Dove la famiglia di insiemi $\mathcal{A} \subseteq \vartheta$ è la famiglia degli aperti che intersecati con Y danno luogo agli aperti di $\mathcal{A}' \subseteq \vartheta(Y)$, e analogamente i due aperti $A_1, A_2 \in \vartheta$ intersecati Y danno luogo ai due aperti $A'_1, A'_2 \in \vartheta(Y)$.

Proposizione 1.3.2. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico e $(Y, \vartheta(Y))$ un suo sottospazio. Un insieme $C' \subseteq Y$ è chiuso in Y se e solo se esiste un chiuso C in X tale che $C' = C \cap Y$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Per ipotesi $C' = Y \setminus A'$ con $A' = Y \cap A$, $A \in \vartheta$ dunque abbiamo $C' = Y \setminus A' = Y \setminus (Y \cap A) = (Y \cap X) \setminus (Y \cap A) = Y \cap (X \setminus A) = Y \cap C$, con C chiuso in X.
$\Leftarrow$ Analogamente, per ipotesi $C' = C \cap Y$ con $C = X \setminus A$, $A \in \vartheta$, dunque abbiamo $C' = C \cap Y = (X \setminus A) \cap Y = (X \cap Y) \setminus (A \cap Y) = Y \setminus (A \cap Y) = Y \setminus A'$ con A' aperto in Y. □

Proposizione 1.3.3. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico e $(Y, \vartheta(Y))$ un suo sottospazio, gli aperti in $\vartheta(Y)$ sono aperti in ϑ se e solo se Y è aperto in ϑ, cioè:*

$$\vartheta(Y) \subseteq \vartheta \Longleftrightarrow Y \in \vartheta$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Banalmente $Y \in \vartheta(Y) \Rightarrow Y \in \vartheta$ dato che $\vartheta(Y) \subseteq \vartheta$.
$\Leftarrow$ Ogni aperto $A' \in \vartheta(Y)$ si scrive come intersezione tra un aperto $A \in \vartheta$ e Y, ma $Y \in \vartheta$, quindi $Y \cap A$ è aperto in ϑ da cui segue $\vartheta(Y) \subseteq \vartheta$. □

Osservazione 1.3.4. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico e (Y, ϑ_Y) un suo sottospazio, dato l'insieme $Z \subseteq Y \subseteq X$ la topologia indotta da X su Z è uguale alla topologia indotta da Y su Z, cioè $\vartheta(Z) = \vartheta_Y(Z)$.*

Definizione 1.3.5. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico, un insieme $M \subseteq X$ si dirà* ***discreto*** *se la topologia indotta da X su M è la topologia discreta.*

Esempio 1.3.6. *Consideriamo la topologia euclidea $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$, l'insieme $\mathbb{Z}$ è discreto, infatti:*

$$\forall z \in \mathbb{Z} \quad \left]z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right[\cap \mathbb{Z} = \{z\}$$

Proposizione 1.3.7. *Un insieme $M \subseteq X$ è discreto se e solo se ogni $x \in M$ è isolato.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \in M$, dato che M è discreto ogni singoletto è aperto nella topologia indotta, quindi $\exists\, A \in \vartheta : A \cap M = \{x\}$, cioè esiste un intorno di x (l'aperto A) che interseca M nel solo punto x, ciò equivale a dire che x è un punto isolato.
$\Leftarrow$ Analogamente, sia $x \in M$, per ipotesi x è isolato, dunque esiste un intorno $U \in \mathfrak{I}(x) : U \cap M = \{x\}$, per definizione di intorno $\exists\, A \in \vartheta : x \in A \subseteq U$ dunque $A \cap M = \{x\}$, da ciò segue che la topologia indotta da X su M è quella discreta. □

1.4 Assiomi di numerabilità

Definizione 1.4.1. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico, $\mathfrak{I}(x)$ una famiglia di intorni di $x \in X$, si chiama* ***sistema fondamentale di intorni*** *(o* ***base di intorni****) di x una famiglia di intorni $\mathfrak{I}'(x)$, tale che:*

$$\forall U \in \mathfrak{I}(x), \exists\, V \in \mathfrak{I}'(x) : \, x \in V \subseteq U$$

Esempio 1.4.2. *Nella topologia discreta (X, ϑ_d), un esempio di base di intorni di $x \in X$ è la famiglia di intorni $\mathfrak{I}(x)$ formata dal solo singoletto $\{x\}$.*

Esempio 1.4.3. *Nella topologia euclidea $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ una base di intorni per $x \in \mathbb{R}$ è una famiglia del tipo:*

$$\mathfrak{I}(x) = \left\{\,]x - \epsilon, x + \epsilon[: \epsilon \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

Definizione 1.4.4. *Uno spazio topologico (X, ϑ) soddisfa il* ***primo assioma di numerabilità*** *se per ogni $x \in X$ esiste una base di intorni numerabile.*

Osserviamo che dal precedente esempio 1.4.2 segue che la topologia discreta soddisfa il prima assioma di numerabilità poiché ogni punto è dotato di una base di intorni formata da un solo elemento.

Esempio 1.4.5. *La topologia euclidea $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ soddisfa il primo assioma di numerabilità in quanto preso $x \in X$ consideriamo*

$$\mathfrak{I}(x) = \left\{ \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

$\mathfrak{I}(x)$ costituisce una base di intorni numerabile per x.

Esempio 1.4.6. *La topologia di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$ soddisfa il primo assioma di numerabilità, infatti sia $x \in X$, una base di intorni numerabile per x è:*

$$\mathfrak{I}(x) = \left\{ \left[x, x + \frac{1}{n}\right[: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Definizione 1.4.7. *Uno spazio topologico (X, ϑ) soddisfa il* ***secondo assioma di numerabilità*** *se esiste una base di aperti numerabile.*

Osserviamo subito che la topologia indiscreta (X, ϑ_i) soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Proposizione 1.4.8. *La topologia discreta (X, ϑ_d) verifica il secondo assioma di numerabilità se e solo se X è numerabile.*

Dimostrazione. Osserviamo prima che fissato $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$, è facile osservare che $\mathcal{B}$ è una base di aperti di ϑ_d. Inoltre, presa una qualsiasi altra base di aperti $\mathcal{B}'$, dato che i singoletti sono aperti in ϑ_d e ogni aperto può essere scritto come unione di aperti di $\mathcal{B}'$, segue che $\mathcal{B}'$ deve contenere tutti i singoletti, cioè si ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Infine è facile osservare che la cardinalità di $\mathcal{B}$ è uguale alla cardinalità di X, dunque:
$\Rightarrow$ Se (X, ϑ_d) ha una base numerabile $\mathcal{B}'$ allora anche $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ è numerabile, dunque lo è anche X.
$\Leftarrow$ Se X è numerabile, allora lo è anche $\mathcal{B}$, dunque esiste una base di aperti numerabile. □

Esempio 1.4.9. *La topologia euclidea $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ soddisfa il secondo assioma di numerabilità, infatti consideriamo l'insieme:*

$$\mathcal{B} = \{\,]r, q[: \, r, q \in \mathbb{Q}\}$$

è facile osservare che essa è una base di aperti, inoltre è numerabile poiché $\mathbb{Q}$ è numerabile e il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili è numerabile.

Teorema 1.4.10. *Se uno spazio topologico (X, ϑ) soddisfa il secondo assiamo di numerabilità allora soddisfa anche il primo.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base di aperti numerabile e sia $x \in X$, un sistema fondamentale di intorni numerabile per x è dato da $\mathfrak{I}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Infatti sia U un intorno di x, per definizione di intorno $\exists\, A \in \vartheta : x \in A \subseteq U$, ma essendo A un aperto, puo essere scritto come unione di aperti in $\mathcal{B}$, dato che $x \in A$ esisterà un aperto $A_x \in \mathcal{B} : x \in A_x \subseteq A \subseteq U$, da cui segue $A_x \in \mathfrak{I}(x)$ con $x \in A_x \subseteq U$, dunque $\mathfrak{I}(x)$ è un sistema fondamentale di intorni di x (il fatto che sia numerabile segue da $\mathfrak{I}(x) \subseteq \mathcal{B}$). □

Un esempio di spazio topologico che soddisfa il primo ma non il secondo assioma di numerabilità può essere lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$, cioè $\mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey, infatti per l'esempio 1.4.6 esso soddisfa il primo assioma di numerabilità ma non verifica il secondo, come mostra la seguente

Proposizione 1.4.11. *Lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$, cioè l'insieme $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey non soddisfa il secondo assioma di numerabilità.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una base di aperti $\mathcal{B}$ numerabile. Sia $S = \{\inf(B) \in \mathbb{R} : \, B \in \mathcal{B}\}$, dunque S è numerabile quindi $\mathbb{R} \setminus S \neq \emptyset$, si allora $x \in \mathbb{R} \setminus S$, l'aperto $[x, x+1[$ per definizione di base di aperti è unione di elementi di $\mathcal{B}$, dunque $\exists B \in \mathcal{B} : \, x \in B \subseteq [x, x+1[$, dunque $x = \inf(B) \in S$, ciò porta a un assurdo. □

Definizione 1.4.12. *Uno spazio topologico (X, ϑ) si dice* ***separabile*** *se esiste un insieme $M \subseteq X$ denso in X e numerabile.*

Esempio 1.4.13. *Un esempio di spazio topologico separabile è* $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ *infatti l'insieme* $\mathbb{Q}$ *è numerabile e denso in* $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ *poiché vale il seguente fatto (che non dimostriamo):*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists\, r \in \mathbb{Q} : a < r < b$$

dunque ogni insieme $]a, b[$ *ha almeno un numero razionale, ne segue che* $\mathbb{Q}$ *interseca ogni insieme aperto quindi è denso.*

Esempio 1.4.14. *Un discorso del tutto analogo può essere fatto per la topologia di Sorgenfrey, infatti ogni insieme aperto* $[a, b[$ *contiene almeno un numero razionale, dunque ogni aperto interseca* $\mathbb{Q}$*, che risulta essere quindi denso in* $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$ *e numerabile, dunque* $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$ *è separabile.*

Proposizione 1.4.15. *Uno spazio topologico* (X, ϑ) *che soddisfa il secondo assioma di numerabilità è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base di aperti numerabile di (X, ϑ), ad ogni $B \in \mathcal{B}$ scegliamo un punto $x_B \in B$, consideriamo l'insieme di questi punti
$A = \{x_B \in B : B \in \mathcal{B}\}$, esso è ovviamente numerabile, facciamo vedere che è anche denso. Sia $U \in \vartheta$ un aperto, dato che, per definizione di base, esso è unione di elementi in $\mathcal{B}$, $\exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq U \Rightarrow x_B \in U \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset$, cioè A interseca ogni aperto, dunque A è denso. □

1.5 Spazi metrici

Definizione 1.5.1. *Sia* X *un insieme, chiamiamo* ***distanza*** *(o* ***metrica****) un'applicazione* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *che gode delle seguenti proprietà:*

D1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

D2. $d(x, y) = d(y, x)$

D3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si definisce ***spazio metrico*** *la coppia* (X, d)*.*

Osservazione 1.5.2. *Dalle tre proprietà elencate sopra ricaviamo che la distanza è sempre positiva*

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$$

infatti, applichiamo la proprietà $D3$ *ponendo* $x = y$*:*

$$2\, d(x, z) = d(x, z) + d(z, x) \geq d(x, x) = 0 \Rightarrow d(x, z) \geq 0$$

Definizione 1.5.3. *Si chiama* ***disco*** *(o* ***palla****) di centro* $x \in X$ *e raggio* $r \in \mathbb{R}^+$ *l'insieme:*

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Definizione 1.5.4. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico, introduciamo attraverso la metrica* d *una topologia* $\vartheta(d)$ *su* X *ponendo un insieme* $A \subseteq X$ *aperto se* $\forall x \in A$ *esiste un disco di centro* x *che è contenuto in* A*. La topologia* $\vartheta(d)$ *così definita si chiama* ***topologia indotta dalla metrica*** d *su* X*.*

Verifichiamo che $(X, \vartheta(d))$ è uno spazio topologico:

A1. $X, \emptyset \in \vartheta(d)$ (nulla da verificare)

A2. $\mathcal{A} \subseteq \vartheta(d) \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \vartheta(d)$

poiché $\forall x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, $\exists A \in \mathcal{A} : x \in A \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}^+ : S(x,r) \subseteq A \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$

A3. $A_1, A_2 \in \vartheta(d) \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \vartheta(d)$

poiché $\forall x \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow x \in A_1, x \in A_2 \Rightarrow \exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+ :$
$S(x, r_1) \subseteq A_1, S(x, r_2) \subseteq A_2$, posto $r = min\{r_1, r_2\} \Rightarrow S(x,r) \subseteq A_1 \cap A_2$.

Esempio 1.5.5. *Dotiamo l'insieme $\mathbb{R}$ della metrica $d(x,y) = |x - y|$. Come si può facilmente verificare $(\mathbb{R}, d)$ forma uno spazio metrico. Osserviamo che la topologia indotta dalla metrica è la topologia euclidea ϑ_e.*
In generale è possibile definire una distanza su $\mathbb{R}^n$ come segue:
dati due punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$ di coordinate $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, poniamo

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

*osserviamo che essa è la usuale **distanza euclidea**, chiameremo la topologia indotta da d su $\mathbb{R}^n$ topologia euclidea che indicheremo con ϑ_e (in analogia a quanto fatto su $\mathbb{R}$).*

Osservazione 1.5.6. *Notiamo che metriche diverse possono indurre la stessa topologia. Sia infatti X un insieme qualunque, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiamo una distanza d_n nel modo seguente:*

$$d_n(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad x = y \\ n & se \quad x \neq y \end{cases}$$

Osserviamo che comunque sia scelto n, la metrica d_n indurrà la stessa topologia su X, ovvero la topologia discreta, poiché $S(x, 1) = \{x\}$.

