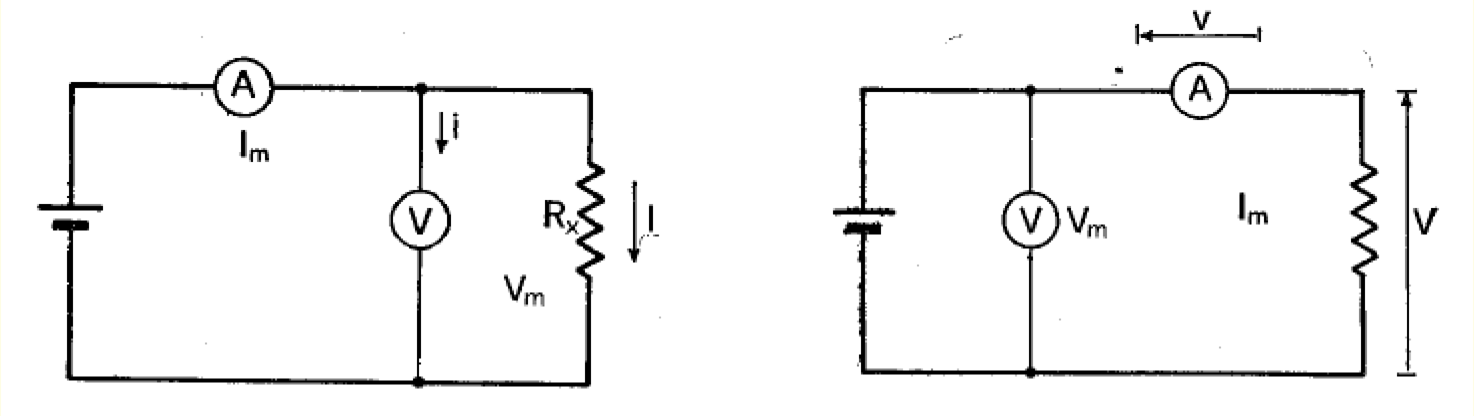
# ***Metodi di misura di resistenze***

# Misura di Resistenza con il Metodo Voltamperometrico / 1

Il *Metodo Voltamperometrico* prevede la misura contemporanea della corrente e della tensione ai capi di un resistore in esame, per *misurarne indirettamente il valore di resistenza*. Per questo si possono impiegare due schemi di inserzione degli strumenti, mostrati nelle figure:




***Voltmetro a valle*** ***Voltmetro a monte***

$$R_m = \frac{V_m}{I_m} \quad \Rightarrow \quad U_{R_x} = |R_m| \left( \frac{U_V}{|V_m|} + \frac{U_I}{|I_m|} \right) \quad \Rightarrow \quad R_x = R_m \pm U_{R_x}$$

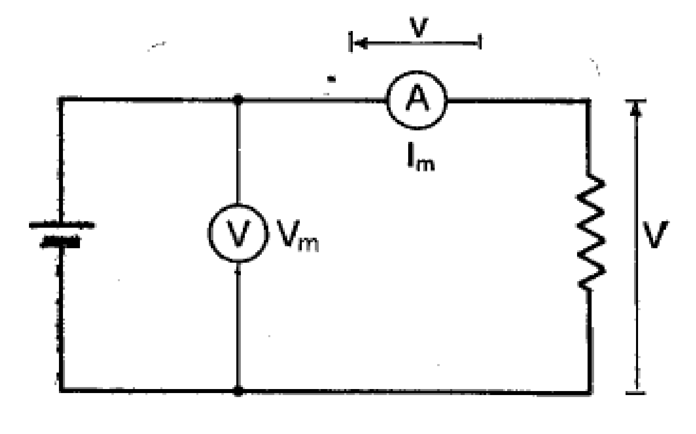
# Misura di Resistenza con il Metodo Voltamperometrico / 2

*La resistenza interna di un amperometro è <u>diversa da zero</u> e quella di un voltmetro <u>diversa da infinito</u>. Non è quindi possibile leggere contemporaneamente la tensione ai capi della resistenza e la corrente in essa inviata. Infatti nello schema del <u>voltmetro a monte</u>:*

