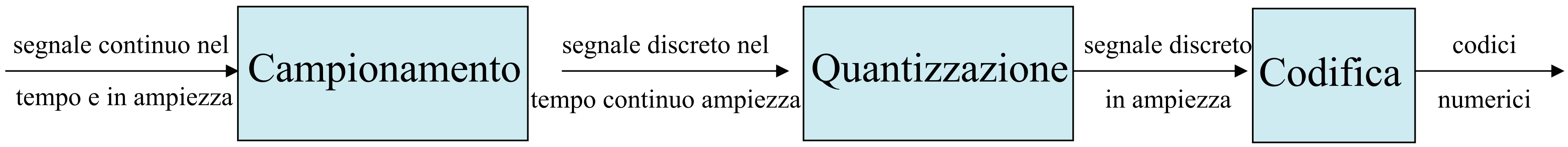
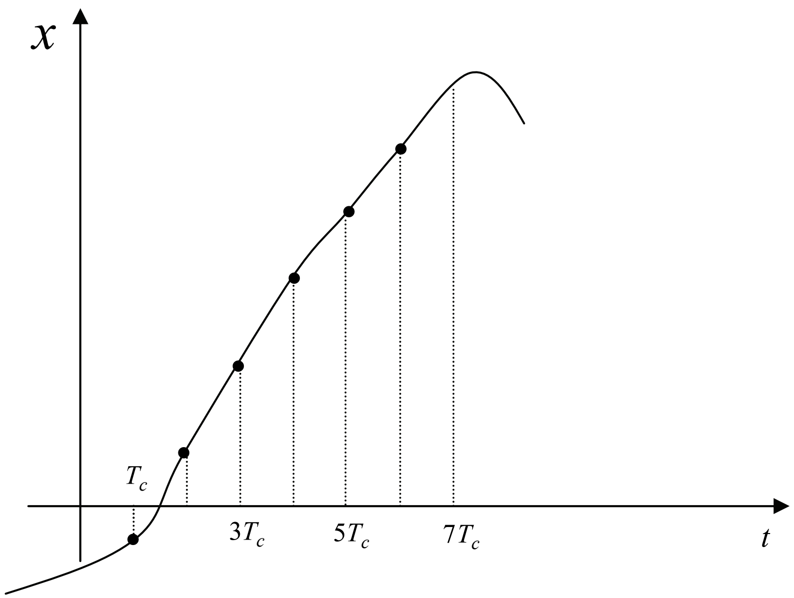
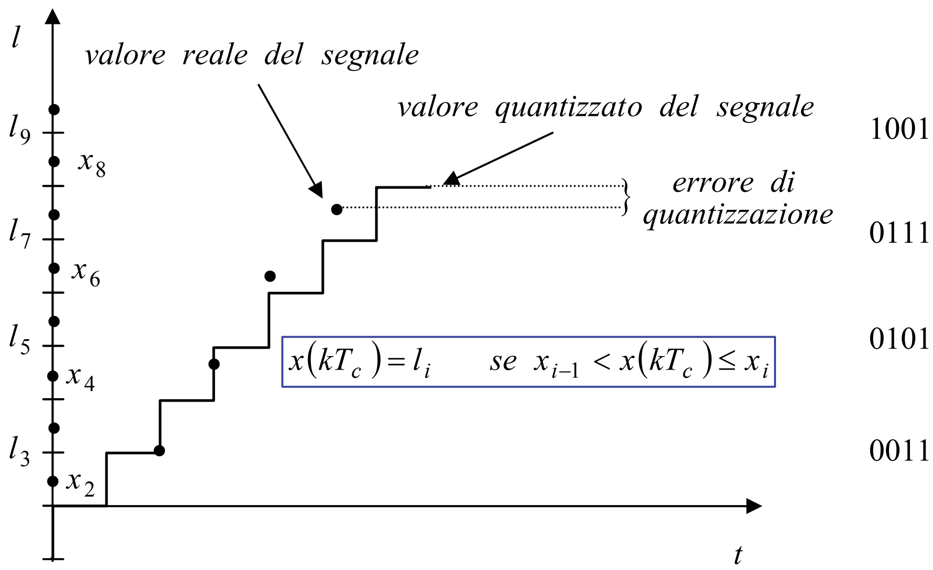
Il Campionamento

La Conversione Analogico-Digitale

La *conversione analogico-digitale (A/D)* consente il passaggio da un segnale analogico ad uno digitale. Una conversione A/D *ideale* permette di trasferire nel segnale digitale tutta l'informazione racchiusa in quello analogico (a meno di errori intrinseci)

