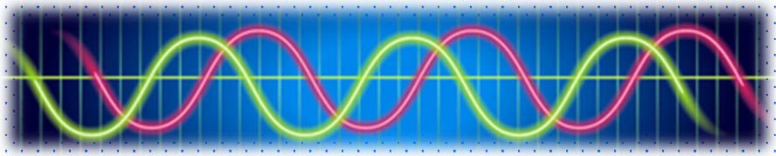
FONDAMENTI DI MISURE

- Misura, grandezze fisiche, teoria degli errori ed incertezza di misura -



Corso di laurea triennale in
Ingegneria dell'Informazione

Prof. Andrea Cataldo

Outline

- COSA VUOL DIRE «MISURARE»?

- GRANDEZZE FISICHE E UNITA' DI MISURA
  - Grandezza fisica e valore di una grandezza
  - Sistema Internazionale di unità di misura
  - Grandezze base e derivate

- MISURE DIRETTE E INDIRETTE

- ERRORE DI MISURA
  - Classificazione degli errori: sistematici, grossolani e casuali

- ACCURATEZZA E PRECISIONE

- INCERTEZZA DI MISURA
  - Valore assoluto, relativo e ridotto
  - Incertezza di caso peggiore
  - Incertezza standard
  - Incertezza estesa

- VALUTAZIONE DI TIPO A E DI TIPO B

- ERRORI ED INCERTEZZE PER MISURE DIRETTE E INDIRETTE
  - Esempi: Somma, differenza, prodotto e rapporto di misure dirette
  - Errore e incertezze in una misura indiretta generica
  - Formula di propagazione degli errori e delle incertezze

- CRITERI DI ARROTONDAMENTO

Cosa vuol dire misurare?

Cosa vuol dire «misurare»?

La **misurazione** è un processo volto ad ottenere sperimentalmente uno o più **valori** che possono essere ragionevolmente attribuiti a una **grandezza**

International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM), Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM) Literature, 200:2008.

Metrologia: *Scienza della misurazione e delle sue applicazioni.*

La metrologia comprende tutti gli aspetti teorici e pratici della misurazione, qualunque sia il campo d'applicazione.

VIM

Alcune definizioni

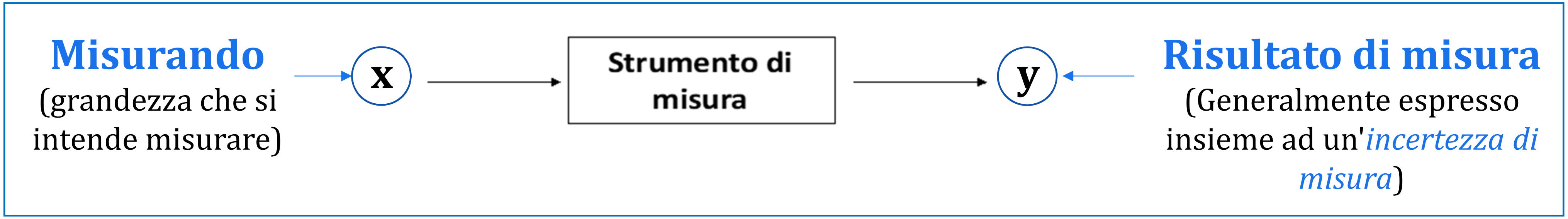
L' *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology* (**VIM**) è un glossario nel quale sono definiti i termini fondamentali e generali utilizzati in metrologia

Essa definisce:

- ***Misurando***: quantità soggetta a misura valutata nello stato assunto dal sistema in osservazione durante la misura stessa
- ***Misurazione***: procedimento semplice o complesso che permette di quantificare una grandezza
- ***Metodo di misura***: descrizione generale dell'organizzazione logica delle operazioni messe in atto in una misurazione
- ***Procedura di misura***: descrizione dettagliata di una misurazione eseguita in conformità a uno o più principi di misura e a un determinato metodo di misura, fondata su un *modello di misura* e comprendente tutti i calcoli necessari per ottenere un risultato di misura
- ***Misura**:* il risultato del processo di misurazione

Cosa vuol dire «misurare»?

Misurare significa quindi fornire una descrizione *quantitativa* di una proprietà di un oggetto o di un fenomeno fisico (grandezza fisica chiamata **misurando**) che può essere descritto qualitativamente.



Si esegue un procedimento **sperimentale**, la misurazione, con l'obbiettivo di ottenere uno o più valori che possono essere ragionevolmente attribuiti alla grandezza in esame.

Cosa vuol dire «misurare»?

In questo modo rappresentiamo qualunque situazione in cui esiste un valore numerico perfettamente noto (y) e un valore ad esso approssimativamente uguale ma incognito (x)

- Strumenti di misura, sensori, ADC, ecc..
  x = valore del misurando
  y = risultato della misura

- Componenti elettronici e simili
  x = valore reale del componente
  y = valore nominale del componente

- Processi produttivi, attuatori, DAC, ecc..:
  x = valore reale della grandezza prodotta
  y = valore impostato

Cosa vuol dire «misurare»?

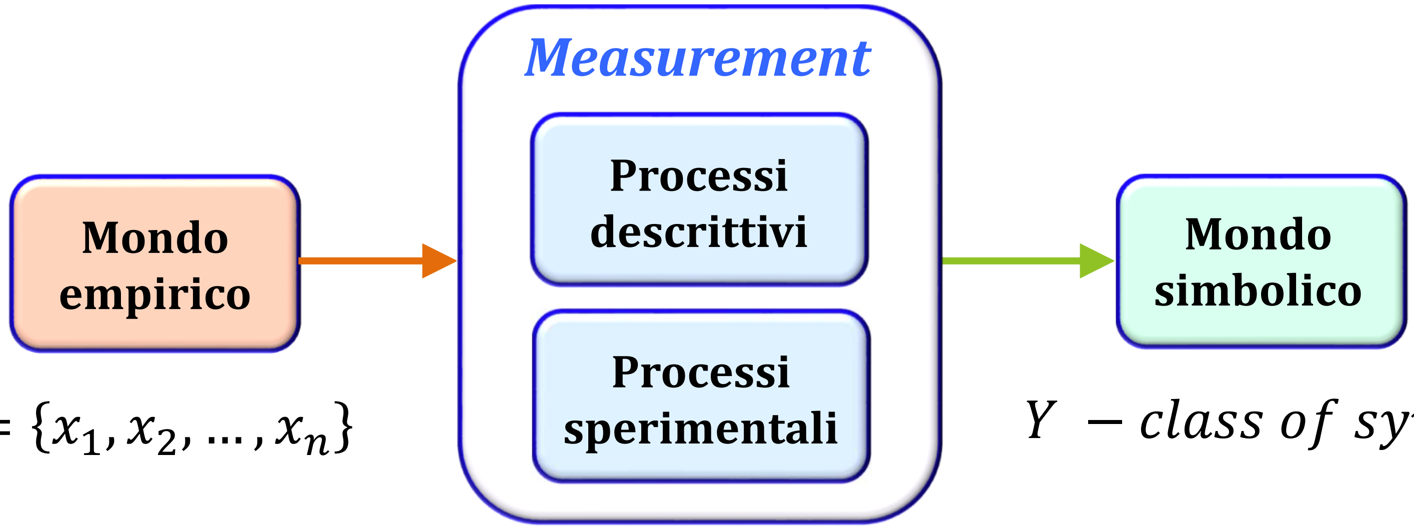
Misurare è però un’attività complessa:

<u>Non basta collegare e leggere l’uscita di uno strumento di misura!</u>

Per *misurare*, si rende necessario sviluppare un **modello della misura e del «contesto di misurazione»**, al fine di comprendere appieno il suo significato e quali sono i requisiti per effettuare una misurazione corretta.

Modello di misura

Modello che rappresenta il processo di misura come un **ponte tra il mondo empirico e il mondo simbolico**.



$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$Y\ -$ *class of symbols* y

$$f\ (mapping): X \rightarrow Y, \qquad or \qquad y = f(x)$$

Cosa vuol dire «misurare»?

Inoltre, l'espressione di una misura, per essere comunicata in modo inequivocabile, deve almeno contenere le tre seguenti informazioni:

- il valore che dichiara quantitativamente il **misurando**;
- l'indicazione riguardante l'**accuratezza della misura**;
- l'**unità di misura**.

Analizzeremo nel dettaglio…

Grandezze fisiche e unità di misura

Grandezze fisiche e unità di misura

Abbiamo detto che misurare significa fornire una descrizione quantitativa di una *grandezza fisica*.

Ma cos'è una grandezza fisica?

Una **grandezza fisica** è una *proprietà misurabile* di un fenomeno, corpo o sostanza che può essere espressa quantitativamente, attraverso un *numero* ed un *riferimento (o unità di misura)*.

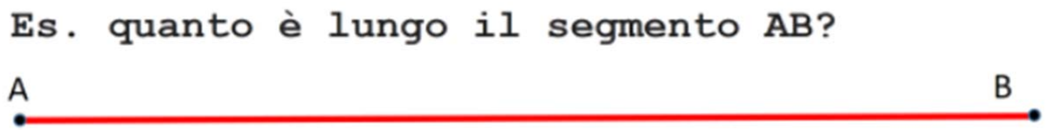
Esempi:

Distanza fra due città $[km]$
Capacità di una bottiglia $[l]$
Superficie di un terreno $[m^2]$
Peso del nostro corpo $[kg]$

Il **valore di una grandezza** è invece proprio il numero e il riferimento che congiuntamente costituiscono l'espressione quantitativa della grandezza.

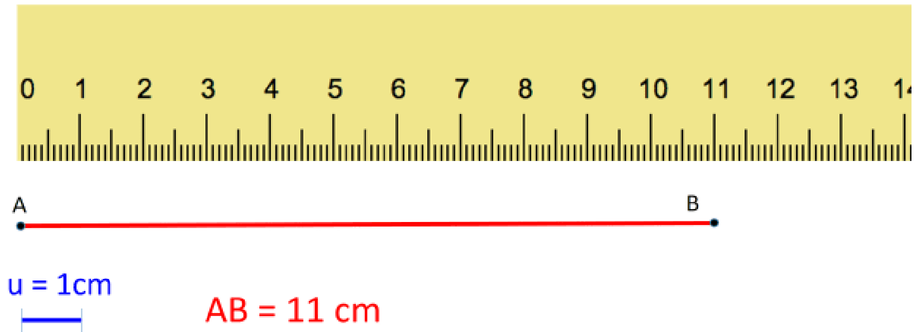
Grandezze fisiche e unità di misura

Per meglio chiarire il concetto, prendiamo in considerazione il segmento AB



In assenza di uno strumento di misura, ad esempio di un righello che riporta i mm ed i cm, non è possibile rispondere a questa domanda.

Per determinare la lunghezza del segmento AB, dobbiamo quindi stabilire una unità di riferimento, che nel caso del righello è rappresentata dai cm o dai mm.



Scegliendo come unità di riferimento il cm, come indicato dal segmento blu, possiamo stabilire rapidamente che il segmento AB misura 11 cm.

Sistema Internazionale di unità di misura

- Poiché le grandezze fisiche, e le conseguenti unità che è possibile adottare per misurale, sono innumerevoli, nel 1960, attraverso la IX Conferenza Internazionale dei Pesi e delle Misure, è stato istituito un sistema di unità di misura omogeneo, assoluto, invariante e decimale: si tratta del **Sistema Internazionale di unità di misura**, indicato generalmente con la sigla **SI**

- Il Sistema Internazionale si basa su **sette grandezze fondamentali o base** e sulle loro rispettive unità di misura fondamentali, arbitrariamente scelte, da cui tutte le altre vengono derivate.

