Lezione 15: Determinanti.

Chiamiamo

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i<j}\,(x_i - x_j)$$

il polinomio di Vandermonde. Sia

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

una permutazione. Allora

$$\mathrm{e}(\sigma) = \frac{P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})}{P(x_1, \ldots, x_n)} \tag{E1}$$

si chiama il segno di σ. In particolare, poiche $P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ e $P(x_1, \ldots, x_n)$ hanno gli stessi fattori a meno del segno,

$$e(\sigma) = +1 \text{ oppure } -1 \tag{E2}$$

Esempio: Sia

$$\sigma : \{1, 2\} \to \{1, 2\}, \quad \sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 1 \tag{E3}$$

Allora

$$P(x_1, x_2) = (x_1 - x_2), \qquad e(\sigma) = \frac{x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_2} = -1 \tag{E4}$$

Esempio: Sia $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ è la funzione identità. Allora:

$$e(\sigma) = \frac{P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})}{P(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{P(x_1, \ldots, x_n)}{P(x_1, \ldots, x_n)} = 1 \tag{E5}$$

Definizione: Sia S_n l'insieme di tutti le funzioni iniettive $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$. Allora,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} e(\sigma) a_{i\sigma(i)} \tag{E6}$$

si chiama il determinante di A.

Esempio: Sia $A = (a_{ij})$ una matrice 2×2. Allora, $S_2 = \{\iota, \sigma\}$ dove ι è la funzione identità e σ è la funzione (E3). Quindi

$$\begin{aligned} \det(A) &= e(\iota) a_{1\iota(1)} a_{2\iota(2)} + e(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \tag{E7}$$

L'equazione (E7) spesso si scrive così

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Esempio: Una matrice quadrata nella quale gli elementi sottostanti alla diagonale principale sono uguali a zero si dice matrice triangolare superiore.

Sia $A=(a_{ij})$ una matrice trangolare superiore. Sia $\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ una funzione iniettiva.

(Esercizio per studenti): Se σ non è la funzione identità allora esiste un $i\in\{1,\ldots,n\}$ tali che $\sigma(i)<i$.

Osserva che (poiché A è una matrice triangolare superiore):

$$\sigma(i)<i \implies a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}=0 \qquad \text{(E8)}$$

Poiche σ era un elemento arbitrario di $S_n-\{\text{identità}\}$,

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n} e(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad \text{(E9)}$$

In particolare,

$$\det(I_n)=1, \qquad I_n=\text{matrice identità } n\times n \qquad \text{(E10)}$$

Teorema: L'equazione (E6) per $\det(A)$ è l'unica funzione $A\mapsto d(A)$ sulle matrici quadrate tale che:
(1) $d(I)=1$ se I è la matrice identità.
(2) $d(A)$ è una funzione lineare delle righe di A.
(3) Se due righe adiacenti di A sono uguali allora $d(A)=0$.

Il teorema implica che l'applicazione delle mosse di Guass a una matrice A abbia il seguente effetto sul determinante:
(a) Se un multiplo scalare di una riga di A viene aggiunto a un'altra riga di A, il determinante rimarrà lo stesso: $R_j\mapsto R_j+\lambda R_i$
(b) Se vengono scambiate due diverse righe di A, il determinante verrà moltiplicato per -1: $R_i\leftrightarrow R_j$
(c) Se una riga di A è moltiplicata per uno scalare s diverso da zero, il determinante verrà moltiplicato per s: $R_j\mapsto sR_j$

Corollario: Se A e B sono due matrici che sono legate da una sequenza di mosse di Gauss allora

$$\det(A) = \lambda \det(B), \qquad \lambda \neq 0 \tag{E11}$$

poiché per (a)-(c), una mossa di Gauss cambia il determiante per uno scalare diverso di zero.

Corollario: $\det(A)$ è diverso di zero se e solo se A è una matrice invertibile.

Per vedere questo, sia A una matrice $n \times n$. Nota che A può essere messa in forma triangolare superiore A' utilizzando una sequenza di mosse di Gauss. Quindi, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A') = n$ se e solo se ciascuno elemento della diagonale principale di A' è diverso da zero.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[+1]{R_2 \mapsto R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[+1]{R_3 \mapsto R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[+1]{R_3 \mapsto R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A'$$

Moltiplicatore per l'operazione.