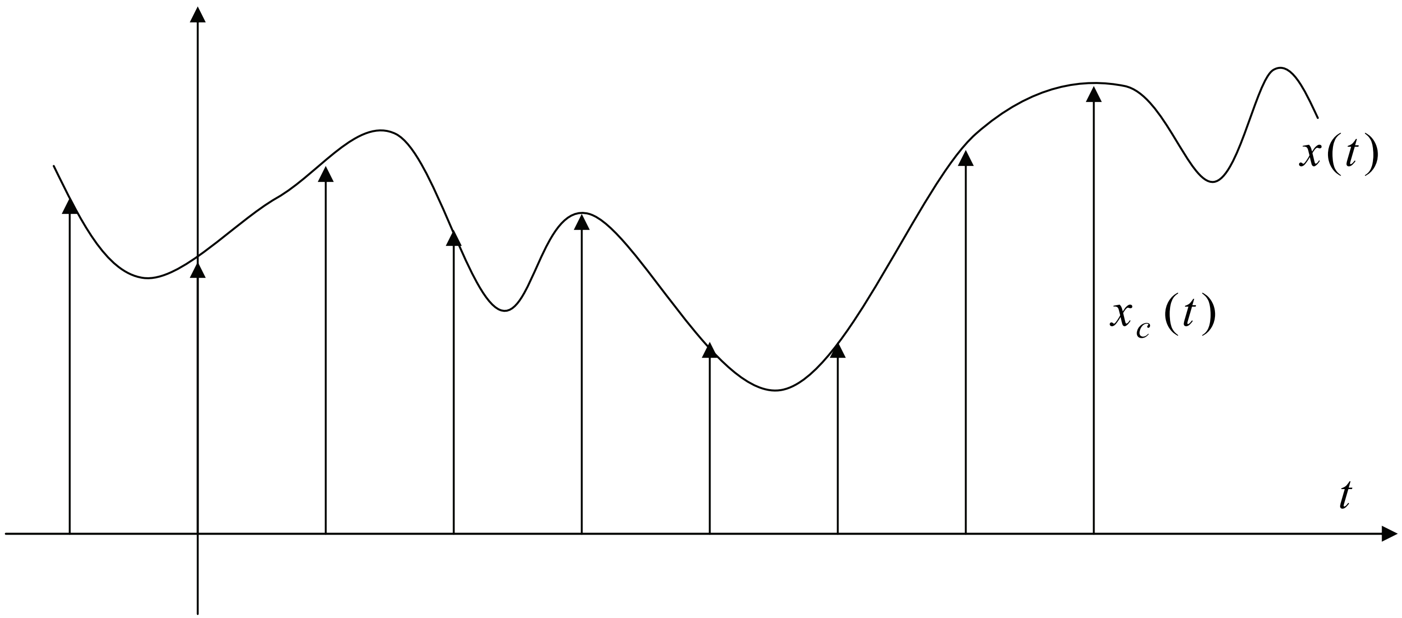






Il Caso Ideale

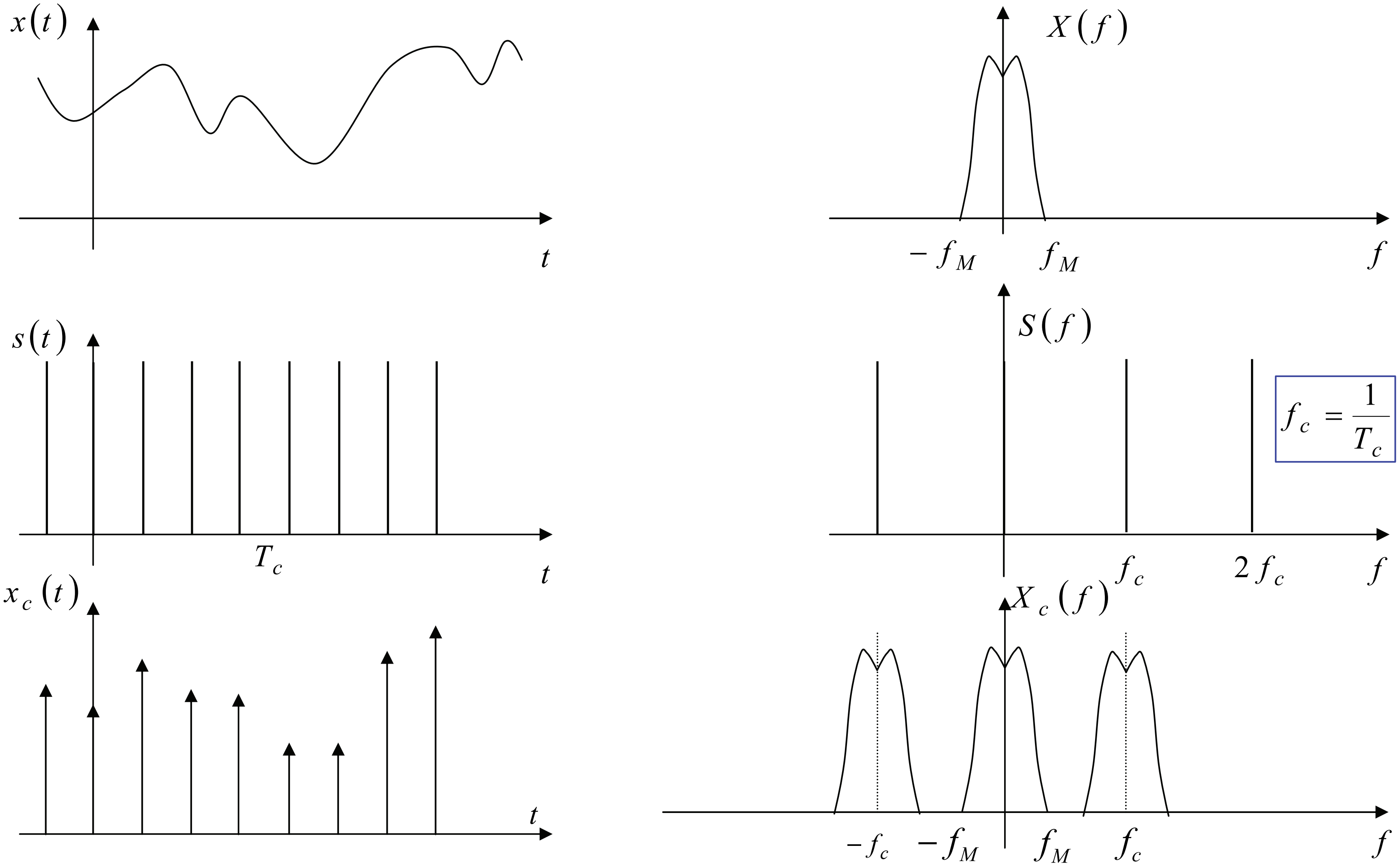
La maggior parte della strumentazione digitale moderna ottiene le misurazioni di interesse lavorando su <u>campioni numerici</u> del segnale analogico in ingresso



Quindi un problema teorico e pratico fondamentale è la ricostruzione del segnale sulla base dei suoi campioni

• Campionamento ideale

Campionare *(nel dominio del tempo) con periodo* T_c *significa (nel dominio della frequenza) sommare allo spettro del segnale tante sue copie alle frequenze multiple intere di* $\omega_c = 2\pi / T_c$, *ovvero* $f_c = 1/T_c$



Lo strumento matematico ovvio è il <u>teorema del campionamento</u>, che quindi qui richiamiamo nella sua forma più generale:

$$\boxed{x_c(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_c)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_c)\delta(t-nT_c)\Leftrightarrow X_c(f)=f_c\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f-kf_c)=X\left(f\right)*S\left(f\right)}$$

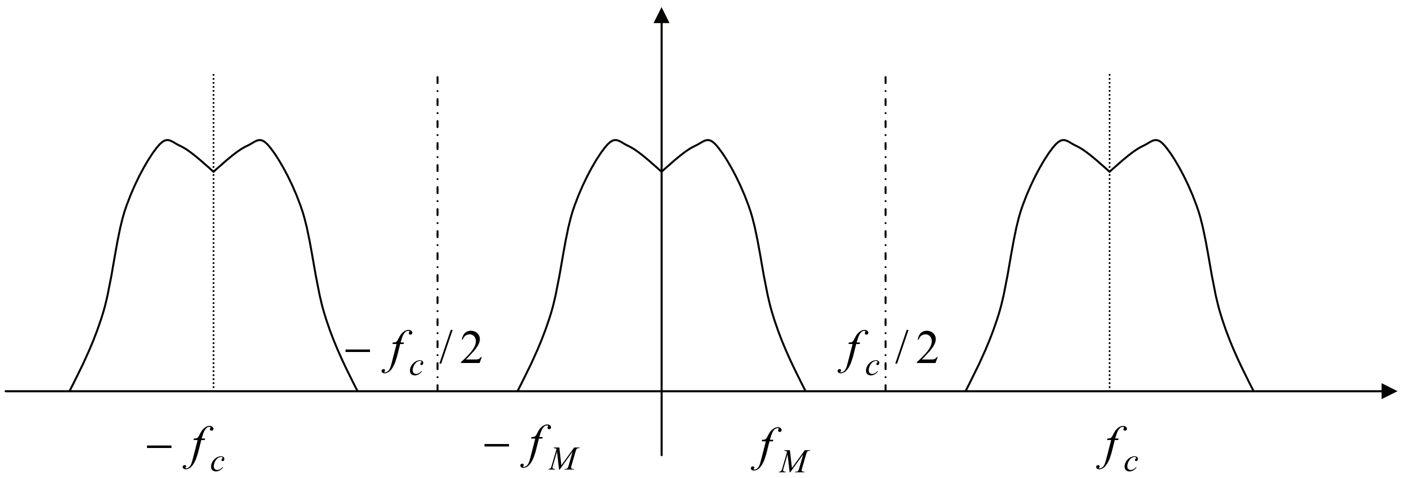
ossia

se da un segnale variabile nel dominio del tempo possiamo estrarre una <u>successione illimitata di campioni equi-intervallati con periodo T_c</u> questa successione costituisce una funzione tempo-discreta che contiene l'informazione del segnale di partenza nell'ipotesi che:

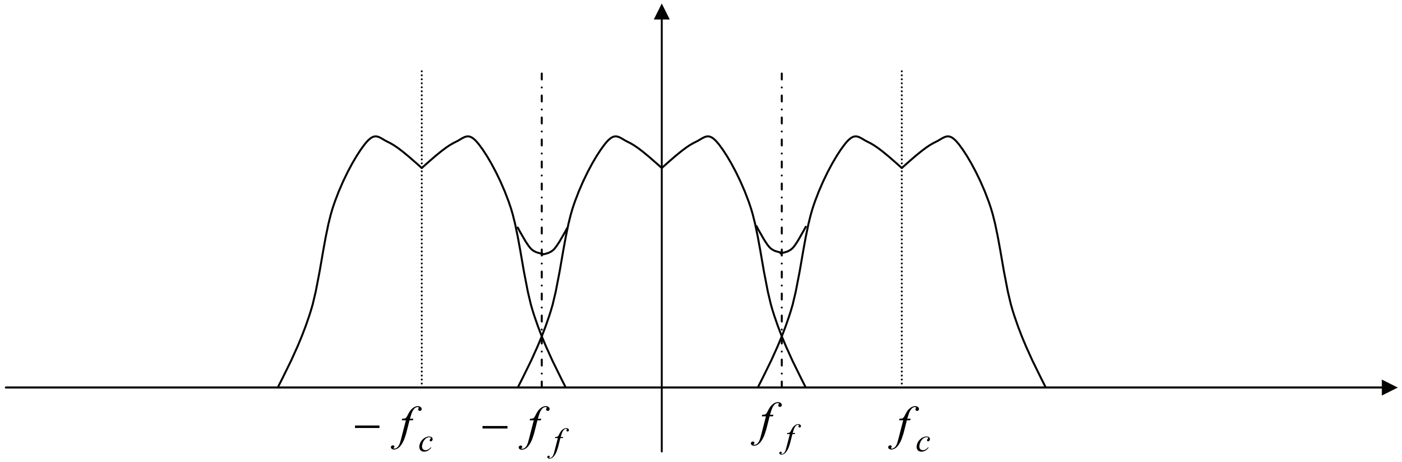
- lo spettro del segnale di partenza abbia un contenuto armonico limitato alla frequenza massima f_M
- la frequenza di campionamento f_c sia superiore (o almeno uguale) al doppio della frequenza massima