Proposizione 1.5.7. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\vartheta(d)$ la topologia indotta dalla metrica d, allora ogni disco $S(x,r)$ è aperto.*

Dimostrazione. Sia $S(x,r)$ un disco di centro $x \in X$ e raggio $r \in \mathbb{R}^+$, sia $y \in S(x,r)$, poniamo $s = r - d(x,y) > 0$, dimostriamo che $S(y,s) \subseteq S(x,y)$. Sia $z \in S(y,s)$, abbiamo:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s = d(x,y) + r - d(x,y) = r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d(x,z) < r \Rightarrow z \in S(x,r).$$

□

Corollario 1.5.8. *In uno spazio metrico (X,d) l'insieme dei dischi costituisce una base di $\vartheta(d)$.*

Corollario 1.5.9. *Se (X,d) è uno spazio metrico, allora lo spazio topologico $(X, \vartheta(d))$ soddisfa il primo assioma di numerabilità*

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$, scegliamo come base di intorni la famiglia $\mathfrak{I}(x) = \left\{S\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$. □

Teorema 1.5.10. *Se (X, d) è uno spazio metrico, lo spazio topologico $(X, \vartheta(d))$ è separabile se e solo se soddisfa il secondo assioma di numerabilità.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $A \subseteq X$ denso e numerabile, consideriamo l'insieme $\mathcal{B} = \left\{S(x, \frac{1}{n}) : x \in A, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$, dimostriamo che $\mathcal{B}$ costituisce una base di aperti di X. Sia $U \in \vartheta(d)$ e $x \in U$, proviamo che $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U$. Per definizione di $\vartheta(d)$, $\exists r \in \mathbb{R}^+ : S(x, r) \subseteq U$, fissiamo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$, si ha $S(x, \frac{1}{n}) \in \vartheta(d)$ poiché ogni disco è aperto, inoltre A è denso in X, quindi $A \cap S(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$.
Sia $y \in A \cap S(x, \frac{1}{n})$, si ha $x \in S(y, \frac{1}{n})$ e $S(y, \frac{1}{n}) \subseteq S(x, r)$. Per verificare l'ultimo fatto sia $z \in S(y, \frac{1}{n})$ abbiamo $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < r$ dunque $z \in S(x, \frac{1}{n})$.
Osserviamo infine che $y \in A$, dunque $S(y, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$, posto quindi $B = S(y, \frac{1}{n})$ abbiamo $x \in B \subseteq S(x, r) \subseteq U$.
$\Leftarrow$ Abbiamo già dimostrato che ogni spazio topologico che soddisfa il secondo assioma di numerabilità è separabile. □

Definizione 1.5.11. *Uno spazio topologico (X, ϑ) si dice* ***metrizzabile*** *se esiste una metrica d su X che induce la topologia, cioè tale che $\vartheta = \vartheta(d)$.*

Per il corollario 1.5.9 un qualsiasi spazio topologico che non soddisfa il primo assioma di numerabilità costituisce un esempio di spazio topologico non metrizzabile.

Definizione 1.5.12. *Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $A \subseteq X$ e $x \in X$, definiamo distanza di x da A come segue:*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Proposizione 1.5.13. *Sia $(X, \vartheta(d))$ uno spazio topologico indotto da una metrica d. Sia dato un insieme $A \subseteq X$ allora $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \overline{A}$ allora per ogni $r \in \mathbb{R}^+$ si ha $S(x, r) \cap A \neq \emptyset$, cioè

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \exists y \in A : d(x, y) < r \Rightarrow d(x, A) = 0.$$

Viceversa, sia $x \in X$ tale che $d(x, A) = 0$. Supponiamo per assurdo che $x \notin \overline{A}$, allora esiste un intorno U di x tale che $U \cap A = \emptyset$. Per definizione di intorno $\exists\, r \in \mathbb{R}^+ : S(x, r) \subseteq U$, $S(x, r) \cap A = \emptyset$, cioè

$$\exists\, r \in \mathbb{R}^+, \forall y \in A \quad d(x, y) \geq r$$

contro l'ipotesi $d(x, A) = 0$, arrivando così a un assurdo. □

1.6 Funzioni continue

Definizione 1.6.1. *Siano (X, ϑ) e (Y, ϑ') due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice* ***continua*** *se per ogni $U \in \vartheta'$ si ha $f^{-1}(U) \in \vartheta$, cioè se l'immagine inversa di un aperto è ancora un aperto.*

Esempio 1.6.2. *Sia* (X, ϑ_d)*, cioè* X *con la topologia discreta e* (Y, ϑ') *un qualunque altro spazio topologico, allora ogni funzione* $f : X \to Y$ *è continua.*

Esempio 1.6.3. *Sia* (X, ϑ) *un qualunque spazio topologico e* (Y, ϑ'_i)*, cioè* Y *con la topologia indiscreta, allora ogni funzione* $f : X \to Y$ *è continua.*

Esempio 1.6.4. *Siano* (X, ϑ) *e* (Y, ϑ') *due spazi topologici, allora ogni funzione* $f : X \to Y$ *costante (cioè tale che fissato* $y \in Y$*,* $\forall x \in X$ $f(x) = y$*) è continua.*

Proposizione 1.6.5. *Siano* (X, ϑ) *e* (Y, ϑ') *due spazi topologici allora una funzione* $f : X \to Y$ *è continua se e solo se per ogni chiuso* F *di* Y*,* $f^{-1}(F)$ *è chiuso in* X*.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $f : X \to Y$ continua e sia F un chiuso di Y, allora $Y \setminus F$ è aperto in Y, dunque $f^{-1}(Y \setminus F) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(F)$ è aperto in X, cioè $f^{-1}(F)$ è chiuso in X.
$\Leftarrow$ Viceversa, sia $U \in \vartheta'$ allora esiste F chiuso in Y tale che $U = Y \setminus F$, dunque $f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus F) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(F)$ che è aperto in X dato che per ipotesi $f^{-1}(F)$ è chiuso in X. □

Per verificare la continuità di una funzione basta verificare che l'immagine inversa di elementi di una base di aperti di Y sia ancora un aperto in X come mostra la seguente

Proposizione 1.6.6. *Siano* (X, ϑ) *e* (Y, ϑ') *due spazi topologici e sia* $\mathcal{B}$ *una base di aperti di* Y*, allora una funzione* $f : X \to Y$ *è continua se e solo se per ogni* $B \in \mathcal{B}$*,* $f^{-1}(B)$ *è aperto in* X*.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Chiaramente, se la funzione f è continua, $f^{-1}(B) \in \vartheta$ qualunque sia $B \in \mathcal{B}$.
$\Leftarrow$ Sia $U \in \vartheta'$, per definizione di base $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ con $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, dunque si ha

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\Big(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\Big) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f^{-1}(B)$$

si ha $f^{-1}(U) \in \vartheta$ poiché unione di aperti, dunque f è continua. □

Diamo adesso la definizione di continuità di una funzione in un punto.

Definizione 1.6.7. *Siano* (X, ϑ) *e* (Y, ϑ') *due spazi topologici una funzione* $f : X \to Y$ *è continua in* $x \in X$ *se per ogni intorno* U *di* $f(x)$ *esiste un intorno* V *di* x *tale che* $f(V) \subseteq U$*.*

Teorema 1.6.8. *Dati* (X, ϑ) *e* (Y, ϑ') *due spazi topologici, una funzione* $f : X \to Y$ *è continua se e solo se è continua in ogni punto di* X*.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Supponiamo che f sia continua e prendiamo $x \in X$. Sia U un intorno di $f(x)$, allora $\exists\, A \in \vartheta'$ tale che $f(x) \in A \subseteq U$, poiché $f^{-1}(A)$ è aperto esso è un intorno di x, dunque $f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq U$.
$\Leftarrow$ Viceversa supponiamo che f sia continua in qualunque punto $x \in X$. Sia $U \in \vartheta'$ e $x \in f^{-1}(U)$, si ha $f(x) \in U$ quindi U è un intorno di $f(x)$ allora, per la continuità di f in x, esiste un intorno V_x di x tale che $f(V_x) \subseteq U$ cioè $V_x \subseteq f^{-1}(f(V_x)) \subseteq f^{-1}(U)$. Dall'arbitrarietà di x segue che $f^{-1}(U)$ è intorno di ogni suo punto, dunque è aperto. □

Proposizione 1.6.9. *Siano (X, ϑ) e (Y, ϑ') due spazi topologici, una funzione $f : X \to Y$ è continua se e solo se: $\forall A \subseteq X \quad x \in \overline{A} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$. Dato che f è continua, preso un qualunque intorno U di $f(x)$ esiste un intorno V di x tale che $f(V) \subseteq U$,inoltre $x \in \overline{A}$ dunque $A \cap V \neq \emptyset$, quindi si ha

$$\emptyset \neq f(A \cap V) \subseteq f(A) \cap f(V) \subseteq f(A) \cap U$$

dunque ogni intorno di $f(x)$ interseca $f(A)$, cioè $f(x) \in \overline{f(A)}$.
$\Leftarrow$ Sia F un chiuso di Y, dimostriamo che $f^{-1}(F)$ è chiuso. Sia $x \in \overline{f^{-1}(F)}$ allora per ipotesi si ha $f(x) \in \overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F} = F$ ovvero $f(x) \in F \Rightarrow x \in f^{-1}(F)$, quindi si ha $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$, dunque $f^{-1}(F)$ è chiuso. □

Proposizione 1.6.10. *Siano (X, ϑ_1),(Y, ϑ_2) e (Z, ϑ_3) tre spazi topologici, $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni continue, allora $g \circ f : X \to Z$ è continua.*

Dimostrazione. Sia A un aperto di Z, allora $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$, ora per la continuità di g, $g^{-1}(A)$ è aperto in Y, infine per la continuità di f, $f^{-1}(g^{-1}(A))$, è aperto in X, dunque la funzione $g \circ f$ è continua. □

Proposizione 1.6.11. *Siano ϑ_1 e ϑ_2 due topologie su un insieme X, allora la funzione identià $1_X : (X, \vartheta_1) \to (X, \vartheta_2)$ è continua se e solo se $\vartheta_1 \supseteq \vartheta_2$, cioè se ϑ_1 è piu fine di ϑ_2.*

Definizione 1.6.12. *Siano (X, ϑ) e (Y, ϑ') due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **aperta** se per ogni aperto A di X, $f(A)$ è aperto in Y. Similmente f si dice **chiusa** se per ogni chiuso C di X, $f(C)$ è chiuso in Y.*

Definizione 1.6.13. *Siano (X, ϑ) e (Y, ϑ') due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si chiama **omeomorfismo** se è biunivoca, continua e se la sua inversa f^{-1} è continua.*

Osservazione 1.6.14. *Una funzione $f : X \to Y$ biunivoca e continua è un omeomorfismo se e solo se è aperta oppure chiusa.*

Definizione 1.6.15. *Uno spazio X si dice **omeomorfo** a Y o in simboli $X \simeq Y$ se esiste un omeomorfismo $f : X \to Y$. Inoltre osserviamo che la relazione di omeomorfismo è una relazione di equivalenza.*

Esempio 1.6.16. *L'insieme $\mathbb{R}$ (con la topologia euclidea) è omeomorfo all'intervallo $]-1, 1[$, basta considerare $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ con $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, esso costituisce un omeomorfismo.*

Esempio 1.6.17. *Ancora, $\mathbb{R}$ è omeomorfo all'intervallo $]0, +\infty[$ tramite l'omemomorfismo $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ con $f(x) = e^x$.*

Capitolo 2

Assiomi di Separazione

2.1 Assioma T_1

Definizione 2.1.1. *Uno spazio topologico (X, ϑ) soddisfa l'assioma di separazione $\mathbf{T_1}$ se per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$, esiste un aperto U tale che $x \in U, y \notin U$ e esiste un aperto V tale che $x \notin V, y \in V$.*

Teorema 2.1.2. *Uno spazio topologico (X, ϑ) è T_1 se e solo se ogni singoletto è chiuso.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \in X$ e $y \in X \setminus \{x\}$, allora per ipotesi esiste un aperto U_y tale che $x \notin U_y, y \in U_y$, allora

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} X \setminus U_y$$

dunque $\{x\}$ è chiuso poiché intersezione di chiusi.
$\Leftarrow$ Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$, per ipotesi $\{x\}, \{y\}$ sono chiusi dunque gli insiemi $X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}$ sono due aperti tali che $x \in X \setminus \{y\}, y \notin X \setminus \{y\}$ e
$x \notin X \setminus \{x\}, y \in X \setminus \{x\}$. □

Corollario 2.1.3. *La topologia meno fine su X che soddisfa T_1 è la topologia cofinita.*

Dimostrazione. Sia ϑ una qualsiasi topologia su X tale che (X, ϑ) sia T_1, ogni singoletto è chiuso quindi anche ogni insieme finito è chiuso perché unione finita di chiusi, dunque un insieme complementare di un insieme finito è aperto, cioè ogni aperto nella topologia cofinita è aperto in ϑ dunque ϑ è più fine della topologia cofinita. □

Corollario 2.1.4. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico con X finito, allora esso è T_1 se e solo se ϑ è la topologia discreta.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Per il corollario 2.1.3, basta osservare che la topologia cofinita di un insieme finito corrisponde con la topologia discreta.
$\Leftarrow$ Nella topologia discreta ogni singoletto è chiuso. □

Proposizione 2.1.5. *Uno spazio topologico (X, ϑ) è T_1 se e solo se i singoletti sono intersezione di insiemi aperti.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \in X$ allora per ogni $y \in X \setminus \{x\}$, esiste un aperto U_y tale che $x \in U_y$ e $y \notin U_y$, dunque

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$$

$\Leftarrow$ Sia $x, y \in X$ distinti, allora per ipotesi $\{x\}$ è intersezione di aperti, in particolare deve esisterne uno tra questi, diciamo U, tale che $y \notin U$, ma ovviamente $x \in U$. Un discorso del tutto analogo può essere fatto a partire da y, pertanto (X, ϑ) è T_1. $\square$

Proposizione 2.1.6. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico T_1 e sia $A \subseteq X$, se x è un punto di accumulazione per A allora ogni intorno di x interseca A in infiniti punti.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un intorno di x che interseca A in un numero finito di punti:

$$\exists U \in \mathfrak{I}(x) : \; A \cap U = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

poiché X è T_1 ogni singoletto è chiuso di conseguenza ogni insieme finito è chiuso, posto quindi $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \setminus \{x\}$, l'insieme $V = U \cap (X \setminus C)$ è ancora un intorno di x che interseca A in al più il punto x, contro l'ipotesi che x è di accumulazione per A. $\square$

