Esame di Ricerca Operativa del 9/1/23

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

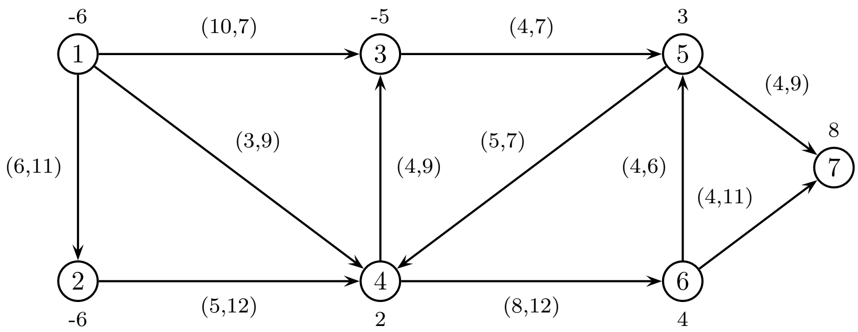
Esercizio 1. Un'azienda deve consegnare almeno 5000 paia di scarpe da lavoro e almeno 12000 paia di sneaker al mese avendo due tipi di squadre di operai a disposizione per la produzione. La prima tipologia di squadra ne produce rispettivamente 100 e 500 al mese, la seconda 200 e 300. Trovare l'ottimo del rilassato continuo tramite simplesso se l'azienda deve decidere quante squadre minimo devono essere dedicate a questa produzione partendo, se possibile, dalla soluzione che usa 50 squadre del primo tipo e nessuna del secondo. Costruire un piano di taglio. Trovare la soluzione ottima del problema.

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla seguente rete:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	20	24	21	32
2		17	30	19
3			22	18
4				25

Trovare una valutazione calcolando il 5–albero di costo minimo. Scrivere esplicitamente i vincoli del TSP violati. Trovare una valutazione applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 1. Applicare il metodo del *Branch and Bound* istanziando le variabili x_{23}, x_{24} e x_{25}. Si puó affermare che se il costo dell'arco x_{35} cambiasse la spesa totale cambierebbe?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,4), (2,4), (4,3), (4,6), (5,4) e (6,7) e l'arco (3,5) come arco saturo, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? Sono ottimi? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1 esprimendo la soluzione ottima anche in termini di flusso su reti. Trovare il taglio da 1 a 7 di capacitá minima.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ 2\,x_1\,x_2 + 4\,x_1 - 6\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P é il poliedro di vertici $(4,2)$, $(-3,-2)$, $(0,-3)$ e $(-4,5)$. Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $(-1,-\frac{8}{3})$. Dire se il vertice $(-3,-2)$ é un punto stazionario; in caso affermativo trovare i moltiplicatori LKKT e classificarlo.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \min\ x_1 + x_2 \\ 100\ x_1 + 200\ x_2 \geq 5000 \\ 500\ x_1 + 300\ x_2 \geq 12000 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

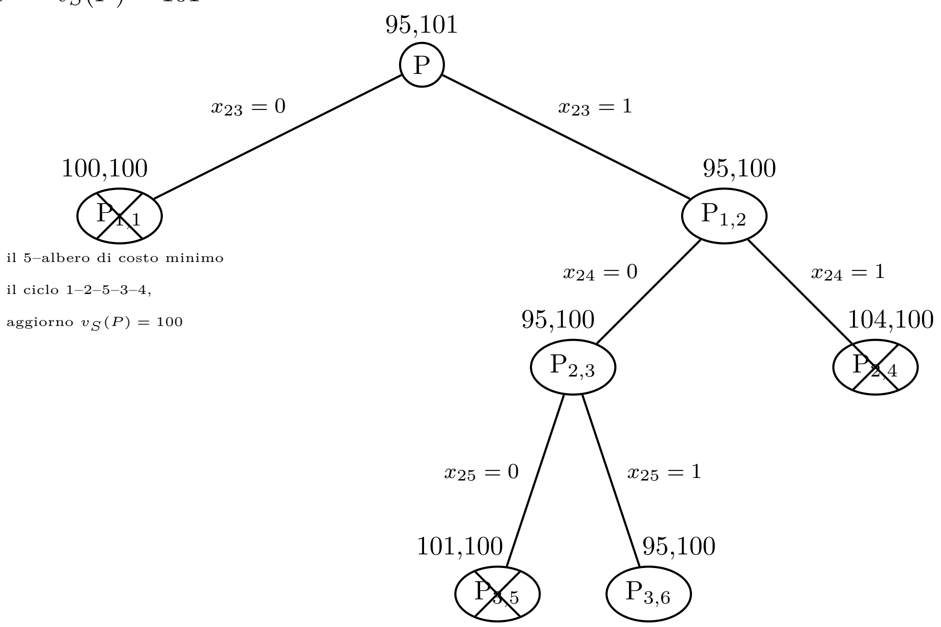
Punto di partenza del simplesso $(50, 0)$ con base $B = \{1, 4\}$. La duale complementare é $(1, 0, 0, -1)$. Indice uscente 4 indice entrante 2. Soluzione ottima del rilassato continuo $(\frac{90}{7}, \frac{130}{7})$. Base ottima $B = \{1, 2\}$. Matrice del taglio: $\begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 \\ -5/7 & 1/7 \end{pmatrix}$. Taglio r=1: $3x_3 + 5x_4 \geq 6$. Soluzione ottima PLI $(12, 18)$.

Esercizio 2.

5–albero: (1 , 2) (1 , 4) (2 , 3) (2 , 5) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 95$

I vincoli violati sono quelli di grado del nodo 2 e del nodo 4.

ciclo: $1 - 2 - 3 - 5 - 4 \qquad v_S(P) = 101$



Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,4) (2,4) (4,3) (4,6) (5,4) (6,7)	(1,4) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7)
Archi di U	(3,5)	
x	(0, 0, 6, 6, 7, 2, 12, 4, 0, 0, 8)	
π	(0, −2, 7, 3, −2, 11, 15)	
Arco entrante	(3,5)	
ϑ^+, ϑ^-	Inf , 2	
Arco uscente	(4,3)	

Il taglio é $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ di capacitá 19.

L'albero dei cammini minimi é $\{(1,2), (1,4), (3,5), (4,3), (4,6), (5,7)\}$ ed il flusso ottimo é $x = (1, 0, 4, 0, 2, 3, 1, 0, 1, 0, 0)$.

Esercizio 4.

$$\begin{cases} \max\ 2\,x_1\,x_2 + 4\,x_1 - 6\,x_2 \\ -x_1 - 3\ x_2 \leq 9 \\ 5\ x_1 - 4\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 + 8\ x_2 \leq 28 \\ -7\ x_1 - x_2 \leq 23 \end{cases}$$

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-1, -\frac{8}{3}\right)$	$(-1, -3)$	$\begin{pmatrix} 9/10 & -3/10 \\ -3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$(0, -3)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-1, -\frac{8}{3}\right)$	$-\frac{4}{3}x_1 - 8x_2$	(0,-3)	$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$	1	$(0, -3)$

$(-3, -2, -\frac{21}{5}, 0, 0, \frac{3}{5})$ é una soluzione LKKT e quindi é una sella.