Complementi di Analisi Matematica

Alessio Borzì

2 giugno 2020

Indice

Capitolo 1

Analisi Complessa

1.1 Prime definizioni

(Definizione di numeri complessi, somma e prodotto di complessi... se mai avrò la voglia lo faccio)

Definizione 1.1.1. *Sia $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$, definiamo*

1. ***Modulo** di z il numero reale*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R},$$

(continua a valere la disuguaglianza triangolare)

2. ***Complesso coniugato** di z come il numero complesso $\bar{z} = x - iy$*

3. *Rispettivamente parte **reale** e **coefficiente della parte immaginaria** di z*

   - $\Re(z) = x$
   - $\Im(z) = y$

4. ***Argomento** di $z \neq 0$ pari all'angolo formato dal segmento OP con il semiasse positivo delle ascisse una volta individuato il numero complesso $z = x + iy$ con il punto $P = (x, y)$ nel piano di Gauss. Osserviamo che se θ è un argomento di z allora lo saranno anche tutti gli angoli del tipo $\theta + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Chiamiamo **argomento principale** quell'angolo $\theta \in [-\pi, \pi[$ che è argomento di z e sarà indicato con $\arg(z)$.*

Osserviamo che ogni numero complesso $z = x + iy \neq 0$ può essere scritto nella seguente forma

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

dove $\rho = |z|$ e $\theta = \arg(z)$. Questa scrittura è detta **forma trigonometrica** del numero complesso z.

Poniamo per definizione[1]

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$$

(parte su formule di DeMoivre, Radici n-esime, andrebbe fatta meglio ma non ho voglia)

1.1.1 Funzoini complesse di una variabile reale

Definizione 1.1.2. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Una* ***funzione complessa di variabile reale*** *è una funzione del tipo $f : X \to \mathbb{C}$.*
Ponendo $u, v : X \to \mathbb{R}$ con $u(x) = \Re(f(x)), v(x) = \Im(f(x))$ possiamo scrivere $f(x) = u(x) + iv(x)$ riconducendoci al caso reale, cioè allo studio di funzioni reali di variabile reale.

Esempio 1.1.3. *La circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio $R > 0$ ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R\cos t \\ y(t) = y_0 + R\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Queste equazioni possono essere riscritte in maniera più compatta utilizzando la funzione complessa di variabile reale così deifinita:

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \quad f(t) = z_0 + Re^{it} \quad \forall t \in [0, 2\pi], z_0 = (x_0, y_0)$$

1.1.2 Funzioni complesse di variabile complessa

Definizione 1.1.4. *Sia $X \subseteq \mathbb{C}$ un insieme non vuoto. Una* ***funzione complessa di variabile complessa*** *è una funzione del tipo $f : X \to \mathbb{C}$.*
Ponendo $z = (x, y)$ e considerando che $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ quindi $f(z) = f(x, y)$, poniamo

$$u, v : X \to \mathbb{R} \qquad \begin{array}{l} u(x,y) = \Re(f(x,y)) \\ v(x,y) = \Im(f(x,y)) \end{array}$$

così facendo possiamo scrivere $f(x, y) = u(x, y) + i\,v(x, y)$.

Definizione 1.1.5. *Definiamo alcune funzioni complesse di variabile complessa.*

1. *L'**esponenziale complesso**: se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ allora*

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

   (si verifica facilmente che questa definizione è consistente con quella precedentemente data di esponenziale di numero immaginario puro)

[1]Invece di utilizzare questa definizione molto artificiosa potremmo definire l'esponenziale complesso attraverso lo sviluppo in serie dell'esponenziale reale e dimostrare che la serie di numeri complessi così formata è convergente qualunque sia z e dimostrare sempre utilizzando gli sviluppi in serie la formula di Eulero per i numeri complessi, che coincide con la definizione data di esponenziale di un numero immaginario puro.

2. *Le funzioni* ***seno*** *e* ***coseno complesse****: se $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ allora*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Notiamo che le funzioni seno e coseno complesse non sono più funzioni limitate, infatti ad esempio

$$\lim_{y \to +\infty} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) \right| = +\infty.$$

(una formula analoga può essere trovata con coseno)

3. *Sia $z = (x,y) \in \mathbb{C} \setminus \{\underline{0}\}$, chiamiamo* ***logaritmo*** *di z ogni numero complesso w per cui $e^w = z$. Così facendo, se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = a + ib$ allora*

$$\begin{array}{rcl} e^w & = & e^a(\cos b + i \sin b) \\ z & = & \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \end{array} \quad e^w = z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \log(\rho) \\ b = \theta + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ciò prova che al variare di $k \in \mathbb{Z}$ esistono infiniti logaritmi di z. Se si sceglie $k \in \mathbb{Z}$ in modo che θ sia l'argomento principale di z allora il numero complesso $w = \log(\rho) + i\theta$ si chiama ***logaritmo principale*** *di z, e si scrive:*

$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\underline{0}\}.$$

Le componenti $u(x,y)$ e $v(x,y)$ della funzione $\log : \mathbb{C} \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{C}$ risulteranno

$$u(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad v(x,y) = \begin{cases} -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0, y \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 < y \end{cases}$$

1.2 Funzioni olomorfe

Definizione 1.2.1. *Sia $X \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto, $z_0 \in X$ e $f : X \to \mathbb{C}$. Diremo che f è* ***derivabile*** *in z_0 se*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = l \in \mathbb{C}.$$

In tal caso l si chiama ***derivata*** *prima di f in z_0 e si scrive $f'(z_0) = l$.*

Definizione 1.2.2. *Se f è derivabile in ogni punto $z_0 \in X$ allora diciamo che f è* ***olomorfa*** *in X e scriviamo $f \in \mathcal{H}(X)$.*

Teorema 1.2.3. *Sia $X \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto, $z_0 \in X$ e $f : X \to \mathbb{C}$. Poniamo $u(x,y) = \Re(f(x,y)), v(x,y) = \Im(f(x,y))$. Sono equivalenti:*

1. *f è derivabile in z_0*

2. u, v sono differenziabili in $z_0 = (x_0, y_0)$ e risulta

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

*(**Condizioni di olomorfia** o di **Cauchy-Rienmann**)*

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Osserviamo che

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to \underline{0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

per ipotesi abbiamo

$$\lim_{h \to \underline{0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = l \in \mathbb{C}.$$

Sia $l = a + ib$ e $\delta > 0$ opportuno, poniamo

$$\sigma(h) = \begin{cases} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - l & h \neq \underline{0}\,, |h| < \delta \\ 0 & h = \underline{0} \end{cases}$$

avremo quindi che $\lim_{h \to \underline{0}} \sigma(h) = \underline{0}$, inoltre

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = (\sigma(h) + l)h \quad \text{per } |h| < \delta,$$

se $h = (\alpha, \beta)$ allora, ponendo

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) \\ \Delta v &= v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0), \end{aligned}$$

si ha

$$\Delta u + i\Delta v = \sigma(h)h + (a + ib)(\alpha + i\beta)$$

da cui

$$(\Delta u - (a\alpha - b\beta)) + i(\Delta v - (b\alpha + a\beta)) = \sigma(h)h$$

se $h \neq \underline{0}, |h| < \delta$, dividendo per $|h|$

$$\frac{\Delta u - (a\alpha - b\beta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + i\frac{\Delta v - (b\alpha + a\beta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sigma(h)\frac{h}{|h|},$$

per $h \to \underline{0}$, cioè $(\alpha, \beta) \to (0, 0)$ abbiamo

$$\lim_{h \to \underline{0}} \sigma(h)\frac{h}{|h|} = \underline{0},$$

cioè

$$\lim_{(\alpha,\beta) \to (0,0)} \frac{\Delta u - (a\alpha - b\beta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 0, \qquad \lim_{(\alpha,\beta) \to (0,0)} \frac{\Delta v - (b\alpha + a\beta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 0.$$

Ne segue che u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) e inoltre

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = a \\ u_y(x_0, y_0) = -b \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(x_0, y_0) = b \\ v_y(x_0, y_0) = -a \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

$\Leftarrow$ Il viceversa può essere dimostrato in maniera analoga a quanto fatto finora.

$\square$

Osservazione 1.2.4. *Se* $f'(z_0) = a + ib$ *allora*

$$\begin{aligned} a &= u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ b &= -u_y(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Ne segue che

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) =$$

$$= -i(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0))$$

da cui ricaviamo $f_y(x_0, y_0) = if_x(x_0, y_0)$

1.3 Integrazione di funzioni complesse

1.3.1 Integrazione di funzioni complesse di variabile reale

Definizione 1.3.1. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *continua. Se* $f(x) = u(x) + iv(x)$ *allora poniamo per definizione*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx$$

1.3.2 Integrazione di funzioni complesse di variabile complessa

Definizione 1.3.2. *Sia* $A \subseteq \mathbb{C}$ *un insieme aperto non vuoto,* $f : A \to \mathbb{C}$ *una funzione continua in* A*,* γ *una curva piana generalmente regolare con sostegno contenuto in* A*. Se* $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ *allora poniamo*

$$\int_{+\gamma} f(z)dz = \int_{+\gamma} udx - vdy + i\int_{+\gamma} vdx + udy,$$

dove a secondo membro intendiamo l'integrale curvilineo di seconda specie delle due forme differeziali $udx - vdy, vdx + udy$*. Ricordando la definizione di integrale di seconda specie, se* γ *ha equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

posto $z(t) = x(t) + iy(t)$ *possiamo scrivere*

$$\int_{+\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt$$

essendo

$$u \cdot x' - v \cdot y' + i(v \cdot x' + u \cdot y') = (u + iv) \cdot (x' + iy')$$

Osservazione 1.3.3. *Per chiarire la definizione precedente potremmo, in maniera del tutto informale, considerare $dz = dx + idy$, quindi, essendo $f = u + iv$, avremo*

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = udx - vdy + i(vdx + udy)$$

Esempio 1.3.4. *Sia $z_0 \in \mathbb{C}, A = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ e $f : A \to \mathbb{C}$ con $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ quindi $f \in \mathcal{H}(A)$. Consideriamo $R > 0$ un numero reale positivo e la curva $\gamma = \partial B(z_0, R)$. Vogliamo calcolare l'integrale di f sulla curva γ percorsa in verso positivo (antiorario). γ ha equazioni parametriche $z(t) = z_0 + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Risulta quindi*

$$\int_{+\gamma} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z(t))z'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{z_0 + Re^{it} - z_0}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

Per l'integrale di funzioni complesse di variabile complessa valgono le seguenti proprietà:

1. $\displaystyle\int af + bg = a\int f + b\int g$ **(Linearità)**

2. $\displaystyle\int_{+\gamma\cup+\eta} f(z)dz = \int_{+\gamma} f(z)dz + \int_{+\eta} f(z)dz$ **(Additività)**

3. $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{+\gamma} f(z)dz$

4. $\displaystyle\left|\int_{+\gamma} f(z)dz\right| \leq l_\gamma \cdot \max_{z\in\gamma} |f(z)|$ **(Darboux)**

   dove l_γ è la lunghezza della curva γ, cioè $l_\gamma = \displaystyle\int_a^b |z'(t)|dt$. Questa proprità è di facile dimostrazione, infatti si ha

   $$\left|\int_{+\gamma} f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t))|\cdot|z'(t)|dt \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)|\cdot \int_a^b |z'(t)|dt$$

   nell'ultima disuguaglianza abbiamo utlizzato il teorema di Weierstrass in quanto f è continua e la curva γ è un compatto di $\mathbb{C}$.

Riportiamo un importante risultato sugli integrali di seconda specie.

Teorema 1.3.5. (Gauss-Green)

Hp) $T \subseteq \mathbb{R}^2$ *domninio regolare,* $f, g : T \to \mathbb{R}$ *con* $f, g \in C^1(T)$

Ts) $\displaystyle\int_{+\partial T} fdx + gdy = \iint_T (g_x - f_y)dxdy$

Teorema 1.3.6. (Cauchy-Goursat)

Hp) $A \subseteq \mathbb{C}$ *aperto,* $T \subseteq A$ *dominio regolare e* $f : A \to \mathbb{C}$ *con* $f \in \mathcal{H}(A)$

Ts) $\displaystyle\int_{+\partial T} f(z)dz = 0$

(con queste sole ipotesi la dimostrazione, dovuta a Goursat, risulta molto lunga, dimostreremo il teorema con l'ipotesi aggiuntiva che se $f = u + iv$ allora u e v siano di classe C^1 in modo da poter utilizzare il teorema di Gauss-Green)

Dimostrazione. Abbiamo che $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u, v \in C^1(A)$. Ricordando che per le condizioni di olomorfia abbiamo $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, quindi per definizione e in base al teorema di Guass Green abbiamo

$$\int_{+\partial T} f(z)dz = \int_{+\partial T} udx - vdy + i\int_{+\partial T} vdx + udy =$$

$$= \iint_T -(v_x + u_y)dxdy + i\iint_T (u_x - v_y)dxdy = 0$$

□

Esempio 1.3.7. (Integrali di Fresnell) *Vogliamo dimostrare che*

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

É possibile dimostrare, utilizzando il teorema di Liouville, che questi integrali non sono calcolabili elementarmente.
Mostriamo che essi esistono e sono finiti. Applichiamo la formula di integrazione per parti al seguente integrale

$$\int_1^p \frac{1}{t^2}\sin(t^2)dt = \left[-\frac{1}{t}\sin(t^2)\right]_1^p - \int_1^p -\frac{1}{t}2t\cos(t^2)dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{t}\sin(t^2)\right]_1^p + 2\int_1^p \cos(t^2)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^p \cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{t}\sin(t^2)\right]_1^p + \int_1^p \frac{1}{t^2}\sin(t^2)dt\right)$$

si può verificare che per $p \to +\infty$ il secondo membro dell'ultima uguaglianza converge. Pertanto, essendo

