**Lezione: Mappe lineari**

Definizione: Che $U$ e $V$ siano spazi vettoriali. Allora, una funzione

$$L : U \to V$$

è detta una mappa lineare da $U$ a $V$ se (e solo se)
(1) $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$ per ogni $u_1,\ u_2 \in U$.
(2) $L(cu) = cL(u)$ per ogni $c \in \mathbb{R},\ u \in U$.

Esempio: Fissa $w \in \mathbb{R}^3$ e sia

$$L_w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad L_w(u) = u \times w \qquad \text{(prodotto vettoriale con w)}$$

Per le proprietà del prodotto vettoriale:
(1) $L_w(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2) \times w = (u_1 \times w) + (u_2 \times w) = L_w(u_1) + L_w(u_2)$
(2) $L_w(cu) = (cu) \times w = c(u \times w) = cL_w(u)$

Quindi, $L_w$ è una mappe lineare.

Esempio: Fissa $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ e sia

$$P_w(v) = (v, w) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Se $v = (v_1, \ldots, v_n),\ v' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ allora
(1)
$$\begin{aligned} P_w(v + v') &= ((v_1 + v'_1, \ldots, v_n + v'_n), (w_1, \ldots, w_n)) \\ &= (v_1 + v'_1)w_1 + \cdots + (v_n + v'_n)w_n \\ &= [v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n] + [v'_1 w_1 + \cdots + v'_n w_n] \\ &= P_w(v) + P_w(v') \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} P_w(cv) &= ((cv_1, \ldots, cv_n), (w_1, \ldots, w_n)) \\ &= (cv_1)w_1 + \cdots (cv_n)w_n \\ &= cP_w(v) \end{aligned}$$

Quindi, $P_w$ è una mappe lineare.

Non Esempio: $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad N(v) = |v|$

$N(1,0,0) = 1, \quad N(0,1,0) = 1, \quad N(1,1,0) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$
Quindi: $N((1,0,0) + (0,1,0)) \neq N(1,0,0) + N(0,1,0)$

Proposizione: Se $L : U \to V$ è una mappe lineare allora $L(0_U) = 0_V$
Dimostrazione:

$$L(0_U) = L(0_U + 0_U) = L(0_U) + L(0_U) \implies 0_V = L(0_U) \qquad \text{(cancella } L(0_U) \text{ da entrambi i lati)}$$

Non esempio: $L(x,y,z) = x+y+z+1$

$L(0,0,0) = 1$ (Ma per una mappa lineare $L(0) = 0$)

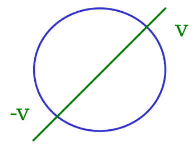
Esempio (Moltiplicazione di un vettore per uno scalare):

Per qualsiasi spazio vettoriale $V$ e qualsiasi scalare $c$, la mappa

$$L(v) = cv$$

è una mappa lineare.

Casi speciali:
(a) $c = 1$ è chiamata mappa di identità, di solito denotata $I$ o $I_V$.
(b) $c = -1$ è chiamata inversione:




Esempio (Mappa dell'inclusione):

Se $m \leq n$ allora

$$\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad \iota(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, ...0)$$

si chiama la mappa di inclusione da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$.
(Si verifica facilmente che è una mappa lineare).

Esempio (Proiezione sulle prime n coordinate):

Se $m \geq n$ la mappa

$$\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad \pi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$

si chiama proiezione sulle prime $n$ coordinate.
È anche una mappa lineare.

Esempio (Proiezione da $\mathbb{R}^3$ a un piano):

Sia $P \subseteq \mathbb{R}^3$ un piano con equazione:

$$ax + by + cz = 0 \qquad \text{(E1)}$$

Supponiamo che $u = (a,b,c)$ sia un vettore unitario. Allora,

$$\pi(v) = v - (v,u)u$$

si chiama proiezione da $\mathbb{R}^3$ a $P$.

Per vedere che $\pi$ assume valori in $P$, riscrivi l'equazione (E1) come

$$((x,y,z),u) = 0$$

(Continua a pagina seguente)

Allora: Perché $u$ è un vettore unitario:

$$(\pi(v), u) = (v - (v,u)u, u) = (v,u) - (v,u)(u,u) = (v,u) - (v,u) = 0$$

Per vedere che $\pi$ è una mappa lineare, si noti che:

(1) $\pi(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2) - (v_1 + v_2, u)u = v_1 + v_2 + (v_1, u)u + (v_2, u)u$
$= [v_1 - (v_1, u)u] + [v_2 - (v_2, u)u] = \pi(v_1) + \pi(v_2)$

(2) $\pi(cv) = cv - (cv, u) = cv - c(v, u) = c(v - (v, u)) = c\pi(v)$

Nota : Se $u$ è un vettore unitario in $\mathbb{R}^n$ [i.e. $(u,u) = 1$ ], si può definire la proiezione da $\mathbb{R}^n$ all'iperpiano (i.e. = id est = cioè)

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x,u) = 0 \}$$

con la stessa formula $\pi(v) = v - (v,u)u$.

