Lezione, Eliminazione gaussiana e Sottospazi.

Eliminazione Guassiana:

Input: Una matrice aumentata $(A \mid b)$
Output: Una matrice aumentata $(A' \mid b')$ tale che
(i) A' è una matrice scalina.
(ii) I sistemi lineari $A'x = b'$ e $Ax = b$ hanno le stesse soluzioni.

Ricordiamo dalla lezione 1 che le seguenti mosse di Gauss non cambiano l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $(A \mid b)$:

(1) Aggiungere un multiplo di una riga di $(A \mid b)$ ad un'altra riga.
(2) Moltiplicare una riga di $(A \mid b)$ per uno scalare non nullo.
(3) Riordinare le righe di $(A \mid b)$.

Psuedo Code

Input $M = (A \mid b)$ matrice aumentata con R righe e $C+1$ colonne
Variabili r, s, t (interi)

Procedure:

trova_pivot (M, r, c)
Restituisce il più piccolo $i \geq r$ tale che $M_{ic} \neq 0$. Se non c'è un tale r , restituisce -1.

elimina (M, r, c)
Usando la regola 1, rendere tutte le voci della colonna c di M sotto la riga r zero aggiungendo un multiplo adatto della riga r di M.

eliminazione_gaussiana (M, R, C)
$r = c = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} c \leq C: \text{Forse dovrai lavorare sull'ultima colonna.} \\ r \leq R-1: \text{L'algoritmo finisce quando si raggiunge l'ultima riga.} \end{array} \right.$
while ($(r \leq R-1) \wedge (c \leq C)$)
{ $t =$ trova_pivot (M, r, c)
Se (t è uguale a -1) allora aumentare c di 1 La colonna è zero in corrispondenza e sotto la riga r di M. Spostare una colonna a destra.
Altrimenti
{ Se $(t \neq r)$ allora cambia le righe r e t Dobbiamo scambiare le righe
elimina (M, r, c)
aumentare r di 1
aumentare c di 1 Avendo eliminato le voci sotto la riga r nella colonna c di M, spostiamo una riga in basso e una colonna a sinistra.
}
}

Esempio: $*$ = pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&2&1&2&1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Algoritmo per risolvere il sistema lineare $Ax = b$:

(a) Applicare l'eliminazione gaussiana alla matrice aumentata (A|b) per ottenere (A'|b').
(b) Applica l'algoritmo dato nella lezione precedente per risolvere A'x=b'.

Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&4&3\\1&3&9&6\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&3&2\\0&0&2&1\end{array}\right)$$

Risolvere lavorando all'indietro dall'ultima riga:

$$2x_3 = 1 \implies x_3 = \frac{1}{2} \quad \Big| \quad x_2 + 3x_3 = 2 \implies x_2 = \frac{1}{2} \quad \Big| \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \implies x_1 = 0$$

Esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&2&1&2&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Variabili dipendenti: $x_1, \ x_2$
Variabili indipendenti: $x_3, \ x_4$

Risolvere lavorando all'indietro dall'ultima riga:

$$x_2 + x_4 = 0 \implies x_2 = -x_4 \quad \Big| \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \implies x_1 = 1 - x_3$$

Eliminazione gaussiana per A invece di $(A \mid b)$

L'algoritmo è esattamente lo stesso della procedura per $(A|b)$. Basta rimuovere l'ultima colonna b.

Esempio:

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&3\\2&4&0&4&4\\1&2&3&5&5\\2&4&0&4&7\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&1&3&3\\0&0&-2&-2&-2\\0&0&2&2&2\\0&0&-2&-2&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&1&3&3\\0&0&-2&-2&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&1&3&3\\0&0&-2&-2&-2\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Sottospazi

Definizione: Sia V un spazio vettoriale. Un sottoinsieme $U \subseteq V$ e' chiamata un sottospazio di V se (e sole se):

(A1) $u, u' \in U \implies u + u' \in U$

(A2) $u \in U, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda u \in U$

Esempio: Se V è uno spazio vettoriale, allora $\{0\}$ e V sono sottospazi di V.
Un sottospazio $U \subseteq V$ è detto proprio se $U \neq V$.

Proposizione: Se U è un sottospazio di V, allora le operazioni di addizione e moltiplicazione vettoriale per scalari su V si limitano alle operazioni su U rispetto alle quali U diventa uno spazio vettoriale.
Dimostrazione: Il punto chiave è che gli assiomi (A1) e (A2) implicano che le operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione scalare su V limitano le operazioni su U.