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \int_0^1 \cos(t^2)dt + \lim_{p\to+\infty}\int_1^p \cos(t^2)dt$$

abbiamo dimostrato che l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ *esiste ed è finito (dimostrazione analoga può essere fatta per* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$*).*
Adesso calcoliamo gli integrali di Fresnell considerando la funzione $f(z) = e^{-z^2}$ la quale è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$. Consideriamo il dominio regolare T consistente in un settore

circolare di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ e raggio $R > 0$. La frontiera di T può essere quindi parametrizzata in tre pezzi:

$$\begin{array}{lll} T_1: & z(t) = t & t \in [0, R] \\ T_2: & z(t) = Re^{it} & t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ T_3: & z(t) = te^{i\frac{\pi}{4}} & t \in [0, R] \end{array}$$

in base al teorema di Cauchy-Goursat abbiamo

$$\int_{+\partial T} f(z)dz = \int_{+\partial T_1} f(z)dz + \int_{+\partial T_2} f(z)dz + \int_{-\partial T_3} f(z)dz =$$

$$= \int_0^R e^{-t^2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{i2t}} Rie^{it} dt - \int_0^R e^{-t^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}} dt = 0$$

per $R \to +\infty$ abbiamo

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ponendo

$$A = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt, B = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$$

si ha

$$(1+i)(A - iB) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$A + B + i(A - B) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Corollario 1.3.8. (1^a formula integrale di Cauchy) *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto non vuoto, $T \subseteq A$ un dominio regolare, $z_0 \in \mathring{T}$. Se $f : A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa in A allora*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial T} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Dimostrazione. Sia T a $p+1$ contorni

$$\partial T = C_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{p} C_i \right)$$

siccome $z_0 \in \mathring{T}$ allora $d_k = d(z_0, C_k) > 0 \; \forall k \in \{0, \dots, p\}$. Sia quindi $0 < r < \min_{0 \le k \le p} d_k$, allora $\overline{B(z_0, r)} \subseteq T$, $T' = T \setminus B(z_0, r)$ è un dominio regolare a $p+2$ contorni. La funzione $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ è olomorfa in T' pertanto per il teorema di Cauchy-Goursat abbiamo

$$\int_{+\partial T'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

cioè

$$\int_{+\partial T} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{+\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{1.1}$$

quest'ultima uguaglianza vale $\forall r > 0$. Mostriamo che per $r \to 0^+$ il secondo termine dell'ultima uguaglianza tende a $2\pi i f(z_0)$. Infatti, essendo

$$2\pi i = \int_{+\partial B(z_0,r)} \frac{1}{z-z_0}dz$$

risulta

$$\left|\int_{+\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0} - 2\pi i f(z_0)\right| = \left|\int_{+\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|.$$

Osserviamo adesso che essendo $f \in \mathcal{H}(A)$ essa è anche continua, quindi $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 :$ $\forall z \in B(z_0, \delta)$ risulta $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2\pi}$. Dalla precedente uguaglianza, utilizzando la proprietà di Darboux otteniamo

$$\left|\int_{+\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \leq \max_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} 2\pi r < \frac{\epsilon}{2\pi} 2\pi = \epsilon$$

quindi per qualunque $r < \delta$ otteniamo

$$\left|\int_{+\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0} - 2\pi i f(z_0)\right| < \epsilon$$

pertanto considerando la (1.1) per $r \to 0^+$ abbiamo

$$\int_{+\partial T} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

□

Teorema 1.3.9. (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio* $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{C}[z]$ *a coefficienti in* $\mathbb{C}$, *con* $a_0 \neq \underline{0}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ *ha almeno una radice in* $\mathbb{C}$.

$1^{\underline{a}}$ *Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $p(z) \neq \underline{0} \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ è definita e olomorfa in tutto $\mathbb{C}$. Sia $R > 0$, per la $1^{\underline{a}}$ formula integrale di Cauchy abbiamo

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(\underline{0},R)} \frac{f(z)}{z}dz \quad \forall R > 0.$$

Per la proprietà di Darboux si ha

$$\left|\int_{+\partial B(\underline{0},R)} \frac{f(z)}{z}dz\right| \leq 2\pi R \max_{|z|=R} \left|\frac{f(z)}{z}\right| = 2\pi \max_{|z|=R} \left|\frac{1}{p(z)}\right|.$$

Osserviamo adesso che

$$p(z) = z^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right)$$

da cui

$$|p(z)| = |z|^n \cdot \left| a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} \right| \geq |z|^n \cdot \left(|a_0| - \left| \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} \right| \right) \geq$$

$$\geq |z|^n \cdot \left(|a_0| - \left| \frac{a_1}{z} \right| - \left| \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} \right| \right) \geq \ldots \geq |z|^n \cdot \left(|a_0| - \left(\left| \frac{a_1}{z} \right| + \left| \frac{a_2}{z^2} \right| + \ldots + \left| \frac{a_n}{z^n} \right| \right) \right)$$

quindi per $|z| = R$ otteniamo

$$|p(z)| \geq R^n \cdot \left(|a_0| - \left(\frac{|a_1|}{R} + \frac{|a_2|}{R^2} + \ldots + \frac{|a_n|}{R^n} \right) \right),$$

pertanto per $R \to +\infty$ abbiamo $|p(z)| \to +\infty$ quindi $\frac{1}{|p(z)|} \to 0$. Dunque, per quanto scritto prima avremo che per $R \to +\infty$

$$|f(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{+\partial \overline{B(0,R)}} \frac{f(z)}{z} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \max_{|z|=R} \left| \frac{1}{p(z)} \right| \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} = 0$$

che è assurdo. $\square$

Corollario 1.3.10. **($2^{\underline{a}}$ formula integrale di Cauchy)** *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto non vuoto, $T \subseteq A$ un dominio regolare, $z_0 \in \mathring{T}$. Se $f : A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa in A allora*

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial T} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo che

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Dato che $z_o \in \mathring{T}$ allora $\exists \delta_0 > 0 : \overline{B(z_0, \delta_0)} \subseteq T$ (quindi $B(z_0, \delta_0) \subseteq \mathring{T}$). Per la prima formula integrale di Cauchy si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial T} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial T} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

Le formule precedenti valgono $\forall z \in B(z_0, \delta_0) \setminus \{z_0\}$. Sostituendo otteniamo

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial T} \frac{f(w)}{z - z_0} \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z_0} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial T} \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)} dw$$

da cui

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial T} \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial T} \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw$$

$\square$

Teorema 1.3.11. *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto non vuoto, $T \subseteq A$ un dominio regolare, $z_0 \in \mathring{T}$. Se $f : A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa in A allora $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists f^{(n)}(z_0)$ e risulta*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\partial T} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

(la dimostrazione, che omettiamo, si basa sul teorema di Cauchy-Goursat)

Osservazione 1.3.12. *Una immediata conseguenza del precedente teorema è che se $A \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto non vuoto e $f \in \mathcal{H}(A)$ con $f = u + iv$ allora $u, v \in C^\infty(A)$.*

Definizione 1.3.13. *Diremo che una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è* ***intera*** *se è olomorfa in $\mathbb{C}$.*

Teorema 1.3.14. (Teorema di Liouville) *Se f è una funzione intera e limitata, cioè che $\exists K > 0 : |f(z)| \leq K \quad \forall z \in \mathbb{C}$ con $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, allora f è costante.*

Dimostrazione. Basta provare che $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_1 \neq z_2$ si ha $f(z_1) = f(z_2)$. Sia $R > \max\{|z_1|, |z_2|\}$, allora $z_1, z_2 \in B(\underline{0}, R)$. Per la prima formula integrale di Cauchy abbiamo

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(\underline{0},R)} \frac{f(z)}{z - z_1} dz$$

$$f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(\underline{0},R)} \frac{f(z)}{z - z_2} dz,$$

da cui

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(\underline{0},R)} f(z) \left(\frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} \right) dz,$$

utilizzando la proprietà di Darboux

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{+\partial B(\underline{0},R)} f(z) \left(\frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} \right) dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \max_{|z|=R} |f(z)| \frac{|z_1 - z_2|}{|z - z_1||z - z_2|} \leq RK|z_1 - z_2| \max_{|z|=R} \frac{1}{|z - z_1||z - z_2|}.$$

Osserviamo che $|z - z_1| \geq |z| - |z_1|$ da cui $\frac{1}{|z - z_1|} \leq \frac{1}{|z| - |z_1|}$, quindi per quanto scritto prima abbiamo

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq RK|z_1 - z_2| \max_{|z|=R} \frac{1}{(|z| - |z_1|)(|z| - |z_2|)} =$$

$$= K|z_1 - z_2| \left(\frac{R}{(R - |z_1|)(R - |z_2|)} \right),$$

da cui per $R \to +\infty$ otteniamo $|f(z_1) - f(z_2)| \leq 0$ cioè $f(z_1) = f(z_2)$. $\square$

Teorema 1.3.15. *Se f è una funzione intera non costante allora la sua immagine $f(\mathbb{C})$ è densa in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano $w \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ tali che si abbia $B(w, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$, ciò vuol dire che

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z) - w| > r \Rightarrow \left| \frac{1}{f(z) - w} \right| < \frac{1}{r}$$

quindi, definendo la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ essa è intera e limitata, quindi per il teorema di Liouville è costante, da cui anche f sarebbe costante, contro le ipotesi. □

Osserviamo che il precedente risultato è equivalente al teorema di Liouville, in quanto quest'ultimo può essere visto come corollario del precedente teorema. Una generalizzazione di questo teorema è data dal

Teorema 1.3.16. (Piccolo teorema di Picard) *Una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ intera non costante ha come immagine $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ per qualche $z_0 \in \mathbb{C}$.*

1.4 Serie di funzioni

Definizione 1.4.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto non vuoto e $f_n : A \to \mathbb{C}$ con $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni complesse. Definiamo $\forall m \in \mathbb{N}$ la funzione*

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} f_i.$$

*Si chiama **serie di funzioni complesse** la coppia $((f_n), (S_n))$ e verrà indicata con il simbolo*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z). \tag{1.2}$$

*Diremo che la serie (1.2) **converge puntualmente [uniformemente]** in $B \subseteq A$ se (S_n) converge puntualmente [uniformemente] in B. Diremo che la serie (1.2) **converge assolutamente** in $B \subseteq A$ se la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(z)|$$

*converge puntualmente in B. Diremo che la serie (1.2) **converge totalmente** in $B \subseteq A$ se*

1. *f_n è limitata in B per ogni $n \in \mathbb{N}$,*
2. *la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{z \in B} |f_n(z)|$ è convergente.*

Ricordiamo che il teorema di Weierstrass sulle serie di funzioni ci assicura che la convergenza totale implica quella uniforme e assoluta.

Definizione 1.4.2. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ *una successione di numeri complessi e* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Si chiama* ***serie di potenze*** *di centro* z_0 *la serie di funzioni*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.3}$$

(si ponga eventualmente per convenzione $0^0 = 1$*). Consideriamo l'insieme*

$$H = \left\{ h \in \ [0,+\infty[: \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| h^n \quad \textit{sia convergente} \right\} \subseteq \mathbb{R}_0^+.$$

Osserviamo che $0 \in H \neq \emptyset$, *quindi* H *ammette l'estremo superiore*

$$r = \sup(H) \in [0,+\infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

r *è detto* ***raggio di convergenza*** *della serie* (1.3).

Teorema 1.4.3. *Se* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *è una serie di potenze con raggio di convergenza* r, *allora*

1. $r = 0$
   La serie converge solo per $z = z_0$.

2. $0 < r < +\infty$
   La serie converge assolutamente in $B(z_0, r)$, *non converge in* $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0, r)}$, *mentre non possiamo dire nulla sul comportamento della serie in* $\partial B(z_0, r)$.
   Inoltre in ogni insieme chiuso e limitato contenuto in $B(z_0, r)$ *la serie converge totalmente.*

3. $r = +\infty$
   La serie converge assolutamente in $\mathbb{C}$.
   Inoltre in ogni insieme chiuso e limitato la serie converge totalmente

Definizione 1.4.4. *Siano* $A \subseteq \mathbb{C}$ *aperto e non vuoto,* $f : A \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in A$. *Diremo che* f *è* ***analitica*** *in* z_0 *se esistono* $\delta > 0$ *e* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ *tali che* $B(z_0, \delta) \subseteq A$ *e*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, \delta).$$

Diremo che f *è* ***analitica*** *in* $B \subseteq A$ *se è analitica in ogni punto* $z \in B$ *(quando non specifichiamo l'insieme in cui* f *è analitica sottointendiamo in tutto il suo dominio).*

Sappiamo che una funzione reale analitica è di classe C^∞, ma non vale il viceversa:

$$f \text{ è analitica in } \mathbb{R} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Il prossimo teorema mostra come nel caso delle funzioni complesse in un certo senso valga anche il viceversa.

Teorema 1.4.5. *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto non vuoto e $f : A \to \mathbb{C}$. Si ha*

$$f \in \mathcal{H}(A) \iff f \text{ è analitica in } A$$

Dimostrazione.

