Inviluppi iniettivi

Alessio Borzì

Contents

Nel seguito, R sarà un anello unitario e $\mathcal{M}_R$ l'insieme dei suoi moduli sinistri.

Proposizione-Definizione 0.1. *Sia $0 \to N \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \to 0$ una sequenza esatta corta di R-moduli sinistri. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

1. *Esiste un omomorfismo $p' : M \to L$ tale che $p \circ p' = 1_M$.*
2. *Esiste un omomorfismo $i' : L \to N$ tale che $i' \circ i = 1_N$.*
3. *$L \simeq M \oplus N$.*

Una sequenza esatta corta che soddisfa una delle precedenti condizioni si dice ***spezzata****.*

Proof. Omessa. $\square$

1 Moduli Iniettivi e Criterio di Baer

Definizione 1.1. Un R-modulo sinistro I si dice **iniettivo** se, dati due R-moduli sinistri M e N, un omomorfismo iniettivo $i : M \to N$, e un omomorfismo $f : M \to I$, esiste un omomorfismo $f' : N \to I$ tale che $f = f' \circ i$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, dashed, "f'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Nella situazione della precedente definizione, diciamo anche che l'omomorfismo $f : M \to I$ può essere "esteso" a $f' : N \to I$.

Proposizione 1.2. *Sia I un R-modulo sinistro. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

1. *I è iniettivo.*
2. *Il funtore* $\mathrm{Hom}(\bullet, M)$ *è esatto (a destra).*
3. *Ogni sequenza esatta corta del tipo* $0 \to I \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$ *è spezzata.*

Proof.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Chiaro dalle definizioni.

(1) $\Rightarrow$ (3) Per ipotesi, l'identità 1_I

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_I"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[dl, dashed, "i'"] & N \arrow[r] & 0 \\ & I & & & \end{tikzcd}$$

può essere estesa a $i' : M \to I$ in modo tale che $i' \circ i = 1_I$, cioè la sequenza esatta corta è spezzata.

(3) $\Rightarrow$ (1) Siano M e N due R-moduli sinistri e siano $i : M \to N$, $f : M \to I$ due omomorfismi con i iniettivo. Definiamo

$$K = \{(f(m), -i(m)) \in I \oplus N : m \in M\}, \quad L = \frac{I \oplus N}{K},$$
$$j_1 : I \to L \quad j_1(i) = (i, 0) + K$$
$$j2 : N \to L \quad j_2(n) = (0, n) + K.$$

È chiaro che j_1 e j_2 sono omomorfismi. Inoltre, j_1 è iniettivo in quanto se $j_1(x) = (x, 0) + K = 0 + K$, allora esiste $m \in M$ tale che $(x, 0) = (f(m), -i(m))$, ma dato che i è iniettiva, $i(m) = 0 \Rightarrow m = 0$, cioè $x = f(0) = 0$. Per ipotesi la sequenza esatta corta $0 \to I \xrightarrow{j_1} L \xrightarrow{\pi} L/I \to 0$ è spezzata, pertanto esiste $j_1' : L \to I$ tale che $j_1' \circ j_1 = 1_I$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[d, "j_2"] & & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r, shift left, "j_1"] & L \arrow[l, dashed, shift left, "j_1'"] \arrow[r, "\pi"] & L/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Adesso la composizione $f' = j_1' \circ j_2$ è tale che $f' \circ i = f$, infatti per ogni $m \in M$ si ha

$$\begin{aligned} f'(i(m)) = j_1'(j_2(i(m))) = j_1'\big((0, i(m)) + K\big) &= j_1'\big((f(m), 0) + K\big) = \\ &= j_1'(j_1(f(m))) = f(m). \end{aligned}$$

□

Proposizione 1.3. *Sia $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di R-moduli sinistri. Allora*

$$I = \prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \text{ è iniettivo} \iff I_\lambda \text{ è iniettivo per ogni } \lambda \in \Lambda.$$

Proof. Basta considerare le immersioni canoniche $i_\lambda : I_\lambda \to I$ e le proiezioni canoniche $\pi_\lambda : I \to I_\lambda$. □

Teorema 1.4 (Criterio di Baer, 1940)**.** *Un R-modulo sinistro I è iniettivo se e solo se per ogni ideale sinistro U di R, ogni omomorfismo $f : U \to I$ può essere esteso a un omomorfismo $f' : R \to I$.*

