Lezione: Spazi Vettoriali

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{\, (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n \,\}$$

Addizione vettoriale: Componente per componente

$$(x_1, \ldots, x_n),\ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \implies (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \text{(E1)}$$

Moltiplicazione scalare:

$$c \in \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \implies c(x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n) \qquad \text{(E2)}$$

Linea parametrica in $\mathbb{R}^n$:

Siano $p \in \mathbb{R}^n$ un punto e $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Allora,

$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad L(t) = p + vt \qquad \text{(E3)}$$

è un'equazione parametrica per la linea passante per p nella direzione di v.

Linea passante per due punti in $\mathbb{R}^n$:

Un'equazione parametrica della linea passante per $p,\ q \in \mathbb{R}^n$ è

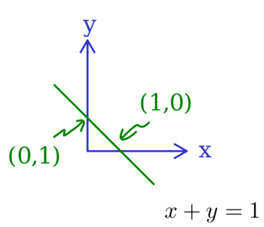
$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad L(t) = p + (q - p)t \qquad \text{(E4)}$$

Esempio: Trova la linea passante per $p = (1, 0, 0, 1),\ q = (1, 1, 1, 1)$

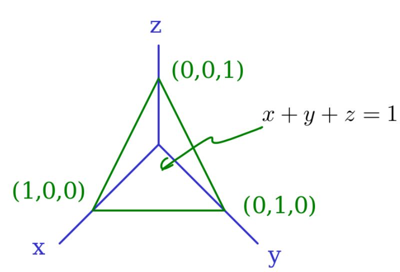
$$L(t) = (1, 0, 0, 1) + ((1, 1, 1, 1) - (1, 0, 0, 1))t = (1, 0, 0, 1) + t(0, 1, 1, 0) = (1, t, t, 1)$$

Iperpiani:

Consideriamo le equazioni:



Linea tra due punti:
$(1, 0),\ (0, 1)$



Piano tra tre punti:
$(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)$

(continua, pagina seguente)

Osserva che: $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$ passante per:

$$(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)$$

Dato un insieme $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ di n punti in $\mathbb{R}^n$, esiste un'equazione lineare

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n = D \qquad \text{(E5)}$$

che passa per i punti di S.

Per un generico insiemi di n punti S in $\mathbb{R}^n$, l'equazione associata (E5) è unica fino alla moltiplicazione per uno scalare non nullo. In questo caso, le soluzioni di (E5) hanno la forma parametrica:

$$L : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, \qquad L(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (P_1 - P_n)t_1 + \cdots + (P_{n-1} - P_n)t_{n-1} + P_n$$

L'insieme delle soluzioni H di un'equazione della forma (E5) con almeno un coefficiente non nullo A_j si chiama un iperpiano.

Intersezione della linea e un iperpiano:

Siano: $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad L(t) = p + vt, \quad p = (p_1, \ldots, p_n), \quad v = (v_1, \ldots, v_n)$

$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x_1 + \cdots A_n x_n = D\}$

Per trovare $L \cap H$ sia $x_j = p_j + v_j t$. Allora, abbiamo bisogno di:

$$A_1(p_1 + v_1 t) + \cdots + A_n(p_n + v_n t) = D$$

oppure:
$$(A_1 p_1 + \cdots + A_n p_n) + (A_1 v_1 + \cdots A_n v_n)t = D \qquad \text{(E6)}$$

In analogia con $\mathbb{R}^3$, dati due vettori $u = (u_1, \ldots, u_n),\ w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, definiamo

$$(u, w) = u_1 w_1 + u_2 w_2 + \cdots + u_n w_n \qquad \text{(E7)}$$

Sia $A = (A_1, \ldots, A_n)$. Allora, (E6) diventa:

$$(A, p) + (A, v)t = D$$

Ci sono tre casi:

(1) $(A, v) \neq 0 \implies t = \dfrac{D - (A, p)}{(A, v)}$ (L interseca H in un punto)

(2) $(A, v) = 0, \quad (A, p) \neq D \implies L \cap H = \emptyset$ (L è parallela a H)

(3) $(A, v) = 0, \quad (A, p) = D \implies L \subseteq H$ (L è contenuto in H)

Esempio: Trova l'intersezione di

$$L(t) = (1,0,0,1) + (1,2,3,4)t, \qquad H:\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} A = (1,1,1,1),\ p = (1,0,0,0),\ v = (1,2,3,4) \\ (A, p) = 2, \quad (A, v) = 10 \implies t = \dfrac{1-2}{10} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \quad L \cap H = L\left(\frac{1}{5}\right)$$

