Lezione 4: Prodotto Vettoriale

In questa lezione daremo un metodo sistematico per:

(1) Trovare l'equazione di un piano che passa per tre punti in $\mathbb{R}^3$.
(2) Trovare l'intersezione di due piani non paralleli
(3) Trovare l'angolo tra due vettori in $\mathbb{R}^3$
(4) Trovare l'angolo tra due piani non paralleli in $\mathbb{R}^3$.

Lo strumento che useremo è il prodotto vettoriale di due vettori in R^3.

Nota: Esiste un analogo del prodotto vettoriale

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$$

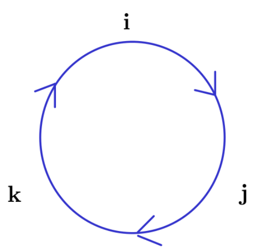
per altri valori di n, che si chiama L'algebra di Grassmann o algebra esterna.
Non tratteremo questo argomento in questo corso.

Definizione: Siano $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ due vettori in $\mathbb{R}^3$
Allora

$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v2 w_1) \qquad \text{(E1)}$$

Notazione: Siano $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$

Esempio:



$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(E2)}$$

$\boxed{\text{Proprietà algebriche del prodotto vettoriale:}}$ Siano $u,\ v,\ w \in \mathbb{R}^3,\ c \in \mathbb{R}$
$0 = (0,0,0)$

(1) $v \times w = -w \times v$
(2) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
(3) $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$
(4) $(cu) \times w = c(u \times w)$
(5) $u \times (cw) = c(u \times w)$
(6) $v \times v = 0$
(7) $0 \times v = 0$

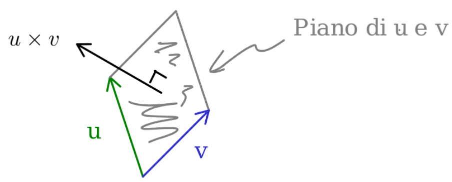
In particolare, utilizzando le proprietà algebriche del prodotto vettoriale e l'equazione (E2), possiamo calcolare il prodotto vettoriale.

Esempio:

Da (E1): $(1,0,1)\times(0,1,0) = ((0)(0)-(1)(1),(1)(0)-(1)(0),(1)(1)-(0)(0)) = (-1,0,1)$
Da (E2): $(1,0,1)\times(0,1,0) = (\mathbf{i}+\mathbf{k})\times\mathbf{j} = \mathbf{i}\times\mathbf{j}+\mathbf{k}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}-\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{k}-\mathbf{i}$

La definizione geometrica del prodotto vettoriale:

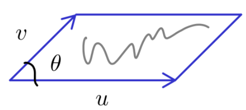
(1) $u\times v = 0$ se $u,\ v$ sono paralleli oppure u o v sono $(0,0,0)$.
Altrimenti, u e v generano un piano:



(2) $u\times v$ è perpendicolare al piano di u e v

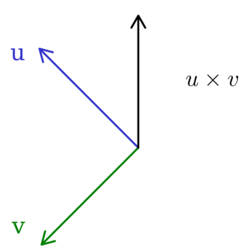
(3) La lunghezza di $u\times v$ è uguale all'area del parallelogramma da u e v:

$P = \{su+tv \mid 0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1\}$

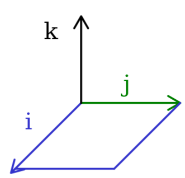


$\text{Area}(P) = (\text{Lunghezza u})(\text{Lunghezza v})\sin(\theta)$

(4) La direzione del vettore $u\times v$ è data dalla regola della mano destra, dove si punta semplicemente l'indice della mano destra in direzione di u e il dito medio in direzione di v. Quindi, il vettore $u\times v$ esce dal pollice.



Esempio: $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, Area = 1



Condizione per due vettori non nulli in $\mathbb{R}^3$ per essere perpendicolari

Siano: $u=(u_1,u_2,u_3)\ne 0,\quad v=(v_1,v_2,v_3)\ne 0$

Allora $u\perp v \iff (u,v) = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 = 0$

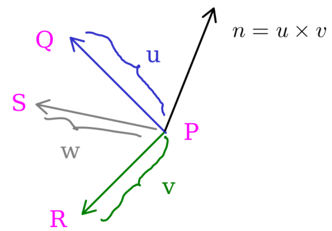
Esempio:

$$u=(1,2,3),\quad v=(1,1,-1) \implies (u,v) = (1)(1)+(2)(1)+(3)(-1) = 0 \implies u\perp v$$

L'equazione del piano che passa per tre punti non colineari:

P, Q, R = punti in $\mathbb{R}^3$
u = vettore da P a Q.
v = vettore da P a R.
n = u x v (prodotto vettoriale)

S = punti in $\mathbb{R}^3$
w = vettore da S a P



Allora, S appartiene al piano passante per P, Q e R se e solo se w è perpendicolare a n.