- *L'amperometro misura la corrente che effettivamente fluisce nella $R_x$;*
- *Il voltmetro misura non la CdT (caduta di tensione) ai capi di $R_x$, ma la somma di questa più la caduta di tensione ai capi dell'amperometro.*

$$I_m = I_x$$

$$V_m = V_a + V_x$$




$$R_m = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_a + V_x}{I_x} = R_a + R_x$$

$$E_{R,c} = R_m - R_x = R_a$$

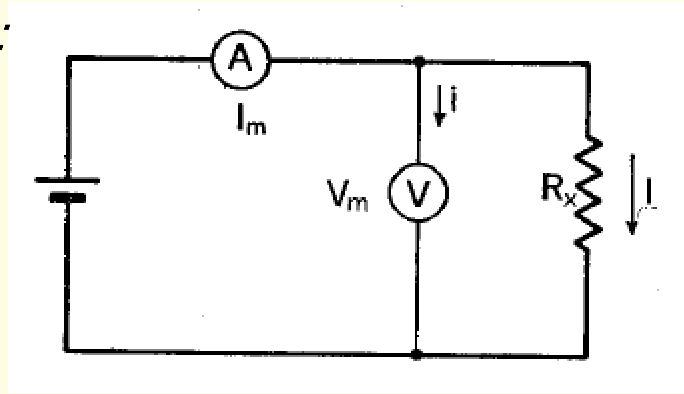
$$e_{R,c} = \frac{E_{R,c}}{R_x} = \frac{R_a}{R_m - R_a}$$

*Quindi è più adatto per la misura di "grandi resistenze": $R_x >> R_a$*

# Misura di Resistenza con il Metodo Voltamperometrico / 3

*Nello schema del voltmetro a valle, invece:*

- *il voltmetro misura effettivamente la tensione ai morsetti di $R_x$;*
- *L'amperometro misura non la corrente che attraversa la $R_x$, ma la somma di questa più la corrente assorbita dal voltmetro.*




$$V_m = V_x$$
$$I_m = I_v + I_x$$

$$R_x = \frac{V_m}{I_x} = \frac{V_m}{I_m - I_v} = \frac{1}{\frac{I_m}{V_m} - \frac{I_v}{V_m}} = \frac{R_m R_v}{R_v - R_m}$$

$$E_{R,c} = R_m - R_x = R_m - \frac{R_m R_v}{R_v - R_m} = \frac{-R^2{}_m}{R_v - R_m}$$

$$e_{R,c} = \frac{E_{R,c}}{R_x} = \frac{-R_m}{R_v}$$

*Quindi è più adatto per la misura di "piccole resistenze": $R_x << R_v$*

# Incertezza complessiva di *caso peggiore* nel Metodo Voltamperometrico

$$resistenza = \frac{tensione\ misurata}{corrente\ misurata} - errore\ di\ consumo$$

*Inserzione a monte:*

$$R_x = \frac{V_m}{I_m} - R_a = R_m - R_a \quad \Rightarrow \quad U_{R_x} = |R_x| \left( \frac{U_V}{|V_m|} + \frac{U_I}{|I_m|} \right) + U_{R_a}$$

*Inserzione a valle:*

$$R_x = \frac{1}{I_m / V_m - 1/R_v} \quad \Rightarrow U_{R_x} = |R_x| \left( \frac{U_V}{|V_m|} + \frac{U_I}{|I_m|} \right) \left( 1 + \frac{|R_x|}{|R_v|} \right) + \frac{R_x^2}{R_v^2} U_{R_v}$$

*L'errore di consumo è tanto trascurabile quanto più è piccola $R_a$ rispetto a $R_x$ nell'inserzione a monte, e quanto più è grande $R_v$ rispetto a $R_x$ nell'inserzione a valle.*

# Incertezza complessiva *standard* nel Metodo Voltamperometrico

*Inserzione a monte:*

$$U_{R_x,std} = \sqrt{R_x^2\left(\frac{U_{V,std}^2}{V_m^2}+\frac{U_{I,std}^2}{I_m^2}\right)+U_{R_a,std}^2}$$