Proof. Per la parte necessaria basta considerare l'inclusione $j : U \to R$. Proviamo la sufficienza. Siano M ed N due R-moduli sinistri, $i : M \to N$ e $f : M \to I$ due omomorfismi, con i iniettivo. Pensiamo M come sottomodulo di N. Dobbiamo trovare un'estensione $f' : N \to I$ di f. Usando il Lemma di Zorn possiamo trovare un omomorfismo $h_0 : M_0 \to I$ con $M \subseteq M_0 \subseteq N$, tale che $h_{0|M} = f$ e h_0 non può essere esteso a nessun sottomodulo di N che contiene propriamente M_0. È sufficiente provare che $M_0 = N$. Per assurdo, sia $n \in N \setminus M_0$. Allora

$$U = \{r \in R : rn \in M_0\}$$

è un ideale sinistro di R. Definiamo $g : U \to I$ ponendo $g(u) = h_0(un)$ per ogni $u \in U$. Per ipotesi, g si estende a $g' : R \to I$. Adesso poniamo $M_1 = M_0 + Rn$ e sia $h_1 : M_1 \to I$ definita da

$$h_1(m_0 + rn) = h_0(m_0) + g'(r).$$

Proviamo che h_1 è ben definita. Supponiamo che $m_0 + rn = m'_0 + r'n$, allora $(r - r')n = m'_0 - m_0 \in M_0$, quindi $r - r' \in U$, da cui

$$m'_0 - m_0 = (r - r')n \Rightarrow h_0(m'_0 - m_0) = h_0((r - r')n) = g(r - r') = g'(r - r'),$$

da cui $h_0(m_0) + g'(r) = h_0(m'_0) + g'(r')$. È facile verificare che h_1 è un omomorfismo di R-moduli. Infine, h_1 estende h_0 e $M_0 \subsetneq M_1$, assurdo. □

2 Divisibilità

Definizione 2.1. Sia I un R-modulo sinistro. Un elemento $x \in I$ è **divisibile** per $a \in R$ se $x \in aI$, cioè se esiste $y \in I$ tale che $x = ay$.

Osserviamo che una condizione necessaria affinché $x \in I$ sia divisibile per $a \in R$ è che $\mathrm{Ann}(a) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$. Infatti se $x = ay$, e $ba = 0$ allora $bx = bay = 0$.

Definizione 2.2. Un R-modulo sinistro I è un **modulo divisibile** se, per ogni $x \in I$ e $a \in R$ tali che $\mathrm{Ann}(a) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$, x è divisibile per a.

Proposizione 2.3. *Sia I un R-modulo sinistro. Allora I è un modulo divisibile se e solo se, per ogni $a \in R$, ogni omomrfismo di R-moduli sinistri $f : Ra \to I$ si estende a R.*

Proof.

$\Rightarrow$ Fissiamo $a \in R$ e sia $f \in \mathrm{Hom}(Ra, I)$. Per ogni $b \in \mathrm{Ann}(a)$ abbiamo $bf(a) = f(ba) = f(0) = 0$, da cui $\mathrm{Ann}(a) \subseteq \mathrm{Ann}(f(a))$, quindi $f(a)$ è divisibile per a, cioè esiste $y \in I$ tale che $f(a) = ay$. Dunque $f' : R \to I$ definito da $f'(r) = ry$ estende f a R.

$\Leftarrow$ Siano $a \in R$ e $x \in I$ tali che $\mathrm{Ann}(a) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$. Adesso l'omomorfismo $f : Ra \to I$ definito da $f(ra) = rx$ è ben definito, infatti

$$\begin{aligned} ra = r'a \Rightarrow (r - r')a = 0 \Rightarrow r - r' \in \mathrm{Ann}(a) \subseteq \mathrm{Ann}(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow (r - r')x = 0 \Rightarrow rx = r'x \Rightarrow f(ra) = f(r'a). \end{aligned}$$

Per ipotesi, f si estende a $f' : R \to I$, da cui

$$x = f(a) = f'(a) = af'(1),$$

cioè x è divisibile per a. □

Dalla precedente condizione, unita al criterio di Baer, otteniamo il seguente risultato.