Esempio: Trova l'equazione del piano che passa per

$$P = (1,0,0),\ Q = (0,1,0),\ R = (0,0,1)$$

Calcoliamo:

$$u = (-1,1,0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \qquad v = (-1,0,1) = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$n = u \times v = (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (-\mathbf{i} + \mathbf{k}) = (-\mathbf{i} \times -\mathbf{i}) - \mathbf{i} \times \mathbf{k} - \mathbf{j} \times \mathbf{i} + \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{i} = (1,1,1)$$

$$S = (x,y,z) \implies w = (x-1,y,z)$$

$$(w,n) = (x-1)(1) + (y)(1) + (z)(1) = x + y + z - 1$$

$$w \perp n \iff x + y + z - 1 = 0$$ (S=P corrisponde a w=0)

L'intersezione di due piani non paralleli:

Se Π è un piano con equazione

$$Ax + By + Cz = D \tag{E3}$$

allora $n = (A,B,C)$. Se $(x_o, y_o, z_o) \in \Pi$, l'equazione (E3) può essere scritta come:

$$(n,r) = 0, \qquad r = (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \tag{E4}$$

Se Π' è un altro piano con equazione

$$A'x + B'y + C'z = D' \tag{E5}$$

e $(x_o, y_o, z_o) \in \Pi'$ allora l'equazione (E5) può essere scritta come:

$$(n',r) = 0, \qquad n' = (A',B',C'), \qquad r = (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \tag{E6}$$

In particolare,

$$(x,y,z) \in \Pi \cap \Pi' \iff (r \perp n) \wedge (r \perp n') \tag{E7}$$

(continua, pagina successiva)

Poiché stiamo lavorando in $\mathbb{R}^3$, c'è solo una direzione che è perpendicolare a n e n', che è data da $n \times n'$ (ricorda: Π e Π' non paralleli).

Quindi, l'equazione parametrica della linea $\Pi \cap \Pi'$ è data da

$$t \mapsto t(n \times n') + (x_o, y_o, z_o) \tag{E8}$$

Esempio: Trova l'equazone della linea $\Pi \cap \Pi'$:

$$\Pi: \quad x + y + z = 1, \qquad \Pi': \quad x + 2y + 3z = 1$$

(1) Trova un punto $(x_o, y_o, z_o) \in \Pi \cap \Pi'$

Per esempio, provate a impostare $x = 1$.
Questo darà due equazioni in y e z:

$$y + z = 0, \qquad 2y + 3z = 0 \implies (y, z) = (0, 0)$$

Allora: $(x_o, y_o, z_o) = (1, 0, 0)$

(2) $n = (1, 1, 1), \quad n' = (1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} n \times n' &= (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) = \mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) + (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) \\ &= 2\mathbf{k} - 3\mathbf{j} + \mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) \\ &= 2\mathbf{k} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k} + 3\mathbf{i} + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) \\ &= 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{j} - 2\mathbf{i} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

(3) $L(t) = (1, 0, 0) + t(1, -2, 1)$

L'angolo tra due vettori in $\mathbb{R}^3$

In una lezione successiva, mostreremo che l'angolo tra due vettori diversi da zero in $\mathbb{R}^3$ è dato dalla formula:

$$\cos(\theta) = \frac{(a, b)}{\sqrt{(a, a)}\sqrt{(b, b)}}$$

Esempio: Trova l'angolo tra $a = (1, 0, 1), \quad b = (1, 1, 0)$:

$$(a, a) = 1^2 + 0^2 + 1^1 = 2, \qquad (a, b) = (1)(1) + (0)(1) + (1)(0), \qquad (b, b) = (1)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 2$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}$$

L'angolo tra due piani non paralleli in $\mathbb{R}^3$

Siano

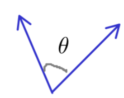
$$\Pi: \; Ax + By + Cz = D, \qquad n = (A, B, C)$$
$$\Pi': \; A'x + B'y + C'z = D', \qquad n' = (A', B', C')$$

due piani non parallei in $\mathbb{R}^3$.

Allora, l'angolo tra Π e Π' è definito come l'angolo tra n e n'.

<u>Nota</u>: l'angolo tra due piani è un angolo acuto, quindi dobbiamo usare il valore assoluto del prodotto scalare

$$\cos(\theta) = \frac{|(n, n')|}{\sqrt{(n,n)}\sqrt{(n',n')}}$$



<u>Esempio</u>: Trova l'angolo tra

$$\Pi: \; x + 2y + 2z = 1, \qquad \Pi': \; x + y = 0$$

$$n = (1, 2, 2), \qquad n' = (1, 1, 0)$$
$$(n, n) = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9, \qquad (n, n') = (1)(1) + (1)(2) + (2)(0) = 3$$
$$(n', n') = (1)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 2$$

$$\cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

Norma di un vettore in $\mathbb{R}^3$

La quantità

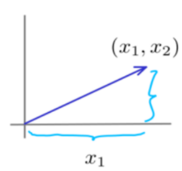
$$|x| = \sqrt{(x, x)} \geq 0 \qquad \text{(anche scritto come } \|x\|)$$

