Appunti di Geometria Algebrica

Alessio Borzì

15 febbraio 2019

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Alcuni richiami

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Una volta ricordato che con $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ intendiamo lo spazio affine standard ($\mathbb{K}^n$ come spazio affine su se stesso), nel seguito, per semplicità, faremo la seguente identificazione

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^n.$$

Ricordiamo che a ogni polinomio in n variabili a coefficienti in $\mathbb{K}$ si può associare in modo naturale una funzione polinomiale. Più precisamente, sia $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ l'anello delle funzioni polinomiali di n variabili a coefficienti in $\mathbb{K}$, e sia $\varphi : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ che a ogni polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ associa la funzione polinomiale $\varphi(f) : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$ definita da

$$\varphi(f)(p) = f(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K} \qquad \forall p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}.$$

La funzione φ è un omomorfismo di anelli. Esso è ovviamente suriettivo, ma in generale non è iniettivo. Infatti, nel caso in cui $\mathbb{K}$ sia un campo finito $\mathbb{K} = \{p_1, \dots, p_n\}$, basta considerare il polinomio $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - p_i)$. Si ha che f non è il polinomio nullo, ma per costruzione la sua funzione polinomiale si annulla in tutti gli elementi di $\mathbb{K}$. In altri termini $f \neq \underline{0}$ ma $\varphi(f) = \varphi(\underline{0})$. Il principio di identità dei polinomi (Teorema 1.1.1) ci garantisce che se $\mathbb{K}$ è infinito allora φ è un isomorfismo di anelli. Pertanto possiamo identificare i polinomi con le loro funzioni polinomiali.

Teorema 1.1.1 (Principio di identità dei polinomi)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito.*
Se $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è tale che $f(p) = 0$ per ogni $p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ allora f è il polinomio nullo.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Se $n = 1$ dal teorema di Ruffini segue che f può avere al più un numero di radici pari al suo grado, ma dato che $\mathbb{K}$ è infinito f deve essere necessariamente il polinomio nullo.
Supponiamo il teorema vero per $n - 1$, dimostriamolo per n. Fissiamo $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$, per ipotesi il polinomio $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x_n) \in \mathbb{K}[x_n]$ ha infinite radici, quindi per l'ipotesi induttiva esso è il polinomio nullo, cioè i suoi coefficienti devono essere tutti nulli. Ma i coefficienti di $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x_n)$ sono polinomi calcolati in $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, dall'arbitrarietà di questi ultimi e dall'ipotesi induttiva segue che essi sono polinomi nulli, pertanto abbiamo che f è il polinomio nullo. $\square$

Vogliamo ora associare a ogni punto dello spazio affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, che è un oggetto geometrico, un ideale massimale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, che è un oggetto algebrico. Osserviamo preliminarmente che ogni ideale della forma

$$(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \tag{1.1}$$

è massimale, infatti

$$\frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)} \simeq \mathbb{K}.$$

Adesso, per ogni punto $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ definiamo l'applicazione

$$\mathrm{ev}_p : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K} \qquad \mathrm{ev}_p(f) = f(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}.$$

Proposizione 1.1.2. *La funzione* ev_p *è un omomorfismo suriettivo di* $\mathbb{K}$*-algebre e inoltre, essendo* $p = (a_1, \ldots, a_n)$*, si ha*

$$\ker ev_p = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

Dimostrazione. Il fatto che ev_p sia un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre segue subito dalla definizione di somma e prodotto tra polinomi. Per la suriettività è sufficiente considerare i polinomi costanti. Proviamo che $\ker ev_p = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Osserviamo che l'inclusione $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subseteq \ker ev_p$ è banale in quanto i polinomi $x_i - a_i \in \ker ev_p$. L'uguaglianza segue poi dalla massimalità di $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. □

In generale, non tutti gli ideali massimali di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sono della forma(1.1). Basta considerare in $\mathbb{R}[x]$ l'ideale $(x^2 + 1)$. Si ha

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2 + 1)} \simeq \mathbb{C}$$

Pertanto $(x^2 + 1)$ è massimale in $\mathbb{R}[x]$, ma non è della forma (1.1).

Lemma 1.1.3 (Lemma di Normalizzazione di Noether)**.** *Sia A una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata con $\dim A = r$, allora esistono $y_1, \ldots, y_r \in A$ algebricamente indipendenti su $\mathbb{K}$ tali che l'estensione $\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_r] \subseteq A$ è integrale.*

Dimostrazione. Omessa □

Teorema 1.1.4 (Teorema degli zeri di Hilbert in forma debole)**.** *Siano $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e $m \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideale massimale. Allora esistono $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $m = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$.*

Dimostrazione. Poniamo

$$A = \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{m} = \mathbb{K}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}].$$

Dalla massimalità di m segue che A è un campo, quindi $\dim A = 0$. Dato che A è anche una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, dal Lemma di normalizzazione di Noether (1.1.3) segue che che l'estensione $\mathbb{K} \subseteq A$ è integrale, cioè algebrica. Dal momento che $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso deve aversi $\mathbb{K} \simeq A$. Pertanto esiste un isomorfismo di campi

$\phi : A \to \mathbb{K}$ che è anche un isomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre. Poniamo $\phi(\overline{x_i}) = a_i \in \mathbb{K}$, allora deve aversi

$$\phi(\overline{x_i}) = \phi(\overline{a_i}) \Rightarrow \overline{x_i} = \overline{a_i} \Rightarrow x_i + m = a_i + m \Rightarrow x_i - a_i \in m.$$

Pertanto $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle \subseteq m$. Dalla massimalità dell'ideale $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ segue l'uguaglianza. $\square$

Osservazione 1.1.5. Il teorema degli zeri di Hilbert in forma debole fornisce una sorta di "generalizzazione" del teorema fondamentale dell'algebra. Infatti in una variabile si ha che

$$\text{vale la tesi del teorema debole degli zeri di Hilbert} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$$

Per provare l'implicazione $\Longrightarrow$ basta osservare che la condizione che ogni ideale massimale è della forma (1.1) implica immediatamente che i polinomi irriducibili di $\mathbb{K}[x]$ sono tutti e soli quelli di primo grado.

Lemma 1.1.6 (La chiusura è una proprietà locale)**.** *Sia X uno spazio topologico e $\{U_i\}_{i\in I}$ un suo ricoprimento aperto, cioè una famiglia di aperti di X tali che $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Un insieme $Z \subseteq X$ è chiuso se e solo se $Z_i = Z \cap U_i$ è chiuso in U_i per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. La parte necessaria è ovvia. Viceversa supponiamo che Z_i è chiuso in U_i per ogni $i \in I$. Risulta

$$\begin{aligned} X \setminus Z = X \cap (X \setminus Z) = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap (X \setminus Z) = \bigcup_{i\in I} \Big(U_i \cap (X \setminus Z)\Big) = \\ = \bigcup_{i\in I} U_i \setminus Z = \bigcup_{i\in I} U_i \setminus Z_i. \end{aligned}$$

Gli insiemi $U_i \setminus Z_i$ sono aperti in U_i, quindi sono aperti anche in X, da cui $X \setminus Z$ è aperto, quindi Z è chiuso. $\square$

Proposizione 1.1.7. *Sia Y uno spazio topologico e X un suo sottospazio. Sia $Z \subseteq X$ un insieme chiuso in X, se $\overline{Z}$ è la chiusura di Z in Y, allora*

1. $Z = \overline{Z} \cap X$.
2. $\overline{Z} = Z \cup (\overline{Z} \cap (Y \setminus X))$.

Dimostrazione.

1. Chiaramente $Z \subseteq \overline{Z} \cap X$. Viceversa sia $x \in \overline{Z} \cap X$ e $x \in U \subseteq X$ con U aperto di X. Dato che X è un sottospazio di Y, esiste un aperto V di Y tale che $U = V \cap X$. Adesso $x \in \overline{Z}$, quindi $U \cap Z = V \cap X \cap Z = V \cap Z \neq \emptyset$, dall'arbitrarietà di U segue che x sta nella chiusura di Z in X, cioè $x \in Z$.
2. $\overline{Z} = \overline{Z} \cap (X \cup (Y \setminus X)) = Z \cup (\overline{Z} \cap (Y \setminus X))$.

$\square$

Capitolo 2

Varietà algebriche

2.1 Funzioni $\mathscr{I}$ e V

Definizione 2.1.1. Dato $F \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ poniamo

$$V(F) = \{P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} : f(P) = 0 \quad \forall f \in F\} \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}.$$

Osserviamo che tutti i polinomi appartenenti all'ideale generato da F si annullano in tutti i punti di $V(F)$. In altri termini se $I = \langle F \rangle = \{\sum_{i=1}^n a_i f_i : a_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n], f_i \in F\}$ è l'ideale generato da F allora

$$V(F) = V(I).$$

Definizione 2.1.2. Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ si dice **insieme algebrico** se esiste un ideale $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tale che $X = V(I)$

Dato che $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è Noetheriano allora ogni suo ideale è finitamente generato. Pertanto ogni insieme algebrico è l'insieme dei punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ che soddisfano un numero finito di equazioni polinomiali

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Definizione 2.1.3. Dato $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ definiamo l'insieme

$$\mathscr{I}(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : f(P) = 0 \quad \forall P \in X\} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n].$$

È facile verificare che per ogni $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ l'insieme $\mathscr{I}(X)$ è un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Abbiamo così definito due applicazioni

$$\begin{array}{llcll} V: & \{I \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\} & \to & \mathcal{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) & I \mapsto V(I) \\ \mathscr{I}: & \mathcal{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) & \to & \{I \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\} & X \mapsto \mathscr{I}(X). \end{array}$$

Proposizione 2.1.4. *Siano $I, J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ due ideali e $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.*

1a. $I \subseteq \mathscr{I}(V(I))$	*1b.* $X \subseteq V(\mathscr{I}(X))$
2a. $I \subseteq J \Rightarrow V(I) \supseteq V(J)$	*2b.* $X \subseteq Y \Rightarrow \mathscr{I}(X) \supseteq \mathscr{I}(Y)$
3a. $V(\mathscr{I}(V(I))) = V(I)$	*3b.* $\mathscr{I}(V(\mathscr{I}(X))) = \mathscr{I}(X)$
4a. $V(1) = \emptyset$, $V(0) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.	*4b.* $\mathscr{I}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = (0), \mathscr{I}(\emptyset) = \mathbb{K}[\,\underline{x}\,]$
5a. $V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$	*5b.* $\mathscr{I}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{I}(X_\lambda)$
6a. $V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$	*6b.* $\mathscr{I}(X \cap Y) \supseteq \mathscr{I}(X) + \mathscr{I}(Y)$

(nel punto 4, $\mathscr{I}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = (0)$ vale solo nel caso $\mathbb{K}$ infinito).

Dimostrazione. Proviamo le asserzioni (a), le (b) sono analoghe.

1a. Se $f \in I$ allora $f(P) = 0$ per ogni $P \in V(I)$, cioè $f \in \mathscr{I}(V(I))$.

2a. Se $P \in V(J)$ allora $f(P) = 0$ per ogni $f \in I \subseteq J$ quindi $P \in V(I)$.

3a. $V(I) \subseteq V(\mathscr{I}(V(I)))$ (punto 1), $I \subseteq \mathscr{I}(V(I)) \Rightarrow V(I) \supseteq V(\mathscr{I}(V(I)))$ (punto 2).

4a. $1(P) = 1 \neq 0$ per ogni $P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, mentre $0(P) = 0$ per ogni $P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

5a. $\subseteq$ $I_\mu \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \Rightarrow V(I_\mu) \supseteq V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$ per ogni $\mu \in \Lambda$.
$\supseteq$ Se $P \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$ allora per ogni $\sum_{i=1}^n f_{\lambda_i} \in \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ con $f_{\lambda_i} \in I_{\lambda_i}$ si ha $\left(\sum_{i=1}^n f_{\lambda_i}\right)(P) = \sum_{i=1}^n f_{\lambda_i}(P) = 0$, da cui $P \in V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)$.

6a. Sia $P \in V(IJ)$. Se per ogni $f \in I$ si ha $f(P) = 0$ allora $P \in V(I)$, altrimenti esiste $f \in I$ tale che $f(P) \neq 0$, quindi per ogni $g \in J$ si ha $fg \in IJ$ quindi $0 = (fg)(P) = f(P)g(P)$ da cui $g(P) = 0$, pertanto $P \in V(J)$. In ogni caso $P \in V(I) \cup V(J)$. Pertanto $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$.
Adesso abbiamo $I \cap J \subseteq I \Rightarrow V(I \cap J) \supseteq V(I)$, analogamente $V(I \cap J) \supseteq V(J)$ da cui $V(I \cap J) \supseteq V(I) \cup V(J)$. Inoltre $IJ \subseteq I \cap J$ da cui $V(IJ) \supseteq V(I \cap J)$, ottenendo infine

$$V(IJ) \supseteq V(I \cap J) \supseteq V(I) \cup V(J) \supseteq V(IJ).$$

□

Proposizione 2.1.5. *Per ogni $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e per ogni ideale $I \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ si ha*

1. $\mathscr{I}(X) = \sqrt{\mathscr{I}(X)}$

2. $V(I) = V(\sqrt{I})$

Dimostrazione.

1. Sia $f \in \sqrt{\mathscr{I}(X)}$ allora $f^n \in \mathscr{I}(X)$, cioè $f^n(P) = 0 \Rightarrow f(P) = 0$ per ogni $P \in X$, quindi $f \in \mathscr{I}(X)$. L'inclusione inversa vale sempre.

2. $I \subseteq \sqrt{I} \Rightarrow V(I) \supseteq V(\sqrt{I})$. Viceversa sia $P \in V(I)$, allora per ogni $f \in \sqrt{I}$ abbiamo $f^n \in I$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, da cui $f^n(P) = 0 \Rightarrow f(P) = 0$, cioè $P \in V(\sqrt{I})$. □

Proviamo adesso, a partire dalla forma debole, il teorema degli zeri di Hilbert in forma forte.

Corollario 2.1.6. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Un ideale I di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è proprio se e solo se $V(I) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ I è contenuto in un ideale massimale m di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Dal teorema degli zeri di Hilbert in forma debole esistono $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $m = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$. Pertanto $p = (a_1, \ldots, a_n) \in V(m) \subseteq V(I) \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$ Basta osservare che $V(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$. □

Teorema 2.1.7 (Teorema degli zeri di Hilbert in forma forte)**.** *Se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso allora per ogni ideale I di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ si ha*

$$\mathscr{I}(V(I)) = \sqrt{I}.$$

Dimostrazione.

$\subseteq$ Osserviamo prima di tutto che $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è Noetheriano, quindi l'ideale I è finitamente generato $I = (f_1, \ldots, f_n)$.
Sia $f \in \mathscr{I}(V(I))$ e sia $J = I + \langle fT - 1 \rangle \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, T]$. Per assurdo sia $\overline{P} = (a_1, \ldots, a_n, b) \in V(J) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$ abbiamo che $P = (a_1, \ldots, a_n) \in V(I)$ infatti per ogni $g \in I$ si ha $g + 0 \in I + \langle fT - 1 \rangle = J$, quindi $g(\overline{P}) = g(P) = 0$. D'altra parte abbiamo

$$(fT - 1)(\overline{P}) = f(P)b - 1 = -1 \neq 0,$$

assurdo, quindi $V(J) = \emptyset$. Per il corollario precedente $J = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, T]$. Pertanto $1 \in J = I + \langle fT - 1 \rangle$, da cui si ha

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \lambda(fT - 1)$$

dove gli f_i sono i generatori di I e $\lambda, \lambda_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, T]$. Consideriamo adesso l'omomorfismo $\phi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, T] \to \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ con $\phi(x_i) = x_i$, $\phi(T) = 1/f$. Risulta

$$1 = \phi(1) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \lambda(fT - 1)\right) = \sum_{i=1}^{n} \phi(\lambda_i) f_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{\lambda}_i}{f^{m_i}} f_i.$$

Ponendo $m = \max\{m_i : i = 1, \ldots, n\}$ si ha

$$f^m = \sum_{i=1}^{n} f^{m - m_i} \tilde{\lambda}_i f_i \in I \Rightarrow f \in \sqrt{I}.$$

$\supseteq$ Basta osservare che $\sqrt{I} \subseteq \mathscr{I}(V(\sqrt{I})) = \mathscr{I}(V(I))$. □

2.2 Spazi topologici irriducibili

Definizione 2.2.1. Uno spazio topologico X è **irriducibile** se dati due chiusi F, G tali che $X = F \cup G$ si ha $X = F$ oppure $X = G$. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è **irriducibile** se lo è rispetto alla topologia indotta. L'insieme vuoto non è considerato un insieme irriducibile.

Osserviamo che i punti (singoletti) sono banalmente irriducibili.

Proposizione 2.2.2. *Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione continua. Se X è irriducibile allora $f(X)$ è irriducibile.*

Dimostrazione. Siano $F, G \subseteq Y$ due chiusi tali che $f(X) \subseteq F \cup G$, allora passando alle controimmagini $X = f^{-1}(F) \cup f^{-1}(G)$. Dato che f è continua $f^{-1}(F)$ e $f^{-1}(G)$ sono chiusi, quindi dall'irriducibilità di X si ha $X = f^{-1}(F)$ oppure $X = f^{-1}(G)$, cioè $f(X) \subseteq F$ oppure $f(X) \subseteq G$. □

Proposizione 2.2.3. *Per uno spazio topologico X le seguenti proprietà sono equivalenti*

1. *X è irriducibile.*
2. *Se U, V sono due aperti non vuoti di X allora $U \cap V \neq \emptyset$.*
3. *Ogni aperto non vuoto di X è denso.*

Dimostrazione. (1) $\Leftrightarrow$ (2) segue dalla definizione prendendo i complementari.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) segue dal fatto che un insieme è denso se e solo se interseca ogni aperto non vuoto. □

Corollario 2.2.4. *Sia X uno spazio topologico, per ogni $Y \subseteq X$ sono equivalenti*

1. *Y è irriducibile.*
2. *Se U, V sono due aperti che intersecano Y, allora $U \cap V$ interseca Y.*
3. *$\overline{Y}$ è irriducibile.*

Dimostrazione. (1) $\Leftrightarrow$ (2) segue dal punto 2 della Proposizione 2.2.3.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) segue dal fatto un aperto U interseca Y se e solo se interseca $\overline{Y}$. Infatti se U interseca Y allora $U \cap \overline{Y} \supseteq U \cap Y \neq \emptyset$. Viceversa se U interseca $\overline{Y}$, sia $x \in U \cap \overline{Y}$. L'aperto U è un intorno di $x \in \overline{Y}$, quindi $U \cap Y \neq \emptyset$. □

Dal punto 2 del Corollario 2.2.4 abbiamo il seguente risultato.

Corollario 2.2.5. *In uno spazio topologico irriducibile X gli aperti non vuoti sono irriducibili.*

Proposizione 2.2.6. *Sia X uno spazio topologico irriducibile e $U \subseteq X$ un aperto. Le funzioni $Z \mapsto Z \cap U$ e $W \mapsto \overline{W}$ sono delle biiezioni tra gli insiemi chiusi e irriducibili Z di X che intersecano U e gli insiemi chiusi e irriducibli W di U.*

Dimostrazione. Dai corollari 2.2.4 e 2.2.5 le due funzioni sono ben definite. Se $Z \subseteq X$ è chiuso, irriducibile tale che $Z \cap U \neq \emptyset$, allora $\overline{Z \cap U} = Z$, in quanto $Z \cap U$ è un aperto di Z irriducibile, quindi è denso in Z. Se invece $W \subseteq U$ è chiuso irriducibile, $\overline{W} \cap U = W$ in quanto W è chiuso in U. $\square$

Definizione 2.2.7. Una **componente irriducibile** di uno spazio topologico X è un sottoinsieme irriducibile massimale di X.

Dal Corollario 2.2.4 segue che ogni componente irriducibile è un insieme chiuso.

Proposizione 2.2.8. *Sia X uno spazio topologico.*

1. *Ogni sottoinsieme irriducibile di X è contenuto in una componente irriducibile.*

2. *X è unione delle sue componenti irriducibili.*

Dimostrazione.

1. Sia $Y \subseteq X$ irriducibile e $\Sigma = \{Z \subseteq X : Z \text{ è irriducibile, } Z \supseteq Y\}$. Chiaramente $Y \in \Sigma \neq \emptyset$. Sia $\{X_i\}_{i \in I} \subseteq \Sigma$ una catena e $Z = \bigcup_{i \in I} X_i$. Siano U e V due aperti che intersecano Z, allora esistono $i, j \in I$ tali che X_i interseca U e X_j interseca V. Se ad esempio $X_i \subseteq X_j$ allora X_j interseca $U \cap V$, quindi anche Z interseca $U \cap V$. Dal Corollario 2.2.4 segue $Z \in \Sigma$. Dal Lemma di Zorn Σ ha un elemento massimale, quindi Y è contenuto in una componente irriducibile.

2. Segue dal punto precedente dato che ogni singoletto è irriducibile. $\square$

Definizione 2.2.9. Uno spazio topologico X è **Noetheriano** se ogni catena discendente di chiusi $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots$ è stazionaria, cioè esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $X_n = X_{n+1} = \dots$

La precedente condizione sulle catene catene discendenti può essere data in un generico insieme parzialmente ordinato $(\Sigma, \leq)$. Essa è chiamata **Descending Chain Condition** (D.C.C.). Si dimostra facilmente che essa è equivalente alla **Minimal condition**, cioè al fatto che ogni sottoinsieme non vuoto di Σ ha un elemento minimale.

Proposizione 2.2.10. *In uno spazio topologico Noetheriano X ogni chiuso è unione finita di insiemi irriducibili.*

Dimostrazione. Sia Σ la famiglia di tutti i chiusi di X che non sono unione finita di insiemi irriducibili. Per assurdo supponiamo che $\Sigma \neq \emptyset$. Dato che X è Noetheriano, sia $Z \in \Sigma$ un elemento minimale. Per costruzione Z non è irriducibile, quindi $Z = F \cup G$ con F, G chiusi tali che $F, G \subsetneq Z$. Dalla minimalità di Z segue che $F, G \notin \Sigma$, quindi essi sono unione finita di insiemi irriducibili, ne segue che anche Z è unione finita di insiemi irriducibili, assurdo. $\square$

Il precedente risultato è la traduzione topologica del fatto che in ogni anello Noetheriano ogni ideale è intersezione finita di ideali irriducibili.

Corollario 2.2.11. *Uno spazio topologico Noetheriano X ha un numero finito di componenti irriducibili. Ogni componente irriducibile non è contenuta nell'unione delle altre.*

Dimostrazione. Dato che X è chiuso, dalla Proposizione 2.2.10, X è unione finita di insiemi irriducibili. Dal punto 1 della Proposizione 2.2.8 possiamo scrivere $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ con X_i componenti irriducibili distinte.

Sia ora $Y \subseteq X$ una componente irriducibile, allora $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ da cui $Y = X_i$ per qualche i. Pertanto le componenti irriducibili di X sono tutti e soli gli insiemi X_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se per assurdo $X_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} X_j$ allora $X_i = X_j$ per qualche $j \neq i$, contro $X_i \neq X_j$, assurdo. $\square$

Definizione 2.2.12. Uno spazio topologico X è **compatto** (o **quasi-compatto**) se ogni ricoprimento di aperti possiede un sottoricomprimento finito.

Osserviamo che uno spazio X è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi che gode della proprietà dell'intersezione finita (PIF) ha intersezione non vuota.

Proposizione 2.2.13. *Ogni spazio topologico Noetheriano è compatto.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Sia $\mathscr{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi che gode della PIF (ogni intersezione finita di elementi di $\mathscr{F}$ è non vuota). Consideriamo la seguente catena discendente di chiusi

$$F_{i_1} \supseteq F_{i_1} \cap F_{i_2} \supseteq F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3} \supseteq \ldots$$

dato che X è Noetheriano, la precedente catena è stazionaria. Se per assurdo $\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F = \emptyset$, allora la precedente catena dovrebbe essere stazionaria nell'insieme vuoto, quindi avremmo $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} = \emptyset$, contro il fatto che $\mathscr{F}$ gode della PIF. $\square$

2.3 Topologia di Zariski e varietà affini

In base alle proprietà della Proposizione 2.1.4 abbiamo che gli insiemi algebrici godono delle stesse proprietà della famiglia di insiemi chiusi di uno spazio topologico.

Definizione 2.3.1. La topologia su $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ in cui i chiusi sono gli insiemi algebrici si chiama **topologia di Zariski**.

Ad esempio, dato che ogni polinomio in una sola variabile ha un numero finito di radici, la topologia di Zariski di $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ è la topologia cofinita.

Proposizione 2.3.2. *Ogni funzione polinomiale $f : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ è continua (rispetto alla topologia di Zariski).*

Dimostrazione. Dato che la topologia di $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ è quella cofinita, basta verificare che la controimmagine tramite f di un singoletto è un insieme chiuso. Sia allora $\alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, risulta $f^{-1}(\{\alpha\}) = V(f - \alpha)$ (vedendo $f - \alpha \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$). $\square$

Osservazione 2.3.3. In base alla Proposizione 2.1.4, per ogni ideale $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ si ha

$$V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f).$$

Pertanto gli insiemi del tipo $V(f)$ formano una base di chiusi per la topologia di Zariski.

Osserviamo che per ogni insieme chiuso $X = V(I)$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, in base alla Proposizione 2.1.4 si ha $V(\mathscr{I}(X)) = X$.

Proposizione 2.3.4. *Per ogni $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ si ha $V(\mathscr{I}(X)) = \overline{X}$ (la chiusura nella topologia di Zariski).*

Dimostrazione.

$\subseteq$ $X \subseteq \overline{X} \Rightarrow \mathscr{I}(X) \supseteq \mathscr{I}(\overline{X}) \Rightarrow V(\mathscr{I}(X)) \subseteq V(\mathscr{I}(\overline{X})) = \overline{X}$.

$\supseteq$ Basta osservare che $V(\mathscr{I}(X))$ è un insieme chiuso che contiene X. □

Osservazione 2.3.5. La precedente proposizione e il Teorema degli zeri di Hilbert in forma forte ci dicono che, nel caso $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, $\mathscr{I}$ e V sono due biiezioni, una inversa dell'altra, tra gli insiemi algebrici, cioè i chiusi di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e gli ideali radicali di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Infatti per ogni ideale $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ per quanto finora provato, insieme ai punti $3a$ e $3b$ della Proposizione 2.1.4, si ha

- $V(\mathscr{I}(X)) = \overline{X}, \quad \mathscr{I}(X) = \mathscr{I}(\overline{X})$.
- $\mathscr{I}(V(I)) = \sqrt{I}, \quad V(I) = V(\sqrt{I})$.

Da cui anche $\mathscr{I}(X) = \mathscr{I}(V(\mathscr{I}(X))) = \sqrt{\mathscr{I}(X)}$, ottenendo una dimostrazione alternativa della Proposizione 2.1.5.

Definizione 2.3.6. Una **varietà algebrica affine** è un sottoinsieme chiuso e irriducibile di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Una **varietà algebrica quasi affine** è un aperto di una varità algebrica affine.

Ricordiamo che un ideale P di un anello è primo se e solo se per ogni coppia di ideali I, J tali che $IJ \subseteq P$ si ha $I \subseteq P$ oppure $J \subseteq P$.

Proposizione 2.3.7. *Un insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è irriducibile (rispetto alla topologia di Zariski) se e solo se $\mathscr{I}(X)$ è un ideale primo.*

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Se $IJ \subseteq \mathscr{I}(X)$, allora

$$V(I) \cup V(J) = V(IJ) \supseteq V(\mathscr{I}(X)) = X.$$

Poiché X è irriducibile deve aversi $X \subseteq V(I)$ oppure $X \subseteq V(J)$, cioè $I \subseteq \mathscr{I}(V(I)) \subseteq \mathscr{I}(X)$ oppure $J \subseteq \mathscr{I}(V(J)) \subseteq \mathscr{I}(X)$.

$\Leftarrow$ Se $X = F_1 \cup F_2$, con F_1, F_2 chiusi, allora $\mathscr{I}(F_1)\mathscr{I}(F_2) \subseteq \mathscr{I}(F_1) \cap \mathscr{I}(F_2) = \mathscr{I}(X)$ da cui, dato che $\mathscr{I}(X)$ è primo

$$\mathscr{I}(F_i) \subseteq \mathscr{I}(X) \Rightarrow X = V(\mathscr{I}(X)) \subseteq V(\mathscr{I}(F_i)) = F_i \Rightarrow X = F_i \quad \text{con } i \in \{1, 2\}.$$

□

Ad esempio, dato che $V(0) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e l'ideale (0) è primo, si ha che $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è irriducibile.

Osservazione 2.3.8. Se I è un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, le componenti irriducibili di $V(I)$ corrispondono agli ideali primi minimali di I (tramite $\mathscr{I}$).

Osserviamo che $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ rispetto alla topologia di Zariski è uno spazio topologico Noetheriano. Infatti se $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ è una catena discendente di chiusi allora $\mathscr{I}(X_0) \subseteq \mathscr{I}(X_1) \subseteq \mathscr{I}(X_2) \subseteq \ldots$ è una catena ascendente di ideali di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Dato che quest'ultimo è un anello Noetheriano la catena di ideali è stazionaria, pertanto, poiché $V(\mathscr{I}(X_i)) = X_i$, anche la catena di chiusi è stazionaria.

Vogliamo adesso dimostrare che ogni insieme algebrico si può scrivere (in modo unico) come unione delle sue componenti irriducibili. Questo fatto può essere dimostrato algebricamente attraverso la decomposizione primaria, e geometricamente come fatto in precedenza per gli spazi topologici Noetheriani.

Corollario 2.3.9. *Ogni insieme algebrico di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ si può scrivere in modo unico come unione di varietà algebriche affini, l'una non contenuta nell'unione delle altre.*

Dimostrazione Geometrica. È una diretta conseguenza del Corollario 2.2.11. □

Dimostrazione Algebrica. Sia $V(I)$ un chiuso di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, dove I è un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Dato che $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è Noetheriano, I ha una decomposizione primaria

$$I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m.$$

Poniamo $P_i = \sqrt{Q_i}$ e supponiamo che $\{P_1, \ldots, P_r\}$ siano i primi minimali di I. Passando ai radicali possiamo scrivere

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \ldots \cap P_r$$

da cui infine

$$V(I) = V(\sqrt{I}) = V(P_1) \cap \ldots V(P_r).$$

L'unicità segue dal primo teorema di unicità della decomposizione primaria. Infine in base al Prime avoidance Lemma per ogni $i \in \{1, \ldots r\}$ risulta $P_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} P_j$ da cui si ha $V(P_i) \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} V(P_j)$. □

Proposizione 2.3.10. *Lo spazio $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con la topologia di Zariski è compatto.*

Dimostrazione topologica. Basta applicare la Proposizione 2.2.13 dato che $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è Noetheriano. □

Dimostrazione algebrica. Sia $\mathscr{F}$ una famiglia di chiusi che gode della PIF. Se per assurdo

$$\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F = \emptyset \Rightarrow \mathscr{I}\left(\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F\right) = \sum_{F \in \mathscr{F}} \mathscr{I}(F) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n],$$

avremmo $1 \in \sum_{F \in \mathscr{F}} \mathscr{I}(F)$. Pertanto 1 è somma finita di elementi di ideali della famiglia $\{\mathscr{I}(F)\}_{F \in \mathscr{F}}$, in altri termini $1 \in \mathscr{I}(F_1) + \ldots + \mathscr{I}(F_n)$, con $F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F}$. Ciò implica

$$\mathscr{I}(F_1) + \ldots + \mathscr{I}(F_n) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{I}(F_i) = \emptyset,$$

contro la PIF, assurdo. □

2.4 Dimensione

Definizione 2.4.1. Sia X uno spazio topologico non vuoto. Si definisce **dimesione di Krull** $\dim X$ l'estremo superiore delle lunghezze n di tutte le catene

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n$$

di sottoinsiemi distinti X_i di X chiusi irriducibili e non vuoti. Lo spazio topologico vuoto ha dimensione pari a -1.
Definiamo dimensione di una varietà algebrica (quasi) affine come la sua dimensione di Krull rispetto alla topologia di Zariski indotta.

Proposizione 2.4.2. *Sia X uno spazio topologico. Se $Y \subseteq X$ allora $\dim Y \leq \dim X$.*

Dimostrazione. Sia $Z_0 \subset \ldots \subset Z_n$ una catena di sottoinsiemi distinti chiusi irriducibili e non vuoti di Y. Osserviamo che $\overline{Z_i}$ è chiuso irriducibile (non vuoto) in X, inoltre $\overline{Z_i} \cap Y = Z_i$, in quanto $\overline{Z_i} \cap Y$ coincide con la chiusura di Z_i in Y. Pertanto $\overline{Z_i} \neq \overline{Z_j}$. Quindi la catena $\overline{Z_0} \subset \ldots \subset \overline{Z_n}$, è una catena di insiemi chiusi, irriducibili distinti non vuoti di X. Da cui $\dim Y \leq \dim X$. $\square$

Proposizione 2.4.3. *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U}$ un suo ricoprimento aperto. Allora*

$$\dim X = \sup_{U \in \mathcal{U}} \dim U.$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 2.4.2 si ha che $\dim X \geq \dim U$ per ogni $U \in \mathcal{U}$, da cui $\dim X \geq \sup_{U \in \mathcal{U}} \dim U$. Sia $X_0 \subset \ldots \subset X_n$ una catena di sottoinsiemi distinti chiusi irriducibili non vuoti di X. Sia $x \in X_0$, per ipotesi esiste un aperto $U \in \mathcal{U}$ tale che $x \in U$. Poniamo $U_i = X_i \cap U$ e osserviamo che $x \in X_i \cap U \neq \emptyset$, inoltre $\overline{U_i} = \overline{X_i \cap U} = X_i$ in quanto $X_i \cap U$ è un aperto di X_i irriducibile, quindi $X_i \cap U$ è denso in X_i. Ciò prova che gli insiemi U_i sono sottoinsiemi distinti, non vuoti, chiusi e irriducibili di U. A partire da una catena di lunghezza n in X abbiamo trovato una catena della stessa lunghezza in un aperto U del ricoprimento, ciò prova che $\dim X \leq \sup_{U \in \mathcal{U}} \dim U$. $\square$

Osservazione 2.4.4. Se X è uno spazio topologico Noetheriano, allora X ha un numero finito di componenti irriducibili e X è l'unione di esse $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$. Le componenti irriducibili sono insiemi irriducibili massimali e sono anche chiusi. Da questo fatto, e dalla definizione di dimensione segue che

$$\dim X = \max_i \dim X_i.$$

Definizione 2.4.5. Se X è un chiuso di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ allora

$$A(X) = \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathscr{I}(X)}$$

è l'**anello delle coordinate** di X.

Lemma 2.4.6. *Se X, Y sono due chiusi di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, allora*

$$X \subsetneq Y \Longleftrightarrow \mathscr{I}(X) \supsetneq \mathscr{I}(Y).$$

Dimostrazione. Basta applicare le funzioni $\mathscr{I}$ e V. $\square$

Proposizione 2.4.7. *Se X è un chiuso di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ allora la dimensione topologica di X è uguale alla dimensione di Krull dell'anello delle coordinate $A(X)$*

$$\dim X = \dim A(X).$$

Dimostrazione. In base al lemma precedente si ha che a catene discendenti di chiusi irriducibili di X corrispondono catene ascendenti di ideali primi di $A(X)$. $\square$

Dato che $A(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, allora $\dim \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \dim \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = n$.

Teorema 2.4.8 (Teorema dell'ideale principale di Krull)**.** *Sia A un anello Noetheriano.*

1. *Se $x \in A$ è non invertibile e P è un primo minimale di (x), allora* $\operatorname{ht}(P) \leq 1$.

2. *Se $I = (a_1, \dots, a_n)$ è un ideale di A, allora ogni primo minimale P di I ha altezza minore o uguale a n.*

3. *Se P è un ideale primo di A di altezza n, esiste un ideale I di A generato da n elementi di cui P sia primo minimale.*

Corollario 2.4.9. *Se A è un anello Noetheriano e $x \in A$ è un elemento non invertibile e non zerodivisore allora* $\operatorname{ht}(x) = 1$.

Teorema 2.4.10. *Siano B un dominio che è anche una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, $K(B)$ il suo campo dei quozienti e P un ideale primo di B. Allora*

1. $\dim B = \operatorname{tr}_{\mathbb{K}} K(B)$.

2. $\operatorname{ht}(P) + \dim(B/P) = \dim B$.

Dimostrazione.

1. Sia $r = \dim B$, dal Lemma di Normalizzazione di Noether esistono $x_1, \dots, x_r \in B$ algebricamente indipendenti su $\mathbb{K}$ tali che $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r] \subseteq B$ è intera, quindi passando ai campi quoziente l'estensione $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_r) \subseteq \mathbb{K}(B)$ è algebrica, pertanto $\operatorname{tr}_{\mathbb{K}} K(B) = r$.

2. Omessa. $\square$

Osserviamo che se $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è chiuso, allora $A(X)$ è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, con generatori le classi $x_i + \mathscr{I}(X)$.

Proposizione 2.4.11. *Un dominio Noetheriano A è un UFD se e solo se ogni ideale primo di altezza 1 è principale.*

Dimostrazione. Omessa $\square$

Corollario 2.4.12. *Se $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è una varietà algebrica affine allora*

$$\dim X = n - 1 \iff X = V(f)$$

per qualche polinomio irriducibile $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Dimostrazione.

- $\Rightarrow$ Dal teorema precedente si ha che $\mathrm{ht}(\mathscr{I}(X)) + \dim(A(X)) = n \Rightarrow \mathrm{ht}(\mathscr{I}(X)) = 1$. Pertanto $\mathscr{I}(X)$ è un ideale primo di altezza 1. Dato che $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un UFD Noetheriano, $\mathscr{I}(X)$ è principale, generato necessariamente da un elemento irriducibile.

- $\Leftarrow$ L'ideale (f) è primo. Inoltre dal teorema dell'ideale principale di Krull sappiamo che $\mathrm{ht}(f) = 1$, da cui

$$\mathrm{ht}(f) + \dim(A(X)) = \dim \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = n \Rightarrow \dim X = \dim A(X) = n - 1. \quad \square$$

Osservazione 2.4.13. Il precedente risultato non può essere generalizzato a varietà algebriche affini di dimensione $n - 2$. Infatti esistono ideali primi di altezza 2 che non sono generati da due elementi.

Proposizione 2.4.14. *Se $I = (f_1, \dots, f_r)$ è un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ allora $X = V(I)$ ha dimensione almeno $n - r$.*

Dimostrazione. Dalle osservazioni 2.4.4 e 2.3.8, si ha che la dimensione di X, cioè di $A(X)$, è pari al massimo delle dimensioni di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/P$ al variare di P primo minimale di I. Adesso, per ogni P primo minimale di I, dal Teorema dell'ideale principale di Krull si ha

$$\dim(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/P)) = \dim \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] - \mathrm{ht}(P) \geq n - r.$$

Per quanto detto prima risulta $\dim X = \dim A(X) \geq n - r$. $\square$

2.5 Ideali omogenei e varietà proiettive

Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, su $V \setminus \{\underline{0}\}$ possiamo definire la realzione di equivalenza

$$v \sim u \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : v = \lambda u.$$

Poniamo per definizione $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{\underline{0}\})/\sim$. Denotiamo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ con $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Con questa notazione $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è lo **spazio proeittivo** n-dimensionale su $\mathbb{K}$. I punti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ verranno denotati con $(x_0 : \dots : x_n) = [(x_0, \dots, x_n)]_\sim$ (con x_i non contemporaneamente nulli).

Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è **omogeneo** di grado d se tutti i suoi monomi hanno grado d. Indicheremo con $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ l'insieme dei polinomi omogenei di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ di grado d.

Sia $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un polinomio di grado d. La **componente omogenea** di f di grado i, con $0 \leq i \leq d$, è il polinomio omogeneo f_i di grado i formato da tutti i monomi di f di grado i. Ogni polinomio f può essere chiaramente scritto in modo unico come somma delle sue componenti omogenee

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_d.$$

Definizione 2.5.1. Sia G un monoide commutativo. Un anello A è un **anello G-graduato** se esiste una famiglia $\{A_i\}_{i \in G}$ di sottogruppi additivi di A tali che

1. $A = \bigoplus_{i \in G} A_i$.

2. $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$.

Gli elementi dei gruppi A_i sono detti **omogenei**. Un elemento omogeneo $x \in A_i$ ha **grado** $\deg(x) = i$. In modo analogo, un A-**modulo** G-**graduato** è un A-modulo M per cui esiste una famiglia di sottogruppi $\{M_i\}_{i \in G}$ di M tali che

1. $M = \bigoplus_{i \in G} M_i$

2. $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$

Un sottmodulo $N \subseteq M$ è un **sottomodulo omogeneo** (o **sottmodulo graduato**) se $N = \sum_{i \in G} (N \cap M_i)$.

In base a quanto osservato prima, $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ è naturalmente un anello $\mathbb{N}$-graduato, infatti ogni polinomio è in modo unico somma delle sue componenti omogenee, pertanto

$$\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_i.$$

Chiaramente, ponendo $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_i = 0$ per ogni $i < 0$, abbiamo che $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ è anche $\mathbb{Z}$-graduato. Si osservi che, se A è un anello G-graduato, allora A_0 è un sottoanello di A. Quando diremo che A è un anello graduato, sottointenderemo $\mathbb{Z}$-graduato.

Proposizione-Definizione 2.5.2. *Per un ideale $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. *$I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} I_i$, dove $I_i = I \cap \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_i$. In altri termini I è un sottomodulo graduato di $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$.*

2. *Per ogni $f \in I$, le componenti omogenee f_i di f stanno in I.*

3. *I è generato da polinomi omogenei.*

Un ideale che soddisfa una delle precedenti condizioni è detto ***ideale omogeneo****.*

Dimostrazione.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Segue dal fatto che ogni polinomio si scrive in modo unico come somma delle sue componenti omogenee.

(2) $\Rightarrow$ (3) Dato che $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ è Noetheriano, I è finitamente generato da $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. Sia f_{ij} la componente omogenea di grado j del polinomio f_i, per ipotesi $f_{ij} \in I$ per ogni i, j, da cui segue subito che I è generato dai polinomi f_{ij}.

(3) $\Rightarrow$ (2) Supponiamo che $I = (g_{ij} : 0 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n_i)$ con g_{ij} omogenei di grado i. Sia $f \in I$ e sia f_i la componente omogenea di grado i di f. Dato che $f \in I = (g_{ij})$ scriviamo

$$f = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} g_{ij} \quad \text{con } a_{ij} \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n].$$

Ne segue che $f_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} g_{ij} \in I$. $\square$

Proposizione 2.5.3. *Se I e J sono due ideali omogenei di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ allora lo sono anche gli ideali $I \cap J$, $I + J$, IJ, $\sqrt{I}$.*

Dimostrazione. Per ipotesi $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} I_i, J = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} J_i$, allora $I \cap J = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (I_i \cap J_i)$, quindi $I \cap J$ è omogeneo. In modo equivalente abbiamo che $I = (f_1, \dots, f_n)$, $J = (g_1, \dots, g_m)$ con f_i, g_j polinomi omogenei. Risulta $I + J = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$, $IJ = (f_i g_j)$, quindi $I + J$ e IJ sono omogenei. Per l'omogeneità di $\sqrt{I}$, sia $f \in \sqrt{I}$, dobbiamo far vedere che le sue componenti omogenee stanno in $\sqrt{I}$. Procediamo induttivamente sul grado di f. Se f ha grado 0 allora $f = f_0 \in \sqrt{I}$. Supponiamo l'asserto vero per i polinomi di grado $d-1$ e sia f di grado d. Dato che $f \in \sqrt{I}$ allora $f^m = (f_0 + \dots f_d)^m \in I$, in particolare $f_d^m \in I$ dal momento che I è omogeneo e che f_d^m è la componente omogenea di f^m di grado dm. Pertanto $f_d \in \sqrt{I}$. Adesso basta applicare l'ipotesi induttiva sul polinomio $f - f_d = f_0 + \dots + f_{d-1} \in \sqrt{I}$ di grado $d - 1$. □

Osserviamo che se $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ allora $f(\lambda \underline{x}) = \lambda^d f(\underline{x})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$. Pertanto, a differenza del caso affine, un polinomio omogeneo f non induce una funzione polinomiale su $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Tuttavia resta ben definita l'equazione $f(P) = 0$ per ogni $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Più precisamente, se $(x_0, \dots, x_n)$ è un rappresentate della classe $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $f(x_0, \dots, x_n) = 0$, allora per ogni rappresentante $(x'_0, \dots, x'_n)$ di P continua a valere $f(x'_0, \dots, x'_n) = 0$. Mentre, per un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ non omogeneo, $f(P)$ con $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ non è ben definita. Questi fatti ci permettono di dare la seguente definizione.

Definizione 2.5.4. Sia $T \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un insieme di polinomi omogenei, definiamo

$$V^{\mathbb{P}}(T) = \{P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : f(P) = 0 \quad \forall f \in T\} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

Se I è l'ideale omogeneo generato da T allora poniamo per definizione $V^{\mathbb{P}}(I) = V^{\mathbb{P}}(T)$. Chiaramente $V^{\mathbb{P}}(I)$ non dipende dall'insieme di generatori omogenei scelti.

Osserviamo che $P \in V^{\mathbb{P}}(I)$ se e solo se $f(P) = 0$ per ogni polinomio $f \in I$ omogeneo. Pertanto possiamo scrivere

$$V^{\mathbb{P}}(I) = \{P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : f(P) = 0 \quad \forall f \in I \text{ omogeneo}\}.$$

Definizione 2.5.5. Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si dice **insieme algebrico proiettivo** se esiste un ideale omogeneo $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ tale che $X = V^{\mathbb{P}}(I)$.