Corollario 2.4. *Ogni R-modulo sinistro iniettivo è divisibile. Se R è un anello a ideali sinistri principali allora ogni modulo sinistro è iniettivo se e solo se è divisibile.*

Osservazione 2.5. Nel caso particolare in cui R sia un dominio, un R-modulo I è divisibile se e solo se per ogni $a \in R \setminus \{0\}$ si ha $I = aI$. Pertanto la somma diretta e il prodotto diretto di moduli divisibili è divisibile. Inoltre se I e J sono R-moduli con I divisibile, e se $\varphi : I \to J$ è un omomorfismo suriettivo di R-moduli, allora anche J è divisibile, infatti, per ogni $a \in R \setminus \{0\}$ si ha

$$J = \varphi(I) = \varphi(aI) = a\varphi(I) = aJ.$$

In particolare, il quoziente di un modulo divisibile è divisibile.

Vediamo un altro esempio in cui la divisibilità implica l'iniettività.

Proposizione 2.6. *Se R è un dominio commutativo, e M è un R-modulo privo di torsione (cioè $rm = 0 \Rightarrow r = 0$ oppure $m = 0$), allora M è iniettivo se e solo se è divisibile.*

Proof. Supponiamo che M sia divisibile e proviamo che è iniettivo. Utilizziamo il Criterio di Baer: sia U un ideale di R, $f : U \to M$ un omomorfismo. Possiamo supporre che $U \neq (0)$ (altrimenti un'estensione di f è la funzione nulla), sia quindi $a \in U \setminus \{0\}$. Dall'Osservazione 2.5 abbiamo che $M = aM$, quindi esiste $m \in M$ tale che $f(a) = am$. Proviamo che f si può estendere a $f' : R \to M$ definita da $f'(r) = rm$. Infatti, per ogni $b \in U$ si ha

$$af(b) = f(ab) = bf(a) = bam \Rightarrow a(f(b) - bm) = 0 \Rightarrow f(b) = bm. \qquad \square$$

Esempio 2.7. Sia R un dominio commutativo e sia $Q(R)$ il suo campo delle frazioni. Dato che per ogni $x \in R \setminus \{0\}$ si ha $Q(R) = xQ(R)$, dall'Osservazione 2.5 abbiamo che $Q(R)$ è divisibile. Inoltre, $Q(R)$ è privo di torsione, quindi dalla Proposizione 2.6 $Q(R)$ è un R-modulo iniettivo.

Teorema 2.8. *Sia R un dominio commutativo. Ogni R-modulo sinistro divisibile è iniettivo se e solo se R è un dominio di Dedekind.*

Proof. Omessa. $\square$

Pertanto, in generale la divisibilità non implica la iniettività. Ci basta scegliere un dominio commutativo che non sia un dominio di Dedekind

Esempio 2.9. Sia $R = \mathbb{Z}[x]$. Consideriamo $M = \mathbb{Q}(x)/\mathbb{Z}[x]$. Come $\mathbb{Z}[x]$-modulo, M è divisibile in quanto $\mathbb{Q}(x)$ è divisibile e in un dominio il quoziente di moduli divisibili è divisibile (Osservazione 2.5). Tuttavia M non è iniettivo, infatti sia

$$f : (2, x) \to M \quad \text{deifnito da} \quad \begin{array}{c} f(2) = \mathbb{Z}[x] \\ f(x) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}[x] \end{array}.$$

Supponiamo per assurdo che f possa essere esteso a $g : \mathbb{Z}[x] \to M$. Abbiamo

$$2g(1) = g(2) = f(2) = \mathbb{Z}[x] \Rightarrow g(1) = \mathbb{Z}[x],$$
$$xg(1) = g(x) = f(x) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}[x] \Rightarrow g(1) = \frac{1}{2x} + \mathbb{Z}[x].$$

Da cui $\frac{1}{2x} \in \mathbb{Z}[x]$, assurdo.

Proposizione 2.10. *Sia G uno $\mathbb{Z}$-modulo (i.e. un gruppo abeliano).*

1. *G è iniettivo se e solo se è divisibile.*

2. *G può essere immerso in uno $\mathbb{Z}$-modulo iniettivo.*

Proof. Dato che $\mathbb{Z}$ è un PID, il punto 1 segue dal Corollario 2.4. Proviamo il punto 2. Scriviamo G come quoziente di uno $\mathbb{Z}$-modulo libero $G = (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z})/H$ con $H \subseteq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z}$. Osserviamo che

$$G = \frac{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z}}{H} \subseteq \frac{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Q}}{H}.$$

