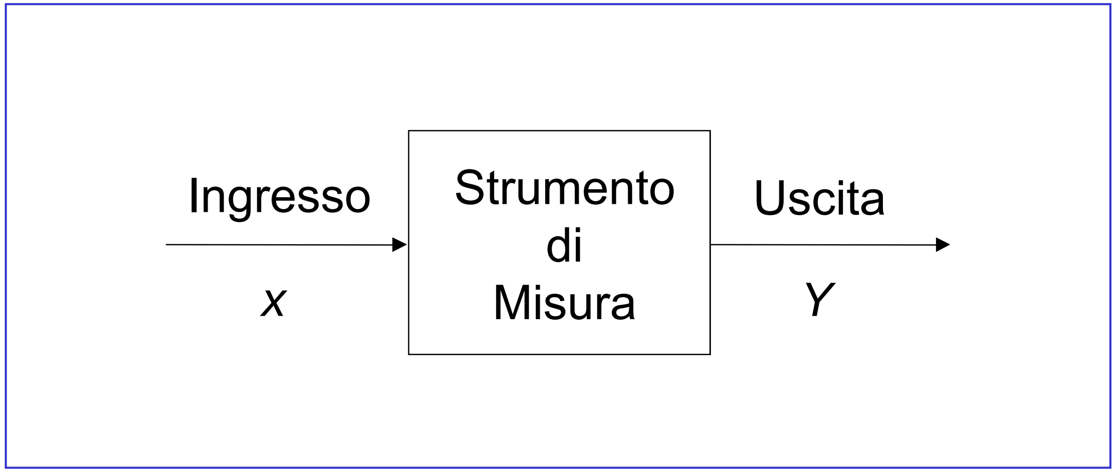
Errori, Incertezze e Specifiche degli Strumenti di Misura

Caratterizzazione di uno strumento

L'analisi delle caratteristiche di uno strumento di misura (o di un sensore) richiede soltanto lo studio delle relazioni fra gli ingressi e le uscite senza esaminare i processi di conversione che avvengono al suo interno.

Pertanto,

nella fase di caratterizzazione di uno strumento di misura si guarderà al dispositivo come a una "black-box" esaminando soltanto la sua relazione ingresso-uscita, dove l'uscita è l'indicazione fornita dallo strumento.



Vale la pena precisare che:

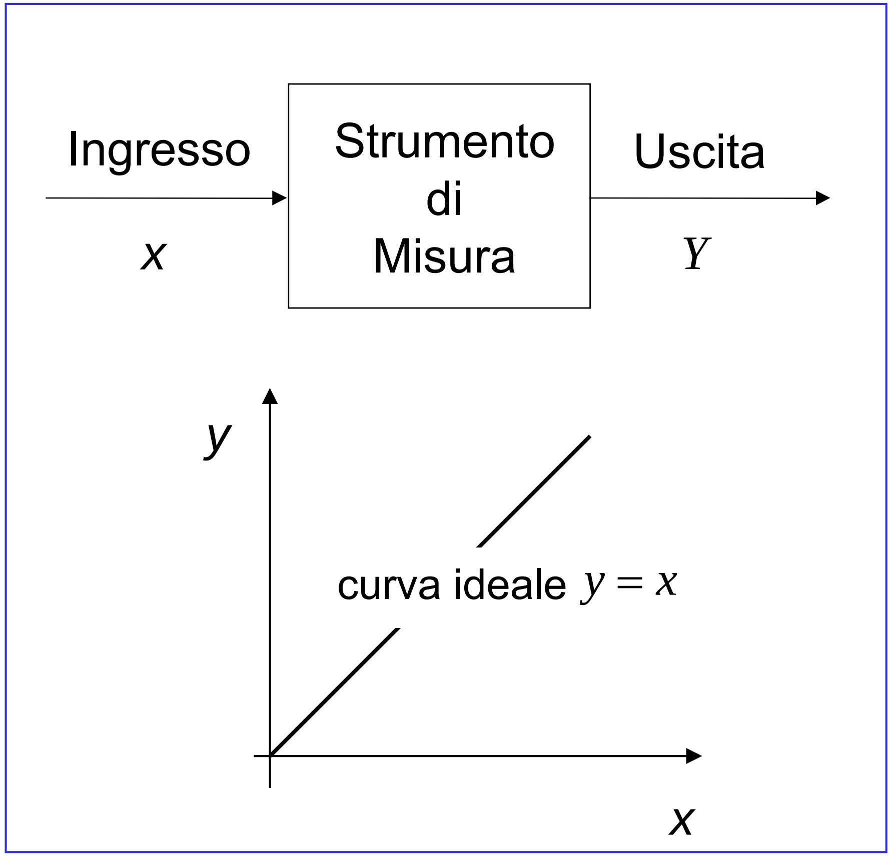
- Per ogni strumento di misura (o sensore) esiste una relazione *ingresso-uscita ideale* per la quale l'uscita è uguale al valore "vero" dell'ingresso. Questo tuttavia non si verifica mai nel caso reale.

- Nel funzionamento reale lo strumento di misura (o il sensore) descrivono una caratteristica che si discosta dalla funzione ideale. Per portare in conto l'inaccuratezza del dispositivo occorre quantificare, almeno probabilisticamente, la deviazioni esistenti fra la caratteristica reale e quella ideale.
- Questa relazione reale, nella pratica nota solo entro certi limiti, può essere descritta con un'espressione matematica lineare o non lineare (di cui sono forniti i parametri o i punti da interpolare) o in forma di tabella o di grafico.