- $\Rightarrow$ Siano $z_0 \in A$ e $\delta > 0 : \overline{B(z_0, \delta)} \subseteq A$. Dato che $f \in \mathcal{H}(A)$ per la prima formula integrale di Cauchy si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(z,\rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(z,\rho)} \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} dw.$$

  Avendo scelto $\rho \in \mathbb{R}^+$ tale che $|z - z_0| < \rho < \delta$ in modo che risulti $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$. Adesso utilizzando la serie geometrica

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

  ponendo $q = \frac{z-z_0}{w-z_0}$ (il fatto che $|q| < 1$ ci assicura che la serie sia convergente) otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(z,\rho)} \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(z,\rho)} \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(z,\rho)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n$$

  dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il teorema di integrazione per serie. Dunque ponendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(z,\rho)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

  possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

  Osserviamo infine che dalle formule di integrazione per funzioni olomorfe risulta

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

- $\Leftarrow$ Per ipotesi si ha che per ogni $z \in A$ esistono $\delta > 0$ e $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ tali che $B(z_0, \delta) \subseteq A$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, \delta).$$

  Dunque, se $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ otteniamo

$$f_x(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \cdot 1$$

$$f_y(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \cdot i$$

quindi $f_y(z) = i f_x(z)$, cioè f soddisfa le condizioni di olomorfia di Cauchy-Rienmann quindi $f \in \mathcal{H}(A)$.

□

Corollario 1.4.6. *Ogni funzione $f \in \mathcal{H}(A)$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto non vuoto, è sviluppabile in serie di Taylor in ogni $z_0 \in A$.*

Teorema 1.4.7. (Teorema di Hermite)

Hp) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \exists k > 0, \nu > 0 : |f(z)| \leq k|z|^\nu \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Ts) f è un polinomio di grado minore o uguale a $[\nu]$

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, dato che $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ in base al precedente teorema possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Inoltre $\forall R > |z_0|$ si ha

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B(\underline{0},R)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw,$$

da cui, utilizzando la proprietà di Darboux otteniamo

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{+\partial B(\underline{0},R)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \max_{|z|=R} \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right| \leq$$

$$\leq R \max_{|z|=R} \frac{k|z|^\nu}{(|z|-|z_0|)^{n+1}} = \frac{kR^{\nu+1}}{(R-|z_0|)^{n+1}},$$

da cui se $\nu + 1 < n + 1$, cioè per $\nu < n$, al tendere di R a $+\infty$ l'ultimo termine tende a zero, per cui $n > \nu \Rightarrow a_n = 0$, questo prova che f è un polinomio di grado minore o uguale a $[\nu]$. □

1.5 Serie bilatere

Definizione 1.5.1. *Consideriamo una successione di numeri complessi definita negli interi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ (più formalmente, una funzione $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dove indichiamo $h(n) = a_n$ e $h(\mathbb{Z}) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$). Il simbolo*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \tag{1.4}$$

si dice ***serie bilatera****. Diciamo che* (1.4) ***converge*** *quando le due serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$$

convergono, in tal caso si pone

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}.$$

Siano $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ con $R_1 < R_2$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Poniamo

$$C(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

L'insieme definito, nel caso in cui $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$, non è altro che la corona circolare di centro z_0, raggio interno R_1 e raggio esterno R_2.

Teorema 1.5.2. (Teorema di Laurent)

Hp) $f \in \mathcal{H}(C(z_0, R_1, R_2))$

Ts) $\exists!\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in C(z_0, R_1, R_2)$.

Inoltre $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{+\partial B(z_0,\rho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \rho \in]R_1, R_2[$

(osserviamo che l'ultimo integrale scritto non dipende da ρ grazie al teorema di Cauchy-Goursat)

Definizione 1.5.3. *Utilizzando la stessa notazione del teorema precedente, diamo le seguenti definizioni.*

La serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ *si chiama* ***serie di Laurent*** *di* f *in* $C(z_0, R_1, R_2)$.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ *si dice* ***parte regolare*** *dello sviluppo.*

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ *si dice* ***parte singolare*** *dello sviluppo.*

Esempio 1.5.4. *Siano* $\alpha, z_0 \in \mathbb{C}$ *con* $\alpha \neq z_0$. *Consideriamo la funzione* $f : \mathbb{C} \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{C}$ *con* $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$. *Troviamo lo sviluppo in serie di Laurent di* f *con centro* z_0 *nelle due corone circolari*

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < |\alpha - z_0|\} \\ C' & = & \{z \in \mathbb{C} : |\alpha - z_0| < |z - z_0|\} \end{array}$$

in cui f *è olomorfa.*

1. *Sviluppiamo la funzione* f *in serie di Laurent in* C. *Abbiamo per* $z \in C$

$$\frac{1}{z - \alpha} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - \alpha} = \frac{1}{z_0 - \alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-z_0}{z_0-\alpha}}.$$

Dal momento che $|\frac{z-z_0}{z_0-\alpha}| < 1$ *ne segue*

$$\frac{1}{z - \alpha} = \frac{1}{z_0 - \alpha}\cdot\frac{1}{1 + \frac{z-z_0}{z_0-\alpha}} = \frac{1}{z_0 - \alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{z_0 - \alpha}\right)^n(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z_0 - \alpha)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

2. Sviluppiamo la funzione f in serie di Laurent in C'. Abbiamo per $z \in C'$

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{z-z_0+z_0-\alpha} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1+\frac{z_0-\alpha}{z-z_0}}.$$

Dal momento che $|\frac{z_0-\alpha}{z-z_0}| < 1$ ne segue

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1+\frac{z_0-\alpha}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0-\alpha}{z-z_0}\right)^n (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha-z_0)^n \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

1.6 Punti singolari

Definizione 1.6.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto non vuoto ed $f \in \mathcal{H}(A)$. Ogni punto $z \in A$ si dice* ***punto regolare*** *di f. I punti $z \in \partial A$ si dicono* ***punti singolari*** *di f. I punti isolati di ∂A si dicono* ***punti singolari isolati****. L'insieme $\mathbb{C} \setminus \bar{A}$ si chiama* ***regione lacunare****.*

Prima di passare a un esempio proviamo che

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sia $z = a + ib$ tale che $e^z = 1$, per definizione abbiamo

$$e^{a+ib} = e^a \cos(b) + i\, e^a \sin(b) = 1 + i0$$

da cui

$$\begin{cases} e^a \cos(b) = 1 \\ e^a \sin(b) = 0 \end{cases}$$

dalla seconda otteniamo $\sin(b) = 0$ cioè $b = h\pi$ con $h \in \mathbb{Z}$. Adesso se h è dispari otteniamo $\cos(b) = -1$, ma dato che $e^a > 0$ si avrebbe $0 > e^a \cos(b) = 1$ che è impossibile, quindi h dev'essere pari, cioè $\exists k \in \mathbb{Z} : h = 2k$ con $\cos(b) = 1$. Dalla prima equazione del precedente sistema si ha $e^a = 1 \Rightarrow a = 0$. Quindi

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longrightarrow z = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio 1.6.2. *Mostriamo che se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ allora*

$$\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

infatti scriviamo

$$\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{z}} - e^{-i\frac{\pi}{z}}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{z}} - e^{-i\frac{\pi}{z}} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2\pi i}{z}} = 1$$

per quanto mostrato prima otteniamo

$$\frac{2\pi i}{z} = 2\pi i k \Rightarrow z = \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Adesso consideriamo l'insieme $A = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\})$*, la funzione*

$$f : A \to \mathbb{C} \quad f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$

e l'insieme dei punti singolari di f

$$\partial A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

La funzione f *costituisce un esempio di funzione che ha un'infinità di punti singolari isolati e ha* $0 \in \mathbb{C}$ *come punto singolare non isolato.*

Definizione 1.6.3. *Siano* $A \subseteq \mathbb{C}$ *aperto non vuoto,* $f \in \mathcal{H}(A)$ *e* $z_0 \in \partial A$ *un punto singolare isolato di* f*. Si può dimostrare che* $\exists \delta_0 > 0 : B^*(z_0, \delta_0) = B(z_0, \delta_0) \setminus \{z_0\} \subseteq A$*. Essendo* f *olomorfa in* $B^*(z_0, \delta_0)$ *possiamo considerare il suo sviluppo in serie di Laurent di centro* z_0

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B^*(z_0, \delta_0).$$

Il coefficiente a_{-1} *si dice* ***residuo*** *di* f *in* z_0 *e si scrive*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}.$$

Inoltre z_0 *si dice punto singolare*

1. ***fittizio*** *se* $a_n = 0 \quad \forall n < 0$*;*
2. ***polo di ordine*** $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *quando* $a_{-n} \neq 0$ *e* $a_k = 0 \quad \forall k < -n$*;*
3. ***essenziale*** *quando* $a_n \neq 0$ *per infiniti* $n \in \mathbb{Z}, n < 0$*.*

Un polo di ordine 1 *è anche detto* ***polo semplice****.*

Teorema 1.6.4. *Siano* $A \subseteq \mathbb{C}$ *un aperto non vuoto e* $f \in \mathcal{H}(A)$*. Se* $z_0 \in \partial A$ *è un punto singolare isolato di* f *allora*

$$\begin{aligned}
&z_0 \text{ è singolarità fittizia} && \iff \exists \lim_{z \to z_0} f(z) = l \in \mathbb{C} \\
&z_0 \text{ è un polo di ordine } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} && \iff \exists \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \\
&z_0 \text{ è singolarità essenziale} && \iff \nexists \lim_{z \to z_0} f(z);
\end{aligned}$$

Teorema 1.6.5. *Siano* $A \subseteq \mathbb{C}$ *un aperto non vuoto e* $f \in \mathcal{H}(A)$*. Se* z_0 *è un polo di ordine* $n \in \mathbb{N}$ *per* f *allora il residuo di* f *in* z_0 *è pari a*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} D^{n-1}\Big((z - z_0)^n f(z) \Big)$$

Definizione 1.6.6. *Siano* $A \subseteq \mathbb{C}$ *un aperto non vuoto,* $z_0 \in A$ *e* $f : A \to \mathbb{C}$*. Il punto* z_0 *si chiama* ***zero di ordine*** $n \in \mathbb{N}$ *per* f *se esiste* $g : A \to \mathbb{C}$ *tale che*

1. $g(z_0) \neq 0$.

2. $f(z) = (z - z_0)^n g(z) \quad \forall z \in A$.

Uno zero di ordine 1 *è anche detto **zero semplice**.*

Osservazione 1.6.7. *Osserviamo che* $z_0 \in A$ *è uno zero di ordine* $n \in \mathbb{N}$ *per* $f \in \mathcal{H}(A)$ *con* $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in A \setminus \{z_0\}$ *se e solo se* z_0 *è un polo di ordine* n *per* $\frac{1}{f(z)}$.

Corollario 1.6.8. *Siano* $A \subseteq \mathbb{C}$ *un aperto non vuoto e* $f, g \in \mathcal{H}(A)$. *Se* $z_0 \in A$ *è uno zero semplice per* g *e* $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in A \setminus \{z_0\}$ *allora ha senso considerare la funzione* $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \quad \forall z \in A \setminus \{z_0\}$. *Sotto queste ipotesi* z_0 *è un punto singolare fittizio per* $h(z)$, *oppure un polo semplice di* $h(z)$, *in ogni caso*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} h(z) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

Dimostrazione. (Cenno) Se z_0 è un polo semplice di h allora

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} h(z) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) h(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

in quanto $g(z_0) = 0$. □

1.7 Teorema dei Residui e sue applicazioni

Teorema 1.7.1. (Teorema dei residui)

Hp) *Sia* $A \subseteq \mathbb{C}$ *un aperto non vuoto,* $f \in \mathcal{H}(A)$, $z_1, z_2, \ldots, z_p \in \partial A$ *punti singolari isolati di* f, $T \subseteq \mathbb{C}$ *dominio regolare tale che* $z_1, z_2, \ldots, z_p \in \mathring{T}$ *e* $T \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_p\} \subseteq A$.

Ts) $\displaystyle\int_{+\partial T} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$.

Dimostrazione. Poniamo

$$\begin{aligned} \delta' &= \min\{|z_h - z_k| : h, k = 1, \ldots, p \text{ con } h \neq k\}, \\ \delta' &= \min\{d(z_h, \partial T) : h = 1, \ldots, p\}, \\ \delta &= \min\{\delta', \delta''\}, \end{aligned}$$

e consideriamo il dominio regolare

$$T' = T \setminus \bigcup_{i=1}^{p} B(z_k, \delta) \subseteq A.$$

Per il teorema di Cauchy-Goursat abbiamo

$$\int_{+\partial T'} f(z)dz = 0,$$

cioè

$$\int_{+\partial T} f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} \int_{+\partial B(z_k, \delta)} f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

(l'ultima uguaglianza deriva dal teorema di Laurent). □

Vediamo una prima applicazione del teorema dei residui. Sia $B \subseteq \mathbb{R}^2$ con $[-1,1]^2 \subseteq B$ e $\varphi : B \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo di voler calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\sin t, \cos t)dt.$$

Dalla formula di Eulero possiamo scrivere

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\sin t, \cos t)dt = \int_0^{2\pi} \varphi\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) dt,$$

avendo posto $z = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, il precedente integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\sin t, \cos t)dt = \int_{+\partial B(0,1)} \varphi\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}.$$

Adesso per il calcolo dell'ultimo integrale possiamo utilizzare il teorema dei residui.

Prima di vedere una seconda applicazione del teorema dei residui diamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.7.2. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Se f è integrabile secondo Rienmann in $[0, +\infty[$ e $]-\infty, 0]$, cioè e esistono finiti i limiti*

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{0} f(x)dx \in \mathbb{R}, \\ \beta &= \lim_{a \to +\infty} \int_{0}^{a} f(x)dx \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

allora si pone per definizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \alpha + \beta. \tag{1.5}$$

Se invece esiste il limite

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx$$

allora f si dice ***integrabile secondo Cauchy*** *e si pone*

$$(PV) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx. \tag{1.6}$$

1.6 è detto anche ***integrale al valore principale****.*

Osserviamo che l'integrabilità della 1.5 implica quella della 1.6, ma non vale il viceversa, basta considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x$.