Adesso, dato che per ogni $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si ha $\mathbb{Q} = n\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo divisibile. Dall'Osservazione 2.5 la somma diretta e il quoziente di moduli divisibili è ancora divisibile, quindi $(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Q})/H$ è iniettivo. $\square$

Sia S un anello. Se R è una S-algebra, P è un R-modulo sinistro e M è un S-modulo sinistro, allora possiamo dotare $\mathrm{Hom}_S(P, M)$ della struttura di R-modulo sinistro con il prodotto definito da

$$r \cdot f(p) = f(rp) \quad \forall f \in \mathrm{Hom}_S(P, M),\ \forall r \in R,\ \forall p \in P.$$

Lemma 2.11 (Injective Producing Lemma)**.** *Sia S un anello, R una S-algebra, e siano M un S-modulo sinistro iniettivo e P un R-modulo sinistro piatto. Allora $\mathrm{Hom}_S(P, M)$ è iniettivo come R-modulo sinistro.*

Proof. Dato che per ogni R-modulo sinistro N si ha

$$\mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_S(P, M)) \simeq \mathrm{Hom}_S(N \otimes_R P, M),$$

abbiamo che il funtore $\mathrm{Hom}_R(\bullet, \mathrm{Hom}_S(P, M))$ è esatto se e solo se il funtore $\mathrm{Hom}_S(\bullet \otimes_R P, M)$ è esatto. Adesso il funtore $\bullet \otimes_R P$ è esatto in quanto P è un R-modulo sinistro piatto, il funtore $\mathrm{Hom}_S(\bullet, M)$ è esatto in quanto M è un S-modulo sinistro iniettivo. Componendo i due funtori otteniamo la tesi. □

Osserviamo che ogni anello R può essere visto come $\mathbb{Z}$-modulo (o gruppo abeliano) rispetto alla somma. La struttura di $\mathbb{Z}$-modulo rende R una $\mathbb{Z}$-algebra. Esplicitamente, il prodotto esterno è dato da

$$n \cdot r = \begin{cases} \underbrace{r + r + \ldots + r}_{n \text{ volte}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -(-n) \cdot r & n < 0 \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall r \in R.$$

Teorema 2.12. *Ogni R-modulo sinistro M può essere immerso in un R-modulo sinistro iniettivo.*

Proof. Vedendo M come $\mathbb{Z}$-modulo (o gruppo abeliano), esso può essere immerso in uno $\mathbb{Z}$-modulo iniettivo I. Adesso, essendo R una $\mathbb{Z}$-algebra e R banalmente un R-modulo libero, quindi piatto, dal lemma precedente otteniamo che $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, I)$ è un R-modulo sinistro iniettivo. Adesso l'applicazione

$$\varphi : M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, I) \quad \text{definita da} \quad \varphi(m)(r) = rm$$

è un'immersione, infatti è facile verificare che è un omomorfismo, inoltre

$$\varphi(m) = \underline{0} \Rightarrow \varphi(m)(r) = rm = 0 \quad \forall r \in R \Rightarrow \varphi(m)(1) = m = 0.$$

In alternativa basta scrivere

$$M \simeq \mathrm{Hom}_R(R, M) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, I).$$ □

3 Estensioni essenziali e invluppi iniettivi

Definizione 3.1. L'inclusione $M \subseteq E$ di R-moduli sinistri si dice **estensione essenziale** per M se, per ogni sottomodulo $N \subseteq E$ si ha

$$N \cap M = (0) \Rightarrow N = (0).$$

In questo caso scriveremo $M \subseteq_e E$. Una estensione essenziale $M \subseteq_e E$ si dice **massimale** se nessun modulo contenente propriamente E è un'estensione essenziale per M.

Proposizione 3.2 (transitivià delle estensioni essenziali)**.** *Supponiamo di avere tre R-moduli sinistri $M \subseteq E \subseteq F$, allora*

$$M \subseteq_e E,\ E \subseteq_e F \Longleftrightarrow M \subseteq_e F.$$

Proof.