2.2 Assioma T_2

Definizione 2.2.1. *Uno spazio topologico (X, ϑ) soddisfa l'assioma di separazione* $\mathbf{T_2}$ *(o è di **Hausdorff**) se presi due punti distinti $x, y \in X$ esistono due aperti $U, V \in \vartheta$ tali che $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Chiaramente, ogni spazio T_2 è anche T_1, ma non vale il viceversa come mostra il seguente

Esempio 2.2.2. *Per costruire un esempio di spazio topologico T_1 ma non T_2 prendiamo un insieme X infinito, esso con la topologia cofinita costituisce uno spazio topologico T_1 dal momento che ogni singoletto è chiuso, ma non è T_2 considerato che non esistono in questa topologia due aperti disgiunti.*

Osservazione 2.2.3. *Siano ϑ_1 e ϑ_2 due topologie su X tali che $\vartheta_1 \subseteq \vartheta_2$, allora se (X, ϑ_1) è T_i $(i = 1, 2)$ lo è anche (X, ϑ_2). Basta osservare che se ϑ_2 è più fine di ϑ_1 allora ogni aperto in ϑ_1 è aperto anche in ϑ_2.*

Proposizione 2.2.4. *Uno spazio topologico (X, ϑ) è T_2 se e solo se ogni singoletto è intersezione di suoi intorni chiusi.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \in X$, fissato $y \in X \setminus \{x\}$ esistono due aperti U_y e V_y tali che $x \in U_y, y \in V_y$ e $\overline{U_y} \cap V_y = \emptyset$, dato che V_y è un intorno di y, dall'ultima relazione segue $y \notin \overline{U_y}$, inoltre $\overline{U_y}$ è un intorno di x dal momento che $x \in U_y \subseteq \overline{U_y}$. In conclusione abbiamo

$$\{x\} = \bigcap_{y \in X \setminus \{x\}} \overline{U_y}$$

$\Leftarrow$ Siano $x, y \in X$ distinti, per ipotesi $\{x\}$ è intersezione di suoi intorni chiusi di conseguenza deve esistere un intorno chiuso di x, diciamo F, tale che $y \notin F$, allora $y \in X \setminus F$, inoltre per definizione di intorno $\exists\, U \in \vartheta : x \in U \subseteq F$. In conclusione posto $V = X \setminus F$ si ha: $x \in U, y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Proposizione 2.2.5. *Siano $(X, \vartheta_1), (Y, \vartheta_2)$ due spazi topologici con Y uno spazio T_2 e $A \subseteq X$ denso, inoltre siano $f, g : X \to Y$ due funzioni continue, allora*

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x) \Longrightarrow f = g$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\exists\, x \in X : f(x) \neq g(x)$, per ipotesi esistono due aperti $U, V \in \vartheta_2$ tali che $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ e $U \cap V = \emptyset$, gli insiemi $f^{-1}(U), g^{-1}(V)$ sono due aperti che contengono x quindi sono suoi intorni, pertanto anche $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ è un intorno di x. Ma $x \in X = \overline{A}$ quindi $A \cap (f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)) \neq \emptyset$. Sia quindi $z \in A \cap (f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V))$, si ha $f(z) \in U$, $g(z) \in V$ e $z \in A \Rightarrow f(z) = g(z)$, contro $U \cap V = \emptyset$, assurdo. $\square$

2.3 Assioma T_3

Definizione 2.3.1. *Uno spazio topologico (X, ϑ) soddisfa l'assioma di separazione* $\mathbf{T_3}$ *(o è* ***regolare****) se è T_1 e se per ogni chiuso F e per ogni $x \notin F$ esistono due aperti $U, V \in \vartheta$ tali che $x \in U$, $F \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Ogni spazio T_3 è anche T_2. Siano infatti $x, y \in X$, dato che ogni singoletto è chiuso, consideriamo $\{y\}$, allora esistono due aperti U, V tali che $x \in U$, $\{y\} \subseteq V \Rightarrow y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.
Inoltre se dalla definizione di spazio regolare omettiamo la condizione T_1, allora $T_3 \not\Rightarrow T_2$ dal momento che una tale definizione sarebbe soddisfatta ad esempio dalla topologia indiscreta (su un qualunque insieme X), infatti preso un chiuso F e $x \notin F \Rightarrow F = \emptyset$, allora esistono due aperti $X, \emptyset$ tali che $x \in X, F \subseteq \emptyset$ e $X \cap \emptyset = \emptyset$.

Esempio 2.3.2. *Vediamo ora un esempio di spazio topologico T_2 ma non T_3. Posto $Z = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, costruiamo su $\mathbb{R}$ una topologia ϑ avente come base di aperti l'insieme $\mathcal{B} = \{\,]a, b[\, \setminus A : a, b \in \mathbb{R}, A \subseteq Z\}$. Si può verificare che $(\mathbb{R}, \vartheta)$ è uno spazio topologico, inoltre ϑ è più fine della topologia euclidea (che, come verrà dimostrato in seguito, è T_2), dunque anche $(\mathbb{R}, \vartheta)$ è T_2, dimostriamo che non è T_3. Osserviamo preliminarmente che Z è un insieme chiuso in ϑ, infatti $\mathbb{R} \setminus Z =]-\infty, 0[\cup (]-1, 1[\setminus Z) \cup]1, +\infty[\in \vartheta$. Supponiamo per assurdo che esistano due aperti U, V, tali che $0 \in U, Z \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$. Per definizione di base, $\exists\, \delta > 0 : (]-\delta, \delta[\setminus Z) \subseteq U$, fissiamo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $\frac{1}{n} < \delta$ poniamo $x = \frac{1}{n} \in Z$. Poiché $Z \subseteq V$, e V è aperto $\exists\, r > 0 :]x - r, x + r[\subseteq V$. A questo punto, ricordando che $\frac{1}{n} < \delta$, è possibile verificare $(]-\delta, \delta[\setminus Z) \cap]x - r, x + r[\neq \emptyset$, pertanto si ha $U \cap V \neq \emptyset$, arrivando a un assurdo.*

Proposizione 2.3.3. *Uno spazio topologico (X, ϑ) è T_3 se e solo se è T_1 e ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni chiusi.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \in X$ e consideriamo la famiglia di tutti gli intorni di x $\mathfrak{I}(x) = \{W_i\}_{i \in I}$, facciamo vedere che $\mathfrak{I}'(x) = \{\overline{W_i}\}_{i \in I}$ è un sistema fondamentale di intorni di x.

Sia W un intorno di x, allora $\exists A \in \vartheta : x \in A \subseteq W$, consideriamo $X \setminus A$, per ipotesi esistono due aperti U, V tali che $x \in U, X \setminus A \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.
Si ha anche $\overline{U} \cap V = \emptyset$, infatti se per assurdo $y \in \overline{U} \cap V$, essendo V aperto esso è un intorno di y, e dal momento che $U \cap V = \emptyset$ allora $y \notin \overline{U}$ il che è assurdo.
Ma $X \setminus A \subseteq V \Rightarrow \overline{U} \cap (X \setminus A) = \emptyset \Rightarrow \overline{U} \subseteq A \subseteq W$ con $x \in U \subseteq \overline{U}$. Dunque per ogni intorno W di x esiste un intorno chiuso $\overline{U}$ di x contenuto in W.
$\Leftarrow$ Sia $x \in X$ e sia F un chiuso tale che $x \notin F$, dunque $x \in X \setminus F$ che è un intorno di x, per ipotesi esiste un intorno G di x chiuso tale che $G \subseteq X \setminus F$, inoltre, per definizione di intorno, esiste un aperto U tale che $x \in U \subseteq G$, posto $V = X \setminus G$ abbiamo $x \in U$, $F \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$. □

2.4 Assioma T_4

Definizione 2.4.1. *Uno spazio topologico (X, ϑ) soddisfa l'assioma di separazione* $\mathbf{T_4}$ *(o è **normale**) se è T_1 e comunque si prendano due chiusi F e G con $F \cap G = \emptyset$, esistono due aperti U, V tali che $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Ogni spazio T_4 è anche T_3, infatti per definizione se X è T_4 allora è anche T_1 dunque ogni singoletto è chiuso, sia $x \in X$ e F un insieme chiuso tale che $x \notin F \Rightarrow \{x\} \cap F = \emptyset$ esistono due aperti U, V tali che $\{x\} \subseteq U \Rightarrow x \in U$ e $F \subseteq V$ con $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 2.4.2. *Ogni spazio topologico metrizzabile è normale.*

Dimostrazione. Sia (X, d) uno spazio metrico e $\vartheta(d)$ la topologia indotta dalla metrica. Dimostriamo che X è uno spazio T_2 (e dunque anche T_1).
Siano $x, y \in X$ con $d(x, y) = r > 0$, consideriamo i due dischi $S(x, \frac{r}{2})$, $S(y, \frac{r}{2})$, essi sono due aperti disgiunti uno contenente x e l'altro y, infatti supponiamo che $z \in S(x, \frac{r}{2}) \cap S(y, \frac{r}{2})$ allora:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \Rightarrow d(x,y) < r$$

arrivando a un assurdo.
Dimostriamo ora che X è T_4. Siano F e G due insiemi chiusi tali che $F \cap G = \emptyset$ dunque $F \subseteq X \setminus G \in \vartheta(d)$ e analogamente $G \subseteq X \setminus F \in \vartheta(d)$, quindi per ogni punto $x \in F$, $\exists\, r_x > 0 : S(x, r_x) \subseteq X \setminus G$, in modo del tutto analogo per ogni $y \in G$, $\exists\, r_y > 0 : S(y, r_y) \subseteq X \setminus F$. Poniamo

$$A = \bigcup_{x \in F} S\left(x, \frac{r_x}{2}\right) \in \vartheta(d), \quad B = \bigcup_{y \in G} S\left(y, \frac{r_y}{2}\right) \in \vartheta(d)$$

per costruzione si ha $F \subseteq A$, $G \subseteq B$, proviamo che $A \cap B = \emptyset$. Sia $z \in A \cap B$, dunque $\exists x \in F : d(x,z) < \frac{r_x}{2}$ e $\exists y \in G : d(z,y) < \frac{r_y}{2}$, supponiamo, senza perdita di generalità, che $r_x = max\{r_x, r_y\}$, otteniamo:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r_x}{2} + \frac{r_y}{2} \leq r_x \Rightarrow d(x,y) < r_x$$

pertanto $y \in S(x, r_x) \subseteq X \setminus G$ che è assurdo poiché $y \in G$. □

Esempio 2.4.3. *Come abbiamo visto nell'esempio 1.5.5, $(\mathbb{R}^n, \vartheta_e)$ è uno spazio topologico metrizzabile dunque è T_4.*

Esempio 2.4.4. *Un esempio di spazio topologico non metrizzabile ma T_4 è la topologia di Sorgenfrey. Infatti $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$ è uno spazio topologico separabile (esempio 1.4.14) ma non soddisfa il secondo assioma di numerabilità (proposizione 1.4.11), dunque non è metrizzabile (ricordando che uno spazio metrizzabile è separabile se e solo se soddisfa il secondo assioma di numerabilità). Dimostriamo che esso è T_4.*
Dal momento che $\vartheta_e \subseteq \vartheta_s$ e abbiamo già osservato che $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ è T_2 segue dalla 2.2.3 che anche $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$ è T_2 (dunque anche T_1). Siano adesso C_1, C_2 due insiemi chiusi tali che $C_1 \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow C_1 \subseteq X \setminus C_2$, $C_2 \subseteq X \setminus C_1$, ricordando che una base di aperti di ϑ_s è data da $\mathcal{B} = \{\, [a, a+\epsilon[: a \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$, allora per ogni $x \in C_1, \exists\, \epsilon_x \in \mathbb{R}^+ : [\,x, x+\epsilon_x[\subseteq X \setminus C_2$, e analogamente per ogni $y \in C_2, \exists\, \epsilon_y \in \mathbb{R}^+ : [\,y, y+\epsilon_y[\subseteq X \setminus C_1$, poniamo

$$A = \bigcup_{x \in C_1} [\,x, x+\epsilon_x[\, \in \vartheta_s, \quad B = \bigcup_{y \in C_2} [\,y, y+\epsilon_y[\, \in \vartheta_s$$

ovviamente $C_1 \subseteq A$ e $C_2 \subseteq B$, inoltre dimostriamo che $[\,x, x+\epsilon_x[\cap[\,y, y+\epsilon_y[= \emptyset$ (con $x \in C_1$ e $y \in C_2$), infatti se non fossero disgiunti allora si verifica uno dei seguenti fatti: $x < y < x+\epsilon_x \Rightarrow y \in X \setminus C_2$ oppure $y < x < y+\epsilon_y \Rightarrow x \in X \setminus C_1$, arrivando in ogni caso a un assurdo, dunque $A \cap B = \emptyset$, pertanto $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$ è T_4.