Sia adesso $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Cauchy. Supponiamo di voler calcolare l'integrale

$$(PV) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Sia $P = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$ e $\varphi \in \mathcal{H}(P \setminus \{z_1, \ldots, z_k\})$ con $z_1, \ldots, z_k \in \mathring{P}$ e supponiamo che $\Re(\varphi(x)) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Sia $R > \max\{|z_h| : h = 1, \ldots, k\}$ e $C(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \Im(z) \geq 0\}$, per il teorema dei residui risulta

$$\int_{+\partial C(R)} \varphi(z)dz = 2\pi i \sum_{h=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_h} \varphi(z),$$

da cui, avendo posto $\gamma_R = P \cap \partial B(0, R)$, ne segue

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz = 2\pi i \sum_{h=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_h} \varphi(z).$$

Se

$$\exists \lim_{R\to+\infty} \int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz = l \in \mathbb{C}$$

allora per $R \to +\infty$ si ha

$$(PV) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -l + 2\pi i \sum_{h=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_h} \varphi(z).$$

Lemma 1.7.3. (Lemma del grande cerchio)

Hp) *Siano* $r \geq 0$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ *con* $\alpha \leq \beta$, $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r, \alpha \leq arg(z) \leq \beta\}$, $\varphi : S \to \mathbb{C}$ *continua tale che* $\exists \lim_{z\to\infty} z\varphi(z) = \lambda \in \mathbb{C}$, $\gamma_R = S \cap \partial B(0, R)$.

Ts) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz = i\lambda(\beta - \alpha).$

Nell'ipotesi in cui φ ha un punto singolare sull'asse reale il metodo di calcolo finora esposto fallisce. Tuttavia, detto $z_j \in \mathbb{R}$ il punto singolare di φ sull'asse reale, possiamo generalizzare tale procedimento calcolando l'integrale lungo il bordo di $C(R) \setminus B(z, \epsilon)$ e successivamente far tendere ϵ a zero.

Lemma 1.7.4. (Lemma del piccolo cerchio)

Hp) *Siano* $r \geq 0$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ *con* $\alpha \leq \beta$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r, \alpha \leq arg(z - z_0) \leq \beta\}$, $\varphi : S \to \mathbb{C}$ *continua tale che* $\exists \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\varphi(z) = \lambda \in \mathbb{C}$, $\gamma_\epsilon = S \cap \partial B(z_0, \epsilon)$.

Ts) $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{+\gamma_\epsilon} \varphi(z)dz = i\lambda(\beta - \alpha).$

Lemma 1.7.5. (Lemma di Jordan)

Hp) *Siano* $r \geq 0$, $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ *con* $\alpha \leq \beta$, $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r, \alpha \leq arg(z) \leq \beta\}$, $\varphi : S \to \mathbb{C}$ *continua tale che* $\exists \lim_{z\to\infty} \varphi(z) = 0$, $\mu > 0$, $\gamma_R = S \cap \partial B(0, R)$.

Ts) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{+\gamma_R} e^{i\mu z}\varphi(z)dz = 0.$

(N.B. il lemma di Jordan può essere applicato, con le opportune modifiche, anche nel caso $\alpha, \beta \in [\pi, 2\pi]$ e $\mu < 0$).

Esempio 1.7.6. *Calcoliamo l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

La funzione $\frac{\sin x}{x}$ *è integrabile in* $[0, +\infty]$ *in quanto, utilizzando la formula di integrazione per parti, si ha*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{a \to +\infty} \left(\left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^a - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2} dx \right).$$

Dunque possiamo scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}(PV) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \Im \left((PV) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right).$$

Calcoliamo

$$(PV) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

Poniamo $\varphi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *con* $\varphi(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, φ *è olomorfa in* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Siano* $R > \epsilon > 0$ *due numeri reali e*

$$\begin{aligned} S &= \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\} \\ C(R, \epsilon) &= (S \cap B(0, R)) \setminus B(0, \epsilon) \\ \gamma_R &= S \cap \partial B(0, R) \\ \gamma_\epsilon &= S \cap \partial B(0, \epsilon). \end{aligned}$$

Per il teorema di Cauchy-Goursat abbiamo che

$$\int_{+\partial C(R,\epsilon)} \varphi(z) dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{+\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{+\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Osserviamo che $\lim_{z \to 0} (z - 0)\varphi(z) = \lim_{z \to 0} e^{iz} = 1$ *quindi, applicando il lemma del piccolo cerchio, risulta*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{+\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi,$$

pertanto, per $\epsilon \to 0^+$, *l'equazione precedente diventa*

$$\int_{-R}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi + \int_0^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{+\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi + \int_{+\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Il limite $\lim_{z \to \infty} z\varphi(z) = \lim_{z \to \infty} e^{iz}$ *non esiste, quindi non possiamo applicare il lemma del grande cerchio per calcolare l'ultimo termine della precedente equazione. Tuttavia possiamo utilizzare il lemma di Jordan in quanto esiste il limite* $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} = 0$, *pertanto*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{+\gamma_R} e^{iz} \frac{1}{z} dz = 0,$$

ottenendo infine

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi = 0 \quad \forall R > 0,$$

da cui per $R \to +\infty$

$$(PV) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi$$

ne segue

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \Im \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Capitolo 2

Trasformata e Serie di Fourier

2.1 Serie di Fourier

Definizione 2.1.1. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* ***periodica*** *di periodo $T > 0$ se*

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definizione 2.1.2. *Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$. Si chiama* ***prolungamento per periodicità*** *di f e di indica con $f^{\#}$ la funzione*

$$f^{\#} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ con } f^{\#}(x) = f\big(x - k(b - a)\big) \quad \forall x \in \Big[a + k(b - a), b + k(b - a)\Big], k \in \mathbb{Z}$$

Definizione 2.1.3. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice* ***continua a tratti*** *in $[a, b]$ quando esiste una decomposizione $D = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ di $[a, b]$ tale che*

1. *f è continua in $[a, b] \setminus D$.*
2. *Esistono finiti i limiti*

$$\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to x_j^{\pm}} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x) \quad \forall j = 1, \ldots, n - 1.$$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice ***continua a tratti*** *in $\mathbb{R}$ se è tale in ogni intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.*

Osserviamo che la condizione (1) della precedente definizione equivale a richiedere che la funzione f sia generalmente continua in $[a, b]$. Dunque ogni funzione continua a tratti in $[a, b]$ è anche generalmente continua nello stesso intervallo.

Definizione 2.1.4. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua a tratti in $[a, b]$ con decomposizione D si dice* ***regolare a tratti*** *in $[a, b]$ se esiste una decomposizione $D^* = \{a = y_0, y_1, \ldots, y_m = b\}$ di $[a, b]$ tale che*

1. *$D \subseteq D^*$ e f è derivabile in $[a, b] \setminus D^*$.*
2. *Esistono finiti i limiti*

$$\lim_{x \to a^+} f'(x), \lim_{x \to x_j^{\pm}} f'(x), \lim_{x \to b^-} f'(x) \quad \forall j = 1, \ldots, m - 1.$$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice ***regolare a tratti*** *in $\mathbb{R}$ se è tale in ogni intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.*

Definizione 2.1.5. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti e periodica di periodo $T = 2\pi$. Poniamo $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

i numeri reali a_n e b_n si dicono ***coefficienti di Fourier*** *di f. La serie di funzioni definite in $\mathbb{R}$*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right] \tag{2.1}$$

si chiama ***serie di Fourier*** *della funzione f. Denotata con $S(x)$ la sua somma, f si dice* ***sviluppabile in serie di Fourier*** *nel punto x quando la (2.1) converge e risulta $f(x) = S(x)$.*

Dalla definizione si vede subito che nel caso in cui f è pari allora $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e analogamente se f è dispari allora $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 2.1.6. *Il termine generale della serie di Fourier può essere riscritto utilizzando la formula di Eulero come segue*

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-inx} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Pertanto, avendo posto

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & n \geq 0 \\ \dfrac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

la (2.1) si riscrive

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Osservazione 2.1.7. *Più in generale, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua a tratti e periodica di periodo T allora la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$ risulterà continua a tratti e periodica di periodo 2π, infatti*

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi) \right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T \right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x \right) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dunque ha senso considerare la serie di Fourier della funzione g

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big];$$

i coefficienti a_n e b_n risulteranno

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\sin(nx)dx,$$

da cui effettuando il cambio di variabile $x = \frac{2\pi}{T}t$ otteniamo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\frac{2\pi}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\frac{2\pi}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt.$$

Le precedenti formule sono una generalizzazione dei coefficienti di Fourier a una qualsiasi funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti periodica di periodo T. In modo analogo la serie di Fourier risulterà

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\right]. \tag{2.2}$$

Lemma 2.1.8. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [-\pi, \pi]$ risulta*

$$\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \ldots + \cos(nt) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

(osserviamo che $t = 0$ per la funzione a secondo membro è un punto di discontinuità eliminabile).

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ dalle formule di prostaferesi abbiamo

$$\sin\left[\left(k+\tfrac{1}{2}\right)t\right] - \sin\left[\left(k-\tfrac{1}{2}\right)t\right] = 2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\cos\left(\tfrac{2kt}{2}\right).$$

Pertanto

$$\begin{array}{lccc}
k=0 & \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(-\frac{t}{2}\right) & = & 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
k=1 & \sin\left(\frac{3t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) & = & 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(t) \\
\vdots & & & \\
k=n & \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] - \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right] & = & 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt),
\end{array}$$

sommando membro a membro le precedenti $n+1$ uguaglianze otteniamo

$$\sin\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right] - \sin\left(-\tfrac{t}{2}\right) = 2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\Big(1 + \cos(t) + \cos(2t) + \ldots + \cos(nt)\Big)$$

da cui segue facilmente la tesi. □

Lemma 2.1.9. (Disuguaglianza di Bessel)

Hp) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua a tratti e periodica di periodo* $T = 2\pi$.

Ts) $\dfrac{a_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big],$$

si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} [s_n(x) - f(x)]^2 dx \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)^2 dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq 2\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)f(x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)^2 dx.$$

Calcoliamo i due termini del secondo membro della precedente disuguaglianza

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_n\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)\right]f(x)dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)f(x)dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\pi a_k^2 + \pi b_k^2\right) = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{a_0^2}{4}2\pi + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)dx + b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)dx\right] +$$

$$+2\frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)dx + \sum_{\substack{h,k=1\\ h\neq k}}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} a_h b_k\cos(hx)\sin(kx)dx.$$

Il terzo termine della precedente somma si verifica facilmente essere nullo; dal momento che $\cos(hx)$ è una funzione pari e $\sin(kx)$ è una funzione dispari ne segue che anche l'ultimo termine è nullo; inoltre si può verificare facilmente che $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(hx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)dx = \pi$, pertanto si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)^2 dx = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

da cui
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
infine per $n \to +\infty$ risulta
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

□

Corollario 2.1.10. *Nelle ipotesi del lemma precedente*
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

Dimostrazione. Dal lemma sappiamo che la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$
converge, quindi $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$, inoltre
$$|a_n|, |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$
pertanto $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to+\infty}|b_n| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. □

Definizione 2.1.11. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti in $\mathbb{R}$. Poniamo $\forall x \in \mathbb{R}$*
$$f(x^+) = \lim_{t\to x^+} f(t),\ f(x^-) = \lim_{t\to x^-} f(t).$$

Ovviamente f è continua in $x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow f(x^+) = f(x^-) = f(x)$.

Teorema 2.1.12. (convergenza puntuale)

Hp) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare a tratti e periodica di periodo $T = 2\pi$.

Ts) La serie di Fourier di f converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e si ha
$$S(x) = \frac{1}{2}\big(f(x^+) + f(x^-)\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(ossia, f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni $x \in \mathbb{R}$ dove f è continua).