Errori negli strumenti

La *caratteristica ideale* o *teorica* di uno strumento di misura è una retta con pendenza unitaria

E' noto che per sensori inerentemente non lineari la caratteristica ideale può essere una curva con pendenza variabile da punto a punto



Se si fanno *M* misure dello stesso valore *x* di una grandezza di ingresso si ottengono in genere *M* valori y_i dell'uscita, diversi fra loro e diversi da *x* .
Questo effetto è dovuto alla contemporanea presenza di una componente di errore sistematico e di una componente di errore casuale.
Possiamo pertanto affermare che in realtà *l'uscita Y di uno strumento di misura è una variabile aleatoria*.

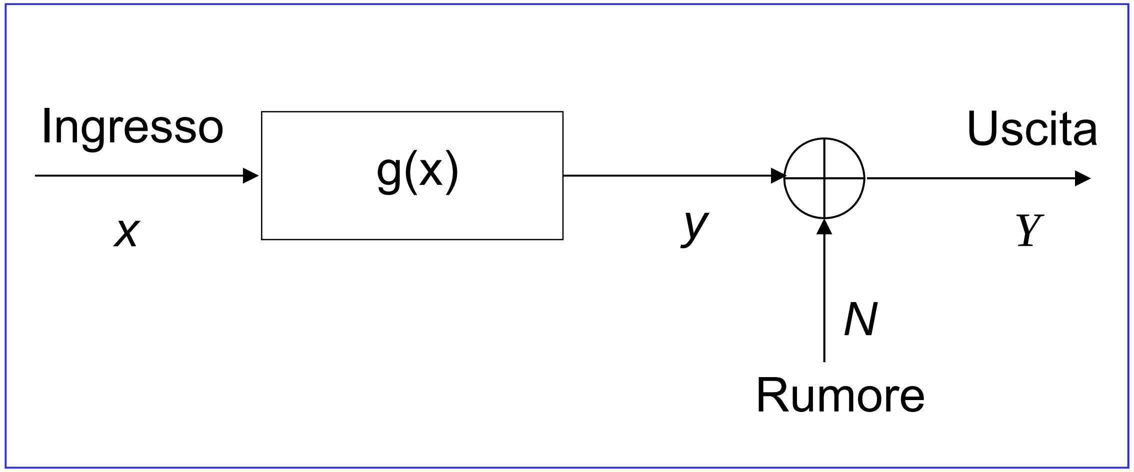
Se si indica con *y* il valore atteso dell'uscita :

$$E[Y] = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} y_i = \mu_y = y$$

e con *N* la variabile casuale:

$$N = Y - y$$

possiamo pensare allo strumento come un sistema non lineare senza memoria *g(x)* che trasforma *x* in *y* a cui è sommato un processo casuale a media nulla (rumore) che produce in uscita una variabile casuale *Y*:



dove <u>l'errore sistematico dello strumento</u> sarà:

$$E_s(x) = y - x = g(x) - x$$

<u>l'errore casuale dello strumento</u> sarà:

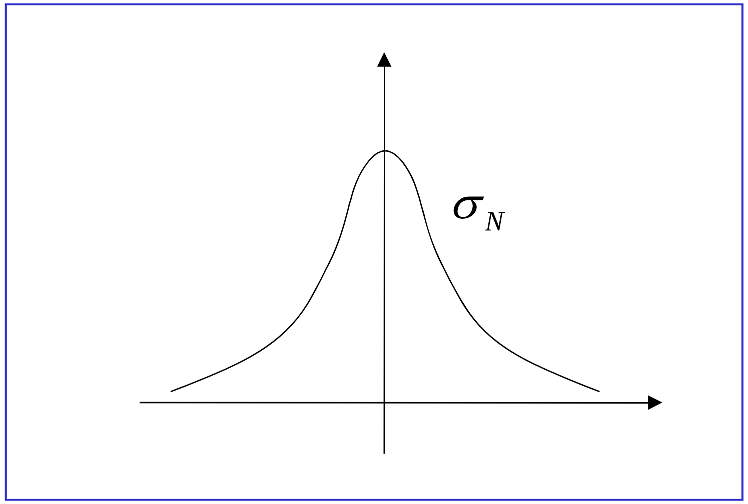
$$E_c = Y - y = N$$

e <u>l'errore totale</u> sarà la somma delle due componenti:

$$E_t(x) = Y - x = (Y - y) + (y - x) = E_c + E_s(x)$$

La componente casuale di errore E_c ha, tipicamente, distribuzione Gaussiana, ed è a media nulla per costruzione:

$$E[N]=E[Y-y]=E[Y]-E[y]=y-y=0$$



La sua varianze è:

$$var[N]=E\left[N^2\right]-E^2[N]=E\left[N^2\right]=\sigma_N^2$$

L'errore E_c avrà segno e valore variabili casualmente. Conoscendo la sua distribuzione, è possibile valutare la fascia di incertezza estesa corrispondente ad un determinato livello di confidenza L_c.