Teorema 2.4.5. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico separabile e supponiamo che esiste un sottoinsieme $S \subseteq X$ chiuso, discreto e non numerabile allora (X, ϑ) non è T_4.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che ogni sottoinsieme di S è chiuso in X. Sia $A \subseteq S$, dato che S è discreto la topologia indotta su S è quella discreta, dunque A è chiuso nella topologia indotta, inoltre per la proposizione 1.3.2 esiste un chiuso C di X tale che $A = S \cap C$, pertanto A è chiuso in X poiché intersezione di due chiusi.
Per ipotesi X è separabile dunque sia $D \subseteq X$ un insieme denso e numerabile. Supponiamo per assurdo che (X, ϑ) sia T_4 e consideriamo $\emptyset \neq A \subsetneq S$. I due insiemi A e $S \setminus A$ sono entrambi chiusi, per ipotesi esistono due aperti $U_A, U_{S\setminus A}$ tali che $A \subseteq U_A, S \setminus A \subseteq U_{S\setminus A}$ e $U_A \cap U_{S\setminus A} = \emptyset$. Poiché D è denso si ha $U_A \cap D \neq \emptyset$.
Siano allora $A, B \subsetneq S$ due sottoinsiemi non vuoti con $A \neq B$, si ha

$$U_A \cap D \neq U_B \cap D$$

infatti se $A \setminus B \neq \emptyset$, allora si ha

$$U_B \cap U_{S\setminus B} \cap D = \emptyset$$

poiché $U_B \cap U_{S\setminus B} = \emptyset$, mentre

$$U_A \cap U_{S\setminus B} \cap D \neq \emptyset$$

dato che $A \setminus B \subseteq A \subseteq U_A$ e $A \setminus B \subseteq S \setminus B \subseteq U_{S\setminus B}$ quindi $A \setminus B \subseteq U_A \cap U_{S\setminus B}$.
Infine costruiamo un'applicazione: $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(D)$ tramite la legge

$$f(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{se} \quad A = \emptyset \\ U_A \cap D & \text{se} \quad A \subsetneq S \\ D & \text{se} \quad A = S \end{cases}$$

per quanto dimostrato prima, essa è iniettiva, ma ciò è assurdo in quanto la carindalità di $\mathcal{P}(S)$ è strettamente maggiore della cardinalità di $\mathcal{P}(D)$. □

Esempio 2.4.6. *Un esempio di spazio topologico T_3 ma non T_4 è il piano di Niemytzki. In $\mathbb{R}^2$ sia $L = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$, cioè l'asse delle ascisse, e sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, cioè il semipiano superiore di $\mathbb{R}^2$, definiamo su X una topologia ϑ formata da tutti gli aperti di $\vartheta_e(X)$, cioè la topologia indotta da quella euclidea su X, unito a tutti gli insiemi formati dai dischi aperti tangenti a L unito il punto di tangenza.*
In (X, ϑ) ogni singoletto è chiuso, dunque è T_1, inoltre ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi, cioè è T_3, ma non è T_4 infatti (X, ϑ) è separabile poiché $X \cap \mathbb{Q}^2$ è un insieme denso e numerabile inoltre la retta L è un insieme chiuso, discreto e non numerabile, quindi per il teorema 2.4.5 (X, ϑ) non è T_4.

Definizione 2.4.7. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico. Una proprietà di (X, ϑ) si dice* ***ereditaria*** *se ogni sottospazio di (X, ϑ) gode di tale proprietà.*

Proposizione 2.4.8. *Le proprietà T_1, T_2, T_3 sono ereditarie.*

Dimostrazione. Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio di X
$\mathbf{T_1}$) Per ipotesi (X, ϑ) è T_1 ogni singoletto è chiuso. Dato che per ogni $y \in Y$ si ha $\{y\} = \{y\} \cap Y$, per la proposizione 1.3.2 $\{y\}$ è chiuso in Y, dunque Y è T_1.
$\mathbf{T_2}$) Siano $y_1, y_2 \in Y$ allora $y_1, y_2 \in X$, per ipotesi esistono due aperti U, V di X tali che $y_1 \in U, y_2 \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Poniamo $U' = U \cap Y$, $V' = V \cap Y$ sono due aperti di Y, inoltre $y_1 \in U', y_2 \in V'$ e $U' \cap V' = \emptyset$, pertanto Y è T_2.
$\mathbf{T_3}$) Abbiamo già dimostrato che se X è T_1 allora Y è T_1. Sia $y \in Y$ e F' un chiuso di Y tale che $y \notin F'$, sempre per la proposizione 1.3.2 esiste un chiuso F di X tale che $F' = F \cap Y$, inoltre $y \in X$ quindi per ipotesi esistono due aperti U, V di X tali che $y \in U, F \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$, poniamo $U' = U \cap Y$, $V' = V \cap Y$ sono due aperti di Y tali che $y \in U'$, $F' \subseteq V'$ e $U' \cap V' = \emptyset$, pertanto Y è T_3. □

2.5 Limite di successioni

Sia (X, ϑ) uno spazio topologico, diamo le seguenti definizioni

Definizione 2.5.1. *Si definisce* ***successione*** *un'applicazione $f : \mathbb{N} \to X$. Gli elementi $f(n)$ sono indicati con x_n e la successione con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$.*

Definizione 2.5.2. *Un punto $l \in X$ è detto* ***limite*** *della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se per ogni intorno U di l esiste un indice ν tale che ogni termine della successione con indice maggiore di ν appartiene a U. In altri termini se*

$$\forall U \in \mathfrak{I}(l),\ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \quad x_n \in U$$

quando ciò accade scriveremo $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$.

Osserviamo che in generale il limite di una successione non è unico come mostra il seguente

Esempio 2.5.3. *Definiamo una striscia aperta di centro x_0 e raggio ϵ l'insieme $S(x_0, \epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \epsilon\}$. In $\mathbb{R}^2$ costruiamo la topologia delle strisce in cui un insieme A è aperto se per ogni suo punto P esiste una striscia aperta contenente P e contenuta in A.*

Consideriamo in questa topologia la successione $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$*, ogni punto del tipo* $(0, y)$ *con* $y \in \mathbb{R}$ *è limite della successione* $\{x_n\}$*. Infatti consideriamo come intorni di* $(0, y)$ *le strisce aperte di centro* $x_0 = 0$ *e raggio un certo* ϵ*, scegliamo un indice* $\nu > \frac{1}{\epsilon}$ *allora per ogni* $n > \nu > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$ *si ha* $x_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \in S(0, \epsilon)$*.*

Teorema 2.5.4. *Sia* (X, ϑ) *uno spazio topologico* T_2 *allora se una successione* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ammette limite esso è unico.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione. Per assurdo supponiamo che $\{x_n\}$ abbia due limiti diversi l_1 e l_2. Per ipotesi X è T_2 dunque esistono due aperti U, V tali che $l_1 \in U$, $l_2 \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Dato che U è intorno di l_1 esiste un indice ν_1 tale che $\forall n > \nu_1$ si ha $x_n \in U$, analogamente V è intorno di l_2 quindi esiste un indice ν_2 tale che $\forall n > \nu_2$ si ha $x_n \in V$. Infine, posto $\nu = max\{\nu_1, \nu_2\}$ per ogni $n > \nu$ si ha $x_n \in U \cap V$, che è assurdo poiché U e V sono disgiunti. $\square$

Capitolo 3

Prodotto e quoziente

3.1 Topologia prodotto

Proposizione 3.1.1. *Siano X un insieme, (Y, ϑ_y) uno spazio topologico e sia $f : X \to Y$ una funzione. La topologia meno fine definibile su X affinché f sia continua è data da*

$$\vartheta_f = \{f^{-1}(A) : A \in \vartheta_y\}.$$

Dimostrazione. Sia ϑ una topologia su X che renda f continua allora per ogni $A \in \vartheta_y$, $f^{-1}(A)$ è un aperto di ϑ, cioè ogni aperto di ϑ_f è aperto in ϑ, pertanto $\vartheta_f \subseteq \vartheta$. □

Definizione 3.1.2. *Dati due insiemi X e Y, consideriamo il prodotto cartesiano $X \times Y$, chiameremo* ***proiezioni canoniche*** *le funzioni*

$$p : X \times Y \to X, \quad p(x, y) = x$$

$$q : X \times Y \to Y, \quad q(x, y) = y$$

Definizione 3.1.3. *Siano $(X, \vartheta_1), (Y, \vartheta_2)$ due spazi topologici. Sul prodotto cartesiano $X \times Y$ definiamo una topologia ϑ_p in due modi equivalenti:*

1. *La topologia prodotto ϑ_p è la topologia meno fino che rende le proiezioni canoniche $p : X \times Y \to X$ e $q : X \times Y \to Y$ continue.*

2. *Definiamo la topologia prodotto ϑ_p attraverso la base di aperti*

   $$\mathcal{B} = \{A \times B : A \in \vartheta_1, B \in \vartheta_2\},$$

   è facile verificare che $\mathcal{B}$ soddisfa le proprietà $B1$ e $B2$. In particolare per la seconda proprietà basta osservare che:

   $$A_1 \times B_1,\ A_2 \times B_2 \in \mathcal{B} \quad (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{B}.$$

Esempio 3.1.4. *Consideriamo $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$, la topologia prodotto della topologia euclidea con se stessa ha per base l'insieme $\mathcal{B} = \{\,]a, b[\times]c, d[: a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, che è una base per $(\mathbb{R}^2, \vartheta_e)$, dunque il prodotto della topologia euclidea su $\mathbb{R}$ con se stessa è uguale alla topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$.*

Esempio 3.1.5. *Effettuando il prodotto tra la topologia euclidea* $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ *e la topologia indiscreta* $(\mathbb{R}, \vartheta_i)$ *otteniamo la topologia delle strisce vista nell'esempio 2.5.3, infatti una base per questa topologia è data da*

$$\mathcal{B} = \{\,]a, b[\times \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b\}.$$

Proposizione 3.1.6. *Sia* $(x, y) \in X \times Y$*, un insieme* $W \subseteq X \times Y$ *è intorno di* (x, y) *se e solo se esiste un intorno* U *di* x *e un intorno* V *di* y *tali che* $U \times V \subseteq W$*.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Se W è intorno di (x, y) allora esiste un aperto $A \in \vartheta_p$: $(x, y) \in A \subseteq W$, per definizione di topologia prodotto esiste un aperto U di X e un aperto V di Y tali che $(x, y) \in U \times V \subseteq A \subseteq W$, dato che U e V sono aperti sono anche intorni rispettivamente di x e di y.
$\Leftarrow$ Sia U un intorno di x e V un intorno di y con $U \times V \subseteq W$, allora esiste un aperto A di X e un aperto B di Y tali che $(x, y) \in A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$, dunque W è un intorno di (x, y) dato che $A \times B$ è un aperto di $X \times Y$. □

Proposizione 3.1.7. *Siano* $\mathcal{B}_1$ *una base di* X *e* $\mathcal{B}_2$ *una base di* Y*, allora* $\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{B}_1, A_2 \in \mathcal{B}_2\}$ *è una base per la topologia prodotto su* $X \times Y$*.*

Dimostrazione. Sia A un aperto di $X \times Y$ con $(x, y) \in A$, per definizione di topologia prodotto esiste un aperto U di X e un aperto V di Y tali che $(x, y) \in U \times V \subseteq A$. Per ipotesi $\mathcal{B}_1$ è una base di X, dunque esiste $A_1 \in \mathcal{B}_1$: $x \in A_1 \subseteq U$ analogamente per $\mathcal{B}_2$ esiste $A_2 \in \mathcal{B}_2 : y \in A_2 \subseteq V$, infine si ha $(x, y) \in A_1 \times A_2 \subseteq U \times V \subseteq A$. □

Corollario 3.1.8. *Se* (X, ϑ_1) *e* (Y, ϑ_2) *soddisfano il secondo assioma di numerabilità allora anche* $(X \times Y, \vartheta_p)$ *soddisfano tale assioma.*

Dimostrazione. Questo fatto segue direttamente dalla proposizione precedente una volta osservato che il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili è numerabile. □

Proposizione 3.1.9. *Siano* $A \subseteq X$ *e* $B \subseteq Y$ *allora* $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$*.*

Dimostrazione. Per la proposizione 3.1.6 un punto $(x, y) \in \overline{A \times B}$ se e solo se per ogni intorno U di x e ogni intorno V di y si ha $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset \Leftrightarrow (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset \Leftrightarrow U \cap A \neq \emptyset, V \cap B \neq \emptyset$ ciò accade se e solo se $x \in \overline{A}$ e $y \in \overline{B}$, cioè $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$. □

Corollario 3.1.10. *Se* F *è un chiuso di* X *e* G *è un chiuso di* Y *allora* $F \times G$ *è un chiuso di* $X \times Y$*.*

Dimostrazione. $F = \overline{F}$, $G = \overline{G} \Rightarrow F \times G = \overline{F} \times \overline{G} = \overline{F \times G}$. □

Proposizione 3.1.11. *Se* A *è un insieme denso in* X *e* B *è un insieme denso in* Y *allora* $A \times B$ *è denso in* $X \times Y$*.*

Dimostrazione. $\overline{A} = X$, $\overline{B} = Y \Rightarrow \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} = X \times Y$. □

Proposizione 3.1.12. *Siano* $A \subseteq X$ *e* $B \subseteq Y$ *allora* $(A \overset{\circ}{\times} B) = \mathring{A} \times \mathring{B}$*.*

Dimostrazione. Da $\mathring{A} \subseteq A$, $\mathring{B} \subseteq B$ otteniamo $\mathring{A} \times \mathring{B} \subseteq A \times B$, inoltre $\mathring{A} \times \mathring{B}$ è aperto ed essendo $(A \overset{\circ}{\times} B)$ il più grande aperto contenuto in $A \times B$ si ha $\mathring{A} \times \mathring{B} \subseteq (A \overset{\circ}{\times} B)$.
Viceversa, sia $(x, y) \in (A \overset{\circ}{\times} B)$, per definizione di topologia prodotto esiste un aperto U di X e un aperto V di Y tali che $(x, y) \in U \times V \subseteq (A \overset{\circ}{\times} B)$, dunque $x \in U \subseteq A$ e $y \in V \subseteq B$, ma essendo $\mathring{A}$ il più grande aperto contenuto in A e $\mathring{B}$ il più grande aperto contenuto in B si ha $(x, y) \in U \times V \subseteq \mathring{A} \times \mathring{B}$. □

Proposizione 3.1.13. *Siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, la topologia indotta da $X \times Y$ su $A \times B$ è uguale alla topologia prodotto della topologia indotta da X su A e la topologia indotta da Y su B.*

Dimostrazione. Un insieme $H \subseteq A \times B$ è aperto nella topologia indotta da $X \times Y$ se e solo se esiste un aperto W di $X \times Y$ tale che $H = W \cap (A \times B)$. Per definizione di topologia prodotto $W = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$, essendo U_i e V_i aperti rispettivamente di X e di Y quindi $H = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i\right) \cap (A \times B) = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) \times (V_i \cap B)$ che è un aperto nella topologia prodotto della topologia indotta da X su A e della topologia indotta da Y su B. □