Dimostrazione. (Schema)
Dal lemma precedente abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [-\pi, \pi]$ risulta
$$\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \ldots + \cos(nt) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

da cui

$$\frac{1}{2}\pi + \int_{-\pi}^{0} \cos(t) + \int_{-\pi}^{0} \cos(2t) + \ldots + \int_{-\pi}^{0} \cos(nt) = \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \tag{2.3}$$

e analogamente otteniamo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \tag{2.4}$$

Dal momento che

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k cos(kx) + b_k sin(kx)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\sin(kx)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right]dt =$$

effettuiamo il cambiamento di variabile $y = t - x$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ky)\right]dy =$$

(in generale, se f è una funzione di periodo T allora $\int_0^T f(x)dx = \int_a^{T+a} f(x)dx \, \forall a \in \mathbb{R}$, da cui)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ky)\right]dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}dy.$$

Dunque infine otteniamo

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}dy \tag{2.5}$$

(che è detta **Formula di Dirichlet**). Adesso è sufficiente provare che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[s_n(x) - \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\right] = 0.$$

Da (2.3),(2.4) e (2.5) si ha

$$s_n(x) - \frac{1}{2}f(x^-) - \frac{1}{2}f(x^+) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+y)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}dy - f(x^-)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+y)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}dy - f(x^+)\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}dy =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+y)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\sin\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y\right]dy + \int_0^{\pi}\frac{f(x+y)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\sin\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y\right]dy\right] =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\sin\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y\right]dy$$

dove

$$F(y)=\begin{cases}\frac{f(x+y)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)} & 0<y<\pi\\ 0 & y=0\\ \frac{f(x+y)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)} & -\pi<y<0\end{cases}$$

inoltre, dal momento che f è regolare a tratti, F risulterà continua a tratti. Adesso scriviamo

$$s_n(x)-\frac{1}{2}f(x^-)-\frac{1}{2}f(x^+)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(y)\sin\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y\right]dy =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(y)\cos\left(\tfrac{y}{2}\right)\sin(ny)dy+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(y)\sin\left(\tfrac{y}{2}\right)\cos(ny)dy =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(y)\sin(ny)dy+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(y)\cos(ny)dy,$$

avendo posto $G(y)=F(y)\cos\left(\frac{y}{2}\right)$ e $H(y)=F(y)\sin\left(\frac{y}{2}\right)$. Essendo gli ultimi due termini dell'ultima uguaglianza i coefficienti della serie di Fourier delle funzioni G ed H, in base alla disuguaglianza di Bessel risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(y)\sin(ny)dy=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(y)\sin(ny)dy=0,$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty}\left[s_n(x)-\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\right]=0.$$

□

Lemma 2.1.13. *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua, regolare a tratti e periodica di periodo $T=2\pi$. Siano a_n e b_n i coefficienti di Fourier di f e a'_n e b'_n i coefficienti di Fuorier di f'. Sotto queste ipotesi risulta*

$$a'_n=nb_n,\quad b'_n=-na_n.$$

Dimostrazione. Proviamo la prima uguaglianza, la seconda è analoga. Si ha

$$a'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}+n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[f(\pi)\cos(n\pi)-f(-\pi)\cos(-n\pi)\right]+nb_n=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[f(\pi)\cos(n\pi)-f(\pi)\cos(n\pi)\right]+nb_n=nb_n$$

(in quanto, essendo f periodica di periodo 2π si ha $f(-\pi)=f(-\pi+2\pi)=f(\pi)$). □

Teorema 2.1.14. (convergenza totale)

Hp) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua, regolare a tratti e periodica di periodo* $T = 2\pi$.

Ts) La serie di Fourier di f *converge totalmente in* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\left(n|a_n| - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow n^2 {a_n}^2 - 2|a_n| + \frac{1}{n^2} \geq 0 \Rightarrow 2|a_n| \leq {b'_n}^2 + \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{2}\left({b'_n}^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

in modo analogo otteniamo

$$|b_n| \leq \frac{1}{2}\left({a'_n}^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

da cui risulta

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{2}\left({a'_n}^2 + {b'_n}^2 + \frac{2}{n^2}\right).$$

Adesso ci basta osservare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{n^2} + {a'_n}^2 + {b'_n}^2\right]$$

converge perché somma di una serie armonica generalizzata di potenza 2 e di una serie convergente (in base alla disuguaglianza di Bessel applicata alla funzione f'). □

Teorema 2.1.15. (integrazione per serie)

Hp) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *regolare a tratti e peiodica di periodo* $T = 2\pi$, $x_0, x \in [-\pi, \pi]$.

Ts) $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))dt$

2.2 Trasformata di Fourier

Definizione 2.2.1. *Sia* $p \geq 1$ *e* $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ *l'insieme delle funzioni* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tali che*

1. f *è misurabile.*
2. $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}$ *(integrale secondo Lebesgue).*

Tali funzioni sono anche dette ***funzioni a*** p***-esima potenza sommabile****. Sia invece* $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ *l'insieme delle funzioni* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *misurabili e limitate.*

Osserviamo che gli spazi $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ e $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ sono spazi normati. Infatti possiamo introdurre in tali spazi una norma come segue

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \inf\{C \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leq C \text{ per quasi ogni } x \in \mathbb{R}\}.$$

Inoltre è possibile dimostrare che

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p\,.$$

Definizione 2.2.2. *Sia $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Poniamo $\forall y \in \mathbb{R}$*

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iyx} f(x)dx.$$

Osserviamo che $\hat{f}(y)$ è ben definito per ogni $y \in \mathbb{R}$ in quanto

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iyx} f(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2\pi iyx}| \cdot |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \in \mathbb{R}.$$

*Il numero complesso $\hat{f}(y)$ si chiama **trasformata di Fourier** di f nel punto $y \in \mathbb{R}$. La funzione $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si chiama **funzione trasformata di Fourier** di f e si scrive $\hat{f} = \mathscr{F}(f)$.*

Proposizione 2.2.3. *Se $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ allora $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ con*

$$\|\mathscr{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Dimostrazione. Per ogni $y \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$|\mathscr{F}(f)(y)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iyx} f(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = \|f\|_1 \in \mathbb{R}$$

quindi $\mathscr{F}(f)$ è limitata e inoltre

$$\|\mathscr{F}(f)\|_\infty = \sup_{y\in\mathbb{R}} \mathscr{F}(f)(y) \leq \|f\|_1.$$

□

Proposizione 2.2.4. *Se $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ allora $\mathscr{F}(f)$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(x_1) - \hat{f}(x_2)| < \epsilon.$$

Per ogni $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ risulta

$$\hat{f}(y_1) - \hat{f}(y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-2\pi iy_1x} - e^{-2\pi iy_2x}\right] f(x)dx,$$

da cui

$$|\hat{f}(y_1) - \hat{f}(y_2)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2\pi i y_1 x} - e^{-2\pi i y_2 x}||f(x)|dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2\pi i y_2 x}||e^{-2\pi i(y_1 - y_2)x} - 1||f(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-2\pi i(y_1 - y_2)x} - 1||f(x)|dx.$$

Fissiamo $\epsilon > 0$. Dalla continuità verso il basso abbiamo

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{|x| \geq R} |f(x)|dx = 0,$$

pertanto esiste $R^* > 0$:

$$\int_{|x| \geq R^*} |f(x)|dx < \frac{\epsilon}{4},$$

dalla disuguaglianza precedente risulta

$$|\hat{f}(y_1) - \hat{f}(y_2)| \leq \int_{|x| < R^*} |e^{-2\pi i(y_1 - y_2)x} - 1||f(x)|dx + \int_{|x| \geq R^*} |e^{-2\pi i(y_1 - y_2)x} - 1||f(x)|dx.$$

In base alla formula di Eulero abbiamo

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$-2i \sin(t) = e^{-it} - \frac{1}{e^{-it}}$$

$$e^{-2it} - 1 = -2ie^{-it} \sin(t)$$

$$|e^{-2it} - 1| = 2|\sin(t)|$$

da cui

$$\int_{|x| < R^*} |e^{-2\pi i(y_1 - y_2)x} - 1||f(x)|dx = \int_{|x| < R^*} 2|\sin(\pi(y_1 - y_2)x)||f(x)|dx \leq$$

$$\leq \int_{|x| < R^*} 2|\pi(y_1 - y_2)||x||f(x)|dx < 2\pi R^* |y_1 - y_2| \int_{|x| < R^*} |f(x)|dx.$$

Dunque, posto $\delta = \frac{\epsilon}{2M}$, con $M = 2\pi R^* \int_{|x| < R^*} |f(x)|dx$, se $|y_1 - y_2| < \delta = \frac{\epsilon}{2M}$ allora

$$|\hat{f}(y_1) - \hat{f}(y_2)| \leq \int_{|x| < R^*} |e^{-2\pi i(y_1 - y_2)x} - 1||f(x)|dx + \int_{|x| \geq R^*} |e^{-2\pi i(y_1 - y_2)x} - 1||f(x)|dx <$$

$$< 2\pi R^* |y_1 - y_2| \int_{|x| < R^*} |f(x)|dx + 2 \int_{|x| \geq R^*} |f(x)|dx < \frac{\epsilon}{2M} M + 2\frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

$\square$

Proposizione 2.2.5.

Hp) $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Ts) $\mathscr{F}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathscr{F}(f_1) + \lambda_2 \mathscr{F}(f_2)$.

Proposizione 2.2.6. (Rienman-Lebesgue)

Hp) $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Ts) $\lim_{\psi \to \pm\infty} [\mathscr{F}(f)](\psi) = 0$.

Posto $C_0^0(\mathbb{R}) = \{g \in C^0(\mathbb{R}) : \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0\}$, in base alle proposizioni precedenti la trasformata di Fourier può essere vista come una funzione lineare $\mathscr{F} : \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \to C_0^0(\mathbb{R})$.

Lemma 2.2.7. (disuguaglianza di Hölder) *Siano $p, q \geq 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (nel caso in cui $p = 1$ si considera $q = \infty$ e viceversa) e $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Se $u \in \mathscr{L}^p(I)$ e $v \in \mathscr{L}^q(I)$ allora $uv \in \mathscr{L}^1(I)$ e risulta*

$$\int_I |u(x)v(x)|dx \leq \left(\int_I |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lemma 2.2.8. (derivazione sotto il segno di integrale) *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ due intervalli, $\varphi(x, y) : I \times J \to \mathbb{R}$ tale che*

1. *$\varphi(\cdot, y) \in \mathscr{L}^1(I) \quad \forall y \in J$.*

2. *$\varphi(x, \cdot) \in C^1(J) \quad \forall x \in I$.*

3. *Se esistono $g_1, g_2 \in \mathscr{L}^1(I)$ per cui $|\varphi(x, y)| \leq g_2(x)$, $\left| \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \right| \leq g_2(x) \quad \forall x \in I$, avendo posto*

$$\Phi(y) = \int_I \varphi(x, y) dx \quad \forall y \in J$$

allora $\Phi \in C^1(J)$ e risulta

$$\Phi'(y) = \int \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dx \quad \forall y \in J.$$

Teorema 2.2.9.

Hp) *Sia $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.*

Ts) *$\mathscr{F}(f)$ è derivabile n volte in $\mathbb{R}$ e risulta*

$$D^k \mathscr{F}(f)(y) = (-2\pi i)^k \mathscr{F}(x^k f(x))(y) \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Dimostrazione. Supponiamo $n = 1$. Dato che

$$\mathscr{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i y x} f(x) dx \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

e risulta

$$|e^{-2\pi i y x} f(x)| = |f(x)| \text{ con } f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$$

$$\left|\frac{\partial(e^{-2\pi iyx}f(x))}{\partial y}\right| = |e^{-2\pi iyx}(-2\pi ix)f(x)| = 2\pi|xf(x)| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$$

allora il lemma precedente assicura che

$$\mathscr{F}(f)'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iyx}(-2\pi ix)f(x)dx = (-2\pi i)\mathscr{F}(xf(x))(y)$$

da cui la tesi.
Sia ora $n > 1$. Proviamo che $x^k f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})\ \forall k \in \{1, \dots n-1\}$. Poniamo $p = \frac{n}{k}, q = \frac{n}{n-k}$ quindi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, inoltre

$$\left(|x|^k|f(x)|^{\frac{k}{n}}\right)^p = |x|^n|f(x)| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow |x|^k|f(x)|^{\frac{k}{n}} \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}),$$

$$\left(|f(x)|^{1-\frac{k}{n}}\right)^q = |f(x)| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow |f(x)|^{1-\frac{k}{n}} \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}),$$

quindi possiamo utilizzare la disuguaglianza di Hölder

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^k f(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k|f(x)|^{\frac{k}{n}}|f(x)|^{1-\frac{k}{n}}dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n|f(x)|dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right)^{\frac{1}{q}} \in \mathbb{R},$$

pertanto per ogni $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ si ha $x^k f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Possiamo adesso applicare iterativamente la formula ottenuta per $n = 1$, in questo modo risulta

$$D^k\mathscr{F}(f)(y) = (-2\pi i)^k\mathscr{F}(x^k f(x))(y).$$

□

Teorema 2.2.10.

Hp) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *derivabile* n *volte in* $\mathbb{R}$ *e tale che* $f, f', f'', \dots, f^{(n)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Ts) $\mathscr{F}(f^{(n)})(y) = (2\pi i)^n y^n \mathscr{F}(f)(y)$

Dimostrazione. Nel caso in cui $n = 1$ si ha

$$\mathscr{F}(f')(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iyx}f'(x)dx = \left[e^{-2\pi iyx}f(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iyx}(-2\pi iy)f(x)dx.$$

Adesso, dato che $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ allora $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (fatto che non dimostriamo) per cui abbiamo

$$\mathscr{F}(f')(y) = 2\pi iy\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iyx}f(x)dx.$$

Per ottenere il caso generale basta applicare iterativamente la precedente formula. □

Proposizione 2.2.11. (antitrasformazione)

Hp) $f, \mathscr{F}(f) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Ts) $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i y x} \mathscr{F}(f)(y)dy \quad$ *per quasi ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Proposizione 2.2.12. (antitrasformazione)

Hp) $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, f *regolare a tratti in* $\mathbb{R}$.

Ts) $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i y x} \mathscr{F}(f)(y)dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2.3 Convoluzione e trasformata di Fourier

Definizione 2.3.1. *Siano* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *due funzioni misurabili. Per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *fissato la funzione* $y \to f(x-y)g(y) \quad y \in \mathbb{R}$ *è misurabile. Se essa è sommabile allora poniamo per definizione*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy,$$

$f * g$ *si dice* ***prodotto di convoluzione*** *di* f *e* g.