*Inserzione a valle:*

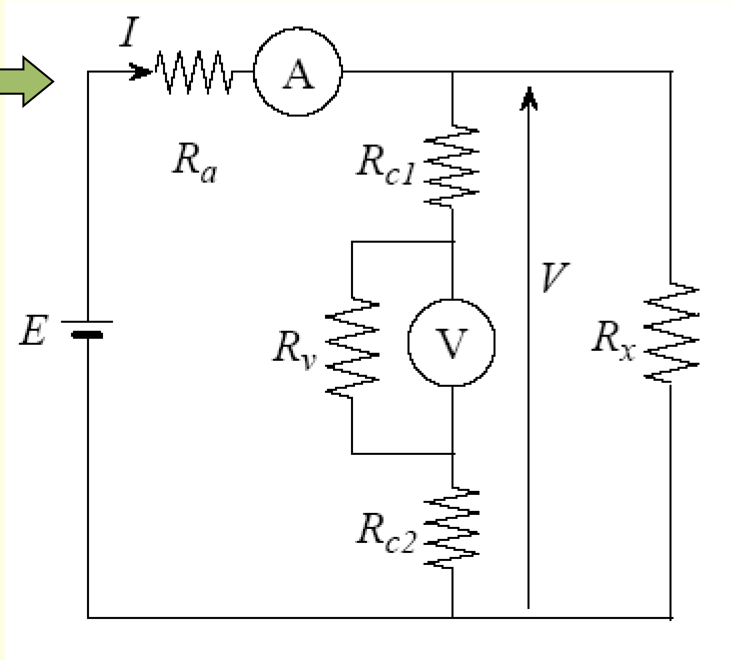
$$U_{R_x,std} = \sqrt{R_x^2\left(\frac{U_{V,std}^2}{V_m^2}+\frac{U_{I,std}^2}{I_m^2}\right)\left(1+\frac{|R_x|}{|R_v|}\right)^2+\frac{R_x^4}{R_v^4}U_{R_v,std}^2}$$

***A seconda della <u>trascurabilità</u> di uno o due termini sotto radice rispetto ai rimanenti, la distribuzione degli errori su $R_x$ sarà – come è noto – gaussiana, trapezoidale, triangolare, uniforme.***

***Gli <u>intervalli di confidenza</u> in funzione dei rispettivi <u>livelli di fiducia</u> potranno essere calcolati solo nota che sia il tipo di distribuzione.***

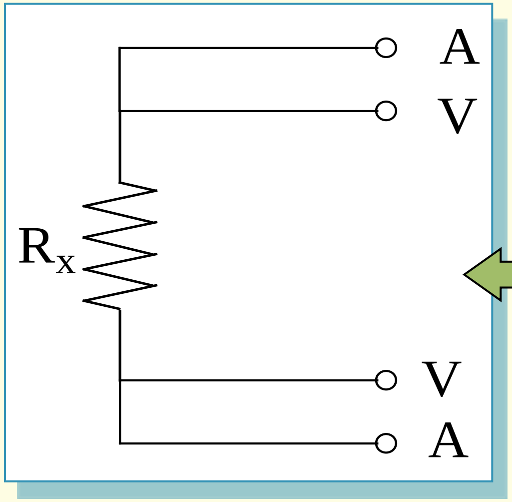
# L'utilizzo delle resistenze a 4 morsetti