- Nessuna delle grandezze base può essere espressa come combinazione delle altre

Sistema Internazionale di unità di misura

Nella tabella sono indicate le sette grandezze fondamentali con le rispettive unità di misura:

Grandezza	Simbolo	Nome dell'unità di misura	Simbolo
lunghezza	l	metro	m
massa	m	kilogrammo	kg
tempo	t	secondo	s
temperatura	T	kelvin	K
intensità di corrente elettrica	i	ampere	A
intensità luminosa	I_L	candela	cd
quantità di sostanza	n	mole	mol

Sistema Internazionale di unità di misura

Le sette unità di misura di base - metro, chilogrammo, secondo, ampere, kelvin, mole e candela - all'inizio erano definite per mezzo di oggetti fisici o proprietà della materia.

- Ad esempio il metro fu definito come la quarantamilionesima parte di un meridiano terrestre e a partire dal 1875 è stato conservato all'Ufficio Pesi e Misure di Sèvres (presso Parigi) un campione di platino-iridio del metro che fungeva da riferimento.

- Allo stesso modo il kilogrammo rappresentava la massa del prototipo internazionale conservato sempre a Sèvres

Sistema Internazionale di unità di misura

La tendenza attuale nella definizione delle unità di misura è invece quella di **svincolarle da qualsiasi campione materiale e di basarle sulle costanti universali** (la velocità della luce, il numero di Avogadro ecc.) e sul secondo, per non dipendere da campioni che possano alterare con il tempo le loro caratteristiche.

- Ad esempio il metro è stato ridefinito come la distanza percorsa nel vuoto dalla luce nell'intervallo di tempo di 1/299.792.558 secondi

- Il tempo è stato definito come la durata di 9.192.631.770 oscillazioni della radiazione emessa dall'atomo di cesio-133 nello stato fondamentale nella transizione tra due particolari livelli

ecc….

Sistema Internazionale di unità di misura

In conclusione, le sette grandezze fondamentali oggi sono espresse:

- il metro, in termini di velocità della luce (c)
- il secondo, in termini di frequenza della transizione iperfine dell'atomo di cesio (Δv)
- la candela, in termini di coefficiente di visibilità (K_{cd})
- il chilogrammo, in termini di costante di Planck (h)
- l'ampere, in termini di carica elementare (e)
- il kelvin, in termini di costante di Boltzmann (k)
- la mole, in termini di costante di Avogadro (N_A)

Grazie alle costanti della fisica, il cui valore è fisso, immutabile nel tempo e nello spazio, ora abbiamo campioni di riferimento delle unità di misura più stabili e riproducibili ovunque

Grandezze fisiche e unità di misura

Nella tabella sono indicate alcune grandezze **derivate**:

- Tutte le grandezze necessarie alla descrizione di ogni fenomeno fisico esistente in natura (più di un centinaio) possono essere espresse come combinazione delle grandezze fondamentali, e vengono definite grandezze derivate

Grandezza fisica	Nome dell'unità di misura	Simbolo dell'unità di misura	Definizione dell'unità di misura SI
area	metro quadrato	m^2	
volume	metro cubo	m^3	
densità o massa volumica	kilogrammo al metro cubo	kg/m^3	
forza	newton	N	$N = kg \cdot m/s^2$
pressione	pascal	Pa	$Pa = N/m^2$
energia, lavoro, calore	joule	J	$J = N \cdot m$
velocità	metri al secondo	m/s	
accelerazione	metro al secondo quadrato	m/s^2	
potenza	watt	W	$W = J/s$
carica elettrica	coulomb	C	$C = A \cdot s$
differenza di potenziale elettrico, forza elettromotrice	volt	V	$V = J/C$
resistenza	ohm	Ω	$\Omega = V/A$
frequenza	hertz	Hz	$Hz = 1/s$

Grandezze fisiche e unità di misura

Multipli e sottomultipli decimali nel Sistema Internazionale

fattore di moltiplicazione	prefisso	simbolo	valore
10^{24}	**yotta**	**Y**	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	**zetta**	**Z**	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	**exa**	**E**	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	**peta**	**P**	1 000 000 000 000 000
10^{12}	**tera**	**T**	1 000 000 000 000
10^{9}	**giga**	**G**	1 000 000 000
10^{6}	**mega**	**M**	1 000 000
10^{3}	**chilo**	**k**	1 000
10^{2}	**etto**	**h**	100
10^{1}	**deca**	**da**	10
10^{-1}	**deci**	**d**	0.1
10^{-2}	**centi**	**c**	0.01
10^{-3}	**milli**	**m**	0.001
10^{-6}	**micro**	**μ**	0.000 001
10^{-9}	**nano**	**n**	0.000 000 001
10^{-12}	**pico**	**p**	0.000 000 000 001
10^{-15}	**femto**	**f**	0.000 000 000 000 001
10^{-18}	**atto**	**a**	0.000 000 000 000 000 001
10^{-21}	**zetto**	**z**	0.000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	**yotto**	**y**	0.000 000 000 000 000 000 000 001

Misure dirette e indirette

Misure dirette e indirette

Una grandezza fisica può essere misurata tramite un confronto diretto con la grandezza di riferimento (campione). In questi casi si parla di misura diretta.

I metodi di misurazione diretta si classificano in:

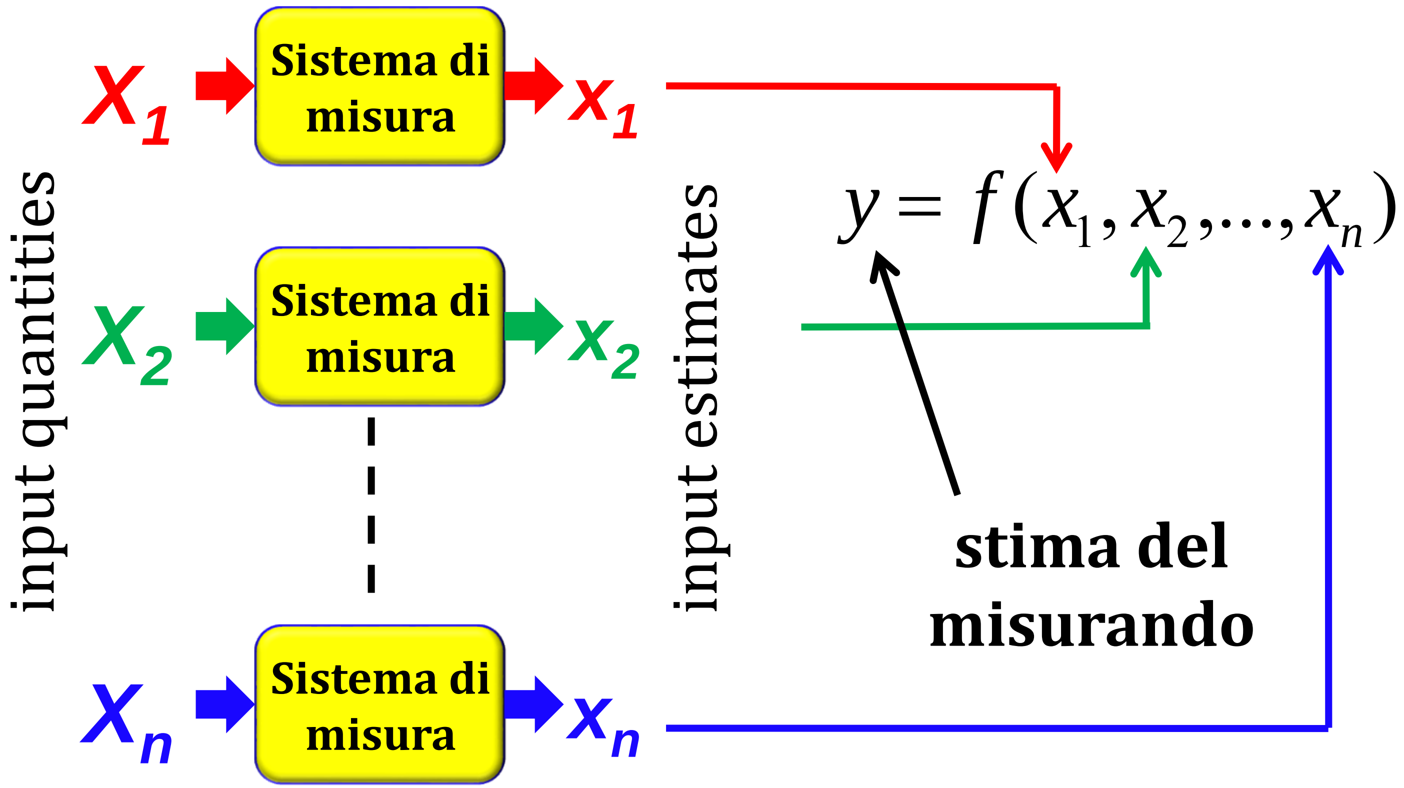
- Metodi di opposizione: in cui si confronta la grandezza incognita con la grandezza campione (bilancia a due piatti).
- Metodi di sostituzione o della doppia pesata: si misura una grandezza che poi viene sostituita con un campione il quale provoca la stessa indicazione in un sistema di confronto.
- Metodi con memoria della funzione di taratura: la misura risulta sulla scala di uno strumento indicatore precedentemente tarato (tensione misurata con oscilloscopio o voltmetro analogico, la cui scala è tarata in volt).

Misure dirette e indirette

- Alcune grandezze non possono essere misurate direttamente, ma è noto il modello matematico che le lega ad altre grandezze misurabili direttamente: in questo caso si parla di **misura indiretta**.
- Pertanto, si parla di misura indiretta quando il misurando non è messo a confronto con una grandezza di riferimento della stessa specie, ma il suo valore è ottenuto attraverso una elaborazione dei risultati di una o più misurazioni dirette, effettuate sulle grandezze ad esso collegate.

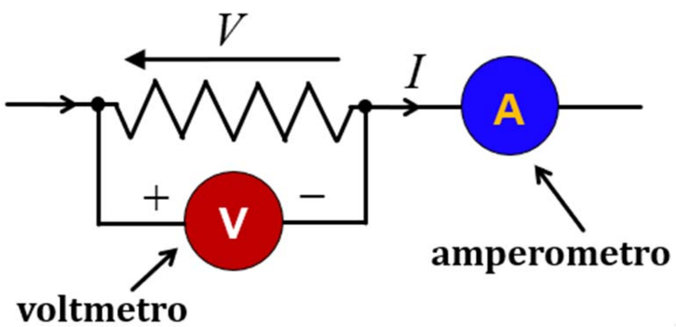
Misure dirette e indirette

- Esiste un modello, ossia una relazione funzionale tra il misurando e le cosiddette grandezze di input.