Dal teorema si deduce che:

1) se lo spettro $X(f)$ del segnale è nullo al di sopra di una frequenza massima f_M, e la frequenza di campionamento è $f_c \geq 2 f_M = f_N$ (<u>frequenza di Nyquist</u>), lo spettro (e quindi il segnale) originario è ricostruibile senza errori dal segnale campionato;

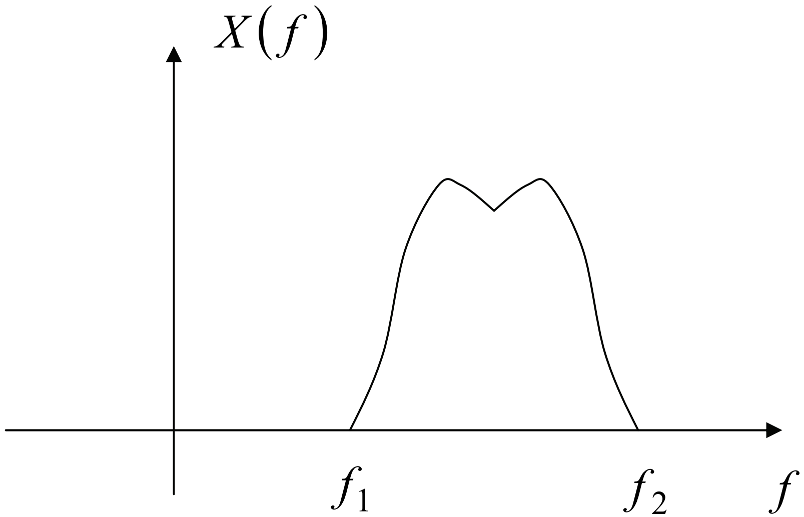


2) se invece lo spettro $X(f)$ non ha una frequenza massima, oppure $f_c < 2f_M$, lo spettro (e quindi il segnale) originario è <u>perso per sempre</u>. Si è prodotto un irricostruibile <u>errore di aliasing</u>.



La deformazione dello spettro può essere vista come suo "ripiegamento" (*folding*) alla frequenza $f_f = f_c/2$, detta appunto *frequenza di folding*.

Una <u>estensione del teorema di campionamento</u> assicura la ricostruzione del segnale senza perdita di informazioni anche per segnali la cui banda non comprende la frequenza nulla. Per essi è possibile campionare con una frequenza doppia della banda del segnale riducendo considerevolmente la f_c nel caso di segnali a banda stretta: $f_c \geq 2B$

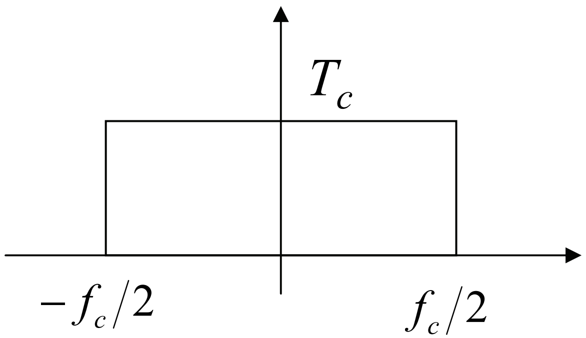


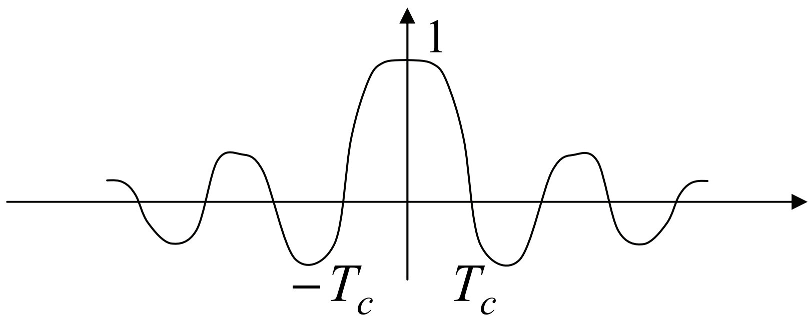
$$f_c \geq 2B = 2(f_2 - f_1)$$

Quando il teorema di campionamento è rispettato la ricostruzione del segnale originario è ottenuta, evidentemente, dal filtraggio passabasso ideale a frequenza $f_c / 2$ del segnale campionato (dal filtraggio passabanda nel caso di segnale non in banda base).

Questo filtro ha risposta in frequenza di tipo rettangolare e quindi risposta all'impulso di tipo seno cardinale:

$$H(j\omega) = \frac{1}{f_c} rect(f / f_c) \qquad h(t) = \frac{\mathrm{sen}\, \pi f_c t}{\pi f_c t}$$





Eseguendo la convoluzione del segnale campionato con la risposta all'impulso del filtro, e sfruttando note proprietà degli impulsi di Dirac, si ottiene la seguente formula, detta <u>interpolazione seno cardinale</u>:

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \frac{\operatorname{sen} \pi f_c (t - nT_c)}{\pi f_c (t - nT_c)}}$$

Essa permette la ricostruzione <u>perfetta</u> del segnale a partire dai suoi campioni

E' bene sottolineare che questo "filtraggio" è una <u>formula numerica</u> calcolata da un processore, e <u>non</u> un filtro analogico RLC al cui ingresso porre gli "impulsi" del segnale campionato. E' un esempio di <u>filtro numerico</u>.

L'interpolazione sinc è teoricamente perfetta ma richiede infiniti campioni $x(nT_c)$

In pratica quindi essa è attuabile solo con una certa approssimazione. Un esempio potrebbe essere una formula troncata a *2N+1* campioni, del tipo:

$$x(t) = \sum_{n=-N}^{+N} x(nT_c) \frac{\operatorname{sen} \pi f_c (t - nT_c)}{\pi f_c (t - nT_c)}$$

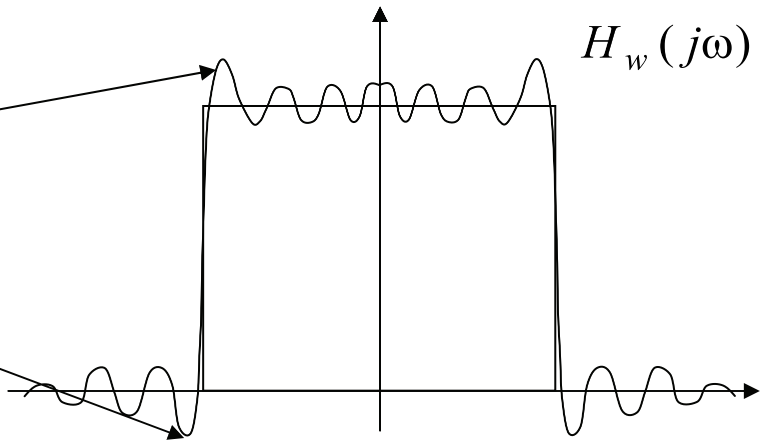
Utilizzare una formula troncata equivale a trattare il segnale campionato con un filtro la cui risposta all'impulso è un <u>seno cardinale troncato</u>: $h_w(t) = h(t) w(t)$

Un simile filtro ha una risposta in frequenza che <u>approssima male</u> la risposta del filtro passabasso ideale, il che prende il nome di <u>fenomeno di Gibbs</u>.