***Il circuito equivalente modificato è il seguente:***



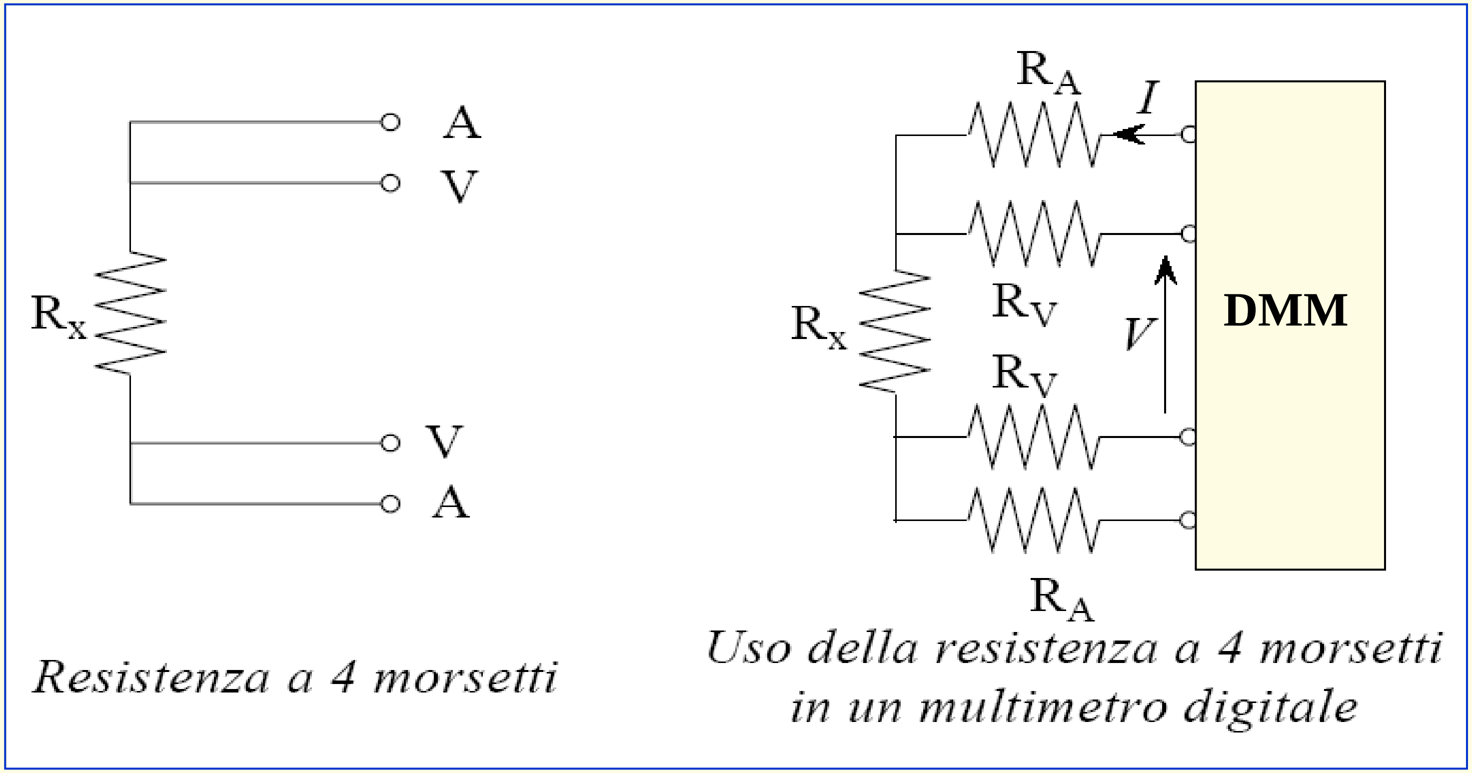

$$R_a << R_v' = R_v + R_{c1} + R_{c2} \approx R_v$$

$$\Rightarrow R_m = \frac{V_m}{I_m} = R_x$$



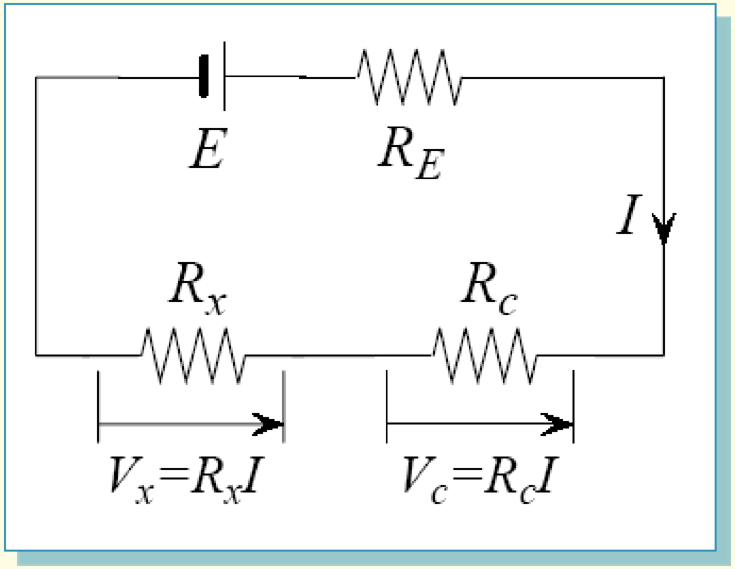

***Questo ha portato all'utilizzo di resistori a 4 morsetti (due amperometrici e due voltmetrici) per misure di resistenza di piccolo valore***

# Inserzione voltamperometrica nei multimetri




***Il multimetro digitale nella funzione ohmmetro opera il rapporto tra la tensione misurata ai morsetti voltmetrici e la corrente inviata attraverso i morsetti amperometrici***