Esempio: Sia $L : U \to V$ una mappa lineare. Allora, il nucleo o kernel

$$\ker(L) = \{u \in U \mid L(u) = 0\}$$

di L è un sottospazio di U

Infatti:

(A1) $u_1, u_2 \in \ker(L) \implies L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) = 0 \implies u_1 + u_2 \in \ker(L)$

(A2) $u \in \ker(L), \ \ c \in \mathbb{R} \implies L(cu) = cL(u) = 0 \implies cu \in \ker(L)$

Esempio: Sia $L : U \to V$ una mappa lineare. Allora, l'immagine

$$L(U) = \{L(u) \mid u \in U\}$$

di L è un sottospazio di V.

Infatti,

(A1) $v_1 = L(u_1), \ \ v_2 = L(u_2) \in L(U) \implies v_1 + v_2 = L(u_1) + L(u_2) = L(u_1 + u_2) \in L(U)$

(A2) $v = L(u), \ \ c \in \mathbb{R} \implies cv = cL(u) = L(cu) \in L(U)$

Esempio: Se A è una matrice $n \times m$ allora

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ (anche chiamato lo spazio nullo di A)

Infatti, $\ker(A)$ è solo il kernel della mappa lineare $x \in \mathbb{R}^m \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$.

Esempio: Se A è una matrice $n \times m$ allora

$$\mathrm{Im}(A) = \{\, Ax \mid x \in \mathbb{R}^m \,\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ che è chiamato lo spazio delle colonne di A.

Chiaramente, $\mathrm{Im}(A)$ è solo l'immagine di $\mathbb{R}^m$ sotto la mappa lineare $x \mapsto Ax$

Span lineare

Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V. Allora, lo span lineare

$$\mathrm{span}(S) \subseteq V$$

di S è il più piccolo sottospazio di V che contiene ogni elemento di S.

Nella prossima lezione, definiremo $\mathrm{span}(S)$ nel caso in cui S possa avere infiniti elementi.

Per il momento, assumiamo che S sia finito.

Sia $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ e si definisca $L : \mathbb{R}^m \to V$ la mappa lineare definita dalla formula

$$L(x_1, \ldots, x_m) = x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m$$

Allora $$\mathrm{span}(S) = \mathrm{Im}(L)$$

<u>Esempio</u>: Sia A una matrice con righe $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Allora, lo spazio delle righe di A, scritto $r(A)$, è $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n)$.

Spazi vettoriali a dimensione finita

Sia V uno spazio vettoriale. Allora V è di dimensione finita se (e solo se) esiste un sottoinsieme finito $S \subseteq V$ tale che

$$\mathrm{span}(S) = V$$

posto j'th

<u>Esempio</u>: Siano $V = \mathbb{R}^n$ e $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ dove $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$
Allora

$$\mathrm{span}(S) = \mathbb{R}^n$$

<u>Teorema</u>: Se V è di dimensione finita, allora ogni sottospazio di V è anch'esso di dimensione finita.

<u>Esempio</u>: Sia A una matrice $n \times m$. Allora,

$$\ker(A) \subseteq \mathbb{R}^m \implies \ker(A) \text{ ha dimensione finita}$$

Allo stesso modo

$$\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^n \implies \mathrm{Im}(A) \text{ ha dimensione finita}$$

Infine, $r(A) \subseteq \mathbb{R}^m \implies r(a)$ ha dimensione finita

Base

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e S un insieme finito tale che

$$\mathrm{span}(S) = V$$

Allora, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ si dice che è una base di V se (e solo se) ogni elemento di V ha una rappresentazione unica della forma:

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

Esempio: Siano $v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ v_3 = (1,1)$. Allora $\{v_1, v_2\}$ è un base di $\mathbb{R}^2$ perché

$$(x_1, x_2) = c_1 v_1 + c_2 v_2 \iff c_1 = x_1,\ \ c_2 = x_2$$

Invece, $\{v_1, v_2, v_3\}$ non è un base di $\mathbb{R}^2$ perché

$$(1,2) = v_1 + 2v_2 = v_2 + v_3$$

Infine $\{v_1\}$ non è un base di $\mathbb{R}^2$ perché $\mathrm{span}(v_1) \neq \mathbb{R}^2$.

Algoritmo per trovare una base di $r(A)$

Sia A una matrice nxm. Applicare l'eliminazione gaussiana ad A per produrre una matrice scalina A'.