Infatti, lo spettro del seno cardinale troncato con finestra rettangolare è un rettangolo con forti oscillazioni attorno alla discontinuità, pari a (in percentuale del modulo della risposta passabasso ideale):

8.9 % in banda passante

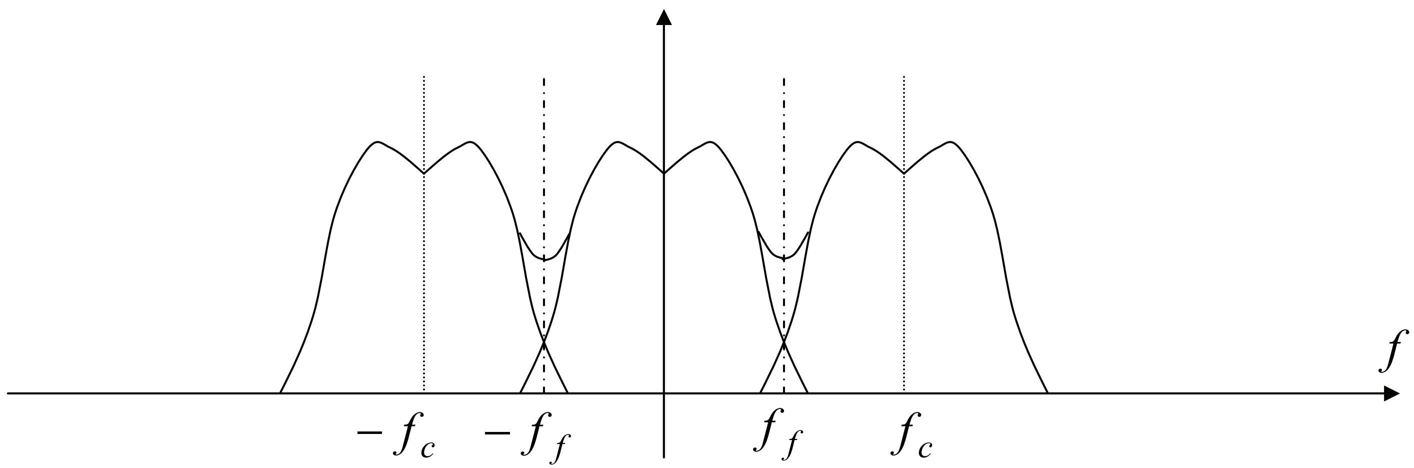
4.9 % in banda oscura



Queste oscillazioni non diminuiscono di ampiezza all'aumentare della durata della finestra, ma si limitano a infittirsi attorno alla discontinuità.

Il problema di trovare una approssimazione del *sinc* di durata non doppiamente infinita e che produca una buona risposta in frequenza passabasso è il problema del progetto di filtri numerici.

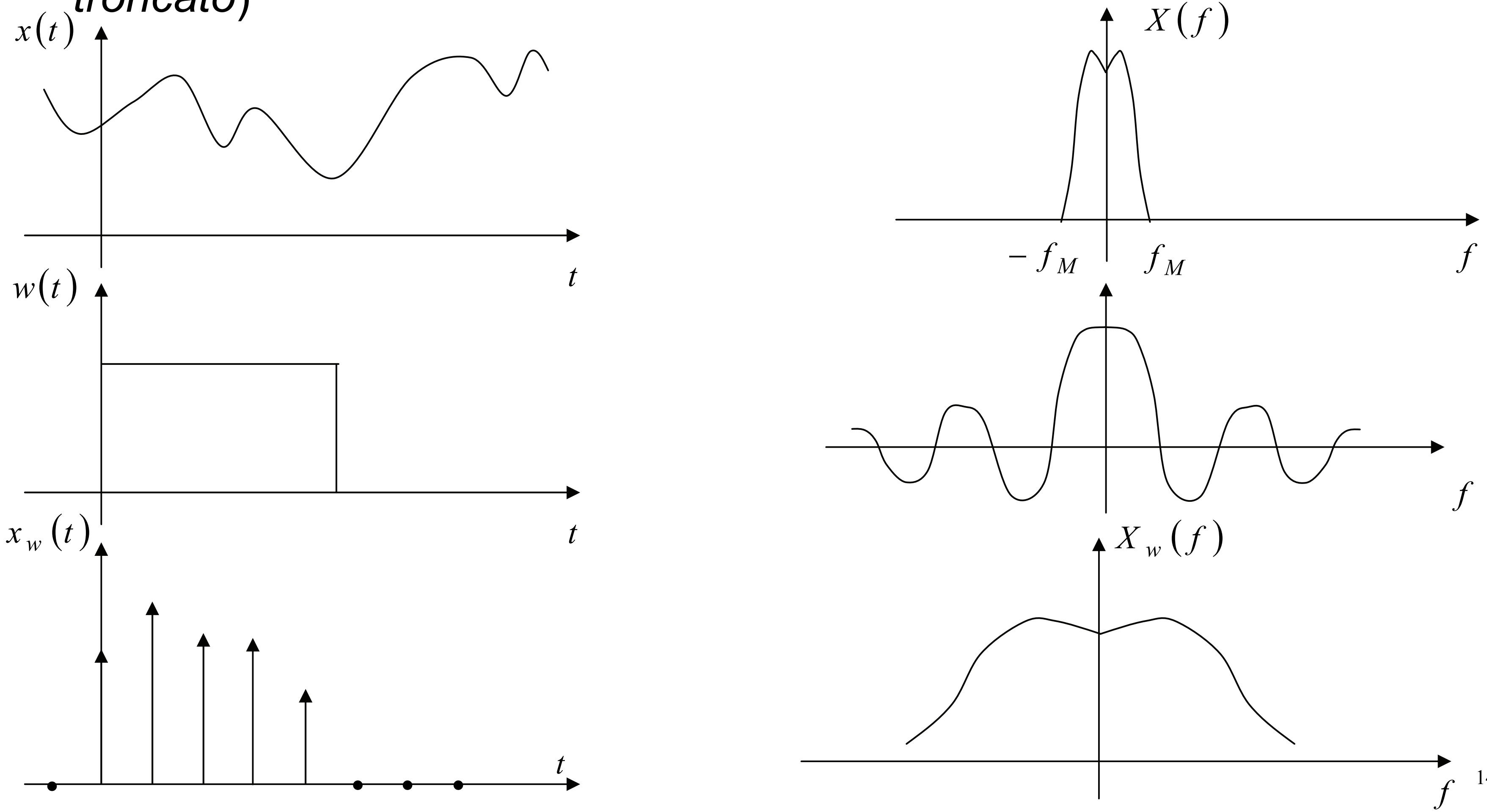
Abbiamo visto che l'esistenza di componenti spettrali del segnale oltre la frequenza di folding produce una degradazione irrecuperabile detta <u>aliasing</u>.



Per questo motivo quando la banda del segnale è "pericolosamente vicina" alla freq. di folding è sempre opportuno far precedere il campionamento da un <u>filtro analogico passabasso</u> detto <u>filtro antialiasing</u>.

Notiamo che:

- il rispetto del teorema di campionamento permette la “ricostruzione perfetta” del segnale (*interpolazione sinc*) a partire da un numero infinito di campioni $x(nT_c)$.
- In pratica essa e attuabile solo con una certa approssimazione considerando una versione troncata del segnale di partenza (*sinc troncato*)



In questo caso avremo:

$$\boxed{x_w(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_c(nT_c)w(nT_c) \Leftrightarrow X_w(f) = X\left(f\right) * W\left(f\right)}$$

Questa approssimazione causerà:

•un errore di <u>troncamento</u> facendo riferimento al fenomeno nel dominio del tempo o di <u>leakage</u> (<u>dispersione spettrale</u>) facendo riferimento al fenomeno nel dominio della frequenza

•un eventuale errore di aliasing

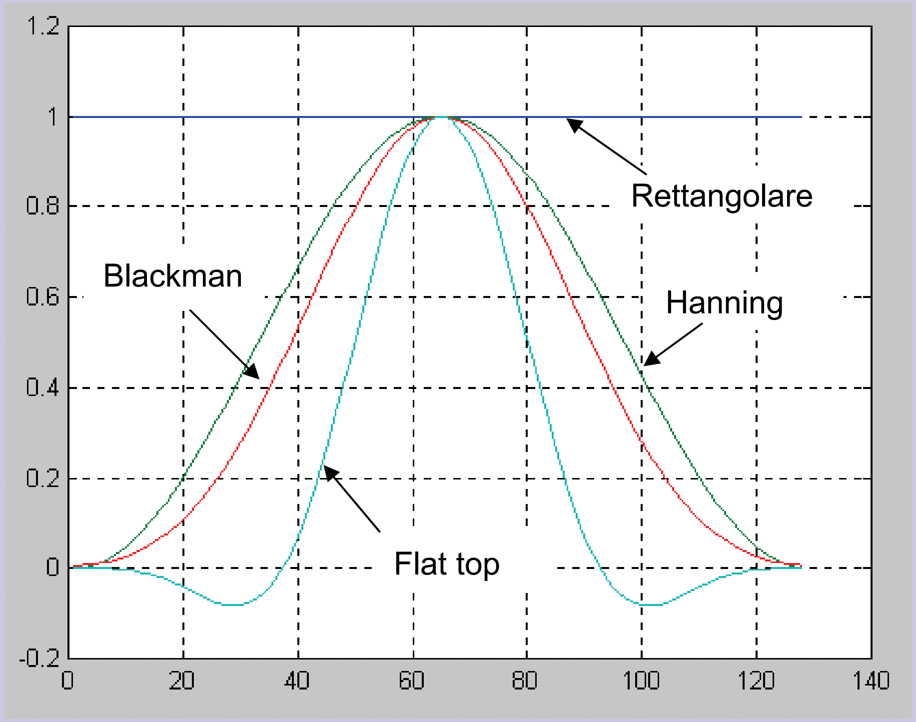
Per ridurre questo fenomeno è necessario utilizzare opportune funzioni peso o finestre (il che equivale a moltiplicare la funzione sinc (h(t)) per finestre con andamento più dolci di quella rettangolare)