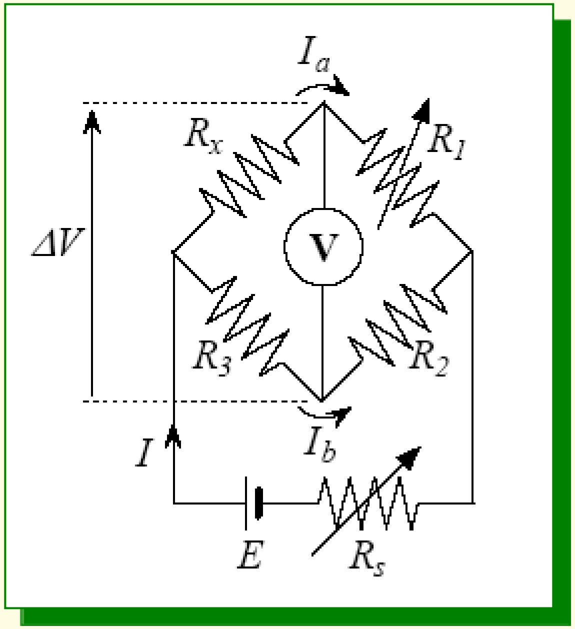
# Metodo di Confronto a Caduta di Tensione (misura di piccole resistenze)




*Poiché le due resistenze sono attraversate dalla* <u>*stessa corrente*</u>*, se si misurano le due cadute di tensione* $V_x$ *e* $V_c$ *ed è noto il valore della* <u>*resistenza campione*</u> $R_c$*, si può scrivere:*

$$\boxed{\frac{V_x}{R_x} = \frac{V_c}{R_c} \quad \Rightarrow \quad R_x = R_c \frac{V_x}{V_c}}$$

# Il metodo del Ponte di Wheatstone per la misura di resistenza (metodo di zero)

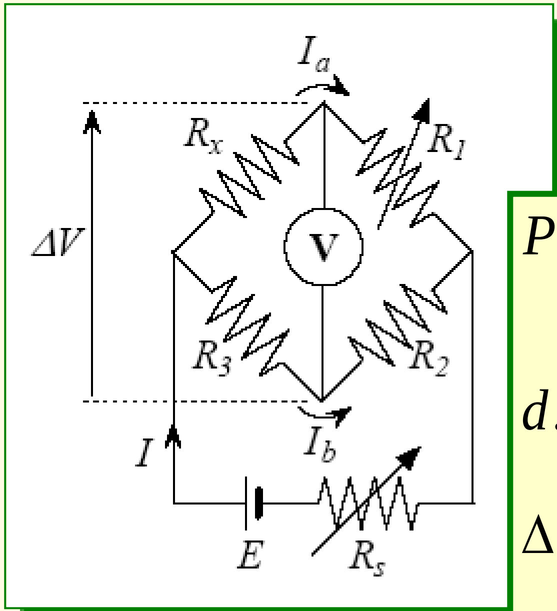



*E' un metodo di misura indiretta di resistenza che <u>non necessita di letture strumentali</u>.*

*Siano: $R_x$ la <u>resistenza incognita</u>; $R_1$ (variabile), $R_2$ e $R_3$ tre <u>resistenze "campioni"</u>; E la f.e.m. applicata; I la corrente erogata, limitata dal reostato $R_s$; V un voltmetro che misura la d.d.p. $\Delta V$; $I_a$ e $I_b$ le correnti sui due rami del ponte, una volta raggiunto l'<u>equilibrio</u>.*

| | | |
|---|---|---|
| *Tensione applicata:* | $E' = E - R_s I$ | *(d.d.p. sulla diagonale di alimentazione)* |
| *Condizione d'equilibrio:* | $\Delta V = 0$ | *(d.d.p. sulla diagonale di rivelazione)* |

# Funzionamento del Ponte di Wheatstone




$$Poniamo: \quad R_a = R_x + R_1 \quad e \quad R_b = R_3 + R_2$$

$$d.d.p.\ di\ squilibrio:$$

$$\Delta V = R_1 I_a - R_2 I_b = E\frac{R_1}{R_a} - E\frac{R_2}{R_b} = E\frac{R_1 R_3 - R_x R_2}{R_a R_b}$$

$$Equilibrio: \quad \Delta V = 0 \iff R_1 R_3 = R_x R_2$$

$$Da\ cui: \quad R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}; \quad u_{R_x} = u_{R_1} + u_{R_3} + u_{R_2}$$