Misure dirette e indirette

Esempi di misure indirette



Ad esempio:

- La resistenza di un resistore può essere ottenuta tramite misure dirette di tensione e di corrente. Il resistore in esame viene alimentato da un apposito generatore e vengono misurati i valori della tensione (x_1) e della corrente (x_2) , così con la legge di ohm (R= V/I) si calcola il valore della resistenza incognita:

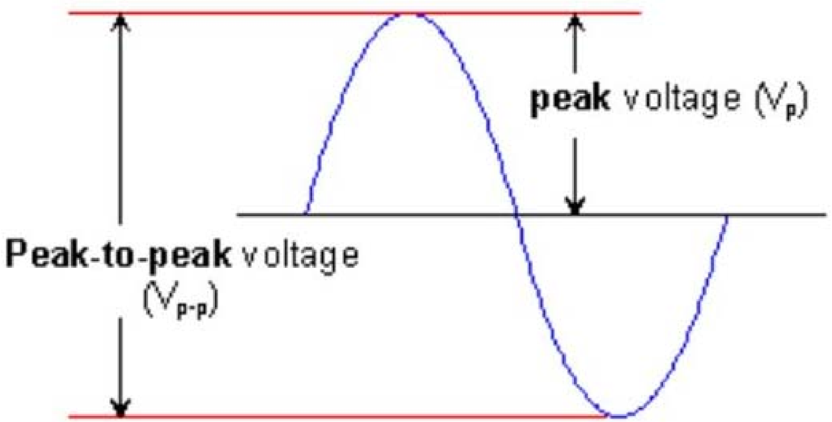
Modello matematico ➡ $$y = \frac{x_1}{x_2}$$

Misure dirette e indirette

Esempi di misure indirette

❖ La tensione picco-picco di un'onda sinusoidale è ottenuta per differenza di misure dirette di tensione massima (x_1) e tensione minima (x_2)

Modello matematico ➡ $y = x_1 - x_2$



Misure dirette e indirette

Altri esempi di misure indirette

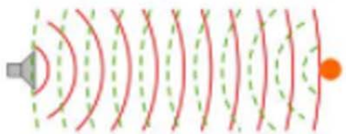
E ancora…

Measuring fluid volume by measuring height

Measuring mass by measuring electrical resistance

Measuring wind speed by measuring angular speed

Measuring temperature by measuring length



Measuring distance by measuring time

Errore di misura

Errore di misura

Effettuando una misurazione di grandezze fisiche, è bene sapere a priori che i risultati ottenuti saranno, inevitabilmente, affetti da un ***errore di misura***.

L'errore è, per definizione, la differenza tra il valore vero e il valore misurato della grandezza in esame (misurando).

Tuttavia il valore vero non è mai noto; al più si può assumere come valore vero quello del campione di riferimento con cui si fa la taratura, che viene detto valore vero convenzionale

Con taratura si intende la procedura con cui il fornitore dello strumento lo rende in grado di eseguire misurazioni corrette

Errore di misura

- Prima di eseguire una misura, quindi, si può avere una **stima**, *X,* del valore del misurando, o, ancora meglio, della sua aspettazione.
- Questa stima può derivare dalla disponibilità di un campione e dalla conoscenza del suo valore, o anche dalla definizione convenzionale a priori del valore del misurando, o dal valor medio di misure precedentemente eseguite con cura sullo stesso misurando, o da una indagine attraverso banche dati su risultati di misure eseguite da altri sullo stesso misurando, o da altri casi.

Errore di misura

- L’errore di misura può essere espresso come: assoluto, relativo e relativo percentuale
- Nel caso specifico esaminato precedentemente, l'errore assoluto, E, è definito come la differenza fra il valore misurato, *y*, e il valore *x*:

$$E = y - x$$

- L'errore relativo, *e*, è definito come il rapporto tra l'errore assoluto, E, e il valore x:

$$e = \frac{y - x}{x} = \frac{E}{x} \cong \frac{E}{y}$$

- L'errore percentuale, $e_{\%}$, è definito come l'errore relativo, *e*, espresso in percento

$$e_{\%} = \frac{y - x}{x} \cdot 100 = \frac{E}{x} \cdot 100 \cong \frac{E}{y} \cdot 100$$

Classificazione degli errori

Classificazione degli errori

Normalmente si distinguono **tre** categorie di errori:

- Sistematici
- Grossolani
- Casuali

Classificazione degli errori

Errori sistematici

- Sono gli errori insiti nello strumento di misura e avvengono sempre o per difetto o per eccesso. Ciò significa che si ripresentano sempre con lo stesso segno e la stessa ampiezza, ripetendo la misura di una grandezza con la stessa strumentazione e in condizioni operative e ambientali immutate

- Essi sono in genere dovuti a una non corretta taratura o a difetti degli strumenti. I difetti possono essere costruttivi, oppure derivare dall'avere sottoposto lo strumento a particolari condizioni ambientali o operative. Particolarmente temibili sono elevate temperature, forti campi elettrostatici o elettromagnetici e sovraccarichi.

- Gli errori strumentali possono essere ridotti ritarando lo strumento, usandolo in modo appropriato, maneggiandolo con cura e sottoponendolo a una frequente manutenzione

- Si calcolano come differenza tra il risultato della misura (o il valor medio di una serie ripetuta di misure) e una stima nota del valore del misurando

Classificazione degli errori

Errori grossolani

- Questi errori sono dovuti alla distrazione e imperizia dell'operatore che esegue le misure. Esempio di errore grossolano è la trascrizione errata del valore di un angolo o di una distanza perché chi scrive è distratto. Questi errori sono facilmente eliminabili: è necessario eseguire le misure con attenzione.

Errori casuali

- Gli errori casuali (o accidentali) sono quelli che permangono anche nell'ipotesi di essere riusciti a correggere tutti gli errori grossolani e sistematici; essi sono il risultato di un gran numero di effetti, prevalentemente imprevedibili fluttuazioni nelle condizioni operative, strumentali e ambientali (variazioni di temperatura, umidità, vibrazioni o disturbi di tipo elettrico e elettromagnetico dell'ambiente in cui si svolge la misura).

- Gli errori accidentali si calcolano come la differenza tra il risultato di una misura e la media di una serie di misure ripetute e possono essere analizzati statisticamente.

Classificazione degli errori

Errori casuali

- Se si ipotizza che le cause di errore agiscano in modo completamente aleatorio, esse determineranno scarti dal valore medio sia positivi sia negativi. Globalmente è da attendersi che gli effetti mediamente si annullino, ovvero che il valore atteso degli errori accidentali sia nullo ripetendo N volte (con $N \to \infty$) ed operando una media aritmetica

- Quindi, al limite, se si sono corretti tutti gli errori sistematici e se gli errori accidentali seguono leggi simili di variazione, il valore del misurando tende alla media aritmetica di un numero molto elevato di osservazioni. Quanto più piccoli risultano gli errori accidentali, tanto più si dice che la misura è precisa.

Classificazione degli errori

Errori casuali vs errori sistematici

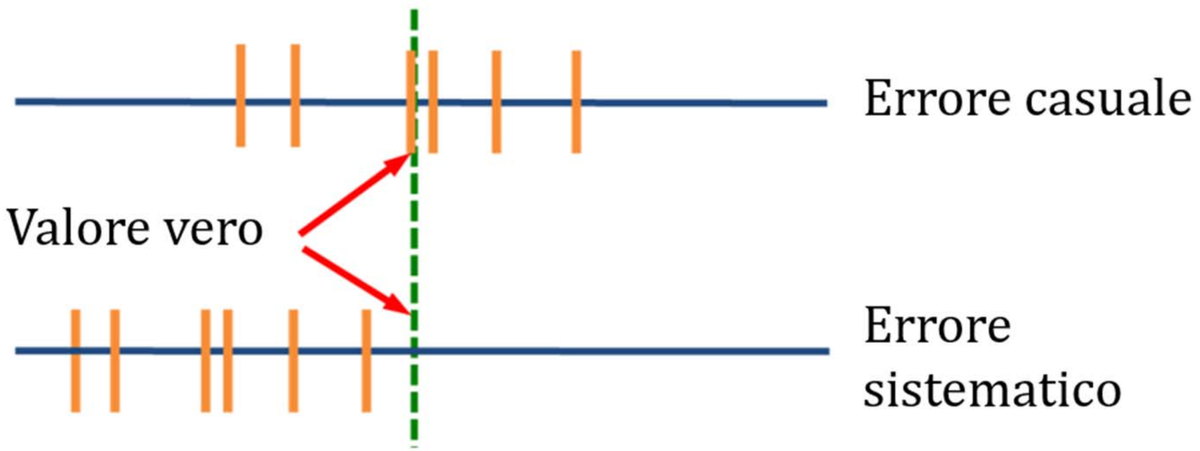
Esempi:

- Un esempio molto semplice di errore casuale è la nostra pressione sanguigna, la quale anche in condizioni di normalità, varia leggermente ad ogni misura a causa della variazione nei normali processi nel corpo. Se nel tempo si effettuassero più misurazioni della pressione sanguigna, **alcune sarebbero più alte e altre più basse**. Prendendo un numero sufficiente di misure, è comunque possibile ottenere una buona stima di ciò che stiamo misurando.

- Si ha ad esempio un errore sistematico invece, quando si misura una lunghezza con un metro che pensiamo sia di 100 centimetri ma che in realtà è di 99 cm. Con questo metro difettoso avremo **sempre un valore più grande** della grandezza misurata. Un altro esempio è dimenticare di tarare o azzerare una bilancia: ciò produce misurazioni con uno scostamento intrinseco sempre della stessa quantità.

Classificazione degli errori

Errori casuali vs errori sistematici



La figura riassume semplicemente quanto discusso, per cui:

- Gli errori casuali agiscono in modo completamente aleatorio e quindi determineranno scarti dal valore medio sia positivi sia negativi
- Gli errori sistematici si ripresentano sempre con lo stesso segno e la stessa ampiezza

Accuratezza e precisione

Accuratezza e precisione

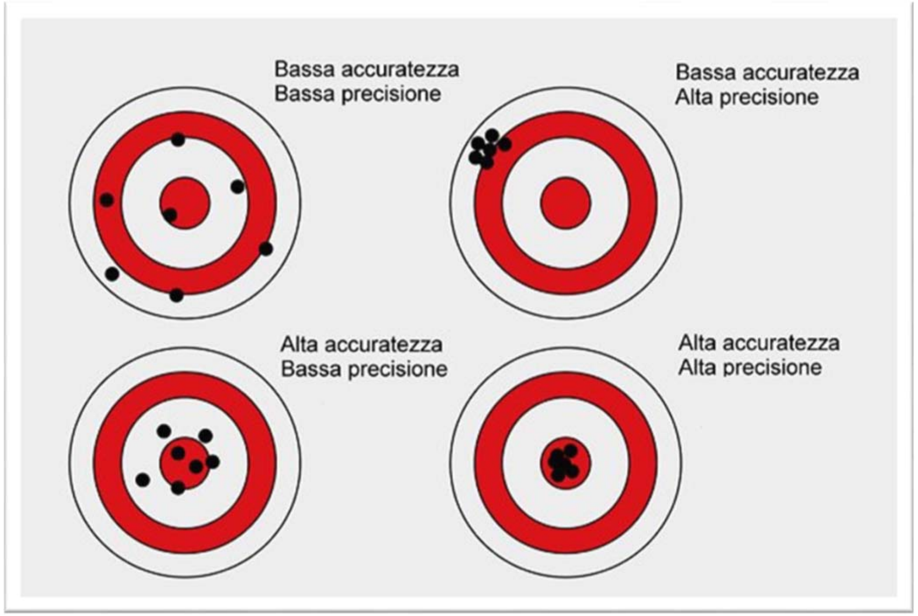
In letteratura, per qualificare la bontà di una misura, si incontrano diversi termini come quelli di **accuratezza** e **precisione**; molto spesso si usa un termine per l'altro, dando luogo a grande confusione.

- Per **accuratezza** si intende il grado di approssimazione della quantità misurata al valore del misurando. In altre parole, l’accuratezza indica quanto una misura è vicina al valore accettato

- Per **precisione** si intende il grado di “convergenza” (o “dispersione”) dei singoli dati rispetto al valore medio della serie cui appartengono

Accuratezza e precisione

E’ facile quindi intuire come possano esserci misure precise ma non accurate, misure accurate ma non precise, misure accurate e precise e misure non accurate e non precise.



Inoltre, mentre la riduzione degli errori accidentali consente di migliorare la precisione, quella degli errori sistematici permette di migliorare l'accuratezza

Accuratezza e precisione

Il VIM (International vocabulary of basic and general terms in metrology) preferisce esprimere analogo concetto con la **ripetibilità dei risultati delle misure.**

Si definisce **ripetibilità** il grado di approssimazione fra i risultati di misure successive dello stesso misurando, eseguite nelle stesse condizioni di misura.