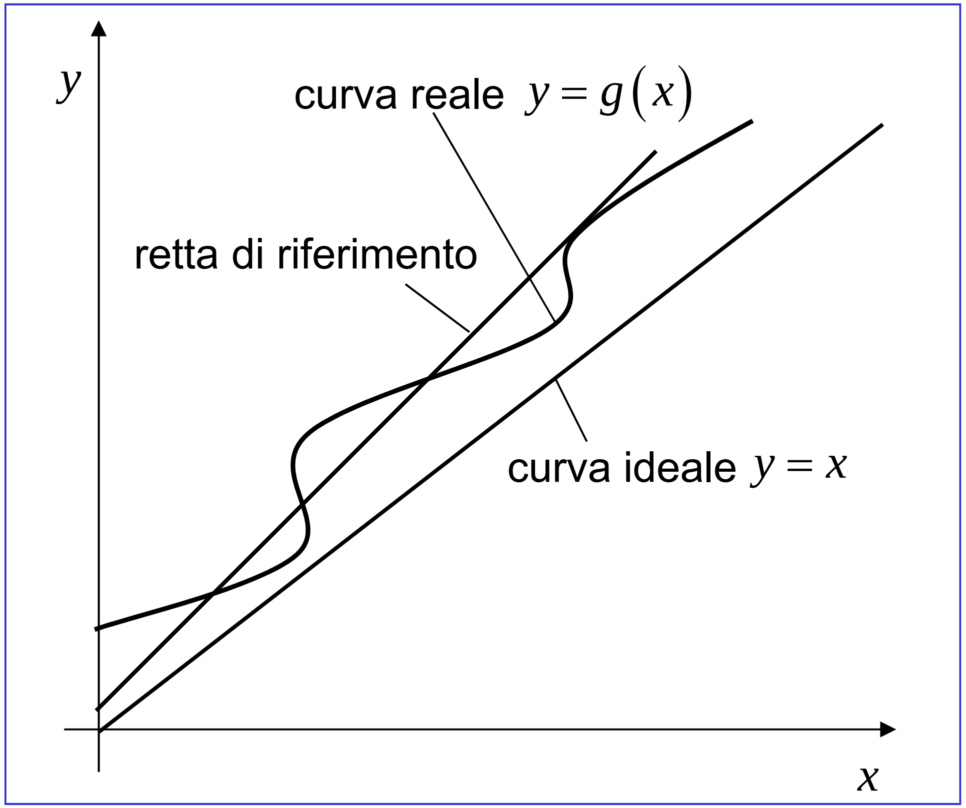
$$|E_c|=|Y-y|\le U_{c_k}=k\cdot\sigma_N \qquad con \quad L_c=L_{c_k}$$

Il livello di confidenza è la probabilità che $|Y-y|\le U_{c_k}$. Nel caso di distribuzione Gaussiana, si ha

$$U_c=U_{c_1}=1\cdot\sigma_N \qquad L_{c_1}\cong 68\%$$

$$U_c=U_{c_2}=2\cdot\sigma_N \qquad L_{c_2}\cong 95\%$$

$$U_c=U_{c_3}=3\cdot\sigma_N \qquad L_{c_3}\cong 99.7\%$$

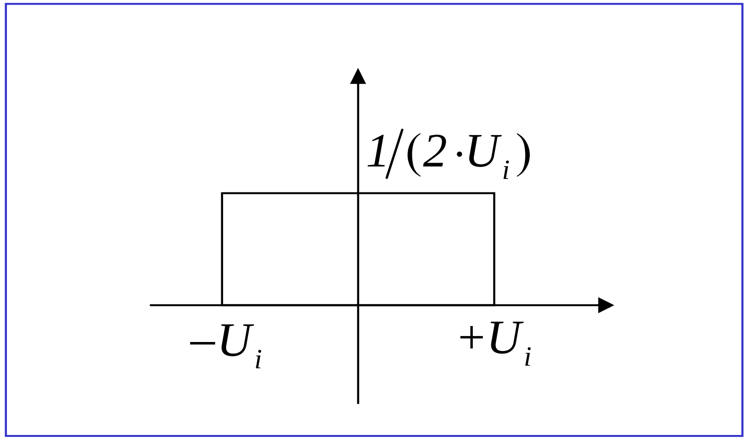


La componente sistematica di errore

$$E_s(x) = y - x = g(x) - x$$

terrà conto dello scostamento dello strumento dal comportamento ideale (retta y=x) e può essere eliminata solo nel caso di funzione *g(x)* nota e invertibile.
La sua distribuzione può essere considerata gaussiana se, come si vedrà in seguito, è dovuta al contributo di diverse componenti di errore $E_i(x)$ a distribuzione uniforme.

L'ipotesi di distribuzione uniforme per le singole componenti sistematiche di errore $E_i(x)$ è l'unica opzione possibile quando, come molto spesso succede, il costruttore non fornisce informazioni sulla distribuzione.

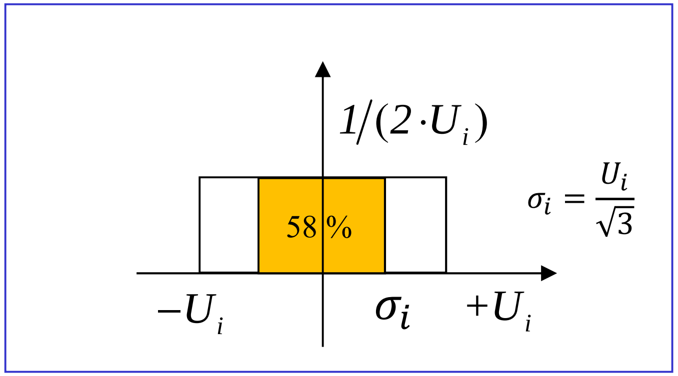


Così come per il caso di distribuzione gaussiana, anche per distribuzione uniforme si può ottenere una maggiorazione dell'errore ricorrendo all'incertezza U_i (con L_c=*100%*):

$$\left|E_i(x)\right| = \left|y - x\right| \le U_i$$

Ricordando che per una distribuzione uniforme in un intervallo *[a,b]* la media e la varianza sono, rispettivamente:

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



possiamo ricavare il livello di confidenza corrispondente all'intervallo $\pm\sigma_i$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{(2 \cdot U_i)^2}{12}} = \frac{U_i}{\sqrt{3}} \quad \text{con} \quad L_c = 2 \cdot \sigma_i \frac{1}{2 \cdot U_i} = \frac{U_i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{U_i} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 58\%$$

Nel caso di distribuzione uniforme, le fasce di incertezza estesa corrispondenti ai livelli di confidenza del 58%, 95% e 100% sono:

$$U_{i_1} = 1 \cdot \sigma_i \qquad L_{c_1} \cong 58\%$$

$$U_{i_{1.65}} = 1.65 \cdot \sigma_i \qquad L_{c_{1.65}} \cong 95\%$$

$$U_{i_{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \cdot \sigma_i \cong 1.73 \cdot \sigma_i \qquad L_{c_{\sqrt{3}}} = 100\%$$

Riepilogando:

- in uno strumento di misura *le distribuzioni della componente casuale* e *sistematica di errore* possono essere spesso considerate *Gaussiane*; in base al teorema limite centrale, ciò è il risultato della somma di molteplici contributi di errore a distribuzione uniforme.

- per errori a distribuzione uniforme *l'incertezza standard* vale $\sigma_i = \frac{U_i}{\sqrt{3}}$ con livello di confidenza pari al *58%*, l'incertezza estesa (con livello di confidenza pari al *95%)* ha un fattore di copertura *k=1.65* e *l'incertezza di caso peggiore* (con livello di confidenza pari al *100%*) ha un fattore di copertura $k = \sqrt{3}$.

- per errori a distribuzione gaussiana all'*incertezza standard* σ_N è associato il livello di confidenza pari al *68%*, all'*incertezza estesa* con fattore di copertura *k*=2 è associato un livello di confidenza pari al *95%,* mentre *l'incertezza di caso peggiore* (con livello di confidenza pari al *100%*) vale ∞.

Incertezza complessiva di misura

Ora è possibile calcolare l'incertezza complessiva introdotta dallo strumento di misura.

Supponendo gli errori E_c e $E_s(x)$ indipendenti, potremo esprimere la varianza totale E_t(x) come:

$$\sigma_t^2 = \sigma_N^2 + \sigma_S^2$$

e scrivere l'incertezza standard come:

$$u_t = \sigma_t = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_S^2}$$

dove la funzione densità di probabilità di E_t(x) dipende dalle funzioni densità di probabilità di $E_s(x)$ e di E_c.

Supponendo che $E_s(x)$ e E_c , siano gaussiane, anche la funzione densità di probabilità di E_t(x) sarà *gaussiana* in quanto data dalla convoluzione fra le due distribuzioni:

$$f_t(x) = f_c(x) * f_s(x)$$

e il fattore di copertura *k* corrispondente a uno specifico livello di confidenza L_{ck} sarà calcolato utilizzando la distribuzione risultante $f_t(x)$.

E’ bene evidenziare che in molti casi può essere utile ricorrere al *teorema limite centrale* che permette di approssimare la distribuzione risultante a quella normale anche se le distribuzioni componenti non risultano normali.

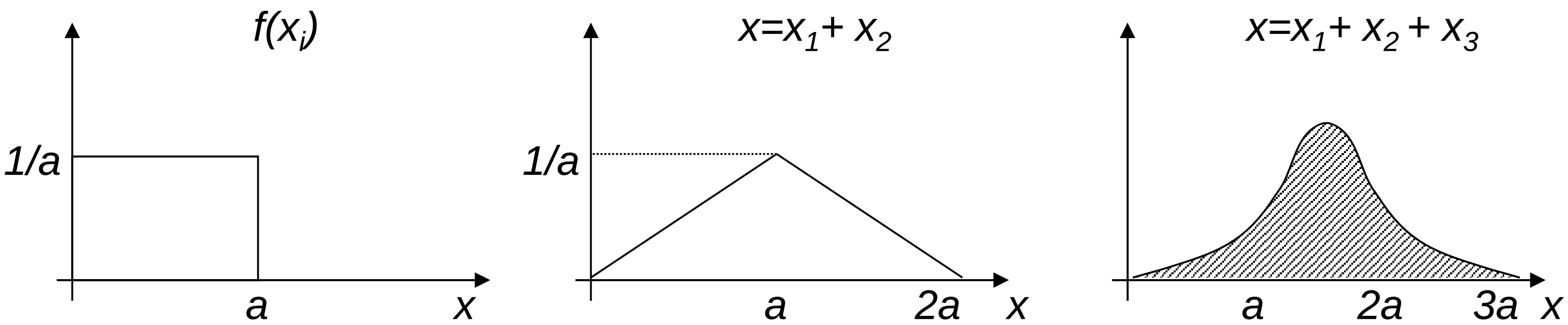
Più precisamente:

Il teorema limite centrale afferma che, sotto condizioni abbastanza generali, **la funzione densità di probabilità *f(x)* della somma di *n* variabili casuali indipendenti x_i tende ad una curva di distribuzione di tipo normale per $n \to \infty$**:

$$x = x_1 + x_2 + \ \ldots + x_n$$

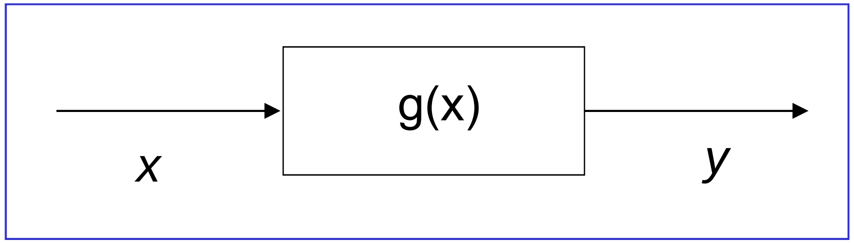
$$f_x(x) = f_{x_1}(x) * f_{x_2}(x) * \ \ldots * f_{x_n}(x) \quad \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \quad f(x) \cong \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-(x-\mu_x)^2 / 2\sigma^2}$$

Ad esempio nel caso di distribuzioni uniformi avremo:



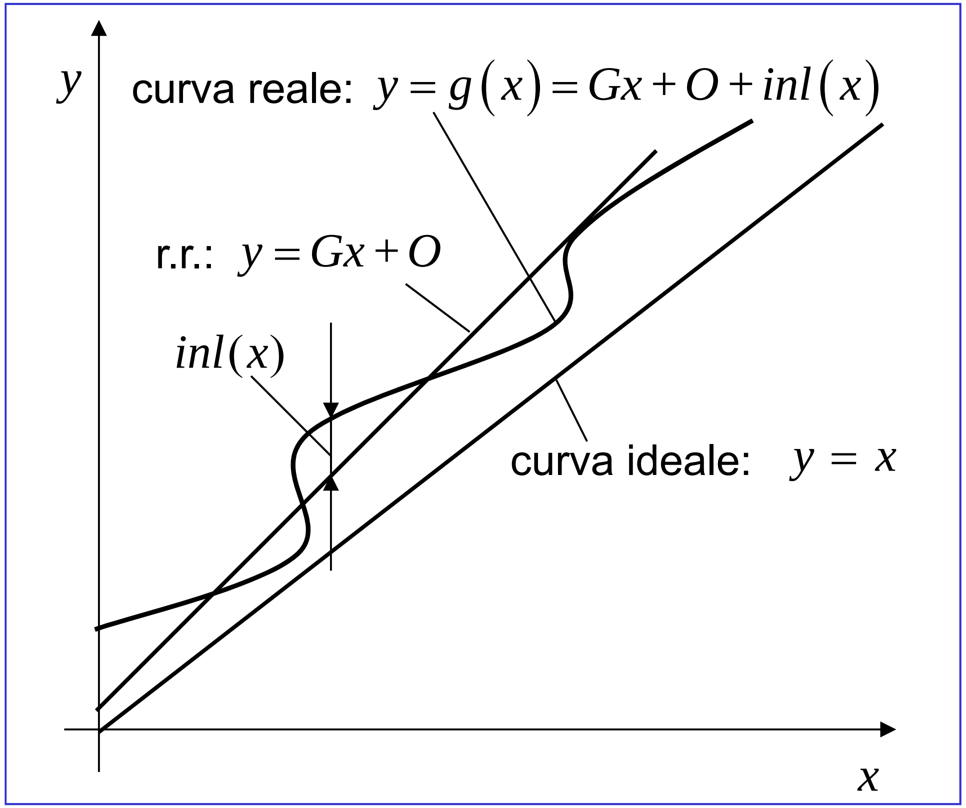
Errori sistematici negli strumenti di misura

Si è visto che il blocco non lineare statico *g(x)* è causa di un errore sistematico dello strumento $E_s(x)$ dato dalla relazione:



$$E_s(x) = y - x = g(x) - x$$

che porta in conto lo scostamento dello strumento dal suo comportamento ideale (retta y=x). Spesso esso ha distribuzione gaussiana.



E' conveniente esprimere la g(x) come somma di una parte lineare (che non distorce il segnale) e una parte non lineare. Nel caso di ADC e DAC, quest'ultima è detta *nonlinearità integrale, integral nonlinearity*.
E' bene notare che i parametri *G* e *O* non sono univocamente individuati dalla *g(x)*; essi possono essere scelti in diversi modi.

La nonlinearità integrale è data dalla differenza:

$$inl(x) = g(x) - Gx - O$$

Scelte tipiche per *G* (*guadagno*) e per *O (offset*) sono:

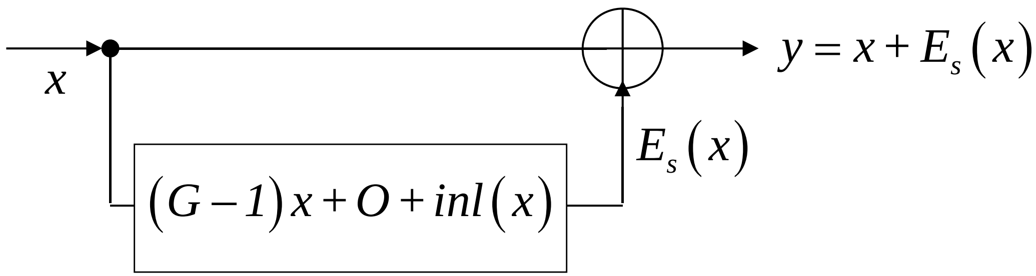
1) tali da minimizzare il massimo modulo di *inl(x) (independent nonlinearity)*;