Definizione 2.5.6. Dato $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ definiamo l'ideale $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$ come l'ideale generato dall'insieme di polinomi omogenei

$$\{f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] : f \text{ è omogeneo e } f(P) = 0 \quad \forall P \in X\} \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n].$$

Per definizione $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$ è un ideale omogeneo.

Osserviamo che per ogni polinomio $f \in \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$ omogeneo $f(P) = 0$ per ogni $P \in X$.

Proposizione 2.5.7. *Siano $I, J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ due ideali omogenei e $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.*

1a. $I \subseteq \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(V^{\mathbb{P}}(I))$

1b. $X \subseteq V^{\mathbb{P}}(\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X))$

2a. $I \subseteq J \Rightarrow V^{\mathbb{P}}(I) \supseteq V^{\mathbb{P}}(J)$

2b. $X \subseteq Y \Rightarrow \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X) \supseteq \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y)$

3a. $V^{\mathbb{P}}(\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(V^{\mathbb{P}}(I))) = V^{\mathbb{P}}(I)$

3b. $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(V^{\mathbb{P}}(\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X))) = \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$

4a. $V^{\mathbb{P}}(1) = \emptyset$, $V^{\mathbb{P}}(0) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

4b. $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) = (0), \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(\emptyset) = \mathbb{K}[\,\underline{x}\,]$

5a. $V^{\mathbb{P}}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V^{\mathbb{P}}(I_\lambda)$

5b. $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X_\lambda)$

6a. $V^{\mathbb{P}}(IJ) = V^{\mathbb{P}}(I \cap J) = V^{\mathbb{P}}(I) \cup V(J)$

6b. $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X \cap Y) \supseteq \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X) + \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y)$

(nel punto 4, $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) = (0)$ vale solo nel caso $\mathbb{K}$ infinito).

Dimostrazione.

1a. Sia $f \in I$ omogeneo. Risulta $f(P) = 0$ per ogni $P \in V^{\mathbb{P}}(I)$, quindi $f \in \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(V^{\mathbb{P}}(I))$. Adesso per un generico polinomio $f \in I$, se f_i è la componente omogenea di f, per ipotesi abbiamo $f_i \in I$. Per quanto provato finora si ha $f_i \in \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(V^{\mathbb{P}}(I))$, da cui $f = \sum f_i \in \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(V^{\mathbb{P}}(I))$.

2a. Sia $P \in V^{\mathbb{P}}(J)$, per ogni $f \in I \subseteq J$ omogeneo $f(P) = 0$, quindi $P \in V^{\mathbb{P}}(I)$.

3a. Segue da $1a$,$2a$ e $1b$.

1b. Se $P \in X$ allora per ogni $f \in \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$ omogeneo $f(P) = 0$, quindi $P \in V^{\mathbb{P}}(\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X))$.

2b. Se $f \in \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y)$ omogeneo, allora $f(P) = 0$ per ogni $P \in X \subseteq Y$, da cui $f \in \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$.

3b. Segue da $1b$,$2b$ e $1a$.

I punti restanti sono analoghi a 2.1.4, mutatis mutandis. □

Analogamente al caso affine, definiamo la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Definizione 2.5.8. La topologia su $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ in cui i chiusi sono gli insiemi algebrici proiettivi si chiama **topologia di Zariski**.

Osservazione 2.5.9. Come nell'Osservazione 2.3.3, gli insiemi $V^{\mathbb{P}}(f)$, con $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo, formano una base di chiusi per la topologia di Zariski.

Definizione 2.5.10. Se $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è chiuso, allora

$$S(X) = \frac{\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]}{\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)}$$

è l'**anello delle coordinate proiettive** di X.

Definizione 2.5.11. Una **varietà algebrica proiettiva** è un sottoinsieme chiuso irriducibile di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Una **varietà algebrica quasi proiettiva** è un aperto di una varietà algebrica proiettiva.

Proposizione 2.5.12. *Siano $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $I \trianglelefteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideale omogeneo, si ha*

1. $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X) = \sqrt{\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)}$

2. $V^{\mathbb{P}}(I) = V^{\mathbb{P}}(\sqrt{I})$

Dimostrazione. Analoga a 2.1.5. □

Definizione 2.5.13. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, definiamo **cono affine** di X nell'origine l'insieme

$$\mathscr{C}(X) = \{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}} : (a_0 : \ldots : a_n) \in X\} \cup \{\underline{0}\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}.$$

Proposizione 2.5.14 (Teorema degli zeri di Hilbert proiettivo)**.** *Sia $I \subsetneq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ un ideale omogeneo proprio e $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ non vuoto. Risulta*

1. $\mathscr{C}(V^{\mathbb{P}}(I)) = V(I)$.

2. $\mathscr{I}(\mathscr{C}(X)) = \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$.

3. $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(V^{\mathbb{P}}(I)) = \sqrt{I}$.

4. $V^{\mathbb{P}}(\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)) = \overline{X}$.

(il punto 2. *vale se $\mathbb{K}$ è infinito, il punto* 3. *vale se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso).*

Dimostrazione.

1. $P \in \mathscr{C}(V^{\mathbb{P}}(I)) \Leftrightarrow [P] \in V^{\mathbb{P}}(I) \Leftrightarrow f([P]) = 0 \;\; \forall f \in I$ omogeneo $\Leftrightarrow f(P) = 0 \;\; \forall f \in I$.

2. Proviamo prima che $\mathscr{I}(\mathscr{C}(X))$ è un ideale omogeneo. Sia $f = f_0 + \ldots + f_d \in \mathscr{I}(\mathscr{C}(X))$. Se $P \in \mathscr{C}(X)$ allora anche $\lambda P \in \mathscr{C}(X)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$. Quindi

$$f(\lambda P) = \sum_{i=0}^{d} f_i(\lambda P) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i f_i(P) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Dal principio di identità dei polinomi ($\mathbb{K}$ infinito) abbiamo $f_i(P) = 0$. Dall'arbitrarietà di $P \in \mathscr{C}(X)$ segue $f_i \in \mathscr{I}(\mathscr{C}(X))$. Adesso per un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ omogeneo si ha

$$f \in \mathscr{I}(\mathscr{C}(X)) \Leftrightarrow f(P) = 0 \quad \forall P \in \mathscr{C}(X) \Leftrightarrow f([P]) = 0 \quad \forall P \in X \Leftrightarrow f \in \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X).$$

3. $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(V^{\mathbb{P}}(I)) = \mathscr{I}(\mathscr{C}(V^{\mathbb{P}}(I))) = \mathscr{I}(V(I)) = \sqrt{I}$

4. Analogo a 2.3.4. □

Proposizione 2.5.15. *Sia $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ un ideale omogeneo con $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Risulta*

$$V^{\mathbb{P}}(I) = \emptyset \Longleftrightarrow (x_0, \ldots, x_n) \subseteq \sqrt{I}.$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Se $I = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, la tesi è ovvia. Se I è un ideale proprio allora

$$V^{\mathbb{P}}(I) = \emptyset \Rightarrow V(I) = \mathscr{C}(V^{\mathbb{P}}(I)) = \mathscr{C}(\emptyset) = \{\underline{0}\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{I} = \mathscr{I}(V(I)) = \mathscr{I}(\{\underline{0}\}) = (x_0, \ldots, x_n).$$

$\Leftarrow$ Se $I = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ la tesi è ovvia. Se I è un ideale proprio, allora

$$(x_0, \dots, x_n) \subseteq \sqrt{I} \Rightarrow \emptyset = V^{\mathbb{P}}(x_0, \dots, x_n) \supseteq V^{\mathbb{P}}(\sqrt{I}) = V^{\mathbb{P}}(I). \qquad \square$$

La precedente proposizione ci dice che se I è un ideale omogeneo radicale di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ tale che $V^{\mathbb{P}}(I) = \emptyset$ allora I è $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ oppure l'ideale massimale $(x_0, \dots, x_n)$. Quest'ultimo per tale motivo è chiamato **ideale irrilevante**.

Osservazione 2.5.16. Le precedenti proposizioni ci dicono che, nel caso $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, le applicazioni $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}$ e $V^{\mathbb{P}}$ sono delle biiezioni tra ideali propri omogenei radicali di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e insiemi chiusi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Dato un polinomio $f \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]$ di grado d, la sua **omogeneizzazione** rispetto alla variabile x_i è il polinomio $f_{x_i}(x_0, \dots, x_n) = x_i^d\, f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. La **disomogeneizzazione** di un polinomio $g \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ rispetto alla variabile x_i è il polinomio $g_{x_i} = g(y_1, \dots, y_i, 1, y_{i+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]$.

Vogliamo adesso immergere $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Sia $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, consideriamo l'aperto $U_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus V^{\mathbb{P}}(x_i)$, definiamo

$$\varphi_i : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to U_i \quad \varphi_i(y_1, \dots, y_n) = (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \tag{2.1}$$

$$\psi_i : U_i \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \quad \psi_i(x_0 : \dots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \tag{2.2}$$

È facile verificare che φ_i e ψ_i sono due biiezioni, una l'inversa dell'altra. Proviamo che sono omeomorfismi. Infatti siano $f \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]$ un polinomio di grado d e $f_{x_i} \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ l'omogeneizzazione di f rispetto a x_i. Chiaramente f è omogeneo. Risulta

$$\varphi_i^{-1}(V^{\mathbb{P}}(f_{x_i}) \cap U_i) = V(f), \quad \psi_i^{-1}(V(f)) = V^{\mathbb{P}}(f_{x_i}) \cap U_i.$$

Dato che $V(f)$ e $V(f_{x_i}) \cap U_i$ sono due basi di chiusi rispettivamente di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e U_i si ha che φ_i e ψ_i sono continue, quindi degli omeomorfismi.

Pertanto possiamo pensare $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ dentro $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ identificando $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con, ad esempio $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Capitolo 3

Morfismi di Varietà

3.1 Funzioni regolari

Definizione 3.1.1. Sia $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà quasi affine. Una funzione $f : V \to \mathbb{K}$ si dice **regolare in** $P \in V$ se esiste un intorno aperto $U \subseteq V$ di P ed esistono due polinomi $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tali che $h(Q) \neq 0$ per ogni $Q \in U$, e inoltre

$$f_{|U} = \frac{g_{|U}}{h_{|U}}.$$

La funzione f si dice **regolare** su V se è regolare in ogni punto di V.

Lemma 3.1.2. *Sia $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà quasi affine. Se $f : V \to \mathbb{K}$ è regolare in $P \in V$ allora f è continua in P (rispetto alla topologia di Zariski identificando $\mathbb{K}$ con $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$).*

Dimostrazione. Sia $U \subseteq V$ un intorno aperto di P tale per cui esistano due polinomi $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tali che $h(Q) \neq 0$ per ogni $Q \in U$ e $f_{|U} = (g/h)_{|U}$. Sia W un intorno di $f(P)$. Su $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ la topologia di Zariski è la topologia cofinita, quindi $W = \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ sia $U_i = V \setminus V(g - \alpha_i h)$, poniamo

$$U' = U \cap \bigcap_{i=1}^{m} U_i.$$

Quest'ultimo è un intorno aperto di P, inoltre $f(U') \subseteq W$. Infatti, se $Q \in U'$, allora $Q \notin V(g - \alpha_i h)$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, ciò vuol dire che

$$f(Q) = \frac{g(Q)}{h(Q)} \neq \alpha_i \Rightarrow f(Q) \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = W.$$

$\square$

Corollario 3.1.3. *Sia $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà quasi affine. Se $f : V \to \mathbb{K}$ è regolare in V allora è continua.*

Il precedente risultato non può essere invertito, cioè ci sono funzioni continue che non sono regolari.

Esempio 3.1.4. *Siano $V = V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ e*

$$f : V \to \mathbb{K}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Proviamo che f è continua ma non è regolare. La continuità segue osservando che $f^{-1}(\alpha) = V(y - \alpha x) \cap V$. Proviamo che f non è regolare in $(0,0)$ (in realtà f è regolare in tutti i punti tranne $(0,0)$, infatti $U = V \setminus \{(0,0)\} = V \setminus V(x,y)$ è aperto e $f_{|U} = \frac{y}{x}$). Supponiamo per assurdo che f sia regolare in $(0,0)$, quindi esiste un intorno aperto U di $(0,0)$ e due polinomi $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tali che $h(Q) \neq 0$ per ogni $Q \in U$ e risulta $f_{|U} = (g/h)_{|U}$. Sia $U' = U \cap V \setminus \{(0,0)\} \neq \emptyset$. Per ogni $Q = (x_0, y_0) \in U'$ si ha

$$\frac{g(Q)}{h(Q)} = \frac{y_0}{x_0}.$$

In altri termini, il polinomio $h(x,y)y - g(x,y)x \in \mathbb{K}[x,y]$ si annulla su U', quindi $U' \subseteq V(yh - xg)$, ma U' è un aperto di V, quindi è denso in V, da cui $V = \overline{U'} \subseteq V(yh - xg)$, cioè $yh - xg$ si annulla su tutto V, quindi $yh - xg \in \mathscr{I}(V) = (y^2 - x^3)$ (V è irriducibile, infatti $\mathbb{K}[x,y]/(y^2 - x^3) \simeq \mathbb{K}[t^2, t^3]$ è un dominio). Da cui esiste $p(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ tale che

$$yh(x,y) - xg(x,y) = p(x,y)(y^2 - x^3).$$

Adesso dato che $h(0,0) \neq 0$ il termine noto di h, diciamo $a \in \mathbb{K}$, è non nullo. Se guardiamo la precedente uguaglianza polinomiale modulo (x, y^2) otteniamo $a\overline{y} = \overline{0}$, contro $a \neq 0$, assurdo.

Definizione 3.1.5. Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà quasi proiettiva. Una funzione $f : V \to \mathbb{K}$ si dice **regolare in** $P \in V$ se esiste un intorno aperto $U \subseteq V$ di P ed esistono due polinomi $g, h \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ omogenei dello stesso grado tali che $h(Q) \neq 0$ per ogni $Q \in U$, e inoltre

$$f_{|U} = \frac{g_{|U}}{h_{|U}}.$$

(Osserviamo che, anche se i polinomi omogenei g e h non inducono una funzione su $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, il loro quoziente induce una funzione ben definita dal momento che sono omogenei dello stesso grado e $h \neq 0$).
La funzione f si dice **regolare** su V se è regolare in ogni punto di V.

Definizione 3.1.6. Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Una **varietà** su $\mathbb{K}$ è una qualsiasi varietà algebrica affine, quasi affine, proiettiva o quasi proiettiva.

Osserviamo che, in base al Corollario 2.2.5, ogni varietà rispetto alla topologia di Zariski è irriducibile. Pertanto, per la Proposizione 2.2.3, ogni aperto di una varietà è denso.

Proposizione 3.1.7. *Sia X una varietà e siano $f, g : X \to \mathbb{K}$ due funzioni continue. Se $f = g$ in un aperto $U \subseteq X$ allora $f = g$ in X.*

Dimostrazione. Sia $h = f - g$, h è continua, quindi $h^{-1}(0)$ è un insieme chiuso, per ipotesi $U \subseteq h^{-1}(0)$, allora $X = \overline{U} \subseteq h^{-1}(0) \Rightarrow h = f - g = 0$. □

Corollario 3.1.8. *Siano X una varietà. Se $f, g : X \to \mathbb{K}$ sono due funzioni regolari tali che $f = g$ in un aperto U di X allora $f = g$ in X.*

3.2 Morfismi e anelli di funzioni

Definizione 3.2.1. Se X e Y sono due varietà, un **morfismo** $\varphi : X \to Y$ è una funzione continua tale che per ogni aperto $V \subseteq Y$ e ogni funzione regolare $f : V \to \mathbb{K}$, la funzione $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to \mathbb{K}$ è regolare.

$$\begin{tikzcd} \varphi^{-1}(V) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f \circ \varphi"'] & V \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Un **isomorfismo** è un morfismo biiettivo il cui inverso è ancora un morfismo. Indichiamo con $\mathrm{Hom}(X, Y)$ l'insieme dei morfismi da X a Y.

Definizione 3.2.2. Una varietà X è **affine** se è isomorfa a una varietà algebrica affine. Analogamente X è **proiettiva** se è isomorfa a una varietà proiettiva.

Definizione 3.2.3. Siano X e Y due varietà. Un morfismo $\varphi : X \to Y$ si dice **chiuso** se è una funzione chiusa, cioè se l'immagine tramite φ di un chiuso è chiusa. In modo analogo, φ è **aperto** se è una funzione aperta.

Definizione 3.2.4. Sia X una varietà. Indichiamo con

$$\Gamma(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ regolare}\}$$

la $\mathbb{K}$-algebra delle **funzioni regolari** su X.

Adesso fissiamo $P \in X$ e consideriamo l'insieme delle coppie (U, f) con U intorno di P e f funzione regolare in U. Su questo insieme introduciamo la relazione di equivalenza

$$(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow \exists W \subseteq U \cap V \text{ intorno aperto di } P : f_{|W} = g_{|W}.$$

Definizione 3.2.5. Le classi di equivalenza $[(U, f)]$ sono dette **germi** di funzione regolare in P. Denotiamo l'insieme dei germi con

$$\mathcal{O}_{P,X} = \{[(U, f)] \text{ germe di funzione regolare}\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{O}_{P,X}$ ha la stuttura di anello con le operazioni

$$[(U, f)] + [(V, g)] = [(U \cap V, f + g)]$$
$$[(U, f)] \cdot [(V, g)] = [(U \cap V, fg)].$$

Proposizione 3.2.6. *$\mathcal{O}_{P,X}$ è un anello locale con ideale massimale*

$$\mathfrak{m}_{P,X} = \{[(U, f)] : f(P) = 0\}.$$

Il campo residuo $\mathcal{O}_{P,X}/\mathfrak{m}_{P,X}$ è isomorfo a $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. Che $\mathcal{O}_{P,X}$ sia un anello e $\mathfrak{m}_{P,X}$ sia un ideale sono fatti di facile verifica. Sia $[(U,f)] \in \mathcal{O}_{P,X} \setminus \mathfrak{m}_{P,X}$, quindi $f(P) \neq 0$. Dato che f è regolare, esiste un intorno V tale che $f = g/h$ in V, con $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $h \neq 0$ in V. Adesso poniamo $U' = (U \cap V) \setminus V(g)$, U' è un intorno aperto di P, inoltre $1/f$ è regolare in U' e

$$[(U,f)] \cdot [(U', 1/f)] = 1_{\mathcal{O}_{P,X}}.$$

Per provare che il campo residuo di $\mathcal{O}_{P,X}$ è isomorfo a $\mathbb{K}$ basta considerare l'omomorfismo di anelli

$$\mathrm{ev}_P : \mathcal{O}_{P,X} \to \mathbb{K} \quad \varphi([(U,f)]) = f(P).$$

□

Definiamo adesso un campo di funzioni associato alla varietà X. Consideriamo l'insieme delle coppie (U,f) con U aperto non vuoto di X e f funzione regolare in U. Come prima introduciamo la relazione di equivalenza

$$(U,f) \sim (V,g) \Leftrightarrow \exists W \subseteq U \cap V \text{ aperto} : f_{|W} = g_{|W}.$$

Definizione 3.2.7. Le classi di equivalenza $[(U,f)]$ sono dette **funzioni razionali**. Denotiamo con

$$K(X) = \{[(U,f)] \text{ funzione razionale}\}$$

l'insieme delle funzioni razionali.

L'insieme $K(X)$ ha la struttura di campo con le operazioni

$$[(U,f)] + [(V,g)] = [(U \cap V, f+g)]$$
$$[(U,f)] \cdot [(V,g)] = [(U \cap V, fg)].$$

Infatti se $[(U,f)] \in K(X)$ con $f \neq 0$, allora $f(P) \neq 0$ per qualche $P \in U$, analogamente a prima si trova l'inverso di f.

Riassumendo, per una varietà X abbiamo definito tre oggetti:

- $\Gamma(X)$ anello delle funzioni regolari su X,
- $\mathcal{O}_{P,X}$ anello locale dei germi di funzioni regolari in $P \in X$,
- $K(X)$ campo delle funzioni razionali su X.

Osserviamo che, fissato $P \in X$, ogni funzione regolare in X è regolare in P, e ogni funzione regolare in P individua una funzione razionale di X. Più precisamente abbiamo le due immersioni naturali

$$\Gamma(X) \hookrightarrow \mathcal{O}_{P,X} \hookrightarrow K(X)$$

dove la prima immersione è data da $f \mapsto [(X,f)]$, mentre la seconda da $[(U,f)] \mapsto [(U,f)]$ (è facile verificare che esse sono ben definite). Quindi possiamo pensare $\Gamma(X)$ e $\mathcal{O}_{P,X}$ come sottoanelli di $K(X)$. Se sostituiamo X con una varietà Y ad essa isomorfa, gli anelli $\Gamma(Y)$, $\mathcal{O}_{Q,Y}$ e $K(Y)$ corrispondenti saranno isomorfi, quindi essi sono degli invrianti della varietà.

In generale, con abuso di notazione, indicheremo un elemento $[(U,f)] \in K(X)$ semplicemente con $f \in K(X)$, intendendo la classe $[(U,f)]$, dove U è l'insieme di definizione di f.

Definizione 3.2.8. Sia X una varietà e $f \in K(X)$ con $f : V \to \mathbb{K}$. Definiamo **dominio** di f l'insieme

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \quad \text{con} \quad \mathcal{U} = \{U \subseteq X : (U, g) \in [(V, f)]\}.$$

Osserviamo che, per definizione, il dominio di una funzione razionale è aperto.

Osservazione 3.2.9. Con la stessa notazione della precedente definzione, possiamo pensare di estendere f a tutto il suo dominio $\mathrm{dom}(f)$. Infatti, se $P \in \mathrm{dom}(f)$, allora esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $P \in U$ e $(U, g) \in [(V, f)]$, da cui poniamo per definizione $f(P) = g(P)$. È facile verificare che in questo modo f è ben definita e regolare in $\mathrm{dom}(f)$.

3.3 Anello delle funzioni regolari: caso affine

Osservazione 3.3.1. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine. Osserviamo che ogni polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ induce una funzione polinomiale $f : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$ che è chiaramente regolare in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, quindi a fortiori in X. Nasce così un omomorfismo di anelli $\alpha : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to \Gamma(X)$ con $\alpha(f) = f_{|X}$ (come funzione polinomiale). Il nucleo di α è formato da tutti e soli i polinomi che sono nulli su X, in altri termini $\ker \alpha = \mathscr{I}(X)$. Quindi α induce un omomorfismo iniettivo $\tilde{\alpha} : A(X) \to \Gamma(X)$. Da cui segue $A(X) \subseteq \Gamma(X)$ identificando $A(X)$ con la sua immagine tramite $\tilde{\alpha}$.

Definizione 3.3.2. Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà affine e $f \in K(X)$. Definiamo

$$D_f = \{g \in A(X) : g \cdot f \in A(X)\} \subseteq A(X),$$

dove il prodotto $g \cdot f$ è inteso in $K(X)$ dato che in base all'osservazione precedente si ha $A(X) \subseteq \Gamma(X) \subseteq K(X)$. D_f è un ideale di $A(X)$, detto **ideale dei denominatori** di f.

Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine e $\pi : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to A(X)$ la suriezione naturale. Per ogni ideale I di $A(X)$ con abuso di notazione indichiamo con $V(I) = V(\pi^{-1}(I))$. Osserviamo che $V(I) \subseteq X$ dal momento che $\pi^{-1}(I)$ contiene $\mathscr{I}(X)$.

Proposizione 3.3.3. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine e $f \in K(X)$. Risulta*

$$\mathrm{dom}(f) = X \setminus V(D_f).$$

Dimostrazione. In base all'Osservazione 3.2.9, possiamo estendere f a tutto $\mathrm{dom}(f)$. Adesso $P \in \mathrm{dom}(f)$ se e solo se esiste un intorno aperto $U \subseteq X$ di P e due polinomi $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tali che $h \neq 0$ e $f = g/h$ in U. Equivalentemente esiste $h \in D_f$ con $h(P) \neq 0$ se e solo se $P \in X \setminus V(D_f)$. □

Sia A un anello e $f \in A$, con A_f intendiamo la localizzazione di A rispetto all'insieme moltiplicativo $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ generato da f. Nel caso in cui A sia un dominio possiamo pensare a A_f come un sottoinsieme del campo dei quozienti $K(A)$.

Teorema 3.3.4. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine. Risulta*

1. $\Gamma(X) \simeq A(X)$.

2. $\Gamma(X)_f = \Gamma(X \setminus V(f))$ *per ogni* $f \in \Gamma(X)$.

3. $\mathcal{O}_{P,X} \simeq A(X)_{m_P}$, *per ogni* $P \in X$, *con* $m_P = \mathscr{I}(P)$ *visto in* $A(X)$.

4. $\dim \mathcal{O}_{P,X} = \dim X$.

5. $K(X) = K(\Gamma(X))$.

Dimostrazione.

1. In base all'Osservazione 3.3.1, dobbiamo provare che $\Gamma(X) \subseteq A(X)$. Sia $f \in \Gamma(X)$, ci basta provare che $V(D_f) = \emptyset$, cosicché $D_f = (1)$, cioè $1 \cdot f = f \in A(X)$. Supponiamo per assurdo che $V(D_f) \neq \emptyset$ e sia $P \in V(D_f) \subseteq X$; f è regolare su P, quindi esistono un intorno U di P e due polinomi $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tali che $h \neq 0$ e $f = g/h$ in U. Quindi $hf = g$ in U, intendendo quest'ultima come uguaglianza tra funzioni regolari in X, dal Corollario 3.1.8 abbiamo che $hf = g \in A(X)$ come funzioni regolari in X. Ne segue che la funzione regolare $h_{|X}$ sta in D_f, cioè $h + \mathscr{I}(X) \in D_f$. Dal momento che $P \in V(D_f)$ si ha $h(P) = 0$, contro $h \neq 0$ in U, assurdo.

2. $g \in \Gamma(X)_f$ se e solo se esistono $h \in \Gamma(X)$ e $m \geq 0$ tali che $g = h/f^m$, se e solo se $f \in \sqrt{D_g}$, se e solo se $V(f) \supseteq V(D_g) \Leftrightarrow X \setminus V(f) \subseteq X \setminus V(D_g) = \mathrm{dom}(g)$ se e solo se $g \in \Gamma(X \setminus V(f))$.

3. Definiamo un isomorfismo tra $A(X)_{m_P}$ e $\mathcal{O}_{P,X}$. Sia $\phi : A(X)_{m_P} \to \mathcal{O}_{P,X}$ con $\phi(f) = [(\mathrm{dom}(f), f)]$. ϕ è ben definita in quanto se $f \in A(X)_{m_P}$ allora $f = g/h$ con $g, h \in A(X)$ e $h \notin m_P \Leftrightarrow h(P) \neq 0$, quindi f è regolare in P. Inoltre, è facile vedere che ϕ è un omomorfismo.
   Siano adesso $f = g/h, f' = g'/h' \in A(X)_{m_P}$, con $g, g', h, h' \in A(X)$ e $h(P), h'(P) \neq 0$. Se $\phi(f) = \phi(f')$, allora $[(\mathrm{dom}(f), f)] \sim [(\mathrm{dom}(f'), f')]$, cioè $f = f' \Leftrightarrow gh' = g'h$ in $U = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(f')$ aperto non vuoto (dal momento che X è irriducibile). Pertanto, dato che gh' e $g'h$ sono regolari in X, da 3.1.8 segue $gh' = g'h$ come funzioni regolari in X, quindi anche come polinomi in $A(X)$. Adesso scriviamo
   $$f = \frac{g}{h} = \frac{gh'}{hh'} = \frac{g'h}{hh'} = \frac{g'}{h'} = f'.$$
   Ciò prova che ϕ è iniettiva.
   Sia adesso $[(U, f)] \in \mathcal{O}_{P,X}$, per definizione esistono due polinomi $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tali che $f = g/h$ e $h \neq 0$ in U. In particolare $h(P) \neq 0$, quindi $h \notin m_P$ (visto in $A(X)$). Pertanto $g/h \in A(X)_{m_P}$ (vedendo g e h in $A(X)$), quindi $\phi(g/h) = [(U, f)]$. Ciò prova che ϕ è suriettiva, e quindi è un isomorfismo.

4. Dal punto precedente e dal Teorema 2.4.10 risulta
   $$\begin{aligned}\dim \mathcal{O}_{P,X} = \dim A(X)_{m_P} = \mathrm{ht}(m_P) = \dim A(X) - \dim(A(X)/m_P) = \\ = \dim A(X) - \dim \mathbb{K} = \dim A(X) = \dim X\end{aligned}$$

5. Chiaramente $\Gamma(X) \subseteq K(X) \Rightarrow K(\Gamma(X)) \subseteq K(X)$. Viceversa ogni funzione razionale $f \in K(X)$ è regolare in qualche punto $P \in X$, quindi $f \in \mathcal{O}_{P,X} = \Gamma(X)_{m_P} \subseteq K(\Gamma(X))$. $\square$

Teorema 3.3.5 (Proprietà locale dei domini di integrità)**.** *Sia A un dominio e M l'insieme dei suoi ideali massimali. Risulta*

$$A = \bigcap_{m \in M} A_m$$

(osserviamo che $A \subseteq A_m \subseteq K(A)$, quindi l'intersezione è intesa dentro $K(A)$).

Dimostrazione. Chiaramente $A \subseteq A_m$ per ogni $m \in M \Rightarrow A \subseteq \bigcap_{m \in M} A_m$. Viceversa sia $x \in \bigcap_{m \in M} A_m$ e supponiamo per assurdo che $x \notin A$. L'ideale $I = \{y \in A : yx \in A\}$ è un ideale proprio di A dato che $1 \notin I$. Pertanto esiste un ideale massiamle $\overline{m} \in M$ tale che $I \subseteq \overline{m}$. Per ipotesi $x \in A_{\overline{m}}$, quindi esistono $y \in A$ e $s \in A \setminus \overline{m}$ tali che $x = y/s \Rightarrow xs = y \in A$, da cui $s \in I \subseteq \overline{m}$, assurdo. $\square$

Osservazione 3.3.6. La proprietà locale dei domini di integrità ci permette di dimostrare il punto 1 del Teorema 3.3.4 a partire dal punto 3. Infatti, una funzione regolare f è regolare in ogni punto $P \in X$, questa affermazione ci permette di scrivere

$$A(X) \subseteq \Gamma(X) \subseteq \bigcap_{P \in X} \mathcal{O}_{P,X} = \bigcap_{P \in X} A(X)_{m_P} = A(X)$$

(le uguaglianze seguono anche dal fatto che ogni punto di X è in corrispondenza biunivoca con gli ideali massimali m_P di $A(X)$ in base al teroema degli zeri di Hilbert).

Definizione 3.3.7. Siano X e Y due varietà. Ogni morfismo $\varphi : X \to Y$ induce il seguente omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre (detto **pullback**)

$$\varphi^* : \Gamma(Y) \to \Gamma(X) \qquad \varphi^*(f) = f \circ \varphi.$$

Osserviamo che se Z è un'altra varietà e $\psi : Y \to Z$ è un morfismo, allora $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$. Ciò implica che se $\varphi : X \to Y$ è un isomorfismo di varietà, allora φ^* è un isomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre, infatti $\varphi^* \circ \varphi^{-1*} = (\varphi^{-1} \circ \varphi)^* = (1_X)^* = 1_{\Gamma(X)}$, e analogamente $\varphi^{-1*} \circ \varphi^* = 1_{\Gamma(Y)}$.

Lemma 3.3.8. *Siano X una varietà e $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine. Una funzione $\psi : X \to Y$ è un morfismo se e solo se $x_i \circ \psi$ è una funzione regolare su X, dove $x_1, \dots, x_n$ sono le proiezioni $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$.*

Dimostrazione. Le proiezioni sono chiaramente funzioni regolari su Y, pertanto se ψ è un morfismo allora $x_i \circ \psi$ sono regolari su X. Viceversa supponiamo che $x_i \circ \psi$ siano regolari su X. Allora per ogni polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, la funzione

$$f \circ \psi = f(x_1, \dots, x_n) \circ \psi = f(x_1 \circ \psi, \dots, x_n \circ \psi)$$

è regolare, quindi continua. Adesso abbiamo $\psi^{-1}(V(f) \cap Y) = (f \circ \psi)^{-1}(0)$ chiuso, quindi ψ è continua ($V(f) \cap Y$ è una base di chiusi di Y, si veda 2.3.3). Proviamo che ψ è un morfismo. Siano $V \subseteq Y$ aperto e $\varphi : V \to \mathbb{K}$ una funzione regolare. Sia

$P \in \psi^{-1}(V)$, per la regolarità di φ esiste un intorno aperto $U \subseteq V$ di $\psi(P)$ e due polinomi $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tali che $\varphi = g/h$ e $h \neq 0$ in U. Allora

$$\varphi \circ \psi = \frac{g}{h} \circ \psi = \frac{g(x_1, \ldots, x_n)}{h(x_1, \ldots, x_n)} \circ \psi = \frac{g(x_1 \circ \psi, \ldots, x_n \circ \psi)}{h(x_1 \circ \psi, \ldots, x_n \circ \psi)} \quad \text{in } \psi^{-1}(U)$$

(la funzione regolare $h \circ \psi$ è invertibile in $\psi^{-1}(U)$, vista in $K(X)$) pertanto $\varphi \circ \psi$ è regolare in $\psi^{-1}(P)$. Dall'arbitrarietà di $P \in V$ segue che $\varphi \circ \psi$ è regolare in $\psi^{-1}(V)$. $\square$

Teorema 3.3.9. *Siano X una varietà e $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine. La funzione*

$$\alpha : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Gamma(Y), \Gamma(X))$$

con $\alpha(f) = f^*$ è biiettiva (dove $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Gamma(Y), \Gamma(X))$ è l'insieme degli omomorfismi di $\mathbb{K}$-algebre da $\Gamma(Y)$ in $\Gamma(X)$).

Dimostrazione. Proviamo che α è iniettiva. Siano $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Supponiamo che $\alpha(f) = \alpha(g) \Rightarrow f^* = g^*$, quindi per ogni $\varphi \in \Gamma(Y)$ si ha $f^*(\varphi) = g^*(\varphi)$, cioé per ogni $P \in X$ $\varphi(f(P)) = \varphi(g(P))$. Scegliendo φ uguale alle proiezioni, che chiaramente sono funzioni regolari in Y, si ha che le coordinate di $f(P)$ e $g(P)$ sono uguali, cioè $f(P) = g(P)$ per ogni $P \in X$, da cui segue $f = g$.
Adesso proviamo che α è suriettiva. Sia $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Gamma(Y), \Gamma(X))$, proviamo che esiste $F \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ tale che $\alpha(F) = \beta$. Dato che

$$\Gamma(Y) \simeq A(Y) = \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathscr{I}(Y)} = \mathbb{K}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_1}],$$

poniamo $\beta(\overline{x_i}) = f_i \in \Gamma(X)$. Sia

$$F = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \quad \text{definito da} \quad F(P) = (f_1(P), \ldots, f_n(P)) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}.$$

- $F(X) \subseteq Y$. Sia $g \in \mathscr{I}(Y)$, per ogni $P \in X$ si ha

  $$\begin{aligned} g(F(P)) = g(f_1(P), \ldots, f_n(P)) &=^{1} g(f_1, \ldots, f_n)(P) = g(\beta(\overline{x_1}), \ldots, \beta(\overline{x_n}))(P) = \\ &= \beta(g(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}))(P) = \beta(0_{A(Y)})(P) = 0_{\Gamma(X)}(P) = 0. \end{aligned}$$

  Pertanto $F(P) \in V(\mathscr{I}(Y)) = Y$ per ogni $P \in X$.

- F è un morfismo. Le proiezioni di F sono proprio le funzioni regolari f_i, pertanto, dal Lemma 3.3.8 segue che F è un morfismo.

- $\alpha(F) = F^* = \beta$. Sia $g \in \Gamma(Y)$, vediamo g come polinomio in $A(Y)$, risulta

  $$F^*(g) = g \circ F = g(f_1, \ldots, f_n) = g(\beta(\overline{x_1}), \ldots, \beta(\overline{x_n})) = \beta(g(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})) = \beta(g). \ \square$$

Corollario 3.3.10. *Se X e Y sono due varietà algebriche affini, allora X e Y sono isomorfe se e solo se $\Gamma(X)$ e $\Gamma(Y)$ sono isomorfe come $\mathbb{K}$-algebre.*

[1] Ricordiamo che $\Gamma(X)$ è un anello, quindi ha senso considerare la funzione regolare (in X) $g(f_1, \ldots, f_n)$.

3.4 Anello delle funzioni regolari: caso proiettivo

Lemma 3.4.1 (Idea dell'iperbole). *Se $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, allora*

$$\mathbb{A}^n \setminus V(f) \simeq V(x_{n+1}f - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}.$$

Pertanto $\mathbb{A}^n \setminus V(f)$ è affine, e il suo anello delle coordinate è $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_f$.

Dimostrazione. Dal Teorema 3.3.4 punto 2 abbiamo

$$\Gamma(\mathbb{A}^n \setminus V(f)) \simeq \Gamma(\mathbb{A}^n)_f = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_f \simeq$$
$$\simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, 1/f] \simeq \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]}{(x_{n+1}f - 1)} \simeq \Gamma(V(x_{n+1}f - 1)).$$

La tesi segue dal Corollario 3.3.10. □

Proposizione 3.4.2. *Le funzioni φ_i e ψ_i viste sopra 2.1 sono isomorfismi tra $U_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus V(x_i)$ e $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.*

Dimostrazione. Basta applicare il Lemma 3.3.8 e il suo analogo proiettivo. □

Proposizione 3.4.3. *Ogni varietà X ha un ricoprimento di aperti affini.*

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due passi.

- Ogni varietà X ha un ricoprimento di aperti quasi affini.
  Se X è quasi affine, la tesi è ovvia. Supponiamo X quasi proiettiva e poniamo $\mathbb{A}^n_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus V(x_i) \simeq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (proposizione precedente), $X_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$. Risulta $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ con X_i aperti quasi affini ($X_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$ è un aperto della varietà affine $\overline{X} \cap \mathbb{A}^n_i$). Si noti che se X è proiettiva, allora gli aperti X_i sono affini, quindi X ha un ricoprimento finito di aperti affini.

- Ogni varietà quasi affine $X \subseteq \mathbb{A}^n$ ha un ricoprimento di aperti affini.
  Sia $P \in X$, proviamo che esiste un aperto affine U tale che $P \in U \subseteq X$. L'insieme $Y = \overline{X} \setminus X$ è chiuso in $\mathbb{A}^n$ e dato che $P \notin Y$, esiste $f \in \mathscr{I}(Y)$ tale che $f(P) \neq 0$. Adesso $V(f) \supseteq Y = \overline{X} \setminus X$, da cui

  $$P \in (\mathbb{A}^n \setminus V(f)) \cap \overline{X} = (\mathbb{A}^n \setminus V(f)) \cap X = U.$$

  Adesso U è un aperto di X con $P \in U \subseteq X$, in particolare U è irriducibile. Usando l'idea dell'iperbole 3.4.1, $\mathbb{A}^n \setminus V(f)$ è affine, pertanto, dato che U è un chiuso irriducibile di $\mathbb{A}^n \setminus V(f)$, è affine. □

Corollario 3.4.4. *Ogni varietà X ha una base di aperti affini.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che ogni aperto di X è unione di aperti affini. Dato che un aperto di una varietà è ancora una varietà, la tesi segue dalla proposizione precedente. □

Definizione 3.4.5. Sia A un anello graduato e $S \subseteq A$ un insieme moltiplicativo formato da elementi omogenei. L'anello delle frazioni $S^{-1}A$ è in modo naturale $\mathbb{Z}$-graduato dichiarando gli elementi omogenei di $S^{-1}A$ quelli del tipo $f/g \in S^{-1}A$, con $f \in A$ omogeneo in A, con grado $\deg(f/g) = \deg(f) - \deg(g)$. Denotiamo con $A_{(S)}$ il sottoanello di $S^{-1}A$ formato dagli elementi di grado 0, esso è detto **localizzazione omogenea** di A in S.

Sia A un anello graduato e P un ideale omogeneo primo di A. Sia T l'insieme di tutti gli elementi omogenei di $A \setminus P$. In questo caso, indicheremo con $A_{(P)}$ la localizzazione omogenea di A in T.

Sia $f \in A$ un elemento omogeneo, $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$ è un insieme moltiplicativo formato da elementi omogenei. La localizzazione omogenea di A in S sarà indicata con $A_{(f)}$.

Osservazione 3.4.6. Tramite l'omogeneizzazione e la disomogeneizzazione di polinomi (2.1), si ha che $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)} \simeq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, quindi esiste un isomorfismo $\xi_i : \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)} \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Se $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è una varietà proiettiva e come prima $X_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$, tramite ξ_i si ha $\mathscr{I}(X_i) \simeq \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)S(X)_{(x_i)}$ e passando ai quozienti $\Gamma(X_i) \simeq A(X_i) \simeq S(X)_{(x_i)}$.

Teorema 3.4.7. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva. Risulta*

1. $\Gamma(X) \simeq \mathbb{K}$.

2. $\mathcal{O}_{P,X} \simeq S(X)_{(m_P)}$ *per ogni $P \in X$, dove m_P è l'ideale omogeneo massimale di $S(X)$ generato dagli elementi omogenei $f \in S(X)$ tali che $f(P) = 0$.*

3. $K(X) \simeq S(X)_{(0)}$.

Dimostrazione. Utilizziamo la notazione della proposizione precedente.

1. L'inclusione $\mathbb{K} \subseteq \Gamma(X)$ è ovvia. Viceversa, sia $f \in \Gamma(X)$. Allora, per ogni $i = 0, \ldots, n$, f è regolare anche in $X_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$, quindi $f \in A(X_i) \simeq S(X)_{(x_i)}$, pertanto esiste $g \in S(X)$ omogeneo di grado d_i tale che $f = g/x_i^{d_i}$ in X_i, quindi in X (3.1.8). Indicando con $S(X)_d$ la componente omogenea di grado d di $S(X)$, e pensando $f \in S(X)_{(x_i)} \subseteq K(S(X))$, si ha $x_i^{d_i} f \in S(X)_{d_i}$. Siano $d \geq \sum_{i=0}^n d_i$ e $h \in S(X)_d$, osserviamo che ogni monomio di h ha una delle variabili x_j elevata a una potenza maggiore o uguale a d_j, dunque $hf \in S(X)_d$ per ogni $h \in S(X)_d$. Iterando, per ogni $m \geq 1$ si ha $hf^m \in S(X)_d$, in particolare $x_0^d f^m \in S(X)_d$, da cui segue che $S(X)[f] \subseteq x_0^{-d} S(X)$. Dato che $x_0^{-d} S(X)$ è un $S(X)$-modulo f.g. e $S(X)$ è Noetheriano, allora anche $S(X)[f]$ è un $S(X)$-modulo f.g., quindi f è intero su $S(X)$. Pertanto esistono $a_i \in S(X)$ tali che

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \ldots + a_m = 0.$$

   Pensando la precedente equazione in $S(X)_{(x_i)}$, dato che f ha grado 0 (in $S(X)_{(x_i)}$), considerando solo la parte omogenea di grado 0 degli a_i, possiamo supporre che $a_i \in \mathbb{K}$, ottenendo così che f è algebrico su $\mathbb{K}$, cioè $f \in \overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$.

2. Sia $P \in X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, quindi esiste i tale che $P \in X_i$, da cui $A(X_i)_{m'_P} \simeq \mathcal{O}_{P,X_i}$, dove m'_P è l'ideale massimale di $A(X_i)$ associato a P. Tramite l'isormofismo ξ_i dell'osservazione precedente, si ha $m'_P \simeq m_p S(X)_{(x_i)}$. Adesso per ipotesi $P \in X_i$, cioè $x_i \notin m_P$, dalla transitività della localizzazione si ha $A(X_i)_{m'_P} \simeq S(X)_{(m_P)}$.

3. Poiché $K(X) \simeq K(X_i)$, si ha $K(X_i) \simeq K(A(X_i)) \simeq K(S(X)_{(x_i)})$, quest'ultimo è isomorfo per costruzione a $S(X)_{(0)}$. □

Corollario 3.4.8. *X è una varietà affine e proiettiva se e solo se X è un punto.*

Dimostrazione. Ovviamente un punto può essere realizzato come una varietà affine o proiettiva. Viceversa, se X è proiettiva $\Gamma(X) \simeq \mathbb{K}$, se X è anche affine allora $\dim X = \dim \Gamma(X) = \dim \mathbb{K} = 0$, quindi X è un punto. $\square$

3.5 Morfismi dominanti

Definizione 3.5.1. Siano X e Y due varietà. Un morfismo $f : X \to Y$ si dice **dominante** se $f(X)$ è denso in Y.

Lemma 3.5.2. *Sia X una varietà e Y una varietà affine. Un morfismo $f : X \to Y$ è dominante se e solo se $f^* : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ è iniettivo.*

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Sia $g \in \Gamma(Y)$, abbiamo

$$f^*(g) = 0_{\Gamma(X)} \Rightarrow g \circ f = 0_{\Gamma(X)} \Rightarrow g(f(X)) = \{0\} \Rightarrow f(X) \subseteq g^{-1}(0),$$

dato che $g^{-1}(0)$ è chiuso, $Y = \overline{f(X)} \subseteq g^{-1}(0)$, da cui $g = 0_{\Gamma(Y)}$.

$\Leftarrow$ Proviamo che $\mathscr{I}(f(X)) = \mathscr{I}(Y)$.

$\subseteq$ Sia $g \in \mathscr{I}(f(X)) \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$. Se vediamo g come funzione regolare su Y abbiamo

$$f^*(g)(X) = (g \circ f)(X) = g(f(X)) = \{0\} \Rightarrow f^*(g) = 0_{\Gamma(X)} \Rightarrow g = 0_{\Gamma(Y)},$$

pertanto $g \in \mathscr{I}(Y)$ (come polinomio).