Infatti a causa del troncamento brusco al termine della finestra di osservazione il segnale analogico originale viene modificato. Per ridurre tali effetti negativi si può cercare di attenuare le discontinuità introdotte nel segnale utilizzando opportune finestre peso che presentino un andamento più “dolce” agli estremi dell’intervallo di osservazione.

Non esiste la finestra “ideale” perché ogni finestra realizza un compromesso tra due fattori:

- risoluzione in frequenza (*larghezza del lobo principale*).
- dispersione spettrale (*ampiezza dei lobi laterali*).

Non si possono minimizzare simultaneamente la larghezza del lobo principale e la ampiezza dei lobi laterali a parità di durata temporale



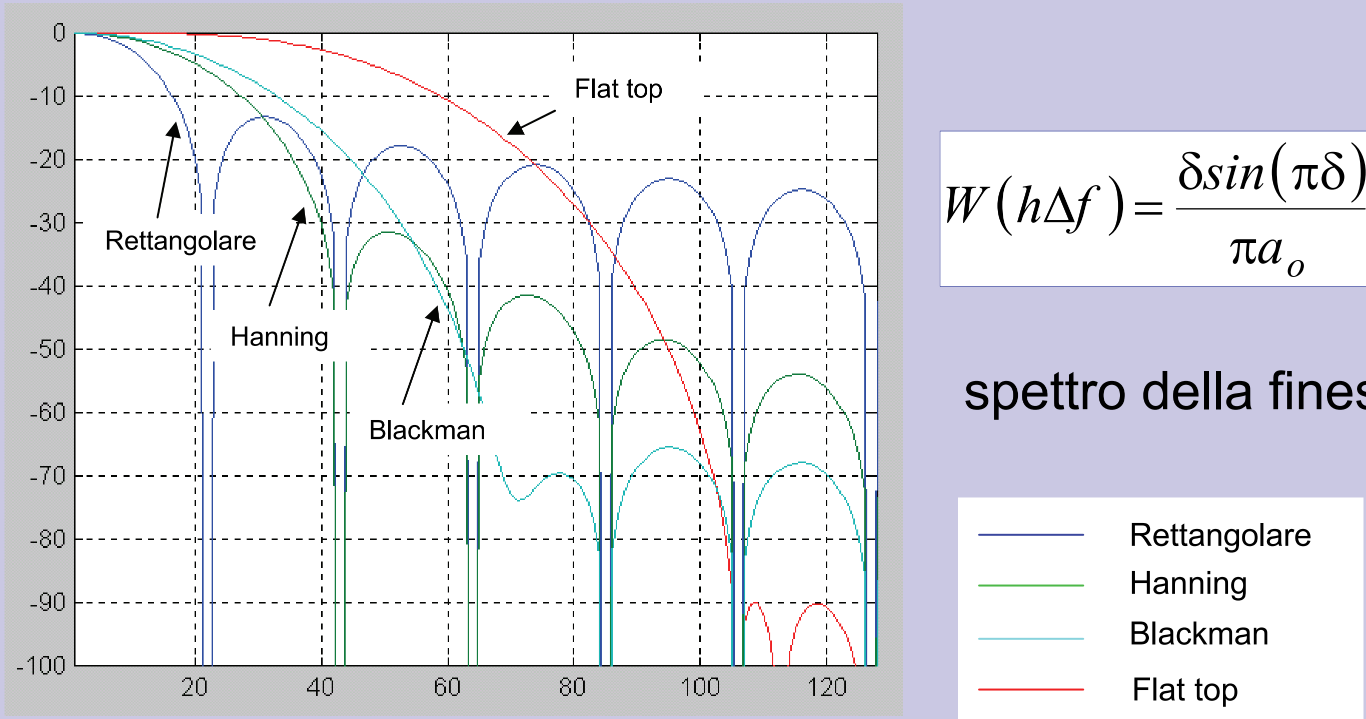
$$w(nT_c) = \sum_{l=0}^{L} (-1)^l \, a_l \cos\left(\frac{2l\pi n}{N}\right)$$

finestra coseno di ordine *L*

—	Rettangolare
—	Hanning
—	Blackman
—	Flat top

1) $\sum_{l=0}^{L} a_l = 1$ condizione di normalizzazione

2) $w^{(j)}(\pm L/2) = \sum_{l=0}^{L} (-1)^l \, l^j a_l = 0$ continuità agli estremi



$$W(h\Delta f)=\frac{\delta sin(\pi\delta)}{\pi a_o}\sum_{l=0}^{L}(-1)^l\frac{a_l}{h^2-l^2}$$

spettro della finestra coseno

1) decadimento asintotico dipendente dall'indice *j* della derivata annullata:

- $w(\pm N/2)=\underset{|t|\to N/2^-}{w(t)}\neq 0 \;\Rightarrow$ decadimento *1/f*

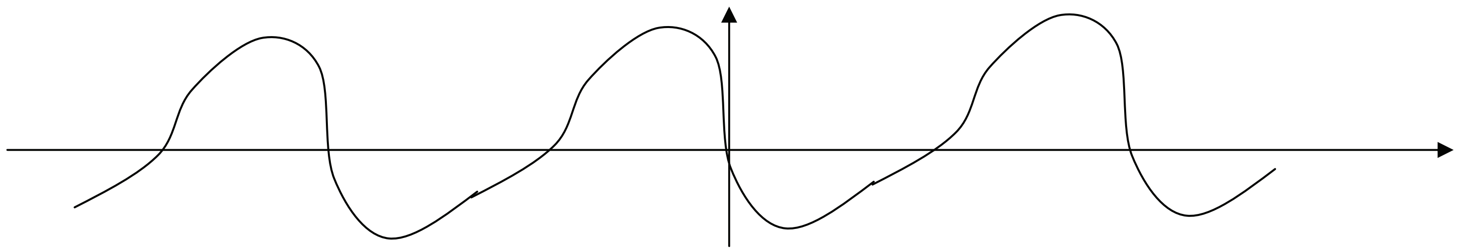
- $$w(\pm N/2) = \underset{|t|\to N/2^-}{w(t)} = 0$$
  $$w''(\pm N/2) = \underset{|t|\to N/2^-}{w''(t)} \neq 0 \quad \Rightarrow \text{ decadimento } 1/f^{3}$$

- $$w(\pm N/2) = \underset{|t|\to N/2^-}{w(t)} = 0$$
  $$w''(\pm N/2) = \underset{|t|\to N/2^-}{w''(t)} = 0 \quad \Rightarrow \text{ decadimento } 1/f^{5}$$
  $$w^{IV}(\pm N/2) = \underset{|t|\to N/2^-}{w^{IV}(t)} \neq 0$$

2) Risoluzione in frequenza proporzionale alla banda equivalente della finestra:

$$F_w = ENBW \cdot \left(\frac{f_c}{N}\right)$$

Consideriamo il caso particolare della stima dello spettro di un segnale periodico. Questo problema è di grande importanza teorica e pratica e in esso rientrano anche i problemi di stima di valore medio e quadratico medio.