Teorema 2.3.2. (disuguaglianza di Young)

Hp) $1 \le p \le +\infty$, $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Ts)
1. $(f * g)(x)$ *è ben definita per quasi ogni* $x \in \mathbb{R}$.
2. $f * g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.
3. $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in 3 casi:

- $p = 1$. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$, la funzione $h(x,y) = |f(x-y)||g(y)|$ è misurabile e non negativa, pertanto in base al teorema di Tonelli risulta

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dy \right) dx = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx \right) dy =$$

ponendo $t = x - y$ otteniamo

$$= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \in \mathbb{R}$$

da cui segue che la funzione $x \to f(x-y)g(y)$ è sommabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre anche la funzione $x \to \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dy$ è sommabile in $\mathbb{R}$ e dato che $|(f*g)(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dy$ abbiamo anche $f * g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Infine

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right| dx \le$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dx \right) dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \right) dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt = \|f\|_1 \|g\|_1,$$

cioè

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

- $1 < p < +\infty$. Si usa la disuguaglianza di Hölder.
- $p = +\infty$. Dato che $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ allora

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dy \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy = \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

□

Vediamo adesso alcune proprietà del prodotto di convoluzione.

Proposizione 2.3.3. *Siano* $f, g, h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

1. $f * g = g * f$ *(commutativa)*

2. $(f * g) * h = f * (g * h)$ *(associativa)*

Dimostrazione. (dimostriamo solo la 1.)

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = (g*f)(x)$$

dove abbiamo posto $t = x - y$. □

Proposizione 2.3.4. *Se* $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *allora*

$$\mathscr{F}(f * g)(z) = \mathscr{F}(f)(z)\mathscr{F}(g)(z) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Per definizione e dal teorema di Fubini risulta

$$\mathscr{F}(f * g)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-2\pi izx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi izx} f(x-y)g(y)dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi izy} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iz(x-y)} f(x-y)dx \right) dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iz(x.y)} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi izt} f(t)dt \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi izt} f(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi izy} g(y)dy =$$
$$= \mathscr{F}(f)(z)\mathscr{F}(g)(z),$$

dove abbiamo posto $t = x - y$. □

Proposizione 2.3.5. *Se* $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ *allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(y) \cdot g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \mathscr{F}(g)(y)dy.$$

2.4 Applicazioni

2.4.1 Equazione integrale di Hammerstein

Sia $k \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. L'**equazione integrale di Hammerstein** è il problema di trovare una funzione $u \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$u(x) = k(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y)u(y)dy \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Utilizzando la trasformata di Fourier si ha

$$\begin{gathered} u(x) = k(x) + (u * k)(x) \\ \mathscr{F}(u)(z) = \mathscr{F}(k)(z) + \mathscr{F}(u)(z) \cdot \mathscr{F}(k)(z) \\ \mathscr{F}(u)(z) = \frac{\mathscr{F}(k)(z)}{1 - \mathscr{F}(k)(z)} \\ u(x) = \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(k)(z)}{1 - \mathscr{F}(k)(z)}\right)(x). \end{gathered}$$

2.4.2 Equazione del calore

L'**equazione del calore** nel semipiano $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ è il problema di trovare una funzione $u(x,t) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{gathered} u_t = u_{xx} \quad \text{in } \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

con $u_0 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ funzione assegnata. Cerchiamo soluzioni $u(x)$ tali che

$$u(\cdot,t), u_x(\cdot,t), u_{xx}(\cdot,t) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Si ha

$$\begin{gathered} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \\ \mathscr{F}(u_t)(z) = \mathscr{F}(u_{xx})(z) = (2\pi i)^2 z^2 \mathscr{F}(u)(z) \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} -4\pi^2 z^2 \mathscr{F}(u)(z) = \mathscr{F}(u_t)(z) &= \int_{\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i z x} u_t(x,t) dx = \\ = \frac{d}{dt}\left(\int_{\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i z x} u(x,t) dx\right) &= \frac{d}{dt}\left(\mathscr{F}(u)(z)\right), \end{aligned}$$

per avere l'ultima uguaglianza dobbiamo aggiungere le ipotesi aggiuntive per la derivazione sotto il segno di integrale. Adesso supponiamo z fissato e poniamo $U(t) = \mathscr{F}(u)(z)$. Risulta

$$\begin{gathered} U'(t) = -4\pi^2 z^2 U(t) \\ U(t) = c\, e^{-4\pi^2 z^2 t} \end{gathered}$$

dove c è una costante (che dipende da z) da determinare. Si ha

$$c = U(0) = \mathscr{F}(u(x,0))(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi izx} u(x,0)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi izx} u_0(x)dx = \mathscr{F}(u_0)(z).$$

Pertanto

$$U(t) = \mathscr{F}(u_0)(z)e^{-4\pi^2 z^2 t}$$
$$\mathscr{F}(u)(z) = \mathscr{F}(u_0)(z)e^{-4\pi^2 z^2 t}$$
$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\left(\mathscr{F}(u_0)(z)e^{-4\pi^2 z^2 t}\right).$$

Adesso dal momento che

$$e^{-4\pi^2 z^2 t} = \mathscr{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4\pi t}} \frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\right)(z),$$

risulta

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\left(\mathscr{F}(u_0)(z)\mathscr{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4\pi t}} \frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\right)(z)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\mathscr{F}^{-1}\left(\mathscr{F}(u_0 * e^{-\frac{x^2}{4\pi t}})(z)\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}}(u_0 * e^{-\frac{x^2}{4\pi t}})(x)$$

da cui otteniamo infine

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4\pi t}} dy,$$

che è chiamata **soluzione fondamentale** dell'eqauzione del calore.

Trasformata di Laplace

Definizione 4.1.1. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Diciamo che f è* ***localmente sommabile*** *in $\mathbb{R}$ e scriviamo $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ quando $f \in \mathscr{L}^1([a,b])$ per ogni intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.*

Ad esempio le funzioni $\sin(x), \cos(x), e^x$ non sono sommabili ma sono localmente sommabili. Inoltre ovviamente $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Definizione 4.1.2. *La funzione*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è detta ***funzione di Heaviside*** *(o* ***funzione gradino****).*

Definizione 4.1.3. *Siano $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $s_0 \in \mathbb{C}$. Se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-s_0 t} f(t) dt$$

allora f si dice ***trasformabile*** *secondo Laplace (o* ***$\mathscr{L}$-trasformabile****) in s_0 e si pone*

$$\mathscr{L}(f)(s_0) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-s_0 t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t) dt$$

Osservazione 4.1.4. *Osserviamo che, per ogni $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, se f è trasformabile secondo Laplace in $s_0 \in \mathbb{C}$ allora*

$$\mathscr{L}(f(t))(s_0) = \mathscr{L}(H(t)f(t))(s_0).$$

Inoltre se $e^{-s_0 t} f(t) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_0^+)$ allora f è trasformabile secondo Laplace in s_0. In generale però non vale il viceversa.

Alla luce della precedente osservazione diamo la seguente definizione.

Definizione 4.1.5. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è* ***assolutamente $\mathscr{L}$ tasformabile*** *in $s_0 \in \mathbb{C}$ se $e^{-s_0 t} f(t) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_0^+)$ e definiamo $\mathscr{L}(f)(s_0)$ come prima.*

Teorema 4.1.6. *Siano $s_0 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$. Se f è $\mathscr{L}$-trasformabile in s_0 allora f è $\mathscr{L}$-trasformabile in ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) > \Re(s_0)$.*

Dimostrazione. Fissiamo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > \Re(s_0)$ e poniamo

$$\varphi_0(T) = \int_0^T e^{-s_0 t} f(t)dt.$$

Per ipotesi $\lim_{T\to+\infty} \varphi_0(T) = l \in \mathbb{C}$. Si ha

$$\int_0^T e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t)dt = \int_0^T e^{-(s-s_0)t} \varphi_0'(t)dt =$$

$$= \Big[e^{-(s-s_0)t}\varphi_o(t)\Big]_0^T - \int_0^T -(s-s_0)e^{-(s-s_0)t}\varphi_0(t)dt = e^{-(s-s_0)T}\varphi_0(T) + (s-s_0)\int_0^T e^{-(s-s_0)t}\varphi_0(t)dt.$$

Osserviamo che

$$\lim_{T\to+\infty} e^{-(s-s_0)T}\varphi_0(T) = 0$$

in quanto $\lim_{T\to+\infty} \varphi_0(T) = l \in \mathbb{C}$ e $\Re(s) > \Re(s_0)$, inoltre

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-(s-s_0)t}\varphi_0(t)dt = L$$

poiché φ_0 è limitata in $[0, +\infty[$ e la funzione $g(t) = e^{-(s-s_0)t}$ è sommabile in $[0, +\infty[$, pertanto

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)dt = L \in \mathbb{C}.$$

$\square$

Utilizzando la notazione precedente diamo la seguente definizione.

Definizione 4.1.7. *L'insieme*

$$S_f = \{s \in \mathbb{C} : f \text{ è } \mathscr{L}\text{-trasformabile in } s\}$$

è detto ***semipiano di convergenza****. Se $S_f \neq \emptyset$ allora il numero*

$$\rho_f = \inf\{\Re(s) : s \in S_f\}$$

si chiama ***ascissa di convergenza*** *della trasformata di Laplace di f.*

Corollario 4.1.8. *Sia $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$. Se f è $\mathscr{L}$-trasformabile in $s_0 \in \mathbb{C}$ allora*

1. *f è $\mathscr{L}$-trasformabile in ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > \rho_f$.*
2. *f non è $\mathscr{L}$-trasformabile in ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) < \rho_f$.*

Esempio 4.1.9. *Calcoliamo la trasformata della funzione di Heaviside $H(t)$.*

- *Se $s = 0$ allora*

  $$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-st} H(t)dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T dt = \lim_{T\to+\infty} T = +\infty,$$

  pertanto $H(t)$ non è $\mathscr{L}$-trasformabile in $s = 0$.

- *Se $s \neq 0$ allora*

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}H(t)dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^T = \lim_{T\to+\infty}\frac{1-e^{-sT}}{s}.$$

Il precedente limite esiste ed è finito se e solo se $\Re(s) > 0$. In questo caso abbiamo

$$\mathscr{L}(H(t))(s) = \frac{1}{s}.$$

La trasformata di Laplace gode delle seguenti proprietà:

1. **Linearità**. Se $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ con f_i $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \rho_i$ $(i = 1, 2)$, allora $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ è $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \max\{\rho_1, \rho_2\}$ e

$$\mathscr{L}(\lambda 1 f_1 + \lambda_2 f_2)(s) = \lambda_1\mathscr{L}(f_1)(s) + \lambda_2\mathscr{L}(f_2)(s)$$

2. **Traslazione** in t. Se $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0)$ è $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \rho$ e $h > 0$, allora $f(t + h)$ è $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \rho$ e risulta

$$\mathscr{L}(f(t + h))(s) = e^{-hs}\mathscr{L}(f)(s)$$

3. **Traslazione** in s. Se $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0)$ ed è $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \rho$ e $h \in \mathbb{C}$ allora $e^{-ht}f(t)$ è $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \rho - \Re(h)$ con

$$\mathscr{L}(e^{-ht}f(t))(s) = \mathscr{L}(f)(s + h)$$

4. **Riscalamento**. Se $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0)$ ed è $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \rho$ e $A > 0$ allora $f(\frac{t}{A})$ è $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \frac{\rho}{A}$ con

$$\mathscr{L}(f(\tfrac{t}{A}))(s) = A\mathscr{L}(f)(As)$$

Teorema 4.1.10. *Se $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0)$ assolutamente $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \rho$ e $\rho_0 > \rho$ allora $\mathscr{L}(f)$ è limitata nel semipiano $\Re(s) > \rho_0$ e risulta*

$$\lim_{s\to+\infty}\mathscr{L}(f)(s) = 0.$$

Teorema 4.1.11. *Se $f : \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{C}$ è una funzione periodica di periodo $T > 0$ con $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0)$ allora*

$$\mathscr{L}(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt \quad \textit{per } \Re(s) > 0.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}f(t)dt =$$

poniamo $t = \tau + nT$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_0^T e^{-s(\tau+nT)} f(\tau + nT) d\tau \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right] =$$

$$= \left(\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-sT} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che $e^{-sT} < 1$ in quanto $\Re(s) > 0$). $\square$

Se $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0)$ è $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \rho$ allora poniamo

$$F(s) = \mathscr{L}(f)(s) \quad \forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > \rho$$

ottenendo una funzione $F : S_\rho \to \mathbb{C}$. Vogliamo studiare le condizioni per le quali la funzione F risulti olomorfa in S_ρ.

Lemma 4.1.12.

$$\forall \delta > 0, \exists C_\delta > 0 : t \leq C_\delta e^{\delta t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+_0.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\delta > 0$. Dato che

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{\delta t}} = 0$$

allora esiste $\sigma > 0$ tale che

$$\forall t \geq \sigma \quad \frac{t}{e^{\delta t}} \leq 1 \Rightarrow t \leq e^{\delta t}.$$

La funzione $f(t) = \frac{t}{e^{\delta t}}$ è continua in $\mathbb{R}^+_0$. Per il teorema di Weierstrass $\exists a_\delta > 0$ tale che

$$\forall t \in [0, \sigma] \quad \frac{t}{e^{\delta t}} \leq a_\delta \Rightarrow t \leq a_\delta e^{\delta t}.$$

Adesso basta prendere $C_\delta = \max\{a_\delta, 1\}$ per avere

$$\forall t \in \mathbb{R}^+_0 \quad t \leq C_\delta e^{\delta t}.$$

$\square$

Lemma 4.1.13.