$\Rightarrow$ Sia $N \subseteq F$ tale che $N \cap M = (0)$, allora

$$(N \cap E) \cap M = N \cap M = (0) \Rightarrow N \cap E = (0) \Rightarrow N = (0).$$

$\Leftarrow$ Sia $N \subseteq E$ tale che $N \cap M = (0)$, poiché $N \subseteq F$ e $M \subseteq_e F$, si ha $N = (0)$, quindi $M \subseteq_e E$. Sia adesso $N \subseteq F$ con $N \cap E = (0)$, allora $N \cap M \subseteq N \cap E = (0)$ da cui $N = (0)$, cioè $E \subseteq_e F$. □

Proposizione 3.3. *Sia M un R-modulo sinistro. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

1. *M è iniettivo.*
2. *M è sommando diretto di ogni modulo che lo contiene.*
3. *M non ha estensioni essenziali proprie.*

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2) Se $M \subseteq E$, la sequenza esatta corta $0 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} E/M \to 0$ è spezzata, quindi $E = M \oplus E/M$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sia $M \subseteq_e E$. Per ipotesi esiste $N \subseteq E$ tale che $E = M \oplus N$, quindi $N \cap M = (0)$, da cui necessariamente $N = 0$, cioè $E = M$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Immergiamo M in un modulo iniettivo E. Per ipotesi l'estensione $M \subseteq E$ non è essenziale, cioè

$$\Sigma = \{N \subseteq E : N \neq (0), N \cap M = (0)\} \neq \emptyset.$$

Applicando il Lemma di Zorn su $(\Sigma, \subseteq)$, esiste N massimale in Σ. Proviamo che $E = M \oplus N$. Ci basta provare che $E = M + N$. Per assurdo, sia $x \in E \setminus (M + N)$, allora $N \subsetneq N + (x) \in \Sigma$, contro la massimalità di N, assurdo. Pertanto $E = M \oplus N$ con E iniettivo, dalla Proposizione 1.3 segue che M è iniettivo. □

Lemma 3.4. *Siano M e I due R-moduli sinistri, con I iniettivo, tali che $M \subseteq I$. Esiste un'estensione essenziale massimale E per M tale che risulti $M \subseteq_e E \subseteq I$.*

Proof. Poniamo
$$\Sigma = \{F \in \mathcal{M}_R : M \subseteq_e F \subseteq I\},$$
e sia $\mathcal{C} = \{F_i\}_{i \in I}$ una catena in Σ. Consideriamo l'unione $F = \bigcup_{i \in I} F_i$. Risulta $M \subseteq F \subseteq I$. Inoltre, sia $N \subseteq F$ tale che $N \cap M = (0)$. Per ogni $i \in I$, poiché $M \subseteq_e F_i$, si ha

$$(N \cap F_i) \cap M \subseteq N \cap M = (0) \Rightarrow N \cap F_i = (0),$$

quindi $N = (0)$, cioè $M \subseteq_e F$. Pertanto F è un maggiorante per $\mathcal{C}$. Per il Lemma di Zorn esiste un elemento E massimale in Σ, quindi $M \subseteq_e E \subseteq I$. Proviamo che $M \subseteq_e E$ è un'estensione essenziale massimale per M. Supponiamo che $M \subseteq_e E \subsetneq_e H$. Dall'iniettività di I, l'inclusione $E \subseteq I$ può essere estesa a $f : H \to I$. Chiaramente abbiamo che $\ker f \cap M = (0)$, e poichè $M \subseteq_e H$ si ha $\ker f = (0)$, quindi f è iniettiva. Allora $H \simeq f(H) \subseteq I$, da cui si avrebbe $M \subseteq_e E \subsetneq_e H \subseteq I$, contro la massimalità di E. □

Corollario 3.5. *Ogni R-modulo sinistro ammette una estensione essenziale massimale.*

Proof. Basta osservare che ogni modulo può essere immerso in un modulo iniettivo e applicare il Lemma 3.4. □

Se $M \subseteq I$ sono due R-moduli sinistri, diciamo che I è iniettivo minimale su M se I è iniettivo e se per ogni modulo iniettivo I' tale che $M \subseteq I' \subseteq I$ si ha $I' = I$.