Proposizione 3.1.14. *Le proiezioni canoniche $p : X \times Y \to X$ e $q : X \times Y \to Y$ sono aperte.*

Dimostrazione. Sia A un aperto di $X \times Y$, per definizione di topologia prodotto $A = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$, dunque si ha

$$p(A) = p\left(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i\right) = \bigcup_{i \in I} p(U_i \times V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

che è un aperto di X. La dimostrazione è analoga per q. □

Teorema 3.1.15. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico e $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ la diagonale di $X \times X$, allora X è T_2 se e solo se Δ è chiuso in $X \times X$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$ dunque $(x, y) \notin \Delta$. Per ipotesi esistono U e V aperti tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset \Rightarrow (U \times V) \cap \Delta = \emptyset$, quindi abbiamo $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$ che prova che Δ è chiuso.
$\Leftarrow$ Sia $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ quindi $x \neq y$, dato che Δ è chiuso, per definizione di topologia prodotto esiste un aperto $U \times V$ tale che $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$, dunque $x \in U$, $y \in V$ e $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset \Rightarrow U \cap V = \emptyset$. □

Definizione 3.1.16. *Sia $f : X \to Y$ una funzione, si definisce* ***grafico di*** **f** *l'insieme $gr(f) = \{(x.f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$.*

Una generalizzazione del teorema precedente è data dal seguente risultato

Teorema 3.1.17. *Sia $(X, \vartheta_1), (Y, \vartheta_2)$, due spazi topologici con Y spazio di Hausdorff e sia $f : X \to Y$ una funzione continua allora $gr(f)$ è un insieme chiuso in $X \times Y$.*

Dimostrazione. Sia $(x, y) \in X \times Y \setminus gr(f)$ quindi $y \neq f(x)$, per ipotesi esistono due aperti W e V tali che $f(x) \in W$, $y \in V$ e $W \cap V = \emptyset$, ma W è un intorno di $f(x)$ dunque per la continuità di f esiste un intorno aperto U di x tale che $f(U) \subseteq W$ quindi $f(U) \cap V = \emptyset \Rightarrow (U \times V) \cap gr(f) = \emptyset$, infine abbiamo $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times Y \setminus gr(f)$. Questo prova che $X \times Y \setminus gr(f)$ essendo intorno di ogni suo punto è aperto e quindi $gr(f)$ è chiuso. □

In generale la chiusura del grafico di una funzione non implica la continuità come mostra il seguente

Esempio 3.1.18. *Consideriamo la fuzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

come si può verificare $gr(f)$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$, ma ovviamente la funzione non è continua.

Esempio 3.1.19. *Siano X e Y due insiemi infiniti, consideriamo gli spazi topologici (X, ϑ_c) e (Y, ϑ'_c) con la topologia cofinita allora la topologia cofinita ϑ su $X \times Y$ è strettamente meno fine della topologia prodotto $\overline{\vartheta}$, cioè $\vartheta \subset \overline{\vartheta}$. Infatti, dato che nella topologia cofinita un insieme è chiuso se è finito o coincide con l'intero spazio, è facile verificare che un chiuso di ϑ è chiuso anche in $\overline{\vartheta}$. Inoltre ad esempio l'insieme $X \times \{y\}$, con $y \in Y$, è chiuso in $\overline{\vartheta}$ perché prodotto di insiemi chiusi, ma non è chiuso in ϑ in quanto insieme infinito diverso da $X \times Y$.*

Osservazione 3.1.20. *Se $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ allora lo spazio X è omeomorfo al sottospazio $X \times \{y_0\}$ di $X \times Y$ e lo spazio Y è omeomorfo al sottospazio $\{x_0\} \times Y$ di $X \times Y$. Infatti le restrizioni delle proiezioni canoniche*

$$p : X \times \{y_0\} \to X, \quad q : \{x_0\} \times Y \to Y$$

sono omeomorfismi.

Teorema 3.1.21. *Il prodotto di due spazi topologici metrizzabili è metrizzabile.*

Dimostrazione. Siano $(X, d_1), (Y, d_2)$ due spazi metrici, dimostriamo che lo spazio topologico $X \times Y$ è metrizzabile.
Posti $z_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y, z_1 = (x_1, y_1) \in X \times Y$, consideriamo l'applicazione

$$d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R} \quad d(z_0, z_1) = max\{d_1(x_0, x_1), d_2(y_0, y_1)\}$$

si verifica facilmente che essa è una metrica sull'insieme $X \times Y$. $\square$

Osserviamo che possiamo definire sul prodotto $X \times Y$ diverse metriche che inducono la stessa topologia, ad esempio

$$d'(z_0, z_1) = d_1(x_0, x_1) + d_2(y_0, y_1)$$

$$d''(z_0, z_1) = \sqrt{d_1(x_0, x_1)^2 + d_2(y_0, y_1)^2}$$

ricordando che dati due numeri a, b non negativi si ha

$$max\{a, b\} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b \leq 2\, max\{a, b\}$$

da cui otteniamo

$$d(z_0, z_1) \leq d''(z_0, z_1) \leq d'(z_0, z_1) \leq 2\, d(z_0, z_1)$$

e quindi per ogni $z \in X \times Y$ e $r > 0$

$$S_d\left(z, \frac{r}{2}\right) \subseteq S_{d'}(z, r) \subseteq S_{d''}(z, r) \subseteq S_d(z, r)$$

che permette di concludere che le metriche d, d', d'' inducono la stessa topologia.

Proposizione 3.1.22. *Siano $(X, \vartheta_1), (Y, \vartheta_2)$ due spazi topologici soddisfacenti l'assioma di separazione T_i per $i \in \{1, 2, 3\}$, allora il prodotto $X \times Y$ è T_i.*

Dimostrazione.

T_1) Se X e Y sono T_1 allora i songoletti $\{x\}, \{y\}$ sono chiusi, dunque $\{x\} \times \{y\} = \{(x, y)\}$ è chiuso in $X \times Y$, pertanto $X \times Y$ è T_1.

T_2) Siano $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$ due elementi distinti di $X \times Y$, si ha $x_0 \neq x_1$ oppure $y_0 \neq y_1$. Se $x_0 \neq x_1$ allora, dal momento che X è T_2, esistono due aperti U e V di X tali che $x_0 \in U$, $x_1 \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Consideriamo adesso i due aperti $U \times Y$ e $V \times Y$ di $X \times Y$ si ha $(x_0, y_0) \in U \times Y$, $(x_1, y_1) \in V \times Y$ inoltre $(U \times Y) \cap (V \times Y) = (U \cap V) \times Y = \emptyset$. Un discorso del tutto analogo può essere fatto nel caso $y_0 \neq y_1$ dal momento che Y è T_2.

T_3) Dimostriamo che ogni punto possiede un sistema di intorni chiuso. Sia A un aperto di X e $x \in A$. Poiché X è T_3 esiste un intorno chiuso $\overline{U}$ di x tale che $x \in \overline{U} \subseteq A$ e analogamente per Y preso B aperto di Y e $y \in B$, esiste un intorno chiuso $\overline{V}$ di y tale che $y \in \overline{V} \subseteq B$. In conclusione abbiamo $(x, y) \in \overline{U} \times \overline{V} \subseteq A \times B$, ovvero ogni intorno di (x, y) contiene un intorno chiuso.

□

Il risultato precedente non può essere applicato anche a T_4 come mostra il seguente

Esempio 3.1.23. *Consideriamo la topologia di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$, abbiamo già osservato nell'esempio 2.4.4 che essa è T_4, mostriamo che il prodotto non è T_4 utilizzando il teorema 2.4.5. Infatti $(\mathbb{R}^2, \vartheta_s)$ è separabile in quanto $\mathbb{Q}^2$ è un insieme denso e numerabile e l'insieme $S = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ è chiuso (come si può facilmente verificare), discreto in quanto per ogni punto $(x, -x)$, l'aperto $A = [x, x + \epsilon[\, \times [-x, -x + \epsilon[$, con $\epsilon > 0$, è tale che $A \cap S = \{(x, -x)\}$, inoltre non è numerabile, pertanto possiamo concludere che $(\mathbb{R}^2, \vartheta_s)$ non è T_4.*

3.2 Funzioni quoziente

Definizione 3.2.1. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico, Y un insieme e $\pi : X \to Y$ una funzione suriettiva. Si definisce **topologia quoziente** indotta da π su Y la topologia più fine definibile su Y che rende π continua.*

Indichiamo questa topologia con $\vartheta_q(\pi)$. Gli aperti in questa topologia sono tutti i sottoinsiemi U di Y tali che $\pi^{-1}(U) \in \vartheta$. È chiaro che $\vartheta_q(\pi)$ è la topologia più fine che rende π continua; infatti sia ϑ' una di queste: dato che π è continua, per ogni aperto $U \in \vartheta'$ si ha $\pi^{-1}(U) \in \vartheta$, cioè $U \in \vartheta_q(\pi)$, e dunque $\vartheta' \subseteq \vartheta_q(\pi)$.

Definizione 3.2.2. *Siano $(X, \vartheta), (Y, \vartheta')$ due spazi topologici. Una funzione suriettiva $\pi : X \to Y$ si dice **quoziente** se $\vartheta' = \vartheta_q(\pi)$, cioè se ϑ' è la topologia più fine per la quale π è continua.*

Proposizione 3.2.3. *Siano $(X, \vartheta_0), (Y, \vartheta_1), (Z, \vartheta_2)$ tre spazi topologici e sia $\pi : X \to Y$ una funzione quoziente. Una funzione $f : Y \to Z$ è continua se e solo se $f \circ \pi : X \to Z$ è continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f \circ \pi"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ È chiaro che se f e π sono funzioni continue la loro composizione $f \circ \pi$ è continua.
$\Leftarrow$ Se $f \circ \pi$ è continua allora sia U un aperto di Z: $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$ è aperto in X, e dato che π è quoziente $f^{-1}(U)$ è aperto in Y, cioè f è continua. $\square$

Corollario 3.2.4. *Una funzione quoziente $\pi : X \to Y$ biiettiva è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Dato che π è biiettiva, allora esiste π^{-1}, la funzione $\pi^{-1} \circ \pi = 1_X$ è continua, quindi per la proposizione precedente anche π^{-1} è continua dunque π è un omeomorfismo. $\square$

Proposizione 3.2.5. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua, suriettiva, aperta (o chiusa) allora f è quoziente.*

Dimostrazione. Sia f aperta. Consideriamo un insieme $U \subseteq Y$ tale che $f^{-1}(U)$ è aperto in X, poiché f è suriettiva si ha $f(f^{-1}(U)) = U$, inoltre f è aperta dunque U è aperto in X, questo prova che f è quoziente.
Sia ora f chiusa, sia $f^{-1}(U)$ aperto quindi $X \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus U)$ è chiuso, analogamente a prima l'insieme $f(f^{-1}(Y \setminus U)) = Y \setminus U$ è chiuso dunque U è aperto. $\square$

3.3 Spazi quoziente

Definizione 3.3.1. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico ed $\Re$ una relazione d'equivalenza su X. Consideriamo l'insieme quoziente $X/\Re$, la proiezione canonica $\pi : X \to X/\Re$ con $\pi(x) = [x]_\Re$. Si definisce* ***spazio quoziente*** *lo spazio topologico $(X/\Re, \vartheta_q(\pi))$, dove $\vartheta_q(\pi)$ è la topologia quoziente indotta da π.*

Analogamente a prima, gli aperti di $X/\Re$ sono tutti i sottoinsiemi U di $X/\Re$ tali che $\pi^{-1}(U)$ è aperto in X.

Proposizione 3.3.2. *Sia $A \in \vartheta$ un aperto di X. Gli aperti di $\vartheta_q(\pi)$ sono tutti e soli gli insiemi $\pi(A)$ che soddisfano una delle due condizioni tra loro equivalenti:*

1. *Se $x \in A$ e $x \Re y$ allora $y \in A$*
2. *$A = \pi^{-1}(\pi(A))$*

Dimostrazione. É facile verificare che le due condizioni sono tra loro equivalenti, dunque dimostriamo la proposizione solo per la seconda proprietà.
Sia $U \in \vartheta_q(\pi)$, allora $\pi^{-1}(U) = A \in \vartheta$, per la suriettività di π otteniamo $\pi(A) = U \Rightarrow A = \pi^{-1}(\pi(A))$.
Viceversa sia $A \in \vartheta$ tale che $A = \pi^{-1}(\pi(A))$, allora l'insieme $\pi(A) = U$ è un aperto di $X/\Re$ dal momento che $\pi^{-1}(U) \in \vartheta$. $\square$

Corollario 3.3.3. *La funzione π è aperta se per ogni aperto $U \in \vartheta$ si ha $U = \pi^{-1}(\pi(U))$.*

Dimostrazione. Sia $U \in \vartheta$, per la proposizione precedente $\pi(U)$ è aperto se $U = \pi^{-1}(\pi(U))$. □

Definizione 3.3.4. *Siano X e Y due insiemi e $f : X \to Y$ una funzione. Definiamo su X una relazione di equivalenza $\Re_f$ indotta da f come segue*

$$x \Re_f y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

cioè, le classi di equivalenza sono tutte le controimmagini degli elementi di Y.