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} \right| \leq e^{|z|} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$e^z - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

da cui otteniamo

$$\left|\frac{e^z-1}{z}\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^{n-1}}{n!} \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}.$$

□

Teorema 4.1.14. *Se $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0)$ è assolutamente $\mathscr{L}$-trasformabile in ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > \rho$ allora $F(s) = \mathscr{L}(f)(s)$ è olomorfa nel semipiano $\Re(s) > \rho$ e risulta*

$$F'(s) = -\mathscr{L}(tf(t))(s) \quad \forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > \rho.$$

Dimostrazione. Sia $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > \rho$. Se $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $|h| < \Re(s) - \rho$ (quindi $|\Re(h)| \le |h| < \Re(s) - \rho$, cioè $\rho - \Re(s) < \Re(h) < \Re(s) - \rho \Rightarrow \Re(s+h) > \rho$), allora

$$\frac{F(s+h)-F(s)}{h} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-(s+h)}-e^{-st}}{h}f(t)dt = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ht}-1}{-ht}(-t)e^{-st}f(t)dt.$$

Nel caso in cui sia lecito il passaggio a limite sotto il segno di integrale otteniamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(s+h)-F(s)}{h} = \int_0^{+\infty} e^{-st}(-tf(t))dt = -\mathscr{L}(tf(t))(s).$$

Facciamo vedere che tale passaggio a limite è lecito. Dai lemmi precedenti sappiamo che

$$\left|\frac{e^{-ht}-1}{-ht}\right| |e^{-st}||-tf(t)| \le e^{|h|t}e^{-\Re(s)t}\, t\,|f(t)| =$$
$$= t\, e^{-(\Re(s)-|h|)t}|f(t)| \le C_\delta e^{-(\Re(s)-|h|-\delta)t}|f(t)| \quad \forall t > 0,$$

per qualche $\delta > 0$. Adesso dal momento che $|h| < \Re(s) - \rho$ abbiamo

$$\Re(s) - |h| - \rho > 0,$$

pertanto possiamo scegliere $\delta > 0$ tale che

$$\Re(s) - |h| - \delta > \rho,$$

di modo che la funzione $g(t) = C_\delta e^{-(\Re(s)-|h|-\delta)t}|f(t)|$ risulti sommabile in $\mathbb{R}^+_0$. Dunque possiamo usare il teorema della convergenza dominata.

□

Applicando il teorema precedente n volte otteniamo il seguente risultato.

Corollario 4.1.15. *Sia $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0)$ assolutamente $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \rho$ allora, sapendo che la funzione $F(s) = \mathscr{L}(f(t))(s)$ è olomorfa, si ha*

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n\mathscr{L}(t^nf(t))(s) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \Re(s) > \rho.$$

Esempio 4.1.16. *Per $\Re(s) > 0$ abbiamo*

$$\mathscr{L}(t^n)(s) = \mathscr{L}(t^nH(t))(s) = (-1)^nD^n\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^n(-1)^n\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

quindi

$$\mathscr{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \Re(s) > 0.$$

Teorema 4.1.17. (trasformata di una derivata)

Hp) $f \in C^0(\mathbb{R}_0^+)$ *regolare a tratti, assolutamente* $\mathscr{L}$*-trasformabile per* $\Re(s) > \rho$ *e* f' *assolutamente* $\mathscr{L}$*-trasformabile per* $\Re(s) > \rho'$.

Ts) $\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f)(s) - f(0) \quad \Re(s) > \max\{\rho, \rho'\}$.

Dimostrazione. Per ogni $T > 0$ e $\Re(s) > \max\{\rho, \rho'\}$ si ha

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^T - \int_0^T (-s)e^{-st} f(t)dt$$

(la formula di integrazione per parti vale solo se le funzioni con cui lavoriamo sono assolutamente continue; l'esponenziale è assolutamente continua, inoltre le ipotesi su f ci garantiscono l'assoluta continuità). Dalla precedente uguaglianza otteniamo

$$e^{-sT} f(T) = f(0) + \int_0^T e^{-st} f'(t)dt - s\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

per $T \to +\infty$ risulta

$$\lim_{T\to+\infty} e^{-sT} f(T) = f(0) + \mathscr{L}(f')(s) - s\mathscr{L}(f)(s).$$

Dal momento che $e^{-st} f(t) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_0^+)$ abbiamo

$$\lim_{T\to+\infty} e^{-sT} f(T) = 0$$

da cui infine

$$\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f)(s) - f(0).$$

□

4.1.3 Convoluzione e trasfomata di Laplace

Definizione 4.1.18. *Siano* $f, g \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ *con* $f(t) = g(t) = 0 \quad \forall t < 0$. *Poniamo*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

(osserviamo che se $\tau \in [0, t]$ *allora* $t - \tau > 0$*).*

Analogamente a quanto fatto nella serie di Fourier otteniamo

1. $(f * g)(t)$ ha senso per quasi ogni $t \geq 0$.
2. $(f * g) \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$
3. Valgono le proprietà associativa, commutativa e distributiva.

Teorema 4.1.19.

Hp) $f, g \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0)$, *f assolutamente* $\mathscr{L}$*-trasformabile per* $\Re(s) > \rho_1$ *e g* $\mathscr{L}$*-trasformabile per* $\Re(s) > \rho_2$

Ts) $f * g$ *è* $\mathscr{L}$*-trasformabile per* $\Re(s) > \max\{\rho_1, \rho_2\}$ *e si ha*

$$\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f)\mathscr{L}(g).$$

Corollario 4.1.20. (teorema del valore finale)

Hp) $f \in C^0(\mathbb{R}^+_0)$ *regolare a tratti in* $\mathbb{R}^+_0$, $\mathscr{L}$*-trasformabile per* $\Re(s) > \rho$, *con* $\rho \leq 0$, f' *è assolutamente* $\mathscr{L}$*-trasformabile per* $\Re(s) > \rho'$ *e* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l \in \mathbb{C}$

Ts) $\exists \lim_{s\to 0} s\,\mathscr{L}(f)(s) = l$.

4.1.4 Formula di conversione

Sia $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+_0)$ con $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$, f $\mathscr{L}$-trasformabile per $\Re(s) > \rho$. Se $s = x + iy$ allora

$$\mathscr{L}(f)(x+iy) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+iy)t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-iyt}\big[e^{-xt}f(t)\big]dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\left(\frac{y}{2\pi}\right)t}\big[e^{-xt}f(t)\big]dt = \mathscr{F}(e^{-xt}f(t))\left(\frac{y}{2\pi}\right),$$

a patto che $e^{-xt}f(t)$ sia sommabile in $\mathbb{R}$.
Sia $x > \rho$. Se $e^{-xt}f(t) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ ed è regolare a tratti allora in base alla formula di inversione per la trasformata di Fourier si ha

$$e^{-xt}\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = (PV)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi izt}\mathscr{F}(e^{-xt}f(t))(z)dz =$$
$$= (PV)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt}\mathscr{F}(e^{-xt}f(t))\left(\frac{y}{2\pi}\right)\frac{dy}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(PV)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt}\mathscr{L}(f)(x+iy)dy.$$

Dunque ottniamo infine

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi}(PV)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+iy)t}\mathscr{L}(f(t))(x+iy)dy$$

4.1.5 Un caso di antitrasformazione

Siano $A(s), B(s)$ due polinomi in s di grado rispettivamente m ed n con $m < n$. Dette $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ le radici distinte di B ed $m_1, m_2, \ldots, m_r$ le rispettive molteplicità, si ha

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \sum_{h=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{m_h}\frac{\beta_{h,k}}{(s-\alpha_h)^k}\right).$$

Dunque
$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{A(s)}{B(s)}\right)=\sum_{h=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{m_h}\beta_{h,k}e^{\alpha_h t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$
Nel caso in cui $m_h=1$ per ogni $h=1,\ldots,r$ allora $r=n$ e
$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{A(s)}{B(s)}\right)=\sum_{h=1}^{n}\beta_{h,1}e^{\alpha_h t}=\sum_{h=1}^{n}\frac{A(\alpha_h)}{B'(\alpha_h)}e^{\alpha_h t}.$$

La precedente è detta **formula di Heaviside**.

Distribuzioni

Definizione 5.1.21. *Sia $v \in C^\infty(\mathbb{R})$. Poniamo*

$$supp(v) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : v(x) \neq 0\}},$$

l'insieme $supp(v)$ si dice ***supporto*** *di v. La funzione v si dice a* ***supporto compatto*** *in $\mathbb{R}$ quando l'insieme $supp(v)$ è compatto (cioè chiuso e limitato). Indicheremo tale classe di funzioni con il simbolo $C_0^\infty(\mathbb{R})$.*

Osserviamo che $C_0^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$).

Definizione 5.1.22. *Consideriamo la successione di funzioni $\{v_k\} \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R})$. Diciamo che $v_k \to 0$ quando*

1. *Esiste $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ $\quad supp(v_k) \subseteq [a, b]$.*
2. *Per ogni $p \in \mathbb{N}$ $\quad v_k^{(p)} \to 0$ uniformemente in $\mathbb{R}$.*

Sia adesso $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, diciamo che $v_k \to v$ quando $(v_k - v) \to 0$. L'insieme $C_0^\infty(\mathbb{R})$ con la convergenza data si denota con $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ e si chiama ***spazio delle funzioni test****.*

Esempio 5.1.23. *Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Consideriamo la successione di funzioni test $v_k(x) = \frac{\varphi(kx)}{2^k}$. Proviamo che $v_k \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo $supp(v_k) = \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right] \subseteq [-1, 1]$. Sia $p \in \mathbb{N}$ e poniamo $M = \max_{[-1,1]} |\varphi^{(p)}(kx)|$, si ha

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |v_k^{(p)}(x)| = |\varphi^{(p)}(kx)| \frac{k^p}{2^k} \leq M \frac{k^p}{2^k} \to 0,$$

pertanto $v_k^{(p)}(x)$ converge uniformemente alla funzione nulla per ogni $p \in \mathbb{N}$. Dunque abbiamo $v_k \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Definizione 5.1.24. *Sia $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tale che*

1. *T è lineare.*
2. *T è continuo, cioè $\forall \{v_k\} \subseteq \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ per cui $v_k \to v$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ risulta $T(v_k) \to T(v)$.*

*allora T si chiama **distribuzione**. L'insieme delle distribuzioni verrà denotato con $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*

Sia $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, cioè $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ misurabile e tale che $f \in \mathscr{L}^1([a,b]) \quad \forall [a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Se $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ allora $\exists [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ tale che $supp(v) \subseteq [a,b]$ e $v \in C^0([a,b])$. Sotto queste ipotesi $f(x)v(x)$ è sommabile in $[a,b]$, quindi esiste finito l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

Proposizione 5.1.25. *Sia $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. L'applicazione $T_f : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definita da*

$$T_f(v) = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$$

è una distribuzione.

Dimostrazione. Ovviamente T_f è lineare. Proviamo che se $v_k \to v$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ allora $T(v_k) \to T(v)$. Per ipotesi esiste $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ tale che $supp(v_k) \subseteq [a,b] \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Inoltre $v_k \to v$ uniformemente in $\mathbb{R}$. Dunque

1. $f(x)v_k(x) \to f(x)v(x)$ puntualmente in $\mathbb{R}$.

2. $|f(x)v_k(x)| \leq M|f(x)| \quad \forall k \in \mathbb{N}$, con $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\max_{x\in[a,b]} |v_k(x)|\right) < +\infty$.
   ($M < +\infty$ poiché $v_k \to v$ uniformemente in $[a,b]$ e $v_k \in C^0([a,b])\, \forall k \in \mathbb{N}$).

Essendo la funzione $M|f(x)| \in \mathscr{L}^1([a,b])$ possiamo applicare il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f(x)v_k(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx,$$

cioè

$$\lim_{k\to+\infty} T_f(v_k) = T_f(v).$$

□

Da quanto detto diamo la seguente definizione.

Definizione 5.1.26. *Sia $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. La distribuzione $T_f : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definita da*

$$T_f(v) = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx \quad v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$$

*è detta **distribuzione funzione** di f.*

Il seguente esempio mostra che non tutte le distribuzioni sono delle distribuzioni di qualche funzione $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Esempio 5.1.27. *Sia $\delta : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ così definita*

$$\delta(v) = v(0) \quad \forall v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

*L'applicazione δ si dice **delta di Dirac** centrata in zero. δ è ovviamente lineare. Supponiamo che $v_k \to v$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, allora $v_k \to v$ puntualmente in $\mathbb{R}$, quindi $v_k(0) \to v(0)$, cioè $\delta(v_k) \to \delta(v)$. Dunque δ è una distribuzione. Supponiamo per assurdo che esista $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ per cui $\delta(v) = T_f(v)$ per ogni $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, cioè*

$$v(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{5.6}$$

Consideriamo adesso la successione di funzioni test $v_k(x) = \varphi(kx) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, dove

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Abbiamo $v_k(0) = \frac{1}{e} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. D'altra parte $f(x)v_k(x) \to 0$ puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ essendo supp$(v_k) \subseteq \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right] \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Inoltre $|f(x)v_k(x)| \leq |f(x)|$ e $f \in \mathscr{L}^1([-1,1])$ quindi possiamo applicare il teorema di convergenza dominata ottenendo

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)v_k(x)dx = 0,$$

cioè in corrispondenza di $\frac{1}{e}$ esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$v_{\bar{k}}(0) = \frac{1}{e} > \int_{\mathbb{R}} f(x)v_{\bar{k}}(x)dx,$$

che contraddice la (5.6), assurdo.

Definizione 5.1.28. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, la distribuzione $\delta_{x_0} : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definita da $\delta_{x_0}(v) = v(x_0) \quad \forall v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ è detta **delta di Dirac** centrata in x_0.*

Teorema 5.1.29. *Siano $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. Se $T_{f_1}(v) = T_{f_2}(v)$ per ogni $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ allora $f_1(x) = f_2(x)$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$.*

Definizione 5.1.30. *Sia $\{T_k\} \subseteq \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Diciamo che $T_k \to T$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ quando per ogni $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ risulta $T_k(v) \to T(v)$ in $\mathbb{C}$.*

Teorema 5.1.31. *Se $\{f_k\} \subseteq \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ è una successione di funzioni tale che*

1. $\forall k \in \mathbb{N} \quad f_k(x) \geq 0$ *quasi ovunque in* $\mathbb{R}$.
2. $\forall k \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx = 1$.
3. $\forall \alpha > 0$ *risulta* $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f_k(x)dx = 1$.