2) tali da congiungere gli estremi di *g(x) (terminal based nonlinearity)*;

3) tali da minimizzare lo scarto quadratico medio tra *g(x)* e *Gx+O*

Considerando la parte lineare e la *inl*, l'errore sistematico può essere scritto come:

$$E_S(x) = y - x = g(x) - x = Gx + O + inl(x) - x = (G - 1)x + O + inl(x)$$



Indicando con:

$e_G = G - 1$ l'errore di guadagno

$E_o = O$ l'errore di offset

$E_{inl}(x) = inl(x)$ l'errore di non linearità

si può scrivere l'errore sistematico dello strumento come:

$$E_S(x) = e_G \cdot x + E_o + E_{inl}(x)$$

A queste tre componenti sistematiche bisognerà aggiungere l'errore di quantizzazione $E_q(x)$, nel caso di strumentazione digitale, e l'errore di risoluzione $E_\lambda(x)$, nel caso di strumentazione analogica. In definitiva potremo scrivere:

$\boxed{E_S(x) = e_G \cdot x + E_O + E_{inl}(x) + E_q(x)}$ errore sistematico totale per strumento digitale

$\boxed{E_S(x) = e_G \cdot x + E_O + E_{inl}(x) + E_\lambda(x)}$ errore sistematico totale per strumento analogico

Specifiche degli strumenti di misura

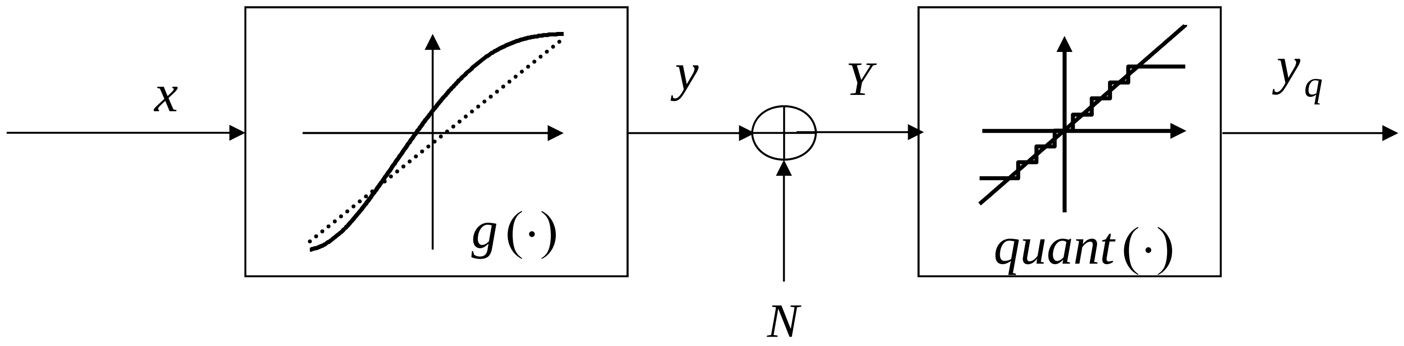
Dovendo calcolare l'incertezza da cui è affetta una qualunque misura dobbiamo partire da quello che i costruttori ci dicono sugli errori nei loro strumenti

Interpretare le caratteristiche note (*specifications*) della strumentazione spesso non è facile:

- non esiste uno standard sul modo di specificare le caratteristiche metrologiche di uno strumento o di un sensore;
- i costruttori presentano le cose nel modo da loro ritenuto, volta per volta, "più significativo";
- alcune specifiche sono, a volte, ambigue o errate.

E' essenziale possedere – oltre a una certa esperienza – alcuni concetti fondamentali sul comportamento degli strumenti di misura dal punto di vista degli errori

E' possibile definire (riprendendo gli schemi precedenti o ricorrendo allo schema della quantizzazione non ideale) il modello semplificato di uno strumento per misure statiche (esempio: multimetro)

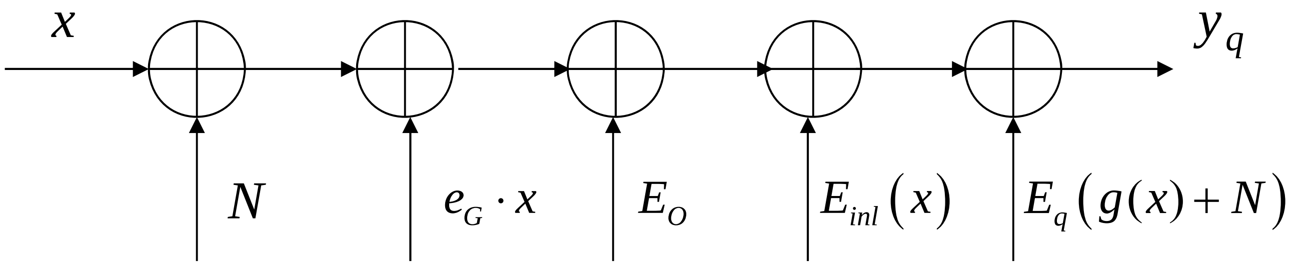


$$Y = g(x) + N = (1 + e_G)x + E_O + E_{inl}(x) + N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_q = quant(Y) = Y + E_q(Y) = Y + E_q(g(x) + N) \Rightarrow$$

$$E_t(x) = y_q - x = \underbrace{e_G x}_{\text{errore di guadagno}} + \underbrace{E_O}_{\text{errore di offset}} + \underbrace{E_{inl}(x)}_{\text{errore di linearità}} + \underbrace{E_q\big(g(x)+N\big)}_{\text{errore di quantizzazione}} + \underbrace{N}_{\text{rumore}} = E_s(x) + E_c$$

che descrive il modello additivo d'errore complessivo (sistematico + casuale) rappresentabile come:



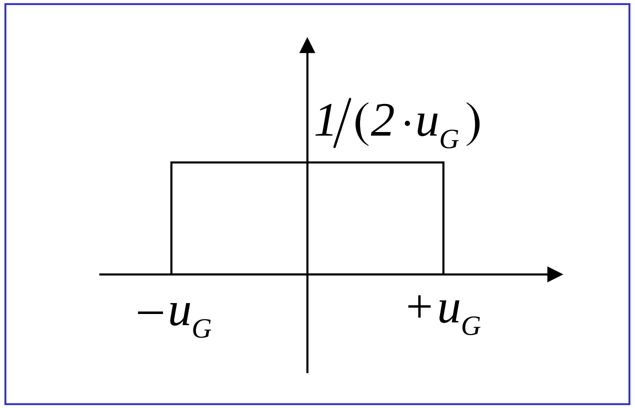
In termini generali, per sapere qualcosa di E_t è necessario scrivere la sua espressione (che coinvolge e_G, E_O, $E_{INL}(x)$, N ed $E_q(g(x) + N)$), e quindi dedurre ciò che è possibile in base alle informazioni che si hanno su questi parametri.

Generalmente il costruttore <u>non fornisce gli errori</u> ma una maggiorazione del loro valore assoluto (<u>incertezze</u>):

1) $|e_G| \leq U_G$ **incertezza di guadagno**

$u_G = \sigma_G = \frac{U_G}{\sqrt{3}}$ Incertezza standard $\left(L_c \cong 58\%\right)$

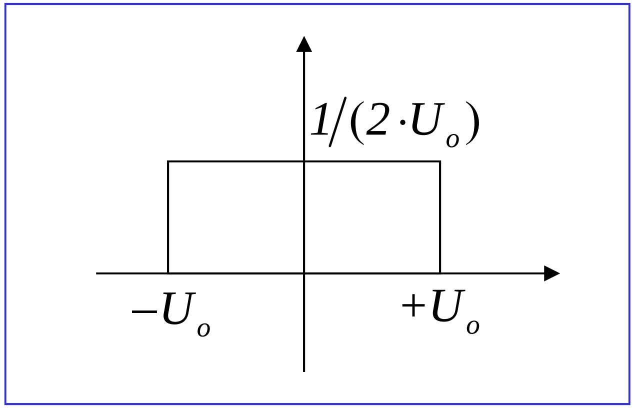
$U_{G100} = U_G$ Incertezza di caso peggiore



2) $| E_O | \leq U_o$ **incertezza di offset**

$u_O = \sigma_O = \frac{U_o}{\sqrt{3}}$ Incertezza standard $\left(L_c \cong 58\%\right)$

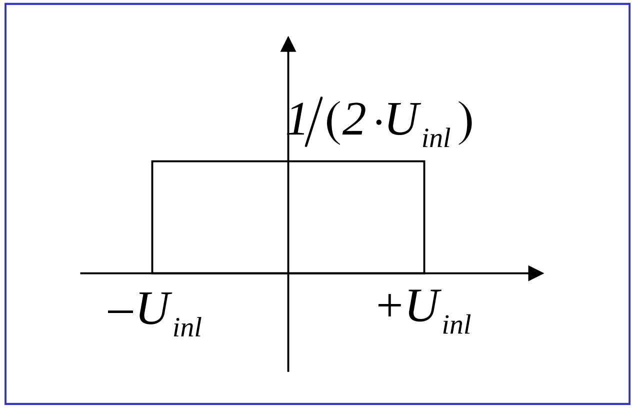
$U_{O_{100}} = U_O$ Incertezza di caso peggiore



3) $|E_{inl}(x)| \leq U_{inl}$ **incertezza di nonlinerità**

$u_{inl} = \sigma_{inl} = \dfrac{U_{inl}}{\sqrt{3}}$ Incertezza standard $\left(L_c \cong 58\%\right)$

$U_{inl_{100}} = U_{inl}$ Incertezza di caso peggiore

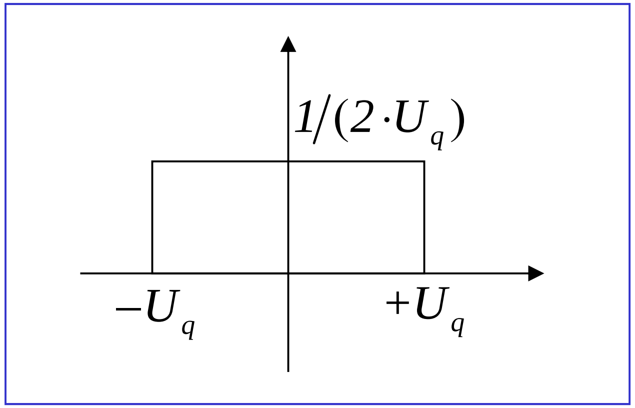


4)

$|E_q(g(x)+N)| \leq U_q = \dfrac{Q}{2}$ **incertezza di quantizzazione**

$u_q = \sigma_q = \dfrac{U_q}{\sqrt{3}}$ Incertezza standard $\left(L_c \cong 58\%\right)$

