ESAME DI ALGORITMI
Università degli Studi di Catania
Corso di Laurea Triennale in Informatica
17 febbraio 2025

Si risolvano i seguenti esercizi in un tempo non superiore a 3 ore. Si abbia cura di consegnare la risoluzione dei primi 3 esercizi in un foglio (FOGLIO A) separato da quello utilizzato per la consegna degli ultimi 3 esercizi (FOGLIO B).

—— FOGLIO A ——

1. Si supponga di operare su di un Min-Heap inizialmente vuoto, inserendo le seguenti 13 chiavi, nell'ordine dato: $\langle 10, 7, 10, 8, 3, 6, 5, 14, 17, 2, 4, 1, 11 \rangle$. Si fornisca la configurazione (fornire l'array) del Min-Heap dopo ciascuna delle 13 operazioni di inserimento. Indicare infine quale sarebbe la configurazione della struttura dati dopo un'operazione di estrazione del minimo.

2. Si supponga di operare su di un albero Rosso-Nero inizialmente vuoto. Nello specifico, si supponga di inserire le seguenti 15 chiavi, nell'ordine dato: $\langle 14, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 1, 15, 16, 18, 2, 5, 9, 11 \rangle$. Si fornisca la visita post-order dell'albero dopo ciascuna delle operazioni indicando, per ogni nodo, anche il relativo colore.

5 3. Si fornisca lo pseudo-codice (o il codice in linguaggio C/C++) dell'algoritmo HUFFMAN e delle sue procedure ausiliarie. Indicare anche la complessità computazionale delle procedura fornita, motivandone la risposta.

—— FOGLIO B ——

4. Si risolva l'equazione di ricorrenza $T(n) = aT\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$, al variare del parametro reale $a \geq 1$ utilizzando il metodo Master. Si stabilisca inoltre quale delle seguenti condizione sono soddisfatte dalla soluzione $T(n)$:
   - $T(n) = \mathcal{O}(n)$;
   - $T(n) = \Theta(n^3)$;
   - $T(n) = o(n^2 \log n)$.

18

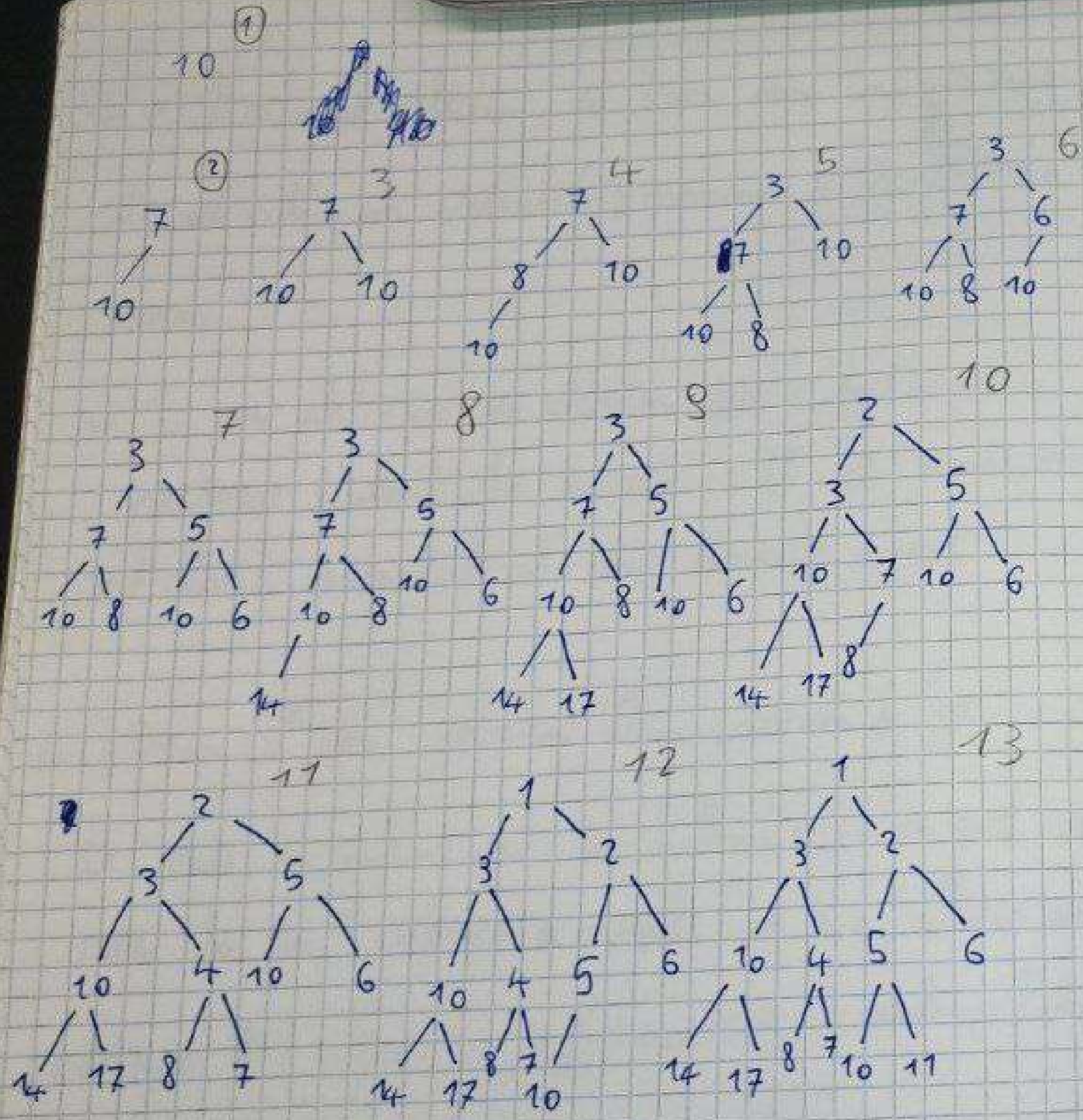
5. Si definisca la proprietá di sottostruttura ottima e, dopo avere definito il problema UNWEIGHTED SHORTEST PATH, si dimostri che esso gode della proprietá di sottostruttura ottima.