Allora $T_{f_k} \to \delta$.

Dimostrazione. Sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, proviamo che $T_{f_k}(v) \to \delta(v)$, cioè che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)v(x)dx = v(0).$$

In base alla 2. risulta

$$v(0) = \int_{\mathbb{R}} f_k(x)v(0)dx,$$

quindi basta provare che

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)(v(x) - v(0))dx = 0.$$

Fissiamo $\epsilon > 0$. Dal momento che v è continua esiste $\alpha > 0$ tale che

$$|v(x) - v(0)| < \frac{\epsilon}{6} \quad \forall x \in [-\alpha, \alpha].$$

In corrispondenza di $\epsilon > 0$ e $\alpha > 0$ per la 3. esiste $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > \nu_1$ si ha

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f_k(x)dx < 2$$

da cui

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |v(x) - v(0)|f_k(x)dx < \frac{\epsilon}{6} \int_{-\alpha}^{\alpha} f_k(x)dx < \frac{\epsilon}{6}2 = \frac{\epsilon}{3}.$$

Sia $M = \max_{x\in\mathbb{R}} |v(x)|$, in corrispondenza di $\epsilon > 0$ e $\alpha > 0$ in base alla 3. esiste $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > \nu_2$ risulta

$$\left|1 - \int_{-\alpha}^{\alpha} f_k(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{6M},$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{+\infty} |v(x) - v(0)|f_k(x)dx \leq 2M \int_{\alpha}^{+\infty} f_k(x)dx = 2M \left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f_k(x)dx\right] = \\ = 2M \left[1 - \int_{-\infty}^{\alpha} f_k(x)dx\right] \leq 2M \left[1 - \int_{-\alpha}^{\alpha} f_k(x)dx\right] < 2M\frac{\epsilon}{6M} = \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo possiamo procedere con $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} |v(x) - v(0)|f_k(x)dx$, ottenendo infine, per ogni $k > \nu_2$, le seguenti disuguaglianze

$$\int_{\alpha}^{+\infty} |v(x) - v(0)|f_k(x)dx < \frac{\epsilon}{3},$$

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} |v(x) - v(0)|f_k(x)dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dunque per ogni $k > \max\{\nu_1, \nu_2\}$ risulta

$$\left|\int_{\mathbb{R}} (v(x) - v(0)) f_k(x) dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |v(x) - v(0)| f_k(x) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{-\alpha} |v(x) - v(0)| f_k(x) dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} |v(x) - v(0)| f_k(x) dx + \int_{\alpha}^{\infty} |v(x) - v(0)| f_k(x) dx <$$
$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

□

Definizione 5.1.32. *Siano* $\{f_k\} \subseteq \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ *ed* $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. *Diciamo che* $f_k \to f$ *in* $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ *quando per ogni intervallo* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *risulta*

$$\lim_{k \to +\infty} \int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx = 0$$

Teorema 5.1.33. *Se* $\{f_k\} \subseteq \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ *ed* $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ *sono tali che* $f_k \to f$ *in* $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ *allora* $T_{f_k} \to T_f$ *in* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, quindi $supp(v) \subseteq [a, b]$ per qualche intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Dimostriamo che $T_{f_k}(v) \to T_f(v)$. Sia $M = \max_{x \in \mathbb{R}} |v(x)|$, per ipotesi $f_k \to f$ in $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, quindi fissato $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > \nu$ si ha

$$\int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx < \frac{\epsilon}{M}$$

da cui

$$|T_{f_k}(v) - T_f(v)| = \left|\int_{\mathbb{R}} (f_k(x) - f(x)) v(x) dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)||v(x)| dx \leq$$
$$\leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)||v(x)| dx \leq M \int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

□

Definiamo alcune operazioni riguardanti le distribuzioni.

1. **Combinazione Lineare.** Siano $c_1, c_2 \in \mathbb{C}, T_1, T_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, poniamo

$$(c_1 T_1 + c_2 T_2)(v) = c_1 T_1(v) + c_2 T_2(v) \quad \forall v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

2. **Prodotto di una funzione** $C^\infty(\mathbb{R})$. Siano $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, poniamo

$$(\alpha T)(v) = T(\alpha v) \quad \forall v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

3. **Composizione con funzioni affini.** Siano $\psi(x) = ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} (a \neq 0)$ e $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, definiamo

$$(T \circ \psi)(v) = T\left(\frac{1}{|a|} v\left(\frac{x - b}{a}\right)\right) \quad \forall v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Quest'ultima definizione può essere giustificata a partire da considerazioni sulle distribuzioni funzioni. Infatti se $T = T_f$ per qualche $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ allora

$$(T \circ \psi)(v) = \int_{\mathbb{R}} (f \circ \psi)(x) v(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b) v(x) dx =$$
$$= \frac{a}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) v\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} f(y) v\left(\frac{y-b}{a}\right) dy = T_f\left(\frac{1}{|a|} v\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)$$

dove abbiamo posto $y = ax + b$ ed il termine $\frac{a}{|a|}$ è dovuto al cambiamento degli estremi di integrazione in base al segno di a.

Definizione 5.1.34. *Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, poniamo*

$$T'(v) = -T(v') \quad \forall v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Si verifica subito che $T' : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ è una distribuzione detta ***derivata prima*** *di T nel senso delle distribuzioni.*

Osservazione 5.1.35. *La precedente osservazione può essere giustificata nel seguente modo. Se $T = T_{f'}$ per qualche $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ derivabile in tutto $\mathbb{R}$ allora sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $supp(v) \subseteq [a, b]$, si ha*

$$T_{f'}(v) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) v(x) dx = \int_a^b f'(x) v(x) dx =$$
$$= \big[f(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x) v'(x) dx = -\int_a^b f(x) v'(x) dx = -T_f(v').$$

Possiamo ricorsivamente definire le derivate di ordine superiore al primo.

Definizione 5.1.36. *Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $n \in \mathbb{N}$, poniamo*

$$T^{(n+1)}(v) = -T^{(n)}(v') \quad \forall v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

In questo modo si ottiene

$$T^{(n)}(v) = (-1)^n T\left(v^{(n)}\right) \quad \forall v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Esempio 5.1.37. *Calcoliamo la derivata della distribuzione funzione di $H(x)$. Sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $supp(v) \subseteq [a, b]$, si ha*

$$(T_H)'(v) = -T_H(v') = -\int_{\mathbb{R}} H(x) v'(x) dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} v'(x) dx = \begin{cases} 0 = v(0) & b < 0 \\ -\int_0^b v'(x) dx = v(0) & a < 0 < b \\ 0 = v(0) & 0 < a < b \end{cases} = v(0) = \delta(v).$$

Dunque $(T_H)' = \delta$. In generale per $x_0 \in \mathbb{R}$ in modo analogo si prova che $(T_{H(x-x_0)})' = \delta_{x_0}$.

Teorema 5.1.38. *Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ è regolare a tratti in $\mathbb{R}$ allora*

$$(T_f)' = T_{f'}.$$

Teorema 5.1.39. *Se $f \in C^0(\mathbb{R}\setminus\{x_0\})$ è regolare a tratti in $\mathbb{R}$ e $s = f(x_0^+) - f(x_0^-)$ allora*

$$(T_f)' = T_{f'} + s\delta_{x_0}$$

Dimostrazione. Poniamo $g(x) = f(x) - sH(x - x_0)$. È facile verificare che g è continua in $\mathbb{R}$, infatti

$$\lim_{x\to x_0^-} g(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-),$$
$$\lim_{x\to x_0^+} g(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) - f(x_0^+) + f(x_0^-) = f(x_0^-).$$

Inoltre $g'(x) = f'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ in cui f (e quindi g) è derivabile, pertanto g è regolare a tratti. Dal teorema precedente segue che $(T_g)' = T_{g'} = T_{f'}$. Dunque sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned}(T_f)'(v) = -T_f(v') = -\int_{\mathbb{R}} f(x)v'(x) = \\ = -\int_{\mathbb{R}} g(x)v'(x)dx + s\left(-\int_{\mathbb{R}} H(x-x_0)v'(x)dx\right) = \\ = -T_g(v') + s(-T_{H(x-x_0)}(v')) = (T_g)'(v) + s(T_{H(x-x_0)})'(v) = \\ = T_{f'}(v) + s\delta_{x_0}(v).\end{aligned}$$

□

5.2 Distribuzioni temperate

Definizione 5.2.1. *Sia $v \in C^\infty(\mathbb{R})$. Diciamo che v è a **decrescenza rapida** quando*

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\, \exists c_{p,q} > 0 : \quad |x^p v^{(q)}(x)| \le c_{p,q} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida si chiama **spazio di Schwarz** e si denota con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Osservazione 5.2.2. *Se $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $v \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ con $p \in \{1, 2, \dots, \infty\}$. Infatti, posto $M = \max_{[-1,1]} |v(x)|$ sia*

$$\varphi(x) = \begin{cases} M & |x| \le 1 \\ \frac{c_{p,0}}{|x|^p} & |x| > 1 \end{cases}.$$

In particolare $v \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, quindi possiamo calcolare la trasformata di Fourier $\mathscr{F}(v)$ di $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Osservazione 5.2.3. *Si ha $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R})$, infatti si verifica facilmente che ogni funzione test è a decrescenza rapida. Non vale il viceversa, infatti basta considerare la funzione e^{-x^2} che è a decrescenza rapida ma non è a supporto compatto.*

Definizione 5.2.4. *Sia $\{v_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Diciamo che $v_k \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ quando*

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad x^p v_k^{(q)} \to 0 \text{ uniformemente in } \mathbb{R}.$$

Se $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ diciamo che $v_k \to v$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se $(v_k - v) \to 0$.

Osservazione 5.2.5. *Sia $\{v_k\} \subseteq \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Se $v_k \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ allora $v_k \to 0$ anche in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Infatti per ipotesi supp$(v_k) \subseteq [a, b] \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Posto $M = \max_{[a,b]} x^p$ si ha*

$$|x^p v_k^{(q)}(x) \leq M|v_k^{(q)}(x)| \to 0 \text{ uniformemente in } \mathbb{R}.$$

Tuttavia non vale il viceversa. Basta considerare la successione di funzioni $v_k(x) = \frac{\varphi(x/k)}{2^k}$ dove

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Si ha supp$(v_k) \subseteq [-k, k]$ quindi $v_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Tuttavia non esiste un intervallo $[a, b]$ tale che supp$(v_k) \subseteq [a, b] \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dunque la succession $\{v_k\}$ non converge in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ mentre si può provare facilmente che $v_k \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definizione 5.2.6. *Una* ***distribuzione temperata*** *è un'applicazione $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tale che*

1. *T è lineare.*

2. *T è continuo, cioè se $v_k \to v$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $T(v_k) \to T(v)$ in $\mathbb{C}$.*

Lo spazio delle distribuzioni temperate si denota con $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Esempio 5.2.7. *Consideriamo $\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ così definita*

$$\delta(v) = v(0) \quad \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

δ è una distribuzione temperata, infatti se abbiamo $\{v_k\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ con $v_k \to 0$ allora

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad x^p v_k^{(q)}(x) \to 0 \text{ uniformement in } \mathbb{R}.$$

Dunque per $p = q = 0 \quad v_k(x) \to 0$ uniformemente in $\mathbb{R}$, in particolare $v_k(0) \to 0$, cioè $\delta(v_k) \to \delta(0) = 0$.

Definizione 5.2.8. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice a* ***crescita lenta*** *se esiste un polinomio $p(x)$ e una funzione $f_1 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ tali che*

$$f(x) = p(x) f_1(x) \quad \text{quasi ovunque in } \mathbb{R}.$$

Lemma 5.2.9. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è a crescita lenta allora $fv \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \quad \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Per ipotesi esistono un polinomio $p(x)$ e una funzione $f_1 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ tali che $f(x) = p(x) f_1(x)$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$. Sia $n = \deg p(x)$ e sia $m > n + 1$ pari. Posto $M = \max_{|x| \leq 1} |p(x) v(x)|$ risulta

$$|f(x) v(x)| \leq |p(x) v(x) f_1(x)| \leq M |f_1(x)| \quad |x| \leq 1.$$

Inoltre ponendo $H = \sup_{|x|>1} \left|\frac{p(x)}{x^m}\right|$ si ha

$$|f(x)v(x)| = |p(x)v(x)f_1(x)| \leq \left|\frac{p(x)}{x^m}\right| |x^m v(x)||f_1(x)| \leq Hc_{m,0}|f_1(x)| \quad |x| > 1.$$

In base alle due disuguaglianze scritte $fv \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. $\square$

Teorema 5.2.10. *Se $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora*

1. *$\mathscr{F}(v) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*
2. *L'applicazione $\mathscr{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ che associa $v \rightarrowtail \mathscr{F}(v)$ è lineare e continua, nel senso che se $v_k \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\mathscr{F}(v_k) \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Osserviamo che la "continuità" dell'operatore $\mathscr{F}$ stavolta si riferisce alla stessa convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definizione 5.2.11. *Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Poniamo*

$$\mathscr{F}(T)(v) = T(\mathscr{F}(v)) \quad \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

*$\mathscr{F}(T)$ in base al precedente teorema risulterà una distribuzione temperata detta **trasformata temperata di Fourier** di T.*