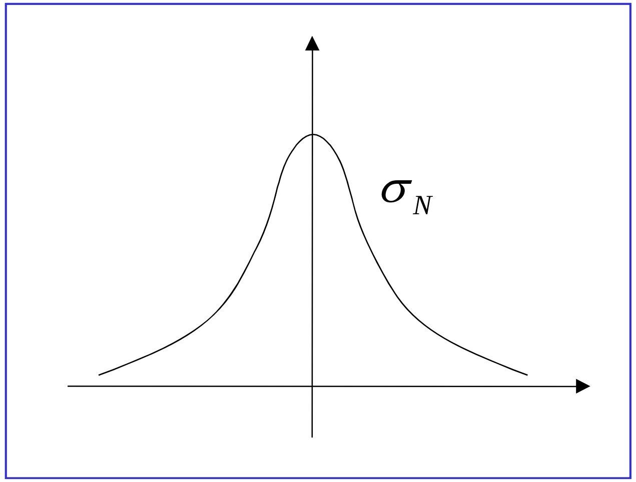
$U_{q_{100}} = U_q$ Incertezza di caso peggiore



5) $|E_N| = |Y - y| \leq U_{c_k}$ **incertezza di rumore**

$u_N = \sigma_N$ Incertezza standard

$U_{N_{100}} = \infty$ Incertezza di caso peggiore



Sono queste incertezze che ci permettono di ricavare l'incertezza complessiva su una misura diretta o indiretta

Esempi di specifiche degli strumenti di misura

I costruttori di strumenti (nella sezione "<u>specifications</u>") forniscono informazioni sull'errore, basandosi sulla sua espressione in termini di guadagno, offset, nonlinearità, rumore ecc.

Purtroppo ciò non avviene seguendo uno standard o regole precise, il che impone di "<u>interpretare</u>" caso per caso i dati forniti.

Si è visto che, nell'ipotesi di rumore trascurabile, un modo naturale e conveniente di specificare gli errori è quello di ricorrere alle incertezze u_G, U_O, U_{inl}, U_q, per gli errori <u>sistematici di ampiezza</u> e alle incertezze u_S, U_D, U_{tbd}, U_{TC}, per gli <u>errori sistematici di tempo</u>.

Leggendo le specifiche dobbiamo cercare di ricondurci a questa descrizione, quando possibile.

• Multimetro HP974A display a “4 1/2 cifre” (±49999 punti di misura)

Analizziamo le specifiche per individuare U_G, U_O, U_{inl}, U_q :

Range	Resolution	Accuracy	Input Resistance
500 mV	10 µV	± (0.05% + 2)	> 1000 MΩ
5 V	100 µV		11 MΩ (nominal)
50 V	1 mV		10 MΩ (nominal)
500 V	10 mV		
1000 V	100 mV		

- la risoluzione è il passo di quantizzazione Q (=1 LSB); poiché il display è a “4 1/2 cifre” essa non è altro che 1/50000 del valore di fondo scala:

$$range = [-V_{FS}, V_{FS}] \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{V_{FS}}{0.5 \cdot 10^5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_q = \frac{Q}{2} = 0.5\,LSB}$$

- la “accuracy” (in realtà incertezza) è data con una formula binomia; essa è composta da una parte proporzionale alla lettura e una pari a un numero fisso di LSB (quindi proporzionale alla portata).

Per interpretare la formula binomia consideriamo nuovamente l'incertezza in una misura diretta:

$$U = 0.05\% + 2 \longrightarrow U_{tot}(y_q) = U_G |y_q| + U_O + U_{inl} + U_q$$

Domande:

1)la formula binomia comprende tutte le componenti di incertezza

(in particolare U_q)?

2) Quali componenti sono conglobate nell'uno e quali nell'altro termine?

Per rispondere a queste domande non abbiamo molte indicazioni per cui possiamo fare solo supposizioni e ragionamenti inevitabilmente opinabili.

Per quanto riguarda la prima domanda possiamo pensare (a meno di avviso contrario) che la formula includa tutta l'incertezza, compresa U_q.

Per quanto riguarda la seconda domanda, è ovvio attribuire al primo termine la componente $U_G |y_q|$ e al secondo U_O e U_q (che non possono essere proporzionali alla lettura).

La U_{inl} non può essere trascurabile (altrimenti sarebbe elementare correggere l'errore di offset) e deve quindi essere conglobata nell'uno o nell'altro termine. Possiamo ipotizzare che U_{inl} sia inclusa nel secondo termine.

Questo vuol dire che, scrivendo $U = 0.05\% + 2$, il secondo termine <u>non è un puro errore di offset</u>, e infatti già abbiamo supposto che comprenda l'errore di quantizzazione (che non si semplifica in una differenza). Inoltre non comprende il solo errore di quantizzazione ±0.5 LSB, ma anche la nonlinerità, altrimenti sarebbe stato ovvio scrivere qualcosa del tipo "offset = ±1.5 LSB", invece di dare un errore complessivo di 2 LSB. Quindi la interpretazione è la seguente:

$$|e_G \cdot y_q| \leq U_G |y_q|$$

$$|E_O + E_{inl}(x) + E_q(g(x))| \leq U_{O+inl+q}$$

$$\boxed{\begin{aligned} U_G &= 0.05\% \\ \mathrm{U_{O+inl+q}} &= 2\,\mathrm{LSB} \end{aligned}}$$

*In definitiva, accettando questa interpretazione, **non possiamo sottrarre l'errore di offset nel caso di differenza di misure**.*