Si definisce inoltre **riproducibilità** il grado di approssimazione fra i risultati di misure dello stesso misurando, eseguite però in condizioni di misura differenti, ad esempio modificando il metodo di misurazione, sostituendo l'operatore alla misura, sostituendo lo strumento di misura, spostandosi in altro luogo o modificando la condizione di utilizzo dello strumento o del misurando

Accuratezza e precisione

N.B. La precisione è un requisito indispensabile ma non sufficiente per l'accuratezza. Ovvero una misura accurata deve anche essere precisa e quindi rappresentabile con un sufficiente numero di cifre significative, ma una misura precisa non è detto che sia accurata.

Infatti si ipotizzi di avere uno strumento digitale che permetta di leggere sei cifre della grandezza da misurare e inoltre di eseguire diverse misure abbastanza vicine tra loro. Si può affermare di avere eseguito una misura precisa, nell'ipotesi che più misure si scostino poco tra loro, ma non è detto che essa sia accurata, potendo lo strumento risultare non correttamente tarato o potendosi essere starato nel tempo a causa di degradazione di componenti o per motivi accidentali.

Per passare da indicazioni qualitative sulla bontà di una misura, ottenibili attraverso l’accuratezza e la precisione o ripetibilità dei dati, a rappresentazioni quantitative del risultato di una misura, occorre quantificare l’**incertezza**.

Incertezza di misura

Incertezza di misura

Abbiamo parlato dell'errore di misura, definendolo come la differenza fra il valore misurato, y, e il valore vero convenzionale x

E' evidente che essendo x solo una stima del valore del misurando, **l'errore E è un concetto idealizzato** e non può essere mai conosciuto esattamente, quindi la correzione non potrà mai essere completa.

<u>L'errore quindi non può essere valutato e se ne può solo fare una stima che viene chiamata **incertezza di misura**</u>

Incertezza di misura

L'incertezza di misura è una stima che caratterizza il campo entro cui giace il "valore vero" del misurando

Essa:

- dà un'indicazione quantitativa sulla qualità del risultato di una misura
- definisce il grado di dubbio sulla correttezza del risultato della misura, ovvero specifica quanto bene il risultato rappresenta il valore della quantità che si intende misurare
- permette di confrontare misure ottenute in modo differente
- deve essere *coerente* (ossia ricavabile direttamente dalle componenti che ad essa contribuiscono) e *trasferibile* (ossia usabile per valutare l'incertezza di una successiva misura in cui essa è utilizzata)

Incertezza di misura

- Abbiamo visto come diversi fattori interagiscono in vari modi nel processo di misura, per cui se questo è ripetuto si ottengono risultati diversi determinando una **dispersione dei valori misurati**

- D'altra parte il solo fatto di inserire uno strumento di misura in un sistema altera le condizioni iniziali del sistema stesso e non consente la misura del valore che il misurando assumeva prima dell'inserzione. Dunque il processo di misura disturba il sistema e altera il valore delle quantità fisiche da misurare.

- Lo studio dei mezzi per minimizzare questi “fattori di disturbo” è uno tra i principali scopi della scienza delle misure.

Incertezza di misura

- Come descritto in precedenza, l'effetto dei fattori che intervengono in modo totalmente casuale nel processo di misura tende ad annullarsi ripetendo N volte la misura (con $N \rightarrow \infty$) ed operando una media aritmetica

- Ogni misura però è anche influenzata dai comportamenti non ideali dei vari elementi del sistema di misura (oltre che da difetti nei modelli e nei campioni di riferimento), che danno luogo a scarti sempre nella stessa direzione (effetti sistematici), che non si possono "rimuovere" con un processo di media

- Con riferimento a questi ultimi, in alcuni casi si è in grado di stimare l'entità e il segno dello scarto e pertanto si è in grado di correggere la misura (taratura). Tuttavia, anche quando è possibile effettuare una taratura permangono sempre degli errori residui dovuti alle non idealità intrinseca degli standard di taratura usati.

Incertezza di misura

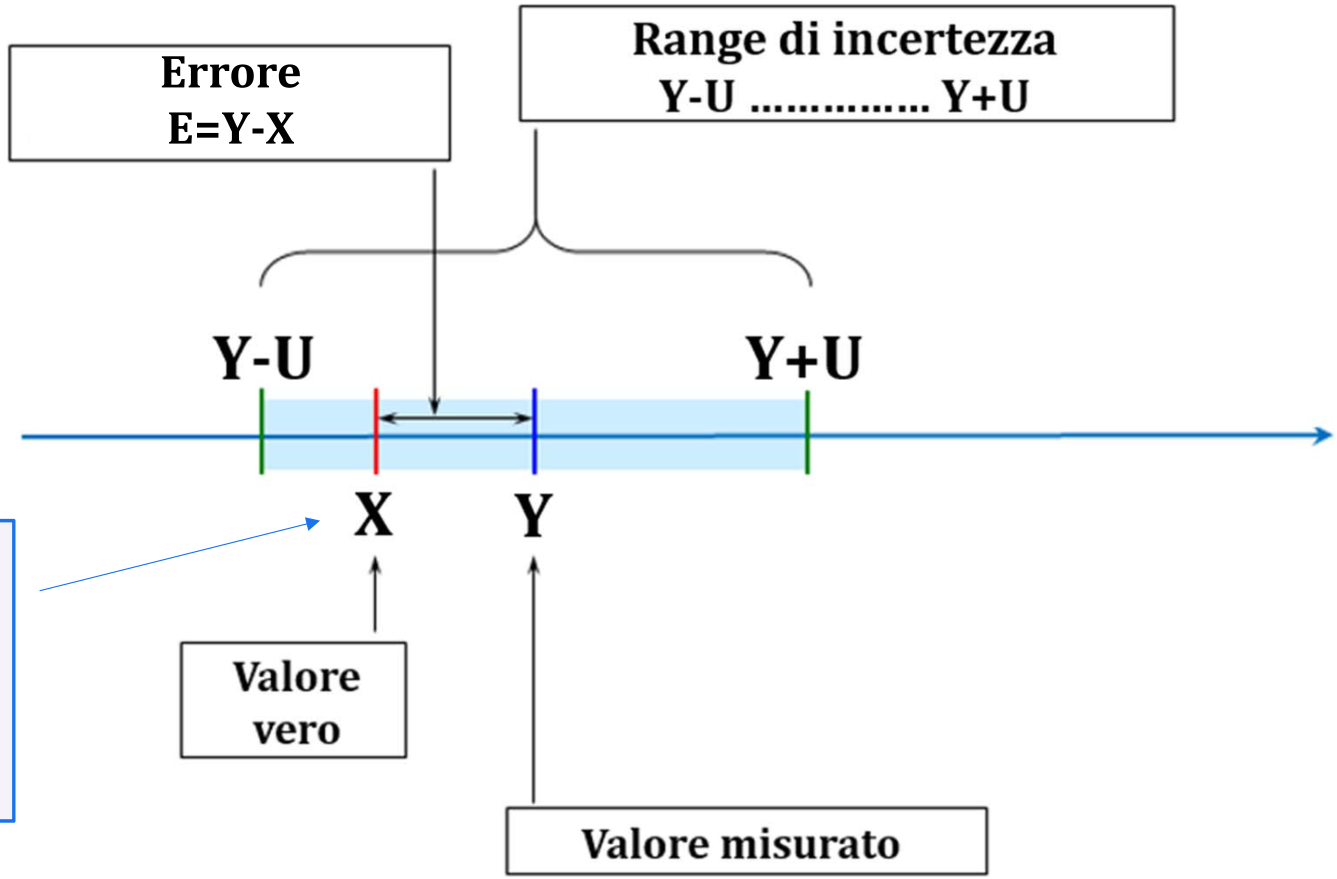
- In conclusione, **la misura sarà sempre affetta da una certa "incertezza"** che quindi caratterizza la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando.

- Per effetto dell'incertezza il risultato di una misura non è espresso da un valore, ma da un intervallo per cui la misura di una grandezza "y" sarà espressa come:

$$\boxed{y \pm U}$$

dove y, valore centrale dell'intervallo, è la stima "migliore" del misurando ed U è la semiampiezza della fascia di incertezza.

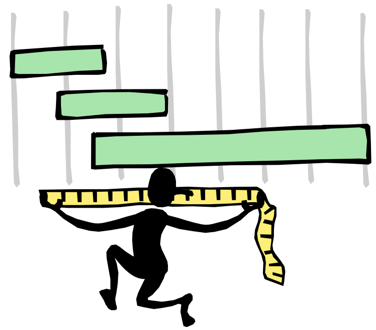
Incertezza di misura



Il "valore vero" del misurando giace all'interno del range caratterizzato dall'incertezza di misura

Incertezza di misura

Saper eseguire una misurazione è quasi inutile se non si sa valutare, in qualche modo, l'**incertezza** da cui è affetta.



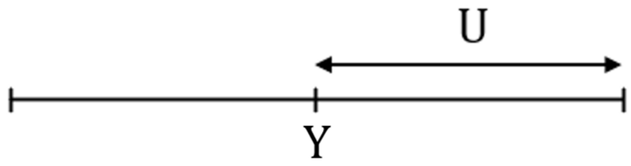
Esempio:

$Y \cong 15$ mV	valore "approssimativo" di Y
$Y = 15 \pm 0.5$ mV	valore di Y con incertezza di misura

Il problema della valutazione di **questa** quantità è l'oggetto della **teoria degli errori e dell'incertezza di misura**.

Incertezza di misura

L'incertezza può essere espressa come:



- **Valore assoluto**:
  Consideriamo ad esempio il caso di misura di una corrente I_0, con valore misurato y=3 A
  Abbiamo ad esempio il valore assoluto dell'incertezza pari a *U=0.004 A*

- **Valore relativo**: riferito al valore y misurato ed espresso normalmente in percento:

$$U_r = \frac{U}{y} \cdot 100 = 0.13\%$$

- **Valore ridotto**: riferito a un valore convenzionale y_{FS} (es. 10 A) ed espresso normalmente in percento

$$U_{r,FS} = \frac{U}{y_{FS}} \cdot 100 = 0.04\%$$

Incertezza di misura

- Con riferimento al **valore relativo** che usualmente si può ottenere nelle misurazioni eseguite con moderni strumenti questo è molto inferiore all'unità pertanto, allo scopo di facilitare la sua interpretazione, sono entrate in uso forme alternative di rappresentazione che vedono il valore della incertezza relativa non solo moltiplicato per 100 ("incertezza relativa percentuale" in breve "incertezza percentuale"), ma anche per 1000 oppure per 1 milione. Si parla in questi casi, rispettivamente, di "incertezza relativa in parti per mille" e di "incertezza relativa in parti per milione“.

Oggetto della teoria degli errori

Si possono far rientrare nella **teoria degli errori** tutti i procedimenti di valutazione e minimizzazione degli errori nei procedimenti approssimati (sperimentali e/o matematici).

In realtà problemi di questo tipo possono presentare aspetti e livelli di complicazione diversissimi, e quindi richiedere l'uso delle tecniche più svariate. Non esiste un trattato esclusivo di teoria degli errori, le cui fonti comprendono note applicative, manualistica, trattati di teoria della probabilità, teoria della stima, ecc...