Un segnale periodico di banda finita è esprimibile come:

$$x(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{jk\omega_o t}$$

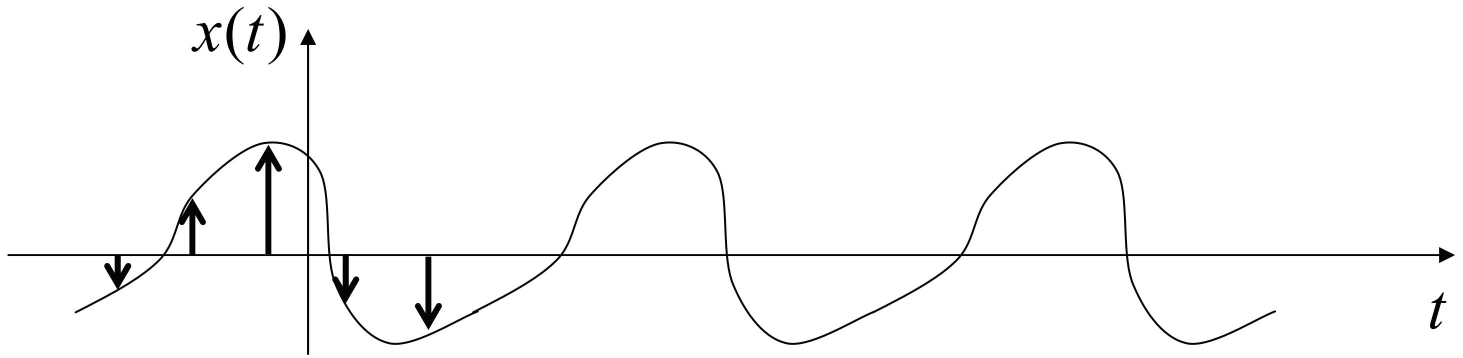
cioè come somma di n+1 termini armonici (spettro con numero finito di righe)

E’ evidente che determinare i coefficienti c_k equivale a conoscere “tutto” del segnale.

Si dimostra che i coefficienti c_k sono <u>determinabili esattamente</u> da soli $N > 2n$ campioni del segnale presi con un periodo di campionamento $T_c = T_0 / N$, essendo $T_o = 2\pi / \omega_0$ il periodo del segnale:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x\left(mT_c\right) e^{-jk\omega_o mT_c}$$ trasformata discreta di Fourier (DFT)

Si noti bene che abbiamo un caso di <u>ricostruzione analitica perfetta</u> del segnale nonostante l'uso di <u>una formula discreta e finita al posto di una continua e infinita</u>. Non c'è alcun errore di discretizzazione.



Questo “miracolo” si ha solo in questo caso particolare e si verifica quando la finestra di osservazione è esattamente multipla del periodo del segnale lo spettro del segnale finestrato è immutato in corrispondenza delle componenti armoniche originarie. In caso contrario si genera l'errore di <u>troncamento</u> o di <u>leakage</u>

La condizione qui sopra è quella di <u>campionamento sincronizzato</u> o <u>coerente</u>

Alla fine di tutto si riesce a ricostruire il segnale originario (o il suo spettro, il che è lo stesso) a partire da N campioni.

N.B.: considerando la risoluzione in frequenza della DFT si ha

$\Delta F = F_C/N = 1/T_C N = N/T_0 N = F_0$

ossia alla sequenza di campioni della DFT intervallati di ΔF, corrisponderà la sequenza esatta delle componenti armoniche dello spettro del segnale periodico che, per definizione, sono intervallate di un valore in frequenza pari prorio all'inverso del periodo ($F_0=1/T_0$)

Riepilogo sul campionamento negli strumenti di misura

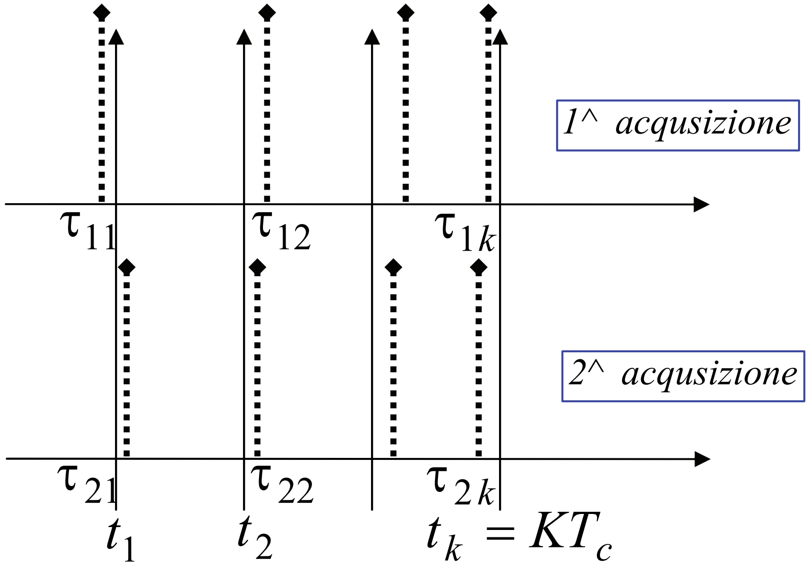
- campionare significa considerare un segnale analogico in istanti non solo discreti, ma anche in numero finito;
- la ricostruzione esatta del segnale è quindi teoricamente possibile solo per segnali periodici a banda limitata;
- in questo caso ricostruire significa calcolare le componenti armoniche (che infatti sono in numero finito);
- in questo caso, inoltre, la ricostruzione richiede una finestra di osservazione rettangolare di periodo multiplo della frequenza del segnale (campionamento coerente);
- se il campionamento non è coerente, la ricostruzione è affetta da errori che si possono ridurre scegliendo una finestra con caratteristiche spettrali migliori della rettangolare;
- la scelta della finestra dipende comunque dal tipo di segnale e soprattutto dal parametro da misurare.

- i segnali aperiodici a banda limitata hanno spettro continuo e quindi non è comunque possibile una ricostruzione esatta come nel caso dei segnali periodici;

- inoltre se non si dispone dei valori del segnale da $-\infty$ a $+\infty$ (caso tipico), è possibile ottenere lo spettro solo con una certa approssimazione, che è la stessa del caso dei segnali periodici con campionamento non sincronizzato;

- sono quindi utili in questo caso finestre con caratteristiche spettrali opportune, diverse a seconda del tipo di misura (di frequenza o di ampiezza dello spettro).

Per studiare gli errori di campionamento dobbiamo anche considerare che gli istanti di campionamento reali non solo sono diversi da quelli ideali ma <u>sono anche diversi per diverse acquisizioni eseguite nelle medesime condizioni</u>.



Chiamiamo t_k gli istanti di campionamento ideali:

$$t_k = kT_c$$

Gli istanti di camp. reali sono diversi per ogni acquisizione (i=1,..M), quindi scriviamo:

$$\boxed{\tau_{ik} = t_k + e_{ik} = t_k + \underbrace{es_k}_{\text{sistematico}} + \underbrace{ec_{ik}}_{\text{casuale}}}$$

τ_{ik} k-mo istante di camp. della i-ma acquisizione

e_{ik} k-mo errore di camp. della i-ma acquisizione

L'errore sull'istante di campionamento può essere scomposto in una componente sistematica e componente casuale

Infatti, conviene distinguere, come al solito, tra componente sistematica e componente casuale dell'errore.

$$E\left[\tau_{ik}\right] = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \tau_{ik} = \tau_k$$ <u>valore atteso</u> o <u>medio</u> degli istanti. di c.

$$es_k = \tau_k - t_k$$ <u>errore sistematico</u> sugli istanti di c.

$$ec_{ik} = \tau_{ik} - \tau_k \qquad (E\left[ec_{ik}\right] = 0)$$ <u>errore casuale</u> sugli istanti di c.

$$e_{ik} = \tau_{ik} - t_k = es_k + ec_{ik}$$ <u>errore totale</u> sugli istanti di c.

$$\tau_{ik} = t_k + e_{ik} = t_k + es_k + ec_{ik}$$ istanti di campionamento reali