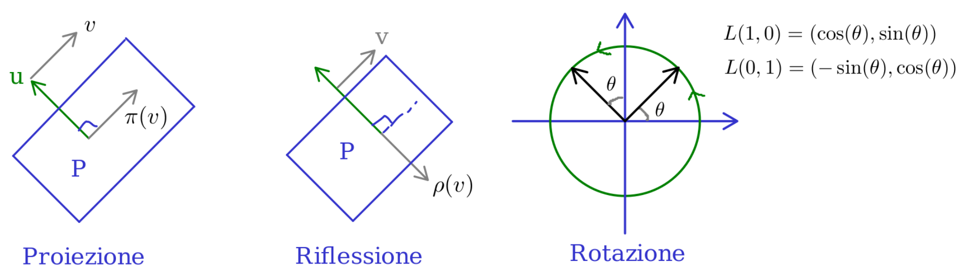
Esempio (Riflessione attraverso un piano in $\mathbb{R}^3$):

Usando la notazione dell'esempio precedente, definiamo:

$$\rho(v) = v - 2(v,u)u$$

Allora,
(i) $\rho(u) = u - 2(u,u)u = -u$
(ii) Se $v \in P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x,u) = 0\}$ abbiamo $\rho(v) = v - (v,u)u = v$

Così $\rho$ fissa il piano $P$ e inverte il vettore normale $u$. Geometricamente, $\rho$ corrisponde alla riflessione attraverso il piano $P$.




Esempio: La rotazione intorno all'origine di $\theta$ gradi in senso antiorario è una mappa lineare $L_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Proposizione: Se $L : U \to V$ è una mappa lineare e $L' : V \to W$ è una mappa lineare allora $L' \circ L : U \to W$ è una mappa lineare.
Dimostrazione:

(1) $$(L' \circ L)(u_1 + u_2) = L'(L(u_1 + u_2)) = L'(L(u_1) + L(u_2))$$
$$= L'(L(u_1)) + L'(L(u_2)) = (L' \circ L)(u_1) + (L' \circ L)(u_2)$$

(2) $(L' \circ L)(cu) = L'(L(cu)) = L'(cL(u)) = cL'(L(u)) = c(L' \circ L)(u)$

In particolare, ponendo $W = V$ e lasciando che $L'$ denoti la moltiplicazione scalare $L'(v) = cv$ segue che per qualsiasi mappa lineare $L : U \to V$ si ha
$$L' \circ L = cL$$
è una mappa lineare.

Proposizione: Se $L, L' : U \to V$ sono mappe lineari allora $L + L'$ è anche una mappa lineare da U a V.
Dimostrazione: Esercizio per gli studenti

## Mappe lineari: Spazi di funzioni

Esempio: Se $S$ è un insieme e $p$ è un punto di $S$, la valutazione in $p$ definisce una mappa lineare

$$\nu_p : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}, \qquad \nu_p(f) = f(p) \qquad \text{(E2)}$$

Infatti, l'equazione (E2) definisce una mappa $\nu_p$. Resta da dimostrare che la mappa $\nu_p$ è lineare:
(1) $\nu_p(f + g) = (f + g)(p) = f(p) + g(p)$
(2) $\nu_p(cf) = (cf)(p) = cf(p) = c\nu_p(f)$

Non Esempi (con la notazione dell'esempio precedente):

$$q_p : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}, \qquad q_p(f) = f^2(p) : \qquad q_p(2f) = (2f(p))^2 = 4f^2(p) = 4q_p(f)$$

$$s_p : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}, \qquad s_p(f + g) = (f + g)(p) + 1 = f(p) + g(p) + 1$$
$$s_p(f) = f(p) + 1 \qquad = (f(p) + 1) + (g(p) + 1) - 1 = s_p(f) + s_p(g) - 1$$

Esempio: Fissa una funzione $g \in \mathbb{R}^S$. Allora la moltiplicazione per $g$ definisce una mappa lineare
$$m_g : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S, \qquad (m_g(f))(s) = f(s)g(s) \qquad \text{(E3)}$$

Infatti, l'equazione (E3) definisce una mappa $m_g$. Resta da dimostrare che la mappa $m_g$ è lineare:
(1) Per ogni $s \in S$
$$(m_g(f_1 + f_2))(s) = ((f_1 + f_2)(s))g(s) = (f_1(s) + f_2(s))g(s)$$
$$= f_1(s)g(s) + f_2(s)g(s) = (m_g(f_1))(s) + (m_g(f_2))(s)$$

allora $m_g(f_1 + f_2) = m_g(f_1) + m_g(f_2)$

(continua, pagina seguente)

Esempio: (continua)
(2) Per ogni $s \in S$

$$(m_g(cf))(s) = ((cf)(s))g(s) = (cf(s))g(s) = cf(s)g(s) = c(m_g(f))(s)$$

Allora $m_g(cf) = c\,m_g(f)$

$\boxed{\text{Spazio vettoriale polinomiale } \mathbb{R}[x]}$

Ciascuno degli esempi dati nella sezione precedente si applica anche a $\mathbb{R}[x]$:

$$\nu_p : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \qquad \nu_p(f) = f(p)$$