Teorema 3.6 (Eckmann-Schöpf, Baer)**.** *Siano $M \subseteq I$ due R-moduli sinistri. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

1. *I è un'estensione essenziale massimale per M.*
2. *I è iniettivo ed è un'estensione essenziale per M.*
3. *I è iniettivo minimale su M.*

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2) Segue dalla transitività delle estensioni essenziali e dalla Proposizione 3.3.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sia I' un modulo iniettivo tale che $M \subseteq I' \subseteq I$. Dato che I' è iniettivo, esiste $N \subseteq I$ tale che $I = I' \oplus N$. Quindi $M \cap N \subseteq I' \cap N = (0)$, poiché $M \subseteq_e I$ deve aversi $N = (0)$, cioè $I' = I$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Applicando il Lemma 3.4 esiste un'estensione essenziale massimale E per M tale che $M \subseteq_e E \subseteq I$. Dalla Proposizione 3.3 abbiamo che E è iniettivo, da cui segue per ipotesi $E = I$. □

Definizione 3.7. Siano $M \subseteq I$ due R-moduli sinistri. Diciamo che I è un **inviluppo iniettivo** di M se soddisfa una delle condizioni equivalenti del precedente teorema.

Corollario 3.8. *Due inviluppi iniettivi I, I' di un R-modulo sinistro M sono isomorfi. L'isomorfismo ristretto ad M coincide con l'identità.*

Proof. Dato che I è iniettivo, possiamo estendere l'inclusione $M \subseteq I'$ a $f : I \to I'$. Poiché $M \subseteq_e I$, $\ker f \cap M = (0) \Rightarrow \ker f = (0)$, pertanto $M \subseteq f(I) \subseteq I'$. Dalla minimalità di I' segue $f(I) = I'$, cioè f è un isomorfismo. Inoltre chiaramente $f_{|M} = 1_M$. □

Pertanto, ogni R-modulo sinsitro M possiede un unico (a meno di isomorfismi) inviluppo iniettivo, che indicheremo con $E(M)$.

Corollario 3.9. *Sia M un R-modulo sinistro.*

1. *Se M è iniettivo, $M = E(M)$.*

2. *Se $M \subseteq I$ con I modulo iniettivo, allora $M \subseteq_e E(M) \subseteq I$.*

3. *Se $M \subseteq_e N$ allora $M \subseteq_e N \subseteq_e E(M)$. In particolare $E(M) = E(N)$.*

Proof. Il punto 1 è ovvio. Il punto 2 segue dal Lemma 3.4. Il punto 3 segue dalla transitività delle estensioni essenziali. □

Lemma 3.10. *Un'estensione di R-moduli sinistri $M \subseteq E$ è essenziale se e solo se*

$$\forall e \in E \setminus \{0\}, \exists r \in R : re \in M \setminus \{0\}.$$

Proof. Se $M \subseteq_e E$, allora per ogni $e \in E \setminus \{0\}$ abbiamo $Re \neq (0)$, quindi $Re \cap M \neq (0)$, pertanto esiste $r \in R$ tale che $re \in M \setminus \{0\}$. Viceversa, sia $N \subseteq E$ tale che $N \cap M = (0)$. Per assurdo se $N \neq (0)$, sia $n \in N \setminus \{0\} \subseteq E \setminus \{0\}$, per ipotesi esiste $r \in R$ tale che $rn \in M \setminus \{0\}$, cioè $rn \in M \cap N \neq (0)$, assurdo. □

Esempio 3.11. Abbiamo visto che se R è un dominio commutativo, il suo campo delle frazioni $Q(R)$ è un R-modulo iniettivo. Proviamo che $R \subseteq_e Q(R)$ utilizzando il lemma precedente. Se $x/y \in Q(R) \setminus \{0\}$, allora $x = y(x/y) \in R \setminus \{0\}$. Pertanto l'inviluppo iniettivo di R è $Q(R)$.

Esempio 3.12. Nel caso $R = \mathbb{Z}$, l'inviluppo iniettivo è anche noto come l'*inviluppo divisibile*. Sia $n \in \mathbb{N}$, indichiamo con C_n il gruppo ciclico di ordine n. Se p è primo, abbiamo la catena di inclusioni

$$C_p \subseteq C_{p^2} \subseteq C_{p^3} \subseteq \dots$$

Poniamo $C_{p^\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{p^n}$, detto **gruppo di Prüfer**. Il gruppo di Prüfer può essere rappresentato in 3 modi diversi

$$\begin{aligned}
C_{p^\infty} &\simeq \{e^{\frac{2\pi i n}{p^m}} : n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},\\
C_{p^\infty} &\simeq \frac{\mathbb{Z}[1/p]}{\mathbb{Z}} \subseteq \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \subseteq \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \simeq U(1),\\
C_{p^\infty} &= \langle x_i : i \in \mathbb{N}\rangle \quad \text{dove } x_0 = 0, x_{i+1}^p = x_i.
\end{aligned}$$