6. Si scriva la formula ricorsiva utilizzata dall'algoritmo di FLOYD-WARSHALL e si simuli tale algoritmo per trovare la tabella (matrice) dei cammini minimi tra tutte le coppie di vertici del grafo pesato definito dalla seguente matrice di adiacenza

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \infty & -1 & 2 \\ \infty & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 2 & 0 & \infty \\ \infty & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

IMPORTANTE

Gli esercizi sono stati svolti da studenti, quindi molto probabilmente conterranno errori e/o metodi risolutivi poco apprezzabili; consiglio vivamente di non farci troppo affidamento.



1: 10

2: 7 10

3: 7 10 10

4: 7 8 10 10

5: 3 7 10 10 8

6: 3 7 6 10 8 10

7: 3 7 5 10 8 10 6

8: 3 7 5 10 8 10 6 14

9: 3 7 5 10 8 10 6 14 17

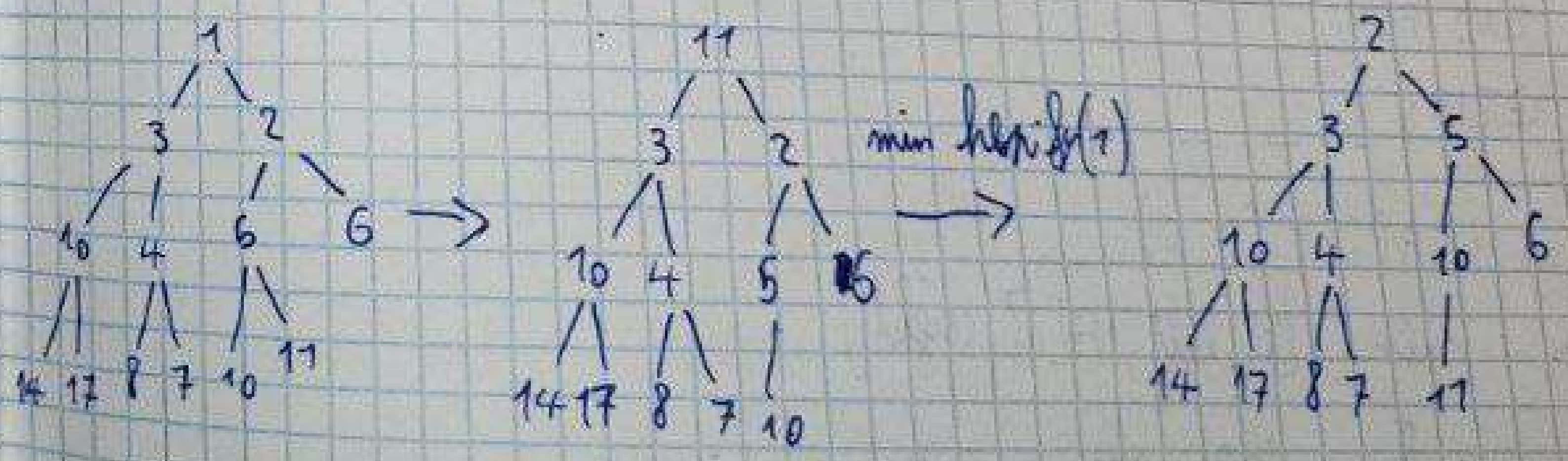
10: 2 3 5 10 7 10 6 14 17 8

11: 2 3 5 10 4 10 6 14 17 8 7

12: 1 3 2 10 4 5 6 14 17 8 7 10

13: 1 3 2 10 4 5 6 14 17 8 7 10 11

ESTRAZIONE MINIMO



ARRAY: 2 3 5 10 4 10 6 14 17 8 7 11

Visite post-order

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 14

[14, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 1, 15, 16, 18, 2, 5, 9, 11]