Teorema 3.3.5. *Siano $(X, \vartheta), (Y, \vartheta')$ due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione suriettiva. Consideriamo la proiezione canonica $\pi : X \to X/\Re_f$ e sia $g : X/\Re_f \to Y$ una funzione tale che $g \circ \pi = f$ (cioè $g([x]_{\Re_f}) = f(x)$), allora g è un omeomorfismo se e solo se f è una funzione quoziente.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\Re_f \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Dimostriamo che la topologia ϑ' è uguale alla topologia quoziente indotta da f, cioè che $\vartheta' = \vartheta_q(f)$. Per definizione, dal momento che $f = g \circ \pi$ è continua, si ha $\vartheta' \subseteq \vartheta_q(f)$. Dimostriamo quindi che $\vartheta_q(f) \subseteq \vartheta'$. Se $A \in \vartheta_q(f)$ allora $f^{-1}(A) \in \vartheta$, e dato che $f = g \circ \pi$ si ha $f^{-1}(A) = \pi^{-1}(g^{-1}(A)) \in \vartheta$; poiché π è quoziente $g^{-1}(A) \in \vartheta_q(\pi)$. Infine, dal momento che g, essendo un omeomorfismo, è anche una funzione aperta e suriettiva, $g(g^{-1}(A)) = A \in \vartheta'$.
$\Leftarrow$ Per la proposizione 3.2.3 essendo $g \circ \pi = f$ continua (perché funzione quoziente) e π una funzione quoziente allora g è continua. Inoltre g è iniettiva, poiché $g([x]_{\Re_f}) = g([y]_{\Re_f}) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x\Re_f y \Rightarrow [x]_{\Re_f} = [y]_{\Re_f}$, ed è anche suriettiva, considerato che f è suriettiva e $g \circ \pi = f$; dunque g è biiettiva. Infine osserviamo che anche g^{-1} è continua: infatti, visto che $g \circ \pi = f \Rightarrow g^{-1} \circ f = \pi$, in maniera analoga a prima $g^{-1} \circ f = \pi$ è continua (perché funzione quoziente) e f è funzione quoziente, dunque g^{-1} è continua. Questo prova che g è un omeomorfismo. □

Esempio 3.3.6. *Consideriamo l'intervallo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia indotta da quella euclidea e $\Re = \{(0, 1), (1, 0)\} \cup \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ una relazione d'equivalenza su $[0, 1]$ che identifica 0 e 1, mostriamo che il quoziente $[0, 1]/\Re$ è omeomorfo alla circonferenza $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ con la topologia indotta da quella euclidea. Consideriamo la funzione $f : [0, 1] \to S^1$ tale che $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, osserviamo che risulta $\Re = \Re_f$, inoltre è possibile verificare che f è una funzione quoziente. Considerando adesso le funzioni $\pi : [0, 1] \to [0, 1]/\Re_f$ e $g : [0, 1]/\Re_f \to S^1$, per il teorema precedentemente dimostrato g risulta un omeomorfismo, dunque $[0, 1]/\Re_f \simeq S^1$.*

Esempio 3.3.7. *Su $\mathbb{R}$ definiamo la relazione di equivalenza $x\Re y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$, mostriamo che $\mathbb{R}/\Re$ è omeomorfo a S^1. Come prima consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to S^1$ tale che $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, osserviamo che $\Re_f = \Re$, inoltre f è continua, suriettiva e aperta dunque è quoziente pertanto $\mathbb{R}/\Re_f \simeq S^1$.*

In generale, il quoziente di uno spazio T_i con $i \in \{1,2,3,4\}$ non è T_i come mostra il seguente

Esempio 3.3.8. *Consideriamo* $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ *che come sappiamo è* T_4*, su* $\mathbb{R}$ *definiamo la relazione di equivalenza* $x\Re y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$*. Mostriamo che* $(\mathbb{R}/\Re, \vartheta_q(\pi))$ *non è* T_1*, piu precisamente la topologia quoziente è quella indiscreta.*
Sia $\emptyset \neq V \in \vartheta_q(\pi)$ *allora* V *è del tipo* $V = \pi(U)$ *con* $U \in \vartheta_e$ *e tale che se* $x \in U$ *e* $x\Re y$ *allora* $y \in U$*. Per definizione esiste un aperto* $]a,b[\subseteq U$*, sia* $y \in \mathbb{R}$*, allora esiste* $r \in \mathbb{Q}$ *con* $a - y < r < b - y$*, dunque* $y + r = x \in]a,b[$*, cioè* $x \in]a,b[\subseteq U$ *e* $x\Re y$ *allora* $y \in U$*, dall'arbitrarietà di* y *segue* $U = \mathbb{R}$ *da cui* $V = \pi(U) = \pi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\Re$*. Cioè l'unico aperto in* $(\mathbb{R}/\Re, \vartheta_q(\pi))$ *è l'intero spazio, pertanto la topologia è quella indiscreta.*

Proposizione 3.3.9. *Sia* (X, ϑ) *uno spazio topologico e* $\Re$ *una relazione di equivalenza su* X*. Se* $X/\Re$ *è* T_2 *allora l'insieme* $\Re$ *è chiuso in* $X \times X$*.*

Dimostrazione. Sia $(x,y) \in (X\times X)\setminus\Re$, allora $\pi(x) \neq \pi(y)$, per ipotesi $X/\Re$ è T_2 dunque esistono due aperti U, V di $X/\Re$ tali che $\pi(x) \in U, \pi(y) \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. I due insiemi $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ sono aperti in X e contengono rispettivamente x e y, dunque $\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)$ è un intorno di (x,y), dal fatto che $U \cap V = \emptyset$ sappiamo che U e V contengono classi di equivalenza diverse (e quindi disgiunte) da cui segue $(\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)) \cap \Re = \emptyset$. Dall'arbitrarietà di (x,y) si ha che nessun punto di $(X \times X) \setminus \Re$ è aderente ad $\Re$ e quindi $\overline{\Re} \subseteq \Re \Rightarrow \overline{\Re} = \Re$. □

Proposizione 3.3.10. *Sia* (X, ϑ) *uno spazio topologico e* $\Re$ *una relazione di equivalenza su* X*. Se* $\Re$ *è chiuso in* $X \times X$ *e la proiezione canonica* $\pi : X \to X/\Re$ *è aperta allora* $X/\Re$ *è* T_2*.*

Dimostrazione. Siano $\pi(x)$ e $\pi(y)$ due elementi di $X/\Re$ con $\pi(x) \neq \pi(y)$. Poiché $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Re$ e l'insieme $\Re$ è chiuso, esistono due aperti U, V di X tali che $(x,y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Re$, da cui segue $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$, dato che π è aperta abbiamo trovato due aperti di $X/\Re$ disgiunti che contengono rispettivamente $\pi(x)$ e $\pi(y)$. □

Capitolo 4

Connessione e compattezza

4.1 Spazi connessi

Definizione 4.1.1. *Uno spazio topologico (X, ϑ) si dice* ***connesso*** *se equivalentemente:*

1. *Non esistono due aperti U, V non vuoti tali che*
$$X = U \cup V \quad U \cap V = \emptyset$$
2. *Non esistono due chiusi F, G non vuoti tali che*
$$X = F \cup G \quad F \cap G = \emptyset$$
3. *Non esistono sottoinsiemi di X diversi da X e $\emptyset$ che sono sia aperti che chiusi.*

Vediamo alcuni esempi di spazi connessi e di spazi non connessi.

Esempio 4.1.2. *Un qualsiasi spazio con la topologia indiscreta (X, ϑ_i) è connesso, basta osservare che gli unici aperti sono X e $\emptyset$.*
Un qualsiasi spazio con la topologia discreta (X, ϑ_d)non è connesso, basta osservare che ogni insieme è sia aperto che chiuso.
$\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$ non è connesso infatti ogni insieme del tipo $[a, b[$ è sia aperto che chiuso.
Lo spazio topologico (X, ϑ_c) infinito con la topologia cofinita è connesso poiché non esistono due aperti disgiunti.

Definizione 4.1.3. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice* ***connesso*** *se lo è con la topologia indotta.*

Lemma 4.1.4. *Consideriamo $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$. Sia S un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ e $x = \sup S$ allora $x \in \overline{S}$ (lo stesso vale se $x = \inf S$).*

Dimostrazione. Se U un intorno di x allora $\exists \epsilon > 0$ tale che $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subseteq U$: per le proprietà dell'estremo superiore $\exists y \in S : x - \epsilon < y \leq x \Rightarrow y \in S \cap U$, cioè ogni intorno di x interseca S, dunque $x \in \overline{S}$ (la dimostrazione nel caso $x = \inf S$ è analoga). $\square$

Definizione 4.1.5. *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è un* ***intervallo*** *se $\forall x, y \in A$ con $x < y$ e z tale che $x < z < y$ si ha $z \in A$, o equivalentemente se $[x, y] \subseteq A$.*

Teorema 4.1.6. *In $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ i sottoinsiemi connessi sono tutti e soli gli intervalli.*

Dimostrazione. Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ e supponiamo che S non sia un intervallo. Per definizione esistono $x, y \in S$ con $x < y$ tali che $\exists z \in \mathbb{R} \setminus S : x < z < y$. Sotto queste ipotesi possiamo scrivere:

$$S = (S \cap]-\infty, z[\,) \cup (S \cap]z, +\infty[\,)$$

quindi S è unione di due aperti disgiunti, cioè S non è connesso, ciò dimostra che ogni insieme connesso è un intervallo.
Viceversa sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, supponiamo per assurdo che non sia connesso, allora esistono due chiusi di S non vuoti F, G tali che $S = F \cup G$, $F \cap G = \emptyset$, siano $x \in F$ e $y \in G$ consideriamo $z = \sup([x, y] \cap F)$, allora per il lemma precedente $z \in \overline{[x, y] \cap F} = [x, y] \cap F$ dato che $[x, y] \cap F$ è chiuso in S. Dato che S è un intervallo e per definizione di estremo superiore deve aversi $]z, y] \subseteq G$, dunque $\inf]z, y] = z \in \overline{]z, y]} \subseteq \overline{G} = G$ dunque $z \in F \cap G$ arrivando così a un assurdo, pertanto S è connesso. □

Osserviamo che l'insieme $\mathbb{R}$ è un intervallo, da cui si ha il seguente

Corollario 4.1.7. *Lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ è connesso.*

Osservazione 4.1.8. *L'insieme $\mathbb{Q}$ non è connesso in $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ poiché non è un intervallo, in particolare, dato che gli unici intervalli contenuti in $\mathbb{Q}$ sono i singoletti, esso non possiede sottoinsiemi connessi con più di un punto.*

Proposizione 4.1.9. *Siano $(X, \vartheta), (Y, \vartheta')$ due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva allora se X è connesso lo è anche Y.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che Y non sia connesso, allora esistono due aperti non vuoti U, V di Y tali che $U \cup V = Y$, $U \cap V = \emptyset$. Poiché f è continua gli insiemi $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ sono aperti non vuoti di X e risulta $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V), f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, arrivando così a un assurdo. □

Osservando che per definizione una funzione quoziente è continua e suriettiva, una conseguenza immediata del risultato precedente è il seguente

Corollario 4.1.10. *Il quoziente di uno spazio connesso è connesso.*

Lemma 4.1.11. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme connesso allora per ogni coppia di aperti U, V tali che $U \cap V = \emptyset, Y \subseteq U \cup V$ si ha $Y \subseteq U$ oppure $Y \subseteq V$*

Dimostrazione. La relazione $Y \subseteq U \cup V$ implica $Y = (Y \cap U) \cup (Y \cap V)$, dato che Y è connesso deve aversi $Y \cap U = \emptyset$ oppure $Y \cap V = \emptyset$, cioè $Y \subseteq U$ oppure $Y \subseteq V$. □

Proposizione 4.1.12. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico. Se esiste una famiglia $\{Y_s\}_{s \in S}$ di sottospazi connessi di X tale che $Y_s \cap Y_{s'} \neq \emptyset$ per ogni $s, s' \in S$ e $\bigcup_{s \in S} Y_s = X$ allora X è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che X non sia connesso, dunque esistono due aperti non vuoti U, V tali che $U \cup V = X, U \cap V = \emptyset$. Dal momento che $\bigcup_{s \in S} Y_s = X$ esistono $s, s' \in S$ tali che $Y_s \cap U \neq \emptyset$ e $Y_{s'} \cap V \neq \emptyset$, per il lemma 4.1.11 si ha $Y_s \subseteq U$, $Y_{s'} \subseteq V$ contro $Y_s \cap Y_{s'} \neq \emptyset$ arrivando a un assurdo. □

Corollario 4.1.13. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico. Se una famiglia $\{Y_s\}_{s \in S}$ di sottospazi connessi di X è tale che $\bigcap_{s \in S} Y_s \neq \emptyset$ allora il sottospazio $\bigcup_{s \in S} Y_s$ è connesso.*

Proposizione 4.1.14. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico. Se comunque presi $x, y \in X$ esiste un sottospazio connesso $Y \subseteq X$ tale che $x, y \in Y$ allora X è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che X non sia connesso, allora esistono due aperti non vuoti U, V tali che $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$. Siano $x \in U$ e $y \in V$, per ipotesi esiste un sottospazio connesso $Y \subseteq X$ tale che $x, y \in Y$, osserviamo che $Y \subseteq X = U \cup V$, ma $Y \nsubseteq U$ poiché $y \in Y$ e $Y \nsubseteq V$ poiché $x \in Y$, arrivando così a un assurdo per il lemma 4.1.11. □

Teorema 4.1.15. *Siano $(X, \vartheta), (Y, \vartheta')$ due spazi topologici allora il prodotto $X \times Y$ è connesso se e solo se X e Y sono connessi.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Basta considerare le proiezioni canoniche $p : X \times Y \to X$ e $q : X \times Y \to Y$, sono due funzioni continue e suriettive, dunque per la proposizione 4.1.9 X e Y sono connessi.
$\Leftarrow$ Siano $P = (x_0, y_0) \in X \times Y$ e $Q = (x_1, y_1) \in X \times Y$ due punti di $X \times Y$, consideriamo i due insiemi $X \times \{y_0\}$ e $\{x_1\} \times Y$, essi sono connessi perché omeomorfi rispettivamente a X e Y, inoltre $(X \times \{y_0\}) \cap (\{x_1\} \times Y) = (x_1, y_0)$ dunque per il corollario 4.1.13 l'insieme $Z = X \times \{y_0\} \cup \{x_1\} \times Y$ è connesso, in particolare $P, Q \in Z$, in altri termini presi due punti P, Q di $X \times Y$ abbiamo trovato un sottospazio connesso Z tale che $P, Q \in Z$, in conclusione, per la proposizione 4.1.14, $X \times Y$ è connesso. □

Corollario 4.1.16. *Il prodotto di un numero finito di spazi connessi è connesso.*

In particolare, dato che $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ è connesso, lo sarà anche $(\mathbb{R}^n, \vartheta_e)$.