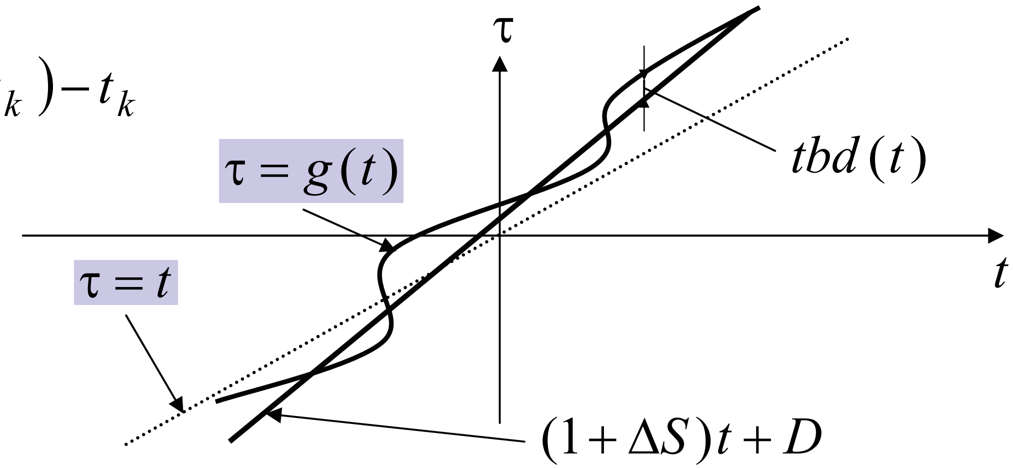
Naturalmente il fatto che l'errore abbia una componente sistematica è una realtà fisica che <u>non significa assolutamente che questa componente sia nota</u>!

L'errore sistematico es_k *dipende esclusivamente dall'indice* k *o, se si preferisce, dal corrispondente istante ideale* $t_k = kT_c$. Quindi si ha:

$$\tau_k = g(t_k)$$

$$es_k = E[\tau_{ik}] - t_k = \tau_k - t_k = g(t_k) - t_k$$

La curva *g(t)* è una caratteristica statica non lineare che approssima la "retta teorica" $\tau = t$



Il modo standard per descrivere un <u>errore sistematico statico</u> consiste nel decomporlo in *errore di guadagno*, *errore di offset* ed *errore di linearità*.

$$\tau_k = g(t_k) = (1+\Delta S)t_k + D + tbd(t_k) \quad \Longrightarrow \quad es_k = \tau_k - t_k = \Delta S \cdot t_k + D + tbd(t_k)$$

ΔS errore di velocità di spazzolamento (*sweep speed error*)

D errore di ritardo del trigger (*trigger delay error*)

tbd errore di distorsione della base dei tempi (*timebase distortion error*).

E' bene osservare che:

- Queste quantità sono effettivamente errori (non incertezze).
- Se gli errori sono noti (operazione di calibrazione della base dei tempi) l'errore sistematico di campionamento può essere in teoria totalmente rimosso mediante opportuna correzione digitale.

Normalmente di uno strumento non conosciamo gli errori ma maggiorazioni del valore assoluto degli errori, fornite dalla casa costruttrice. Queste quantità sono spesso chiamate errori (sottinteso massimi) nei manuali, ma in effetti sono incertezze.

$|\Delta S| < U_S$ incertezza di velocità di sweep

$|D| < U_D$ incertezza di ritardo del trigger

$|tbd(t)| < U_{TBD}$ incertezza di distorsione della base dei tempi

Questi valori possono essere forniti in tutto, in parte o per niente, e in varie forme più o meno chiare e più o meno esplicite. Spesso è fornita solo U_S , considerando U_D irrilevante e U_{TBD} trascurabile.

L’errore casuale di campionamento può essere decomposto in un jitter del trigger jt_i e in un jitter di campionamento nt_{ik} (o rumore di fase o rumore di tempo o incertezza di apertura):

$$ec_{ik} = jt_i + nt_{ik}$$

Tali componenti possono essere espresse in termini di varianza

$$\sigma_{jt}^2 = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (jt_i)^2$$ varianza del jitter del trigger

$$\sigma_{nt}^2 = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (nt_{ik})^2$$ varianza del jitter di campionamento

• Il <u>jitter del trigger</u> è il valore atteso dell’errore casuale ed è un processo stazionario a media nulla

• il <u>jitter di campionamento</u> è un processo casuale stazionario ed ergodico a media nulla di solito gaussiano bianco:

$$nt_{ik} = ec_{ik} - jt_i$$

Tenendo ora presente che:

$$\tau = g(t) + jt_i + nt_i(t) = (1 + \Delta S)t + D + tbd(t) + jt_i + nt_i(t)$$

si può scrivere il segnale di uscita come:

$$y(\tau) = x\left[g(t) + jt_i + nt_i(t)\right] = x\left[(1 + \Delta S)t + D + tbd(t) + jt_i + nt_i(t)\right]$$

Pertanto, il processo di campionamento reale può essere descritto come:

1) dovrebbe partire esattamente all'istante di trigger, ma parte con un certo ritardo (effetto di D);

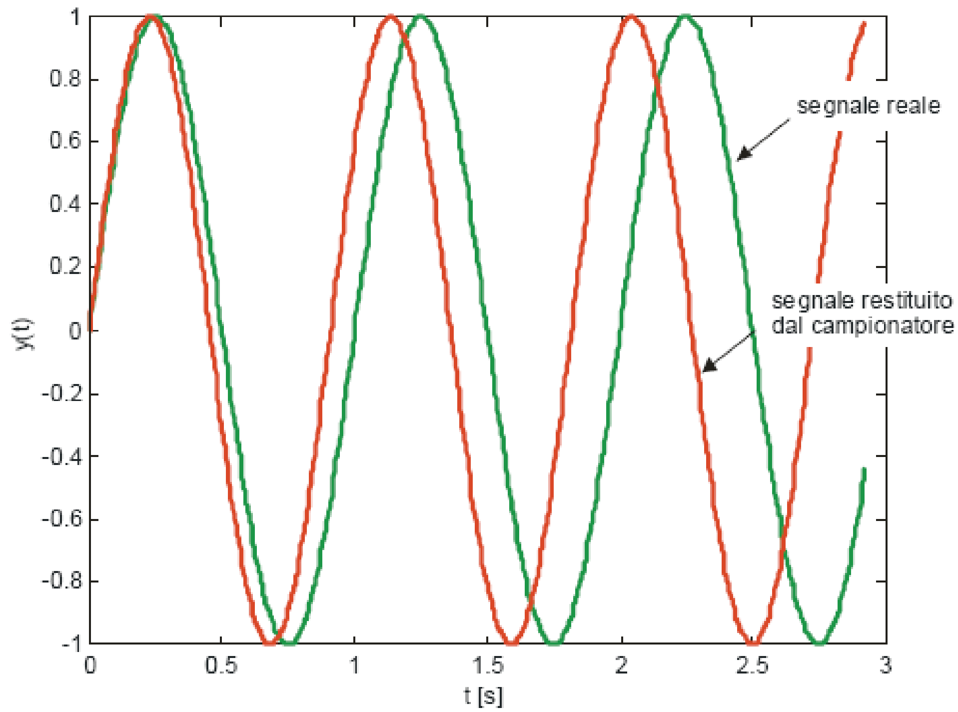
2) la frequenza di campionamento è leggermente diversa da quella nominale (effetto di ΔS);

3) inoltre, gli intervalli di campionamento possono essere diseguali tra loro secondo una sequenza che si ripete sempre uguale in ogni acquisizione (effetto di $tbd(t)$);

4) il ritardo con cui parte il campionamento non è realmente fisso, ma varia leggermente attorno a D tra un’acquisizione e un’altra (effetto di jt_i);