Il prodotto di due polinomi è un polinomio, quindi se $g \in \mathbb{R}[x]$ è un polinomio fisso allora:

$m_g : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \qquad m_g(f) = fg$ è un mappe lineare

Esempio: Se $a \in \mathbb{R}$ allora la traslazione di $a$ definisce una mappa lineare

$$\tau_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \qquad (\tau_a(f))(x) = f(x+a) \tag{E4}$$

Infatti, l'equazione (E4) definisce una mappa. Resta da dimostrare che la mappa (E4) è lineare:

(1) $(\tau_a(f+g))(x) = (f+g)(x+a) = f(x+a) + g(x+a) = (\tau_a(f))(x) + (\tau_a(g))(x)$
Allora
$$\tau_a(f+g) = \tau_a(f) + \tau_a(g)$$

(2) $(\tau_a(cf))(x) = cf(x+a) = c(\tau_a(f))$
Quindi
$$\tau_a(cf) = c\tau_a(f)$$

Illustrazioni: $\tau_1(x) = x+1, \qquad \tau_1(x^2) = (x+1)^2, \qquad m_x(f) = xf(x)$

$\boxed{\text{Derivate formali di polinomi:}}$

In analisi, imparerete la definizione della derivata in termini di un limite:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Tuttavia, per le funzioni polinomiali $f \in \mathbb{R}[x]$ la derivata può essere definita come la seguente mappa lineare:

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

(1) $\frac{d}{dx}(1) = 0$

(2) $n \geq 1 \implies \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Per le funzioni polinomiali, i due metodi danno lo stesso risultato.

Esempi:

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x+1) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(1) = 2x+2$$

$$\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3) = \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^3) = 1+2x+3x^2$$

Esempio (linea tangente a una curva parametrica):

Siano $x(t),\, y(t), z(t) \in \mathbb{R}[t]$. Allora

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{(E5)}$$

è una curva parametrica $C$ (o un punto se tutte le funzioni sono costanti).

Se (E5) non è un punto, allora la forma parametrica della linea tangente a $C$ in $t = t_o$ è

$$L(t) = r(t_o) + tr'(t_o), \qquad r'(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}z(t)\right) \qquad \text{(E6)}$$

presupposto nascosto $r'(t_o) \neq 0$

Illustrazione: $r(t) = (1-t^2, 2t, 1+t^2), \qquad t_o = 1$

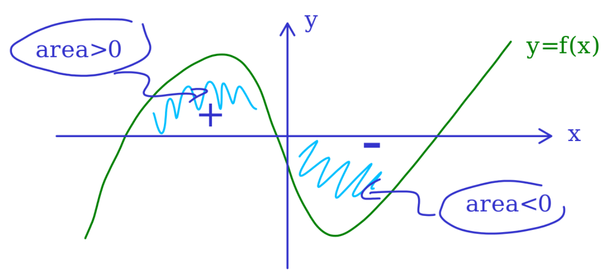
$r'(t) = (-2t, 2, 2t), \implies r'(1) = (-2,2,2)$

$r(1) = (0,2,2)$

$L(t) = (0,2,2) + t(-2,2,2)$ è la linea tangente

Integrazione formale di polinomi:

In analisi, imparerete a definire l'integrale di una funzione $f(x)$ in termini di area (con segno) sotto il grafico di $y = f(x)$



Fissa un intervallo $[a,b]$. Per funzioni polinomiali $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, l'integrazione può essere definita come la seguente mappa lineare $I : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$:

$$I(x^n) = \int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Esempio: $[a,b] = [0,1]$

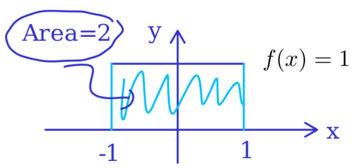
$$\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_0^1 (1 + x + x^2 + x^3) \, dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

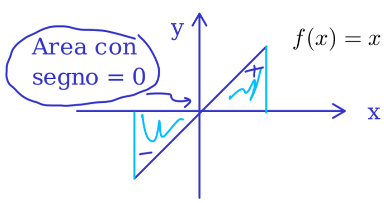
Esempio: $[a,b] = [-1,1]$

$$\int_{-1}^1 x^n \, dx = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1}, & n \text{ pari} \\ 0, & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 1 \, dx = 2$$

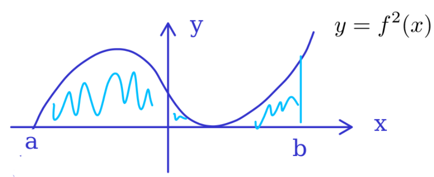



$$\int_{-1}^1 x \, dx = 0$$




A causa dell'interpretazione (o definizione) dell'integrale come area, segue che

$$\int_a^b f^2(x) \, dx > 0$$




a meno che $f$ non sia il polinomio zero. (Oppure $a = b$, nel qual caso $I$ è sempre zero)

Attenzione: Definire la differenziazione e l'integrazione dichiarando i loro valori sui monomi funziona solo perché
(a) La differenziazione e l'integrazione sono operazioni lineari.
(b) I monomi formano una base di $\mathbb{R}[x]$.
Torneremo più tardi sull'idea di base.