1 14
2 13, 14
3 12, 14, 13
4 10, 12, 14, 13
5 8, 12, 10, 14, 13
6 6, 8, 12, 10, 14, 13
7 4, 8, 6, 12, 10, 14, 13
8 1, 4, 8, 6, 12, 14, 13, 10
9 1, 4, 8, 6, 12, 15, 14, 13, 10
10 1, 4, 8, 6, 12, 14, 16, 15, 13, 10
11 1, 4, 8, 6, 12, 14, 18, 16, 15, 13, 10
12 1, 4, 2, 8, 6, 12, 14, 18, 16, 15, 13, 10
13 1, 5, 4, 2, 8, 6, 12, 14, 18, 16, 15, 13, 10
14 1, 5, 4, 2, 9, 8, 6, 12, 14, 18, 16, 15, 13, 10
15 1, 5, 4, 2, 9, 8, 6, 11, 12, 14, 18, 16, 15, 13, 10

3

```
HUFFMAN(C, n)
Q = Build min HEAP(C)            O(n)
FOR i = 1 TO n-1:
    x = Extract-min(Q)           O(log n)
    y = Extract-min(Q)           O(log n
    z = new node(x, y, x.freq + y.freq)
    insert(Q, z)                 O(log n)
END FOR
RETURN EXTRACT-MIN(Q)
```

```
EXTRACT-MIN(H):
min = H[1]
H[1] = H[heap size]
heap size = heapsize - 1
min Heapify(H, 1)
return min
```

```
INSERT(H, x):
heap size = heapsize + 1
H[heapsize] = x
heapsize = 1
WHILE i > 1 AND H[⌊i/2⌋] > H[i]
SWAP(H[i], H[⌊i/2⌋])
i = ⌊i/2⌋
```

```
Build min Heap(C):
    FOR i = ⌊n/2⌋ DOWNTO 1:
        MIN HEAPIFY(C, i)
    END FOR
    RETURN C
```

```
MIN HEAPIFY(H, i)
min = min(H[i].left, H[i].right) \\ ritorna i, non H[i]
IF i < heapsize AND H[i] < min:
    SWAP(H[i], min)
    MIN HEAPIFY(min)
```

4

$w = n^{\log_3 a}$

$f(n) = n^2$

$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

A

Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ se esiste tale ε da soddisfare $f(n)$ ottengo che $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, condizione soddisfatta per $a > 9$, $\Theta(n^{\log_3 a})$

B

Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log^k n)$ allora $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log^{k+1} n)$

Condizione soddisfatta per $a = 9$, $\Theta(n^2 \cdot \log n)$

C

Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ se esiste ε tale da soddisfare $f(n)$, ottengo $\Theta(f(n))$, condizione soddisfatta per $1 \le a < 9$, $\Theta(n^2)$

CONDIZIONE DI REGOLARITÀ: $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \le c\, f(n) \to a \cdot \frac{n^2}{9} < c\, n^2 \to$

$\to \frac{a}{9} \le c$ $\quad \frac{a}{9} < 1 \iff a < 9$ condizione soddisfatta

i) $T(n) = O(n)$ ~~soddisfatta~~ per $1 \le a \le 3$ non è soddisfatta per nessun valore di $a \ge 1$

ii) $T(n) = \Theta(n^3)$ soddisfatta per $a = 27$

iii) $T(n) = o(n^2 \log n)$ soddisfatta per $1 \le a < 9$

Un problema gode della proprietà di sottostruttura ottima se una soluzione ottimale del problema è composta da soluzioni ottime ai sottoproblemi.

Nel problema UNWEIGHTED SHORTEST PATH, si prende in input un grafo $G = (V, E)$ e due vertici $u, v \in V$;
L'obiettivo è trovare il percorso che usa meno archi per andare da u a v.

Il problema gode della proprietà di sottostruttura ottima, Presa una soluzione ottima S formata da un cammino che attraversa i nodi $\{u, u_2, u_3, u_4, v\}$, allora il sottocammino $P_{u\,u_i}$ formato da $S \setminus \{v\}$ sarà una soluzione ottima al sottoproblema.
Supponiamo per assurdo che un sottocammino $T_{u_i v}$ di S non sia ottimo, allora esisterà un cammino $T'_{u_i v}$ migliore di $T_{u_i v}$, allora possiamo costruire $S' = \{u, u_2, \dots, u_{i-1}\} \cup T'_{u_i v}$ che sarà migliore rispetto a S, contraddicendone l'ottimalità, dunque assurdo, ne segue che ogni sottocammino di S è una soluzione ottima al sottoproblema.

6

$$D^0 = W = \begin{pmatrix} 0 & \infty & -1 & 2 \\ \infty & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 2 & 0 & \infty \\ \infty & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^A = \begin{pmatrix} 0 & \infty & -1 & 2 \\ \infty & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ \infty & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P = C \to a \to D$, $w = 4$

$$D^B = \begin{pmatrix} 0 & \infty & -1 & 2 \\ \infty & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ \infty & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{se } K = 0 \\ \min\left\{ d_{ij}^{K-1}, d_{iK}^{K-1} + d_{Kj}^{K-1} \right\} & K \geq 1 \end{cases}$$

$$D^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ \infty & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice finale