Oggetto della teoria degli errori

I problemi di cui ci occuperemo:

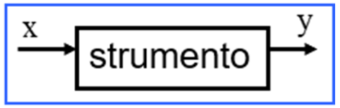
- Interpretare le specifiche di errore fornite sui manuali di strumenti, apparecchiature, componenti commerciali

- Valutare l'errore (o meglio l'incertezza) in misure dirette eseguite mediante strumentazione commerciale

- Valutare l'incertezza in semplici misure indirette (funzioni di misure dirette)

Incertezza di misura

Riprendiamo la definizione di errore assoluto come differenza fra valore noto e valore incognito (uscita y e ingresso x di uno strumento di misura)



$$E = y - x$$

Daremo ora le definizioni di:

- Incertezza di caso peggiore
- Incertezza standard
- Incertezza estesa

Le quali possono essere espresse sia in forma assoluta che relativa

Incertezza di misura

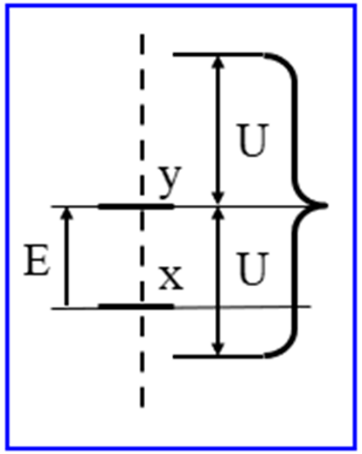
INCERTEZZA DI CASO PEGGIORE: qualsiasi numero positivo che si sappia con certezza che è maggiorante del valore assoluto dell'errore

$$\boxed{|y - x| = |E| \leq U}$$

Incertezza di misura assoluta

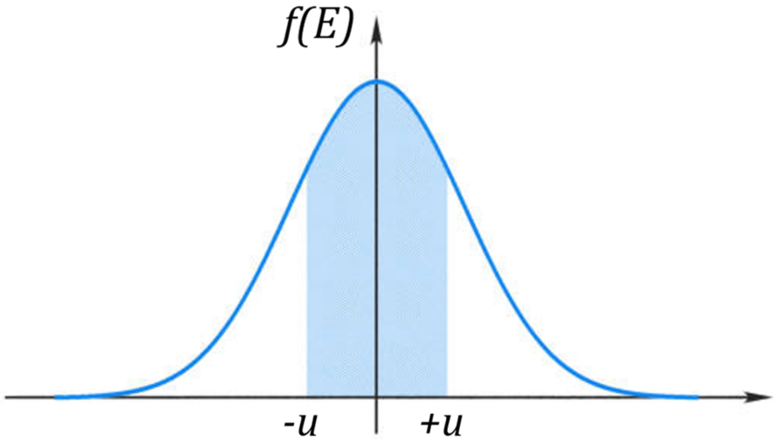
Conoscere y e U significa quindi conoscere un intervallo in cui sicuramente cade x:

$$\boxed{x \in [y - U, y + U] \Leftrightarrow x = y \pm U}$$



Incertezza di misura

INCERTEZZA STANDARD: È associata ad una deviazione standard e rappresenta la semiampiezza di un intervallo entro cui, con un prestabilito livello di confidenza *l*, è contenuto l'errore.



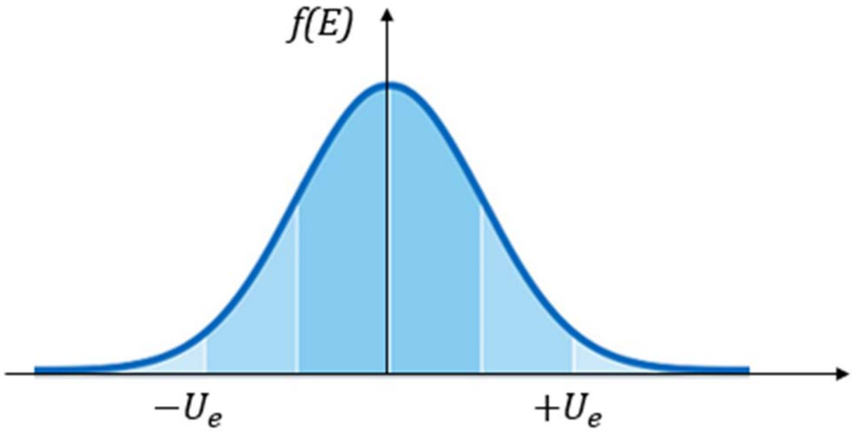
$$\boldsymbol{u = \sigma_E = std(E) = \sqrt{\mathrm{E}[E^2] - \mathrm{E}^2[E]} = \sqrt{\mathrm{E}[E^2]}}$$

Incertezza di misura

INCERTEZZA ESTESA: numero positivo che rappresenta la semiampiezza di un intervallo entro cui è contenuta una frazione rilevante della distribuzione dell'errore.

$$\boldsymbol{U_e = k \cdot u, \qquad k > 1}$$

$$\boldsymbol{l \triangleq P(|E| \leq U_e)}$$



Essa è in pratica il prodotto dell'incertezza standard per un fattore di copertura *k*.

Valutazione di tipo A e valutazione di tipo B

Valutazione di tipo A e valutazione di tipo B

La valutazione dell'incertezza può essere ottenuta con metodi classificabili in due categorie, **A** e **B**.

A

Il metodo di valutazione di tipo A dell'incertezza si basa **sull'analisi statistica di una serie di osservazioni ripetute**

In questo caso l'incertezza è rappresentata dallo scarto tipo sperimentale della media delle osservazioni ottenuta con la media aritmetica o con una analisi di regressione

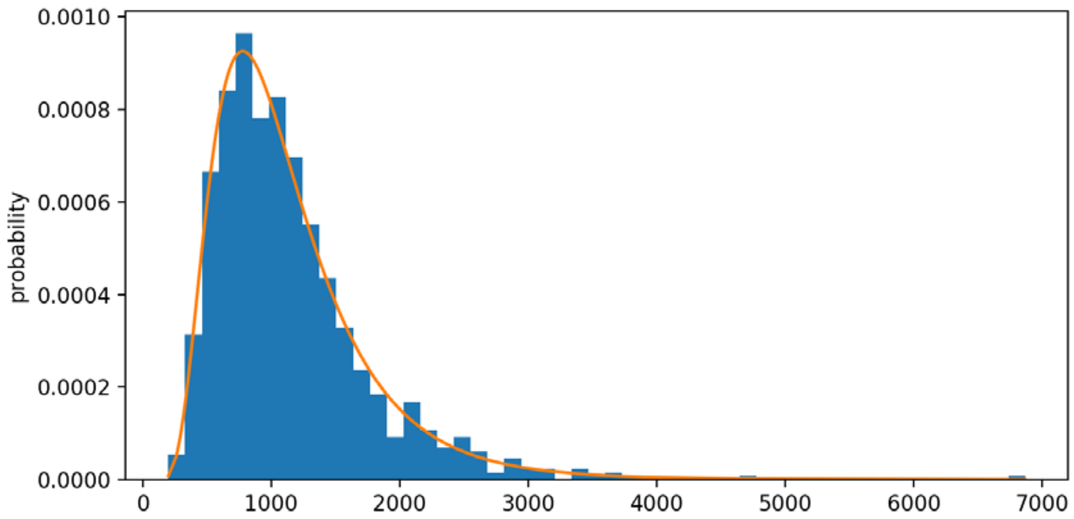
B

Il metodo di valutazione di tipo B si basa su un **insieme di informazioni note a priori**, tra cui:

- Dati di misure precedentemente raccolti;
- Esperienza o conoscenza del comportamento e delle proprietà dei materiali e strumenti di interesse.
- Specifiche tecniche del costruttore, dati di certificati di taratura, etc.;
- Influenza dei parametri in sede di taratura.

Valutazione di tipo A

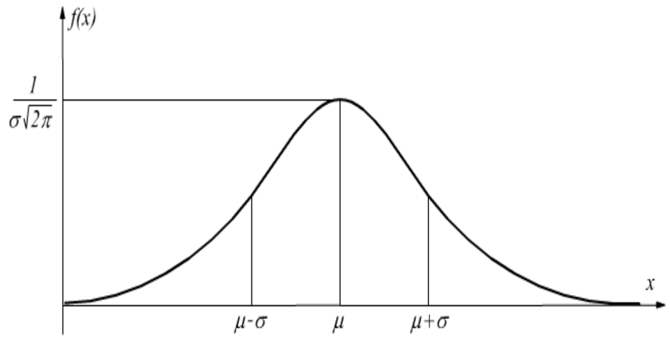
La valutazione di tipo A si basa sull'analisi statistica dei risultati derivanti da **misure ripetute.** Se si ripete la misura nelle stesse condizioni per molte volte e si traccia l'istogramma, si vede che questo tende ad una gaussiana (Teorema del limite centrale)



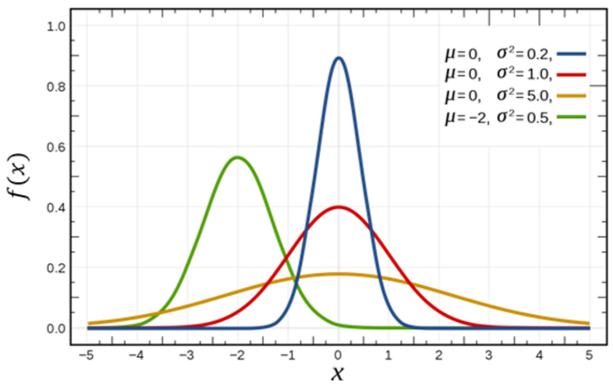
Non è detto a priori che si ottenga una gaussiana, anzi in molti casi si ottengono distribuzioni asimmetriche, tuttavia se le sorgenti di incertezza sono numerose l'andamento della distribuzione tende ad una gaussiana

Valutazione di tipo A

Ricordiamo la funzione di densità di una distribuzione gaussiana con media μ e varianza σ^2 di una variabile aleatoria continua X :



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



- μ viene anche indicato come centro della distribuzione e caratterizza la posizione della curva sull'asse delle ascisse
- σ, invece, caratterizza la forma della curva, in quanto è una misura della dispersione dei valori attorno al valore medio

Remember!!!

Valutazione di tipo A

Media

La media, o valore atteso di una variabile aleatoria X è definita come somma dei valori della v.a. pesati con la pdf:

$$\mu = \mathbb{E}[X]$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

Caso continuo

$$\mu = \sum_{i} x_i p(x_i)$$

Caso discreto

Varianza

La varianza è un indice di dispersione dei valori della variabile aleatoria X attorno al valor medio μ.

$$\sigma^2 = VAR(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Caso continuo

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 p(x_i)$$

Caso discreto

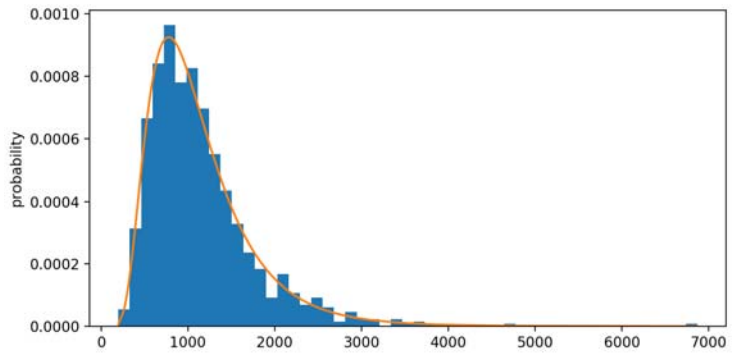
La deviazione standard è la radice quadrata della varianza

Valutazione di tipo A

Nella valutazione di tipo A quindi il risultato di misura sarà idealmente costituito dalla media delle misure, con un range di incertezza dato dalla deviazione standard

$$\mu \pm \sigma$$

Il risultato di misura sarà costituito però dalla media sperimentale **di un numero N finito di misure**, per cui è possibile ottenere solo una **stima** della media statistica (che rappresenta il valore atteso del misurando) e tale stima migliora all'aumentare di N. Infatti, come visto precedentemente, all'aumentare di N, l'istogramma tende sempre più a una curva gaussiana