# Incertezza di sensibilità nel Ponte di Wheatstone

*Il voltmetro (supposto digitale) fornirà* *<u>indicazione nulla</u>* *finché il modulo della d.d.p. di squilibrio $\Delta V$ sarà* *<u>inferiore all'incertezza di quantizzazione</u>*:

$$\left|\Delta V\right| \le \frac{Q}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_m = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{R_2 R_x}{R_3}$$

*Supponiamo quindi che ci sia equilibrio ($\Delta V$=0) anche per un valore:*

$$R_1' = R_1 + \Delta R_1 = \frac{R_2 R_x}{R_3} + \Delta R_1$$

*Pertanto ci sarà una* *<u>reale</u>* *$\Delta V'$ (non misurabile) data da:*

$$\Delta V' = E\,\frac{R_1' R_3 - R_x R_2}{R_a R_b} = E\,\frac{\left(R_1 + \Delta R_1\right) R_3 - R_x R_2}{R_a R_b} = E\,\frac{\Delta R_1 R_3}{R_a R_b}$$

**Incertezza di sensibilità**

$$\left|\Delta V'\right| \le \frac{Q}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left|E\right| \frac{\left|\Delta R_1\right| R_3}{R_a R_b} \le \frac{Q}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\Delta R_1\right| \le \frac{Q/2}{\left|E\right|} \frac{R_a R_b}{R_3} = U_{\sigma R_1}$$

# Valutazione dell'incertezza complessiva nel Ponte di Wheatstone

*Il valore misurato di $R_x$ e la sua incertezza di caso peggiore saranno:*

$$R_{x,m} = \frac{R_1 R_3}{R_2}; \qquad U_{R_x} = R_{x,m}\left(\frac{U_{\sigma R_1}}{R_1} + \frac{U_{R_1}}{R_1} + \frac{U_{R_2}}{R_2} + \frac{U_{R_3}}{R_3}\right)$$

*Poiché:*

$$u_{\sigma R_1} = \frac{U_{\sigma R_1}}{R_1} = \frac{Q/2}{|E|}\left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) = \frac{Q/2}{|E|}\left(1 + \frac{R_{x,m}}{R_1}\right)\left(1 + \frac{R_1}{R_{x,m}}\right)$$

*la condizione di <u>minimo</u> per l'incertezza di sensibilità sarà:*

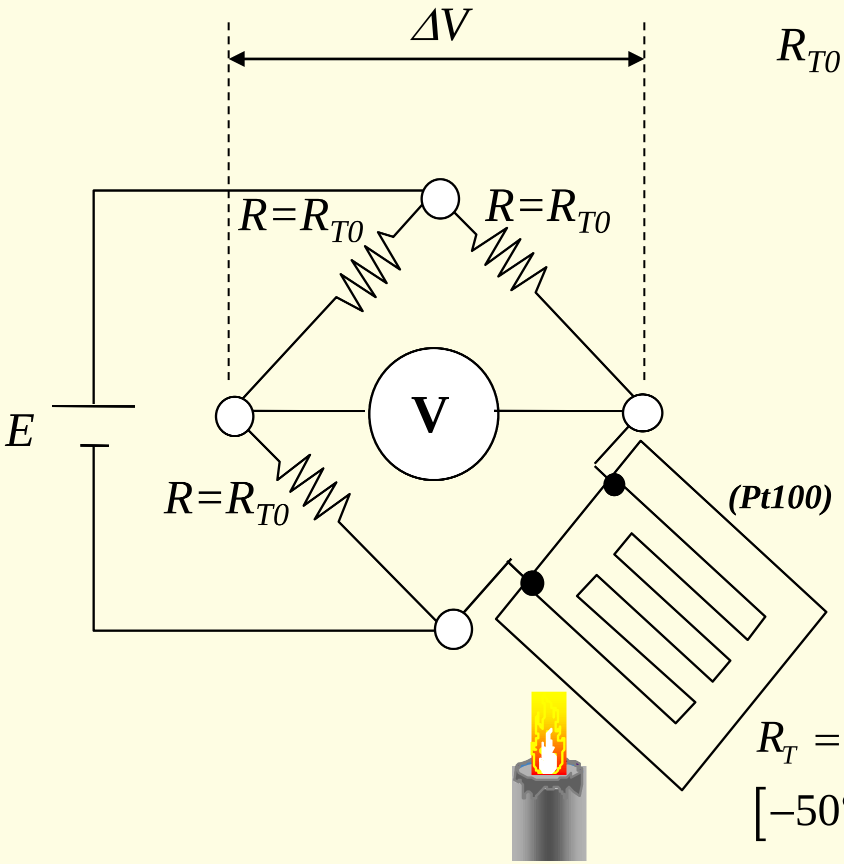
$$u_{\sigma R_1,\min} = u_{\sigma R_1}\Big|_{R_1 = R_x} = u_{\sigma R_1}\Big|_{R_2 = R_3} = 4\frac{Q/2}{|E|}$$