Osserviamo che, nell'ultima rappresentazione, $o(x_i) = p^i$ e $C_{p^i} = \langle x_i \rangle$. Proviamo che C_{p^∞} è l'inviluppo iniettivo di C_{p^n} per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dall'Osservazione 2.5, C_{p^∞} è divisibile. Proviamo che $C_{p^n} \subseteq_e C_{p^\infty}$ utilizzando il lemma precedente. Sia $x \in C_{p^\infty} \setminus \{0\}$. Allora $x = x_i^t$ per qualche $i > 0$ e $t \not\equiv 0 \pmod p$. Adesso, se $i \leq n$, allora $x_i^t = \left(x_n^{p^{n-i}}\right)^t \in C_{p^n} \setminus \{0\}$. Se invece $i > n$, abbiamo

$$(p^{(i-n)}) \cdot x_i^t = \left(x_i^{p^{(i-n)}}\right)^t = x_n^t \in C_{p^n} \setminus \{0\}.$$

4 Un cenno alle coperture proiettive e piatte

Definizione 4.1. Sia M un R-modulo sinistro. Un sottomodulo $S \subseteq M$ è **superfluo** in M se per ogni sottomodulo $N \subseteq M$ si ha

$$N + S = M \Rightarrow N = M.$$

Si noti che la nozione di superfluo per un sottomodulo $S \subseteq M$ è duale a quella di estensione essenziale. Diamo adesso la nozione duale di inviluppo iniettivo.

Definizione 4.2. Siano M e P due R-moduli sinistri, con P proiettivo. Una **copertura proiettiva** per M è un omomorfismo suriettivo $\varphi : P \to M$ tale che $\ker \varphi$ è superfluo in P.

Sia Ω una classe di R-moduli sinistri chiusa rispetto a isomorfismi.

Definizione 4.3. Siano M un R-modulo sinistro e $X \in \Omega$. Un **Ω-inviluppo** per M è un omomorfismo $\varphi : M \to X$ tale che

1. Per ogni omomorfismo $\varphi' : M \to X'$, con $X' \in \Omega$, esiste un omomorfismo $f : X \to X'$ tale che $\varphi' = f \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & X \arrow[dl, dashed, "f"] \\ X' & \end{tikzcd}$$

2. Ogni omomorfismo $f : X \to X$ tale che $\varphi = f \circ \varphi$ è un automorfismo.

Definizione 4.4. Siano M un R-modulo sinistro e $X \in \Omega$. Una **Ω-copertura** per M è un omomorfismo $\varphi : X \to M$ tale che

1. Per ogni omomorfismo $\varphi' : X' \to M$, con $X' \in \Omega$, esiste un omomorfismo $f : X' \to X$ tale che $\varphi' = \varphi \circ f$.

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\varphi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd}$$

2. Ogni omomorfismo $f : X \to X$ tale che $\varphi = \varphi \circ f$ è un automorfismo.

Proposizione 4.5. *Sia M un R-modulo sinistro.*

$$\text{Se } \begin{array}{l} \varphi_1 : M \to X_1 \\ \varphi_2 : M \to X_2 \end{array} \text{ sono due } \Omega\text{-inviluppi di } M, \text{ allora } X_1 \simeq X_2.$$

$$\text{Se } \begin{array}{l} \varphi_1 : X_1 \to M \\ \varphi_2 : X_2 \to M \end{array} \text{ sono due } \Omega\text{-coperture di } M, \text{ allora } X_1 \simeq X_2.$$

Proof. Omessa. □

Nel seguito, $\mathcal{I}, \mathcal{P}, \mathcal{F}$ saranno rispettivamente la classe degli R-moduli sinistri iniettivi, proiettivi, piatti.

Teorema 4.6. *Siano M un R-modulo sinistro e $I \in \mathcal{I}$, $P \in \mathcal{P}$.*

1. *$\varphi : M \to I$ è un $\mathcal{I}$-inviluppo $\Leftrightarrow$ è un inviluppo iniettivo.*

2. *$\varphi : P \to M$ è una $\mathcal{P}$-copertura $\Leftrightarrow$ è una copertura proiettiva.*

Proof. Omessa. □

Definizione 4.7. Sia M un R-modulo sinistro. Una **copertura piatta** per M è una $\mathcal{F}$-copertura.