Lo spazio vettoriale delle funzioni sulla linea reale:

$F(\mathbb{R}) = \{\,\text{funzioni } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,\}$

Addizione vettoriale: $f,\ g \in F(\mathbb{R}) \implies f + g \in F(\mathbb{R})$ è la funzione definita dalla regola

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \tag{E8}$$

Moltiplicazione scalare: $c \in \mathbb{R},\ f \in F(\mathbb{R}) \implies cf \in F(\mathbb{R})$ è la funzione definita dalla regola

$$(cf)(t) = cf(t) \tag{E9}$$

La definizione formale di uno spazio vettoriale è un insieme V dotato di due operazioni chiamate addizione vettoriale e moltiplicazione scalare che soddisfano certi assiomi.

In particolare: Sebbene possiamo anche moltiplicare elementi di $F(\mathbb{R})$ per la regola

$$(fg)(t) = f(t)g(t)$$

questa operazione non fa parte della struttura dello spazio vettoriale di $F(\mathbb{R})$.

Lo spazio vettoriale delle funzioni da un insieme a $\mathbb{R}$:

Sia A un insieme. $\mathbb{R}^A = \{\,\text{funzioni } f : A \to \mathbb{R}\,\}$

L'insieme $\mathbb{R}^A$ è uno spazio vettoriale rispetto alle regole di addizione vettoriale e di moltiplicazione scalare (E8) e (E9):

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a), \qquad (cf)(a) = cf(a)$$

Anche se $\mathbb{R}^A$ può sembrare molto astratto, è molto utile come punto di partenza per definire altri spazi vettoriali.

Lo illustreremo con i polinomi:

Lo spazio vettoriale dei polinomi:

Informalmente, un polinomio nella variabile x è una somma finita dei monomi x^m con numeri reali per coefficienti:

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

Naturalmente, possiamo definire l'addizione polinomiale e la moltiplicazione di un polinomio per uno scalare nel solito modo.

Il risultato è uno spazio vettoriale solitamente denotato $\mathbb{R}[x]$.

(continua, pagina seguente)

Supponiamo ora che tu abbia bisogno di programmare un computer per lavorare con i polinomi:

Sia $J = \{0, 1, 2, \dots\}$. Allora, si può pensare a un polinomio come a una funzione

$$a : J \to \mathbb{R} \tag{E10}$$

tale che $a(j) = 0$ per tutti ma finitamente molti $j \in J$. Infatti, data una funzione (E10), definiamo

$$p(x) = \sum_{i:a(i)\neq 0} a(i)x^i$$

Viceversa, dato un polinomio $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ definiamo: $a(j) = \begin{cases} a_j & j = 0, \dots, n \\ 0 & j > n \end{cases}$

Con queste identificazioni, l'addizione e la moltiplicazione scalare dei polinomi coincide con l'addizione e la moltiplicazione scalare in $\mathbb{R}^J$.

Troncando J ad un insieme finito (cioè delimitando i gradi dei nostri polinomi), possiamo ora programmare facilmente l'addizione polinomiale e la moltiplicazione scalare nel computer.

Interpolazione di Lagrange:

Ricordiamo che esiste un iperpiano che passa per n punti in $\mathbb{R}^n$.

Data $(n+1)$ punti $S = \{(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ che esiste un polinomio $p_S(x)$ di grado n tale che

$$p_S(x_j) = y_j, \qquad j = 0, \dots, n$$

Infatti, sia
$$p_j(x) = \prod_{i\neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \qquad j = 0, \dots, n$$

Allora,
$$p_j(x_k) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Quindi,
$$p_S(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j p_j(x)$$

è un polinomio di grado con le proprietà richieste.

Esempio: Trova un polinomio $p(x)$ di grado 2 che $p(1) = 1, \quad p(2) = 3, \quad p(3) = 6$

$$S = \{1, 2, 3\} \implies p_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

$$p_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$

$$p_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

Allora, $p(x) = (1)p_1(x) + (3)p_2(x) + (6)p_3(x) = \dfrac{1}{2}x(x+1)$

Nota:

(a) Lasciando $A = \mathbb{R}^n$, otteniamo lo spazio vettoriale $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^A$ di funzioni di valore real su $\mathbb{R}^n$.