Valutazione di tipo A

Per questo motivo, avendo effettuato N ripetizioni (con N finito), si fa riferimento a ***media e varianza campionarie*** (poiché analizziamo solo un campione N delle infinite realizzazioni)

$$\mu_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \sigma_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_N)^2$$

- Volendo quindi quantificare l'incertezza si assume σ_N come stima sperimentale dell'incertezza. σ_N è detta **scarto** o **incertezza standard campionaria** ed è indicata con la lettera u.

$$\boxed{x = \mu_N \pm u}$$

Valutazione di tipo A

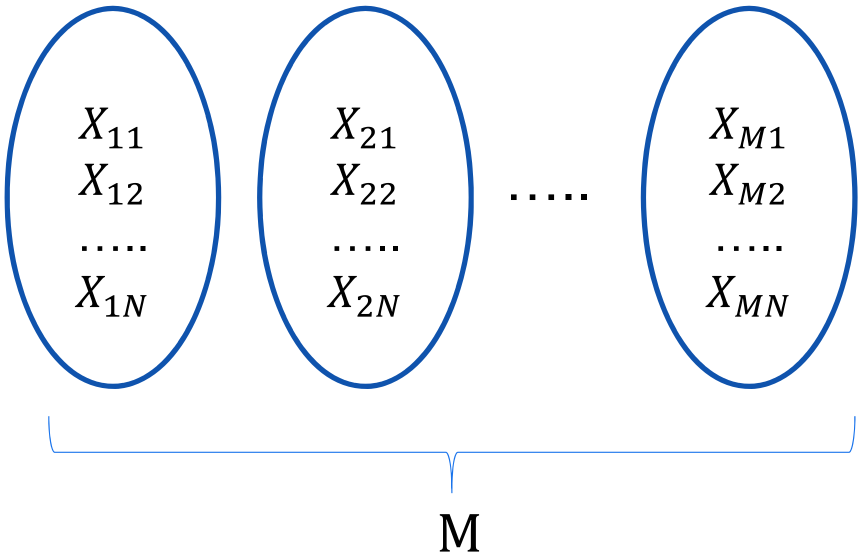
- Con riferimento ad una distribuzione normale, la probabilità che un valore preso a caso cada nell'intervallo è del 68.4%. Se non si ritiene sufficiente la probabilità del 68.4% si può aumentare, come abbiamo visto, questo valore introducendo l'incertezza estesa $U_e = k \cdot u$ dove k è detto fattore di copertura.

- Con k=2 si ha una probabilità del 95.4% (2u). Con K=3 si ha una probabilità del 99.7% (3u). Quindi si può esprimere la misura come:

$$\boxed{x = \mu_N \pm k \cdot u}$$

Valutazione di tipo A

Per una stima più accurata, possiamo considerare non un solo campione di misure ma M campioni (gruppi) ciascuno formato da N misure.
Possiamo indicare con X_{ji} il risultato dell'i-esima misura dell'insieme j-esimo.

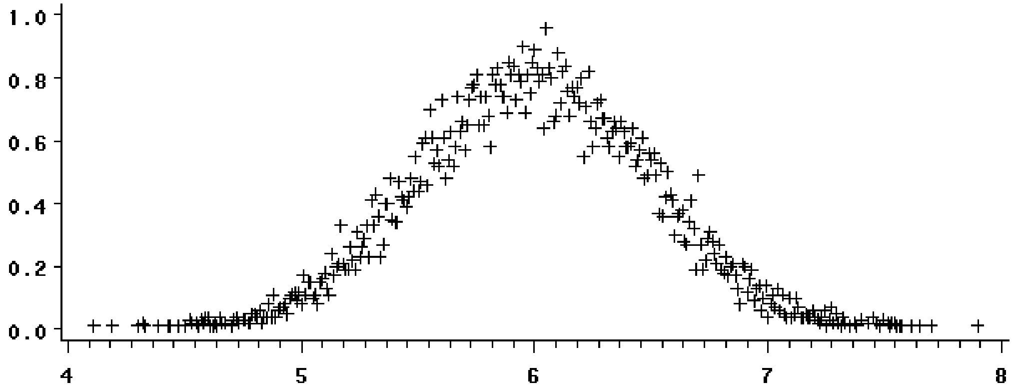


Totale di NxM misure

- Invece di considerare la media un singolo campione possiamo calcolare la media campionaria per ogni campione j-esimo, ottenendo: $\mu_{N,1}, \mu_{N,2}, \dots \mu_{N,M}$

Valutazione di tipo A

La distribuzione di probabilità di tutte le medie campionarie calcolate sui diversi campioni, tende ancora a una gaussiana



μ_N

- A questo punto possiamo calcolare il **valor medio μ** di questa distribuzione eseguendo la media fra tutte le medie campionarie calcolate, ed esso rappresenterà il nostro valore misurato y.

Valutazione di tipo A

Per quantificare l'incertezza si considera la deviazione standard (σ_M) della distribuzione di probabilità delle medie campionarie. Si dimostra che la varianza è definita come:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{MN^2} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \left(X_{ji} - \mu \right)^2 \quad \xrightarrow{\text{Da cui}} \quad \sigma_M^2 = \frac{\sigma_{N,M}^2}{N} \quad \Rightarrow \quad \sigma_M = \frac{\sigma_{N,M}}{\sqrt{N}}$$

con:

- μ: valor medio della distribuzione di probabilità delle medie campionarie
- σ_M^2: varianza della distribuzione di probabilità delle medie campionarie
- $\sigma_{N,M}^2$: varianza riferita alle NxM misure
- M: numero di campioni
- N: numero di misure per ogni campione

Valutazione di tipo A

Si noti che per N che tende all'infinito si ha:

- $\sigma_{N,M}^2 = \sigma^2$ e
- $\sigma_M^2 = 0$

con σ^2 varianza dell'intera popolazione di realizzazioni possibili

Eseguendo la valutazione dell'incertezza in questo modo si ottiene il valor medio della distribuzione delle medie campionarie $\boldsymbol{\mu}$ con un incertezza standard $\boldsymbol{u = \sigma_M}$

$$\boxed{x = \mu \pm u}$$

Valutazione di tipo B

- La valutazione di tipo B dell'incertezza prevede di sfruttare conoscenze note a priori sul sistema di misura, ossia è eseguita sulla base di informazioni fornite da terze parti (es., specifiche di incertezza di uno strumento di misura dichiarate dal costruttore).
- **La valutazione di tipo B dell'incertezza prevede la conoscenza a priori della distribuzione probabilistica relativa alla variabilità dei risultati della misurazione.**
- Le distribuzioni di probabilità possono essere stabilite sulla base o di un'analisi teorica del processo o di conoscenze sperimentali delle caratteristiche e del comportamento della strumentazione, specifiche tecniche di fabbrica, specifiche di taratura, ipotesi conservative

Valutazione di tipo B

Ricapitolando, nelle valutazioni di tipo B

1) in primo luogo si fa una stima dei limiti delle variazioni sulla misura causate da una sorgente d'incertezza, ovvero si valuta lo scarto massimo (caso peggiore).

2) In seguito, si assume una certa distribuzione di probabilità tra questi limiti.

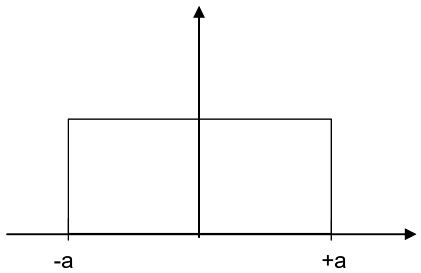
3) Infine, si calcola una deviazione standard equivalente che rappresenta l'incertezza standard ottenuta con valutazione di tipo B.

Le distribuzioni di probabilità più utilizzate sono quattro: normale (o gaussiana), rettangolare (o uniforme), triangolare, distribuzione a U.

Una valutazione dell'incertezza tipo di categoria B può essere tanto attendibile quanto una di categoria A, soprattutto in quelle situazioni in cui la valutazione di categoria A è basata su un numero relativamente ridotto di osservazioni.

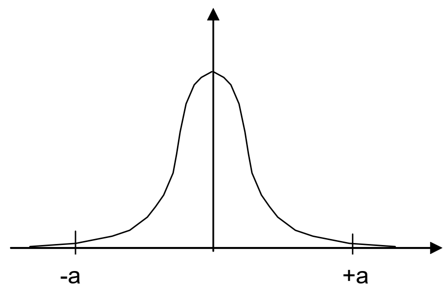
Valutazione di tipo B

Distribuzione rettangolare



$$u = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0.6a$$

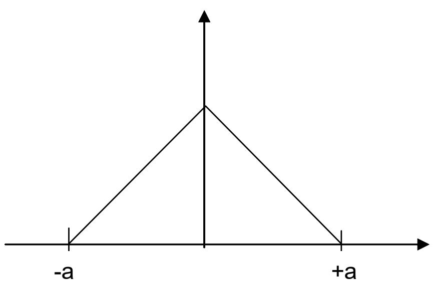
Distribuzione normale



$$u = \frac{a}{2} = 0.5a$$

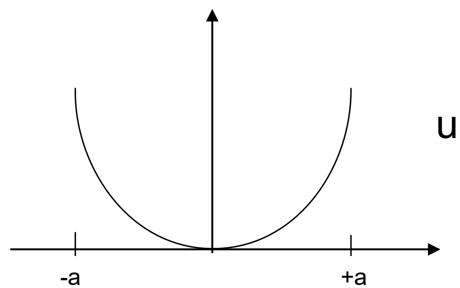
Infatti: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(x - x_m)^2 dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} x^2 dx = \frac{1}{2a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^2}{3}$

Distribuzione triangolare



$$u = \frac{a}{\sqrt{6}} \cong 0.4a$$

Distribuzione a U



$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \cong 0.7a$$

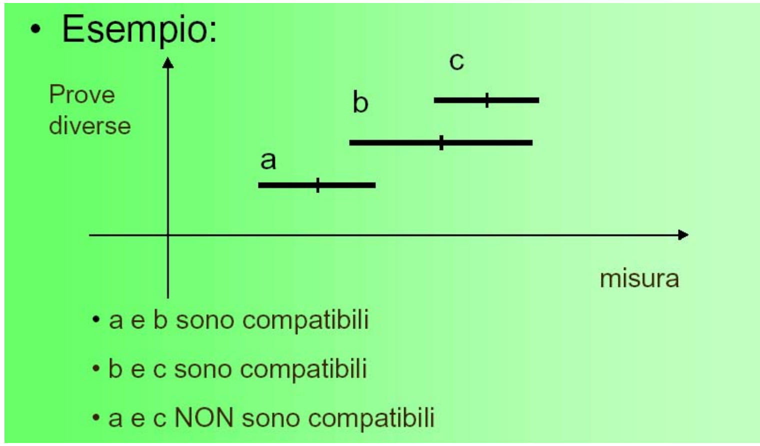
Compatibilità delle misure

A causa dell'incertezza:

- non ha significato parlare di misure uguali
- il concetto di uguaglianza è sostituito da quello di compatibilità tra misure
- le misure sono compatibili quando le fasce di valore assegnate in diverse occasioni come misura della stessa quantità, nello stesso stato, hanno intersezione non nulla.

La compatibilità NON gode della proprietà transitiva (se a è compatibile con b e b è compatibile con c, non necessariamente a è compatibile con c;

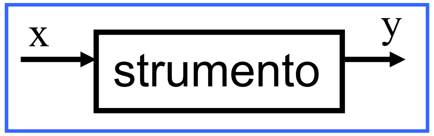
Sono mutuatamene compatibili le misure che hanno almeno un elemento in comune fra tutte le fasce di valore.