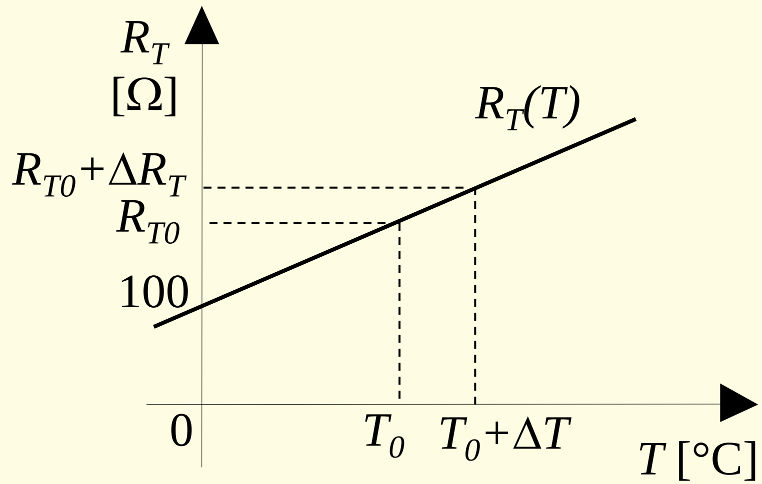
*Tipicamente, le quattro resistenze si fanno <u>uguali</u> (condizione di Heaviside).*

*Per un'incertezza di sensibilità <u>trascurabile</u> rispetto alle altre, si ha quindi:*

$$U_{R_x} \approx R_{x,m}\left(\frac{U_{R_1}}{R_1} + \frac{U_{R_2}}{R_2} + \frac{U_{R_3}}{R_3}\right)$$

# Applicazione del PdW a deviazione: misura di temperatura con sonde Pt100



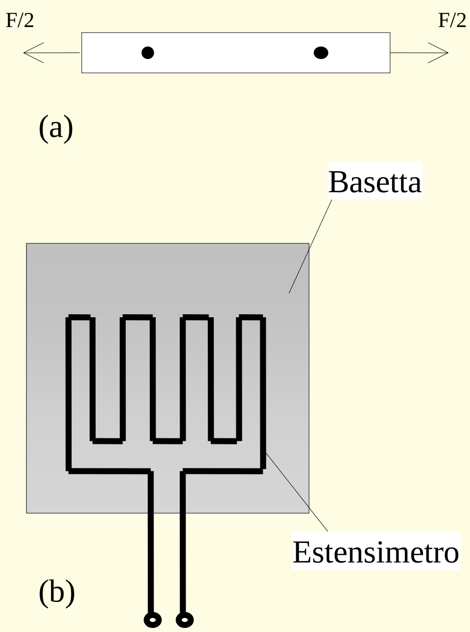

***Caratteristica I/O di una Pt100***

$$\Delta V = \frac{E}{4}\frac{\Delta R_T}{R_{T0}} = \frac{E}{4}\frac{0,385\cdot\Delta T}{R_{T0}} = k_T\Delta T$$