(b) Sia $J = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ dei polinomi nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$ può essere definito o come somme finite di monomi $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$ con numeri reali per coefficienti oppure o usando le funzioni $a : J^n \to \mathbb{R}$ tale che $a(j) = 0$ per tutti ma finitamente $j \in J^n$:

$$p_a(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\{j=(j_1,\ldots,j_n) \in J^n \mid a(j) \neq 0\}} a(j_1, \ldots, j_n) x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$$

La definizione di uno spazio vettoriale astratto:

Uno spazio vettoriale reale è un insieme V dotato di un'operazione

$$+ : V \times V \to V, \qquad (u, v) \mapsto u + v$$

chiamata addizione vettoriale e un'operazione

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V, \qquad (c, u) \mapsto c \cdot u \quad [\text{di solito si scrive } cu]$$

chiamata moltiplicazione scalare tale che:

(1) $u + v = v + u$ per ogni $u, v \in V$.
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ per ogni $u, v, w \in V$.
(3) Esiste un elemento $0 \in V$, chiamato vettore zero, tale che

$$0 + u = u + 0 = u$$

per ogni $u \in V$

(4) Per ogni elemento $u \in V$ c'è un elemento $-u \in V$ tale che

$$u + (-u) = 0$$

(5) $(rs) \cdot u = r \cdot (s \cdot u)$ per ogni $r, s \in \mathbb{R}, \quad u \in V$
(6) $(r + s) \cdot u = r \cdot u + s \cdot u$ per ogni $r, s \in \mathbb{R}, \quad u \in V$
(7) $r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$ per ogni $r \in \mathbb{R}, \quad u, v \in V$
(8) $1 \cdot u = u$ per ogni $u \in V$

Si verifica tediosamente che tutti gli esempi di spazi vettoriali presentati finora soddisfano questi assiomi.

Esempio: Siano $V = (0, \infty)$ con

Addizione vettoriale: $u \boxplus v = uv$ moltiplicazione ordinaria
Moltiplicazione scalare: $c \cdot u = u^c$, esponenziale ordinario

Allora,
(1) $u \boxplus v = uv = v \boxplus u$
(2) $u \boxplus (v \boxplus w) = u(vw) = uvw = (uv)w = (u \boxplus v) \boxplus w$
(3) $1 \boxplus u = u \boxplus 1 = u$
(4) $u \boxplus u^{-1} = u^{-1} \boxplus u = 1$
(quindi 1 è il vettore zero in V)
(5) $(rs) \cdot u = u^{rs} = (u^s)^r = (s \cdot u)^r = r \cdot (s \cdot u)$
(6) $(r+s) \cdot u = u^{r+s} = (u^r)(u^s) = (u^r) \boxplus (u^s) = (r \cdot u) \boxplus (s \cdot u)$
(7) $r \cdot (u \boxplus v) = r \cdot (uv) = (uv)^r = u^r v^r = (u^r) \boxplus (v^r) = (r \cdot u) \boxplus (r \cdot v)$
(8) $1 \cdot u = u^1 = u$

Nota : Questo esempio si ottiene prendendo i numeri reali $\mathbb{R}$ dotati di addizione e moltiplicazione ordinaria, e applicando la mappa esponenziale $\mathbb{R} \to (0, \infty)$

Non Esempio: Gli insiemi di funzioni definite dalle condizioni di positività non sono spazi vettoriali perché non possiamo moltiplicare per -1:

In particolare, $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) > 0 \}$ non è un spazio vettoriale, perché se $f \in V$ allora $-f \notin V$

Proposizione: Se V è uno spazio vettoriale allora $c \cdot 0 = 0$ per qualsiasi scalare c.
Dimostrazione: Per (3)

$$0 + 0 = 0 \qquad (\text{lascia } u = 0)$$

Allora, per (7)

$$c \cdot (0 + 0) = c \cdot 0 \implies c \cdot 0 + c \cdot 0 = c \cdot 0$$

Aggiungere $-c \cdot 0$ a entrambi i lati dell'ultima equazione per ottenere:

$$c \cdot 0 = 0$$

Proposizione: Se V è uno spazio vettoriale allora $0 \cdot v = 0$ per qualsiasi vettore v.
Dimostrazione:

$$v = 1 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = v + 0 \cdot v$$

Aggiungere $-v$ a entrambi i lati dell'ultima equazione per ottenere:

$$0 = 0 \cdot v$$