Proposizione 4.1.17. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme denso e connesso allora X è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che X non sia connesso: allora esistono due aperti non vuoti U, V tali che $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$. Possiamo scrivere $Y = (Y \cap U) \cup (Y \cap V)$, cioè Y risulta unione di due aperti non vuoti (poiché Y è denso) e disgiunti questo porta a un assurdo. □

Corollario 4.1.18. *Se $Y \subseteq X$ è connesso allora lo è anche $\overline{Y}$.*

Dimostrazione. Basta osservare che Y è connesso ed è denso in $\overline{Y}$. □

Proposizione 4.1.19. *Sia $Y \subseteq X$ un insieme connesso e $Z \subseteq X$ un insieme tale che $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$, allora Z è connesso.*

Dimostrazione. Sia U un aperto nella topologia indotta su Z allora esiste un aperto A di X tale che $U = Z \cap A$, fissato $x \in U$ si ha $x \in A$ e $x \in \overline{Y}$, inoltre essendo A aperto esso è anche un intorno di x, dunque

$$Y \cap A = Y \cap (Z \cap A) = Y \cap U \neq \emptyset.$$

Quindi ogni aperto di Z interseca Y questo prova che Y è un sottoinsieme di Z denso e connesso, allora per la 4.1.17 Z è connesso. □

Teorema 4.1.20. (Teorema del punto fisso)
Nello spazio topologico $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ consideriamo una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ continua, allora $\exists\, x \in [0,1] : f(x) = x$.

Dimostrazione. Se $f(0) = 0$ oppure $f(1) = 1$ la tesi è acquisita quindi supponiamo che $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Per assurdo se $\forall x \in]0,1[\ f(x) \neq x$ allora posto $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}$ si ha $gr(f) \cap \Delta = \emptyset$. Poniamo $A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x > y\}, B = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x < y\}$, essi sono due aperti nella topologia indotta su $[0,1] \times [0,1]$, inoltre $[0,1] \times [0,1] = A \cup B \cup \Delta$ e $A \cap B = \emptyset$, allora

$$gr(f) = gr(f) \cap (A \cup B \cup \Delta) = (A \cap gr(f)) \cup (B \cap gr(f))$$

cioè $gr(f)$ è unione di due aperti (nella topologia indotta) disgiunti, il che è assurdo poiché $gr(f)$ è connesso (basta considerare la funzione $g : [0,1] \to gr(f)$ con $g(t) = (t, f(t))$ continua e suriettiva). □

Definizione 4.1.21. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico, fissato $x \in X$ consideriamo la famiglia $\mathcal{C} = \{Y \subseteq X : Y connesso,\ x \in Y\}$, cioè la famiglia dei sottospazi di X connessi contenenti x, allora $C_x = \bigcup_{Y \in \mathcal{C}} Y$ per il corollario 4.1.13 risulterà il più grande sottospazio di X connesso che contiene x. L'insieme C_x è detto **componente connessa** di x.*

Osserviamo che C_x è chiuso, infatti per il corollario 4.1.18 l'insieme $\overline{C_x}$ è connesso, quindi è un sottospazio connesso contenente x, dunque $C_x = \overline{C_x}$. Inoltre se su X stabiliamo una relazione $\Re$ ponendo $x \Re y$ se e solo se esiste un sottospazio connesso che contiene x e y, essa è una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza sono le componenti connesse di X, cioè $\forall x \in X$ si ha $[x]_{\Re} = C_x$.

Definizione 4.1.22. *Uno spazio topologico si dice **totalmente sconnesso** se le sue componenti connesse sono i singoletti, cioè se $\forall x \in X$ si ha $C_x = \{x\}$.*

Esempio 4.1.23. *Un qualsiasi spazio X con la topologia discreta è totalmente sconnesso. $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ per la 4.1.8 è totalemente sconnesso. Infine è possibile verificare che anche lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$ è totalemente sconnesso.*

Definizione 4.1.24. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico, si definisce **arco** di estremi $x, y \in X$ una funzione $f : [0,1] \to X$ continua tale che $f(0) = x$ e $f(1) = y$.*

Definizione 4.1.25. *Uno spazio topologico (X, ϑ) si dice **connesso per archi** se per ogni $x, y \in X$ esiste un arco di estremi x, y.*

Proposizione 4.1.26. *Ogni spazio topologico connesso per archi è connesso.*

Dimostrazione. Sia (X, ϑ) uno spazio topologico connesso per archi allora per ogni $x, y \in X$ esiste $f : [0, 1] \to X$ con $x, y \in f([0, 1])$, cioè per ogni $x, y \in X$ esiste un sottospazio di X connesso (4.1.9) che contiene x, y quindi per la 4.1.14 X è connesso. $\square$

Vediamo un esempio di spazio connesso ma non connesso per archi

Esempio 4.1.27. *Su $\mathbb{R}$ definiamo la topologia conumerabile ϑ_{cn} in cui gli insiemi chiusi sono tutti gli insiemi finiti o numerabili. Lo spazio $(\mathbb{R}, \vartheta_{cn})$ è connesso poiché non esistono due insiemi chiusi la cui unione sia uguale ad $\mathbb{R}$, mostriamo che esso non è connesso per archi facendo vedere che ogni funzione continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è costante.*
Sia $C = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, esso è numerabile dunque l'insieme $f(C)$ è al più numerabile quindi è chiuso, da cui segue $\overline{f(C)} = f(C)$, inoltre $\overline{C} = [0, 1]$, cioè C è denso nella topologia (euclidea) indotta su $[0, 1]$. Per la proposizione 1.6.9 si ha $f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)}$ da cui $f([0, 1]) \subseteq f(C)$, quindi $f([0, 1])$ è al più numerabile ed è anche connesso, poiché f continua, suriettiva nell'immagine e $[0, 1]$ connesso in ϑ_e. Osserviamo che le topologia conumerabile induce, su ogni insieme al più numerabile, la topologia discreta, che, come osservato in precedenza, è totalmente sconnessa. Dunque, affinché $f([0, 1])$ sia un insieme connesso, esso deve contenere un solo punto e quindi f è costante.

Sia (X, ϑ) uno spazio topologico, definiamo su X la relazione $\Re$ ponendo $x\Re y$ se e solo se esiste un arco di estremi x, y. Verifichiamo che $\Re$ è una relazione di equivalenza:

1. $\forall x \in X \quad x\Re x$
   Basta considerare la funzione $f : [0, 1] \to X$ con $f(t) = x \quad \forall t \in [0, 1]$.

2. $\forall x, y \in X \quad x\Re y \Rightarrow y\Re x$.
   Dato che $x\Re y$ esiste un arco $f : [0, 1] \to X$ di estremi x, y, consideriamo la funzione $g : [0, 1] \to X$ con $g(t) = f(1-t) \forall t \in [0, 1]$, si ha $g(0) = f(1) = y$ e $g(1) = f(0) = x$ dunque g è un arco di estremi y, x quindi $y\Re x$.

3. $\forall x, y, z \in X \quad x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow x\Re z$
   Per ipotesi esistono due archi $f, g : [0, 1] \to X$ di estremi rispettivamente x, y e y, z. Posto
   $$h : [0,1] \to X, \quad h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) & \text{se} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
   osserviamo che h è un arco di estremi x, z, dunque $x\Re z$.

Una volta verificato che $\Re$ è una relazione di equivalenza su X diamo la seguente

Definizione 4.1.28. *La classe $[x]_\Re$ si chiama* ***componente connessa per archi*** *di x.*

Osserviamo che le componenti connesse per archi non sono sempre insiemi chiusi.

Proposizione 4.1.29. *Siano $(X, \vartheta), (Y, \vartheta')$ due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva allora se X è connesso per archi lo è anche Y.*

Dimostrazione. Siano $x', y' \in Y$, per la suriettività di f esistono $x, y \in X$ tali che $f(x) = x', f(y) = y'$, inoltre dato che X è connesso per archi esisterà un arco $g : [0, 1] \to X$ di estremi x, y allora la funzione $f \circ g : [0, 1] \to Y$ è continua, inoltre $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(x) = x'$ e $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(y) = y'$, dunque $f \circ g$ è un arco di estremi x', y', cioè Y è connesso per archi. □

4.2 Spazi compatti

Definizione 4.2.1. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico, si chiama* ***ricoprimento aperto*** *di X una famiglia $\mathcal{A}$ di aperti tale che:*

$$X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Inoltre una sottofamiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ che è ancora un ricoprimento di X viene detto un ***sottoricoprimento*** *di $\mathcal{A}$.*

Definizione 4.2.2. *Uno spazio topologico (X, ϑ) si dice* ***compatto*** *se ogni ricoprimento aperto di X possiede un sottoricoprimento finito.*

Esempio 4.2.3. *Vediamo alcuni esempi:*

1. *Ogni spazio topologico finito è compatto.*

2. *Uno spazio topologico con la topologia discreta è compatto soltanto se è finito. Infatti l'insieme costituito dai singoletti è un ricoprimento aperto che nel caso infinito non possiede, naturalmente, un sottoricoprimento finito.*

3. *Lo spazio topologico (X, ϑ_c) è compatto infatti sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X e sia $A \in \mathcal{A}$, allora $A = X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, dato che $\mathcal{A}$ è un ricoprimento di X esistono $A_1, A_2, \dots A_n$ aperti tali che $x_i \in A_i$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, dunque*

$$X = A \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

   cioè $\mathcal{A}$ possiede un sottoricoprimento finito.

4. *$(\mathbb{R}^n, \vartheta_e)$ non è compatto $\forall n \geq 1$ infatti posto $\mathcal{A} = \{S(O, n) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, cioè l'insieme formato dalle sfere aperte di centro l'origine e raggio n, esso è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^n$, supponiamo che possieda un sottoricoprimento finito $\mathcal{B}$, consideriamo allora il massimo dei raggi delle sfere di $\mathcal{B}$, diciamo r allora se consideriamo un punto P che ha distanza maggiore di r dall'origine esso non appartiene a $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ arrivando così a un assurdo, dunque $\mathbb{R}^n$ non è compatto.*

Osservazione 4.2.4. *Se uno spazio topologico (X, ϑ) non è compatto, allora non lo è nemmeno ogni spazio topologico (X, ϑ') tale che $\vartheta \subseteq \vartheta'$, infatti se è possibile trovare un ricoprimento aperto su (X, ϑ) che non possiede nessun sottoricoprimento finito allora dato che esso è anche un ricoprimento aperto di X con la topologia ϑ' poiché ogni aperto in ϑ è anche aperto in ϑ', (X, ϑ') non è compatto.*

Questa osservazione prova che $(\mathbb{R}, \vartheta_s)$ non è compatto dato che, come visto nell'esempio 4.2.3, $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ non è compatto e $\vartheta_e \subseteq \vartheta_s$.

Definizione 4.2.5. *Sia X un insieme. Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X ha la **proprietà dell'intersezione finita** se ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{F}$ ha intersezione non vuota, cioè se*

$$\forall F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F} \quad \bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$$

Proposizione 4.2.6. *Uno spazio topologico (X, ϑ) è compatto se e solo se ogni famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi chiusi di X che gode della proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi chiusi. Supponiamo per assurdo che

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$$

allora si ha

$$X = X \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus F),$$

cioè la famiglia di insiemi del tipo $X \setminus F$ con $F \in \mathcal{F}$ è un ricoprimento aperto di X, e dal momento che X è compatto $\exists\, F_1, F_2, \ldots, F_n$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset,$$

il che è assurdo poiché $\mathcal{F}$ gode della proprietà dell'intersezione finita.
$\Leftarrow$ Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X. Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ formata dagli insiemi del tipo $X \setminus A$ con $A \in \mathcal{A}$. Essa è una famiglia di sottoinsiemi chiusi; inoltre, dato che $\mathcal{A}$ è un ricoprimento aperto di X

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A) = X \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset,$$

dunque $\mathcal{F}$ non gode della proprietà dell'intersezione finita e pertanto esistono $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tali che

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_i = X$$

ovvero abbiamo trovato un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$. Questo prova che X è compatto. $\square$

Definizione 4.2.7. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico, un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è compatto se lo è con la topologia indotta da X su Y.*

Proposizione 4.2.8. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è compatto se e solo se per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti tale che $Y \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ esistono $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tali che $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti tale che $Y \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ formata dagli insiemi del tipo $Y \cap A$ con $A \in \mathcal{A}$, allora

$$Y = Y \cap \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (Y \cap A) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$$

cioè $\mathcal{B}$ è un ricoprimento aperto (nella topologia indotta) di Y, dal momento che Y è compatto $\exists B_1, B_2, \ldots, B_n$ tali che

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (Y \cap A_i) = Y \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$\Leftarrow$ Sia $\mathcal{B}$ un ricoprimento aperto (nella topologia indotta) di Y allora per ogni $B \in \mathcal{B}$ esiste un aperto A di X tale che $B = Y \cap A$, sia $\mathcal{A}$ la famiglia formata da tali aperti, allora

$$Y = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (Y \cap A) = Y \cap \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow Y \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$

per ipotesi esistono $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow Y = Y \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (Y \cap A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

cioè abbiamo trovato un sottoricoprimento finito di $\mathcal{B}$, questo prova che Y è compatto. $\square$

Teorema 4.2.9. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico compatto e sia $Y \subseteq X$ chiuso allora Y è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti tali che $Y \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, consideriamo il ricoprimento aperto di X:

$$X = X \setminus Y \cup \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$

dal momento che X è compatto esistono $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che

$$X = X \setminus Y \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

pertanto, per la 4.2.8, Y è compatto. $\square$

Proposizione 4.2.10. *Siano $(X, \vartheta), (Y, \vartheta')$ due spazio topologici e $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva allora se X è compatto lo è anche Y.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di Y, allora

$$Y = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \Rightarrow X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A)$$

dato che X è compatto esistono $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i) \Rightarrow Y = f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(A_i)) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

(i due fatti $f(f^{-1}(A)) = A$, $Y = f(X)$ sono verificati poiché f è suriettiva) abbiamo trovato dunque un sottoricoprimento finito di Y, questo prova che Y è compatto. $\square$