$\supseteq$ $f(X) \subseteq Y \Rightarrow \mathscr{I}(f(X)) \supseteq \mathscr{I}(Y)$.

Adesso $\mathscr{I}(f(X)) = \mathscr{I}(Y) \Rightarrow \overline{f(X)} = V(\mathscr{I}(f(X))) = V(\mathscr{I}(Y)) = Y$. $\square$

Capitolo 4

Prodotto di Varietà

4.1 Cenno alla teoria delle categorie

Siano O un insieme i cui elementi sono detti **oggetti**, A un insieme i cui elementi sono detti **morfismi** (o **frecce**), $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : A \to O$ due funzioni. Definiamo

$$A \times_O A = \{(g, f) \in A \times A : \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)\}$$

l'insieme dei morfismi componibili. Siano infine $id : O \to A$ detta **identità**, che associa $a \mapsto 1_a$, e $\circ : A \times_O A \to A$ detta **composizione**, che associa $(g, f) \mapsto g \circ f$, due funzioni tali che per ogni $a \in A$, $(h, g)(g, f) \in A \times_O A$ si abbia

1. $\mathrm{dom}\, g \circ f = \mathrm{dom}\, f$, $\mathrm{cod}\, g \circ f = \mathrm{cod}\, g$.
2. $\mathrm{dom}\, 1_a = \mathrm{cod}\, 1_a = a$.
3. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. (associatività)
4. $1_{\mathrm{cod}\, f} \circ f = f \circ 1_{\mathrm{dom}\, f} = f$. (identità)

Definizione 4.1.1. Una **categoria** $\mathfrak{C}$ consiste in insiemi O, A e funzioni $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}, id, \circ$ con le stesse proprietà illustrate sopra.

L'insieme delle frecce di dominio $a \in O$ e codominio $b \in O$ sarà indicato con $\mathrm{Hom}(a, b)$. Così per ogni $a, b, c \in O$ la composizione di morfismi può essere vista come una funzione $\mathrm{Hom}(b, c) \times \mathrm{Hom}(a, b) \to \mathrm{Hom}(a, c)$. Indicheremo un morfismo $f \in \mathrm{Hom}(a, b)$ anche con $f : a \to b$.

Si noti che fissato $a \in O$, l'insieme $M = \mathrm{Hom}(a, a)$ insieme con l'operazione di composizione $\circ : M \times M \to M$ è un monoide.

Esempio 4.1.2. *Vediamo alcuni esempi di categorie.*

- *La categoria **SET** degli insiemi, dove gli oggetti sono insiemi e i morfismi sono funzioni tra insiemi (si noti che non è possibile considerare la categoria di "tutti gli insiemi", quindi in questo caso l'insieme degli oggetti è una famiglia di* alcuni *insiemi).*
- *La categoria **TOP** degli spazi topologici, in cui i morfismi sono le funzioni continue.*

- *La categoria **GRP** dei gruppi, in cui i morfismi sono gli omomorfismi di gruppi.*

- *La categoria **KALG** delle $\mathbb{K}$-algebre finitamente generate che sono domini, in cui i morfismi sono gli omomorfismi di $\mathbb{K}$-algebre.*

- *La categoria **VAR** delle varietà, in cui i morfismi sono i morfismi di varietà.*

- *La categoria **VARAFF** delle varietà algebriche affini, in cui i morfismi sono i morfismi di varietà algebriche affini.*

Definizione 4.1.3. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria. Un morfismo $f \in \text{Hom}(a, b)$ è un **isomorfismo** se esiste $g \in \text{Hom}(b, a)$ tale che $g \circ f = 1_a$ e $f \circ g = 1_b$. Due oggetti a, b di $\mathfrak{C}$ si dicono **isomorfi** (o **equivalenti**) se esiste un isomorfismo $f \in \text{Hom}(a, b)$.

Negli esempi precedenti, gli isomorfismi rispettivamente di **SET** sono le funzioni biiettive, di **TOP** sono gli omeomorfismi, di **GRP** sono gli isomorfismi di gruppi, di **KALG** sono gli isomorfismi di $\mathbb{K}$-algebre, di **VAR** sono gli isomorfismi di varietà. Si noti che la relazione di isomorfismo tra gli oggetti di una categoria è una relazione di equivalenza.

Definizione 4.1.4. Siano $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{B}$ due categorie, un **funtore** $F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ consiste in due funzioni (che con abuso di notazione indichiamo entrambe con F), la prima dagli oggetti di $\mathfrak{B}$ in quelli di $\mathfrak{C}$, la seconda dai morfismi di $\mathfrak{B}$ in quelli di $\mathfrak{C}$, tali che per ogni a, b, c oggetti di $\mathfrak{B}$ e per ogni $f \in \text{Hom}(a, b)$, $g \in \text{Hom}(b, c)$ si abbia

1. $F(f) \in \text{Hom}(F(a), F(b))$.

2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

3. $F(1_a) = 1_{F(a)}$.

Esempio 4.1.5. *In **SET** definiamo il funtore $\mathcal{P}$ che associa a ogni insieme X l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$, e a ogni funzione $f : X \to Y$ la funzione $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ che associa a $X' \subseteq X$ l'immagine $f(X') \subseteq Y$.*

Definizione 4.1.6. A partire da una categoria $\mathfrak{C}$ possiamo costruire la categoria **opposta** o **duale** $\mathfrak{C}^{op}$ in cui invertiamo l'ordine delle frecce. Più formalmente ogni morfismo di $\mathfrak{C}$ in $\text{Hom}(a, b)$ diventa un morfismo di $\mathfrak{C}^{op}$ in $\text{Hom}(b, a)$. Di conseguenza se $f \in \text{Hom}(a, b), g \in \text{Hom}(b, c)$, allora la composizione nel duale è data da $f \circ g \in \text{Hom}(c, a)$.

Definizione 4.1.7. Siano $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ due categorie. Un **funtore controvariante** è un funtore $F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}^{op}$.

Definizione 4.1.8. Se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sono categorie e $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ sono due funtori, allora la loro composizione $G \circ F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ è il funtore che ha come funzioni sugli oggetti e le frecce rispettivamente le composizioni delle funzioni dei funtori F e G.

Definizione 4.1.9. Siano $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ due categorie. Un funtore $F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ è un **isomorfismo di categorie** se le sue funzioni sugli oggetti e sulle frecce sono biiezioni. In modo equivalente se esiste un funtore $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ tale che le composizioni $F \circ G$, $G \circ F$ diano i funtori identità rispettivamente su $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{B}$.

Osservazione 4.1.10. A ogni varietà algerica affine X possiamo associare la $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata $\Gamma(X)$, e ad ogni morfismo di varietà algebriche affini $f : X \to Y$ possiamo associare $\Gamma(f) = f^* : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$. Per quanto abbiamo provato finora, Γ è un funtore controvariante $\Gamma : \mathbf{VARAFF} \to \mathbf{KALG}$. Inoltre è un isomorfismo, in quanto ogni oggetto di **KALG** si vede facilmente che è del tipo $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/P$, con P ideale primo di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (basta considerare $\varphi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, con $\varphi(x_i) = \alpha_i$). Questo fatto, unito al Teorema 3.3.9 ci permette di concludere che Γ è un isomorfismo tra **VARAFF** e $\mathbf{KALG}^{op}$.

Definizione 4.1.11. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria e sia $\{A_i \in O : i \in I\}$ una famiglia di oggetti di $\mathfrak{C}$. Un **prodotto** per la famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ è un oggetto P di $\mathfrak{C}$ insieme con una famiglia di morfismi $\{\pi_i : P \to A_i : i \in I\}$ tali che per ogni oggetto B di $\mathfrak{C}$ e famiglia di morfismi $\{\varphi_i : B \to A_i : i \in I\}$, esiste un unico morfismo $\varphi : B \to P$ tale che $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ per ogni $i \in I$.

Un prodotto P di una famiglia di oggetti $\{A_i\}_{i\in I}$ viene indicato con $\prod_{i\in I} A_i$. Descriviamo il caso particolare del prodotto tra due oggetti, cioè $I = \{1, 2\}$. Indichiamo un prodotto di A_1, A_2 con $A_1 \times A_2$, abbiamo i due morfismi $\pi_i : A_1 \times A_2 \to A_i$ $(i = 1, 2)$. Per ogni oggetto B e morfismi $\varphi_i : B \to A_i$ $(i = 1, 2)$ esiste un unico morfismo $\varphi : B \to A_1 \times A_2$ tale che $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ $(i = 1, 2)$.

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \times A_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A_1 & & A_2 \\
& B \arrow[ul, "\varphi_1"] \arrow[ur, "\varphi_2"'] \arrow[uu, dashed, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

In una categoria, non è detto che il prodotto di una famiglia di oggetti esiste, però se esiste esso è unico a meno di isomorfismi.

Teorema 4.1.12. *Sia $\mathfrak{C}$ una categoria e $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di oggetti. Se $(P, \{\pi_i\}_{i\in I})$ e $(Q, \{\psi_i\}_{i\in I})$ sono due prodotti per $\{A_i\}_{i\in I}$, allora P e Q sono isomorfi.*

Dimostrazione. Consideriamo l'oggetto Q e la famiglia di morfismi $\{\psi_i\}_{i\in I}$. Dato che P è un prodotto, esiste un morfismo $g : Q \to P$ tale che $\psi_i = \pi_i \circ g$ per ogni $i \in I$. Scambiando i ruoli di P e Q, esiste un morfismo $f : P \to Q$ tale che $\pi_i = \psi_i \circ f = \pi_i \circ (g \circ f)$ per ogni $i \in I$. Osserviamo che si ha anche $\psi_i = \pi_i \circ g = \psi_i \circ (f \circ g)$. Adesso consideriamo l'oggetto P e la famiglia $\{\pi_i\}_{i\in I}$, di nuovo, poiché P è un prodotto, esiste un unico morfismo $h : P \to P$ tale che $\pi_i = \pi_i \circ h$ per ogni $i \in I$. Dato che anche 1_P soddisfa $\pi_i = \pi_i \circ 1_P$ per ogni $i \in I$, dall'unicità di h si ha $h = 1_P = g \circ f$. Procedendo in modo analogo su Q si ottiene $f \circ g = 1_Q$, da cui f e g sono isomorfismi. $\square$

Esempio 4.1.13. *Diamo alcuni esempi di prodotto.*

- *In **SET** il prodotto di una famiglia di insiemi X_i è il prodotto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ insieme con le proiezioni canoniche.*

- *In **TOP** il prodotto di una famiglia di spazi topologici X_i è lo spazio topologico prodotto $\prod_{i\in I} X_i$ insieme con le proiezioni canoniche.*

- *In* ***GRP*** *il prodotto di una famiglia di gruppi G_i è il prodotto diretto $\bigotimes_{i\in I} G_i$ insieme con le proiezioni canoniche.*

Definizione 4.1.14. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria e sia $\{A_i \in O : i \in I\}$ una famiglia di oggetti di $\mathfrak{C}$. Un **coprodotto** (o **somma**) per la famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ è un oggetto P di $\mathfrak{C}$ insieme con una famiglia di morfismi $\{\pi_i : A_i \to P : i \in I\}$ tali che per ogni oggetto B di $\mathfrak{C}$ e famiglia di morfismi $\{\varphi_i : A_i \to B : i \in I\}$, esiste un unico morfismo $\varphi : P \to B$ tale che $\varphi_i = \varphi \circ \pi_i$ per ogni $i \in I$.

Un coprodotto P di una famiglia di oggetti $\{A_i\}_{i\in I}$ viene indicato con $\coprod_{i\in I} A_i$.

Osservazione 4.1.15. Il coprodotto è un prodotto nella categoria opposta. Da questo fatto, utilizzando i teoremi precedenti, segue che il coprodotto, quando esiste, è unico a meno di isomorfismi.

Esempio 4.1.16. *Diamo alcuni esempi di coprodotto.*

- *In* ***SET*** *il coprodotto una famiglia di insiemi X_i è l'unione disgiunta $\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} X \times \{i\}$.*
- *In* ***GRP*** *il coprodotto di due gruppi G, H è il prodotto libero $G * H$ (che non definiamo).*
- *Nella categoria dei gruppi abeliani il coprodotto di una famiglia di oggetti è la somma diretta.*

Definizione 4.1.17. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria. Un oggetto P è **iniziale** se per ogni oggetto B della categoria, esiste un unico morfismo da P in B; P è **terminale** se per ogni oggetto B della categoria, esiste un unico morfismo da B in P.

In generale, non è detto che una categoria abbia oggetti iniziali o terminali. Chiaramente due oggetti iniziali (risp. terminali) sono isomorfi. Pertanto, se una categoria ammette un oggetto iniziale (risp. terminale), esso è unico a meno di isomorfismi.

Il prodotto tensoriale di moduli può essere definito a partire dalla definizione di oggetto iniziale. Siano $M_1, \dots, M_n$ A-moduli, con A anello commutativo unitario. Consideriamo la categoria $\mathfrak{C}$ dove gli oggetti sono le funzioni multi-A-lineari (cioè A-lineari rispetto a tutte le componenti) del tipo

$$f : M_1 \times \ldots \times M_n \to F$$

dove F è un A-modulo. Se F e G sono A-moduli, dati due oggetti del tipo

$$f : M_1 \times \ldots \times M_n \to F \quad g : M_1 \times \ldots \times M_n \to G$$

un morfismo in $Hom(f, g)$ è un omomorfismo di A-moduli $h : F \to G$ tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "h"] \\ M_1 \times \ldots \times M_n \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

Definiamo prodotto tensoriale un oggetto iniziale di questa categoria. È possibile provare che un tale oggetto esiste. Esso sarà del tipo $f : M_1 \times \ldots \times M_n \to F$ ed è definito a meno di isomorfismi. Per costruzione anche il modulo F è definito a meno di isomorfismi. Il modulo F sarà indicato con $M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_n$ e con abuso di linguaggio sarà detto **prodotto tensoriale** in A dei moduli $M_1, \ldots, M_n$.

4.2 Prodotto di A-algebre

In questa sezione A sarà un anello commutativo unitario.

Proposizione-Definizione 4.2.1. *Un anello commutativo unitario B è una A-**algebra** se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti*

1. *Esiste un omomorfismo di anelli $f : A \to B$.*
2. *Esiste una operazione binaria esterna $A \times B \to B$ che rende B un A-modulo e tale che per ogni $a \in A$ e $x, y \in B$ si ha $a \cdot (xy) = (a \cdot x)y$.*

Dimostrazione.

- $\Rightarrow$ Definiamo l'operazione esterna $A \times B \to B$ con $(a, b) \mapsto f(a)b$. Chiaramente per ogni $a \in A$ e $x, y \in B$ si ha $a \cdot (xy) = f(a)xy = (a \cdot x)y$.
- $\Leftarrow$ Definiamo $f : A \to B$ con $f(a) = a \cdot 1_B$. Si verifica facilmente che f è un omomorfismo di anelli. $\square$

Definizione 4.2.2. Se B e C sono A-algebre, un **omomorfismo di A-algebre** è un omomorfismo di anelli $h : B \to C$ che è anche un omomorfismo di A-moduli.

Equivalentemente, se $f : A \to B$ e $g : A \to C$ sono omomorfismi di anelli, h è un omomorfismo di A-algebre se $h \circ f = g$.

Definizione 4.2.3. Sia B una A-algebra. B è **finitamente generata** se esistono $b_1, \ldots, b_n \in B$ tali che $B = f(A)[b_1, \ldots, b_n]$. In modo equivalente se esiste un omomorfismo di A-algebre $\varphi : A[x_1, \ldots, x_n] \to B$ suriettivo. B è **finita** se è un A-modulo finito, cioè se esistono $b_1, \ldots, b_n$ tali che $B = Ab_1 + \ldots + Ab_n$.

Osserviamo che se $A = \mathbb{K}$ è un campo, l'omomorfismo $f : \mathbb{K} \to B$ è iniettivo, quindi $\mathbb{K} \subseteq B$. Pertanto le $\mathbb{K}$ algebre sono semplicemente anelli commutativi unitari che hanno $\mathbb{K}$ come sottoanello.

Vogliamo definire il prodotto tensoriale di A-algebre. Se B e C sono A-algebre, possiamo considerare il loro prodotto tensoriale $B \otimes_A C$ come A-moduli, e su questo modulo definire una operazione in modo tale da rendere $B \otimes_A C$ un anello commutativo unitario con la struttura di A-algebra.

Poniamo $D = B \otimes_A C$. Consideriamo la mappa $B \times C \times B \times C \to D$ definita da $(b, c, b', c') \mapsto bb' \otimes cc'$. Si verifica facilmente che essa è multi-A-lineare. Pertanto, per definizione di prodotto tensoriale esiste un omomorfismo di A-moduli

$$B \otimes C \otimes B \otimes C \to D.$$

Dall'associatività del prodotto tensoriale otteniamo un omomorfismo $D \otimes D \to D$. Possiamo comporre quest'ultimo con la funzione bilineare $D \times D \to D \otimes D$ definita da $(d, d') \mapsto d \otimes d'$, ottenendo così una funzione bilineare che, per costruzione, è ben definita ed è data da

$$\mu : D \times D \to D \quad \mu(b \otimes c, b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

Si verifica facilmente che D con questa operazione è un anello commutativo unitario, e $1_B \otimes 1_C$ è l'unità di D. Inoltre D è una A-algebra con l'omomorfismo di anelli $f : A \to D$ definito da $f(a) = a \cdot 1_B \otimes 1_C = 1_B \otimes a \cdot 1_C$ (in altri termini, se $g : A \to B$ e $h : A \to C$ sono omomorfismi di anelli, allora $f(a) = g(a) \otimes 1_C = 1_B \otimes h(a)$).

Proposizione 4.2.4. *Sia $\mathfrak{C}$ la categoria delle A-algebre in cui i morfismi sono gli omomorfismi di A-algebre. Se B e C sono oggetti di $\mathfrak{C}$, allora il prodotto tensoriale $B \otimes_A C$ come A-algebre, insieme con gli omomorfismi $\phi_1 : B \to B \otimes_A C$, $\phi_2 : C \to B \otimes_A C$ definiti da $\phi_1(b) = b \otimes 1$, $\phi_2(c) = 1 \otimes c$, è un coprodotto di B e C.*

Dimostrazione. Sia D una A-algebra e $f : B \to D$, $g : B \to D$ due omomorfismi di A-algebre.

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
B \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & & C \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "\phi_2"] \\
& B \otimes_A C \arrow[uu, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Sia $h : B \otimes_A C \to D$ un omomorfismo di A-algebre tale che il diagramma in figura commuti. Per ogni $b \otimes c \in B \otimes_A C$ deve aversi

$$h(b \otimes c) = h\big((b \otimes 1)(1 \otimes c)\big) = h(b \otimes 1)h(1 \otimes c) = h(\phi_1(b))h(\phi_2(c)) = f(b)g(c).$$

Da cui h è univocamente determinato, pertanto è unico. □

Proposizione 4.2.5. *Siano $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ indeterminate su A. Risulta*

$$A[\underline{x}] \otimes_A A[\underline{y}] \simeq A[\underline{x}, \underline{y}].$$

Dimostrazione. Consideriamo le immersioni $A[\underline{x}] \hookrightarrow A[\underline{x}, \underline{y}]$, $A[\underline{y}] \hookrightarrow A[\underline{x}, \underline{y}]$. Dato che il prodotto tensoriale di algebre è un coprodotto, consideriamo l'unico omomorfismo

$$\varphi : A[\underline{x}] \otimes_A A[\underline{y}] \to A[\underline{x}, \underline{y}] \quad \text{deifinito da} \quad \varphi(f(\underline{x}), g(\underline{y})) = f(\underline{x})g(\underline{y}),$$

che fa commutare le immersioni canoniche con le inclusioni considerate precedentemente. Dato che $1 = \varphi(1)$, $x_i = \varphi(x_i \otimes 1)$, $y_i = \varphi(1 \otimes y_i)$; φ è suriettiva. Proviamo che φ è iniettiva. Siano $f \in A[\underline{x}]$, $g \in A[\underline{y}]$, supponiamo che

$$\varphi(f \otimes g) = f(\underline{x})g(\underline{y}) = \sum a_{i,j,\underline{\alpha},\underline{\beta}}\, \underline{x}^{\underline{\alpha}} \underline{y}^{\underline{\beta}} = 0,$$

(dove $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ sono multiindici). Dal principio di identità dei polinomi segue $a_{i,j,\underline{\alpha},\underline{\beta}} = 0$, pertanto

$$f \otimes g = \sum a_{i,j,\underline{\alpha},\underline{\beta}}\, \underline{x}^{\underline{\alpha}} \otimes \underline{y}^{\underline{\beta}} = 0.$$

□

Corollario 4.2.6. *Se B e C sono A-algebre finitamente generate, allora lo è anche $B \otimes_A C$.*

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo due omomorfismi di A-algebre suriettivi

$$f : A[x_1, \ldots, x_n] \to B \quad g : A[y_1, \ldots, y_m] \to C.$$

Il prodotto tensoriale di questi due omomorfismi

$$f \otimes g : A[x_1, \ldots, x_n] \otimes_A A[y_1, \ldots, y_m] \simeq A[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] \to B \otimes_A C$$

definito da $(f \otimes g)(z \otimes w) = f(z) \otimes g(w)$ è un omomorfismo di A-algebre suriettivo (il prodotto tensoriale conserva la suriettività). □

Proposizione-Definizione 4.2.7. *Un anello commutativo unitario A è un anello di* ***Hilbert-Jacobson*** *se soddisfa una dellle seguenti condizioni equivalenti*

1. *Ogni ideale primo P è intersezione di tutti gli ideali massimali che lo contengono.*

2. *In ogni quoziente di A il nilradicale coincide con il radicale di Jacobson.*

Dimostrazione. Segue facilmente dal fatto che gli ideali primi di A che contengono un ideale $I \trianglelefteq A$ sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali primi di A/I; e dal fatto che il nilradicale è l'intersezione di tutti gli ideali primi, mentre l'ideale di Jacobson è l'intersezione di tutti gli ideali massimali. □

Chiaramente se un anello è di Hilbert-Jacobson, allora lo è ogni suo quoziente.

Proposizione 4.2.8. *L'anello dei polinomi $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è di Hilbert-Jacobson.*

Dimostrazione. Sia $P \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideale primo. Dal Nullstellensatz abbiamo

$$P = \mathscr{I}(V(P)) = \mathscr{I}\left(\bigcup_{p \in V(P)} \{p\}\right) = \bigcap_{p \in V(P)} \mathscr{I}(p) = \bigcap_{M \supseteq P} M.$$ □

Corollario 4.2.9. *Se B è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, allora il nilradicale di B coincide con il radicale di Jacobson di B.*

Dimostrazione. Basta osservare che B è un quoziente di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, e quest'ultimo è un anello di Hilbert-Jacobson. □

Lemma 4.2.10. *Se B è una A-algebra, allora $A \otimes_A B \simeq B$.*

Dimostrazione. Come nel caso degli A-moduli, l'omomorfismo $\varphi : A \otimes_A B \to B$ definito da $\varphi(a \otimes b) = a \cdot b$ è un isomorfismo di A-algebre. □

Proposizione 4.2.11. *Siano B e C due $\mathbb{K}$-algebre finitamente generate, con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso.*

1. *Se B e C sono ridotte (cioè prive di elementi nilpotenti) allora $B \otimes_{\mathbb{K}} C$ è ridotta.*

2. *Se B e C sono domini, allora $B \otimes_{\mathbb{K}} C$ è un dominio.*

Dimostrazione.

1. Sia $\alpha = \sum b_i \otimes c_i \in B \otimes C$. Se uno dei c_i è combinazione degli altri c_j, cioé $c_i = \sum_{j\neq i} a_j c_j$ con $a_j \in \mathbb{K}$, allora possiamo scrivere

$$\sum b_i \otimes c_i = \sum_{j\neq i} b_j \otimes c_j + b_i \otimes \sum_{j\neq i} a_j c_j = \sum_{j\neq i} (b_j + a_j b_i) \otimes c_j.$$

Pertanto, procedendo induttivamente, possiamo supporre che gli elementi c_i siano linearmente indipendenti (B e C sono anche $\mathbb{K}$-spazi vettoriali). Supponiamo che α sia nilpotente, cioè $\alpha^k = 0$. Sia M un ideale massimale di B. Poiché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso si ha $B/M \simeq \mathbb{K}$, quindi $B/M \otimes C \simeq C$. Sia $\pi : B \to B/M$ la proiezione naturale, consideriamo il seguente omomorfismo di algebre

$$\varphi = \pi \otimes 1_C : B \otimes C \to B/M \otimes C \simeq C \quad \text{con} \quad \varphi(b \otimes c) = \bar{b}c$$

(dove $\bar{b} = b + M \in B/M \simeq \mathbb{K}$). Risulta $0 = \varphi(\alpha^k) = \varphi(\alpha)^k$, ma poiché per ipotesi C è ridotta si ha

$$\varphi(\alpha) = \varphi\left(\sum b_i \otimes c_i\right) = \sum \overline{b_i} c_i = 0.$$

Dato che avevamo scelto i c_i l.i. deve aversi $\overline{b_i} = 0$, cioè $b_i \in M$ per ogni i. Dall'arbitrarietà dell'ideale massimale M abbiamo che gli elementi b_i stanno nell'interesezione di tutti gli ideali massimali di B, cioè nel radicale di Jacobson. Essendo B una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, il radicale di Jacobson coincide con il nilradicale, che per ipotesi è nullo dato che B è ridotta. Pertanto $b_i = 0$ per ogni i, cioè $\alpha = 0$.

2. Siano $\alpha = \sum_{i\in I} b_i \otimes c_i, \alpha' = \sum_{i\in I} b'_i \otimes c'_i \in B \otimes C$. Come prima possiamo supporre che rispettivamente i c_i e i c'_i siano linearmente indipendenti. Supponiamo che $\alpha\alpha' = 0$. Adesso, in analogo a prima, per ogni ideale massimale M di B consideriamo l'omomorfismo $\varphi : B/M \otimes C \to C$, quindi $0 = \varphi(\alpha\alpha') = \varphi(\alpha)\varphi(\alpha')$, da cui, dato che C è un dominio, $\varphi(\alpha) = 0$ oppure $\varphi(\alpha') = 0$, cioé $b_i \in M$ oppure $b'_i \in M$, al variare di M ideale massimale di B. Ciò vuol dire che

$$(b_i : i \in I) \cap (b'_i : i \in I) \subseteq \bigcap_{\substack{M \subseteq B \\ \text{massimale}}} M = (0),$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta di nuovo al fatto che B è un dominio ed un anello di Hilbert-Jacobson. Il fatto che B è un dominio implica che l'ideale nullo è primo, quindi in particolare è irriducibile, da cui deve aversi $(b_i : i \in I) = (0)$ oppure $(b'_i : i \in I) = (0)$, cioè, per ogni $i \in I$, $b_i = 0$ oppure $b'_i = 0$, quindi $\alpha = 0$ oppure $\alpha' = 0$. □

I seguenti esempi mostrano che l'ipotesi $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso è necessaria.

Esempio 4.2.12. *Consideriamo $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ come prodotto di $\mathbb{R}$-algebre. Abbiamo che in $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ci sono divisori dell zero:*

$$\big((i \otimes 1) + (1 \otimes i)\big) \cdot \big((i \otimes 1) - (1 \otimes i)\big) = -1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 = 0.$$

Esempio 4.2.13. *Sia $\mathbb{K}$ un campo non perfetto di caratteristica $p > 0$, e sia $a \in \mathbb{K} \setminus F(\mathbb{K})$, dove F è il morfismo di Frobenius. Per ipotesi esiste $\mathbb{F} \supsetneq \mathbb{K}$ e $b \in \mathbb{F}$ tale che $b^p = a$, quindi in $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$ abbiamo elementi nilpotenti:*

$$\big(1 \otimes b - b \otimes 1\big)^p = 1 \otimes b^p - b^p \otimes 1 = 1 \otimes a - a \otimes 1 = 0.$$

Per quanto abbiamo provato finora, se B e C sono $\mathbb{K}$-algebre finitamente generate che sono anche domini, allora lo è anche il loro prodotto tensoriale $B \otimes_{\mathbb{K}} C$. Ciò garantisce l'esistenza del coprodotto nella categoria **KALG** delle $\mathbb{K}$-algebre finitamente generate che sono domini, che, come prima, risulta isomorfo al prodotto tensoriale.

Proposizione 4.2.14. *Siano $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m)$ indeterminate su $\mathbb{K}$, e $I \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$, $J \subseteq \mathbb{K}[\underline{y}]$ due ideali. Risulta*

$$\frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{I} \otimes_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[\underline{y}]}{J} \simeq \frac{\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]}{I^e + J^e}$$

(dove con I^e, J^e intendiamo le estensioni dei due ideali I, J in $\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$).

Dimostrazione. Consideriamo le composizioni delle due inclusioni con la proiezione naturale

$$\mathbb{K}[\underline{x}], \mathbb{K}[\underline{y}] \hookrightarrow \mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}] \to \frac{\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]}{I^e + J^e}.$$

Essendo il loro il nucleo pari a rispettivamente I e J, esse inducono due omomorfismi

$$\frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{I} \longrightarrow \frac{\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]}{I^e + J^e} \qquad \frac{\mathbb{K}[\underline{y}]}{J} \longrightarrow \frac{\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]}{I^e + J^e}.$$

Dato che $\mathbb{K}[\underline{x}]/I \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\underline{y}]/J$ è un coprodotto nella categoria **KALG** esiste un unico omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre

$$\varphi : \frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{I} \otimes_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[\underline{y}]}{J} \longrightarrow \frac{\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]}{I^e + J^e} \quad \text{definito da} \quad \begin{array}{c} \varphi(\overline{x_i} \otimes 1) = x_i + (I^e + J^e), \\ \varphi(1 \otimes \overline{y_i}) = y_i + (I^e + J^e). \end{array}$$

Chiaramente φ è suriettiva. Proviamo che è anche iniettiva. Siano $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$, $g \in \mathbb{K}[\underline{y}]$ tali che

$$\varphi\big((f + I) \otimes (g + J)\big) = fg + (I^e + J^e) = \overline{0},$$

cioè $fg \in I^e + J^e$. Pertanto esistono $i \in I$, $j \in J$ e $h, k \in \mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$ tali che $fg = hi + kj$. Scriviamo

$$h = \sum a_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\, \underline{x}^{\underline{\alpha}} \underline{y}^{\underline{\beta}} \quad k = \sum b_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\, \underline{x}^{\underline{\alpha}} \underline{y}^{\underline{\beta}}$$

da cui

$$fg = \sum i\, a_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\, \underline{x}^{\underline{\alpha}} \underline{y}^{\underline{\beta}} + \sum j\, b_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\, \underline{x}^{\underline{\alpha}} \underline{y}^{\underline{\beta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f + I) \otimes (g + J) = \sum a_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\, (i\underline{x}^{\underline{\alpha}} + I) \otimes (\underline{y}^{\underline{\beta}} + J) + \sum b_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\, (\underline{x}^{\underline{\alpha}} + I) \otimes (j\underline{y}^{\underline{\beta}} + J) = 0.$$

□

4.3 Prodotto di varietà affini

Date due varietà algebriche affini X e Y, vogliamo definire una varietà prodotto $X \times Y$. Un primo modo di procedere potrebbe essere il seguente. In base all'Osservazione 4.1.10 abbiamo che Γ è un funtore controvariante, che è anche un isomorfismo, tra la categoria **VARAFF** e **KALG**. Pertanto l'esistenza del coprodotto in **KALG**, implica l'esistenza di un prodotto (nel senso della teoria delle categorie) di varietà algebriche affini. Ciò ci dà una prima definizione di prodotto di varietà algebriche affini.

Un secondo modo di procedere è il seguente. Date $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ due varietà algebriche affini, definire il prodotto di varietà come l'insieme $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ con la topologia indotta da quella di Zariski su $\mathbb{A}^{n+m}$. Tuttavia questa seconda definizione, a differenza della prima, a priori dipende dal tipo di immersione nello spazio affine delle due varietà.

Mostreremo che le due definizioni sono equivalenti.

Osservazione 4.3.1. Mentre insiemisticamente abbiamo che $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$, topologicamente la topologia di Zariski di $\mathbb{A}^{n+m}$ in generale è più fine della topologica prodotto $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Consideriamo ad esempio il caso $n = m = 1$. In $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ i chiusi della topologia prodotto sono gli insiemi $\emptyset$, $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, le unioni finite di punti e di insiemi del tipo $\{P\} \times \mathbb{A}^1$ e $\mathbb{A}^1 \times \{P\}$. Quindi, ad esempio la diagonale $\Delta = V(y - x) \subseteq \mathbb{A}^2$ è chiuso in $\mathbb{A}^2$, ma non in $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$.

Proposizione-Definizione 4.3.2. *Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ due varietà algebriche affini, con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso.*

1. *$X \times Y = V(\mathscr{I}(X)^e + \mathscr{I}(Y)^e)$, in particolare $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ è chiuso.*

2. *$X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ con la topologia indotta è una varietà algebrica affine.*

3. *$\mathscr{I}(X \times Y) = \mathscr{I}(X)^e + \mathscr{I}(Y)^e$.*

4. *$\Gamma(X \times Y) = \Gamma(X) \otimes_{\mathbb{K}} \Gamma(Y)$*

5. *$X \times Y$ con le proiezioni canoniche è un prodotto di X, Y nella categoria delle varietà algebriche affini.*

La varietà algebrica affine $X \times Y$ è il ***prodotto*** *delle due varietà X e Y. Talvolta indicheremo questo prodotto con $X \times_{\mathbb{K}} Y$.*

Dimostrazione.

1. Dette $\pi_1 : \mathbb{A}^{n+m} \to \mathbb{A}^n$, $\pi_2 : \mathbb{A}^{n+m} \to \mathbb{A}^m$ le proiezioni canoniche, si ha

$$\begin{aligned} P \in X \times Y &\Leftrightarrow \pi_1(P) \in X,\ \pi_2(P) \in Y \\ &\Leftrightarrow f(\pi_1(P)) = 0,\ g(\pi_2(P)) = 0 \quad \forall f \in \mathscr{I}(X), g \in \mathscr{I}(Y) \\ &\Leftrightarrow f'(P) = 0,\ g'(P) = 0 \quad \forall f' \in \mathscr{I}(X)^e, g' \in \mathscr{I}(Y)^e \\ &\Leftrightarrow P \in V(\mathscr{I}(X)^e + \mathscr{I}(Y)^e). \end{aligned}$$

2. Proviamo che $X \times Y$ è irriducibile. Siano $Z_1, Z_2 \subseteq X \times Y$ due chiusi tali che $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$. Per ogni $x \in X$ abbiamo che $\{P\} \times Y \subseteq X \times Y = Z_1 \cup Z_2$. Dato che $\{x\} \times Y \simeq Y$ tramite π_2, allora $\{x\} \times Y$ è irriducibile, quindi $\{x\} \times Y$ è contenuto in Z_1 o in Z_2 per ogni $x \in X$. Poniamo

$$X_i = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq Z_i\} \quad (i = 1, 2).$$

Per quanto provato finora abbiamo $X = X_1 \cup X_2$. Adesso, per ogni $y \in Y$, poniamo

$$X_{i,y} = \{x \in X : (x, y) \in Z_i\}. \quad (i = 1, 2).$$

L'insieme $X_{i,y}$ è chiuso in X in quanto $X_{i,y} \simeq X_{i,y} \times \{y\} = (X \times \{y\}) \cap Z_i$ tramite π_1, inoltre per definizione si ha $X_i = \bigcap_{y \in Y} X_{i,y}$, pertanto anche X_i è chiuso. Essendo X irriducibile abbiamo $X = X_i$, cioè $X \times Y = Z_i$ per qualche $i \in \{1, 2\}$.

3. Dal punto 1 abbiamo

$$X \times Y = V(\mathscr{I}(X)^e + \mathscr{I}(Y)^e).$$

Adesso, essendo gli ideali $\mathscr{I}(X)$, $\mathscr{I}(Y)$ primi, le $\mathbb{K}$-algebre $\mathbb{K}[\underline{x}]/\mathscr{I}(X)$, $\mathbb{K}[\underline{y}]/\mathscr{I}(Y)$ sono domini. Dato che il prodotto tensoriale di $\mathbb{K}$-algebre finitamente generate che sono domini è ancora un dominio (Proposizione 4.2.11), e dato che, dalla Proposizione 4.2.14, abbiamo

$$\frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\mathscr{I}(X)} \otimes_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[\underline{y}]}{\mathscr{I}(Y)} \simeq \frac{\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]}{\mathscr{I}(X)^e + \mathscr{I}(Y)^e}$$

ne segue che l'ideale $\mathscr{I}(X)^e + \mathscr{I}(Y)^e$ è primo. Pertanto

$$\mathscr{I}(X \times Y) = \mathscr{I}\big(V(\mathscr{I}(X)^e + \mathscr{I}(Y)^e)\big) = \mathscr{I}(X)^e + \mathscr{I}(Y)^e.$$

4. Segue dal punto 3 e dalla Proposizione 4.2.14:

$$\Gamma(X \times Y) = \frac{\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]}{\mathscr{I}(X)^e + \mathscr{I}(Y)^e} \simeq \frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\mathscr{I}(X)} \otimes_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[\underline{y}]}{\mathscr{I}(Y)} \simeq \Gamma(X) \otimes_{\mathbb{K}} \Gamma(Y).$$

5. Segue dal punto 4, dal fatto che Γ è un funtore controvariante tra la categoria **VARAFF** e la categoria **KALG** (Osservazione 4.1.10), e dal fatto che il prodotto tensoriale di $\mathbb{K}$-algebre è un coprodotto nella categoria **KALG** (Proposizione 4.2.4). □

4.4 Prodotto di varietà proiettive

Vogliamo adesso definire un prodotto tra varietà proiettive. Mentre nel caso affine abbiamo che insiemisticamente $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$, nel caso proiettivo $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \neq \mathbb{P}^{n+m}$. Pertanto dobbiamo procedere in modo diverso.

Proposizione-Definizione 4.4.1. *Definiamo l'**immersione di Segre** come la mappa*

$$\phi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$$
$$\phi\big((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : \ldots : y_m)\big) = (x_0y_0 : x_0y_1 : \ldots : x_iy_j : \ldots : x_ny_m).$$

Indichiamo con z_{ij}, dove $i \in \{0, \ldots, n\}$, $j \in \{0, \ldots, m\}$, le coordinate di $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$, in modo tale che se $(P, Q) = \big((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : \ldots : y_m)\big) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, la coordinata z_{ij} di $\phi(P, Q)$ sia x_iy_j. Proviamo che

1. *ϕ è ben definita.*

2. *ϕ è iniettiva.*

3. *$\phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = V\big(z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} : i, k \in \{0, \ldots, n\}, j, l \in \{0, \ldots, m\}\big)$.*

Dimostrazione.

1. Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ abbiamo
$$\phi\big((\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n), (\mu y_0 : \ldots : \mu y_m)\big) = (\lambda\mu x_0y_0 : \ldots : \lambda\mu x_iy_j : \ldots : \lambda\mu x_ny_m) =$$
$$= (x_0y_0 : \ldots : x_iy_j : \ldots : x_ny_m) = \phi\big((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : \ldots : y_m)\big).$$

2. Supponiamo che
$$\phi\big((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : \ldots : y_m)\big) = \phi\big((s_0 : \ldots : s_n), (t_0 : \ldots : t_m)\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_0y_0 : \ldots : x_iy_j : \ldots : x_ny_m) = (s_0t_0 : \ldots : s_it_j : \ldots : s_nt_m).$$
Quindi abbiamo che $x_iy_j = \lambda s_it_j$ per ogni i, j. Adesso esiste un indice i tale che $x_i \neq 0$, da cui $y_j = (\lambda \frac{s_j}{x_i})t_j$ per ogni j. Quindi $(y_0, \ldots, y_m) = (t_0, \ldots, t_m)$. In modo analogo $(x_0, \ldots, x_n) = (s_0, \ldots, s_n)$.

3. Chiaramente $\phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subseteq V(z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj})$. Viceversa sia $(\ldots : q_{ij} : \ldots) \in V(z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj})$. A meno di fattori proporzionali e riordinamento degli indici, possiamo supporre che $q_{00} = 1$, quindi per ogni i, j abbiamo $q_{ij} = q_{i0}q_{0j}$. Pertanto
$$(\ldots : q_{ij} : \ldots) = \phi\big((1, q_{10}, \ldots, q_{n0}), (1, q_{01}, \ldots, q_{0m})\big) \in \phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m). \qquad \square$$

Definizione 4.4.2. Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m]$ si dice **biomogeneo** di bigrado (d_1, d_2) se ogni monomio di f ha grado d_1 nelle variabili x_i, e grado d_2 nelle variabili y_j.

Osservazione 4.4.3. Chiaramente ogni polinomio biomogeneo di bigrado (d_1, d_2) è omogeneo di grado $d = d_1 + d_2$. Se $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m]$ è biomogeneo di bigrado (d_1, d_2), allora
$$f(\lambda \underline{x}, \mu \underline{y}) = \lambda^{d_1}\mu^{d_2} f(\underline{x}, \underline{y}).$$
Pertanto è possibile definire il luogo dei punti di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ che si annullano su f che indichiamo con $V(f)$. Se $g \in \mathbb{K}[z_{ij}]$ è un polinomio omogeneo di grado d, sostituendo $z_{ij} = x_iy_j$ definiamo $f(x_i, y_j) = g(x_iy_j)$. Il polinomio f è biomogeneo nelle x_i e y_j di bigrado (d, d), inoltre si ha che
$$\phi(V(f)) = \phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cap V(g).$$

Su $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ consideriamo la topologia in modo tale che ϕ sia un omeomorfismo. Cioè la topologia indotta dall'immersione di Segre.

Lemma 4.4.4. *Se f è un polinomio biomogeneo di bigrado (d_1, d_2), allora $V(f)$ è chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, supponiamo che $d_1 > d_2$. Sia

$$X = V\left(\underline{y}^{\underline{\alpha}} f : \underline{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_m), \sum_i \alpha_i = d_1 - d_2\right) = \bigcap_{\sum_i \alpha_i = d_1 - d_2} V(\underline{y}^{\underline{\alpha}} f).$$

I polinomi del tipo $\underline{y}^{\underline{\alpha}} f$ sono biomogenei di bigrado (d_1, d_1). Pertanto tramite l'immersione di Segre a $\underline{y}^{\underline{\alpha}} f$ corrisponde un polinomio omogeneo $g_{\underline{\alpha}}(z_{ij})$ tale che $g_{\underline{\alpha}}(x_i y_j) = \underline{y}^{\underline{\alpha}} f$, quindi

$$\phi\Big(V(\underline{y}^{\underline{\alpha}} f)\Big) = \phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cap V(g).$$

Quest'ultimo è chiuso in $\phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$, quindi $V(\underline{y}^{\underline{\alpha}} f)$ è chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Dunque abbiamo che anche X è chiuso. Inoltre chiaramente $V(f) \subseteq X$, proviamo l'inclusione inversa. Sia $(P, Q) = \big((x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_m)\big) \in X$, allora in particolare abbiamo $y_j^{d_1 - d_2} f(P, Q) = 0$ per ogni $j \in \{0, \dots, m\}$. Adesso dato che $Q \in \mathbb{P}^m$, esiste j tale che $y_j \neq 0$, quindi da $y_j^{d_1 - d_2} f(P, Q) = 0$ segue $f(P, Q) = 0$, quindi $(P, Q) \in V(f)$. Pertanto $V(f) = X$ è chiuso. □

Proposizione 4.4.5. *I sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sono tutti e soli gli insiemi della forma $V(f_1, \dots, f_r)$ con $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$ polinomi biomogenei.*

Dimostrazione. Dato che $V(f_1, \dots, f_r) = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_r)$, dal lemma precedente $V(f_1, \dots, f_r)$ è chiuso. Viceversa, sia $W \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ chiuso. Allora esistono $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{K}[z_{ij}]$ tali che

$$\phi(W) = \phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cap V(g_1, \dots, g_r).$$

Da cui ponendo $f_t(\underline{x}, \underline{y}) = g_t(x_i y_j)$ per ogni $t \in \{1, \dots, r\}$, abbiamo che i polinomi f_t sono biomogenei e $\phi(V(f_t)) = \phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cap V(g_t)$, da cui

$$\phi(W) = \bigcap_{i=1}^{r} \Big(\phi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cap V(g_i)\Big) = \bigcap_{i=1}^{r} \phi(V(f_i)) = \phi\big(V(f_1, \dots, f_r)\big),$$

da cui $W = V(f_1, \dots, f_r)$. □

Adesso, se $X = V(f_1, \dots, f_t) \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y = V(g_1, \dots, g_s) \subseteq \mathbb{P}^m$ sono due varietà algebriche proiettive, considerando i polinomi f_i omogenei nelle x_i di grado d_i, come polinomi biomogenei di $\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$ di bigrado $(d_i, 0)$, e in modo analogo i polinomi g_i come polinomi biomogenei di bigrado $(0, e_i)$, allora risulta

$$X \times Y = (X \times \mathbb{P}^m) \cap (\mathbb{P}^n \times Y) = V(f_1, \dots, f_t) \cap V(g_1, \dots, g_s) = V(f_1, \dots, f_t, g_1, \dots, g_s).$$

Pertanto il prodotto $X \times Y$ è chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. In modo analogo al caso affine si dimostra che $X \times Y$ è anche irriducibile, quindi $X \times Y$ è una varietà algebrica proiettiva di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Definizione 4.4.6. Siano $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ due varietà algebriche proiettive. Definiamo il **prodotto** $X \times_{\mathbb{K}} Y$ delle varietà X, Y come l'insieme $X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ rispetto alla topologia indotta dall'immersione di Segre.