Abbiamo provato che ogni R-modulo sinistro ammette un inviluppo iniettivo. Possiamo porci lo stesso problema di esistenza per le coperture piatte e iniettive.

Teorema 4.8 (Bican, Bashir, Enochs, 2001)**.** *Ogni R-modulo sinistro ha una copertura piatta.*

In generale, non è detto che in un anello R, ogni modulo abbia una copertura proiettiva.

Definizione 4.9. Un anello R è **perfetto** (sinistro) se ogni R-modulo sinistro ha una copertura proiettiva.

Degli anelli perfetti sono state date molte caratterizzazioni. Ne riportiamo alcune

Teorema 4.10 (Bass, 1960)**.** *Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

1. *R è perfetto (sinistro).*

2. *Ogni R-modulo sinistro paitto è proiettivo.*

3. *R soddisfa la condizione delle catene discendenti per R-moduli destri principali.*

5 Il criterio di Baer proiettivo

Il criterio di Baer può essere enunciato come segue: un R-modulo sinistro M è iniettivo se e solo se per ogni ideale I di R, applicando alla sequenza esatta corta

$$0 \to I \to R \to R/I \to 0 \tag{1}$$

il funtore $\mathrm{Hom}(\bullet, M)$ otteniamo ancora una sequenza esatta corta. Abbiamo visto che esiste una caratterizzazione simile per la piattezza: un R-modulo sinistro è piatto se e solo se per ogni ideale I di R, applicando alla sequenza esatta corta (1) il funtore $\bullet \otimes_R M$ otteniamo ancora una sequenza esatta corta. Pertanto è del tutto naturale chiedersi se esista l'analogo proiettivo di tale criterio.

Definizione 5.1. Un R-modulo sinistro M si dice **R-proiettivo** se per ogni ideale I di R e ogni omomorfismo $f : M \to R/I$ esiste un omomorfismo $f' : M \to R$ tale che $f = \pi \circ f'$, dove $\pi : R \to R/I$ è la proiezioni naturale.

In altri termini, M è R-proiettivo se applicando il funtore $\mathrm{Hom}(M, \bullet)$ alla sequenza (1), otteniamo ancora una sequenza esatta corta. Chiaramente, ogni modulo proiettivo è R-proiettivo.

Definizione 5.2. Un anello R in cui ogni R-modulo sinistro R-proiettivo è proiettivo è detto anello **testing** (sinistro).

In altre parole, gli anelli testing sono gli anelli nei quali vale il duale del criterio di Baer.

Problema 5.3 (Faith,1976)**.** Caratterizzare gli anelli testing.

Teorema 5.4 (Sandomierski, 1964)**.** *Ogni anello perfetto (sinistro) è testing (sinistro).*

Teorema 5.5 (Hamsher,1966)**.** *Ogni anello commutativo Noetheriano testing è perfetto.*

Teorema 5.6 (Puninski et al., 2017)**.** *Ogni anello semilocale Noetheriano (sinistro) testing (sinistro) è perfetto (sinistro)*

Teorema 5.7 (Trlifaj, 1996)**.** *L'asserzione "ogni anello testing è perfetto" è coerente con ZFC.*

Teorema 5.8 (Trlifaj, 2017)**.** *L'esistenza di anelli testing non perfetti è coerente con ZFC. Il problema di Faith è indecidibile.*

References

[1] Hayder Alhilali, Yasser Ibrahim, Gena Puninski, and Mohamed Yousif. When r is a testing module for projectivity? *Journal of Algebra*, 484:198 – 206, 2017.

[2] Hyman Bass. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95(3):466–488, 1960.

[3] Ladislav Bican, Robert El Bashir, and Edgar Enochs. All modules have flat covers. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 33(4):385–390, 2001.

[4] Ross M Hamsher. Commutative, noetherian rings over which every module has a maximal submodule. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17(6):1471–1472, 1966.

[5] Tsit-Yuen Lam. *Lectures on modules and rings*, volume 189. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] Francis L Sandomierski. *Relative Injectivity and Projectivity: A Thesis in Mathematics*. PhD thesis, Pennsylvania State University, the Graduate School, Department of Mathematics, 1964.

[7] Jan Trlifaj. Whitehead test modules. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(4):1521–1554, 1996.

[8] Jan Trlifaj. Faith's problem on r-projectivity is undecidable. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2018.

[9] Jinzhong Xu. *Flat covers of modules*. Springer, 2006.