Le righe non nulle di A' sono una base di $r(A)$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 3), (0\ \ 0\ \ -2\ \ -2\ \ -2), (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 3)\}$ è una base di $r(A)$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1),\ (0\ \ 1\ \ 0\ \ 1)\}$ è una base di $r(A)$

L'algoritmo successivo afferma che una base per lo spazio delle colonne si trova applicando l'eliminazione gaussiana per trovare i pivot, e poi prendendo le colonne corrispondenti nella matrice originale.

Per la matrice A di questo esempio, vediamo che i pivot si trovano nelle colonne 1 e 2. Inoltre, le colonne 3 e 4 di A sono solo copie delle colonne 1 e 2.

Algoritmo per trovare una base di $\mathrm{Im}(A)$

Sia A una matrice $n \times m$. Applicare l'eliminazione gaussiana ad A per produrre una matrice scalina A'.

Diciamo che una colonna di A' è una colonna pivot se contiene un pivot di A'.

Sia $\{A_1, \ldots, A_m\}$ a indicare le colonne di A e $\{A'_1, \ldots, A'_m\}$ a indicare le colonne di A'. Allora,

$$B = \{\, A_i \mid A'_i \text{ è una colonna pivot di } A' \,\}$$

è una base di $\mathrm{Im}(A)$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$ è una base di $\mathrm{Im}(A)$

Algoritmo per trovare la base di $\ker(A)$

Sia A una matrice $n \times m$. Applica l'eliminazione gaussiana ad A per produrre una matrice scalina A'.

Ricordiamo dall'ultima lezione che, poiché A' è una matrice di scalina, abbiamo una nozione di variabili indipendenti e dipendenti.

Per ogni variabile indipendente x_i sia v_i la soluzione di $A'x = 0$ ottenuta ponendo $x_i = 1$ e tutte le altre variabili indipendenti uguali a zero.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Variabili indipendenti:
$x_2,\ x_4$

Risolvere lavorando all'indietro dall'ultima riga:

$x_5 = 0$ | $x_3 = -x_4$ | $x_1 = -2x_2 - 2x_4$

$$x_2 = 1, \quad x_4 = 0 \implies v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0, \quad x_4 = 1 \implies v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{v_2, v_4\}$ è una base di $\ker(A)$

Sottospazio ortogonale

Sia V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare $(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}$.
Sia U uno sottospazio di V. Allora

$$U^\perp = \{v \in V \mid (u,v) = 0 \text{ per ogni } u \in U\}$$

è un sottospazio di V. Infatti:
(a)
$$v \in U^\perp \implies (v,u) = 0 \quad \text{for all } u \in U$$
$$w \in U^\perp \implies (w,u) = 0 \quad \text{for all } u \in U$$
Perciò
$$(v+w,u) = (v,u) + (w,u) = 0 + 0 \quad \text{for all } u \in U$$

e quindi $v + w \in U$.

(b) $v \in U^\perp,\, u \in U,\, c \in \mathbb{R} \implies (cv,u) = c(v,u) = 0 \implies cv \in U^\perp$.

Esempio: $v \in \mathbb{R}^3,\, v \neq 0 \implies (\mathbb{R}v)^\perp$ è il piano passante per l'origine perpendicolare a v.

$v = (1,1,1) \implies (\mathbb{R}v)^\perp = \{\,(x,y,z) \mid x+y+z = 0\,\}$

In generale, se $v \in \mathbb{R}^n,\, v \neq 0$ allora $(\mathbb{R}v)^\perp$ è l'iperpiano passante per l'origine perpendicolare a v .

Esempio: Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado inferiore a 3 nella variabile x, dotato del prodotto scalare

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Sia $v = 1 + x + x^2$. Allora,

$$(a+bx+cx, 1+x+x^2) = \int_{-1}^{1} (a+bx+cx^2)(1+x+x^2)\,dx = \frac{2}{15}(20a+5b+8c)$$

Perciò, $(\mathbb{R}(1+x+x^2))^\perp = \{\,a+bx+cx^2 \mid 20a+5b+8c = 0\,\}$.

Algoritmo per trovare il complemento ortogonale:

Input: Una base $\{a_1, \ldots, a_k\}$ per un sottospazio $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Output: Una base per il complemento ortogonale $U^\perp$ di U rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n : (u,v) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$.

Passo 1 : Scrivi ogni come a_i un vettore di riga $(a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \cdots \;\; a_{in})$ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^n$.
Passo 2: Sia A la matrice composta dai vettori di riga costruiti nel passo 1.
Passo 3: $U^\perp$ è il kernel di A sotto l'identificazione

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \ker(A) \leftrightarrow (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$