è chiamata norma del vettore x. Con questa notazione, la formula per l'angolo tra due vettori non-nulla diventa:

$$\cos(\theta) = \frac{(a, b)}{|a||b|}$$

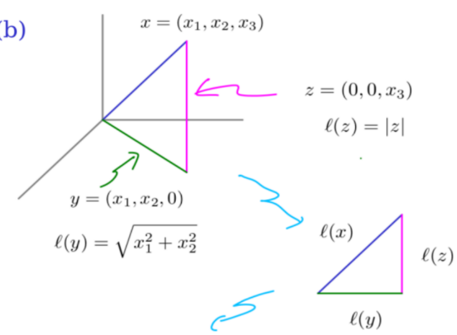
Per il teorema di Pitagora, $\|x\|$ è la lunghezza di x:

(a)



$$x = (x_1, x_2) \implies \ell(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

(b)



$$\ell(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Distanza:

La distanza $d(x,y)$ tra due punti $x,\ y \in \mathbb{R}^3$ è data da

$$d(x,y) = |x-y|$$

Esempio: Trova la distanza tra $x=(1,0,0),\ y=(2,2,2)$

$$d(x,y) = |x-y| = |(-1,-2,-2)| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

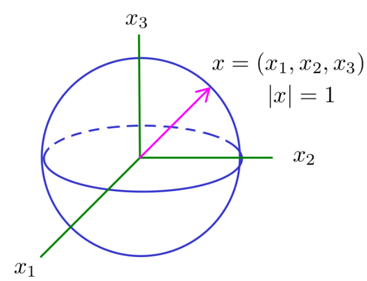
Vettori Unitari:

Un vettore $x \in \mathbb{R}^3$ è detto vettore unitario se (e sole se) $|x| = 1$.

L'insieme

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$$

è chiamato la sfera unitaria.



I punti di S^2 possono essere pensati come le direzioni in $\mathbb{R}^3$.

In particolare, se $x \in \mathbb{R}^3$ e $x \neq 0$ allora

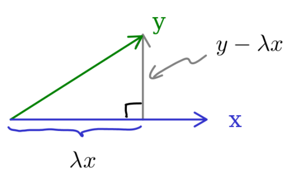
$$u = \frac{x}{|x|}$$

è il vettore unitario nella direzione di x.

Esempio: Trova il vettore unitario nella direzione di $x = (3,4,12)$

$$|x|^2 = 3^2+4^2+12^2 = 25+144 = 169 = 13^2$$
$$u = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{13}$$

Proiezione di $y \in \mathbb{R}^3$ sulla direzione di $x \in \mathbb{R}^3$:



Dobbiamo trovare λ tale che

$$(y-\lambda x, x) = 0 \implies (y,x) - \lambda(x,x) = 0 \implies \lambda = \frac{(y,x)}{(x,x)}$$

Allora

$$\lambda x = \frac{(y,x)}{(x,x)} x \qquad \text{(formula della proiezione)}$$

è la proiezione di y sulla direzione di x.

Nota:
$$\frac{(y,x)}{(x,x)}x = \frac{(y,x)}{\sqrt{(x,x)}}\frac{x}{\sqrt{(x,x)}} = \left(y, \frac{x}{|x|}\right)\frac{x}{|x|} = (y,u)u, \quad u = \frac{x}{|x|}$$

Pagina 6.

Esempio: Trova la proiezione di $y = (1,2,3)$ sul direzione di $x = (1,0,1)$:

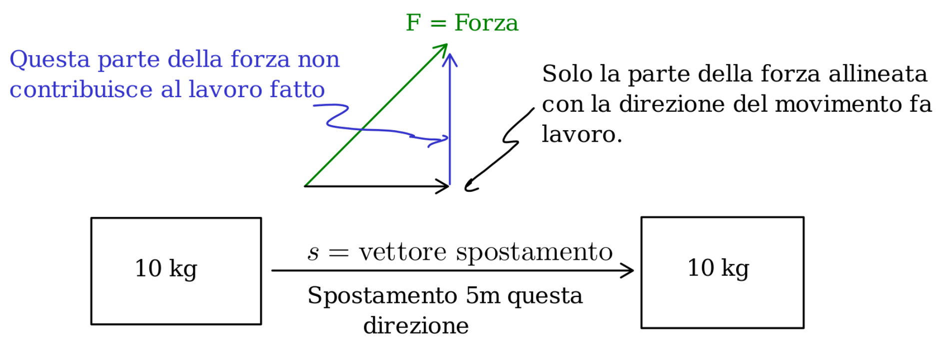
$$\frac{(y,x)}{(x,x)}x = \frac{(1)(1)+(2)(0)+(3)(1)}{1^2+0^2+1^2}(1,0,1) = \frac{4}{2}(1,0,1) = (2,0,2)$$

Lavoro (fisica):

Lavoro = (Forza)(Distanza)

Ma la forza è un vettore e sia il lavoro che la distanza sono scalari?

La distanza dovrebbe essere pensata come uno spostamento s, che è un vettore.



$$L = \left(\underbrace{\frac{(F,s)}{(s,s)}s}_{\text{Proiezione F sulla direzione di s}}, s\right) = \frac{(F,s)}{(s,s)}(s,s) = (F,s)$$

(Formula del Lovoro)