Errori ed incertezze per misure dirette e indirette

Misure dirette

Riassumiamo quanto visto per la determinazione degli errori e delle incertezze nel caso di **misura diretta** di una grandezza x con uno strumento di misura.



$$E = y - x$$

Errore assoluto

$$e = \frac{E}{x} \cong \frac{E}{y}$$

Errore relativo

$$U \geq |y - x|$$

Incertezza assoluta di caso peggiore

$$U_r = \frac{U}{|x|} \cong \frac{U}{|y|}$$

Incertezza relativa di caso peggiore

$$u = \sigma_E = std(E) = \sqrt{\boldsymbol{E}[E^2]}$$

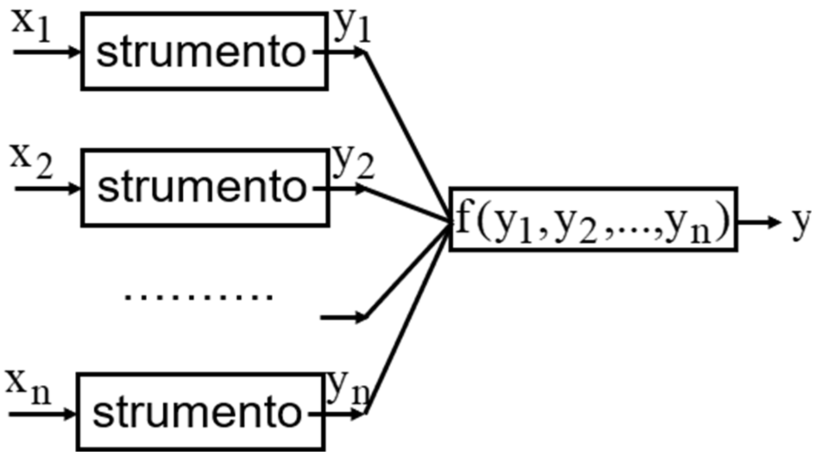
Incertezza standard

$$u_r = \frac{u}{|x|} \cong \frac{u}{|y|}$$

Incertezza relativa standard

Misure indirette

Ricordiamo che una **misura indiretta** è ottenuta attraverso un'elaborazione dei risultati di una o più misurazioni dirette



- Una funzione $y = f(y_1, y_2, \dots\ y_n)$ di più misure dirette $y_1, y_2, \dots\ y_n$ è una misura indiretta

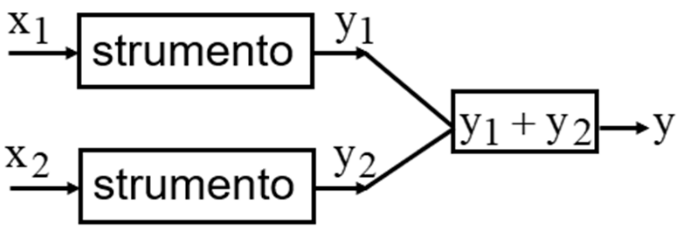
- Naturalmente il misurando (incognito) è $x = f(x_1, x_2, \dots\ x_n)$, e la misura (nota) è $y = f(y_1, y_2, \dots\ y_n)$

Un problema fondamentale è determinare l'errore totale E_{tot} e l'incertezza totale U_{tot} della misura indiretta noti gli errori $E_1, \dots E_n$ e le incertezze $U_1, \dots U_n$ delle misure dirette

Esempi:
Somma, differenza, prodotto e rapporto di misure dirette

Misure indirette

SOMMA



Errori assoluti (diretti)

$E_1 = y_1 - x_1$

$E_2 = y_2 - x_2$

Incertezze assolute (dirette)

$|E_1| \leq U_1$

$|E_2| \leq U_2$

Naturalmente varranno anche per i prossimi esempi

Errore assoluto sulla somma $y = y_1 + y_2$

$$y - x = y_1 + y_2 - x_1 - x_2 = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) = \boldsymbol{E_1 + E_2 = E}$$

Incertezza assoluta di caso peggiore sulla somma:

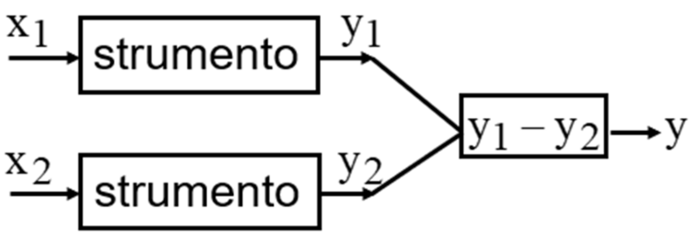
$$|E| = |E_1 + E_2| \leq |E_1| + |E_2| \leq \boldsymbol{U_1 + U_2 = U}$$

Disuguaglianza triangolare

Disuguaglianza errore-incertezza

Misure indirette

DIFFERENZA



Errore assoluto sulla differenza $y = y_1 - y_2$

$$y - x = y_1 - y_2 - x_1 + x_2 =$$
$$= (y_1 - x_1) - (y_2 - x_2) = \boldsymbol{E_1 - E_2 = E}$$

Incertezza assoluta di caso peggiore sulla somma:

$$|E| = |E_1 - E_2| \leq |E_1| + |E_2| \leq \boldsymbol{U_1 + U_2 = U}$$

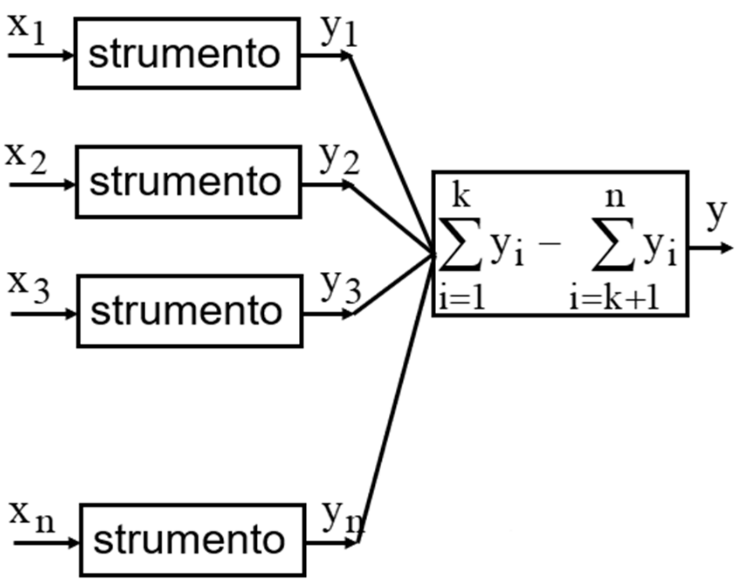
Disuguaglianza triangolare

Disuguaglianza errore-incertezza

Si noti che nei casi visti di somma e differenza, gli errori assoluti si sommano nel caso di somma e si sottraggono nel caso di differenza. Diversamente, le incertezze assolute si sommano aritmeticamente in entrambi i casi.

Misure indirette

SOMMA ALGEBRICA



Errore assoluto:

$$E = \sum_{i=1}^{k} E_i - \sum_{i=k+1}^{n} E_i$$

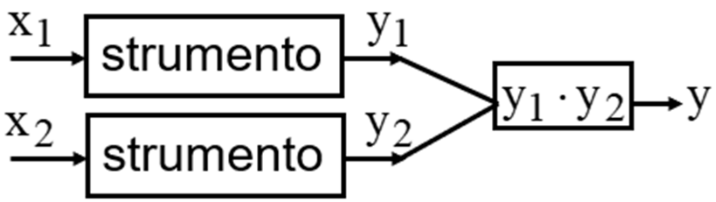
Incertezza assoluta:

$$U = \sum_{i=1}^{k} U_i + \sum_{i=k+1}^{n} U_i$$

Si ricordi, inoltre, che gli errori sono quantità dotate di segno, mentre le incertezze sono quantità sempre positive. Inoltre, in generale un errore indiretto è una somma algebrica di termini di diverso segno, mentre un'incertezza indiretta è una somma aritmetica di termini positivi.

Misure indirette

PRODOTTO



Errore assoluto sul prodotto $y = y_1 \cdot y_2$

$$y - x = y_1 y_2 - x_1 x_2 = y_1 y_2 - (y_1 - E_1)(y_2 - E_2) = E_1 y_2 + E_2 y_1 - E_1 E_2 \cong$$

$$\cong E_1\, y_2 + E_2 y_1 = E$$

(Abbiamo trascurato $E_1 E_2$, il che vale per E_i piccoli rispetto a y_1)

Incertezza assoluta di caso peggiore sul prodotto:

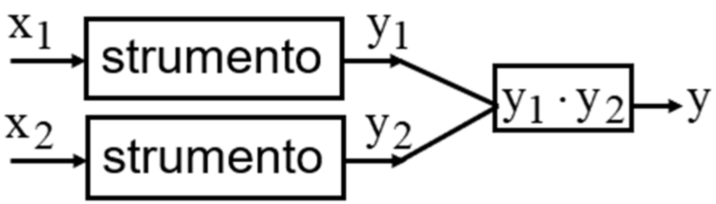
$$|E| = |E_1 y_2 + E_2 y_1| \leq |E_1||y_2| + |E_2||y_1| \leq U_1|y_2| + U_2|y_1| = U$$

Disuguaglianza triangolare

Disuguaglianza errore-incertezza

Misure indirette

PRODOTTO



Errore relativo sul prodotto $\boldsymbol{y = y_1 \cdot y_2}$

$$\frac{E}{y} = \frac{E_1 y_2 + E_2 y_1}{y_1 y_2} = \frac{E_1}{y_1} + \frac{E_2}{y_2} = \boldsymbol{e_1 + e_2 = e}$$

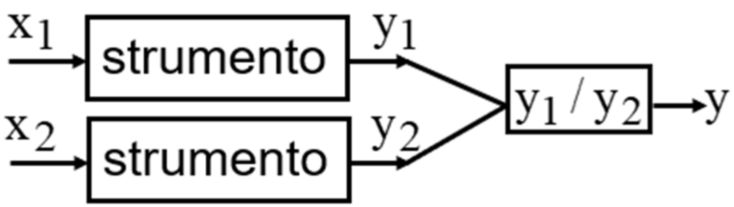
Incertezza relativa di caso peggiore sul prodotto:

$$\frac{U}{|y|} = \frac{U_1|y_2| + U_2|y_1|}{|y_1 y_2|} = \frac{U_1}{|y_1|} + \frac{U_2}{|y_2|} = \boldsymbol{U_{r,1} + U_{r,2} = U_r}$$

In un prodotto, gli errori e le incertezze relative si sommano. In una somma invece si sommano gli errori assoluti

Misure indirette

RAPPORTO



Errore assoluto sul rapporto $y = \frac{y_1}{y_2}$

$$y - x = \frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} - \frac{y_1 - E_1}{y_2 - E_2}$$

$$= \frac{E_1 y_2 - E_2 y_1}{y_2(y_2 - E_2)} = \frac{E_1 y_2 - E_2 y_1}{y_2^2} = E$$

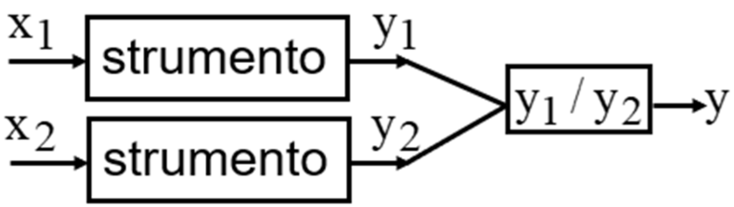
(Abbiamo supposto errori piccoli)

Incertezza assoluta di caso peggiore sul prodotto:

$$|E| = \frac{|E_1 y_2 - E_2 y_1|}{|y_2^2|} \underset{\text{Disuguaglianza triangolare}}{\leq} \frac{|E_1 y_2| + |E_2 y_1|}{|y_2^2|} \underset{\text{Disuguaglianza errore-incertezza}}{\leq} \frac{U_1 |y_2| + U_2 |y_1|}{|y_2^2|} = U$$