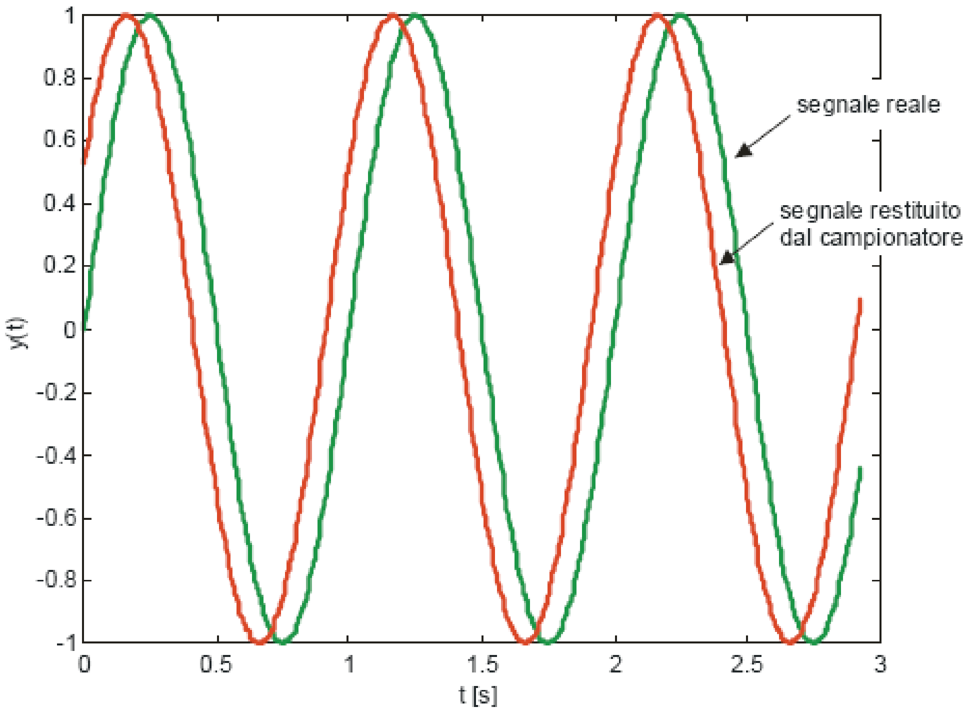
5) infine, rispetto a tutto ciò gli istanti di campionamento effettivi presentano una ulteriore variazione completamente casuale (effetto di nt_{ik}).

effetto dello sweep speed error (caso in cui $\Delta S>0$)



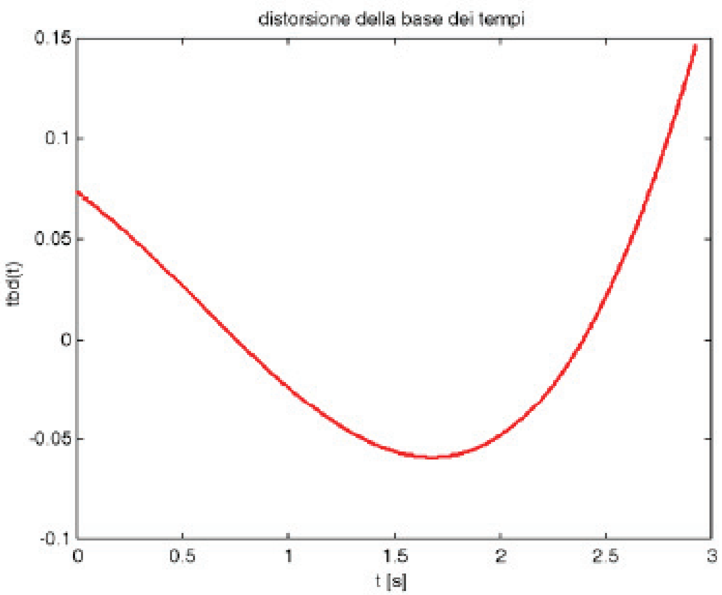
Lo *sweep speed error* causa errori di stima della frequenza del segnale; per $\Delta S>0$ la frequenza del segnale digitalizzato appare maggiore di quella reale

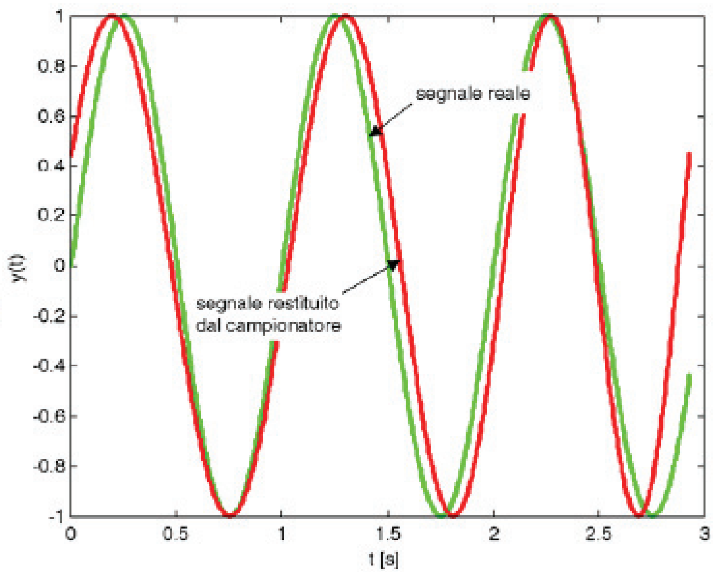
effetto dell'errore di ritardo del trigger (D)



il ritardo sistematico del trigger causa una distorsione di fase lineare

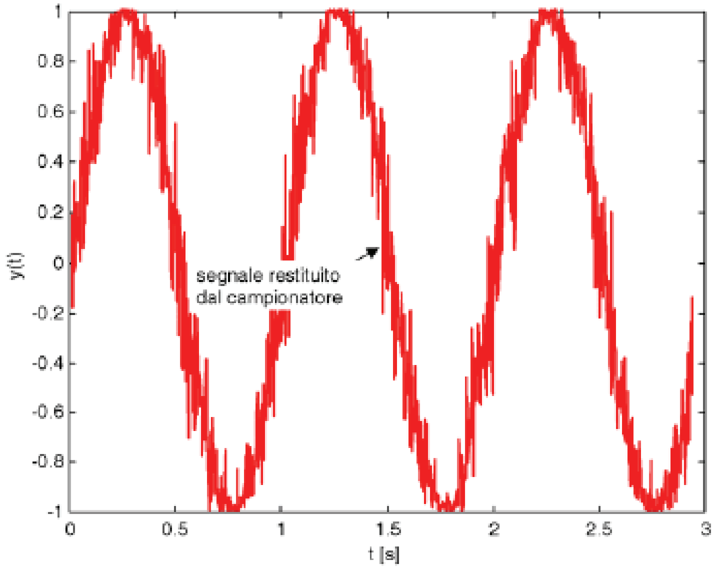
effetto della distorsione della base dei tempi

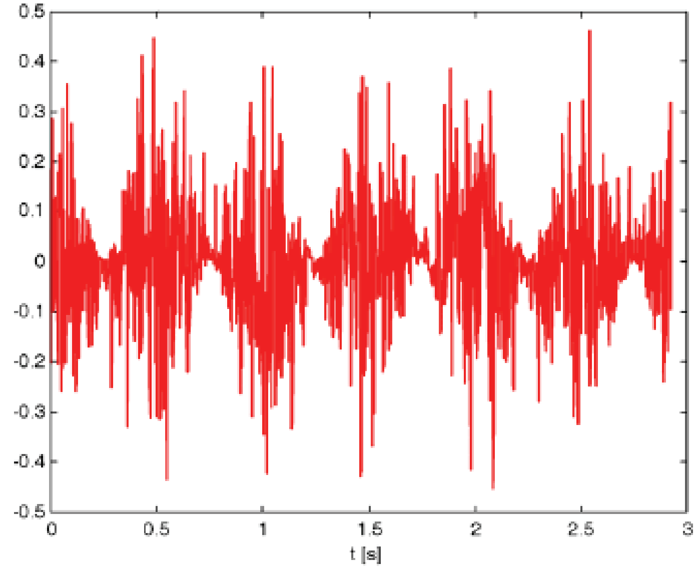




il termine *tbd(t)* provoca una modulazione di frequenza locale del segnale campionato; l'errore di frequenza è mediamente nullo.

effetto di un rumore di fase di varianza $25T_C^2$





differenza tra sequenza ideale e sequenza reale

Il rumore di fase causa un errore che somiglia ad un rumore d'ampiezza ma che è funzione della derivata prima del segnale: nei tratti a pendenza elevata l'errore è maggiore che nei tratti a pendenza ridotta.

In definitiva gli istanti di campionamento reali sono legati agli istanti di campionamento ideali dalla relazione:

$$\boxed{\tau_k = t_k + D + \Delta S \cdot t_k + tbd(t_k) + jt_i + nt_i(t_k)}$$

e quindi

<u>*il campionamento reale equivale a un campionamento ideale eseguito su un segnale con la base dei tempi deformata*</u>

e

per determinare l'incertezza da cui è affetta una qualunque misura è necessario, a rigore, conoscere le quantità: U_S , U_D , U_{TBD} , σ^2_{nt} , σ^2_{jt}