Osserviamo che se $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ sono varietà algebriche quasi proiettive, allora gli insiemi $X_1 = \overline{X} \setminus X$, $Y_1 = \overline{Y} \setminus Y$ sono chiusi rispettivamente in $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. Quindi i prodotti $X_1 \times \overline{Y}$, $\overline{X} \times Y_1$ sono chiusi in $\overline{X} \times \overline{Y}$, pertanto scrivendo

$$X \times Y = (X \times \overline{Y}) \cap (\overline{X} \times Y) = \Big((\overline{X} \times \overline{Y}) \setminus (X_1 \times \overline{Y})\Big) \cap \Big((\overline{X} \times \overline{Y}) \setminus (\overline{X} \times Y_1)\Big) = \\ = \overline{X} \times \overline{Y} \setminus \Big((X_1 \times \overline{Y}) \cup (\overline{X} \times Y_1)\Big)$$

abbiamo che $X \times Y$ è aperto in $\overline{X} \times \overline{Y}$, cioè è una varietà algebrica quasi proiettiva. Questo fatto ci permette di definire il prodotto di varietà algebriche quasi proiettive.

Definizione 4.4.7. Siano $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ due varietà algebriche quasi proiettive, definiamo il **prodotto** delle varietà X,Y come l'insieme $X \times_{\mathbb{K}} Y = X \times Y$ con la topologia indotta da $\overline{X} \times_{\mathbb{K}} \overline{Y}$.

Vogliamo adesso provare che il prodotto appena definito è un prodotto nella categoria delle varietà algebriche quasi proiettive.

Lemma 4.4.8. *Sia Z una varietà algebrica quasi proiettiva e $f : Z \to \mathbb{P}^n$, $g : Z \to \mathbb{P}^m$ due morfismi. Esiste un unico morfismo $h : Z \to \mathbb{P}^n \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^m$ tale che $f = p_1 \circ h$, $g = p_2 \circ h$, dove p_1,p_2 sono le due proiezioni canoniche.*

Dimostrazione. Poniamo $\mathbb{A}^n_i = \mathbb{P}^n \setminus V(x_i)$, $\mathbb{A}^m_j = \mathbb{P}^m \setminus V(y_j)$. Si ha $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n \mathbb{A}^n_i$, $\mathbb{P}^m = \bigcup_{i=0}^m \mathbb{A}^m_i$. Chiaramente si ha $\mathbb{P}^n \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^m = \bigcup_{i,j} \mathbb{A}^n_i \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^m_j$. Osserviamo che per ogni $i, j, k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ si ha $\mathbb{A}^k_i \cap \mathbb{A}^k_j = \mathbb{P}^k \setminus V(x_i x_j)$, quindi $\mathbb{A}^k_i \cap \mathbb{A}^k_j$ è una varietà algebrica affine. Adesso, poniamo $U_{ij} = f^{-1}(\mathbb{A}^n_i) \cap g^{-1}(\mathbb{A}^m_j) \subseteq Z$, U_{ij} è aperto non vuoto dato che ogni morfismo è una funzione continua. Per ogni $P \in Z$ si ha $f(P) \in \mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n \mathbb{A}^n_i$, quindi esiste $\bar{i}$ tale che $f(P) \in \mathbb{A}^n_{\bar{i}}$; analogamente esiste $\bar{j}$ tale che $g(P) \in \mathbb{A}^m_{\bar{j}}$, quindi $P \in U_{\bar{i}\bar{j}}$. Da ciò deduciamo che $Z = \bigcup_{i,j} U_{ij}$. Definiamo adesso $f_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{A}^n_i$ come $f_{ij} = f_{|U_{ij}}$ e analogamente $g_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{A}^m_j$ con $g_{ij} = g_{|U_{ij}}$. Dato che $\mathbb{A}^n_i$, $\mathbb{A}^m_j$ sono varietà affini, per quanto provato nel caso affine, esiste un unico morfismo $h_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{A}^n_i \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^m_j$ tale che $f_{ij} = p_1 \circ h_{ij}$, $g_{ij} = p_2 \circ h_{ij}$. Adesso definiamo $h : Z \to \mathbb{P}^n \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^m$ come $h(P) = h_{ij}(P)$ se $P \in U_{ij} \subseteq Z$. Mostriamo che h è ben definita, ovver che $h_{ij} = h_{pq}$ in $U_{ij} \cap U_{pq}$ per ogni i, j, p, q. Posto $V = (\mathbb{A}^n_i \cap \mathbb{A}^n_p) \times_{\mathbb{K}} (\mathbb{A}^m_j \cap \mathbb{A}^m_q)$, osserviamo che $h_{ij}(U_{ij} \cap U_{pq}), h_{pq}(U_{ij} \cap U_{pq}) \subseteq V$. Inoltre in $U_{ij} \cap U_{pq}$ si ha $p_1 \circ h_{ij} = f$ e $p_2 \circ h_{ij} = g$, ma anche $p_1 \circ h_{pq} = f$ e $p_2 \circ h_{pq} = g$; poiché V è un prodotto di varietà algebriche affini, esiste solo un morfismo che soddisfa questa proprietà, e quindi $h_{ij} = h_{pq}$. Pertanto h è ben definita. Poiché la continuità e la definizione di morfismo sono proprietà locali, e poiché abbiamo definito una copertura aperta di Z tale che, localmente, le restrizioni di h sugli insiemi della copertura sono morfismi, allora h è un morfismo. L'unicità di h segue dall'unicita degli h_{ij}. $\square$

Teorema 4.4.9. *Siano X e Y due varietà algebriche quasi proiettive. Il prodotto $X \times_{\mathbb{K}} Y$ insieme con le proiezioni canoniche $p_1 : X \times_{\mathbb{K}} Y \to X$, $p_2 : X \times_{\mathbb{K}} Y \to Y$, è un prodotto nella categoria delle varietà algebriche quasi proiettive.*

Dimostrazione. Proviamo che $X \times_{\mathbb{K}} Y$ ha l'opportuna proprietà universale. Siano Z una varietà quasi proiettiva e $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ due morfismi. Consideriamo le inclusioni $i : X \to \mathbb{P}^n$, $j : Y \to \mathbb{P}^m$, poniamo $\tilde{f} = i \circ f$, $\tilde{g} = j \circ g$. Per il lemma precedente esiste un unico morfismo $\tilde{h} : Z \to \mathbb{P}^n \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^m$ tale che $\tilde{f} = p_1 \circ \tilde{h}$, $\tilde{g} = p_2 \circ \tilde{h}$ (dove p_1 e p_2 sono le proiezioni canoniche estese). Poiché

$$p_1(\tilde{h}(Z)) = \tilde{f}(Z) = (i \circ f)(Z) \subseteq X, \quad p_2(\tilde{h}(Z)) = \tilde{g}(Z) = (j \circ g)(Z) \subseteq Y,$$

ne segue che $\tilde{h}(Z) \subseteq X \times_{\mathbb{K}} Y$, quindi è possibile definire in modo unico un morfismo $h : Z \to X \times_{\mathbb{K}} Y$ tale che $f = p_1 \circ h$, $g = p_2 \circ h$, l'unicità segue dall'unicità di $\tilde{h}$. $\square$

Proposizione 4.4.10. *Sia X una varietà. La diagonale $\Delta_X = \{(P, P) \in X \times_{\mathbb{K}} X; P \in X\}$ è chiusa di $X \times_{\mathbb{K}} X$.*

Dimostrazione. Proviamo prima che $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ è chiuso. Siano $P_1 = (x_0 : \ldots : x_n), P_2 = (y_0 : \ldots : y_n) \in \mathbb{P}^n$. La coppia (P_1, P_2) appartiene a $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ se e solo se $P_1 = P_2$, cioè se e solo se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ y_0 & y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$$

è pari a 1, ovvero se tutti i minori di ordine 2 sono nulli. Pertanto

$$\Delta_{\mathbb{P}^n} = \bigcap_{0 \leq i < j \leq n} V(x_i y_j - x_j y_i)$$

è chiuso. Sia ora $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà quasi proiettiva. Risulta $\Delta_X = \Delta_{\mathbb{P}^n} \cap (X \times_{\mathbb{K}} X)$, quindi Δ_X è chiuso in $X \times_{\mathbb{K}} X$. $\square$

Osserviamo che uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se la diagonale Δ_X è un insieme chiuso nel prodotto $X \times X$. Dato che la topologia di Zariski non ha la proprietà di Hausdorff, la precedente proposizione ci dice che la topologia di $X \times_{\mathbb{K}} X$ è più fine di quella del prodotto della topologia di Zariski.

Lemma 4.4.11. *Siano X e Y due varietà e $f, g : X \to Y$ due morfismi. Se $f = g$ in qualche aperto non vuoto U di X, allora $f = g$ in X.*

Dimostrazione. Per la proprietà universale del prodotto esiste un unico morfismo $h : X \to Y \times_{\mathbb{K}} Y$ tale che $h(x) = (f(x), g(x))$. Per ipotesi $U \subseteq h^{-1}(\Delta_Y)$, ma Δ_Y è chiuso, inoltre U è denso in quanto X è irriducibile, pertanto $X = \overline{U} \subseteq h^{-1}(\Delta_Y)$, cioè $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X$. $\square$

Il precedente lemma è l'analogo del Corollario 3.1.8 per le funzioni regolari.

Definizione 4.4.12. Siano X e Y due varietà e $f : X \to Y$ un morfismo. Consideriamo inoltre il morfismo identità $1_X : X \to X$. Per la proprietà universale del prodotto esiste un unico morfismo $\Gamma_f : X \to X \times_{\mathbb{K}} Y$ tale che $1_X = \pi_1 \circ \Gamma_f$, $f = \pi_2 \circ \Gamma_f$.

$$\begin{tikzcd}
& X \times_{\mathbb{K}} Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X & & Y \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[uu, "\Gamma_f"] &
\end{tikzcd}$$

Il morfismo Γ_f è detto **morfismo grafico**, mentre il **grafico** di f è l'insieme

$$\Gamma_f(X) = \{(x, f(x)) \in X \times_{\mathbb{K}} Y : x \in X\} \subseteq X \times_{\mathbb{K}} Y.$$

Proposizione 4.4.13. *Siano X e Y due varietà e $f : X \to Y$ un morfismo.*

1. *$\Gamma_f(X)$ è chiuso in $X \times_{\mathbb{K}} Y$.*

2. *$\Gamma_f(X)$ è una varietà.*

3. *$\Gamma_f(X) \simeq X$.*

Dimostrazione.

1. Consideriamo i morfismi $f \circ \pi_1 : X \times_{\mathbb{K}} Y \to Y$, $\pi_2 : X \times_{\mathbb{K}} Y \to Y$, per la proprietà universale del prodotto esiste un unico morfismo $\varphi : X \times_{\mathbb{K}} Y \to Y \times_{\mathbb{K}} Y$ tale che $f \circ \pi_1 = p_1 \circ \varphi$, $\pi_2 = p_2 \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} & Y \times_{\mathbb{K}} Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ Y & & Y \\ & X \times_{\mathbb{K}} Y \arrow[ul, "f\circ\pi_1"] \arrow[uu, "\varphi"] \arrow[ur, "\pi_2"'] & \end{tikzcd}$$

   Adesso

$$(x, y) \in \Gamma_f(X) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow f(\pi_1(x, y)) = \pi_2(x, y) \Leftrightarrow \varphi(x, y) \in \Delta_Y.$$

   Da cui abbiamo $\Gamma_f(X) = \varphi^{-1}(\Delta_Y)$, con Δ_Y chiuso e φ continua, ne segue che $\Gamma_f(X)$ è chiuso.

2. $\Gamma_f(X)$ è chiuso ed è anche irriducibile in quanto Γ_f è continua e X è irriducibile.

3. Basta osservare che $\pi_1 \circ \Gamma_f = 1_X$, $\Gamma_f \circ \pi_1 = 1_{\Gamma_f(X)}$. □

4.5 Varietà complete

Vediamo adesso una nozione analoga alla compattezza in topologia seguendo l'idea del teorema di Kuratowski. Osserviamo che ogni varietà è uno spazio topologico compatto, pertanto fissata una varietà X, per ogni varietà Y la proiezione dal prodotto *topologico* di X e Y in Y $\pi : X \times Y \to Y$ è una funzione continua chiusa. La nozione di varietà completa è ottenuta sostituendo il prodotto *topologico* di due varietà con il prodotto *come varietà*.

Definizione 4.5.1. Una varietà X si dice **completa** se per ogni varietà Y la proiezione $q : X \times_{\mathbb{K}} Y \to Y$ è un morfismo chiuso.

Proposizione 4.5.2. *Sia X una varietà completa, Y una varietà e $f : X \to Y$ un morfismo di varietà.*

1. $f(X)$ è chiuso in Y.

2. $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è chiuso.

3. Se f è suriettiva, Y è completa.

Dimostrazione.

1. Abbiamo che $f = q \circ \Gamma_f$, quindi $f(X) = q(\Gamma_f(X))$ chiuso.

2. Basta applicare il punto precedente con l'immersione $i : X \to \mathbb{P}^n$.

3. Sia Z una varietà e consideriamo la funzione $(f, 1_Z) : X \times_{\mathbb{K}} Z \to Y \times_{\mathbb{K}} Z$, essa è suriettiva e continua, inoltre se $q : Y \times_{\mathbb{K}} Z \to Z$ è la proeizione lungo Y, allora $q' = q \circ (f, 1_Z) : X \times_{\mathbb{K}} Z \to Z$ coincide con la proiezione lungo X.

$$\begin{tikzcd} X \times_{\mathbb{K}} Z \arrow[d, "{(f,1_Z)}"'] \arrow[dr, "{q'=q\circ(f,1_Z)}"] & \\ Y \times_{\mathbb{K}} Z \arrow[r, "q"] & Z \end{tikzcd}$$

   Adesso se $T \subseteq Y \times_{\mathbb{K}} Z$ è chiuso, abbiamo che $T' = (f, 1_Z)^{-1}(T)$ è chiuso, quindi $q'(T') = q(T)$ è chiuso. $\square$

Proposizione 4.5.3. *Siano X e Y due varietà.*

1. Se X è completa e $Z \subseteq X$ è una sottovarietà chiusa, allora Z è completa.

2. Se X e Y sono complete, lo è anche $X \times_{\mathbb{K}} Y$.

3. Se X è completa, allora $\Gamma(X) \simeq \mathbb{K}$.

4. Se X è affine, allora X è completa se e solo se X è un punto.

Dimostrazione.

1. Sia Y una varietà. Dato che $Z \times_{\mathbb{K}} Y$ è chiuso in $X \times_{\mathbb{K}} Y$, la restrizione della proiezione $q_{|Z \times_{\mathbb{K}} Y}$ è ancora chiusa.

2. Sia Z una varietà. Per ipotesi le proiezioni

$$p : X \times_{\mathbb{K}} (Y \times_{\mathbb{K}} Z) \to Y \times_{\mathbb{K}} Z, \quad q : Y \times_{\mathbb{K}} Z \to Z$$

   sono chiuse. Pertanto la loro composizione $q \circ p : (X \times_{\mathbb{K}} Y) \times_{\mathbb{K}} Z \to Z$ è chiusa (si noti che il prodotto di varietà è associativo in quanto prodotto categoriale).

3. Una funzione regolare $f \in \Gamma(X)$ è anche un morfismo $f : X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ (Lemma 3.3.8), quindi $f(X) \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ è un insieme chiuso e irriducibile, cioè è un punto oppure è $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$. Considerando l'immersione $f(X) \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, dalla Proposizione 4.5.2 abbiamo che $f(X)$ è chiuso in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Dato che $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ è aperto in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ e quest'ultimo è connesso (in quanto irriducibile), allora $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ non è chiuso, quindi necessariamente $f(X)$ è un punto. Ciò vuol dire che f è costante, pertanto $\Gamma(X) \simeq \mathbb{K}$.

4. Se X è completa, dal punto precedente abbiamo $\dim X = \dim \Gamma(X) = \dim \mathbb{K} = 0$, quindi X è un punto. Viceversa se $X = \{x\}$, allora per ogni varietà Y chiaramente $q : \{x\} \times_{\mathbb{K}} Y \to Y$ è un isomorfismo, in particolare è un morfismo chiuso. $\square$

Corollario 4.5.4. *Ogni morfismo di varietà $f : X \to Y$, con X completa, è chiuso.*

Dimostrazione. Se $Z \subseteq X$ è chiuso e irriducibile, dalla Proposizione 4.5.3 punto 2, Z è completa, quindi considerando la restrizione $f_{|Z} : Z \to Y$, dalla Proposizione 4.5.2 punto 1, $f(Z)$ è chiuso. Adesso, se $Z \subseteq X$ è un chiuso generico, sia $Z = \bigcup_{i=1}^m Z_i$ la decomposizione di Z nelle sue componenti irriducibili, allora $f(Z) = \bigcup_{i=1}^m f(Z_i)$ con $f(Z_i)$ chiusi. $\square$

Teorema 4.5.5 (Teorema fondamentale della teoria dell'eliminazione)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Se X è una varietà algebrica proiettiva allora X è completa.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che per ogni varietà Y, la proiezione $q : X \times_{\mathbb{K}} Y \to Y$ è chiusa. Utilizziamo il metodo della riduzione (Groethendieck).

Riduzione 1 Se la tesi è vera per ogni varietà affine Y, allora è vera per ogni varietà Y. Ogni varietà Y è unione di aperti affini, quindi possiamo supporre che $Y = \bigcup_{i=1}^m Y_i$, con $Y_1, \dots, Y_m$ aperti affini. Ne segue che $X \times_{\mathbb{K}} Y = \bigcup_{i=1}^m X \times_{\mathbb{K}} Y_i$. Sia ora $Z \subseteq X \times_{\mathbb{K}} Y$ chiuso; poniamo $Z_i = Z \cap (X \times_{\mathbb{K}} Y_i)$, Z_i è chiuso in $X \times_{\mathbb{K}} Y_i$, quindi per ipotesi $q(Z_i)$ è chiuso in Y_i in quanto Y_i è affine. D'altra parte $q(Z_i) = q(Z) \cap Y_i$, pertanto, dato che la chiusura è una proprietà locale (Lemma 1.1.6) si ha che $q(Z)$ è chiuso in Y.

Riduzione 2 Se la tesi è vera per $Y = \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$, allora è vera per ogni varietà affine Y. Infatti se $Y \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ è una varietà affine, sia $Z \subseteq X \times_{\mathbb{K}} Y$ un chiuso, Z è chiuso anche in $X \times_K \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$, quindi $q(Z) \subseteq Y$ è chiuso in $\mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$, pertanto è chiuso anche in Y.

Riduzione 3 Se la tesi è vera per $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, allora è vera per ogni varietà proiettiva X. Infatti se $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è una varietà proiettiva, sia $Z \subseteq X \times_{\mathbb{K}} Y$ un chiuso, Z è chiuso anche in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} Y$, quindi $q(Z)$ è chiuso in Y (oppure Proposizione 4.5.3 punto 1).

Ci siamo ricondotti al caso $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, $Y = \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$, ovvero dobbiamo provare che la proiezione $q : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ è chiusa. Sia $Z \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ chiuso, quindi esistono $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ omogenei nelle x_i tali che $Z = V(g_1, \dots, g_s)$. Adesso abbiamo

$$\begin{aligned} P \in q(Z) &\iff \exists Q \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : (Q, P) \in Z \\ &\iff V^{\mathbb{P}}\big(g_1(\underline{x}, P), \dots, g_s(\underline{x}, P)\big) \neq \emptyset \\ &\iff (x_0, \dots, x_n)^r \nsubseteq \big(g_1(\underline{x}, P), \dots, g_s(\underline{x}, P)\big)\ \forall r \geq 0, \end{aligned}$$

dove l'ultima equivalenza segue dalla Proposizione 2.5.15. Per ogni $r \geq 0$ poniamo

$$T_r = \{P \in \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}} : (x_0, \dots, x_n)^r \nsubseteq \big(g_1(\underline{x}, P), \dots, g_s(\underline{x}, P)\big)\}.$$

Dalle precedenti equivalenze $q(Z) = \bigcap_{r \geq 0} T_r$. Pertanto è sufficiente provare che T_r è chiuso per ogni $r \geq 0$. Fissiamo $r \geq 0$ e $P = (\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}) \in \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$, poniamo $d_i = \deg g_i(\underline{x}, P)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} &(x_0, \dots, x_n)^r \subseteq \big(g_1(\underline{x}, P), \dots, g_s(\underline{x}, P)\big) \iff \\ &\qquad \iff \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_r = \mathcal{L}\big(\{g_i(\underline{x}, P)N : N \text{ monomio di grado } r - d_i\}\big), \end{aligned}$$

dove l'ultima è un'uguaglianza tra spazi vettoriali. Una base per $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_r$ è data dall'insieme $\mathcal{M}$ di tutti i monomi di grado r. Scriviamo

$$N \cdot g_i(\underline{x}, P) = \sum_{M \in \mathcal{M}} h_{i,N,M}(P) \cdot M$$

al variare di $i \in \{1, \dots, s\}$ e $N \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ monomio di grado $r - d_i$. Consideriamo la matrice $H = (h_{i,N,M})$, per quanto detto finora abbiamo che $P \in T_r$ se e solo se la matrice H ha rango minore di $\binom{n+r}{r} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_r$, e ciò è espresso da equazioni nelle coordinate di P. Pertanto T_r è chiuso. $\square$

In base al Teorema fondamentale della teoria dell'eliminazione, applicando quanto dimostrato nelle proposizioni 4.5.2 e 4.5.3 e nel Corollario 4.5.4 per le varietà complete alle varietà proiettive otteniamo i seguenti risultati, alcuni dei quali erano stati già provati in precedenza (Teorema 3.4.7, Corollario 3.4.8).

Corollario 4.5.6. *Siano X una varietà proiettiva, Y una varietà.*

1. *Ogni morfismo $f : X \to Y$ è chiuso.*
2. *$\Gamma(X) \simeq \mathbb{K}$.*
3. *X è affine se e solo se è un punto.*

Osservazione 4.5.7. Sia $d > 1$ e consideriamo in $\mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d\big)$ l'insieme

$$R_d = \{[f] \in \mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d\big) : f \text{ è riducibile}\}.$$

Al variare di $d_1, d_2 > 0$ tali che $d_1 + d_2 = d$, consideriamo il morfismo

$$\phi_{d_1,d_2} : \mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_{d_1}\big) \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_{d_2}\big) \to \mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d\big),$$

definito da $\phi_{d_1,d_2}([g_1], [g_2]) = [g_1 \cdot g_2]$. Per il corollario precedente, dal momento che $\mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_{d_1}\big) \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_{d_2}\big)$ è una varietà proiettiva, allora l'immagine $\operatorname{Im} \phi_{d_1,d_2}$ è un chiuso. Pertanto l'insieme

$$R_d = \bigcup_{d_1 + d_2 = d} \operatorname{Im} \phi_{d_1,d_2}$$

è chiuso in $\mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d\big)$.

Osservazione 4.5.8. Consideriamo in $\mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x]\big)$ l'insieme

$$R = \{[f] \in \mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x]\big) : f \text{ ha una radice multipla}\}.$$

Ricordando che il risultante di due polinomi f e g è un polinomio $R(f, g)$ tale che $R(f, g) = 0$ se e solo se f e g hanno un fattore non costante in comune, abbiamo che f ha una radice multipla se e solo se $R(f, f') = 0$ (dove f' è la derivata formale del polinomio f). Pertanto $R = V(R(f, f'))$ è chiuso in $\mathbb{P}\big(\mathbb{K}[x]\big)$.

Capitolo 5

Mappe razionali

5.1 Mappe razionali dominanti

Definizione 5.1.1. Siano X e Y due varietà. Consideriamo le coppie (U, φ_U), dove $U \subseteq X$ è un aperto non vuoto e $\varphi_U : U \to Y$ è un morfismo. Definiamo, sull'insieme di queste coppie, una relazione

$$(U, \varphi_U) \sim (V, \varphi_V) \iff \varphi_U = \varphi_V \text{ in } U \cap V.$$

In base al Lemma 4.4.11, $\sim$ è una relazione di equivalenza. La classe $[(U, \varphi_U)]$ è detta **mappa razionale** da X in Y e la denoteremo con $\varphi_U : X \dashrightarrow Y$.

Definizione 5.1.2. Siano X e Y due varietà e $\varphi_U : X \dashrightarrow Y$ una mappa razionale. Definiamo **dominio** di φ_U l'insieme

$$\operatorname{dom}(\varphi_U) = \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V \quad \text{con} \quad \mathcal{U} = \{V \subseteq X : (V, \varphi_V) \sim (U, \varphi_U)\}.$$

Definizione 5.1.3. Siano X e Y due varietà. Una mappa razionale $\varphi : X \dashrightarrow Y$ è **dominante** se esiste un rappresentante (U, φ_U) di φ tale che φ_U è un morfismo dominante.

Proposizione 5.1.4. *Siano X e Y varietà e $\varphi : X \dashrightarrow Y$ una mappa razionale. Se (U, φ_U) e (V, φ_V) sono due rappresentati di φ, allora $\varphi_U(U)$ è denso in Y se e solo se $\varphi_V(V)$ è denso in Y.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\overline{\varphi_U(U)} = Y$. Osserviamo che $U \cap V$ è denso in U, inoltre, dato che φ_U è continua, abbiamo $\varphi_U(U) = \varphi_U(\overline{U \cap V}) \subseteq \overline{\varphi_U(U \cap V)}$ da cui $\overline{\varphi_U(U)} \subseteq \overline{\varphi_U(U \cap V)}$. Infine chiaramente $U \cap V \subseteq V \Rightarrow \varphi_V(U \cap V) \subseteq \varphi_V(V) \Rightarrow \overline{\varphi_V(U \cap V)} \subseteq \overline{\varphi_V(V)}$, da cui

$$Y = \overline{\varphi_U(U)} \subseteq \overline{\varphi_U(U \cap V)} = \overline{\varphi_V(U \cap V)} \subseteq \overline{\varphi_V(V)}.$$

Per il viceversa basta scambiare i ruoli di U e V. $\square$

Siano X, Y e Z varietà e $\varphi : X \dashrightarrow Y$ e $\psi : Y \dashrightarrow Z$ due mappe razionali. Se (U, φ_U) e (V, ψ_V) sono dei rappresentanti rispettivamente di φ e ψ tali che $\varphi(U) \cap V \neq \emptyset$, la composizione $\psi \circ \varphi$ è la mappa razionale $[(U \cap \varphi^{-1}(V), \psi_V \circ \varphi_U)]$. Pertanto, è sempre possibile considerare la composizione di mappe razionali dominanti. Pertanto possiamo considerare la categoria delle varietà e mappe razionali dominanti. Gli isomorfismi di questa categoria sono le mappe birazionali:

Definizione 5.1.5. Siano X e Y varietà. Un mappa razionale dominante $\varphi : X \dashrightarrow Y$ è **birazionale** se esiste una mappa razionale dominante $\psi : Y \dashrightarrow X$ tale che $\varphi \circ \psi = 1_Y$, $\psi \circ \varphi = 1_X$ come mappe razionali. In questo caso diremo che X è **birazionale** a Y.

Definizione 5.1.6. Sia X una varietà di dimensione n.
Diremo che X è **razionale** se esiste una mappa birazionale $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$.
Diremo che X è **unirazionale** se esiste una mappa razionale dominante $\varphi : \mathbb{P}^m \dashrightarrow X$ (a posteriori dev'essere $m \geq n$).

Osservazione 5.1.7. Per definizione una varietà razionale è unirazionale. Il problema di Lüroth chiede sotto quali condizioni valga il viceversa. Lüroth provò nel 1876 che ogni varietà unirazionale di dimensione 1 è razionale. Agli inizi del Novecento Castelnuovo ed Enriques provarono che questa proprietà era vera anche in dimensione 2, cioè per le superfici. Tuttavia nella seconda metà del XX secolo sono stati prodotti controesempi di varietà unirazioanli di dimensione 3 che non sono razionali.

Definizione 5.1.8. Una mappa birazionale del tipo $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ si dice **trasformazione di Cremona.**

Siano X e Y varietà. Se $f : X \to Y$ è un isomorfismo, allora f è anche una mappa birazionale. Infatti esiste un morfismo inverso $f^{-1} : Y \to X$ tale che $f \circ f^{-1} = 1_Y$, $f^{-1} \circ f = 1_X$. Il seguente esempio mostra che non vale il viceversa, cioè esistono mappe birazionali che non provengono da isomorfismi.

Esempio 5.1.9 (di trasformazione di Cremona)**.** *Sia $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ la mappa razionale definita da $\varphi(x_0, x_1, x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$, quindi*

$$\mathrm{dom}(\varphi) = \mathbb{P}^2 \setminus V(x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1) = \mathbb{P}^2 \setminus \{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)\}.$$

Osserviamo che se $x_0, x_1, x_2 \neq 0$, allora

$$\varphi^2(x_0, x_1, x_2) = (x_0^2x_1x_2 : x_0x_1^2x_2 : x_0x_1x_2^2) = (x_0, x_1, x_2).$$

*Dunque in $U = \mathbb{P}^2 \setminus V(x_0x_1x_2)$ la funzione φ è un'**involuzione**, cioè $\varphi = \varphi^{-1}$. In altri termini in U risulta $\varphi \circ \varphi = 1_U$, quindi φ è birazionale. Tuttavia $\varphi : \mathrm{dom}\,\varphi \to \mathbb{P}^2$ non è un isomorfismo, in quanto ad esempio per ogni $x_0, x_1 \neq 0$ si ha $\varphi(x_0 : x_1 : 0) = (1 : 0 : 0)$, in particolare φ non è iniettiva.*

L'involuzione di Cremona può essere generalizzata a $\mathbb{P}^n$ ottenendo una mappa birazionale $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ definita da

$$\varphi(x_0 : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0x_1\ldots x_n}{x_0} : \ldots : \frac{x_0x_1\ldots x_n}{x_n}\right).$$

Esempio 5.1.10. *Consideriamo $\mathbb{P}^{n^2-1}$ dove interpretiamo le coordinate come coefficienti di matrici $n \times n$. La precedente funzione può essere vista come*

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1\ldots x_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_0x_2\ldots x_n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_0\ldots x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

In questo modo, possiamo ulteriormente generalizzare considerando la mappa che associa ad una matrice A la matrice dei cofattori $A^{\#}$. Questa applicazione è una mappa razionale, in quanto, dal momento che $(A^{\#})^{\#} = \det(A)^{n-2}A$, la restrizione alle matrici invertibili è un'involuzione; ma non è associata a un isomorfismo, infatti, in modo analogo a prima si verifica che non è iniettiva.

Siano X e Y due varietà e sia $\varphi : X \dashrightarrow Y$ una mappa razionale dominante. Sia (U, φ_U) un rappresentante di φ, poniamo $\varphi^* : K(Y) \to K(X)$ definita da $\varphi^*(f) = [(\varphi_U^{-1}(V), f \circ \varphi_U)]$ (dove con abuso di notazione $f = [(V, f)]$). Proviamo che φ^* è ben definita. Siano (U, φ_U) e $(U', \varphi_{U'})$ due rappresentanti di φ e sia $[(V, f)] \in K(Y)$. Poiché $\varphi_U^{-1}(V) \subseteq U$, $\varphi_{U'}^{-1}(V) \subseteq U'$ si ha $\varphi_U^{-1}(V) \cap \varphi_{U'}^{-1}(V) \subseteq U \cap U'$, dato che $\varphi_U = \varphi_{U'}$ in $U \cap U'$, allora $\varphi_U = \varphi_{U'}$ in $\varphi_U^{-1}(V) \cap \varphi_{U'}^{-1}(V)$, quindi componendo $f \circ \varphi_U = f \circ \varphi_{U'}$ in $\varphi_U^{-1}(V) \cap \varphi_{U'}^{-1}(V)$, quindi $\varphi^*(f)$ non dipende dalla scelta del rappresentante di φ. In modo analogo, si prova che $\varphi^*(f)$ non dipende dal rappresentate della classe $[(V, f)]$.

Definizione 5.1.11. Siano X e Y due varietà e sia $\varphi : X \dashrightarrow Y$ una mappa razionale dominante. La mappa $\varphi^* : K(Y) \to K(X)$ definita da $\varphi(f) = [(\varphi_U^{-1}(V), f \circ \varphi_U)]$ è il **pullback** della mappa razionale φ.

Se $f \in K(Y)$ è costante, allora anche $\phi^*(f) = f \circ \varphi$ è costante, quindi φ^* è un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre. Essendo in particolare un omomorfismo di campi, φ^* è iniettivo.

Teorema 5.1.12. *Siano X e Y due varietà. L'applicazione α che alla mappa razionale dominante $\varphi : X \dashrightarrow Y$ associa l'omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre $\alpha(\varphi) = \varphi^* : K(Y) \to K(X)$ è biiettiva.*

Dimostrazione. Proviamo che α è iniettiva. Se $\varphi, \psi : X \dashrightarrow Y$ dominanti sono tali che $\alpha(\varphi) = \alpha(\psi) \Rightarrow \varphi^* = \psi^*$, allora per ogni $f \in K(Y)$ si ha $\varphi^*(f) = \psi^*(f) \Rightarrow f(\varphi(P)) = f(\psi(P))$ per ogni P in un opportuno aperto U di X. Scegliendo f uguale alle proiezioni abbiamo che le coordinate di $\varphi(P)$ e $\psi(P)$ sono uguali, cioè $\varphi(P) = \psi(P)$ per ogni $P \in U$, cioè $\varphi = \psi$. Proviamo che α è suriettiva. Sia $f : K(Y) \to K(X)$ un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre, proviamo che esiste $\varphi : X \dashrightarrow Y$ tale che $\alpha(\varphi) = f$.

Riduzione Se la tesi è vera per Y affine, allora è vera per qualsiasi varietà Y.

Dato che Y ha una base di aperti affini (Corollario 3.4.4), allora esiste $V \subseteq Y$ aperto affine non vuoto. Poiché V è aperto, $K(V) = K(Y)$. Quindi $f : K(V) \to K(X)$. Per ipotesi esiste $\varphi : X \dashrightarrow V$ dominante tale che $\alpha(\varphi) = f$. Adesso sia (U, φ_U) un rappresentante di φ, dato che $\varphi_U(U)$ è denso in V, e a sua volta V è denso in Y, abbiamo che $\varphi_U(U)$ è denso in Y. Pertanto possiamo vedere (U, φ_U) come mappa razionale dominante da X a Y, inoltre come prima $\alpha(\varphi_U) = f$.

Supponiamo $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ affine (a questo punto la dimostrazione è simile a quella del Teorema 3.3.9, mutatis mutandis). Risulta

$$\Gamma(Y) \simeq A(Y) = \frac{\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]}{\mathscr{I}(Y)} = \mathbb{K}[\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}].$$

Abbiamo $\overline{y_i} \in \Gamma(Y) \subseteq K(Y)$. Poniamo $\varphi_i = f(\overline{y_i}) \in K(X)$, $U_i = \operatorname{dom} \varphi_i$ e infine $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Sia

$$\varphi : U \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \quad \text{definito da} \quad \varphi(P) = (\varphi_1(P), \ldots, \varphi_n(P)) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}.$$

- $\varphi(U) \subseteq Y$. Sia $g \in \mathscr{I}(Y)$, per ogni $P \in U$ si ha

$$g(\varphi(P)) = g(\varphi_1(P), \dots, \varphi_n(P)) = g(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(P) = g(f(\overline{y_1}), \dots, f(\overline{y_n}))(P) = \\ = f(g(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}))(P) = f(0_{\Gamma(Y)})(P) = 0_{\Gamma(X)}(P) = 0.$$

  Pertanto $\varphi(P) \in V(\mathscr{I}(Y)) = Y$ per ogni $P \in U$.

- Dal Lemma 3.3.8, $\varphi : U \to Y$ è un morfismo.

- Il pullback φ^* (come morfismo) è uguale a f (in $\Gamma(Y)$). Infatti sia $g \in \Gamma(Y)$, vediamo g come polinomio in $A(Y)$, risulta

$$\varphi^*(g) = (g \circ \varphi) = g(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = g(f(\overline{y_1}), \dots, f(\overline{y_n})) = f(g(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n})) = f(g).$$

- φ è dominante. Infatti, f è iniettiva in quanto omomorfismo di campi, quindi la restrizione di f a $\Gamma(Y)$ è ancora iniettiva, ma dato che $\varphi^* = f$ in $\Gamma(Y)$, anche φ^* è iniettiva (in $\Gamma(Y)$) pertanto dal Lemma 3.5.2 segue che φ è dominante.

- $\alpha(\varphi) = \varphi^* = f$ (vedendo $\varphi : X \dashrightarrow Y$ come funzione razionale dominante). Sappiamo che $\varphi^* = f$ in $\Gamma(Y)$. Ma $K(Y) = K(\Gamma(Y))$, e poichè per la proprietà universale degli anelli di frazioni un omomorfismo su un dominio si estende in modo unico al campo dei quozienti, abbiamo che $\varphi^* = f$ in $K(Y)$. □

Osservazione 5.1.13. Tramite la precedente corrispondenza, possiamo definire un isomorfismo tra la categoria delle varietà con le funzioni razionali dominanti e la categoria opposta delle estensioni di $\mathbb{K}$ algebre finitamente generate. A ogni varietà X associamo la $\mathbb{K}$-algebra $K(X)$, e a ogni funzione razionale dominante $\varphi : X \dashrightarrow Y$ associamo l'omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre $K(\varphi) = \varphi^* : K(Y) \to K(X)$. In base al teorema precedente, per vedere che K è un isomorfismo di categorie, ci basta provare che K è un funtore controvariante. Infatti si verifica facilmente che

$$K(f \circ g) = (f \circ g)^* = g^* \circ f^* = K(g) \circ K(f), \quad K(1_X) = 1_{K(X)}.$$

Abbiamo visto che non tutte le mappe birazionali provengono da isomorfismi di varietà (trasformazioni di Cremona). Però abbiamo che ogni mappa birazionale proviene da un isomorfismo di aperti.

Corollario 5.1.14. *Siano X e Y due varietà. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. *X è birazionale a Y.*
2. *$K(X)$ è isomorfa a $K(Y)$ come $\mathbb{K}$-algebra.*
3. *Esistono due aperti $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ non vuoti tali che $U \simeq V$ come varietà.*

Dimostrazione.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Chiaro dall'Osservazione 5.1.13.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Se $\varphi : U \to V$ è un isomorfismo, allora chiaramente $[(U, \varphi)]$ e $[(V, \varphi^{-1})]$ sono birazionali, quindi X è birazionale a Y. Viceversa, supponiamo che X sia birazionale a Y, quindi esistono $\varphi : X \dashrightarrow Y$, $\psi : Y \dashrightarrow X$ due mappe razionali tali che $\varphi \circ \psi \sim 1_Y$ e $\psi \circ \varphi \sim 1_X$. Pertanto esistono due aperti $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ tali che $\varphi \circ \psi = 1_Y$ in V e $\psi \circ \varphi = 1_X$ in U, cioè φ e ψ sono isomorfismi tra U e V. $\square$

Pertanto ogni varietà X è birazionale a ogni suo sottoinsieme aperto. In particolare, ogni varietà è birazionale alla propria chiusura proiettiva.

5.2 Elementi di teoria dei campi

Definizione 5.2.1. Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione di campi. Un elemento $\alpha \in \mathbb{E}$ si dice **algebrico** su $\mathbb{K}$ se esiste $p(t) \in \mathbb{K}[t] \setminus \{\underline{0}\}$ tale che $p(\alpha) = 0$. Se α non è algebrico su $\mathbb{K}$, si dice **trascendente** su $\mathbb{K}$. L'estensione $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ si dice **algebrica** se ogni $\alpha \in \mathbb{E}$ è algebrico su $\mathbb{K}$, **trascendente** se non è algebrica.

Definizione 5.2.2. Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica p. La funzione

$$F : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad \text{definita da} \quad F(\alpha) = \alpha^p$$

è un endomorfismo di campi, infatti

- $F(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^p = \alpha^p + \beta^p = F(\alpha) + F(\beta)$.
- $F(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^p = \alpha^p\beta^p = F(\alpha)F(\beta)$.

F è detto **endomorfismo di Frobenius**.

Proposizione-Definizione 5.2.3. *Un campo $\mathbb{K}$ è **perfetto** se soddisfa una delle seguente condizioni equivalenti.*

1. *Ogni estensione algebrica $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ è separabile.*
2. *$\mathbb{K}$ ha carattestica zero, oppure ha caratteristica p e l'endomorfismo di Frobenius è suriettivo.*

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (2) Dobbiamo provare che se $\mathbb{K}$ ha caratteristica p, allora l'endomorfismo di Frobenius è suriettivo. Sia $\alpha \in \mathbb{K}$, e sia β una radice del polinomio $x^p - \alpha$ nel suo campo di spezzamento. L'estensione $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(\beta)$ è algebrica, quindi per ipotesi è separabile. Dato che $x^p - \alpha = x^p - \beta^p = (x - \beta)^p$ e β è separabile su $\mathbb{K}$, ne segue che il polinomio minimo di β è $x - \beta$, cioè $\beta \in \mathbb{K}$. Quindi $\alpha = F(\beta)$, cioè F è suriettivo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se $\mathbb{K}$ ha caratteristica zero, ogni estensione algebrica è separabile. Se $\mathbb{K}$ ha caratteristica p, sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione algebrica. Se per assurdo esiste $\alpha \in \mathbb{E}$ non separabile su $\mathbb{K}$, ciò vuol dire che il suo polinomio minimo f ha un fattore non costante in comune con f'. Ma dato che f è irriducibile ciò può accadere solo se $f' = \underline{0}$, cioè, dato che $\mathbb{K}$ ha caratteristica p, solo se $f(x) = g(x^p)$. Scriviamo

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{pi}$, per ipotesi l'endomorfismo di Frobenius è suriettivo, quindi per ogni i esiste $b_i \in \mathbb{K}$ tale che $a_i = b_i^p$, da cui

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{pi} = \sum_{i=1}^{n} b_i^p (x^i)^p = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right)^p ,$$

contro l'irriducibilità di f, assurdo. □

Chiaramente ogni campo algebricamente chiuso è perfetto.

Esempio 5.2.4. *Un'esempio di estensione non separabile è dato da*

$$\mathbb{Z}_p(x) \subseteq \frac{\mathbb{Z}_p(x)[t]}{(t^p - x)} = \mathbb{E},$$

infatti il polinomio minimo di $\bar{t}$ su $\mathbb{Z}_p(x)$ è $t^p - x \in \mathbb{Z}_p(x)[t]$. Dato che in $\mathbb{E}$ abbiamo $t^p - x = t^p - \bar{t}^p = (t - \bar{t})^p$, ne segue che il polinomio $t^p - x$ ha $\bar{t}$ come unica radice di molteplicità p.

Definizione 5.2.5. Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione di campi. Gli elementi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{E}$ si dicono **algebricamente indipendenti** su $\mathbb{K}$ se l'omomorfismo $\varphi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}$ definito da $\varphi(f) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è iniettivo, altrimenti si dicono **algebricamente dipendenti**. Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{E}$ è **algebricamente indipendente** (o **trascendente**) su $\mathbb{K}$ se ogni suo sottoinsieme finito è costituito da elementi algebricamente indipendenti su $\mathbb{K}$, altrimenti S è detto **algebricamente dipendente**.

Osserviamo che un elemento $\alpha \in E$ è algebricamente indipendente su $\mathbb{K}$ se e solo se è trascendente su $\mathbb{K}$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{E}$ sono algebricamente indipendenti, allora in particolare non annullano nessun polinomio lineare $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, quindi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono anche linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$ (vedendo $\mathbb{E}$ come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale).

Definizione 5.2.6. Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione di campi. Un sottoinsieme di $\mathbb{E}$ trascendente su $\mathbb{K}$ massimale si dice **base di trascendenza** di $\mathbb{E}$ su $\mathbb{K}$. Se $S \subseteq \mathbb{E}$ è trascendente su $\mathbb{K}$, allora l'estensione $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(S)$ si dice estensione **trascendente pura** di $\mathbb{K}$ su S.

Lemma 5.2.7. *Siano $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione di campi, $S \subseteq \mathbb{E}$ un sottoinsieme trascendente su $\mathbb{K}$ e $x \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{K}(S)$. Allora*

$$S \cup \{x\} \text{ è trascendente su } \mathbb{K} \iff x \text{ è trascendente su } \mathbb{K}(S).$$

Dimostrazione. $S \cup \{x\}$ è trascendente su $\mathbb{K}$ se e solo se ogni suo sottoinsieme finito è trascendente su $\mathbb{K}$, equivalentemente se non esiste nessun polinomio $h \in \mathbb{K}(S)[t]$ non nullo tale che $h(x) = 0$, cioè se x è trascendente su $\mathbb{K}(S)$. □

Lemma 5.2.8. *Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione di campi. Allora*

1. *Ogni sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{E}$ trascendente su $\mathbb{K}$ può essere esteso ad una base di trascendenza di $\mathbb{E}$ su $\mathbb{K}$.*

2. *Se $T \subseteq \mathbb{E}$ è tale che $\mathbb{E} = \mathbb{K}(T)$, allora T contiene una base di trascendenza S di $\mathbb{E}$ su $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Basta applicare il Lemma di Zorn nei due casi agli insiemi non vuoti

1. $\mathcal{B} = \{B \subseteq \mathbb{E} : B \supseteq S, B$ è trascendente su $\mathbb{K}\}$ ($S \in \mathcal{B} \neq \emptyset$).