Misure indirette

RAPPORTO



Errore relativo sul rapporto $y = \frac{y_1}{y_2}$

$$\frac{E}{y} = \frac{E_1 y_2 - E_2 y_1}{y_2^2} \cdot \frac{y_2}{y_1} = \frac{E_1}{y_1} - \frac{E_2}{y_2} = \boldsymbol{e_1 - e_2 = e}$$

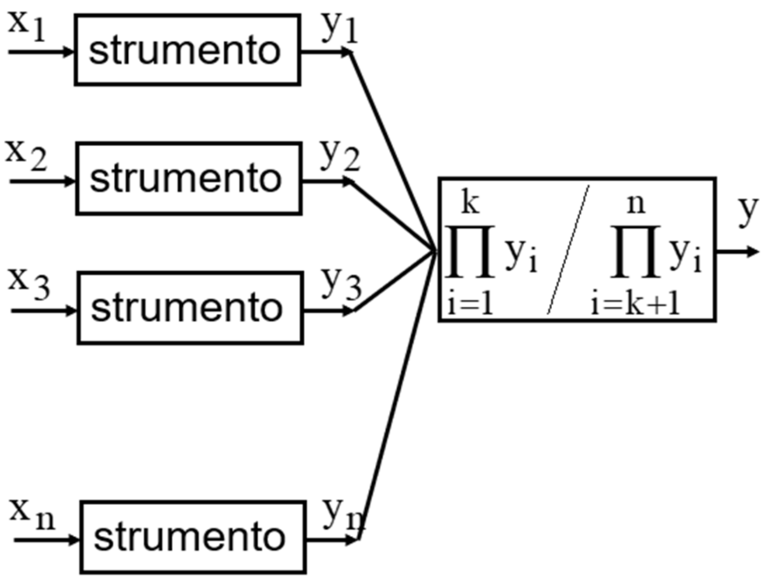
Incertezza relativa di caso peggiore sul rapporto:

$$\frac{U}{|y|} = \frac{U_1 |y_2| + U_2 |y_1|}{|y_2^2|} \cdot \frac{|y_2|}{|y_1|} = \frac{U_1}{|y_1|} + \frac{U_2}{|y_2|} = \boldsymbol{U_{r,1} + U_{r,2} = U_r}$$

In un rapporto, gli errori relativi si sottraggono e le incertezze relative si sommano. In una differenza invece si sottraggono gli errori assoluti e si sommano le incertezze assolute

Misure indirette

ESPRESSIONE MONOMIA



Errore relativo

$$e = \sum_{i=1}^{k} e_i - \sum_{i=k+1}^{n} e_i$$

Incertezza relativa

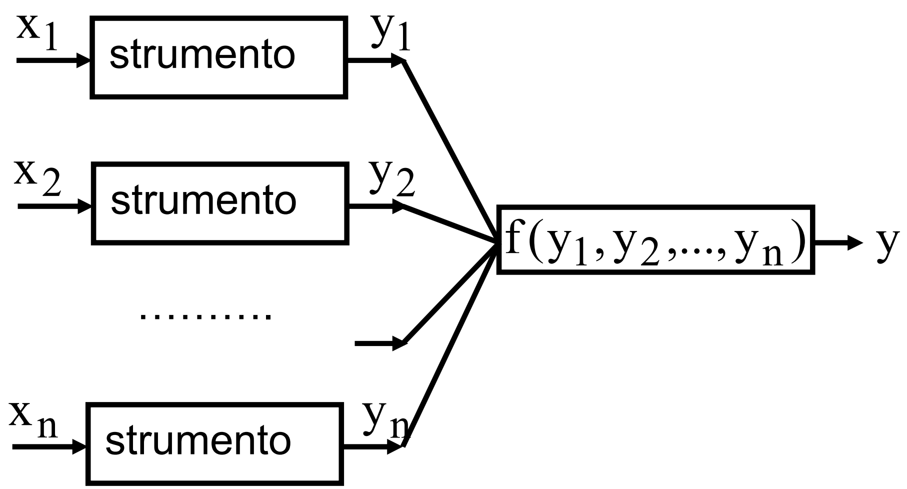
$$U_r = \sum_{i=1}^{k} U_{r,i} + \sum_{i=k+1}^{n} U_{r,i}$$

In una espressione monomia gli errori relativi al numeratore si sommano, e quelli al denominatore si sottraggono. Invece le incertezze relative si sommano comunque (come se si trattasse di un prodotto). Naturalmente dall'errore o incertezza relativa si deriva facilmente quella assoluta.

Errori e incertezze in una misura indiretta generica

Misure indirette

Consideriamo una misura indiretta generica:



- $x = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è il misurando (incognito)
- $y = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ è il risultato di misura (noto)
- $E_i = y_i - x_i$ è l'errore per ogni misura diretta
- $|E_i| = |y_i - x_i| \le U_i$ è l'incertezza per ogni misura diretta

Misure indirette

Possiamo scrivere:

$$x = f(x_1, \dots, x_n) = f\left(y_1 - E_{1,}\ \dots, y_n - E_n\right) \cong f(y_1, \dots, y_n) - \frac{df}{dy_1}E_1 - \ \dots - \frac{df}{dy_n}E_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - x = \boxed{\boldsymbol{E = \frac{df}{dy_1}E_1 + \ \dots + \frac{df}{dy_n}E_n}}$$

Formula di propagazione degli errori assoluti

Abbiamo usato l'approssimazione per errori "piccoli" e l'espansione in serie di Taylor a $y = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$

Misure indirette

Inoltre, dalla formula precedente possiamo scrivere:

$$|E| = \left|\frac{df}{dy_1}E_1 + \ \ldots + \frac{df}{dy_n}E_n\right| \le \left|\frac{df}{dy_1}\right||E_1| + \cdots + \left|\frac{df}{dy_n}\right||E_n| \le$$

$$\boxed{\le \left|\frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dy_1}}\right||\boldsymbol{U_1}| + \cdots + \left|\frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dy_n}}\right||\boldsymbol{U_n}| = \boldsymbol{U}}$$

Formula di propagazione delle incertezze di caso peggiore

- Abbiamo usato la disuguaglianza triangolare e la disuguaglianza errore-incertezza
- Se applichiamo tale formula agli esempi di somma, differenza, prodotto e rapporto troviamo esattamente gli stessi risultati visti

Misure indirette

$$\boxed{\frac{df}{dy_i} = c_i}$$

$per\ i = 1\ \dots n$ Prendono il nome di coefficienti di sensibilità

Per cui possiamo riscrivere le due leggi in maniera compatta:

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{n} c_i E_i}$$

Formula di propagazione degli errori assoluti

$$\boxed{U = \sum_{i=1}^{n} |c_i| U_i}$$

Formula di propagazione delle incertezze di caso peggiore

Incertezza standard in una misura indiretta generica

Misure indirette

Per il calcolo dell'incertezza standard in una misura indiretta generica, ricordiamo che:

$$u = \sigma_E = std(E) = \sqrt{\boldsymbol{E}\left[E_{tot}^2\right]}$$

Per cui calcoliamo il quadrato dell'errore totale, ricavato a sua volta dalla legge di propagazione degli errori:

$$E_{tot}^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} c_i E_i\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dy_i} E_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{df}{dy_i}\right)^2 E_i^2 + 2\sum_{j>i}^{n} \frac{df}{dy_i}\frac{df}{dy_j} E_i E_j$$

Misure indirette

Si ottiene:

$$\boldsymbol{u} = \sqrt{\boldsymbol{E}\left[E_{tot}^2\right]} = \sqrt{\boldsymbol{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{df}{dy_i}\right)^2 E_i^2\right] + \boldsymbol{E}\left[2\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{df}{dy_i}\right)\left(\frac{df}{dy_j}\right)E_iE_j\right]} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{df}{dy_i}\right)^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{df}{dy_i}\right)\left(\frac{df}{dy_j}\right)\sigma_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{df}{dy_i}\right)^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{df}{dy_i}\right)\left(\frac{df}{dy_j}\right)\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c_i^2\sigma_i^2} + 2\sum_{j>i}^{n}\boldsymbol{c_i c_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}}$$

Formula di propagazione delle incertezze standard

Dove:

- $\boldsymbol{E}\left[E_i^2\right] = \sigma_i^2 = u_i^2 \rightarrow$ varianza (quadrato dell'incertezza standard)
- $\boldsymbol{E}\left[E_iE_j\right] = \sigma_{ij} \rightarrow$ covarianza
- $\rho_{ij} \rightarrow$ coeff. di correlazione

Misure indirette

La forma più frequente e più semplice della legge di propagazione dell'incertezza standard si ha nel caso di errori non correlati, dove viene eliminato il secondo termine sotto radice, ottenendo:

$$\boxed{u = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{df}{dy_i}\right)^2 u_i^2}}$$

N.B. $\sigma_i^2 = u_i^2$

Possiamo anche scriverla in forma più compatta in termini di coefficienti di sensibilità:

$$\boxed{u = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 u_i^2}}$$

Formula di propagazione delle incertezze standard nel caso di errori non correlati

L'incertezza standard totale al quadrato dell'uscita è una combinazione lineare delle incertezze standard al quadrato u_i^2 delle grandezze in ingresso, e i coefficienti della combinazione lineare sono i coefficienti di sensibilità al quadrato.

Criteri di arrotondamento

Criteri di arrotondamento

Per scrivere correttamente il risultato di una misura bisogna fare alcune considerazioni:

Cifre decimali di un numero sono le cifre dopo la virgola (es 7.543624 -> cifre decimali = 543624)

Cifre significative di un numero sono le cifre dopo gli zeri (es 0.00254 cifre significative = 254)

Criteri di arrotondamento

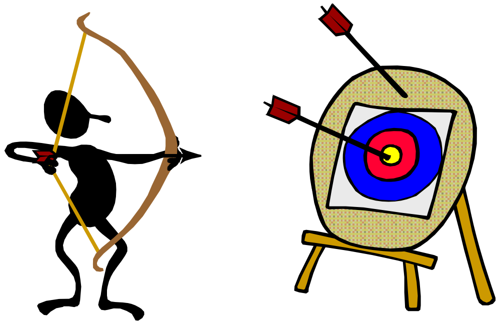
Per esprimere l'incertezza si usano normalmente due cifre o addirittura una (se questa è alta cioè 8 o 9), contando dalla *prima cifra significativa* (ossia la prima cifra diversa da zero procedendo da sinistra verso destra). Di norma si approssima per eccesso

U = 0.5437 α U = 0.55 oppure U = 0.6

U = 0.8812 α U = 0.88 oppure U = 0.9

U = 0.9112 α U = 0.91 oppure U = 1 (ottimistico: U = 0.9)

U = 0.001214 α U = 0.0013 (ottimistico: U = 0.0012)



Gli stessi criteri di compattezza ed eleganza dovrebbero essere utilizzati nell'esprimere il risultato della misurazione

Criteri di arrotondamento

Per eseguire l'arrotondamento dei risultati di misura *conviene*:

- lasciare inalterata la cifra che precede quella da scartare se quest'ultima è inferiore a 5. Così V = 15.12215768234 diventerà V = 15.12
- aumentare di una unità la cifra che precede quella da scartare se quest'ultima è superiore a 5. Così V = 15.12815768234 diventerà V = 15.13
- aumentare di una unità la cifra che precede quella da scartare se la cifra da scartare è uguale a 5 ed è seguita da cifre diverse da zero. Così V = 15.12515768234 diventerà V = 15.13
- lasciare inalterata la cifra che precede quella da scartare se la cifra da scartare è uguale a 5 ed è seguita da zeri o da nessuna altra cifra. Così V = 15.125 diventerà V = 15.12