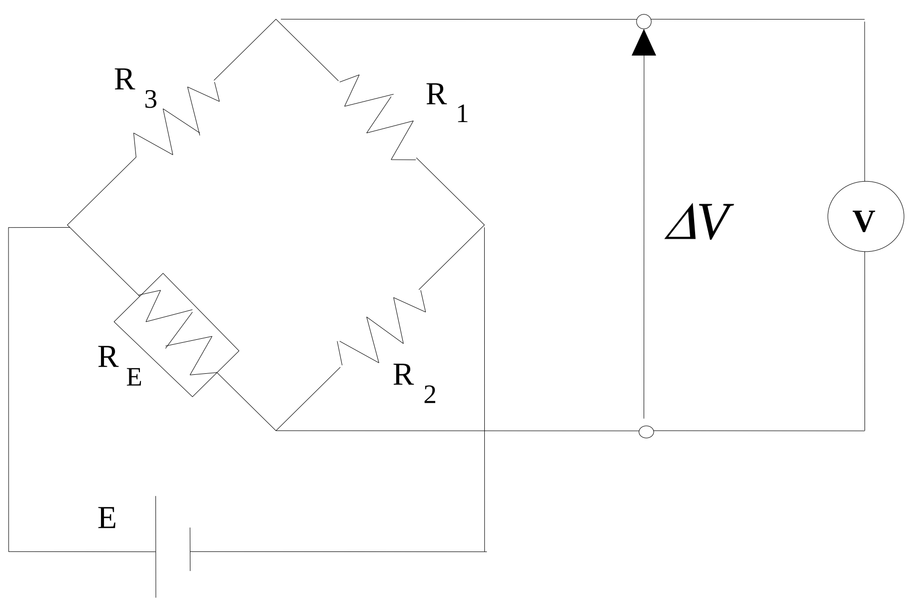
$$R_T = 100\cdot(1+0,00385\cdot T)$$

$$\left[-50°\ C \le T \le 450°\ C\right]$$

# Applicazione del PdW a deviazione: misura di forza con Estensimetri / 1




***Estensimetro soggetto a trazione e sua realizzazione tecnologica***




***Estensimetro inserito in un ponte di Wheatstone a deviazione***

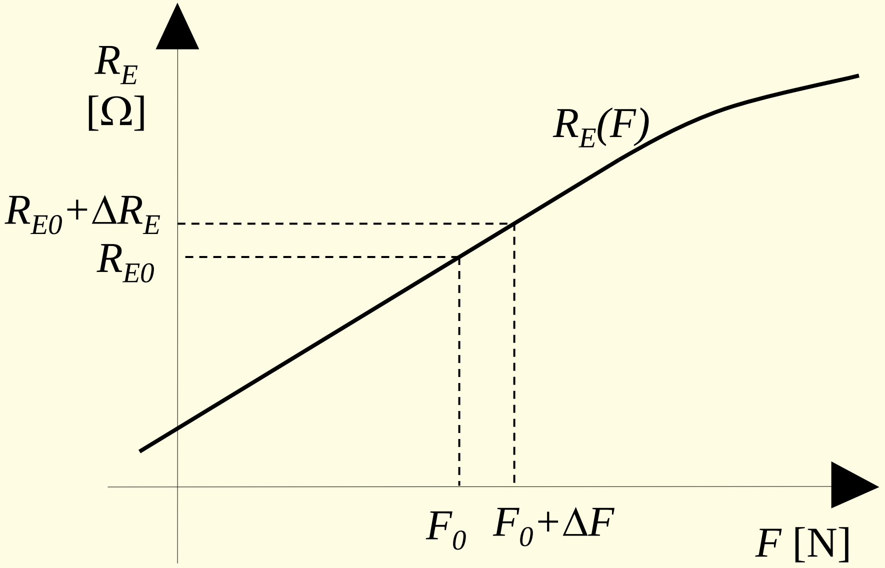
# Applicazione del PdW a deviazione: misura di forza con Estensimetri / 2

Per la taratura del sistema occorre conoscere il valore della resistenza dell'estensimetro per una fissata forza $F_0$. Tale valore $R_{E0}$ si ottiene dall'esame della caratteristica I/O.
Si pone quindi:

$$R_i = R_{E0} \qquad i = 1, 2, 3$$

Per valori diversi da $F_0$ il voltmetro segnerà valori differenti dallo zero ("*segnale d'errore*"):

$$\boxed{\Delta V = \frac{E}{4}\frac{\Delta R_E}{R_{E0}} = \frac{E}{4}\frac{k_E \Delta F}{R_{E0}} = k_F \Delta F}$$




***Caratteristica I/O di un estensimetro***