2. $\mathcal{B} = \{B \subseteq T : B$ è trascendente su $\mathbb{K}\}$ ($\emptyset \in \mathcal{B} \neq \emptyset$). □

Teorema 5.2.9. *Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione di campi. Allora esiste un campo $\mathbb{F}$ tale che $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ e*

- *$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ è un'estensione trascendente pura di $\mathbb{K}$, oppure $\mathbb{K} = \mathbb{F}$;*
- *$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ è un'estensione algebrica.*

Dimostrazione. Se l'estensione $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ è algebrica, basta porre $\mathbb{F} = \mathbb{K}$. Se $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ è trascendente, sia $\alpha \in \mathbb{E}$ trascendente su $\mathbb{K}$. Dal lemma precedente $\{\alpha\}$ si estende a una base di trascendenza S di $\mathbb{E}$ su $\mathbb{K}$. Poniamo $\mathbb{F} = \mathbb{K}(S)$. Se per assurdo esistesse $x \in \mathbb{E}$ trascendente su $\mathbb{F} = \mathbb{K}(S)$, allora $S \cup \{x\}$ sarebbe trascendente su $\mathbb{K}$, contro la massimalità di S. Pertanto l'estensione $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ è algebrica. □

Teorema 5.2.10. *Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione di campi. Se S e T sono due basi di trascendenza di $\mathbb{E}$ su $\mathbb{K}$, allora $|S| = |T|$.*

Dimostrazione. Omessa. □

Definizione 5.2.11. Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione di campi. Definiamo il **grado di trascendenza**, denotato con $\mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(\mathbb{E})$, di $\mathbb{E}$ su $\mathbb{K}$, come la cardinalità di una base di trascendenza di $\mathbb{E}$ su $\mathbb{K}$.

Lemma 5.2.12. *Siano $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ due estensioni di campi. Allora*

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(\mathbb{E}) = \mathrm{tr}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E}) + \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(\mathbb{F}).$$

Dimostrazione. Omessa [Rotman, Field Theory, Theorem 4.3.3]. □

Definizione 5.2.13. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Un **campo di funzioni** $\mathbb{E}$ su $\mathbb{K}$ di r variabili è un'estensione di $\mathbb{K}$ finitamente generata con grado di trascendenza pari a r.

Esempio 5.2.14. *Se X è una varietà di dimensione $n \geq 1$ allora $K(X)$ è un campo di funzioni su $\mathbb{K}$ di dimensione n.*

Definizione 5.2.15. Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione di campi. Una base di trascendenza S di $\mathbb{E}$ su $\mathbb{K}$ si dice **separante** se l'estensione algebrica $\mathbb{K}(S) \subseteq \mathbb{E}$ è separabile. Un'estensione di campi che ammette una base di trascendenza separante di sice **separabilmente generata**.

Teorema 5.2.16 (MacLane)**.** *Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ un'estensione di campi finitamente generata e separabilmente generata. Allora ogni insieme di generatori contiene una base di trascendenza separante.*

Dimostrazione. Omessa. □

Teorema 5.2.17. *Se $\mathbb{K}$ è perfetto allora ogni estensione finitamente generata è separabilmente generata.*

Dimostrazione. Omessa. □

Teorema 5.2.18 (Teorema dell'elemento primitivo)**.** *Se $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ è un'estensione finitamente generata e separabile, allora esiste $\gamma \in \mathbb{E}$ tale che $\mathbb{E} = \mathbb{K}(\gamma)$.*

Dimostrazione. Omessa. □

L'elemento γ è detto **elemento primitivo**.

Teorema 5.2.19. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Ogni varietà X di dimensione n è birazionale a una ipersuperficie affine $V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$.*

Dimostrazione. In base al Corollario 5.1.14 ci basta provare che $K(X) \simeq K(V(f))$. Dato che X ha un ricoprimento di aperti affini (Corollario 3.4.4), esiste un aperto affine $U \subseteq X$ non vuoto, quindi $K(U) \simeq K(X)$. Pertanto possiamo assumere X affine. Dato che $\Gamma(X)$ è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata e $K(X) = K(\Gamma(X))$, allora l'estensione $\mathbb{K} \subseteq K(X)$ è finitamente generata. Poiché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, è perfetto, pertanto l'estensione $\mathbb{K} \subseteq K(X)$ è separabilmente generata, ovvero esiste una base di trascendenza separante $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ per $K(X)$. Inoltre, poiché l'estensione $\mathbb{K}(B) \subseteq K(X)$ è finitamente generata e separabile, dal Teorema dell'elemento primitivo esiste $x_{n+1} \in K(X)$ tale che $K(X) = \mathbb{K}(B)(x_{n+1}) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_{n+1})$. Adesso x_{n+1} è algebrico su $\mathbb{K}(B)$, quindi esiste un polinomio irriducibile $f \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_{n+1}]$ tale che $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$. Osserviamo che f dipende da x_{n+1} in quanto $x_1, \dots, x_n$ per costruzione sono algebricamente indipendenti su $\mathbb{K}$. Pertanto

$$K(X) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_{n+1}) \simeq \mathbb{K}(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_{n+1}}) = K\left(\frac{\mathbb{K}[y_1, \dots, y_{n+1}]}{(f)}\right) = K(V(f)),$$

con $V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$ affine. □

Capitolo 6

Piano e cono tangente

6.1 Punti singolari

Definizione 6.1.1. Siano $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. La **matrice Jacobiana** in $P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ di $f_1, \dots, f_m$ è la matrice

$$J = (J_{i,j}) \quad \text{con} \quad J_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P).$$

Definizione 6.1.2. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine, con $\mathscr{I}(X) = (f_1, \dots, f_m)$. Un punto $P \in X$ è **non singolare** se il rango della matrice Jacobiana in P di $f_1, \dots, f_m$ è pari a $n - \dim X$, altrimenti è **singolare**.

A prima vista la definizione di punto singolare sembra dipendere dall'immersione di X in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e dalla scelta dei generatori di $\mathscr{I}(X)$. Proviamo che la definizione non dipende dalla scelta dei generatori di $\mathscr{I}(X)$. In seguito, proveremo che essa non dipende nemmeno dall'immersione $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Fissiamo $P \in X$, come prima supponiamo che $\mathscr{I}(X) = (f_1, \dots, f_m)$ e sia $f \in \mathscr{I}(X)$. Definiamo

$$df(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right) \in \mathbb{K}^n.$$

Adesso $f = \sum_{i=1}^m h_i f_i$ per certi $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Applicando componente per componente la regola di Leibniz abbiamo

$$df(P) = \sum_{i^1}^m h_i(P) df_i(P) + \sum_{i^1}^m dh_i(P) f_i(P) = \sum_{i^1}^m h_i(P) df_i(P),$$

dove l'ultima uguaglianza segue da $f_1(P), \dots, f_m(P) = 0$ dal momento che $P \in X$. La precedente equazione ci permette di affermare che lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(\{df(P)\}_{f \in \mathscr{I}(X)})$ è generato da $df_1(P), \dots, df_m(P)$. Per il teorema di Kronecker abbiamo che

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(\{df(P)\}_{f \in \mathscr{I}(X)}) = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} df_1(P) \\ \vdots \\ df_m(P) \end{pmatrix},$$

quest'ultimo è proprio il rango della matrice Jacobiana in P di $f_1, \dots, f_m$. Pertanto la definizione di punto singolare non dipende dalla scelta dei generatori di $\mathscr{I}(X)$.

Definizione 6.1.3. Sia A un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$. La **dimensione d'immersione** di A, denotata con $\mathrm{emdim}(A)$, è il minimo numero di generatori di $\mathfrak{m}$.

Osservazione 6.1.4. A priori, due insiemi di generatori minimali di $\mathfrak{m}$ possono avere diverso numero di generatori. Se A è anche Noetheriano, dal Lemma di Nakayama segue che se $\{x_1, \ldots, x_n\}$ è un sistema di generatori minimale di $\mathfrak{m}$, allora le classi $\{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$ in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ formano una base per l'$A/\mathfrak{m}$-spazio vettoriale $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Da ciò segue che gli insiemi di generatori minimali di $\mathfrak{m}$ hanno la stessa cardinalità, inoltre il loro numero è pari alla dimensione di $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ come $A/\mathfrak{m}$-spazio vettoriale,

$$\mathrm{emdim}(A) = \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Se A è un anello locale Noetheriano, la sua dimensione coincide con l'altezza dell'ideale massimale $\mathfrak{m}$. Dal Teorema dell'ideale principale di Krull abbiamo che essa è minore o uguale della cardinalità di un qualsiasi insieme di generatori di $\mathfrak{m}$. In particolare $\mathrm{ht}(\mathfrak{m})$ è minore uguale del numero minimo di generatori di $\mathfrak{m}$, cioè

$$\dim A = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \leq \mathrm{emdim}(A).$$

Definizione 6.1.5. Un anello locale A è **regolare** se $\dim A = \mathrm{emdim}(A)$.

Osserviamo che se X è una varietà algebrica affine, $\mathcal{O}_{P,X}$ è un anello locale noetheriano, essendo localizzazione di $\Gamma(X)$, che è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata.

Lemma 6.1.6. *Sia A un anello e m un suo ideale massimale. Se $\overline{m}$ indica l'ideale m nella localizzazione A_m, allora*

$$\frac{m}{m^2} \simeq \frac{\overline{m}}{\overline{m}^2} \quad \textit{come } A/m\textit{-spazi vettoriali.}$$

Dimostrazione. Osserviamo che l'anello A/m^2 è locale, infatti se $\tilde{p}$ è un ideale primo di A/m^2, allora posto p l'ideale primo in A corrispondente si ha $m^2 \subseteq p \Rightarrow m \subseteq p \Rightarrow m = p$. Quindi A/m^2 ha m/m^2 come unico ideale massimale. Pertanto $(A/m^2)_{m/m^2} \simeq A/m^2$, di conseguenza $\overline{m}/\overline{m}^2 \simeq (m/m^2)_{m/m^2} \simeq m/m^2$ come ideali di A/m^2, in particolare come A/m-spazi vettoriali. □

Teorema 6.1.7 (Zariski)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine. Un punto $P \in X$ è non singolare se e solo se $\mathcal{O}_{P,X}$ è un anello regolare.*

Dimostrazione. Sia $P = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. Dal Teorema degli zeri di Hilbert in forma debole abbiamo

$$m_P = \mathscr{I}(\{P\}) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n].$$

Sia $d_P : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}^n$ definita da $d_P(f) = df(P) \in \mathbb{K}^n$. Osserviamo che d_P è un omomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, inoltre $d_P(x_i - a_i) = \underline{e_i}$, quindi $d_P(m_P) = \mathbb{K}^n$. Mentre $d_p(m_P^2) = \{\underline{0}\}$, infatti se $f \in m_P^2$, allora $f = \sum_i u_i v_i$ con $u_i, v_i \in m_P$, dalla formula di Leibniz componente per componente abbiamo

$$df(P) = \sum_i du_i(P) v_i(P) + \sum_i u_i(P) dv_i(P) = \underline{0}.$$

Pertanto d_P induce una funzione lineare $\tilde{d_P}$ tra m_p/m_p^2 e $\mathbb{K}^n$, che manda l'insieme di generatori $\{\overline{x_1}-\overline{a_1},\dots,\overline{x_n}-\overline{a_n}\}$ di m_P/m_P^2 nella base $\{\underline{e_1},\dots,\underline{e_n}\}$ di $\mathbb{K}^n$, quindi i vettori $\overline{x_1}-\overline{a_1},\dots,\overline{x_n}-\overline{a_n}$ sono linearmente indipendenti, cioè formano una base. Pertanto $\tilde{d_P}$ è un isomorfismo. In particolare $\dim_{\mathbb{K}} m_P/m_P^2 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$. Adesso posto $\mathscr{I}(X) = (f_1,\dots,f_m)$, osserviamo che

$$d_P(\mathscr{I}(X)) = \tilde{d_P}\left(\frac{\mathscr{I}(X)+m_P^2}{m_P^2}\right).$$

Adesso le classi $\overline{f_i} = f_i + m_P^2$ generano $(\mathscr{I}(X)+m_P^2)/m_P^2$, pertanto le immagini $\tilde{d_P}(\overline{f_i}) = d_P(f_i) = df_i(P)$ generano $\tilde{d_P}\Big((\mathscr{I}(X)+m_P^2)/m_P^2\Big)$. Dal Teorema di Kronecker e dal fatto che $\tilde{d_P}$ è un isomorfismo, abbiamo che

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathscr{I}(X)+m_P^2}{m_P^2}\right) = \dim_{\mathbb{K}} \tilde{d_P}\left(\frac{\mathscr{I}(X)+m_P^2}{m_P^2}\right) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} df_1(P) \\ \vdots \\ df_m(P)\end{pmatrix} = \rho.$$

Adesso sia $m_{P,X}$ l'ideale $m_P/\mathscr{I}(X)$ in $\Gamma(X) \simeq A(X) = \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]/\mathscr{I}(X)$ (chiaramente $P \in X \Rightarrow \mathscr{I}(X) \subseteq \mathscr{I}(\{P\}) = m_P$). Osserviamo che si ha

$$m_{P,X}^2 = \left(\frac{m_P}{\mathscr{I}(X)}\right)^2 = \frac{m_P^2+\mathscr{I}(X)}{\mathscr{I}(X)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{m_{P,X}}{m_{P,X}^2} = \frac{\left(\dfrac{m_P}{\mathscr{I}(X)}\right)}{\left(\dfrac{m_P^2+\mathscr{I}(X)}{\mathscr{I}(X)}\right)} \simeq \frac{m_P}{m_P^2+\mathscr{I}(X)} \simeq \frac{\left(\dfrac{m_P}{m_P^2}\right)}{\left(\dfrac{m_P^2+\mathscr{I}(X)}{m_P^2}\right)}.$$

Ricordiamo che $\mathcal{O}_{P,X} \simeq A(X)_{m_{P,X}}$, sia $\overline{m_{P,X}}$ la localizzazione di $m_{P,X}$. Dal lemma precedente abbiamo $\overline{m_{P,X}}/\overline{m_{P,X}}^2 \simeq m_{P,X}/m_{P,X}^2$ come $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Dunque, per quanto scritto finora, risulta

$$\begin{aligned}\operatorname{emdim}(\mathcal{O}_{P,X}) &= \dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\overline{m_{P,X}}}{\overline{m_{P,X}}^2}\right) = \dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{m_{P,X}}{m_{P,X}^2}\right) = \\ &= \dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{m_P}{m_P^2}\right) - \dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{m_P^2+\mathscr{I}(X)}{m_P^2}\right) = n-\rho.\end{aligned}$$

Ora $P \in X$ è non singolare se e solo se

$$\operatorname{emdim}(\mathcal{O}_{P,X}) = n-\rho = \dim X = \dim \mathcal{O}_{P,X},$$

cioè se e solo se $\mathcal{O}_{P,X}$ è regolare. $\square$

Corollario 6.1.8. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine, e sia $P \in X$. Se $\mathscr{I}(X) = (f_1,\dots,f_m)$, allora il rango ρ della matrice Jacobiana in P di $f_1,\dots,f_m$ è minore o uguale a $n-\dim X$. In particolare i punti non singolari sono i punti per cui vale l'uguaglianza.*

Dimostrazione. Dal teorema precedente abbiamo

$$\dim X = \dim \mathcal{O}_{P,X} \leq \operatorname{emdim}(\mathcal{O}_{P,X}) = n - \rho \Longrightarrow \rho \leq n - \dim X. \qquad \square$$

Il teorema precedente mostra come la definizione di punto non singolare non dipenda dall'immersione $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, dandoci una definizione intrinseca che possiamo estendere a qualsiasi varietà.

Definizione 6.1.9. Sia X una varietà. Un punto $P \in X$ si dice **non singolare** se $\mathcal{O}_{P,X}$ è regolare, altrimenti si dice **singolare**. Denotiamo l'insieme dei punti singolari di X con $\operatorname{Sing}(X)$. Poniamo $\operatorname{Reg}(X) = X \setminus \operatorname{Sing}(X)$. Se X è priva di punti singolari, X si dice **non singolare** (o **liscia**).

Notiamo che la precedente definizione è indipendente dall'immersione della varietà X in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ o $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, ed è invariante per isomorfismi.

Teorema 6.1.10. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e X una varietà. L'insieme $\operatorname{Sing}(X)$ è un sottoinsieme chiuso proprio di X.*

Dimostrazione. Proviamo che $\operatorname{Sing}(X)$ è chiuso.

Riduzione Se la tesi vale per X affine, vale per ogni varietà X.

Sia $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ un ricoprimento di aperti affini di X (Corollario 3.4.4). Sia $P \in X$, allora esiste $i \in I$ tale che $P \in X_i$. Dato che X_i è aperto in X abbiamo $\mathcal{O}_{P,X_i} = \mathcal{O}_{P,X}$, pertanto $\operatorname{Sing}(X_i) = X_i \cap \operatorname{Sing}(X)$. Per ipotesi $\operatorname{Sing}(X_i)$ è chiuso in X_i, quindi dal Lemma 1.1.6, $\operatorname{Sing}(X)$ è chiuso in X.

Supponiamo che $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sia affine con $\mathscr{I}(X) = (f_1, \dots, f_m)$. Detto $\rho(P)$ il rango della matrice Jacobiana di $f_1, \dots, f_m$ in $P \in X$, abbiamo visto che

$$\operatorname{Sing}(X) = \{P \in X : \rho(P) < n - \dim X\}.$$

Pertanto, se $g_1, \dots, g_t$ sono i minori di ordine $n - \dim X$ della matrice Jacobiana di $f_1, \dots, f_m$ in P, abbiamo $\operatorname{Sing}(X) = V(g_1, \dots, g_t)$.
Proviamo che $\operatorname{Sing}(X)$ è un chiuso proprio di X.

Riduzione Se la tesi vale per X ipersuperficie affine, vale per qualsiasi varietà X.

Se $n = \dim X$, dal Teorema 5.2.19 sappiamo che X è birazionale a un'ipersuperficie $Y = V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$. Dal Corollario 5.1.14, esiste un aperto $U \subseteq X$ isomorfo a un aperto $V \subseteq Y$. Per assurdo supponiamo $\operatorname{Sing}(X) = X$. Da ciò segue

$$U = U \cap X = U \cap \operatorname{Sing}(X) = \operatorname{Sing}(U).$$

Dato che $U \simeq V$ abbiamo $V = \operatorname{Sing}(V) \subseteq \operatorname{Sing}(Y)$, ma $\operatorname{Sing}(Y)$ è chiuso, quindi $Y = \overline{V} \subseteq \operatorname{Sing}(Y) \Rightarrow Y = \operatorname{Sing}(Y)$, contro l'ipotesi, assurdo.

Assumiamo $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con f irriducibile. Osserviamo che in questo caso essendo $\mathscr{I}(X) = (f)$, la matrice Jacobiana è $n \times 1$, inoltre $\operatorname{Sing}(X) = V\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Per assurdo se $\operatorname{Sing}(X) = X$, allora $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in (f)$, ma il grado del polinomio $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nella variabile x_i è strettamente minore del corrispondente grado di f, quindi $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \underline{0}$ per ogni i. Poiché X è non vuoto, f è non costante, quindi necessariamente $\mathbb{K}$ ha caratteristica $p > 0$. Estendendo il ragionamento già visto nel caso di una sola variabile, otteniamo $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1^p, \dots, x_n^p)$. Infine, dato che $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, quindi perfetto, abbiamo che esiste $h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $f = h^p$, contro l'irriducibilità di f, assurdo. $\square$

6.2 Spazio tangente affine

Definizione 6.2.1. Sia $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una ipersuperficie algebrica affine, e sia $P = (a_1, \dots, a_n) \in X$. Definiamo lo **spazio tangente affine** a X in P come l'iperpiano

$$t_P(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)(x_i - a_i)\right).$$

Osserviamo che se $P \in X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è singolare, allora $df(P) = \underline{0}$, quindi $t_P(X) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Mentre se $P \notin \operatorname{Sing}(X)$, allora $t_P(X) \subsetneq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Definizione 6.2.2. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine con $\mathscr{I}(X) = (f_1, \dots, f_m)$, e sia $P \in X$. Definiamo lo **spazio tangente affine** a X in P come

$$t_P(X) = \bigcap_{i=1}^{m} t_P(V(f_i)).$$

Proposizione 6.2.3. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine con $\mathscr{I}(X) = (f_1, \dots, f_m)$, e sia $P \in X$. Risulta*

$$t_P(X) = \bigcap_{f \in \mathscr{I}(X)} t_P(V(f)).$$

Dimostrazione. Proviamo che

$$\bigcap_{i=1}^{m} t_P(V(f_i)) = \bigcap_{f \in \mathscr{I}(X)} t_P(V(f)).$$

- $\subseteq$ Sia $Q \in \bigcap_{i=1}^{m} t_P(V(f_i))$. Come osservato in precedenza, lo spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ $\mathcal{L}(\{df(P)\}_{f \in \mathscr{I}(X)})$ è generato da $df_1(P), \dots, df_m(P)$. Pertanto, per ogni $f \in \mathscr{I}(X)$, esistono $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ tali che

$$df(P) = \sum_{i=1}^{m} a_i \, df_i(P) \Longrightarrow df(P) \cdot (Q - P) = \sum_{i=1}^{m} a_i \, df_i(P) \cdot (Q - P) = 0,$$

  ciò prova che $Q \in t_P(V(f))$.
- $\supseteq$ Banale. □

Proposizione 6.2.4. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine, e sia $P \in X$. In generale* $\dim t_p(X) \geq \dim X$*, P è non singolare se e solo se vale l'uguaglianza. In particolare*

$$\operatorname{Sing}(X) = \{P \in X : \dim t_P(X) > \dim X\}.$$

Dimostrazione. Le equazioni che definiscono $t_P(X)$ sono lineari, quindi $t_P(X)$ è un sottospazio lineare di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Se $\mathscr{I}(X) = (f_1, \dots, f_m)$, dalla teoria dei sistemi lineari deduciamo che

$$\dim t_P(X) = n - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} df_1(P) \\ \vdots \\ df_m(P) \end{pmatrix},$$

da cui segue facilmente la tesi. □

Definizione 6.2.5. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine, e sia $P \in X$. Sia $L \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una retta passante per P con direzione $\underline{v} \neq \underline{0}$, quindi L ha equazioni paramentriche $\underline{x} = P + \underline{v}t$. Consideriamo l'ideale $I = (\{f(P+\underline{v}t)\}_{f\in\mathscr{I}(X)}) \subseteq \mathbb{K}[t]$. Poiché $\mathbb{K}[t]$ è un PID, allora $I = (g)$ per qualche $g \in \mathbb{K}[t]$. Inoltre, dato che $P \in X$, allora $f(P) = 0$ per ogni $f \in \mathscr{I}(X)$, cioè $g(0) = 0$, quindi esiste $r \geq 1$ tale che $g(t) = t^r h(t)$ e $h(0) \neq 0$. L'intero r è la **molteplicità di intersezione** tra L e X in P e sarà denotata con $\mathrm{mult}_P(L \cap X)$.

Definizione 6.2.6. Sia X una varietà algebrica affine e L una retta passante per $P \in X$. Diremo che L è **tangente** a X in P se $\mathrm{mult}_P(L \cap X) \geq 2$.

Definizione 6.2.7. Sia X una varietà algebrica affine e sia $P \in X$. Definiamo la **molteplicità del punto** P per la varietà X come l'intero

$$\mathrm{mult}_P(X) = \min_{\substack{L \ni P \\ \text{retta}}} \Big(\mathrm{mult}_P(L \cap X) \Big).$$

Osservazione 6.2.8. Osserviamo che, se $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, vale la formula di Taylor in più variabili:

$$f(\underline{x}) = f(P) + df(P) \cdot (\underline{x} - P) + (\underline{x} - P)^t d^2 f(P)(\underline{x} - P) + \dots$$

Proposizione 6.2.9. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine, e sia $P \in X$. Lo spazio tangente affine $t_P(X)$ coincide con l'unione di tutte le rette tangenti a X in P.*

Dimostrazione. Sia L una retta tangente a X in P di equazione parametrica $\underline{x} = P + \underline{v}t$, e sia $f \in \mathscr{I}(X)$. Per ipotesi $\mathrm{mult}_P(L \cap X) \geq 2$, cioè $f(P + \underline{v}t) = t^2 h(t)$. Dalla formula di Taylor, ciò significa che $df(P) \cdot \underline{v} = 0$. Ciò equivale a dire che $L \subseteq t_P(V(f))$. Dall'arbitrarietà di $f \in \mathscr{I}(X)$ otteniamo

$$L \subseteq \bigcap_{f \in \mathscr{I}(X)} t_P(V(f)) = t_P(X).$$

Adesso, se $Q \in t_P(X)$, allora per ogni $f \in \mathscr{I}(X)$ abbiamo $df(P) \cdot (Q - P) = 0$. Pertanto, analogamente a prima, la retta L passante per P e Q è contenuta in $t_P(X)$. Inoltre $\mathrm{mult}_P(L \cap X) \geq 2$, pertanto $Q \in L$ con L retta tangente a P in X. □

Proposizione 6.2.10. *Sia $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un'ipersuperficie algebrica affine e $P \in X$. Allora P è non singolare se e solo se* $\mathrm{mult}_P(X) = 1$.

Dimostrazione. La molteplicità di P è pari a 1 se e solo se esiste una retta L passante per P che non è tangente a P, equivalentemente $t_P(X) \neq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Abbiamo già osservato che, nel caso delle ipersuperfici, l'ultima condizione equivale a dire che P è non singolare. □

6.3 Cono tangente affine

Definizione 6.3.1. Sia X una varietà algebrica affine e $P \in X$. Definiamo il **cono tangente affine** a X in P come

$$C_P(X) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L, \quad \mathcal{L} = \{\text{rette } L \text{ tali che } \mathrm{mult}_P(L \cap X) > \mathrm{mult}_P(X)\}.$$

Dalla definizione si ha che $C_P(X) \subseteq t_P(X)$.

Osservazione 6.3.2. Sia $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una ipersuperficie algebrica e supponiamo $P = \underline{0} \in X$. Scriviamo f come somma delle sue componenti omogenee $f = f_m + f_{m+1} + \ldots + f_d$, con f_i polinomio omogeneo di grado i, e f_m è la componente omogenea non nulla di grado minimo. Allora ogni retta L passante per P ha equazione $\underline{x} = t\underline{v}$, scriviamo

$$f(t\underline{v}) = t^m(f_m(\underline{v}) + \ldots + t^{d-m} f_d(\underline{v})),$$

quindi $\mathrm{mult}_{\underline{0}}(L \cap X) \geq m$. Inoltre $C_P(X) = V(f_m)$.

Osservazione 6.3.3. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica con $\mathscr{I}(X) = (f_1, \ldots, f_m)$, e supponiamo $P = \underline{0} \in X$. Per definizione di cono tangente affine abbiamo

$$C_P(X) = \bigcap_{f \in \mathscr{I}(X)} C_P(V(f)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} C_P(V(f_i)),$$

notiamo che nell'ultima inclusione non vale necessariamente l'uguaglianza.

Definizione 6.3.4. Sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e sia $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_d$ la sua decomposizione in componenti omogenee, con f_i polinomio omogeneo di grado i. Definiamo

- il **termine iniziale** f^{in} di f come la componente omogenea non nulla di grado minimo;
- il **termine lineare** f^{lin} di f come il termine f_1.

Se $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è un ideale, definiamo

- l'**ideale dei termini iniziali** I^{in} come l'ideale generato da $\{f^{in}\}_{f \in I}$;
- l'**ideale dei termini lineari** I^{lin} come l'ideale generato da $\{f^{lin}\}_{f \in I}$.

Osservazione 6.3.5. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine con $I = \mathscr{I}(X)$. Dalle osservazioni precedenti abbiamo che $V(I^{in}) = C_{\underline{0}}(X)$ e $V(I^{lin}) = t_{\underline{0}}(X)$. Poiché $t_{\underline{0}}(X)$ è uno spazio lineare, allora $I^{lin} = \mathscr{I}(t_{\underline{0}}(X))$ è un ideale radicale. Inoltre da $C_{\underline{0}}(X) \subseteq t_{\underline{0}}(X)$ segue $I^{in} \supseteq I^{lin}$.

Osservazione 6.3.6. Sia $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ una curva piana irriducibile e sia $P \in X$. Assumiamo senza perdita di generalità che $P = \underline{0}$. Il cono tangente affine $C_P(X)$ ha equazione f^{in}, che è un polinomio omogeneo in due variabili di grado $\mathrm{mult}_P(X)$. Pertanto, se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, f^{in} si fattorizza in $\mathrm{mult}_P(X)$ fattori lineari. Quindi $C_P(X)$ è unione di $\mathrm{mult}_P(X)$ rette che sono le **tangenti principali** a X in P.

Definizione 6.3.7. Se $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ una curva piana irriducibile. Un punto $P \in X$ si dice **ordinario** se l'equazione del cono tangente affine $C_P(X)$ si fattorizza in $\mathrm{mult}_P(X)$ fattori lineari distinti. Equivalentemente, se P ha $\mathrm{mult}_P(X)$ tangenti principali distinte.

6.4 Spazio tangente proiettivo

Definizione 6.4.1. Sia $X = V^{\mathbb{P}}(f) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una ipersuperficie algebrica proiettiva, e sia $P \in X$. Definiamo lo **spazio tangente proiettivo** a X in P come

$$T_P(X) = V^{\mathbb{P}}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)x_i\right).$$

Definizione 6.4.2. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica proiettiva e sia $P \in X$. Definiamo lo **spazio tangente proiettivo** a X in P come

$$T_P(X) = \bigcap_{f \in \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)} T_P(V^{\mathbb{P}}(f)).$$

Anche nel caso proiettivo, se $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X) = (f_1, \ldots, f_m)$, vale

$$T_P(X) = \bigcap_{i=1}^{m} T_P(V^{\mathbb{P}}(f_i)).$$

Definizione 6.4.3. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica proiettiva. Se $X = V^{\mathbb{P}}(f_1) \cap \ldots \cap V^{\mathbb{P}}(f_m)$, diremo che X è **intersezione insiemistica** di $V^{\mathbb{P}}(f_1), \ldots, V^{\mathbb{P}}(f_m)$. Se abbiamo anche che $T_P(X) = T_P(V^{\mathbb{P}}(f_1)) \cap \ldots \cap T_P(V^{\mathbb{P}}(f_m))$ per ogni $P \in X$, allora X si dice **intersezione schematica** di $V^{\mathbb{P}}(f_1), \ldots, V^{\mathbb{P}}(f_m)$.

Definizione 6.4.4. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva, si definisce **codimensione** l'intero $\operatorname{codim}(X) = n - \dim(X)$.

Osserviamo che se $X = V^{\mathbb{P}}(f_1) \cap \ldots \cap V^{\mathbb{P}}(f_m)$, per l'analogo proiettivo della Proposizione 2.4.14, abbiamo $\operatorname{codim}(X) \leq m$.

Definizione 6.4.5. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica proiettiva. Se X è intersezione insiemistica di $V^{\mathbb{P}}(f_1), \ldots, V^{\mathbb{P}}(f_m)$ e $m = \operatorname{codim}(X)$, allora X si dice **intersezione completa insiemistica** di $V^{\mathbb{P}}(f_1), \ldots, V^{\mathbb{P}}(f_m)$. Se X è anche intersezione schematica di $V^{\mathbb{P}}(f_1), \ldots, V^{\mathbb{P}}(f_m)$, allora X si dice **intersezione completa schematica** di $V^{\mathbb{P}}(f_1), \ldots, V^{\mathbb{P}}(f_m)$.

Proposizione 6.4.6. *Sia X una varietà algebrica proiettiva. Allora X è intersezione completa schematica se e solo se X è intersezione completa di $V(f_1), \ldots, V(f_m)$.*

Dimostrazione. Omessa. □

Congettura 6.4.7 (Congettura di Harthshorne)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica proiettiva non singolare. Se $\operatorname{codim}(X) < \dim X/2$, allora X è intersezione completa.*

6.5 Scoppiamento nell'origine

Definizione 6.5.1. Sia $\pi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$ il morfismo $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 : \ldots : x_n)$. Definiamo lo **scoppiamente** (o **blow up**) di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ nell'origine come la chiusura del grafico $\Gamma_\pi(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus \{\underline{0}\})$ in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$. Denotiamo lo scoppiamento di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ nell'origine con $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$.

Osserviamo che $\Gamma_\pi(\mathbb{A}^n_\mathbb{K}\setminus\{\underline{0}\}) \simeq \mathbb{A}^n_\mathbb{K}\setminus\{\underline{0}\}$. Inoltre $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_\mathbb{K}) = \overline{\Gamma_\pi(\mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\})}$ è irriducibile.

Definizione 6.5.2. Sia $p : \mathbb{A}^n_\mathbb{K} \times \mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K} \to \mathbb{A}^n_\mathbb{K}$ la proiezione sul primo fattore, denotiamo con

$$E = \mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_\mathbb{K}) \cap p^{-1}(\underline{0}) = \mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_\mathbb{K}) \cap (\{\underline{0}\} \times_\mathbb{K} \mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K}).$$

L'insieme E è detto **divisore eccezionale**.

Dalla Proposizione 1.1.7 abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_\mathbb{K}) &= \Gamma_\pi(\mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}) \cup \Big(\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_\mathbb{K}) \cap (\{\underline{0}\} \times_\mathbb{K} \mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K})\Big) = \\ &= \Gamma_\pi(\mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}) \cup E.\end{aligned}$$

Proposizione 6.5.3. *Denotiamo con $x_1, \dots, x_n$ le coordinate dei punti di $\mathbb{A}^n_\mathbb{K}$, e con $y_1, \dots, y_n$ le coordinate dei punti di $\mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K}$. Risulta*

1. $E = \{\underline{0}\} \times_\mathbb{K} \mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K}$.
2. $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_\mathbb{K}) = V(\{x_iy_j - x_jy_i : 1 \leq i < j \leq n\}) \subseteq \mathbb{A}^n_\mathbb{K} \times_\mathbb{K} \mathbb{P}^{n-1}$.

Dimostrazione.

1. Sia $P \in \mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}$. Consideriamo l'insieme

$$C = \Gamma_\pi\Big(\big\{tP : t \in \mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}\big\}\Big) = \big\{(tP, [P]) : t \in \mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}\big\} \subseteq \Gamma_\pi(\mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}).$$

   Per definizione abbiamo $\overline{C} \subseteq \mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_\mathbb{K})$. Adesso sia $F \in \mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$ un polinomio omogeneo nelle $\underline{y}$ che si annulla su C ($F \in \mathscr{I}(C)$). Abbiamo che $F(tP, P) = g(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}$, quindi g è il polinomio nullo, in particolare $F(0, P) = g(0) = 0$, cioè $(0, [P]) \in V(\mathscr{I}(C)) = \overline{C} \subseteq \mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_\mathbb{K})$. Dall'arbitrarietà di $P \in \mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}$ segue $\{\underline{0}\} \times_\mathbb{K} \mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K} \subseteq \mathrm{Bl}_{\underline{0}}\, \mathbb{A}^n_\mathbb{K}$, cioè $E = \{\underline{0}\} \times_\mathbb{K} \mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K}$.

2. Sia $(\underline{\alpha}, [\underline{\beta}]) \in \mathbb{A}^n_\mathbb{K} \times_\mathbb{K} \mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K}$, se $\underline{\alpha} \neq \underline{0}$ allora

$$\begin{aligned}(\underline{\alpha}, [\underline{\beta}]) \in \Gamma_\pi(\mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}) &\iff \underline{\alpha} \text{ e } \underline{\beta} \text{ sono due vettori proporzionali} \\ &\iff (\underline{\alpha}, [\underline{\beta}]) \in V(x_iy_j - x_jy_i);\end{aligned}$$

   mentre se $\underline{\alpha} = \underline{0}$, allora $(\underline{0}, \underline{\beta}) \in V(x_iy_j - x_jy_i)$. Dall'arbitrarietà di $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ si ha

$$V(x_iy_j - x_jy_i) = \Gamma_\pi(\mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}) \cup \Big(\{\underline{0}\} \times_\mathbb{K} \mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K}\Big) = \Gamma_\pi(\mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}) \cup E = \mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_\mathbb{K}).$$

□

Definizione 6.5.4. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_\mathbb{K}$ una varietà affine. Definiamo lo **scoppiamento** (o **blow up**) di X nell'origine come $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) = \overline{\Gamma_\pi(X \setminus \{\underline{0}\})} \subseteq \mathbb{A}^n_\mathbb{K} \times_\mathbb{K} \mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K}$.

Osserviamo che, se $p : \Gamma_\pi(\mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}) \to \mathbb{A}^n_\mathbb{K} \setminus \{\underline{0}\}$ è la restrizione della proiezione di $\mathbb{A}^n_\mathbb{K} \times_\mathbb{K} \mathbb{P}^{n-1}_\mathbb{K}$ sul primo fattore, poiché Γ_π e p sono una l'inversa dell'altra (Proposizione 4.4.13, punto 3) abbiamo che $\Gamma_\pi(X \setminus \{\underline{0}\}) = p^{-1}(X \setminus \{\underline{0}\})$, da cui

$$\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) = \overline{p^{-1}(X \setminus \{\underline{0}\})}.$$

Osservazione 6.5.5. Abbiamo definito lo scoppiamento di una varietà nell'origine. È chiaro che tramite una traslazione possiamo definire lo scoppiamento di una varietà in un qualsiasi punto.

Esempio 6.5.6. *Consideriamo* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. *Dalla Proposizione 6.5.3 deduciamo che, se* $\big((x,y),(s:t)\big)$ *sono le coordinate di* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, *allora* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}) = V(xt - ys)$. *Adesso un ricoprimento affine per* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ *è dato dai due aperti affini*

$$\mathbb{A}^3_s = \{\big((x,y),(s:t)\big) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} : s \neq 0\} = \{\big((x,y),(1:t)\big) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\} \simeq \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}},$$
$$\mathbb{A}^3_t = \{\big((x,y),(s:t)\big) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} : t \neq 0\} = \{\big((x,y),(s:1)\big) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\} \simeq \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}.$$

Pertanto $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}) \cap \mathbb{A}^3_s = V(xt - y)$, $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}) \cap \mathbb{A}^3_t = V(x - ys)$. *Osserviamo che, posto* $f(x,y,t) = xt - y$, *abbiamo* $df(x,y,t) = (t,-1,x) \neq \underline{0}$, *pertanto* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}) \cap \mathbb{A}^3_s$ *non ha punti singolari. In modo analogo* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}} \cap \mathbb{A}^3_t$ *è anch'essa priva di punti singolari. In definitiva* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}})$ *è non singolare.*

Esempio 6.5.7 (Scoppiamento della cuspide nell'origine)**.** *Cosideriamo la varietà affine* $X = V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. *Mantenendo la stessa notazione utilizzata sopra, le equazioni di* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_s$ *sono*

$$\begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ xt - y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^3 = x^2t^2 \\ y = xt \end{cases} \implies \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ t = t \end{cases}.$$

Pertanto, posti $g(x,y,t) = x - t^2$, $h(x,y,t) = y - t^3$, *la matrice Jacobiana di* g,h *è*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2t \\ 0 & 1 & -3t^2 \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2 in ogni punto, deduciamo che $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_s$ *è una varietà non singolare in* $\mathbb{A}^3_s$. *Inoltre* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_s \cap E = \{\big((0,0),(1:0)\big)\}$. *In modo analogo, le equazioni di* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_t$ *sono*

$$\begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ x - ys = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 = y^3s^3 \\ x = ys \end{cases} \implies \begin{cases} ys^3 = 1 \\ xs^2 = 1 \end{cases}.$$

Poniamo $g(x,y,s) = xs^2 - 1$, $h(x,y,s) = ys^3 - 1$, *la matrice Jacobiana di* g *e* h *è*

$$\begin{pmatrix} s^2 & 0 & 2sx \\ 0 & s^3 & 3s^2y \end{pmatrix}$$

e poiché $s \neq 0$, *essa ha rango 2 in ogni punto, quindi* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_t$ *è non singolare, pertanto* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X)$ *è non singolare. Osserviamo che* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_t \cap E = \emptyset$.

Esempio 6.5.8 (Scoppiamento del nodo nell'origine)**.** *Consideriamo la varietà affine* $X = V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. *Le equazioni di* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_s$ *sono*

$$\begin{cases} y^2 - x^2(x+1) = 0 \\ xt - y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2t^2 = x^2(x+1) \\ y = xt \end{cases} \implies \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t(t^2-1) \end{cases}.$$

Poniamo $g(x,y,t) = x - t^2 + 1$, $h(x,y,t) = y - t(t^2-1)$, *la matrice Jacobiana di* g *e* h *è*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2t \\ 0 & 1 & -3t^2+1 \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2 in ogni punto, pertanto $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_s$ *è non singolare. Notiamo che*

$$\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_s \cap E = \{\big((0,0),(1:\pm 1)\big)\}.$$

In modo analogo, le equazioni di $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_t$ *sono*

$$\begin{cases} y^2 - x^2(x+1) = 0 \\ x - ys = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 = y^2s^2(ys+1) \\ x = ys \end{cases} \implies \begin{cases} ys^3 + s^2 - 1 = 0 \\ xs^2 - s^2 + 1 = 0 \end{cases}.$$

Poniamo $g(x,y,t) = xs^2 - s^2 + 1$, $h(x,y,t) = ys^3 + s^2 - 1$, *la matrice Jacobiana di* g *e* h *è*

$$\begin{pmatrix} s^2 & 0 & 2s(x-1) \\ 0 & s^3 & 3ys^2 + 2s \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2 in ogni punto, pertanto $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_t$ *è non singolare. In definitiva* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X)$ *è non singolare. Notiamo che* $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_t \cap E = \{\big((0,0),(\pm 1 : 1)\big)\}$

Teorema 6.5.9. *Sia* $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *una varietà algebrica affine con* $n \geq 2$, $\dim X \geq 1$, *e supponiamo* $\underline{0} \in X$. *Allora*

1. $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap E \simeq \mathbb{P}(C_{\underline{0}}(X))$.
2. *Ogni componente irriducibile di* $\mathbb{P}(C_{\underline{0}}(X))$ *ha dimensione* $\dim X - 1$.
3. $C_{\underline{0}}(X)$ *ha componenti irriducibili della stessa dimensione pari a* $\dim X$.

Dimostrazione.

1. Sia $X = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Scriviamo ogni generatore come somma delle sue componenti omogenee
$$f_i = f_{i,r} + \ldots + f_{i,d}$$
con $i \in \{1,\ldots,m\}$. Dato che $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = V\Big(x_iy_j - x_jy_i : i,j \in \{1,\ldots,n\}\Big)$, fissato un indice $i \in \{1,\ldots,n\}$, consideriamo il sottospazio
$$\mathbb{A}^{2n-1}_i = \Big\{\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1:\ldots:y_n)\big) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}} : y_i = 1\Big\},$$
$\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \cap \mathbb{A}^{2n-1}_i$ è definito dalle equazioni $x_j = y_jx_i$ per ogni $j = 1,\ldots,n$, $j \neq i$. Con queste sostituzioni abbiamo
$$f_t(x_1,\ldots,x_n) = f_t(y_1x_i,\ldots,y_nx_i) = x_i^r\Big(f_{t,r}(y_1,\ldots,y_n) + \ldots + x_i^{d-r}f_{t,d}(y_1,\ldots,y_n)\Big).$$
per ogni $t \in \{1,\ldots,m\}$. Quindi, poiché $x_i = 0$ implicherebbe $x_1 = \ldots = x_n = 0$, deduciamo che $p^{-1}(X \setminus \{\underline{0}\}) \cap \mathbb{A}^{2n-1}_i$ è definito dalle equazioni
$$f_{t,r}(y_1,\ldots,y_n) + \ldots + x_i^{d-r}f_{t,d}(y_1,\ldots,y_n) = 0, \quad x_i \neq 0.$$

Da cui

$$\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^{2n-1}_i = V(f_{t,r} + \ldots + x_i^{d-r} f_{t,d}, x_j - x_i y_j : \forall t, \forall j) \subseteq \mathbb{A}^{2n-1}_i.$$

Poiché in $\mathbb{A}^{2n-1}_i$, $E \cap \mathbb{A}^{2n-1}_i$ è definito dalle sole equazioni $x_i = 0$, $x_j = x_i y_j$, deduciamo che

$$\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^{2n-1}_i \cap E = V(f_{t,r}, x_j - x_i y_j, x_i : \forall t, \forall j) \subseteq \mathbb{A}^{2n-1}_i.$$

Ripetendo il ragionamento per ogni indice i, e incollando gli insiemi affini otteniamo

$$\mathbb{P}(C_{\underline{0}}(X)) = V^{\mathbb{P}}(f_{t,r} : \forall t) \simeq V(f_{t,r}(y_1, \ldots, y_n), x_j : \forall t, \forall j) = \mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap E \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}.$$

2. Dato che E in $\mathbb{A}^{2n-1}_i \cap \mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X)$ ha equazione $x_i = 0$, abbiamo che

$$\mathbb{P}(C_{\underline{0}}(X)) \cap \mathbb{A}^{2n-1}_i = (\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap E) \cap \mathbb{A}^{2n-1}_i = (\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^{2n-1}_i) \cap V(x_i),$$

quindi le componenti irriducibili di $\mathbb{P}(C_{\underline{0}}(X))$ hanno, in $\mathbb{A}^{2n-1}_i$, dimensione pari a $\dim \mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) - 1 = \dim X - 1$.