Totale: (1)(1)(1) =1

Poiché siamo giunti da A ad A' utilizzando solo l'operazione di aggiunta di una riga a un'altra riga, e questa operazione non cambia il determinante,

$$\det(A) = \det(A') = 2$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1]{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

Moltiplicatore

poiché scambiamo due diverse righe,

$$\det(A) = -\det(A') = -1$$

Nota: Una matrice quadrata può essere trasformata nella forma triangolare superiore senza utilizzare l'operazione (c)

$$R_j \mapsto \lambda R_j$$

di moltiplicazione di una riga per uno scalare diverso da zero.

Teorema: Siano A e B due matrici $n \times n$. Allora,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \text{(E12)}$$

In particolare, se A una matrice invertible allora,

$$1 = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A) \implies \det(A^{-1}) = 1/\det(A) \qquad \text{(E13)}$$

Teorema: Sia A una matrice quadrata. Allora,

$$\det(A^t) = \det(A) \qquad \text{(E14)}$$

Così pure se A una matrice ortogonale,

$$1 = \det(A^t A) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1 \qquad \text{(E15)}$$

Entrambi i teoremi possono essere dimostrati utilizzando il fatto che una matrice invertibile è prodotto di matrici elementari. [Ricorda che una matrice elementare è una matrice ottenuta applicando una mossa di Gauss alla matrice dell'identità.]

Determiante di una mappa lineare.

Supponiamo che $L : U \to U$ è una mappa lineare e la dimensione di U è finita. Sia A la matrice di L relativa la base B di U. Sia A' la matrice di L relativa una altra base B' di U. Allora esiste una matrice invertible P tale che

$$A' = P^{-1}AP \qquad \text{(E16)}$$

Quindi,

$$\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A) \qquad \text{(E17)}$$

Così,

$$\det(L) = \det(A) = \det(A') \qquad \text{(E18)}$$

è ben definita, indipendentemente della scelta della base di U. Chiamiamo (E18) il determinante di L.

Nota: Dobbiamo avere $L : U \to U$. Il determiante di $T : U \to V$ non è ben definito, indipendentemente della scelta della base di U e V. L'equazione (E18) è ben definita solo perché $\det(P)$ e $\det(P^{-1})$ si cancellano.

Esempio: Sia U lo spazio vettoriale di polinomi grado minore o uguale a 3 nella variable x. Sia

$$L(f) = (1-x^2)\frac{d^2 f}{dx^2} - x\frac{df}{dx} + 2f$$

su U. La matrice di L relative la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Allora,

$$\det(L) = \det(A) = 28$$

Nota: Ricorda che il fattoriale è la funzione $n \mapsto n!$ sugli interi non-negativi tali che 0!=1 e

$$n! = n(n-1)\cdots(1), \qquad n \geq 1$$

L'insieme

$$S_n = \{\,\text{funzioni iniettive} : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}\,\}$$

ha n! elementi: Per costruire un elemento f di S_n, ci sono n scelte per f(1). Poiché f è iniettiva, ci sono (n-1) scelte per f(2), eccetera.

$$50! = 3.0414093201713378043612608166064768844377641568960512 \times 10^{64}$$

Di conseguenza, la definizione (E6) del determinante

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} e(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

è utile principalmente per le costruzioni teoriche. Invece, calcolare il determinate di una matrice $n \times n$ utilazzando le mosse di Gauss richiede circa $2n^3/3$ operazioni aritmetiche.

Nota: Sia $f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ una permutazione. Sia A la matrice di f dalla lezione 13:

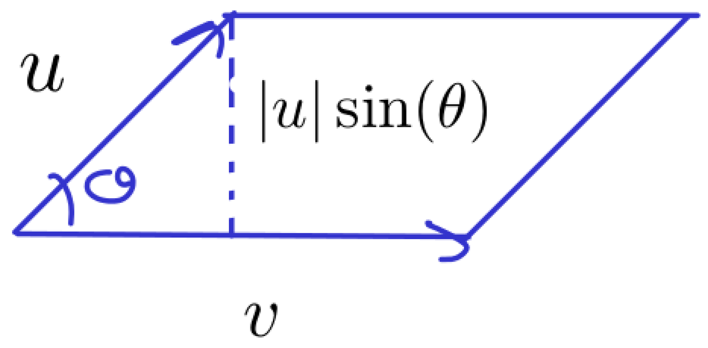
$$A(e_j) = e_{f(j)}$$

Segue direttamente dall'equazione (E6) che $\det(A) = e(f)$, il segno di f .