Corollario 4.2.11. *Il quoziente di uno spazio compatto è compatto.*

Proposizione 4.2.12. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico T_2 e $Z \subseteq X$ un sottoinsieme compatto allora per ogni $x \in X \setminus Z$ esistono due aperti U, V tali che $x \in U$, $Z \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $x \in X \setminus Z$ e $z \in Z$ allora esistono due aperti U_z, V_z tali che $x \in U_z$, $z \in V_z$ e $U_z \cap V_z = \emptyset$, quindi si ha $Z \subseteq \bigcup_{z \in Z} V_z$, da cui per la 4.2.8 esistono $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tali che $Z \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{z_i} = V$, posto $U = \bigcap_{i=1}^n U_{z_i} \neq \emptyset$, si ha $x \in U$, $Z \subseteq V$, inoltre $U \cap V = \emptyset$ infatti se per assurdo $y \in U \cap V$, allora $y \in V$ e $y \in U$ dunque $\exists\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $y \in V_{z_i}$, da cui si avrebbe $y \in U_{z_i} \cap V_{z_i}$ che è assurdo poiché $U_z \cap V_z = \emptyset$ per ogni $z \in Z$. $\square$

Corollario 4.2.13. *Sia (X, ϑ) uno spazio topologico T_2 e $Z \subseteq X$ compatto allora Z è chiuso.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in X \setminus Z$ esiste un aperto U tale che $x \in U$ e $U \cap Z = \emptyset$ ma dato che U è un intorno di x allora $x \notin \overline{Z}$, cioè $Z = \overline{Z}$. $\square$

Corollario 4.2.14. *Uno spazio topologico compatto di Hausdorff è normale.*

Dimostrazione. Sia (X, ϑ) uno spazio topologico compatto T_2 e siano F, G due insiemi chiusi, quindi compatti (4.2.9), e disgiunti. Per la proposizione 4.2.12 per ogni $x \in G \subseteq X \setminus F$ esistono due aperti U_x, V_x tali che $F \subseteq U_x$, $x \in V_x$ con $U_x \cap V_x = \emptyset$, si ha $G \subseteq \bigcup_{x \in G} V_x$, è una famiglia di aperti contenenti G che è un insieme compatto quindi per la 4.2.8 esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ tali che $G \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$, posto allora $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ abbiamo trovato due aperti tali che $F \subseteq U$, $G \subseteq V$, inoltre $U \cap V = \emptyset$, infatti se per assurdo $y \in U \cap V$, allora $y \in U$ e $y \in V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ dunque $\exists\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $y \in V_{x_i}$, da cui si avrebbe $y \in U_{x_i} \cap V_{x_i}$ il che è assurdo poiché $U_x \cap V_x = \emptyset$ per ogni $x \in G$. $\square$

Teorema 4.2.15. *In $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ una famiglia di aperti tali che $[a, b] \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ e sia

$$A = \left\{ x \in [a, b] : \exists\, U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U} : [a, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\} \subseteq [a, b]$$

cioè l'insieme formato da tutti i punti $x \in [a, b]$ tali che l'intervallo $[a, x]$ sia contenuto nell'unione di aperti di una sottofamiglia finita di $\mathcal{U}$. L'insieme A non è vuoto poiché contiene almeno il punto a, sia allora $L = \sup A$, osserviamo subito che $L \leq b$ poiché b è un maggiorante per A.
Per assurdo supponiamo che $L < b$, poiché $L \in [a, b] \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ allora esiste un aperto $U \in \mathcal{U}$ contenente L, quindi esiste $\epsilon > 0$ tale che $]L - \epsilon, L + \epsilon[\subseteq U$, per una proprietà dell'estremo superiore $\exists\, c \in A$ con $L - \epsilon < c \leq L < L - \epsilon$, dunque $\exists\, U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tali che $[a, c] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$, da cui

$$\left[a, L + \frac{\epsilon}{2}\right] \subseteq \; [a, c] \cup]L - \epsilon, L + \epsilon[\subseteq U \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

segue $L+\frac{\epsilon}{2} \in A$ con $L+\frac{\epsilon}{2} > L$ che è assurdo quindi dev'essere $L = b$. In maniera analoga a prima dimostriamo che $b \in A$. Dato che $[a, b] \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ allora esiste un aperto $U \in \mathcal{U}$ che contiene b, quindi esiste $\epsilon > 0$ tale che $]b-\epsilon, b+\epsilon[\subseteq U$, come prima $\exists\, c \in A$ tale che $b - \epsilon < c \leq b$, dunque $\exists\, U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tali che $[a, c] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, da cui

$$[a, b] \subseteq\ [a, c] \cup]b-\epsilon, b+\epsilon[\subseteq U \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

questo prova che $A = [a, b]$, quindi per la 4.2.8 $[a, b]$ è compatto. □

Corollario 4.2.16. *In $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Dato che X è compatto e $(\mathbb{R}, \vartheta_e)$ è T_2 allora X è anche chiuso (4.2.13) inoltre $X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[$ allora, per la 4.2.8, $\exists\, n_1, n_2, \ldots, n_k$ tali che $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}]-n_i, n_i[$, sia $m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ si ha $X \subseteq]-m, m[$ quindi X è limitato.
$\Leftarrow$ Poiché X è limitato allora $\exists\, a, b \in \mathbb{R} : X \subseteq [a, b]$ che è compatto, inoltre X è chiuso nella topologia indotta su $[a, b]$ ($X = X \cap [a, b]$), da ciò segue che X è compatto (4.2.9). □

Teorema 4.2.17. (Teorema di Weierstrass)
Sia (X, ϑ) uno spazio topologico compatto, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua ($\mathbb{R}$ con la topologia euclidea) allora f possiede massimo e minimo.

Dimostrazione. $f(X)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ quindi è chiuso e limitato, posto $L = \sup f(X)$, per il lemma 4.1.4, $L \in f(X)$, dunque $L = \max f(X)$ (analogo per il minimo). □

Osserviamo che se lo spazio X è un sottospazio compatto di $\mathbb{R}$, quindi un sottoinsieme chiuso e limitato, il teorema coincide con quello usualmente enunciato nei corsi di analisi.

Proposizione 4.2.18. *Siano $(X, \vartheta), (Y, \vartheta')$ due spazi topologici con X compatto e Y di Hausdorff e sia $f : X \to Y$ una funzione continua, allora f è chiusa.*

Dimostrazione. Sia F un insieme chiuso di X quindi F è anche compatto (4.2.9), allora $f(F)$ è un insieme compatto di Y (4.2.10) quindi è chiuso dal momento che Y è T_2 (4.2.13). □

Corollario 4.2.19. *Siano $(X, \vartheta), (Y, \vartheta')$ due spazi topologici con X compatto e Y di Hausdorff e sia $f : X \to Y$ una funzione continua e biunivoca allora f è un omeomorfismo.*
(In questo caso anche Y sarà compatto e X di Hausdorff).

Teorema 4.2.20. (Teorema di Bolzano-Weierstrass)
Sia (X, ϑ) uno spazio topologico compatto e $A \subseteq X$ un sottoinsieme con infiniti punti allora A ha almeno un punto di accumulazione.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che A non abbia punti di accumulazione quindi per ogni $x \in X$ esiste un suo intorno aperto U_x tale che $A \cap U_x \subseteq \{x\}$, allora $X = \bigcup_{x\in X} U_x$. Per ipotesi X è compatto quindi $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \Rightarrow A = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap U_{x_i} \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

contro il fatto che A è infinito arrivando a un assurdo. □

Teorema 4.2.21. *Il prodotto di due spazi topologici compatti è compatto.*

Dimostrazione. Siano $(X, \vartheta), (Y, \vartheta')$ due spazi topologici compatti e $\mathcal{A}'$ un ricoprimento aperto dello spazio topologico $(X \times Y, \vartheta_p)$, ogni aperto $A' \in \mathcal{A}'$ può essere scritto come unione di aperti del tipo $U \times V$ con $U \in \vartheta$ e $V \in \vartheta'$ indichiamo con $\mathcal{A}$ la famiglia di aperti di questo tipo, otteniamo

$$\mathcal{A} = \{U_i \times V_i : i \in I\}, \quad X \times Y = \bigcup_{A'\in\mathcal{A}'} A' = \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i$$

come osservato in precedenza (3.1.20) per ogni $x \in X$ l'insieme $\{x\} \times Y$ è omeomorfo a Y quindi è compatto, inoltre $\{x\} \times Y \subseteq X \times Y = \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i$ quindi (4.2.8) esiste un sottoinsieme finito $I_x \subseteq I$ tale che

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i\in I_x} U_i \times V_i$$

inoltre possiamo supporre che $x \in U_i$ per ogni $i \in I_x$ quindi $x \in \bigcap_{i\in I_x} U_i = T_x$. L'insieme T_x è aperto perché intersezione finita di aperti quindi la famiglia $\{T_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X che, analogamente ad Y, è compatto pertanto esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tali che $X = \bigcup_{j=1}^{n} T_{x_j}$. Posto $S = \bigcup_{j=1}^{n} I_{x_j}$ allora $\mathcal{B} = \{U_i \times V_i : i \in S\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$.
Infatti, sia $(x, y) \in X \times Y$ si ha $x \in X = \bigcup_{j=1}^{n} T_{x_j}$ quindi $\exists\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $x \in T_{x_j}$ pertanto $x \in U_i$ per ogni $i \in I_{x_j} \subseteq S$, inoltre

$$\{x_j\} \times Y \subseteq \bigcup_{i\in I_{x_j}} U_i \times V_i$$

quindi $y \in Y \subseteq \bigcup_{i\in I_{x_j}} V_i$ pertanto esisterà un certo $k \in I_{x_j}$ tale che $y \in V_k$ ovvero $(x, y) \in U_k \times V_k \subseteq \bigcup_{i\in S} U_i \times V_i$.

□

Proposizione 4.2.22. *In* $(\mathbb{R}^n, \vartheta_e)$ *con* $n \geq 1$ *tutti e soli i sottoinsiemi compatti sono chiusi e limitati.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto allora dato che $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(O, n)$ allora per la 4.2.8 $\exists\, n_1, n_2, \ldots, n_k$ tali che $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} S(O, n_i)$, posto infine $\overline{n} = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ si ha $X \subseteq S(O, \overline{n})$ quindi X è limitato e, dal momento che $\mathbb{R}^n$ è T_2, per la 4.2.12 X è anche chiuso.
$\Leftarrow$ Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato allora esistono $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tali che $X \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times, \ldots, \times [a_n, b_n] = A$. Osserviamo che A è un insieme compatto, perché prodotto di spazi compatti, inoltre è chiuso quindi X è chiuso nella topologia indotta da A pertanto X è compatto (4.2.9). □

Diamo adesso la definizione di piano proiettivo.

Definizione 4.2.23. *In $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ definiamo la seguente relazione:*

$$(x_1, y_1, z_1)\mathcal{R}(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \ (x_1, y_1, z_1) = \lambda \cdot (x_2, y_2, z_2)$$

si verifica facilmente che essa è una relazione di equivalenza. Poniamo per definizione ***piano proiettivo*** *l'insieme quoziente rispetto alla relazione $\mathcal{R}$, esso verrà indicato col simbolo $\mathbb{P}^2$, quindi*

$$\mathbb{P}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})/\mathcal{R}$$

Consideriamo su $\mathbb{P}^2$ la topologia indotta da $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{P}^2$ la proiezione naturale che manda ogni elemento nella sua classe di equivalenza considerando su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ la topologia indotta da quella euclidea. Mostriamo che $\mathbb{P}^2$ rispetto a questa topologia è compatto.

Proposizione 4.2.24. *Lo spazio topologico $(\mathbb{P}^2, \vartheta_q(\pi))$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ la sfera unitaria e su di essa consideriamo la stessa relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ utilizzata per definire il piano proiettivo (cioè ogni punto è equivalente a se stesso e al suo simmetrico rispetto all'origine). Siano adesso $\pi : \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\} \to \mathbb{P}^2$ e $\pi' : S^2 \to S^2/\mathcal{R}$ le due proiezioni naturali che mandano ogni elemento nella propria classe di equivalenza, l'inclusione canonica $i : S^2 \to \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ cioè tale che $i(x,y,z) = (x,y,z)$ e infine $i_* : S^2/\mathcal{R} \to \mathbb{P}^2$ un'applicazione tale che $i_*([(x,y,z)]_{\mathcal{R}}) = [(x,y,z)]_{\mathcal{R}}$. Consideriamo in $\mathbb{P}^2$ la topologia indotta da π (ricordando che $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ha la topologia indotta da quella euclidea) e in $S^2/\mathcal{R}$ la topologia indotta da π' (analogamente S^2 ha la topologia indotta da quella euclidea), dimostriamo che i_* rispetto a queste topologie è un omeomorfismo, cioè che $S^2/\mathcal{R} \simeq \mathbb{P}^2$.

$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^3 \setminus O \arrow[d, "\pi'"] \\
S^2/\mathcal{R} \arrow[r, "i_*"] & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

i_* è iniettiva: se due classi di equivalenza di S^2 hanno la stessa immagine i due rappresentanti hanno coordinate proporzionali cioè le classi di equivalenza di S^2 sono uguali.
i_* è suriettiva: $i_*\left(\left[\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]_{\mathcal{R}}\right) = [(x,y,z)]_{\mathcal{R}}$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
i_* è continua: $i_* \circ \pi = \pi' \circ i$ è continua perché composta da π' e i che sono continue, π è una funzione quoziente quindi per la proposizione 3.2.3 i_* è continua. $S^2/\mathcal{R}$ è compatto per 4.2.11 dal momento che S^2 è compatto perché è un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^3$.
$\mathbb{P}^2$ è T_2, infatti consideriamo due classi di equivalenza di $\mathbb{P}^2$ esse in $\mathbb{R}^3 \setminus O$ rappresentano due rette passanti per O e per uno dei rappresentanti, circondiamo le due rette con due coni solidi disgiunti formati da rette passanti per O e privati del bordo, si può verificare che questi sono due aperti, pertanto $\mathbb{P}^2$ è T_2.
Riassumendo $i_* : S^2/\mathcal{R} \to \mathbb{P}^2$ è una funzione biiettiva, continua, $S^2/\mathcal{R}$ è compatto, $\mathbb{P}^2$ è T_2 dunque per 4.2.19 i_* risulterà essere un omeomorfismo, quindi $\mathbb{P}^2$ è compatto. $\square$