3. Segue dal punto precedente. □

Proposizione 6.5.10. *Sia $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ una curva piana irriducibile tale che $\underline{0} \in X$ è un punto singolare ordinario di molteplicità r. Allora $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X)$ non ha punti singolari in E.*

Dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità che $x = 0$ non sia una tangente principale a X in $\underline{0}$. Scriviamo $f = f_r + \ldots + f_d$ come somma delle sue componenti omogenee, con $r \geq 2$. Poiché $\underline{0}$ è un punto singolare ordinario, allora f_r si fattorizza in r fattori lineari distinti, e poiché $x = 0$ non è una tangente principale, essi corrispondono a r punti $(1 : u_i) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Quindi, dal teorema precedente

$$\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap E = \Big\{ \big((0,0), (1 : u_i)\big) : i = 1, \ldots, r \Big\} \subseteq \mathbb{A}^3_s.$$

Quindi, in $\mathbb{A}^3_s$, il polinomio $f_r(x, y, t)$ ha $(0, 0, u_i)$ come radici semplici, con $i = 1, \ldots, r$, quindi $\frac{\partial f_r}{\partial t}(0, 0, u_i) \neq 0$. Le equazioni di $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap \mathbb{A}^3_s$ sono

$$\begin{cases} y = xt \\ f_r(1, t) + \ldots + x^{d-r} f_d(1, t) = 0 \end{cases}.$$

Adesso, poniamo $g(x, y, t) = y - xt$, $h(x, y, t) = f_r(1, t) + \ldots + x^{d-r} f_d(1, t)$, la matrice Jacobiana di g e h in $(0, 0, u_i)$ è

$$\begin{pmatrix} -u_i & 1 & 0 \\ f_{r+1}(1, u_i) & 0 & \frac{\partial f_r}{\partial t}(0, 0, u_i) \end{pmatrix},$$

essa ha rango 2 per ogni $i = 1, \ldots, r$. Dunque, $\mathrm{Bl}_{\underline{0}}(X) \cap E$ è privo di punti singolari. □

Osserviamo che l'ipotesi che $\underline{0} \in X$ sia un punto singolare ordinario è necessaria, altrimenti può accadere che $\frac{\partial f_r}{\partial t}(0, 0, u_i) = 0$, quindi lo scoppiamento avrebbe ancora un punto singolare.

6.6 Graduato associato e sue proprietà

Definizione 6.6.1. Sia (A, m) un anello locale Noetheriano. Definiamo l'**algebra graduata** associata ad A come la A/m-algebra $\mathrm{gr}_m(A) = \bigoplus_{i\geq 0} m^i/m^{i+1}$, in cui la moltiplicazione è definita come segue: se $x_i \in m^i$, $x_j \in m^j$, allora

$$(x_i + m^{i+1}) \cdot (x_j + m^{j+1}) = x_i x_j + m^{i+j+1}.$$

Osservazione 6.6.2. Se $m = (f_1, \ldots, f_n)$, posto $\mathbb{K} = A/m$, esiste un omomorfismo suriettivo dall'algebra simmetrica $S(m/m^2) \simeq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ in $\mathrm{gr}_m(A)$ definito da

$$\varphi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{gr}_m(A), \quad \varphi(x_i) = f_i + m^2.$$

Lemma 6.6.3. *Se I, J, K sono tre ideali di un anello A, con $I \subseteq K$, allora*

$$(I + J) \cap K = I + (J \cap K)$$

Dimostrazione.

- $\subseteq$ Se $k = i+j \in (I+J)\cap K$, allora $i \in I \subseteq K$ e $j = i-k \in K$, da cui $i+j \in I+(J\cap K)$.
- $\supseteq$ $I + (J \cap K) \subseteq I + J$, $I + (J \cap K) \subseteq K$. □

Proposizione 6.6.4. *Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà algebrica affine tale che $\underline{0} \in X$, $m_{\underline{0},X}$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{\underline{0},X}$. Si ha*

$$\frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathscr{I}(X)^{in}} \simeq \mathrm{gr}_{m_{\underline{0},X}}(\mathcal{O}_{\underline{0},X})$$
$$\frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathscr{I}(X)^{lin}} \simeq S\left(\frac{m_{\underline{0},X}}{m^2_{\underline{0},X}}\right)$$

Dimostrazione. Poniamo per semplicità $m = (x_1, \ldots, x_n)$, $I = \mathscr{I}(X)$. Con abuso di notazione, continuiamo a indicare con m e I i corrispondenti ideali nella localizzazione $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_m$. Risulta

$$\mathcal{O}_{\underline{0},X} \simeq \left(\frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_s]}{I}\right)_{\frac{m}{I}} \simeq \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_s]_m}{I}, \quad m_{\underline{0},X} \simeq \frac{m}{I}.$$

Adesso osserviamo che per ogni $i \in \mathbb{N}$ risulta

$$(m_{\underline{0},X})^i = \left(\frac{m}{I}\right)^i \simeq \frac{m^i + I}{I} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{(m_{\underline{0},X})^i}{(m_{\underline{0},X})^{i+1}} \simeq \frac{\frac{m^i+I}{I}}{\frac{m^{i+1}+I}{I}} \simeq \frac{m^i + I}{m^{i+1} + I} = \frac{m^i + (m^{i+1} + I)}{m^{i+1} + I} \simeq$$
$$\simeq \frac{m^i}{(m^{i+1} + I) \cap m^i} = \frac{m^i}{m^{i+1} + (m^i \cap I)},$$

dove l'ultimo isomorfismo segue dal terzo teorema dell'isomorfismo, e l'ultima uguaglianza segue dal lemma precedente. Adesso osserviamo che per definizione I^{in} è un ideale omogeneo, pertanto scriviamo

$$I^{in} = \bigoplus_{i \geq 0} I_i^{in}.$$

È facile vedere che abbiamo la seguente uguaglianza $m^{i+1} + (m^i \cap I) = m^{i+1} + I_i^{in}$ (come gruppi additivi). Inoltre $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_i \simeq m^i/m^{i+1}$, da cui

$$\left(\frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I^{in}}\right)_i \simeq \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_i}{I_i^{in}} \simeq \frac{\left(\frac{m^i}{m^{i+1}}\right)}{I_i^{in}} \simeq \frac{m^i}{m^{i+1} + I_i^{in}}.$$

Dunque otteniamo

$$\frac{(m_{\underline{0},X})^i}{(m_{\underline{0},X})^{i+1}} \simeq \frac{m^i}{m^{i+1} + (m^i \cap I)} = \frac{m^i}{m^{i+1} + I_i^{in}} \simeq \left(\frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I^{in}}\right)_i.$$

Dato che questi isomorfismi (di spazi vettoriali su $\mathbb{K}$) sono compatibili con le operazioni degli anelli graduati corrispondenti, in quanto le parti omogeneee di grado 1 generano tutte le restanti parti omogenee, abbiamo

$$\mathrm{gr}_{m_{\underline{0},X}}(\mathcal{O}_{\underline{0},X}) = \bigoplus_{i \geq 0} \frac{(m_{\underline{0},X})^i}{(m_{\underline{0},X})^{i+1}} \simeq \bigoplus_{i \geq 0} \left(\frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I^{in}}\right)_i = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I^{in}}.$$

Per quanto finora provato abbiamo

$$\frac{m_{\underline{0},X}}{(m_{\underline{0},X})^2} \simeq \frac{m}{m^2 + I_1^{in}} = \frac{m}{m^2 + I^{lin}}$$

da cui, indicando con $\overline{x_i} = x_i + I^{lin} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I^{lin}$, risulta

$$S\left(\frac{m_{\underline{0},X}}{(m_{\underline{0},X})^2}\right) \simeq \mathbb{K}[\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}] = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I^{lin}}.$$

□

Osservazione 6.6.5. Dalla proposizione precedente otteniamo le corrispondenze

$$\begin{array}{ccccc} C_{\underline{0}}(X) & \longleftrightarrow & \mathscr{I}(X)^{in} & \longleftrightarrow & \mathrm{gr}_{m_{\underline{0},X}}(\mathcal{O}_{\underline{0},X}) \\ T_{\underline{0}}(X) & \longleftrightarrow & \mathscr{I}(X)^{lin} & \longleftrightarrow & S\left(\frac{m_{\underline{0},X}}{m_{\underline{0},X}^2}\right). \end{array}$$

Otteniamo la sequenza esatta corta

$$0 \to \frac{\mathscr{I}(X)^{lin}}{\mathscr{I}(X)^{in}} \to S\left(\frac{m_{\underline{0},X}}{m_{\underline{0},X}^2}\right) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{gr}_{m_{\underline{0},X}}(\mathcal{O}_{\underline{0},X}) \to 0.$$

Pertanto $\mathcal{O}_{\underline{0},X}$ è locale regolare $\Leftrightarrow C_{\underline{0}}(X) = T_{\underline{0}}(X) \Leftrightarrow I^{in} = I^{lin} \Leftrightarrow \varphi$ è isomorfismo.

Capitolo 7

Fibre di un morfismo

7.1 Teorema di dimensione delle fibre

Proposizione 7.1.1. *Siano X una varietà e $U \subseteq X$ un aperto.*

1. $\mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(K(X)) = \dim X$.

2. $\dim U = \dim X$.

Se $f : X \to Y$ è un morfismo di varietà dominante, allora

3. $\dim X \geq \dim Y$.

Dimostrazione.

1. *Caso affine.* Se X è affine dalla Proposizione 2.4.7 e dai teoremi 2.4.10 e 3.3.4 si ha

$$\dim X = \dim \Gamma(X) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(K(X)).$$

2. Supponiamo $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ affine. Dato che X ha una base di aperti affini (Corollario 3.4.4), esiste un aperto affine $V \subseteq U \subseteq X$. Dalla Proposizione 2.4.2 abbiamo $\dim V \leq \dim U \leq \dim X$. Inoltre $K(X) \simeq K(V)$, da cui

$$\dim X = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(K(X)) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(K(V)) = \dim V \Rightarrow \dim X = \dim U.$$

   Adesso se X è una varietà qualsiasi, di nuovo X ha una base $\mathcal{V}$ di aperti affini (Corollario 3.4.4). Adesso per quanto dimostrato finora, per ogni $V \in \mathcal{V}$ risulta $\dim V = \dim U \cap V$, pertanto, dalla Proposizione 2.4.3 abbiamo

$$\dim X = \sup_{V \in \mathcal{V}} \dim V = \sup_{V \in \mathcal{V}} \dim U \cap V = \dim U.$$

1. Se X è una varietà qualsiasi, dal Corollario 3.4.4 esiste un aperto affine $U \subseteq X$. Adesso $K(X) = K(U)$, inoltre per quanto provato nei punti precedenti abbiamo

$$\dim X = \dim U = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(K(U)) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(K(X)).$$

3. Vediamo f come mappa razionale, esso dà luogo a un omomorfismo di campi (iniettivo) $f^* : K(Y) \to K(X)$. Pertanto $\mathbb{K} \subseteq K(Y) \subseteq K(X)$, per il Lemma 5.2.12, si ha

$$\dim X = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(K(X)) = \mathrm{tr}_{K(Y)}(K(X)) + \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(K(Y)) \geq \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(Y) = \dim Y. \qquad \square$$

Lemma 7.1.2. *Se $f : X \to Y$ è un morfismo di varietà dominante e $U \subseteq X$ è un aperto, allora la restrizione di f a $f^{-1}(U)$ è dominante.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$f(X) = f(\overline{f^{-1}(U)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(U))} \Rightarrow Y = \overline{f(X)} \subseteq \overline{f(f^{-1}(U))}. \qquad \square$$

Teorema 7.1.3 (Teorema di dimensione delle fibre 1)**.** *Siano X, Y varietà, $f : X \to Y$ un morfismo dominante, e sia $W \subseteq Y$ un insieme chiuso e irriducibile. Se $Z \subseteq f^{-1}(W)$ è una componente irriducibile di $f^{-1}(W)$ tale che $\overline{f(Z)} = W$, allora*

$$\dim Z \geq \dim W + (\dim X - \dim Y).$$

Dimostrazione.

Riduzione Se la tesi è vera per Y affine, allora è vera per qualsiasi varietà.
Dato che Y ha una base di aperti affini (Corollario 3.4.4), allora esiste $U \subseteq Y$ aperto affine tale che $U \cap W = U \cap \overline{f(Z)} \neq \emptyset$, quindi $U \cap f(Z) \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(U) \cap Z \neq \emptyset$. Dalla proposizione precedente abbiamo $\dim X = \dim f^{-1}(U)$, $\dim Y = \dim U$, $\dim W = \dim W \cap U$, $\dim Z = \dim Z \cap f^{-1}(U)$. Adesso, la restrizione di f a $f^{-1}(U)$ è un morfismo dominante (Lemma 7.1.2). Dal Corollario 2.2.5 $W \cap U$ è irriducibile, inoltre $Z \cap f^{-1}(U)$ è una componente irriducibile di $f^{-1}(W) \cap f^{-1}(U)$ (Proposizione 2.2.6). Pertanto, per ipotesi abbiamo

$$\begin{gathered}\dim Z \cap f^{-1}(U) \geq \dim W \cap U + \dim f^{-1}(U) - \dim U \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim Z \geq \dim W + \dim X - \dim Y.\end{gathered}$$

Supponiamo Y affine. Se $s = \dim Y - \dim W$, l'ideale $\mathscr{I}(W)/\mathscr{I}(Y)$ ha altezza s in $\Gamma(Y)$. Dal Teorema dell'ideale principale di Krull (2.4.8 punto 3) esistono $h_1, \dots, h_s \in \Gamma(Y)$ tali che $\mathscr{I}(W)/\mathscr{I}(Y)$ è un primo minimale di $(h_1, \dots, h_s)$, cioè W è componente irriducibile di $V(h_1, \dots, h_s) \subseteq Y$. Poniamo $g_i = f^*(h_i) \in \Gamma(X)$. Per definizione di pullback abbiamo

$$\begin{aligned} f^{-1}(V(h_1, \dots, h_s)) &= \{P \in X : f(P) \in V(h_1, \dots, h_s)\} = \\ &= \{P \in X : P \in V(h_1 \circ f, \dots, h_s \circ f)\} = V(g_1, \dots, g_s). \end{aligned}$$

Proviamo che Z è una componente irriducibile di $V(g_1, \dots, g_s)$. Osserviamo che

$$Z \subseteq f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(V(h_1, \dots, h_s)) = V(g_1, \dots, g_s).$$

Dato che Z è irriducibile, è contenuto in una componente irriducibile Z_0 di $V(g_1, \dots, g_s)$. Adesso abbiamo

$$W = \overline{f(Z)} \subseteq \overline{f(Z_0)} \subseteq V(h_1, \dots, h_s),$$

con W componente irriducibile e $\overline{f(Z_0)}$ irriducibile. Ne segue che

$$W = \overline{f(Z)} = \overline{f(Z_0)} \supseteq f(Z_0) \Rightarrow Z \subseteq Z_0 \subseteq f^{-1}(W),$$

con Z_0 irriducibile e Z componente irriducibile di $f^{-1}(W)$. Ne segue che $Z = Z_0$, quindi Z è una componente irriducibile di $V(g_1, \ldots, g_s)$. In altri termini $\mathscr{I}(Z)/\mathscr{I}(X)$ è un primo minimale di $(g_1, \ldots, g_s)$. Dal teorema dell'ideale principale di Krull, l'altezza di $\mathscr{I}(Z)/\mathscr{I}(X)$ è minore o uguale a s, cioè

$$\begin{aligned}\dim X - \dim Z = \mathrm{ht}_{\Gamma(X)}(\mathscr{I}(Z)/\mathscr{I}(X)) \leq s \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim Z \geq \dim X - s = \dim W + \dim X - \dim Y.\end{aligned}$$ □

Corollario 7.1.4. *Sia $f : X \to Y$ un morfismo dominante di varietà. Per ogni $P \in Y$, ogni componente irriducibile di $f^{-1}(P)$ ha dimensione maggiore o uguale a* $\dim X - \dim Y$.

Definizione 7.1.5. Un morfismo di varietà algebriche affini $f : X \to Y$ si dice **finito** se $\Gamma(X)$ è un $f^*(\Gamma(Y))$-modulo finito, equivalentemente se l'estensione $f^*(\Gamma(Y)) \subseteq \Gamma(X)$ è integrale.

Proposizione 7.1.6. *Sia $A \subseteq B$ un'estensione integrale di anelli, J un ideale di B e $I = J \cap A$. L'estensione $A/I \subseteq B/J$ è integrale.*

Dimostrazione. Omessa. □

Teorema 7.1.7 (Going up)**.** *Sia $A \subseteq B$ un'estensione integrale di anelli.*

1. *Se P è un ideale primo di A, allora esiste un ideale primo Q di B tale che $P = Q \cap A$.*
2. *Se Q è un ideale primo di B, allora Q è massimale in B se e solo se $P = Q \cap A$ è massimale in A.*

Dimostrazione. Omessa. □

Proposizione 7.1.8. *Sia $A \subseteq B$ un'estensione integrale e supponiamo che B sia Noetheriano. Se P è un ideale primo di A, allora il numero di ideali primi di B che si contraggono in P è finito*

Dimostrazione. Omessa. □

Proposizione 7.1.9. *Se $f : X \to Y$ è un morfismo finito, allora*

1. *f suriettivo $\iff$ f è dominante $\iff$ f^* è iniettivo.*
2. *f è un morfismo chiuso.*
3. *Per ogni $P \in Y$, l'insieme $f^{-1}(P)$ è finito.*
4. *Per ogni $Z \subseteq X$ chiuso e irriducibile si ha* $\dim Z = \dim f(Z)$.

Dimostrazione.

1. L'ultima equivalenza è data dal Lemma 3.5.2. Chiaramente se f è suriettivo è anche dominante. Viceversa supponiamo che f sia dominante, quindi f^* è inettivo, pertanto $\Gamma(Y) \simeq f^*(\Gamma(Y))$. Sia $P \in Y$, l'ideale $m_P = \mathscr{I}(\{P\})/\mathscr{I}(Y) \subseteq \Gamma(Y)$ è massimale, ed esso corrisponde in $f^*(\Gamma(Y))$ a $f^*(m_P)$. Dato che l'estensione $\Gamma(Y) \simeq f^*(\Gamma(Y)) \subseteq \Gamma(X)$ è integrale, per il Teorema del Going up 7.1.7 esiste un ideale massimale $m_Q = \mathscr{I}(\{Q\})/\mathscr{I}(X) \subseteq \Gamma(X)$, con $Q \in X$, tale che

$$f^*(m_P) = m_Q \cap f^*\big(\Gamma(Y)\big) \Rightarrow m_P = f^{*-1}\Big(m_Q \cap f^*\big(\Gamma(Y)\big)\Big) = f^{*-1}(m_Q).$$

Adesso dalla definizione di pullback si ha

$$\frac{\mathscr{I}(\{P\})}{\mathscr{I}(Y)} = m_P = f^{*-1}(m_Q) = f^{*-1}\left(\frac{\mathscr{I}(\{Q\})}{\mathscr{I}(X)}\right) = \frac{\mathscr{I}(\{f(Q)\})}{\mathscr{I}(f(X))} = \frac{\mathscr{I}(\{f(Q)\})}{\mathscr{I}(Y)},$$

da cui $\mathscr{I}(\{P\}) = \mathscr{I}(\{f(Q)\}) \Rightarrow P = f(Q)$. Dall'arbitrarietà di $P \in Y$ segue che f è suriettiva.

2. Sia $Z \subseteq X$ chiuso irriducibile. Restrigendo il dominio di f a Z e il codominio a $\overline{f(Z)}$, otteniamo un morfismo di varietà algebriche affini $f_{|Z} : Z \to \overline{f(Z)}$ dominante. Dato che

$$\Gamma(Z) \simeq \frac{\Gamma(X)}{\mathscr{I}(Z)}, \quad \Gamma(f(Z)) \simeq \frac{f^*(\Gamma(Y))}{f^*(\mathscr{I}(f(Z)))},$$

il morfismo $f_{|Z}$ è associato all'estensione

$$\frac{f^*(\Gamma(Y))}{f^*(\mathscr{I}(\overline{f(Z)}))} = \frac{f^*(\Gamma(Y))}{f^*(\mathscr{I}(f(Z)))} \subseteq \frac{\Gamma(X)}{\mathscr{I}(Z)} \tag{7.1}$$

($\mathscr{I}(f(Z)) = \mathscr{I}(\overline{f(Z)})$ in base all'Osservazione 2.3.5). Adesso

$$f^*(\mathscr{I}(f(Z))) = f^*(f^{*-1}(\mathscr{I}(Z))) = \mathscr{I}(Z) \cap f^*(\Gamma(Y)),$$

quindi dalla Proposizione 7.1.6 l'estensione (7.1) è integrale, quindi $f_{|Z}$ è finito. Per il punto precedente $f_{|Z}$ è suriettivo, quindi $f(Z) = \overline{f(Z)}$, cioè $f(Z)$ è chiuso. Se ora $Z \subseteq X$ è un qualunque insieme chiuso, scriviamo Z come unione delle sue componenti irriducibili $Z = \bigcup_{i=1}^m Z_i$, quindi $f(Z) = \bigcup_{i=1}^m f(Z_i)$ è chiuso in quanto unione di chiusi.

3. Nei casi in cui $f^{-1}(P) = \emptyset$ non c'è nulla da provare. Pertanto possiamo ridurci al caso in cui f è suriettiva. L'ideale $m_P = \mathscr{I}(\{P\})/\mathscr{I}(Y) \subseteq \Gamma(Y)$ è massimale. Adesso se $Q \in f^{-1}(P)$, allora $f(Q) = P$, quindi

$$m_P = \frac{\mathscr{I}(\{P\})}{\mathscr{I}(Y)} = \frac{\mathscr{I}(\{f(Q)\})}{\mathscr{I}(f(X))} = f^{*-1}\left(\frac{\mathscr{I}(\{Q\})}{\mathscr{I}(X)}\right) = f^{*-1}(m_Q) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f^*(m_P) = m_Q \cap f^*(\Gamma(Y)),$$

dove $m_Q = \mathscr{I}(\{Q\})/\mathscr{I}(X) \subseteq \Gamma(X)$ massimale. In altri termini, i punti di $f^{-1}(P)$ corrispondono agli ideali massimali m di $\Gamma(X)$ tali che $m \cap f^*(\Gamma(Y)) = m_P$. Pertanto, dalla Proposizione 7.1.8 essi sono in numero finito.

4. Sia $Z \subseteq X$ chiuso irriducibile. Per i punti 1 e 2, la restrizione $f : Z \to f(Z)$ è un morfismo finito dominante di varietà affini, per la Proposizione 7.1.1 $\dim Z \geq \dim f(Z)$. D'altra parte, se $P \in f(Z)$, l'insieme $f^{-1}(P)$ è finito (punto 3), quindi $\dim f^{-1}(P) = 0$. Per il Corollario 7.1.4 si ha $0 \geq \dim Z - \dim f(Z)$, da cui $\dim f(Z) \geq \dim Z$, da cui l'uguaglianza.

□

Teorema 7.1.10 (Teorema di dimensione delle fibre 2). *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà dominante. Esiste un aperto $U \subseteq Y$ non vuoto tale che*

1. *$U \subseteq f(X)$.*

2. *Per ogni $W \subseteq Y$ chiuso irriducibile tale che $W \cap U \neq \emptyset$, ogni componente irriducibile Z di $f^{-1}(W)$ tale che $Z \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ e $\overline{f(Z)} = W$ ha dimensione*

$$\dim Z = \dim W + \dim X - \dim Y.$$

3. *Per ogni $P \in U$, ogni componente irriducibile di $f^{-1}(P)$ ha dimensione pari a $\dim X - \dim Y$.*

Dimostrazione. Proviamo 1 e 2, il punto 3 seguirà da 2.

Riduzione 1 Se la tesi è vera per Y affine, allora è vera per qualsiasi varietà Y.
Dato che Y ha una base di aperti affini (Corollario 3.4.4), allora esiste $V \subseteq Y$ aperto affine. La restrizione $f_{|f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \to V$ è un morfismo dominannte. (Lemma 7.1.2). Per ipotesi esiste un aperto $U \subseteq V$ tale che $U \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq f(X)$. Sia adesso $W \subseteq Y$ chiuso irriducibile tale che $W \cap U \neq \emptyset$ e Z una componente irriducibile di $f^{-1}(W)$ tale che $Z \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ e $\overline{f(Z)} = W$, allora $W \cap V \neq \emptyset$ è un chiuso irriducibile di V, $Z \cap f^{-1}(V)$ è una componente irriducibile di $f^{-1}(W) \cap f^{-1}(V)$ (Proposizione 2.2.6) e $f(Z \cap f^{-1}(V))$ è denso in $W \cap V$, quindi per ipotesi, e dalla Proposizione 7.1.1 si ha

$$\dim Z = \dim Z \cap V = \dim W \cap V + \dim f^{-1}(V) - \dim V = \dim W + \dim X - \dim Y.$$

Riduzione 2 Se la tesi è vera per X affine, allora è vera per qualsiasi varietà X.
Dal Corollario 3.4.4 $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ con X_i aperti affini. Consideriamo le restrizioni $f_{|X_i} : X_i \to Y$, per ipotesi esistono $U_i \subseteq Y$ aperti che soddisfano 1 e 2. Sia ora $U = \bigcap_{i \in I} U_i$, chiaramente $U \subseteq U_i \subseteq f(X_i) \subseteq f(X)$. Se adesso $W \subseteq Y$ è un insieme chiuso irriducibile tale che $W \cap U \neq \emptyset$ e se Z è una componente irriducibile di $f^{-1}(W)$ tale che $Z \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ e $\overline{f(Z)} = W$, allora per ogni $i \in I$ si ha $W \cap U_i \neq \emptyset$ chiuso irriducibile di U_i, mentre, dato che $\{X_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento, per qualche $i \in I$ si ha $Z \cap X_i \neq \emptyset$, quindi dalla Proposizione 2.2.6, $Z \cap X_i$ è una componente irriducibile di $f_{|X_i}^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap X_i$, $(Z \cap X_i) \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$ e $f(Z \cap X_i)$ è denso in W, pertanto, per ipotesi e dalla Proposizione 7.1.1, si ha

$$\dim Z = \dim Z \cap X_i = \dim W + \dim X_i - \dim Y = \dim W + \dim X - \dim Y.$$

Supponiamo X e Y affini. Dato che f è dominante, f^* è iniettiva, per semplicità identifichiamo $\Gamma(Y) \simeq f^*(\Gamma(Y))$, quindi $\Gamma(Y) \subseteq \Gamma(X)$. Posto $S = \Gamma(Y) \setminus \{\underline{0}\}$ abbiamo le inclusioni

$$K(Y) = S^{-1}\Gamma(Y) \subseteq S^{-1}\Gamma(X) \subseteq K(\Gamma(X)) = K(X).$$

Pertanto $S^{-1}\Gamma(X)$ è una $K(Y)$-algebra finitamente generata che è un dominio, e il suo campo dei quozienti è $K(X)$. Vedendo f^* come mappa razionale abbiamo le inclusioni $\mathbb{K} \subseteq K(Y) \subseteq K(X)$, dai teoremi 5.2.12 e 2.4.10 e 7.1.1 risulta

$$\dim S^{-1}\Gamma(X) = \operatorname{tr}_{K(Y)} K(X) = \operatorname{tr}_{\mathbb{K}} K(X) - \operatorname{tr}_{\mathbb{K}} K(Y) = \dim X - \dim Y = r.$$

Dal Lemma di Normalizzazione di Noether 1.1.3 esistono $y_1, \ldots, y_r \in S^{-1}\Gamma(X)$ tali che l'estensione $K(Y)[y_1, \ldots, y_r] \subseteq S^{-1}\Gamma(X)$ è integrale. Dato che $y_i = \tilde{y}_i/z_i$ con $\tilde{y}_i \in \Gamma(X)$ e $z_i \in \Gamma(Y) \setminus \{\underline{0}\}$, ponendo $z = z_1 \ldots z_r$, $y_i' = zy_i \in \Gamma(X)$, si ha $K(Y)[y_1, \ldots, y_r] = K(Y)[y_1', \ldots, y_r']$. Quindi possiamo supporre che $y_1, \ldots, y_r \in \Gamma(X)$. Sia ora $\alpha \in \Gamma(X)$, per quanto detto finora, α è intero su $K(Y)[y_1, \ldots, y_r]$, quindi annulla un polinomio del tipo

$$x^k + p_1(y_1, \ldots, y_r)x^{k-1} + \ldots + p_k(y_1, \ldots, y_r) \in K(Y)[y_1, \ldots, y_r][x].$$

Riducendo i p_i a denominatore comune, abbiamo $p_i = \tilde{p}_i/g$ con $g \in \Gamma(Y)$, pertanto α è intero su $\Gamma(Y)_g[y_1, \ldots, y_r]$. Dato che $\Gamma(X)$ è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, ripetendo tale ragionamento per i generatori di $\Gamma(X)$, detto $h \in \Gamma(Y)$ il prodotto degli elementi ottenuti abbiamo che $\Gamma(X)_h \simeq \Gamma(X)[1/h]$ è intero su $\Gamma(Y)_h[y_1, \ldots, y_r]$. Adesso definiamo $U = Y \setminus V(h)$, abbiamo $f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus V(h)) = X \setminus V(f^*(h)) = X \setminus V(h)$ (nella nostra identificazione, $f^*(h) = h$). Dal Teorema 3.3.4 abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma(X)_h &\simeq \Gamma(X \setminus V(h)) = \Gamma(f^{-1}(U)), \\ \Gamma(Y)_h &\simeq \Gamma(Y \setminus V(h)) = \Gamma(U). \end{aligned}$$

Inoltre, per estensione di scalari, otteniamo

$$\Gamma(Y)_h[y_1, \ldots, y_r] \simeq \Gamma(Y)_h \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_r] = \Gamma(U) \otimes_{\mathbb{K}} \Gamma(\mathbb{A}^r_{\mathbb{K}}) \simeq \Gamma(U \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^r_{\mathbb{K}}).$$

Pertanto, tramite il funtore Γ, all'estensione $\Gamma(Y)_h \subseteq \Gamma(Y)_h[y_1, \ldots, y_r]$ corrisponde la proiezione $\pi : U \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^r_{\mathbb{K}} \to U$, e all'estensione integrale $\Gamma(Y)_h[y_1, \ldots, y_r] \subseteq \Gamma(X)$ corrisponde il morfismo finito dominante (quindi suriettivo) $\varphi : f^{-1}(U) \to U \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^r_{\mathbb{K}}$. Abbiamo i seguenti digrammi commutativi:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(Y)_h \arrow[r, hook, "\tilde{f^*}"] \arrow[d, hook] & \Gamma(X)_h \\ \Gamma(Y)_h[\underline{y}] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \quad \xleftarrow{\ \Gamma\ } \quad \begin{tikzcd} U & f^{-1}(U) \arrow[l, two heads, "f_{|U}"'] \arrow[dl, "\varphi"] \\ U \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^r_{\mathbb{K}} \arrow[u, two heads, "\pi"] & \end{tikzcd}$$

dove $\tilde{f^*} : \Gamma(Y)[1/h] \to \Gamma(X)[1/h]$ è l'estensione di f^* che manda $\tilde{f^*}(1/h) = 1/h$. Essa è chiaramente iniettiva, quindi il corrispondente morfismo $f_{|U}$ è suriettivo, da cui $f(f^{-1}(U)) = U \Rightarrow U \cap f(X) = U \Rightarrow U \subseteq f(X)$. Sia adesso $W \subseteq Y$ un chiuso irriducibile tale che $W \cap U \neq \emptyset$ e Z una componente irriducibile di $f^{-1}(W)$ tale che $Z \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Adesso, dato che $f_{|U} = \pi \circ \varphi$, abbiamo

$$\begin{gathered} \pi\big(\varphi\big(Z \cap f^{-1}(U)\big)\big) = f(Z \cap f^{-1}(U)) \subseteq f(Z) \cap U \subseteq W \cap U \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \varphi(Z \cap f^{-1}(U)) \subseteq \pi^{-1}(f(Z \cap f^{-1}(U))) \subseteq \pi^{-1}(W \cap U) = (W \cap U) \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^r_{\mathbb{K}}. \end{gathered}$$

Adesso, dato che $Z \cap f^{-1}(U)$ è un aperto di Z e $W \cap U$ è un aperto di W, dalla Proposizione 7.1.1 abbiamo $\dim Z = \dim Z \cap f^{-1}(U)$, $\dim W = \dim W \cap U$. Adesso, $Z \cap f^{-1}(U)$ è chiuso in $f^{-1}(U)$, ed è irriducibile in quanto la sua chiusura in X è Z; pertanto, poiché φ è un morfismo finito, dalla Proposizione 7.1.9 $\dim Z \cap f^{-1}(U) = \dim \varphi(Z \cap f^{-1}(U))$. Infine, dato che $\varphi(Z \cap f^{-1}(U)) \subseteq (W \cap U) \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^r_{\mathbb{K}}$, dalla Proposizione 2.4.2 risulta

$$\begin{aligned} \dim Z = \dim Z \cap f^{-1}(U) = \dim \varphi(Z \cap f^{-1}(U)) \leq \dim \big((W \cap U) \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^r_{\mathbb{K}}\big) = \\ = \dim W \cap U + \dim \mathbb{A}^r_{\mathbb{K}} = \dim W + r = \dim W + \dim X - \dim Y \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \dim Z \leq \dim W + \dim X - \dim Y.$$

La disuguaglianza inversa segue dal Primo Teorema di dimensione delle fibre 7.1.3, da cui l'uguaglianza. □

Definizione 7.1.11. Una funzione continua $f : X \to Y$ dall'insieme algebrico proiettivo X nella varietà proiettiva Y si dice **morfismo** se, per ogni componente irriducibile X_i di X, la restrizione $f_i : X_i \to Y$ è un morfismo di varietà.

Teorema 7.1.12 (Criterio di irriducibilità)**.** *Siano X un insieme algebrico proiettivo, Y una varietà proiettiva, $f : X \to Y$ un morfismo e $r \in \mathbb{N}$. Se per ogni $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ è irriducibile e ha dimensione r allora X è irriducibile.*

Dimostrazione. Dato che per ogni $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ è irriducibile, quindi non vuota, f è suriettiva. Sia $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$ la decomposizione di X in componenti irriducibili e siano $f_i : X_i \to Y$ le restrizioni di f a X_i. Poniamo

$$\mathcal{I} = \{i \in \{1, \dots, m\} : f(X_i) = Y\}, \quad \mathcal{I}^c = \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{I}.$$

Dato che

$$Y = f(X) = \bigcup_{i=1}^m f(X_i),$$

con $f(X_i)$ chiusi (Corollario 4.5.6) e Y irriducibile, abbiamo $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Adesso per ogni $i \in \mathcal{I}$ dal Secondo Teorema di dimensione delle fibre 7.1.10 applicato a f_i suriettiva (dominante), esiste un aperto $U_i \subseteq Y$ non vuoto tale che per ogni $y \in U_i$ si ha $\dim f_i^{-1}(y) = \dim X_i - \dim Y$. Poniamo

$$U = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} U_i \cap \bigcap_{i \in \mathcal{I}^c} Y \setminus f(X_i),$$

in questo modo U risulta un aperto non vuoto di Y. Sia $y \in U$, scriviamo

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap X = \bigcup_{i=1}^m (f^{-1}(y) \cap X_i),$$

con $f^{-1}(y) \cap X_i$ chiusi in $f^{-1}(y)$ irriducibile, pertanto esiste $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tale che

$$\emptyset \neq f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap X_{i_0} = f_{i_0}^{-1}(y).$$

Sia $x \in f^{-1}(y) \cap X_{i_0}$, allora $y = f(x) \in f(X_{i_0}) \cap U$, quindi necessariamente $i_0 \in \mathcal{I}$, ossia $y \in U_{i_0}$. Per costruzione abbiamo

$$r = \dim f^{-1}(y) = \dim f_{i_0}^{-1}(y) = \dim X_{i_0} - \dim Y.$$

Adesso per ogni $y \in Y$ dal Corollario 7.1.4 applicato a f_{i_0}, abbiamo $\dim f_{i_0}^{-1}(y) \geq \dim X_{i_0} - \dim Y$. Inoltre $f_{i_0}^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$, da cui (Proposizione 2.4.2)

$$r = \dim X_{i_0} - \dim Y \leq \dim f_{i_0}^{-1}(y) \leq \dim f^{-1}(y) = r,$$

pertanto $\dim f_{i_0}^{-1}(y) = \dim f^{-1}(y)$, e poiché per ipotesi $f^{-1}(y)$ è irriducibile, ne segue che

$$f^{-1}(y) = f_{i_0}^{-1}(y) \subseteq X_{i_0}.$$

Dall'arbitrarietà di $y \in Y$, per ogni $x \in X$ si ha

$$x \in f^{-1}(f(x)) = f_{i_0}^{-1}(f(x)) \subseteq X_{i_0},$$

da cui $X \subseteq X_{i_0} \Rightarrow X = X_{i_0}$ irriducibile. □

Osservazione 7.1.13. Nel Criterio di irriducibilità 7.1.12 possiamo sostituire l'ipotesi che X e Y siano proiettive con l'ipotesi che f sia un morfismo chiuso.

Capitolo 8

Dualità, Varietà delle Secanti e Join

8.1 Sezione iperpiana e varietà duale

Definizione 8.1.1. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Lo **span lineare** di X, denotato con $\langle X \rangle$, è il più piccolo spazio lineare che contiene X.

Definizione 8.1.2. Una varità proiettiva $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si dice **non degenerata** se non è contenuta in nessun sottospazio lineare proprio di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Equivalentemente se $\langle X \rangle = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Definizione 8.1.3. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva non degenerata e $H \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ un iperpiano. L'intersezione $X \cap H$ è detta **sezione iperpiana**.

Proposizione 8.1.4. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva non degenerata e $H \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ un iperpiano. Risulta*

$$\operatorname{Sing}(X \cap H) = (\operatorname{Sing}(X) \cap H) \cup \{P \in X : T_P(X) \subseteq H\}.$$

Dimostrazione. Poniamo $H = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, per definizione $X \nsubseteq H = V(f)$, cioè $\mathscr{I}(X) \not\supseteq \sqrt{(f)}$, dato che $\mathscr{I}(X)$ è un ideale radicale, ciò equivale a $f \notin \mathscr{I}(X)$, quindi $\overline{f} \neq \overline{0}$ in $S(X)$. Dal Teorema dell'ideale principale di Krull 2.4.8 l'altezza di $(\overline{f})$ è pari a 1, quindi

$$\operatorname{ht}(\mathscr{I}(X \cap H)) = \operatorname{ht}(\sqrt{\mathscr{I}(X) + (f)}) = \operatorname{ht}\left(\mathscr{I}(X) + (f)\right) = \operatorname{ht}(\mathscr{I}(X)) + 1,$$

cioè (Teorema 2.4.10) $\dim(X \cap H) = \dim X - 1$. Sia adesso $P \in X \cap H$. Dato che $T_P(H) = H$ si ha

$$T_P(X \cap H) = \bigcap_{g \in \mathscr{I}(X)+(f)} T_P(V(g)) = T_P(X) \cap T_P(H) = T_P(X) \cap H.$$

Adesso distinguiamo due casi. Se $T_P(X) \subseteq H$, allora $T_P(X \cap H) = T_P(X)$, quindi dalla Proposizione 6.2.4 versione proiettiva, abbiamo

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Sing}(X \cap H) &\Leftrightarrow \dim(T_P(X \cap H)) = \dim T_P(X) > \dim(X \cap H) = \dim X - 1 \\ &\Leftrightarrow \dim T_P(X) + 1 > \dim X \\ &\Leftrightarrow \dim T_P(X) \geq \dim X, \end{aligned}$$

l'ultima condizione è sempre verificata, per cui se $T_P(X) \subseteq H$ allora $P \in \mathrm{Sing}(X \cap H)$. Adesso se $T_P(X) \nsubseteq H$, analogamente a quanto fatto per X abbiamo

$$\dim(T_P(X \cap H)) = \dim(T_P(X) \cap H) = \dim T_P(X) - 1.$$

Da cui abbiamo

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Sing}(X \cap H) &\Leftrightarrow \dim T_P(X) - 1 = \dim(T_P(X) \cap H) > \dim(X \cap H) = \dim X - 1 \\ &\Leftrightarrow \dim T_P(X) > \dim X \\ &\Leftrightarrow P \in \mathrm{Sing}(X). \end{aligned}$$

Da cui la tesi. $\square$

Definizione 8.1.5. Siano $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva non degenerata e $H \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ un iperpiano. Diremo che H è **tangente** a X in un punto $P \in X$ se $T_P(X) \subseteq H$. Il luogo dei punti $P \in \mathrm{Reg}(X)$ in cui H è tangente a X, $\{P \in \mathrm{Reg}(X) : T_P(X) \subseteq H\}$ è detto **luogo di contatto** di H e X.

Se V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, indichiamo lo **spazio duale** di V con $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$. Ricordiamo la definizione di spazio proeittivo duale: $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^* = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n*})$.

Definizione 8.1.6. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva, definiamo

$$\mathcal{C}(X) = \overline{\{(P, [H]) \in \mathrm{Reg}(X) \times_{\mathbb{K}} (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^* : T_P(X) \subseteq H\}} \subseteq \mathrm{Reg}(X) \times_{\mathbb{K}} (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^*.$$

$\mathcal{C}(X)$ è detta **varietà conormale** di X. Dato che $\mathcal{C}(X) \subseteq X \times_{\mathbb{K}} (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^*$, possiamo considerare le proiezioni π_1, π_2 rispettivamente su X e $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^*$. Definiamo $X^* = \pi_2(\mathcal{C}(X)) \subseteq (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^*$ la **varietà duale** di X.

Teorema 8.1.7. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva. Allora*

1. *$\mathcal{C}(X)$ è irriducibile e $\dim \mathcal{C}(X) = n - 1$.*
2. *X^* è irriducibile e $\dim X^* \leq n - 1$.*

Dimostrazione. Consideriamo la proiezione $\pi_1 : \mathcal{C}(X) \to \mathrm{Reg}(X)$, essa è un morfismo. Per ogni $P \in \mathrm{Reg}(X)$, se $T_P(X) = \mathbb{P}(U)$, la fibra

$$\begin{aligned} \pi_1^{-1}(P) = \{(P, [H]) \in \mathrm{Reg}(X) \times_{\mathbb{K}} (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^* : T_P(X) \subseteq H\} \simeq \\ \simeq \{[H] \in (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^* : T_P(X) \subseteq H\} = \mathbb{P}(U^\perp). \end{aligned}$$

Dato che $P \in \mathrm{Reg}(X)$, otteniamo

$$\dim \pi_1^{-1}(P) = n - \dim T_P(X) - 1 = n - \dim X - 1,$$

pertanto, $\pi_1^{-1}(P)$ è chiuso irriducibile di dimensione costante (rispetto a $P \in \mathrm{Reg}(X)$), per il Criterio di irriducibilità 7.1.12 $\mathcal{C}(X)$ è irriducibile e

$$n - \dim X - 1 = \dim \pi_1^{-1}(P) = \dim \mathcal{C}(X) - \dim X \Rightarrow \dim \mathcal{C}(X) = n - 1,$$

quindi anche $X^* = \pi_2(\mathcal{C}(X))$ è irriducibile, inoltre $\dim X^* \leq \dim \mathcal{C}(X) = n - 1$. $\square$

Definizione 8.1.8. Una ipersuperficie $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si dice **sviluppabile** se $\dim X^* < n-1$.

Teorema 8.1.9 (Teorema di Bertini)**.** *Se $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è una varietà proiettiva non singolare e $[H] \in (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^* \setminus X^*$, allora $X \cap H$ è non singolare.*

Dimostrazione. Omessa. □

Definizione 8.1.10. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettva. Il **difetto duale** di X è

$$\operatorname{def}(X) = n - 1 - \dim(X^*) \geq 0.$$

Osservazione 8.1.11. Sia $[H] \in X^*$, risulta

$$\pi_2^{-1}([H]) = \{(P, [H]) \in \operatorname{Reg}(X) \times_{\mathbb{K}} (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^* : T_P(X) \subseteq H\} \simeq \{P \in \operatorname{Reg}(X) : T_P(X) \subseteq H\}.$$

Per il Secondo Teorema di dimensione delle fibre 7.1.10, esiste un aperto $U \subseteq X^*$ tale che per ogni $[H] \in U$, ogni componente irriducibile di $\pi_2^{-1}([H])$ ha dimensione uguale a $\dim \mathcal{C}(X) - \dim X^* = n - 1 - \dim X^* = \operatorname{def}(X)$. Poiché $\{P \in \operatorname{Reg}(X) : T_P(X) \subseteq H\}$ è il luogo di contatto di H e X, otteniamo che il difetto duale di X è la dimensione di ogni componente irriducibile del luogo di contatto di X con un iperpiano generico H.

Teorema 8.1.12 (Parità di Landman)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà poiettiva non singolare. Se $\operatorname{def}(X) > 0$, allora $\operatorname{def}(X)$ ha la stessa parità di $\dim X$.*

Dimostrazione. Omessa. □

8.2 Varietà delle secanti

Definiamo la **varietà di incidenza** come l'insieme

$$I = \{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : x_1 \neq x_2, z \in \langle x_1, x_2 \rangle\} \subseteq (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \Delta_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}) \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

Osserviamo che

$$(x_1, x_2, z) \in I \iff \operatorname{rk} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} = 2,$$

pertanto I è un insieme chiuso in $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \Delta_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}) \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Posto $U = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \Delta_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}$. Consideriamo le proiezioni

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ U & & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}. \end{tikzcd}$$

Osserviamo che $\pi_1^{-1}(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2)\} \times_{\mathbb{K}} \langle x_1, x_2 \rangle \simeq \mathbb{P}^1$, pertanto tutte le fibre di π_1 sono irriducibili e hanno dimensione 1, pertanto, dal Criterio di irriducibilità 7.1.12 la varietà di incidenza I è irriducibile.