$\boxed{\text{La geometria del determinante}}$

Richiamo dalla lezione 7

Area di un parallelogramma:



$$Area = A = |u||v|\sin(\theta) \implies A^2 = |u|^2|v|^2\sin^2(\theta) = |u|^2|v|^2(1-\cos^2(\theta))$$
$$\implies A^2 = |u|^2|v|^2 - (u,v)^2$$

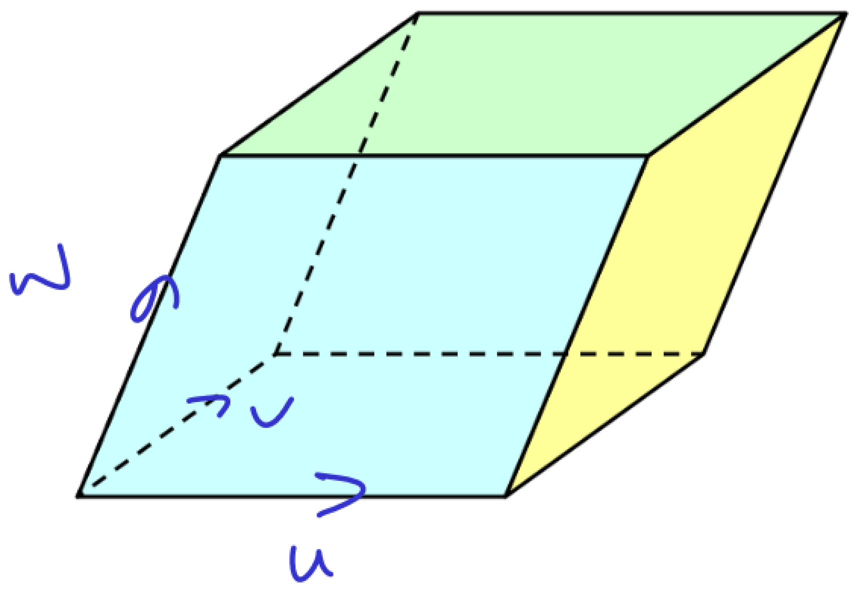
Se $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ troviamo che

$$A^2 = |u|^2|v|^2 - (u,v)^2 = (ad-bc)^2 \qquad \text{(E19)}$$

Se M è la matrice con le righe u e v, (E19) diventa

$$|\det(M)| = |\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}| = |ad-bc| = \text{Area del paralleogramma} \qquad \text{(E20)}$$

Volume di un parallelepipedo



$$V = \left|\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}\right| \qquad \text{(E21)}$$

In generale, sia M una matrice $n \times n$ con righe $m_1, m_2, \ldots, m_n$ Allora

$$|\det(M)| = \text{“n-volume” di } \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j m_j \mid 0 \le t_j \le 1,\ j = 1, \ldots, n \right\}$$

Il risultante

Il risultante $R(p,q)$ di due polinomi

$$p(x) = p_n x^n + \cdots + p_0, \qquad q(x) = q_m x^m + \cdots + q_0$$

è il determinante della matrice $(n+m)\times(n+m)$ ottenuta iniziando dalla riga
$\begin{pmatrix} p_n & \cdots & p_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ e permutandola ciclicamente m volte, seguita dalla riga
$\begin{pmatrix} q_m & \cdots & q_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ che è permutata ciclicamente n volte

$$R(f,g) = \det \begin{pmatrix} p_n & \cdots & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_n & \cdots & p_0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_n & \cdots & p_0 \\ q_m & \cdots & q_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_m & \cdots & q_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_m & \cdots & q_0 \end{pmatrix}$$

La proprietà chiave della risultante è che p e q hanno una radice comune sui numeri complessi se e solo se $R(p,q) = 0$.

<u>In altre parole</u>: Possiamo determinare se due polinomi hanno una radice comune senza cercare di fattorizzare i due polinomi!

In particolare, supponiamo che

$$f(x) = (x-r)^m q(x)$$

dove $m > 1$. Allora, $f(r) = f'(r) = 0$. Viceversa, se f non ha radici multiple, allora f e f' non hanno una radice comune.

<u>Esempio</u>: $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 2ax + b, \quad a \neq 0$

$$R(f,f') = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix}$$

Applicare l'eliminazione gaussiana:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 - 2R_1]{} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & -b & -2c \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 + \frac{2a}{b}R_2]{} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & -b & -2c \\ 0 & 0 & b - \frac{4ac}{b} \end{pmatrix}$$

$$\implies R(f,f') = -a(b^2 - 4ac)$$

Poiché $a \neq 0$, f ha una radice multipla se e solo se $b^2 - 4ac = 0$, che è esattamente ciò che dice la formula quadratica.

[Pagina 7.](#)