Sia adesso $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva, e sia

$$S^0_X = \{(x_1, x_2, z) \in X \times_{\mathbb{K}} X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : x_1 \neq x_2, z \in \langle x_1, x_2 \rangle\} \subseteq (X \times_{\mathbb{K}} X \setminus \Delta_X) \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

Adesso $S_X^0 = I \cap (X \times_{\mathbb{K}} X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$, quindi S_X^0 è chiuso in $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \Delta_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}) \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. In modo del tutto analogo a prima, dal Criterio di irriducibilità 7.1.12 S_X^0 è irriducibile, inoltre dal Secondo Teorema di dimensione delle fibre 7.1.10

$$1 = \dim S_X^0 - \dim(X \times_{\mathbb{K}} X) \Rightarrow \dim S_X^0 = 2 \dim X + 1.$$

Sia adesso S_X la chiusura di S_X^0 in $X \times_{\mathbb{K}} X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, detta **varietà astratta delle secanti**. Chiaramente S_X è chiuso e irriducibile, inoltre $\dim S_X = \dim S_X^0 = 2 \dim X + 1$

Definizione 8.2.1. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva, la **varietà delle secanti** ad X è

$$S(X) = \pi_2(S_X) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

In modo alternativo, data $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ varietà proiettiva, possiamo definire la varietà delle secanti ad X come

$$S(X) = \overline{\bigcup_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ x_1 \neq x_2}} \langle x_1, x_2 \rangle} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

Dalla definizione abbiamo $\dim S(X) \leq \dim S_X = 2 \dim X + 1$, pertanto

$$\dim S(X) \leq \min\{n, 2 \dim X + 1\}.$$

Definizione 8.2.2. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva, definiamo il **difetto secante** di X come

$$\delta(X) = 2 \dim X + 1 - \dim S(X) \geq 0.$$

Vogliamo adesso generalizzare quanto fatto per la varietà delle secanti. Sia $k \in \mathbb{N}$, definiamo

$$S_X^{k,0} = \{(x_1, \dots, x_{k+1}, z) : L = \langle x_1, \dots, x_{k+1} \rangle, \dim L = k, z \in L\} \subseteq \underbrace{X \times_{\mathbb{K}} \dots \times_{\mathbb{K}} X}_{k+1 \text{ volte}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}},$$

$$S_X^k = \overline{S_X^{k,0}} \subseteq \underbrace{X \times_{\mathbb{K}} \dots \times_{\mathbb{K}} X}_{k+1 \text{ volte}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

Come prima, S_X^k è chiuso irriducibile detta **varietà astratta delle k-secanti**. Consideriamo le due proiezioni

$$\begin{tikzcd} & S_X^k \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \underbrace{X \times_{\mathbb{K}} \dots \times_{\mathbb{K}} X}_{k+1 \text{ volte}} & & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}. \end{tikzcd}$$

Definizione 8.2.3. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva, la **varietà delle k-secanti** ad X è

$$S^k(X) = \pi_2(S_X^k) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

Analogamente a prima, la varietà delle k-secanti può essere definita anche come

$$S^k(X) = \overline{\bigcup_{\substack{x_i \in X \\ \dim\langle x_1,\dots,x_k\rangle = k}} \langle x_1, \dots, x_n\rangle}.$$

Di nuovo come prima si ha

$$\dim S^k(X) \leq \min\{n, (k+1)\dim X + 1\}.$$

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva. Considerando le proiezioni

$$\begin{tikzcd} & S_X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X \times_{\mathbb{K}} X & & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}, \end{tikzcd}$$

definiamo la **varietà astratta delle stelle tangenti** come $T^*_X = \pi_1^{-1}(\Delta_X)$. La varietà astratta delle stelle tangenti fa commutare il diagaramma

$$\begin{tikzcd} T^*_X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_{1|T^*_X}"'] & S_X \arrow[d, "\pi_1"] \\ \Delta_X \arrow[r, hook] & X \times_{\mathbb{K}} X. \end{tikzcd}$$

Definizione 8.2.4. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva, la **stella tangente** ad X nel punto $x \in X$ è

$$T^*_x(X) = \pi_2(\pi_1^{-1}(x,x)) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

In altri termini, la stella tangente è l'unione del limite delle rette secanti. Osserviamo che si ha

$$C_x(X) \subseteq T^*_x(X) \subseteq T_x(X).$$

Esempio 8.2.5. *Consideriamo la varietà di Segre*

$$X = \mathbb{P}^a \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^b \subseteq \mathbb{P}^{(a+1)(b+1)-1} = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{a+1,b+1}).$$

Possiamo scrivere X nel seguente modo

$$X = \{[A] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^{a+1,b+1}) : \mathrm{rk}(A) = 1\}.$$

Adesso se $[A_1], [A_2] \in X$, la retta congiungente i due punti è parametrizzata da $[\lambda A_1 + \mu A_2]$, con $\mathrm{rk}(\lambda A_1 + \mu A_2) \leq 2$. Dato che ogni matrice di rango 2 può essere scritta come somma di due matrici di rango 1, abbiamo che

$$S(X) = \{[A] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^{a+1,b+1}) : \mathrm{rk}(A) \leq 2\}.$$

Generalizzando questo ragionamento risulta

$$S^k(X) = \{[A] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^{a+1,b+1}) : \mathrm{rk}(A) \leq k+1\}.$$

Pertanto risulta $k_0(X) = \min\{a, b\}$.

Esempio 8.2.6. *Sia $\nu_2 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ il morfismo di Veronese, definito da*

$$\nu_2(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

Possiamo vedere $\mathbb{P}^5 = \{[A] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^{3,3}) : A = A^t\}$, da cui scriviamo il morfismo di Veronese come

$$\nu_2(x_0 : x_1 : x_2) = \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{P}^5.$$

Pertanto, procedendo in modo simile a prima, posto $X = \nu_2(\mathbb{P}^2)$ detta ***superficie di Veronese****, otteniamo*

$$S^k(X) = \{[A] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^{3,3}) : \mathrm{rk}(A) \leq k+1, A = A^t\}.$$

Teorema 8.2.7 (Severi, 1901)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$, con $n \geq 5$ una superifice irriducibile tale che* $\dim S(X) \leq 4$ *allora*

1. *X è un cono su una curva irriducibile oppure*
2. *$n = 5$ e X è proiettivamente equivalente alla superficie di Veronese.*

Dimostrazione. Omessa. □

Problema 8.2.8. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà non singolare con $S(X) \subsetneq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. È $\delta(X)$ limitato?

Il valore massimo conosciuto per il difetto secante è 8.

Teorema 8.2.9 (Zak)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N_{\mathbb{K}}$ una varietà non singolare non degenerata con $n =$* $\dim X$*. Se $S(X) \subsetneq \mathbb{P}^N_{\mathbb{K}}$ allora* $\dim S(X) \geq \frac{3}{2}n + 1$*, in particolare $N \geq \frac{3}{2}n + 1$.*

Dimostrazione. Omessa. □

Definizione 8.2.10. Sia $n \in \mathbb{N}$. Una varietà proiettiva $X \subseteq \mathbb{P}^{\frac{3}{2}n+2}$ di dimensione n tale che $S(X) \subsetneq \mathbb{P}^{\frac{3}{2}n+2}$ è detta **varietà di Severi**.

Se X è una vairetà di Severi, abbiamo

$$\delta(X) = 2n + 1 - \dim S(X) \leq 2n + 1 - \left(\frac{3}{2}n + 1\right) = \frac{n}{2}.$$

È possibile dimostrare che se X è una varietà di Severi, allora $\delta(X) = \frac{n}{2}$. Esiste una classificazione delle varietà di Severi.

Teorema 8.2.11. *(Zak) Sia $X \subseteq \mathbb{P}^{\frac{3}{2}n+2}_{\mathbb{K}}$ una vairetà di Severi di dimensione n. Supponiamo che $\mathbb{K}$ sia un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero. Allora si ha $n \in \{2, 4, 8, 16\}$ e X è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:*

1. *la superificie di Veronese $\nu_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$;*
2. *la varietà di Segre $\mathbb{P}^2 \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{P}^8$;*
3. *la Grassmanniana $\mathbb{G}(1, 5) \subseteq \mathbb{P}^{14}$;*
4. *la E_6-varietà $X \subseteq \mathbb{P}^{26}$.*

Dimostrazione. Omessa. □

8.3 Join di due varietà

Se $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ sono due spazi lineari, ricordiamo la **formula di Grassman**

$$\dim\langle L_1, L_2\rangle = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2). \tag{8.1}$$

Sia $X \subseteq \langle X\rangle \subsetneq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva, con $\dim\langle X\rangle = n-1$. Per ogni $p \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \langle X\rangle$, definiamo

$$S(p, X) = \bigcup_{x\in X} \langle p, x\rangle,$$

detto **cono di vertice** p su X. Abbiamo $\dim S(p, X) = \dim X + 1$. Inoltre, per ogni $x \in X$ e $z \in \langle p, x\rangle$, $z \neq p$, abbiamo $T_z(S(p, X)) = \langle p, T_x(X)\rangle$.

Siano $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ due varietà proiettive, definiamo

$$S^0_{X,Y} = \{(x, y, z) \in X \times_{\mathbb{K}} Y \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : x \neq y, z \in \langle x, y\rangle\} \subseteq X \times_{\mathbb{K}} Y \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

Sia $S_{X,Y}$ la chiusura di $S^0_{X,Y}$ in $X \times_{\mathbb{K}} Y \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, detto **join astratto** delle varietà X e Y. Consideriamo le proiezioni

$$\begin{tikzcd} & S_{X,Y} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X \times_{\mathbb{K}} Y & & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}, \end{tikzcd}$$

Definizione 8.3.1. Siano X e Y come sopra, il **join** di X e Y è

$$S(X, Y) = \pi_2(S_{X,Y}) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

Analogamente a quanto fatto per la varietà delle secanti, utilizzando il Criterio di irriducibilità 7.1.12, abbiamo che $S_{X,Y}$ è irriducibile, quindi anche $S(X, Y)$ è irriducibile. Inoltre

$$\dim S(X, Y) \leq \dim S_{X,Y} = \dim X + \dim Y + 1.$$

Il join di X e Y può essere definito anche come

$$S(X, Y) = \overline{\bigcup_{\substack{x\in X,\, y\in Y \\ x\neq y}} \langle x, y\rangle}.$$

È possibile verificare che date tre varietà proiettive $X, Y, Z \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ risulta

$$S(X, S(Y, Z)) = S(S(X, Y), Z).$$

Pertanto il join definisce un'operazione associativa tra le sottovarietà proiettive di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Dalla definizione segue che se $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è una varietà proiettiva, allora $S(X, X) = S(X)$. Più in generale abbiamo

$$S^{k+h}(X) = S(S^k(X), S^h(X)).$$

Proposizione 8.3.2. *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ due varietà proiettive.*

1. $Y \subseteq S(x, Y) \subseteq T_x(S(x, Y)) \subseteq T_x(S(X, Y))$, *per ogni* $x \in X$.

2. *Se* $S^k(X) = S^{k+1}(X)$ *allora* $S^k(X) = \mathbb{P}^{s_k(X)}$, *dove* $s_k(X) = \dim S^k(X)$.

3. *Se* $s_{k+1}(X) = s_k(X)+1$ *allora* $S^{k+1}(X) = \mathbb{P}^{s_{k+1}(X)}$, *inoltre* $S^k(X)$ *è un'ipersuperficie in* $\mathbb{P}^{s_{k+1}(X)}$.

4. *Se* $S^{k+1}(X) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ *non è lineare, allora* $S^k(X) \subseteq \mathrm{Sing}(S^{k+1}(X))$.

Dimostrazione.

1. Dalla definizione di join abbiamo $S(x.Y) \subseteq S(X, Y) \Rightarrow T_x(S(x.Y)) \subseteq T_x(S(X, Y))$. Per definizione, $S(x, Y)$ è un cono di vertice x, quindi $S(x, Y) = C_x(S(x, Y)) \subseteq T_x(S(x, Y))$. L'inclusione $Y \subseteq S(x, Y)$ è ovvia.

2. Sia $z \in \mathrm{Reg}(S^k(X))$, dal punto precedente abbiamo

$$X \subseteq T_z(S(X, S^k(X))) = T_z(S^{k+1}(X)) = T_z(S^k(X)) = \mathbb{P}^{s_k(X)}.$$

Pertanto risulta $S^k(X) \subseteq \langle X \rangle \subseteq T_z(S^k(X)) = \mathbb{P}^{s_k(X)}$. Quindi $S^k(X)$ è contenuta nello spazio tangente di un suo punto regolare, pertanto $S^k(X) = T_z(S^k(X)) = \mathbb{P}^{s_k(X)}$.

3. Sia $x \in X$ un punto generale, abbiamo

$$S^k(X) \subsetneq S(x, S^k(X)) \subseteq S(X, S^k(X)) = S^{k+1}(X).$$

Pertanto, per un punto generico $x \in X$ abbiamo $S(x, S^k(X)) = S^{k+1}(X)$ dato che $s_{k+1}(X) = s_k(X) + 1$. In particolare, per $z \in S^{k+1}(X) \setminus S^k(X)$ generale esiste $y \in S^k(X)$ tale che $z \in \langle x, y \rangle \subseteq S^{k+1}(X)$. Quindi un punto $x \in X$ generale è contenuto in $T_z(S^{k+1}(X))$, da cui

$$S^{k+1}(X) \subseteq \langle X \rangle \subseteq T_z(S^{k+1}(X)),$$

e $S^{k+1}(X) = \langle X \rangle = \mathbb{P}^{s_{k+1}(X)}$.

4. Sia $z \in S^k(X)$. Dal punto 1 abbiamo

$$X \subseteq T_z(S(X, S^k(X))) = T_z(S^{k+1}(X)) \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq T_z(S^{k+1}(X)) \subseteq \langle S^{k+1}(X) \rangle.$$

Osserviamo che $\langle X \rangle = \langle S^{k+1}(X) \rangle$. Per ipotesi abbiamo $S^{k+1}(X) \subsetneq \langle S^{k+1}(X) \rangle = T_z(S^{k+1}(X))$, quindi $\dim T_z(S^{k+1}(X)) > \dim S^{k+1}(X)$, da cui $z \in \mathrm{Sing}(S^{k+1}(X))$.

□

Osservazione 8.3.3. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva non degenerata. Per quanto finora provato abbiamo

$$X \subsetneq S(X) \subsetneq S^2(X) \subsetneq \ldots \subsetneq S^{k_0(X)}(X) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

dove $k_0(X)$ è il minimo intero in cui la catena si stabilizza, cioè $S^{k_0(X)}(X) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Corollario 8.3.4. *Sia $C \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una curva proiettiva irriducibile non degenerata. Allora $s_k(C) = \min\{n, 2k+1\}$.*

Dimostrazione. Se $k = 0$, allora $s_0(C) = \dim C = 1$. Procediamo per induzione su k. Se $S^k(C) \subsetneq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, per la proposizione precedente $s_k(C) \geq s_{k-1}(C) + 2$ (altrimenti, se $s_k(C) \leq s_{k-1}(C) + 1$, allora $S^k(C) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$). Pertanto

$$2k + 1 = s_{k-1}(C) + 2 \leq s_k(C) \leq \min\{n, 2k+1\} \Rightarrow s_k(C) = 2k + 1. \qquad \square$$

Un argomento simile può essere utilizzato (mutatis mutandis) più in generale per una qualunque varietà proiettiva non degenerata.

8.4 Proiezioni lineari, coni e vertici

Sia $L = \mathbb{P}^l \subseteq \mathbb{P}^N$ uno spazio lineare, e sia $M = \mathbb{P}^{N-l-1}$ uno spazio lineare sghembo rispetto ad L, cioè $L \cap M = \emptyset$. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una varietà proiettiva non contenuta in L, e sia

$$\pi_L : X \dashrightarrow M$$

definita in $X \setminus L$ ponendo $\pi_L(x)$ uguale all'unico punto nell'intersezione (formula di Grassman 8.1) $\langle L, x \rangle \cap M$. Poniamo $X' = \overline{\pi_L(X)} \subseteq M$. Dalla deifinizione risulta $X' = S(L, X) \cap M$, inoltre chiaramente $S(L, X) = S(L, X')$. Da $S(L, X) = S(L, X')$, preso $x \in X$ generale, e se la caratteristica di $\mathbb{K}$ è zero, è possibile dimostrare che

$$\dim S(L, X) = \dim X + \dim L - \dim(T_x(X) \cap L). \tag{8.2}$$

Teorema 8.4.1 (Lemma di Sard). *Sia $f : X \to Y$ un morfismo dominante di varietà, supponiamo che $\mathbb{K}$ ha caratteristica zero. Allora esiste un aperto $U \subseteq X$ non vuoto tale che il rango della matrice Jacobiana di f calcolata in U abbiamo rango pari alla dimensione di Y, in simboli* $\mathrm{rk}(df(P)) = \dim Y$ *per ogni $P \in U$.*

Dimostrazione. Omessa. $\square$

Equivalentemente, il Lemma di Sard può essere espresso dicendo che, se $f : X \to Y$ è un morfismo dominante di varietà, esiste un aperto $U \subseteq X$ non vuoto tale che le fibre di f sono nonsingolari in U di dimensione $\dim X - \dim Y$.

Definizione 8.4.2. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una varietà proiettiva di dimensione n. Definiamo l'insieme dei **vertici** di X come

$$\mathrm{Vert}(X) = \{p \in X : S(p, X) = X\} \subseteq X.$$

Diciamo che X è un **cono** se $\mathrm{Vert}(X) \neq \emptyset$.

Proposizione 8.4.3. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una varietà proiettiva. Le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. *X è uno spazio lineare.*
2. *$X = S(X)$.*

3. Per ogni $p, q \in X$ si ha $\langle p, q\rangle \subseteq X$.

4. $X = \mathrm{Vert}(X)$.

Dimostrazione. (1) $\Leftrightarrow$ (2) segue dalla Proposizione 8.3.2 punto 2. (2) $\Leftrightarrow$ (3) segue dalla definizione di varietà delle secanti. Proviamo (3) $\Leftrightarrow$ (4). Fissato $p \in X$, abbiamo che per ogni $q \in X$, $\langle p, q\rangle \subseteq X$ se e solo se $S(p, X) = X$ se e solo se $p \in \mathrm{Vert}(X)$. □

Lemma 8.4.4. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una varietà proiettiva. Per ogni $p, q \in \mathrm{Vert}(X)$ si ha $\langle p, q\rangle \subseteq \mathrm{Vert}(X)$.*

Dimostrazione. Siano $p, q \in \mathrm{Vert}(X)$, sia $r \in \langle p, q\rangle \setminus \{p, q\}$ e sia $x \in X \setminus \{r\}$. Per ipotesi la retta $\langle p, x\rangle \subseteq X$. Quindi per ogni $y \in \langle p, x\rangle$, per ipotesi $\langle q, y\rangle \subseteq X$. Ciò prova che il piano generato $\langle p, q, x\rangle \subseteq X$, in particolare $\langle r, x\rangle \subseteq X$. Dall'arbitrarietà di $x \in X \setminus \{r\}$ segue $S(r, X) = X$, cioè $r \in \mathrm{Vert}(X)$. Dall'arbitrarietà di $r \in \langle p, q\rangle \setminus \{p, q\}$, segue $\langle p, q\rangle \subseteq \mathrm{Vert}(X)$. □

Corollario 8.4.5. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una varietà proiettiva. Se $\mathrm{Vert}(X) \neq \emptyset$, allora*

1. $\mathrm{Vert}(X)$ è uno spazio lineare.

2. $\mathrm{Vert}(\mathrm{Vert}(X)) = \mathrm{Vert}(X)$.

3. $\mathrm{Vert}(X) \subseteq \bigcap_{x \in X} T_x(X)$, e se la caratteristica di $\mathbb{K}$ è zero vale l'uguaglianza.

Dimostrazione. I punti 1 e 2 seguono dal lemma e dalla proposizione precedenti. Proviamo il punto 3. Fissiamo $p \in \mathrm{Vert}(X)$, per ogni $x \in X$, o $p = x \in T_x(X)$, oppure $p \neq x$. In quest'ultimo caso per ipotesi $\langle p, x\rangle \subseteq X$, quindi $\langle p, x\rangle$ è una retta tangente a X in ogni suo punto, in particolare è tangente in x, quindi, dalla Proposizione 6.2.9, si ha $p \in \langle p, x\rangle \subseteq T_x(X)$.

Se adesso la caratteristica di $\mathbb{K}$ è zero, poniamo $L = \bigcap_{x \in X} T_x(X)$. Per quanto provato finora basta mostrare che $L \subseteq \mathrm{Vert}(X)$. Osserviamo che $X \subseteq S(L, X)$. Per ogni $x \in X$ generale abbiamo $L = L \cap T_x(X)$, quindi, per la formula di Grassman generalizzata 8.2, si ha

$$\dim S(L, X) = \dim X + \dim L - \dim(L \cap T_x(X)) = \dim X.$$

Ne segue che $X = S(L, X)$, pertanto $L \subseteq \mathrm{Vert}(X)$. □

Osserviamo che il punto 3 del precedente corollario è falso per caratteristica positiva, come mostra il seguente esempio.

Esempio 8.4.6. *Supponiamo che $\mathbb{K}$ abbia caratteristica 2. Sia $X = V(zy - x^2) \subseteq \mathbb{P}^2$. Risulta $\mathrm{Vert}(X) = \emptyset$, mentre*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y.$$

Pertanto se $p_0 = (x_0 : y_0 : z_0) \in X$, allora $T_{p_0}(X) = V(z_0 y + y_0 z)$, in particolare

$$(1:0:0) \in \bigcap_{x \in X} T_x(X) \neq \emptyset.$$

Ricordando la definizione di cono affine (Definizione 2.5.13), osserviamo che se $p = [u], q = [v] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$, con $v, u \in \mathbb{K}^n$, allora $\langle p, q\rangle = \{[\lambda v + \mu u] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$. Da ciò deduciamo che se $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ sono due varietà proiettive, allora

$$\mathscr{C}(S(X,Y)) = \overline{\mathscr{C}(X) + \mathscr{C}(Y)}.$$

Teorema 8.4.7 (Lemma di Terracini)**.** *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ due varietà proiettive.*

1. *Per ogni $x \in X$, $y \in Y$, con $x \neq y$ e per ogni $z \in \langle x, y\rangle$*

$$\langle T_x(X), T_y(T)\rangle \subseteq T_z(S(X,Y)).$$

2. *Se la caratteristica di $\mathbb{K}$ è zero, esiste un aperto $U \subseteq S(X,Y)$ tale che*

$$\langle T_x(X), T_y(Y)\rangle = T_z(S(X,Y))$$

per ogni $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in \langle x, y\rangle \cap U$. In particolare

$$\dim S(X,Y) = \dim X + \dim Y - \dim(T_x(X) \cap T_y(Y)),$$

per ogni $x \in X \cap U$, $y \in Y \cap U$.

Dimostrazione. Omessa. □

Capitolo 9

Algebra tensoriale e Grassmanniana

9.1 Algebra tensoriale

Nel seguito, indichiamo con V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$T^n(V) = \begin{cases} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n} & n \geq 1, \\ \mathbb{K} & n = 0. \end{cases}$$

Dato che l'operazione di prodotto tensoriale è associativa, $T^n(V) \otimes T^m(V) \simeq T^{n+m}(V)$. Poniamo

$$T(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} T^n(V).$$

Dotiamo $T(V)$ della struttura di $\mathbb{K}$-algebra graduata definendo il prodotto di un elemento $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ di $T^n(V)$ per un elemento $u_1 \otimes \cdots \otimes u_m$ di $T^m(V)$ come

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \in T^n(V) \otimes T^m(V) \simeq T^{n+m}(V).$$

In questo modo $T(V)$ è una $\mathbb{K}$-algebra associativa con unità, cioè è un anello contenente $\mathbb{K}$ in cui è definito un prodotto compatibile con la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si noti che in generale tale prodotto non è commutativo. Chiamiamo $T(V)$ **algebra tensoriale** di V su $\mathbb{K}$.

Se U e V sono due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ ed $f : U \to V$ è una funzione lineare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo definire

$$T^n(f) : T^n(U) \to T^n(V), \quad T^n(f)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = f(u_1) \otimes \cdots \otimes f(u_n).$$

A loro volta queste mappe inducono una funzione lineare sulle algebre tensoriali

$$T(f) : T(U) \to T(V), \quad T(f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_n) \quad \forall v_i \in V, n \in \mathbb{N}.$$

In questo modo T può essere visto come funtore dalla categoria degli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ nella categoria delle $\mathbb{K}$-algebre associative con unità.

Se A è una $\mathbb{K}$-algebra associativa con unità e $f : V \to A$ è un'applicazione lineare, allora esiste un unico omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre $f' : T(V) \to A$ che estende f.

Se lo spazio vettoriale V è finitamente generato, e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ è una base, allora

1. $\dim_{\mathbb{K}} T^r(V) = n^r$,

2. $T(V) \simeq \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}$.

In 2, $\mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}$ è l'anello dei polinomi non commutativi a coefficienti in $\mathbb{K}$, l'isomorfismo è dato da $\varphi : T(V) \to \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}$ che manda $v_i \mapsto x_i$.

9.2 Algebra simmetrica

Sia S_n il gruppo di permutazioni di n oggetti. Siano V, U due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Una funzione multilineare $f : V^n \to U$ si dice **simmetrica** se

$$f(v_1, \dots, v_n) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \quad \forall \sigma \in S_n.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$B_n = \left\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \; - \; v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} : v_i \in V, \sigma \in S_n \right\rangle \subseteq T^n(V)$$
$$B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq T(V)$$

(si noti che $B_0 = B_1 = (0)$). Adesso B è un ideale omogeneo bilatero di $T(V)$. Chiamiamo **algebra simmetrica** il quoziente

$$S(V) = \frac{T(V)}{B} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{T^n(V)}{B_n} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n(V).$$

La mappa $\varphi : V^n \to S^n(V)$ definita da $(v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n$ (dove $\cdot$ è il prodotto di $S(V)$), oppure definita attraverso la composizione $V^n \to T^n(V) \to T^n(V)/B_n = S^n(V)$; è universale per le funzioni multilineari simmetriche, cioè per ogni $f : V^n \to U$ multilineare simmetrica, esiste un'unica mappa lineare $\tilde{f} : S^n(V) \to U$ tale che $f = \tilde{f} \circ \varphi$. Come prima, per ogni funzione lineare $f : V \to A$, con A $\mathbb{K}$-algebra associativa, commutativa con unità, esiste un unico omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre $f' : S(V) \to A$ che estende f.

Analogamente a prima, se U e V sono due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, per ogni funzione lineare $f : U \to V$ esiste un unico omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre graduate $S(f) : S(U) \to S(V)$ che estende f. Pertanto S può essere visto come funtore tra categorie.

Se V è finitamente generato, e $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ è una base per V allora

1. $\dim_{\mathbb{K}} S^n(V) = \binom{n+r-1}{r}$,

2. $S(V) \simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

In 2, l'isomorfismo è dato da $\varphi : S(V) \to \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ che manda $v_i \mapsto x_i$.

9.3 Algebra esterna

Siano V, U due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Una funzione multilineare $f : V^n \to U$ si dice **antisimmetrica** se

$$f(v_1, \dots, v_n) = (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \quad \forall \sigma \in S_n.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$A_n = \Big\langle v \otimes \cdots \otimes v : v \in V \Big\rangle \subseteq T^n(V)$$
$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq T(V)$$

(si noti che $A_0 = (0)$). Adesso A è un ideale omogeneo bilatero di $T(V)$. Chiamiamo **algebra esterna** il quoziente

$$\Lambda(V) = \frac{T(V)}{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{T^n(V)}{A_n} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n(V).$$

Indichiamo il prodotto in $\Lambda(V)$ con $\wedge$. Osserviamo che dalla definizione, per ogni $x.y \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= (x + y) \wedge (x + y) = \\ &= x \wedge x + x \wedge y + y \wedge x + y \wedge y = \\ &= x \wedge y + y \wedge x \\ &\qquad \Longrightarrow x \wedge y = -y \wedge x. \end{aligned}$$

Come prima, abbiamo proprietà universali analoghe. In particolare, e U e V sono due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, per ogni funzione lineare $f : U \to V$ esiste un unico omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre graduate $\Lambda(f) : \Lambda(U) \to \Lambda(V)$ che estende f. Pertanto Λ può essere visto come funtore tra categorie. Nello specifico, se $n \in \mathbb{N}$ e $f : U \to V$ è lineare, allora

$$\Lambda^n(f) : \Lambda^n(U) \to \Lambda^n(V), \quad \Lambda^n(f)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n) = f(u_1) \wedge \ldots \wedge f(u_n).$$

Osserviamo che se $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, e $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ è una base per V, allora $\Lambda^r(V) = 0$ per ogni $r > n$; più in generale $\dim_K \Lambda^r(V) = \binom{n}{r}$. Inoltre se abbiamo $w_1, \dots, w_n \in V$ tali che

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

allora risulta

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_n = \det(A)\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n.$$

Come applicazione, dimostriamo la formula di Binet per il determinante di matrici. Per ogni $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, indichiamo con $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ la funzione lineare che manda $\underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}$. Adesso abbiamo

$$\begin{aligned} \Lambda^n(f_A) : \Lambda^n\mathbb{K}^n \to \Lambda^n\mathbb{K}^n, \quad \Lambda^n(f_A)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= Ae_1 \wedge \cdots \wedge Ae_n = \\ &= \det(A)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Da cui, fissate due matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n.n}$ e per semplicità indicano con $\underline{e} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, otteniamo

$$\det(A \cdot B)\, \underline{e} = \Lambda^n(f_{A \cdot B})(\underline{e}) = \Lambda^n(f_A \circ f_B)(\underline{e}) = \Big(\Lambda^n(f_A) \circ \Lambda^n(f_B)\Big)(\underline{e}) =$$
$$= \Lambda^n(f_A)\Big(\Lambda^n(f_B)(\underline{e})\Big) = \Lambda^n(f_A)(\det(B)\underline{e}) = \det(A)\det(B)\underline{e}.$$

pertanto $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.

Più in generale, se $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ è una base di V, allora una base di $\Lambda^r(V)$, con $r \in \mathbb{N}$, è data da $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq n\} \subseteq \Lambda^r(V)$. Analogamente consideriamo la stessa base in $\Lambda^r(U)$, con U spazio vettoriale. Abbiamo che se $f : U \to V$ è lineare, le entrate della matrice $[\Lambda^r(f)] \in \mathbb{K}^{\binom{n}{r},\binom{n}{r}}$ calcolata rispetto a queste basi sono i minori di ordine r della matrice di f, calcolata nelle corrispondenti basi. In base a questa osservazione diamo la seguente definizione

Definizione 9.3.1. Sia $f : U \to V$ una funzione lineare. Definiamo il **rango** di f come

$$\mathrm{rk}(f) = \max_{r \in \mathbb{N}} \left\{\Lambda^r(f) \neq \underline{0}_{\mathrm{Hom}(\Lambda^r U, \Lambda^r V)}\right\}.$$

Osserviamo che si ha $\mathrm{rk}(f) = \dim \mathrm{Im}\, f \geq 0$ ($\Lambda^0(f)$ è l'identità su $\mathbb{K}$). Infine, per quanto osservato finora, l'algebra esterna permette di generalizzare risultati come il Teorema di Laplace.

9.4 Grassmanniana

In questa sezione, V sarà uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. Osserviamo che, se $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base per V, la **base standard** di $\Lambda^k(V)$ rispetto ad $\mathcal{A}$ è data da

$$\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots i_k \leq n\} \subseteq \Lambda^k(V).$$

Indichiamo con $I_{k,n} = \{\underline{i} = (i_1, \ldots, i_k) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$. Per ogni $\underline{i} \in I_{k,n}$ poniamo $v_{\underline{i}} = v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$. In questo modo, la base standard è $\{v_{\underline{i}} : \underline{i} \in I_{k,n}\}$.

Definizione 9.4.1. Un vettore $v \in V$ **divide** $w \in \Lambda^k(V)$ se esiste $\varphi \in \Lambda^{k-1}(V)$ tale che $w = v \wedge \varphi$.

Lemma 9.4.2. *Siano $v \in V$ e $w \in \Lambda^k(V)$. Allora*

$$v \text{ divide } w \iff v \wedge w = 0.$$

Dimostrazione. La necessità è ovvia. Proviamo la sufficienza. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base per V tale che $v_1 = v$. Scriviamo $w = \sum_{\underline{i} \in I_{k,n}} a_{\underline{i}} v_{\underline{i}}$. Per ipotesi

$$0 = v \wedge w = v \wedge \left(\sum_{\underline{i} \in I_{k,n}} a_{\underline{i}} v_{\underline{i}}\right) = \sum_{\underline{i} \in I_{k,n}} a_{\underline{i}} (v \wedge v_{\underline{i}}).$$

Dato che i vettori $v \wedge v_{\underline{i}}$, al variare di $\underline{i} \in I_{k,n}$ in cui $i_1 > 1$, sono linearmente indipendenti, otteniamo $a_{\underline{i}} = 0$ per tutti gli indici $\underline{i}$ siffatti. Ciò prova che v divide w. $\square$

Per ogni $w \in \Lambda^k(V)$ definiamo l'applicazione

$$T_w : V \to \Lambda^{k+1}(V), \quad T_w(v) = v \wedge w.$$

Dal lemma precedente, abbiamo lo spazio vettoriale $\ker T_w = \{v \in V : v \wedge w = \underline{0}\}$ conincide con l'insieme di tutti i vettori $v \in V$ che dividono w.

Definizione 9.4.3. Diciamo che un elemento $w \in \Lambda^k(V)$ è **decomponibile** se esistono $w_1, \ldots, w_k \in V$ tali che $w = w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$.

Proposizione 9.4.4. *Per un elemento $w \in \Lambda^k(V)$ non nullo i seguenti fatti sono equivalenti*

1. *w è decomponibile.*

2. $\dim \ker T_w = k$.

3. $\mathrm{rk}(T_w) = \dim \mathrm{Im}\, T_w = n - k$.

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supponiamo $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \neq \underline{0}$. Estendiamo l'insieme libero $\{v_1, \ldots, v_k\}$ a una base $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ di V. Adesso sia $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in \ker T_w$, abbiamo

$$\underline{0} = v \wedge w = \left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{i=k+1}^n a_i\, v_i \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k,$$

da cui, dato che i vettori $v_i \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ con $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ sono l.i., segue $a_i = 0$ per ogni $i \in \{k+1, \ldots, n\}$. Ciò prova che $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è un insieme di generatori di $\ker T_w$, cioè una base, quindi $\dim \ker T_w = k$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base per $\ker T_w$. Estendiamo essa a una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. Scriviamo $w = \sum_{\underline{i} \in I_{k,n}} a_{\underline{i}} v_{\underline{i}}$. Adesso per ogni $j \in \{1, \ldots, k\}$ abbiamo

$$\underline{0} = v_j \wedge w = v_j \wedge \left(\sum_{\underline{i} \in I_{k,n}} a_{\underline{i}} v_{\underline{i}}\right) = \sum_{\underline{i} \in I_{k,n}} a_{\underline{i}} (v_j \wedge v_{\underline{i}}),$$

da cui, dato che i vettori $v_j \wedge v_{\underline{i}}$ al variare di $\underline{i} \in I_{k,n}$ in modo tale che j non appaia in $\underline{i}$, sono linearmente indipendenti, abbiamo che $a_{\underline{i}} = 0$ per tutti gli indici $\underline{i}$ siffatti. Ripetendo il ragionamento fatto per ogni $j \in \{1, \ldots, k\}$, otteniamo, posto $\underline{i}_k = (1, \ldots, k) \in I_{k,n}$, $w = a_{\underline{i}_k} v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$, quindi w è decomponibile.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Basta osservare che $\dim \ker T_w + \dim \mathrm{Im}\, T_w = \dim V = n$. $\square$

Corollario 9.4.5. *Un elemento $w \in \Lambda^k(V)$ non nullo è decomponibile se e solo se* $\mathrm{rk}(T_w) \leq n - k$.

Dimostrazione. Abbiamo provato che $w \in \Lambda^k(V)$, $w \neq \underline{0}$, è decomponibile se e solo se $\mathrm{rk}(T_w) = n - k$. Ci basta provare che in generale se $w \in \Lambda^k(V)$, $w \neq \underline{0}$, allora $\mathrm{rk}(T_w) \geq n - k$. Sia $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base di $\ker T_w$ e estendiamo essa a una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. Scriviamo

$$w = \sum_{\underline{i} \in I_{k,n}} a_{\underline{i}} v_{\underline{i}} \neq \underline{0},$$

quindi esiste $\underline{i} \in I_{k,n}$ tale che $a_{\underline{i}} \neq 0$. Per ogni indice j che non appare in $\underline{i}$ abbiamo $w \wedge v_j \neq \underline{0}$, quindi $v_j \notin \ker T_w$, da cui $\dim \ker T_w = r \leq k$, cioè $\mathrm{rk}(T_w) = \dim \mathrm{Im}\, T_w \geq n - k$. □

Definizione 9.4.6. Indichiamo con

$$G(k, V) = G(k, n) = \{U \subseteq V : U \text{ sottospazio vettoriale di } V, \dim_{\mathbb{K}} U = k\}$$

la **Grassmanniana** affine di V, mentre denotiamo con

$$\mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}(V)) = \mathbb{G}(k-1, n-1) = \{\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V) : U \in G(k, V)\}$$

la **Grassmanniana** proiettiva di V.

Ad esempio, $\mathbb{G}(1,3) = \mathcal{K}$ è la **quadrica di Klein**.

Per ogni $U \in G(k, V)$ fissiamo una base $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq U$, e definiamo l'applicazione

$$\phi : G(k, V) \to \mathbb{P}(\Lambda^k(V)), \quad \phi(U) = [u_1 \wedge \cdots \wedge u_k] \in \mathbb{P}(\Lambda^k(V)).$$

Se $\{u_1, \ldots, u_k\}, \{u'_1, \ldots, u'_k\}$ sono due basi diverse di $U \in G(k, V)$, per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$ scriviamo $u'_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} u_j$, poniamo $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{k,k}$, risulta

$$u'_1 \wedge \cdots \wedge u'_k = \det(A)\, u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \Rightarrow [u'_1 \wedge \cdots \wedge u'_k] = [u_1 \wedge \cdots \wedge u_k].$$

Ciò prova che ϕ è ben definita. Poniamo

$$X = \{[w] \in \mathbb{P}(\Lambda^k(V)) : w \neq \underline{0} \text{ decomponibile}\}.$$

Proposizione 9.4.7. *L'applicazione ϕ è iniettiva, inoltre $\phi(G(k, V)) = X$.*

Dimostrazione. Per definizione $\phi(G(k, V)) \subseteq X$. Se $[w] \in X$, allora esistono $u_1, \ldots, u_k$ tali che $\underline{0} \neq w = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$, da cui i vettori $u_1, \ldots, u_k$ sono l.i., pertanto $[w] = \phi(\mathcal{L}(u_1, \ldots, u_k))$. Ciò prova $X = \phi(G(k, V))$. Per l'iniettività, definiamo $\psi : X \to G(k, V)$ con $\psi([w]) = \ker T_w$. Dalla Proposizione 9.4.4 abbiamo che $\dim \ker T_w = k$, quindi è facile vedere che ψ è ben definita. Proviamo che $\psi \circ \phi = 1_{G(k,V)}$. Sia $U \in G(k, V)$ e sia $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base di U. Allora, analogamente a quanto fatto nella Proposizone 9.4.4 in (1) $\Rightarrow$ (2), abbiamo

$$\psi(\phi(U)) = \psi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_k) = U.$$

Ciò prova che ϕ è iniettiva. □

La funzione ϕ definita sopra è detta **immersione di Plücker**. Le coordinate omogenee $[w]$ rispetto alla base standard di $\Lambda^k(V)$ dei punti di $G(k,V)$ visti in $\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$ sono dette **coordinate Plückeriane**.

Proposizione 9.4.8. *La Grassmanniana $G(k,V)$, con l'identificazione data dall'immersione di Plücker, è un insieme algebrico proiettivo di $\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$.*

Dimostrazione. Dal Corollario 9.4.5 abbiamo che $w \in X \Leftrightarrow \mathrm{rk}(T_w) \leq n-k$. Fissata una base $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e considerando la base standard di $\Lambda^{k+1}(V)$ rispetto ad $\mathcal{A}$, la condizione $rk(T_w) \leq n-k$ equivale a imporre che la matrice $\binom{n}{k+1} \times n$ associata a T_w rispetto alle basi considerate ha rango minore o uguale di $n-k$. Tale condizione è espressa da polinomi omogenei nelle coordinate di w. In altri termini, $\phi(G(k,V))$ è un chiuso di $\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$. $\square$

Ricordando che $\mathrm{GL}(V)$ è il gruppo degli endomorfismi invertibili di V, possiamo definire un'azione di gruppo

$$* : \mathrm{GL}(V) \times G(k,V) \to G(k,V), \quad f * U = f(U) \in G(k,V).$$

Osserviamo che $\mathrm{GL}(V)$ agisce *transitivamente* su $G(k,V)$, cioè per ogni $U, U' \in G(k,V)$ esiste $f \in \mathrm{GL}(V)$ tale che $U' = f * U$. Basta considerare l'endomorfismo che manda una base di U in una base di U' e lascia i restanti vettori di una base estesa di V fissi. È possibile mostrare che per ogni elemento $f \in \mathrm{GL}(V)$, l'azione $f*$ induce un omeomorfismo da $G(k,V)$ in se stessa compatibile con la sua struttura algebrica. Da ciò segue che $G(k,V)$ è uno spazio topologico *omogeneo*, ossia per ogni $U, U' \in G(k,V)$ esiste un omeomorfismo $f : G(k,V) \to G(k,V)$ tale che $f(U) = U'$. In base a questa osservazione, i punti di $G(k,V)$ hanno tutti le stesse proprietà. Dato che esiste un punto non singolare, allora tutti i punti sono non singolari, cioè la Grassmanniana è liscia. Inoltre è possibile mostrare che la Grassmanniana è irriducibile.

È possibile dimostrare che la Grassmanniana è definita da equazioni di secondo grado (da quadriche), dette **relazioni di Plücker**.

Capitolo 10

Il polinomio di Hilbert e il teorema di Bézout

10.1 Intersezione di varietà

Proposizione 10.1.1. *Siano $Y, Z \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ due varietà affini. Per ogni componente irriducibile W di $Y \cap Z$ si ha $\dim W \geq \dim Y + \dim Z - n$.*

Dimostrazione. Se $Y \cap Z = \emptyset$ non c'è nulla da provare. Assumiamo $Y \cap Z \neq \emptyset$. Dividiamo la dimostrazione in 2 casi.

Caso 1 Assumiamo che $Z = V(f_1, \dots, f_r)$ sia una completa intersezione. Dato che

$$Y \cap Z \neq \emptyset \Rightarrow \mathscr{I}(Z) + \mathscr{I}(Y) \subseteq \mathscr{I}(Z \cap Y) \subsetneq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n],$$

l'ideale $\mathscr{I}(Y) + \mathscr{I}(Z)$ è proprio. Dal Teorema dell'ideale principale di Krull 2.4.8, ogni primo minimale $P/\mathscr{I}(Y)$ di $\mathscr{I}(Z)/\mathscr{I}(Y) = (\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_r)$ ha altezza

$$\mathrm{ht}_{A(Y)}(P/\mathscr{I}(Y)) \leq r = \mathrm{ht}(\mathscr{I}(Z)).$$

Adesso

$$\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}_{A(Y)}(P/\mathscr{I}(Y)) + \mathrm{ht}(\mathscr{I}(Y)) \leq \mathrm{ht}(\mathscr{I}(Y)) + \mathrm{ht}(\mathscr{I}(Z)).$$

Adesso osserviamo che i primi minimali di $\mathscr{I}(Z)/\mathscr{I}(Y)$ sono in corrispondenza con i primi minimali di $\mathscr{I}(Y) + \mathscr{I}(Z)$, che coincidono con i primi minimali del suo radicale

$$\sqrt{\mathscr{I}(Y) + \mathscr{I}(Z)} = \mathscr{I}\Big(V(\mathscr{I}(Y) + \mathscr{I}(Z))\Big) = \mathscr{I}\Big(V(\mathscr{I}(Y)) \cap V(\mathscr{I}(Z))\Big) = \mathscr{I}(Y \cap Z).$$

Pertanto, l'altezza dei primi minimali dell'ideale $\mathscr{I}(Y \cap Z)$ è minore o uguale di $\mathrm{ht}(\mathscr{I}(Y)) + \mathrm{ht}(\mathscr{I}(Z))$. Ciò vuol dire, in base al Teorema 2.4.10, che la dimensione delle componenti irriducibili di $Y \cap Z$ è maggiore o uguale a $\dim Y + \dim Z - n$.

Caso 2 Assumiamo che Z sia una varietà affine qualsiasi. Osserviamo che $Y \cap Z \simeq (Y \times_{\mathbb{K}} Z) \cap \Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}}$ tramite $x \mapsto (x, x)$. Inoltre $\Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}} = V(x_i - y_i : i \in \{1, \dots, n\})$ e $\dim \Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}} = n$ in quanto $\Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}} \simeq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tramite $x \mapsto (x, x)$. Pertanto $\Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}}$ è una varietà a intersezione completa. Per il caso 1 applicato a $Y \times_{\mathbb{K}} Z$ e $\Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}}$, abbiamo che ogni componente irriducibile di $Y \cap Z \simeq (Y \times_{\mathbb{K}} Z) \cap \Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}}$ ha dimensione maggiore o uguale di

$$\dim Y \times_{\mathbb{K}} Z + \dim \Delta_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}} - 2n = \dim Y + \dim Z - n. \qquad \square$$

Proposizione 10.1.2. *Siano $Y, Z \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ due varietà proiettive.*

1. *Per ogni componente irriducibile W di $Y \cap Z$ si ha $\dim W \geq \dim Y + \dim Z - n$.*

2. *Se $\dim Y + \dim Z - n \geq 0$ allora $Y \cap Z \neq \emptyset$.*

Dimostrazione.

1. Possiamo ridurci al caso affine. Consideriamo il ricoprimento $\{U_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus V(x_i)\}$ di aperti affini di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Poniamo $Y_i = Y \cap U_i$, $Z_i = Z \cap U_i$. Adesso, sia W una componente irriducibile di $Y \cap Z$. Dato che $\{U_i\}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, esiste un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $W_i = W \cap U_i \neq \emptyset$. Per la Proposizione 2.2.6, W_i è una componente irriducibile di $Y_i \cap Z_i$, in quanto $Y_i \cap Z_i = (Y \cap Z) \cap U_i$ è un aperto di $Y \cap Z$. Dalla proposizione precedente ($U_i \simeq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$), e dalla Proposizione 7.1.1 risulta

$$\dim W = \dim W_i \geq \dim Y_i + \dim Z_i - n = \dim Y + \dim Z - n.$$

2. Consideriamo la proizione naturale $\pi : \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}} \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Osserviamo che $\underline{0} \in \mathscr{C}(Y) \cap \mathscr{C}(Z) \neq \emptyset$. Per la proposizione precedente, se W è una componente irriducibile di $\mathscr{C}(Y) \cap \mathscr{C}(Z)$, allora

$$\dim W \geq \dim \mathscr{C}(Y) + \dim \mathscr{C}(Z) - (n+1) = \dim Y + \dim Z - n + 1 \geq 1.$$

Pertanto esiste $\underline{0} \neq P \in \mathscr{C}(Y) \cap \mathscr{C}(Z)$, e si ha $\pi(P) \in Y \cap Z \neq \emptyset$. $\square$

10.2 Polinomi numerici

Definizione 10.2.1. Un polinomio $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ si dice **polinomio numerico** se

$$p(n) \in \mathbb{Z} \quad \text{per } n \gg 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Esempio 10.2.2. *I polinomi*

$$p(t) = \binom{t}{r} = \frac{t(t-1)\dots(t-r+1)}{r!} \in \mathbb{Q}[t] \quad r \in \mathbb{N},$$
$$p(t) = \sum_{i=0}^{r} c_i \binom{t}{r-i} \quad c_i \in \mathbb{Z},$$

sono entrambi polinomi numerici.

Definizione 10.2.3. Sia $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio. La **differenza prima** è il polinomio $\Delta p(t) = p(t+1) - p(t)$.

Osserviamo che se $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ è un polinomio numerico, lo è anche la sua differenza prima.

Proposizione 10.2.4. *Sia $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio numerico di grado d. Esistono unici $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{Z}$ tali che $p(t) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{t}{d-i}$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su d. Se $d = 0$, p è costante $p(t) = c_0$ e $c_0 \in \mathbb{Z}$ dato che p è un polinomio numerico. Adesso supponiamo la tesi vera per ogni polinomio di grado minore o uguale di $d-1$. I polinomi $\{\binom{t}{r} : 0 \leq r \leq d\}$ hanno tutti grado diverso, quindi formano una base per il $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale

$$\mathcal{L}(1, t, \ldots, t^d) = \{f \in \mathbb{Q}[t] : \deg f \leq d\}.$$

Pertanto, esistono unici $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{Q}$ tali che

$$p(t) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{t}{d-i}.$$

Adesso dall'identità

$$\binom{t+1}{i} - \binom{t}{i} = \binom{t}{i-1},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta p(t) &= \sum_{i=0}^{d} c_i \left[\binom{t+1}{d-i} - \binom{t}{d-i} \right] = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{t}{d-(i+1)} = \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} c_i \binom{t}{d-(i+1)} = \sum_{i=1}^{d} c_{i-1} \binom{t}{d-i}. \end{aligned}$$

Inoltre la differenza prima $\Delta p(t)$ è un polinomio numerico di grado $d-1$, pertanto dall'ipotesi induttiva abbiamo $c_0, c_1, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{Z}$. Infine

$$c_d = p(t) - \sum_{i=0}^{d-1} c_i \binom{t}{d-i},$$

il secondo membro è un polinomio numerico in quanto differenza di due polinomi numerici, quindi $c_d \in \mathbb{Z}$. □

Osservazione 10.2.5. Dalla proposizione precedente abbiamo che il coefficiente del termine di grado massimo $\alpha \in \mathbb{Q}$ di un polinomio numerico $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ di grado d può essere scritto come $\alpha = c_0/d!$ con $c_0 \in \mathbb{Z}$. Pertanto il prodotto $\alpha \cdot d! = c_0 \in \mathbb{Z}$ è un intero.

Proposizione 10.2.6. *Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una funzione e $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio numerico tali che $q(n) = \Delta f(n)$ per $n \gg 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Allora esiste un polinomio numerico $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tale che $f(n) = p(n)$ per ogni $n \gg 0$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente esistono unici $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{Z}$ tali che

$$q(t) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{t}{d-i}.$$

Consideriamo il polinomio numerico

$$p(t) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{t}{d-i+1},$$

risulta

$$\Delta p(t) = \sum_{i=0}^{d} c_i \left[\binom{t+1}{d-i+1} - \binom{t}{d-i+1} \right] = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{t}{d-i} = q(t).$$

Pertanto per $n \in \mathbb{Z}$, $n \gg 0$ si ha

$$\Delta\Big(f(n) - p(n)\Big) = \Delta f(n) - \Delta p(n) = q(n) - q(n) = 0,$$

quindi $f(n) - p(n) = k$ per ogni $n \gg 0$ e qualche $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto il polinomio numerico $p(t) + k$ soddisfa la tesi. □

10.3 Primi associati di un modulo

In questa sezione, A sarà un anello commutativo unitario.

Definizione 10.3.1. Lo **spettro** di A è l'insieme

$$\mathrm{Spec}(A) = \{P \subseteq A : P \text{ ideale primo}\}.$$

Per ogni ideale $I \subseteq A$, la **varietà spettrale** associata ad I è

$$V(I) = \{P \in \mathrm{Spec}(A) : P \supseteq I\}.$$

È possibile dimostrare alcune proprietà analoghe alla Proposizione 2.1.4 per la varietà spettrale.

Definizione 10.3.2. Sia M un A-modulo, si definisce **annullatore** di M l'ideale

$$\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A : am = 0 \text{ per ogni } m \in M\} = (0 : M) \subseteq A.$$

Si definisce **supporto** di M come l'insieme

$$\mathrm{Supp}(M) = \{P \in \mathrm{Spec}(A) : M_P \neq 0\} \subseteq \mathrm{Spec}(A).$$

Dalla definizione è facile verificare che, se M ed N sono due A-moduli tali che $N \subseteq M$, allora $\mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathrm{Ann}(N)$.

Proposizione 10.3.3. *Sia M un A-modulo e siano $P_1, \dots, P_t$ i primi minimali di* $\mathrm{Ann}(M)$, *allora*

1. $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}(M))$.
2. $V(\mathrm{Ann}(M)) = V(P_1) \cap \dots \cap V(P_t)$.

Dimostrazione.

1. Sia $P \in \operatorname{Spec}(A)$. Risulta

$$\begin{aligned} M_P = 0 &\iff m/1 = 0/1 \quad \forall m \in M \\ &\iff \exists s \in A \setminus P : sm = 0 \quad \forall m \in M \\ &\iff \exists s \in (A \setminus P) \cap \operatorname{Ann}(M) \\ &\iff (A \setminus P) \cap \operatorname{Ann}(M) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

   Da cui $P \in \operatorname{Supp}(M)$ se e solo se $M_P \neq 0 \iff (A \setminus P) \cap \operatorname{Ann}(M) = \emptyset$, equivalentemente $\operatorname{Ann}(M) \subseteq P$, cioè $P \in V(\operatorname{Ann}(M))$.

2. Del tutto analogo al Corollario 2.3.9 (dimostrazione algebrica). □

Definizione 10.3.4. Sia M un A-modulo. Per ogni $x \in M$ poniamo

$$\operatorname{Ann}(x) = \{a \in A : ax = 0\} = (0 : x).$$

I **primi associati** ad M sono gli elementi dell'insieme

$$\operatorname{Ass}(M) = \{P \in \operatorname{Spec}(A) : \exists x \in M \setminus \underline{0} : P = \operatorname{Ann}(x)\}.$$

I **divisori dello zero** di M sono gli elementi dell'insieme

$$Z(M) = \{a \in A : \exists x \in M \setminus \underline{0} : ax = 0\}$$

Proposizione 10.3.5. *Sia M un A-modulo.*

1. *Gli elementi massimali di $\mathcal{I} = \{\operatorname{Ann}(x) : x \in M \setminus \underline{0}\}$ sono primi associati ad M. In particolare, se $M \neq \underline{0}$ e A è Noetheriano allora $\operatorname{Ass}(M) \neq \emptyset$.*

2. *$Z(M) = \bigcup_{P \in \operatorname{Ass}(M)} P$.*

Dimostrazione.

1. Sia $x \in M \setminus \underline{0}$ tale che $\operatorname{Ann}(x)$ sia massimale in $\mathcal{I}$. Siano $a, b \in A$, supponiamo $ab \in \operatorname{Ann}(x)$, $b \notin \operatorname{Ann}(x)$. Per ipotesi $bx \neq \underline{0}$, quindi $\operatorname{Ann}(x) \subseteq \operatorname{Ann}(bx)$. Dalla massimalità di $\operatorname{Ann}(x)$ otteniamo $\operatorname{Ann}(x) = \operatorname{Ann}(bx)$. Adesso

$$\underline{0} = (ab)x = a(bx) \Rightarrow a \in \operatorname{Ann}(bx) = \operatorname{Ann}(x).$$

2. Dal punto precedente abbiamo

$$Z(M) = \bigcup_{\operatorname{Ann}(x) \in \mathcal{I}} \operatorname{Ann}(x) = \bigcup_{P \in \operatorname{Ass}(M)} P. \qquad \square$$

Ricordiamo che per ogni A-modulo M principale, cioè $M = Ax$ per qualche $x \in M$, abbiamo l'isomorfismo $A/\operatorname{Ann}(x) \simeq Ax$ dato da $a + \operatorname{Ann}(x) \mapsto ax$.

Osserviamo che se P è un ideale primo di A, dato che A/P è un dominio, per ogni $x \in A/P$, $\operatorname{Ann}(x) = P$, in particolare $\operatorname{Ass}(A/P) = \{P\}$ (vedendo A/P come A-modulo).

Lemma 10.3.6. *Sia $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sequenza esatta corta di A-moduli.*

1. $\mathrm{Ass}(M') \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$.

2. *Se la sequenza esatta corta è spezzata,* $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$.

Dimostrazione. Per semplicità, vediamo M' come sottomodulo di M.

1. È chiaro dalla definizione che $\mathrm{Ass}(M') \subseteq \mathrm{Ass}(M)$. Sia $P \in \mathrm{Ass}(M) \setminus \mathrm{Ass}(M')$, allora esiste $x \in M \setminus \underline{0}$ tale che $P = \mathrm{Ann}(x)$, quindi $Ax \simeq A/\mathrm{Ann}(x) = A/P$. Per assurdo sia $y \in Ax \cap M' \setminus \{\underline{0}\}$. Dato che $y \in Ax \simeq A/P$, abbiamo $\mathrm{Ann}(y) = P \in \mathrm{Ass}(M')$, assurdo. Pertanto $Ax \cap M' = \{\underline{0}\}$, quindi Ax è isomorfo alla propria immagine su M'', da cui $P \in \mathrm{Ass}(M'')$.

2. Segue dal punto precedente, osservando che $\mathrm{Ass}(M'') \subseteq \mathrm{Ass}(M)$. □

Proposizione 10.3.7. *Se A è Noetheriano e M è un A-modulo finitamente generato, allora esiste una filtrazione di A-moduli*

$$\{\underline{0}\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

con $M_{i+1}/M_i \simeq A/P_i$ per qualche ideale primo P_i.

Dimostrazione. Poniamo $M_0 = \{\underline{0}\}$, e costruiamo la filtrazione procedendo iterativamente. Costruiamo M_{i+1} a partire da M_i. Se $M/M_i = \{\underline{0}\}$, allora $M_{i+1} = M$. Altrimenti se $M/M_i \neq \{\underline{0}\}$, allora dalla Proposizione 10.3.5 M/M_i ha almeno un primo associato P_i, quindi un sottomodulo principale $A/P_i \simeq \overline{M_{i+1}} \subseteq M/M_i$. Poniamo M_{i+1} la controimmagine di $\overline{M_{i+1}}$ della proiezione naturale $M \to M/M_i$, ottenendo

$$\{\underline{0}\} = M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_i \subsetneq M_{i+1} \subseteq M.$$

Iterando questo processo, dato che A è Noetheriano e M è finitamente generato, quindi Noetheriano, dopo un numero finito di passi il sottomodulo ottenuto deve coincidere con M, da cui la tesi. □

Lemma 10.3.8. *Se A è Noetheriano, M è un A-modulo e $S \subseteq A$ è un insieme moltiplicativo, allora vedendo* $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ *come sottoinsieme di* $\mathrm{Spec}(A)$*, risulta*

$$\mathrm{Ass}(S^{-1}M) = \mathrm{Ass}(M) \cap \mathrm{Spec}(S^{-1}A).$$

Dimostrazione. Omessa [Matsumura, Commutative ring theory, Theorem 6.2, pag 38]. □

Teorema 10.3.9. *Se A è un anello Noetheriano e M un A-modulo finitamente generato allora*

1. $\mathrm{Ass}(M)$ *è finito.*

2. $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$.

3. *Gli elementi minimali di* $\mathrm{Supp}(M)$ *coincidono con quelli di* $\mathrm{Ass}(M)$.

Dimostrazione.

1. Dalla Proposizione 10.3.7 esiste una filtrazione
$$\{\underline{0}\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$
con $M_{i+1}/M_i \simeq A/P_i$ per qualche ideale primo P_i. Adesso considerando la sequenza esatta corta
$$0 \to M_i \to M_{i+1} \to M_{i+1}/M_i \to 0$$
dal Lemma 10.3.6 otteniamo $\mathrm{Ass}(M_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ass}(M_i) \cup \mathrm{Ass}(M_{i+1}/M_i)$. Per ipotesi $M_{i+1}/M_i \simeq A/P_i$, per quanto osservato prima $\mathrm{Ass}(A/P_i) = \{P_i\}$. Pertanto $\mathrm{Ass}(M_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ass}(M_i) \cup \{P_i\}$. Chiaramente $\mathrm{Ass}(M_0) = \mathrm{Ass}(\{\underline{0}\}) = \emptyset$, quindi applicando iterativamente la precedente formula otteniamo $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \{P_0, \dots, P_{n-1}\}$.

2. Sia $P = \mathrm{Ann}(x) \in \mathrm{Ass}(M)$, allora $\mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathrm{Ann}(x) = P$, dalla Proposizione 10.3.3 $P \in V(\mathrm{Ann}(M)) = \mathrm{Supp}(M)$.

3. Sia $P \in \mathrm{Supp}(M)$ minimale, dal punto 2 ci basta provare che $P \in \mathrm{Ass}(M)$. Dato che $M_P \neq \{\underline{0}\}$, dalla Proposizione 10.3.5, dal lemma precedente e dalla minimalità di P, abbiamo
$$\emptyset \neq \mathrm{Ass}(M_P) = \mathrm{Ass}(M) \cap \mathrm{Spec}(A_P) \subseteq \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Spec}(A_P) = \{P\}.$$
Da cui $P \in \mathrm{Ass}(M)$. □

10.4 Primi associati di un modulo graduato

In questa sezione, A sarà un anello (commutativo unitario) graduato[1] (su $\mathbb{Z}$).

Definizione 10.4.1. Siano $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ un A-modulo graduato e $t \in \mathbb{Z}$ un intero. Lo **shift** di M è l'A-modulo graduato
$$M(t) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{i+t}, \quad \text{in questo modo } M(t)_i = M_{i+t}.$$

Definizione 10.4.2. Siano M ed N due A-moduli graduati. Un **omomorfismo graduato** di A-moduli è un omomorfismo di A-moduli $f : M \to N$ tale che $f(M_i) \subseteq N_i$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$.

Osserviamo che se M è un A-modulo graduato, allora $\mathrm{Ann}(M)$ è un ideale omogeneo di A. Se $m \in M$ è un elemento omogeneo, allora $\mathrm{Ann}(m)$ è un ideale omogeneo di A. Proviamo la seconda asserzione, la prima è analoga. Sia $m \in M_d$, e sia $a \in \mathrm{Ann}(m)$, allora scriviamo a come somma delle sue componenti omogenee $a = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i$. Abbiamo
$$0 = am = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i m.$$
Dall'unicità della scrittura di am come somma delle sue componenti omogenee, otteniamo $a_i m = 0$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$, cioè $a_i \in \mathrm{Ann}(m)$. Quindi $\mathrm{Ann}(m)$ è omogeneo.

[1] Definizione 2.5.1

Lemma 10.4.3. *Sia M un A-modulo graduato e $m \in M$. Se $P = \mathrm{Ann}(m)$ è un ideale primo di A, allora P è un ideale omogeneo ed m è omogeneo.*

Dimostrazione. Omessa [Eisenbud, Commutative Algebra, Proposition 3.12, pag 99]. $\square$

Se M è un A-modulo, indichiamo con $\lambda_A(M)$ la lunghezza di M come A-modulo.

Proposizione 10.4.4. *Se A è Noetheriano e M è un A-modulo graduato finitamente generato, allora esiste una filtrazione di A-moduli graduati*

$$\{\underline{0}\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M,$$

tale che per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$ si abbia $M_i/M_{i-1} \simeq (A/P_i)\,(l_i)$ come moduli graduati, per qualche ideale primo omogeneo P_i e qualche $l_i \in \mathbb{Z}$. Inoltre

1. *Se P è un ideale primo omogeneo di A, allora*

$$P \supseteq \mathrm{Ann}(M) \iff P \supseteq P_i \text{ per qualche } i \in \{1, \ldots, r\}.$$

   In particolare i primi minimali omogenei di $V(\mathrm{Ann}(M))$ sono gli elementi minimali di $\{P_1, \ldots, P_r\}$.

2. *Ogni ideale primo omogeneo minimale P di $V(\mathrm{Ann}(M))$ appare tra i primi $\{P_1, \ldots, P_r\}$ un numero di volte pari a $\lambda_{A_P}(M_P)$, pertanto questo numero non dipende dalla filtrazione. In particolare, $\lambda_{A_P}(M_P) \le r$, quindi M_P ha lunghezza finita.*

Dimostrazione. Supponiamo che $M \neq \underline{0}$. Sia $\mathcal{I} = \{\mathrm{Ann}(m) : m \in M \setminus \{\underline{0}\}\}$. Chiaramente $\mathcal{I} \neq \emptyset$, inoltre poiché A è Noetheriano, $\mathcal{I}$ ammette elementi massimali. Analogamente al caso non graduato si prova che gli elementi massimali di $\mathcal{I}$ sono ideali primi omogenei, quindi $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$.
Poniamo $M_0 = \{\underline{0}\}$, e costruiamo la filtrazione procedendo iterativamente. Costruiamo M_{i+1} a partire da M_i. Se $M/M_i = \{\underline{0}\}$, allora $M_{i+1} = M$. Altrimenti se $M/M_i \neq \{\underline{0}\}$, per quanto visto finora, $\mathrm{Ass}(M/M_i) \neq \emptyset$, quindi esiste $P_{i+1} = \mathrm{Ann}(m_{i+1}) \in \mathrm{Ass}(M/M_i)$. Per il lemma precedente P_{i+1} è un ideale omogeneo, quindi il quoziente A/P_{i+1} è un A-modulo graduato, e $m_{i+1} \in M/M_i$ è omogeneo, poniamo $l_{i+1} = \deg m_{i+1}$. Adesso $A/P_{i+1} \simeq Am_{i+1}$ come A-moduli tramite $a + P_{i+1} \mapsto am_{i+1}$. Osserviamo che la motiplicazione per m_{i+1} fa aumentare il grado di l_{i+1}. Se vogliamo che tale isomorfismo sia graduato, cioè sia un isomorfismo di A-moduli graduati, dobbiamo effettuare uno shift di l_{i+1}, quindi $(A/P_{i+1})(l_{i+1}) \simeq Am_{i+1}$ come moduli graduati. Poniamo M_{i+1} uguale alla controimmagine di Am_{i+1} della proiezione naturale $M \to M/M_i$. Otteniamo quindi $M_i \subsetneq M_{i+1}$ e $M_{i+1}/M_i = Am_{i+1} \simeq (A/P_{i+1})(l_{i+1})$ come moduli graduati.
Poiché A è Noetheriano ed M è finitamente generato, quindi Noetheriano, dopo un numero finito di passi il sottomodulo ottenuto deve coincidere con M.

1. La dimostrazione è analoga al caso non graduato.

2. Sia $P \in V(\mathrm{Ann}(M))$ primo omogeneo minimale. Localizziamo la filtrazione in P

$$\{\underline{0}\} = (M_0)_P \subsetneq (M_1)_P \subsetneq \cdots \subsetneq (M_r)_P = M_P.$$

   Per ogni indice $i \in \{1, \ldots, r\}$ distinguiamo due casi.

(a) Se $P_i \neq P$, dalla minimalità di P abbiamo $P_i \nsubseteq P$, quindi $0 = (A/P_i)_P \simeq (M_{i+1}/M_i)_P \simeq (M_{i+1})_P/(M_i)_P$, pertanto $(M_{i+1})_P = (M_i)_P$.

(b) Se $P_i = P$, allora P è lo zero di A/P_i, quindi la localizzazione di A/P_i in P ci dà il suo campo dei quozienti. Dunque

$$Q(A/P_i) \simeq (A/P_i)_P \simeq (M_{i+1}/M_i)_P \simeq (M_{i+1})_P/(M_i)_P,$$

in particolare $(M_{i+1})_P/(M_i)_P$ è semplice (non ha sottomoduli propri).

Per quanto visto finora, la localizzazione della filtrazione diventa una serie di composizione per il modulo M_P e la sua lunghezza coincide con il numero di volte in cui $P = P_i$. $\square$

Definizione 10.4.5. Sia M un A-modulo graduato e sia P un ideale primo omogeneo minimale di $V(\mathrm{Ann}(M))$. Definiamo **molteplicità** di M lungo P come l'intero

$$\mu_P(M) = \lambda_{A_P}(M_P).$$

10.5 Il polinomio di Hilbert

In questa sezione considereremo l'anello $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ con la graduazione naturale. Osserviamo che se $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ è un $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$-modulo finitamente generato, la dimensione come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di M_i è finita, per ogni $i \in \mathbb{Z}$.

Definizione 10.5.1. Sia M un $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$-modulo graduato finitamente generato. Definiamo la **funzione di Hilbert** di M come

$$H_M : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad H_M(i) = \dim_{\mathbb{K}} M_i.$$

Come osservato in precedenza, se M è un $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$-modulo graduato, $\mathrm{Ann}(M)$ è un ideale omogeneo di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, quindi, in questo caso, esso individua un insieme algebrico proiettivo $V^{\mathbb{P}}(\mathrm{Ann}(M)) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Lemma 10.5.2 (Additività della funzione di Hilbert)**.** *Supponiamo di avere una sequenza esatta corta $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$-moduli graduati, allora*

$$H_N(i) = H_{N'}(i) + H_{N''}(i) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

In altri termini, la funzione di Hilbert è una funzione additiva.

Dimostrazione. Restringendo le funzioni alle varie componenti omogenee, otteniamo le sequenze esatte corte $0 \to N'_i \to N_i \to N''_i \to 0$ di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Dato che $N''_i \simeq N_i/N'_i$, allora $\dim_{\mathbb{K}} N''_i = \dim_{\mathbb{K}}(N_i/N'_i) = \dim_{\mathbb{K}} N_i - \dim_{\mathbb{K}} N'_i$ da cui la tesi. $\square$

Lemma 10.5.3. *Poniamo $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Sia $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ una sequenza esatta corta di A-moduli. Allora*

$$\mathrm{Ann}(N)\,\mathrm{Ann}(L) \subseteq \mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathrm{Ann}(N) \cap \mathrm{Ann}(L).$$

In particolare abbiamo

$$V^{\mathbb{P}}(\mathrm{Ann}(M)) = V^{\mathbb{P}}(\mathrm{Ann}(N)) \cup V^{\mathbb{P}}(\mathrm{Ann}(L)).$$

Dimostrazione. Sia $a \in \text{Ann}(M)$. Se $n \in N$, allora $f(an) = af(n) = 0 \Rightarrow an = 0$ quindi $\text{Ann}(M) \subseteq \text{Ann}(N)$. Sia $l = g(m) \in L$, allora $ag(m) = g(am) = 0$, quindi $a \in \text{Ann}(L)$, e ciò prova $\text{Ann}(M) \subseteq \text{Ann}(L)$. Pertanto $\text{Ann}(M) \subseteq \text{Ann}(N) \cap \text{Ann}(L)$. Adesso siano $a \in \text{Ann}(N)$ e $b \in \text{Ann}(L)$. Sia $m \in M$, dato che $g(bm) = bg(m) = 0$, allora $bm \in \ker g = \operatorname{im} f$ quindi $bm = f(n)$, da cui $abm = af(n) = f(an) = 0$, quindi $ab \in \text{Ann}(M)$. Ciò prova $\text{Ann}(N)\,\text{Ann}(L) \subseteq \text{Ann}(M)$. □

L'uguaglianza del lemma precedente può essere vista più in generale con i supporti:

$$\text{Supp}(M) = \text{Supp}(N) \cup \text{Supp}(L).$$

Infatti, se P è un ideale primo, localizzando otteniamo la sequenza esatta

$$0 \to N_P \to M_P \to L_P \to 0$$

quindi $M_P \neq 0 \iff N_P \neq 0$ oppure $L_P \neq 0$, e ciò equivale a

$$P \in \text{Supp}(M) \Leftrightarrow P \in \text{Supp}(N) \cup \text{Supp}(L).$$

Osserviamo che se N è un A-modulo graduato, per ogni $i, j \in \mathbb{Z}$ da $N(i)_j = N_{i+j}$ segue $H_{N(j)}(i) = H_N(i+j)$.

Teorema 10.5.4 (Hilbert-Serre)**.** *Sia M un $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$-modulo graduato finitamente generato. Esiste un unico polinomio numerico $p_M(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tale che*

$$p_M(n) = H_M(n) \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{Z},\ n \gg 0.$$

Inoltre $\deg p_M(t) = \dim V^{\mathbb{P}}(\text{Ann}(M))$*. Il polinomio $p_M(t)$ è detto* ***polinomio di Hilbert*** *di M.*

Dimostrazione. Poniamo $A = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. Supponiamo dapprima che il teorema valga per i moduli del tipo A/P con P ideale omogeneo e proviamo il caso generale. Poiché A è Noetheriano e M è finitamente generato, per la Proposizione 10.4.4 esiste una filtrazione di A-moduli graduati

$$\{\underline{0}\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M$$

tale che $M_i/M_{i-1} \simeq A/P_i(l_i)$ come moduli graduati, per qualche ideale primo omogeneo P_i e qualche $l_i \in \mathbb{Z}$. Adesso procediamo per induzione su $i \in \{0, \ldots, r\}$ provando che la tesi vale su M_i. Se $i = 0$, $M_0 = \{\underline{0}\}$, quindi $p_{M_0}(t) = 0$. Supponiamo la tesi vera per M_{i-1} e proviamo che è vera per M_i. Consideriamo la sequenza esatta corta di moduli graduati $0 \to M_{i-1} \to M_i \to M_i/M_{i-1} \to 0$. Dato che $M_i/M_{i-1} \simeq A/P_i(l_i)$, dal Lemma 10.5.2 e per quanto osservato prima, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\begin{aligned} H_{M_i}(n) = H_{M_{i-1}}(n) + H_{M_i/M_{i-1}}(n) &= H_{M_{i-1}}(n) + H_{A/P_i(l_i)}(n) = \\ &= H_{M_{i-1}}(n) + H_{A/P_i}(n + l_i). \end{aligned}$$

Per l'ipotesi induttiva, e l'ipotesi fatta sui moduli di tipo A/P, esistono due polinomi numerici $p(t), q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tali che $p(n) = H_{M_{i-1}}(n)$, $q(n) = H_{A/P_i}(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n \gg 0$. Dalla definizione di polinomio numerico abbiamo che anche i polinomi $q(t + l_i)$ e $p(t) + q(t + l_i)$ sono polinomi numerici. Ne segue che

$$H_{M_i}(n) = H_{M_{i-1}}(n) + H_{A/P_i}(n + l_i) = p(n) + q(n + l_i) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n \gg 0.$$

Infine, dal fatto che la funzione di Hilbert è non negativa, i coefficienti dei termini di grado massimo dei polinomi $p(t)$ e $q(t)$ sono positivi, inoltre, dal Lemma 10.5.3, risulta

$$\begin{aligned}\deg\Big(p(t)+q(t+l_i)\Big) &= \max\{\deg p(t), \deg q(t)\} = \\ &= \max\big\{\dim V^{\mathbb{P}}(\mathrm{Ann}(M_{i-1})), \dim V^{\mathbb{P}}(\mathrm{Ann}(A/P_i))\big\} = \\ &= \dim\Big(V^{\mathbb{P}}(\mathrm{Ann}(M_{i-1}))\cup V^{\mathbb{P}}(\mathrm{Ann}(A/P_i))\Big) = \dim V^{\mathbb{P}}(\mathrm{Ann}(M_i)).\end{aligned}$$

Rimane da provare che la tesi è vera per moduli di tipo A/P con P ideale omogeneo. Procediamo per induzione sulla dimensione $d = \dim V^{\mathbb{P}}(\mathrm{Ann}(A/P)) = \dim V^{\mathbb{P}}(P)$. Come caso base prendiamo $d = -1$, allora $V^{\mathbb{P}}(P) = \emptyset$, poiché P è un ideale proprio, dalla Proposizione 2.5.15 abbiamo $\sqrt{P} = (x_0, \dots, x_n)$, quindi in A/P, $\overline{x_i}^{n_i} = 0$ per qualche $n_i \in \mathbb{N}$ e per ogni $i \in \{0, \dots, n\}$, quindi definitivamente $(A/P)_i = 0$ e il polinomio cercato è quello nullo. Sia adesso $d \geq 0$, supponiamo la tesi vera per $d-1$ e proviamo che è vera per d. Poiché $d \geq 0$, $V^{\mathbb{P}}(P) \neq \emptyset$ quindi $P \not\supseteq (x_1, \dots, x_n)$, pertanto $x_i \notin P$ per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$. Consideriamo la seguente sequenza esatta corta di A-moduli graduati

$$0 \to \frac{A}{P}(-1) \xrightarrow{\cdot x_i} \frac{A}{P} \to \frac{A/P}{(A/P)x_i} \to 0.$$

Si noti che lo shift è dovuto al fatto che la moltiplicazione per x_i aumenta il grado di 1. Otteniamo

$$H_{\frac{A/P}{(A/P)x_i}}(n) = H_{A/P}(n) - H_{A/P}(n-1) = \Delta H_{A/P}(n-1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Adesso $\frac{A/P}{(A/P)x_i} \simeq A/(P+(x_i))$ (come A-moduli)[2], quindi

$$V^{\mathbb{P}}\left(\mathrm{Ann}\left(\frac{A/P}{(A/P)x_i}\right)\right) = V^{\mathbb{P}}\left(\mathrm{Ann}\left(\frac{A}{P+(x_i)}\right)\right) = V^{\mathbb{P}}(P+(x_i)) = V^{\mathbb{P}}(P) \cap V^{\mathbb{P}}(x_i).$$

Pertanto, in base al Teorema dell'ideale principale di Krull[3] abbiamo

$$\dim V^{\mathbb{P}}\left(\mathrm{Ann}\left(\frac{A/P}{(A/P)x_i}\right)\right) = \dim V^{\mathbb{P}}(P) - 1 = d-1.$$

Pertanto, per l'ipotesi induttiva esiste un polinomio numerico $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tale che

$$q(n) = H_{\frac{A/P}{(A/P)x_i}}(n) = \Delta H_{A/P}(n-1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n \gg 0.$$

Dalla Proposizione 10.2.6 esiste un polinomio numerico $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tale che $p(n) = H_{A/P}(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n \gg 0$, da cui la tesi. □

Osserviamo che se A è un anello commutativo unitario e I è un suo ideale, il quoziente A/I è un A-modulo finitamente generato, generato da $1+I$, infatti per ogni $a+I \in A/I$, $a+I = a(1+I) \in A/I = A(1+I)$.

[2] Si noti che, se P è primo, in generale $P+(x_i)$ non è primo.

[3] Dimostrazione simile al Caso 1 della Proposizione 10.1.1, adattata attraverso il ricoprimento di aperti affini.

Definizione 10.5.5. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ un insieme algebrico proiettivo e consideriamo il suo anello delle coordinate $S(X) = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]/\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$. Il **polinomio di Hilbert** di X è il polinomio $p_X(t) = p_{S(X)}(t) \in \mathbb{Q}[t]$.

Definizione 10.5.6. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva, e sia $\alpha \in \mathbb{Q}$ il coefficiente del termine di grado massimo del polinomio di Hilbert $p_X(t)$. Poniamo $d = \dim X = \deg p_X(t)$. Il **grado** della varietà X è l'intero $\deg(X) = \alpha \cdot d! \in \mathbb{Z}$ (Osservazione 10.2.5).

Dato che la funzione di Hilbert è non negativa, il coefficiente del termine di grado massimo del polinomio di Hilbert è positivo, quindi per ogni varietà proiettiva X risulta $\deg(X) \geq 0$.

Proposizione 10.5.7. *Sia $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva.*

1. *$Y \neq \emptyset$ se e solo se $\deg(Y) > 0$.*
2. *Se $Y = Y_1 \cup Y_2$ con Y_1, Y_2 varietà proiettive distinte, $\dim Y_i = r$, $\dim(Y_1 \cap Y_2) < r$; allora $\deg(Y) = \deg(Y_1) + \deg(Y_2)$.*
3. *$\deg(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) = 1$.*
4. *Se $Y = V(f)$ allora $\deg(Y) = \deg f$.*

Dimostrazione. Poniamo $A = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$.

1. $Y = \emptyset \Leftrightarrow (x_0, \ldots, x_n) \subseteq \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y) \Leftrightarrow p_Y(t) = 0 \Leftrightarrow \deg(Y) = 0$. Per l'equivalenza centrale, osserviamo che se $(x_0, \ldots, x_n) \subseteq \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y)$, allora è chiaro che il polinomio di Hilbert è nullo. Viceversa se il polinomio di Hilbert è nullo, allora per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$ e per $n_i \gg 0$ si ha $\overline{x_i}^{n_i} \in S(Y)_{n_i} = \{\underline{0}\}$, quindi $\overline{x_i}^{n_i} = \underline{0}$, cioè $x_i^{n_i} \in \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y)$. Da cui $(x_0, \ldots, x_n) \subseteq \sqrt{\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y)} = \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y)$.

2. Poniamo $I_1 = \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y_1)$, $I_2 = \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y_2)$. Consideriamo la sequenza di A-moduli graduati
$$0 \to \frac{A}{I_1 \cap I_2} \xrightarrow{\varphi} \frac{A}{I_1} \oplus \frac{A}{I_2} \xrightarrow{\psi} \frac{A}{I_1 + I_2} \to 0, \tag{10.1}$$
con $\varphi(f + I_1 \cap I_2) = (f + I_1, f + I_2)$, $\psi(f + I_1, g + I_2) = f - g + I_1 + I_2$. È facile verificare che φ e ψ sono ben definite. Tale sequenza è esatta, infatti chiaramente $\psi \circ \varphi = 0$, mentre se $(f + I_1, g + I_2) \in \ker \psi$, allora $g - f \in I_1 + I_2$, quindi esistono $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$ tali che $f - g = i_1 + i_2$, da cui
$$(f+I_1, g+I_2) = (g+i_1+i_2+I_1, g+I_2) = (g+i_2+I_1, g+i_2+I_2) = \varphi(g+i_2+I_1 \cap I_2) \in \operatorname{im} \varphi.$$
Pertanto $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$. Adesso consideriamo la sequenza esatta corta spezzata di A-moduli graduati
$$0 \to \frac{A}{I_1} \to \frac{A}{I_1} \oplus \frac{A}{I_2} \to \frac{A}{I_2} \to 0. \tag{10.2}$$
Poniamo $M = A/I_1 \oplus A/I_2$, $M' = A/(I_1 + I_2)$ e ricordiamo che $A/I_1 = S(Y_1)$, $A/I_2 = S(Y_2)$. Da $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y) = \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Y_1 \cup Y_2) = I_1 \cap I_2$ segue anche $A/(I_1 \cap I_2) = S(Y)$. Dalle sequenze 10.1 e 10.2 e dal Lemma 10.5.2 abbiamo
$$H_{S(Y_1)}(i) + H_{S(Y_2)}(i) = H_M(i) = H_{S(Y)}(i) + H_{M'}(i) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Passando ai polinomi di Hilbert, per $i \gg 0$ abbiamo

$$p_{S(Y_1)}(i) + p_{S(Y_2)}(i) = p_{S(Y)}(i) + p_{M'}(i). \tag{10.3}$$

Adesso $Y_1 \cap Y_2 = V^{\mathbb{P}}(I_1) \cap V^{\mathbb{P}}(I_2) = V^{\mathbb{P}}(I_1 + I_2)$, per ipotesi

$$\dim V^{\mathbb{P}}(I_1 + I_2) = \dim Y_1 \cap Y_2 < r,$$

quindi il polinomio $p_{M'}(t)$ ha grado minore di r, mentre i restanti polinomi della 10.3 hanno tutti grado r ($\dim Y = \dim Y_i = r$). Pertanto, dal fatto che il termine di grado massimo di $p_{S(Y)}$ è la somma dei termini di grado massimo di $p_{S(Y_1)}$ e $p_{S(Y_2)}$, segue la tesi.

3. Dato che $p_A(t) = \binom{t+n}{n}$, il coefficiente del termine di grado massimo è $1/n!$, da cui $\deg(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) = 1$.

4. Poniamo $d = \deg f$ e consideriamo la sequenza esatta corta di A-moduli graduati

$$0 \to A(-d) \xrightarrow{\cdot f} A \to \frac{A}{(f)} \to 0.$$

Dal punto 3 e dall'additività della funzione di Hilbert, abbiamo

$$H_{A/(f)}(i) = H_A(i) - H_{A(-d)}(i) = H_A(i) - H_A(i-d) \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

da cui passando ai polinomi di Hilbert

$$p_{A/(f)}(t) = \binom{t+n}{n} - \binom{t+n-d}{n}.$$

Consideriamo i polinomi

$$\binom{t+n}{n} = \frac{(t+n)\dots(t+1)}{n!}, \quad \binom{t+n-d}{n} = \frac{(t+n-d)\dots(t+1-d)}{n!}.$$

Il primo ha come radici $\{-1, -2, \dots, -n\}$ mentre il secondo $\{-1+d, \dots, -n+d\}$. Dato che essi hanno grado entrambi pari a n e hanno lo stesso termine di grado massimo, il coefficiente del termine di grado massimo di $p_{A/(f)}$ è dato dalla differenza dei coefficienti dei termini di grado $n-1$ dei due polinomi. Dalle formule di Viète essa risulta essere pari a

$$\frac{1}{n!}\frac{(n+1)n}{2} - \frac{1}{n!}\left[\frac{(n+1)n}{2} - dn\right] = \frac{nd}{n!}.$$

Pertanto, ricordando che $\dim Y = n-1$, il grado risulta

$$\deg(Y) = (n-1)!\frac{nd}{n!} = d.$$

$\square$

10.6 Il teorema di Bézout

Definizione 10.6.1. Un insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ ha **dimensione pura** m se tutte le sue componenti irriducibili hanno dimensione m.

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ un insieme algebrico e $H = V^{\mathbb{P}}(f) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ un'ipersuperficie di grado d. Sia $X \cap H = \bigcup_{i=1}^r Z_i$ la decomposizione dell'intersezione nelle sue componenti irriducibili. Poniamo $Q_i = \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(Z_i)$. Si definisce **molteplicità di intersezione** tra X e H lungo Z_i il numero

$$\mathrm{mult}_{Z_i}(X \cap H) = \mu_{Q_i}\left(\frac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X) + \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(H)}\right)$$

Osservazione 10.6.2. Con le notazioni precedenti, se X ha dimensione pura n, allora H non contiene nessuna componente irriducibile di X se e solo se $f \notin Z(S(X))$. Infatti sia $X = \bigcup_{i=1}^t X_i$ la decomposizione di X nelle sue componenti irriducibili e poniamo $P_i = \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X_i)$. Dal primo teorema di unicità della decomposizione primaria, abbiamo che i primi associati a $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$ sono della forma $\sqrt{(\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X) : x)} = (\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X) : x) = \mathrm{Ann}(\overline{x})$ ($\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$ è radicale) per qualche $x \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \setminus \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$, dove $\overline{x}$ indica la classe di x in $S(X)$. Pertanto i primi associati a $S(X)$ (come modulo) corrispondono ai primi associati ad $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$ (come ideale). Adesso $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)$ è un ideale radicale, quindi non ha primi immersi. Ciò vuol dire che gli unici primi associati sono $\{P_1, \ldots, P_t\}$, quindi

$$Z(S(X)) = \bigcup_{i=1}^t P_i.$$

Pertanto $f \notin Z(S(X))$ se e solo se $f \notin P_i \Leftrightarrow (f) \nsubseteq P_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, t\}$, cioè $H = V^{\mathbb{P}}(f) \nsupseteq V^{\mathbb{P}}(P_i) = X_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, t\}$. Inoltre, in queste ipotesi, dal teorema dell'ideale principale di Krull si vede che $\dim Z_i = n - 1$ per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Teorema 10.6.3 (Teorema di Bézout generalizzato)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ un insieme algebrico di dimensione pura m, e sia $H = V^{\mathbb{P}}(f)$ un'ipersuperficie di dimensione pura $n-1$ che non contiene nessuna componente irriducibile di X. Se $Z_1, \ldots, Z_k$ sono le componenti irriducibili di $X \cap H$ allora*

$$\sum_{i=1}^k \mathrm{mult}_{Z_i}(X \cap H) \deg(Z_i) = \deg(X)\deg(H).$$

Dimostrazione. Poniamo $A = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, $M = A/((f) + \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X))$, $d = \deg(H)$ e

$$p_X = \sum_{i=0}^m a_i t^i,$$

per definizione $a_m = \deg(X)/m!$. Consideriamo la sequenza esatta corta di A-moduli graduati

$$0 \to S(X)(-d) \xrightarrow{\cdot f} S(X) \to M \to 0.$$

Dall'additività della funzione di Hilbert, passando direttamente ai polinomi otteniamo

$$p_M(t) = p_X(t) - p_X(t-d) = \sum_{i=0}^m a_i\Big(t^i - (t-d)^i\Big).$$

Sviluppando otteniamo che il polinomio p_M ha grado $m-1$ e il suo coefficiente di grado massimo è $a_m md = \deg(X)d/(m-1)!$. Adesso, per la Proposizione 10.4.4 esiste una filtrazione di A-moduli graduati

$$\{\underline{0}\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M$$

tale che per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$ si ha $M_i/M_{i-1} \simeq (A/P_i)(l_i)$ come moduli graduati, per qualche ideale primo omogeneo P_i e qualche $l_i \in \mathbb{Z}$. Per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$ consideriamo la sequenza esatta corta di A-moduli graduati $0 \to M_{i-1} \to M_i \to M_i/M_{i-1} \to 0$, dato che $M_i/M_{i-1} \simeq (A/P_i)(l_i)$, dall'additività della funzione di Hilbert abbiamo

$$p_{M_i}(t) = p_{M_{i-1}}(t) + p_{A/P_i}(t + l_i).$$

Poiché $p_{M_0}(t) = 0$, applicando iterativamente la precedente formula otteniamo

$$p_M(t) = \sum_{i=1}^{r} p_{A/P_i}(t + l_i).$$

Pertanto il coefficiente del termine di grado massimo di $p_M(t)$ è pari alla somma dei coefficienti dei termini di grado massimo dei polinomi $p_{A/P_i}(t + l_i)$, che coincidono con quelli di $p_{A/P_i}(t)$. Adesso, gli ideali $Q_i = V^{\mathbb{P}}(Z_i)$ sono gli ideali primi minimali dell'ideale $\mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X \cap H) = \sqrt{(f) + \mathscr{I}^{\mathbb{P}}(X)}$, quindi coincidono con gli ideali primi minimali in $V(\mathrm{Ann}(M))$. Inoltre, sempre dalla Proposizione 10.4.4 sappiamo che gli ideali minimali in $V(\mathrm{Ann}(M))$ sono gli ideali minimali dell'insieme $\{P_1, \ldots, P_r\}$. Pertanto, per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$ esiste un $j \in \{1, \ldots, r\}$ tali che $Q_i \subseteq P_j$, quindi $V^{\mathbb{P}}(P_j) \subseteq V^{\mathbb{P}}(Q_i) = Z_i$ pertanto $\dim V^{\mathbb{P}}(P_j) \leq \dim Z_i = m-1$, cioè $\deg p_{A/P_j} \leq m-1$, e vale l'uguaglianza se e solo se $Q_i = P_j$, in questo caso il coefficiente del termine di grado massimo di p_{A/P_j} è $\deg(Z_i)/(m-1)!$, inoltre l'ideale $Q_i = P_j$ appare nell'insieme $\{P_1, \ldots, P_r\}$ esattamente $\mu_{Q_i}(M) = \mathrm{mult}_{Z_i}(X \cap H)$ volte. Per quanto visto finora, otteniamo che

$$\frac{\deg(X)d}{(m-1)!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{mult}_{Z_i}(X \cap H)\deg(Z_i)}{(m-1)!},$$

da cui semplificando, e ricordando che $d = \deg f = \deg(H)$, otteniamo la tesi. $\square$

Corollario 10.6.4 (Teorema di Bézout). *Siano $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ due curve piane senza componenti irriducibili in comune. Se $C_1 \cap C_2 = \{P_1, \ldots, P_n\}$, allora*

$$\deg(C_1)\deg(C_2) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mult}_{P_i}(C_1 \cap C_2)$$