La geometria dei vettori

Problema: Come calcolare l'angolo tra due vettori in $\mathbb{R}^n$?

Siano a e b vettori che generano un piano.

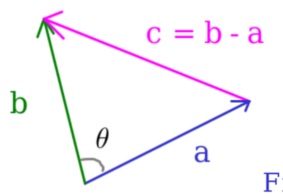


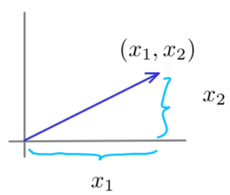
Figura 1

Legge dei coseni: Siano A, B, C rispettivamente la lunghezza dei vettori a, b, c. Allora:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\theta)$$

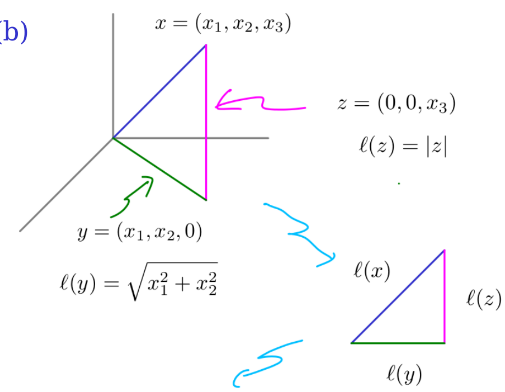
Problema secondario: Come calcolare la lunghezza del vettore $x = (x_1, \ldots, x_n)$?

(a)



$$x = (x_1, x_2) \implies \ell(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

(b)



$$\ell(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Per induzione: La lunghezza $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uguale

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \qquad \text{(E1)}$$

Torniamo alla legge dei coseni: (Figura 1)

$$\left.\begin{array}{l} a = (a_1, \ldots, a_n), \quad b = (b_1, \ldots, b_n) \implies c = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n) \\ |a|^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 \qquad |b|^2 = \sum_{j=1}^n b_j^2 \qquad |c|^2 = \sum_{j=1}^n (b_j - a_j)^2 \end{array}\right\} \quad \text{(E2)}$$

Quindi:

$$|c|^2 - |a|^2 - |b|^2 = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2 - a_j^2 - b_j^2 = \sum_{j=1}^{n} -2a_j b_j \qquad \text{(E3)}$$

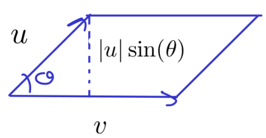
Per la legge dei coseni: $|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\theta)$

$$\implies |c|^2 - |a|^2 - |b|^2 = -2\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = -2|a||b|\cos(\theta)$$

$$\implies \sum_{j=1}^{n} a_j b_j = |a||b|\cos(\theta) \qquad \text{(E4)}$$

Chiamiamo $(a,b) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ il prodotto scalare a e b.

Area di un parallelogramma:



$$Area = A = |u||v|\sin(\theta) \implies A^2 = |u|^2|v|^2\sin^2(\theta) = |u|^2|v|^2(1-\cos^2(\theta))$$

$$\implies A^2 = |u|^2|v|^2 - (u,v)^2$$

Se $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ troviamo che

$$A^2 = |u|^2|v|^2 - (u,v)^2 = (ad - bc)^2 \qquad \text{(E5)}$$

Se M è la matrice con le righe u e v, (E5) diventa

$$|\det(M)| = |\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}| = |ad - bc| = \text{Area del paralleogramma} \qquad \text{(E6)}$$

Proprietà del prodotto scalare

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ vettori e $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalare. Allora,
(A1) $(a+b,c) = (a,c) + (b,c), \qquad (\lambda a, c) = \lambda(a,c)$ (linearità)
(A2) $(a,b) = (b,a)$ (simmetria)
(A3) $(a,a) \geq 0, \qquad (a,a) = 0 \iff a = 0.$ (definita positiva)

Le proprietà (A1), (A2) e (A3) seguono algebricamente dalla formula per (a,b) senza ricorrere alla geometria (ad esempio la legge dei coseni).

Il teorema di Pitagora e la legge dei coseni danno (E2) e (E4):

$$(a,b) = |a||b|\cos(\theta), \qquad \text{dove per ogni vettore w} : \quad |w|^2 = (w,w)$$

Esempi: Trova l'angolo tra

(i) $u = (1,1,0), \quad v = (0,1,1)$

(ii) $u = (1,-1,0), \quad v = (1,1,1)$

(iii) $u = (1,1,1,1), \quad v = (1,1,1,0)$

(i) $$\cos\theta = \frac{(u,v)}{|u||v|} = \frac{(1)(0)+(1)(1)+(0)(1)}{(\sqrt{1^2+1^2+0^2})(\sqrt{0^2+1^2+1^2})} = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3}$$

(ii) $$\cos\theta = \frac{(u,v)}{|u||v|} = \frac{(1)(1)+(1)(-1)+(0)(1)}{(\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2})(\sqrt{1^2+1^2+1^2})} = \frac{0}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \implies \theta = \pi/2$$

(iii) $$\cos\theta = \frac{(u,v)}{|u||v|} = \frac{3}{\sqrt{4}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}$$

Ortogonalità

Due vettori non nulli u e v si dicono ortogonali se e solo se l'angolo tra u e v è $\frac{\pi}{2}$
Equivalentemente,

$$(u,v) = 0, \qquad (u,\ v \neq 0)$$

Esempio: $u = (1,1,1), \quad v = (1,2,-3)$ sono ortogonali

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

In questa sezione, usiamo solo le proprietà (1)-(3) del prodotto scalare.

Siano a e b vettori e $t \in \mathbb{R}$ un scalare. Sia

$$f(t) = (at+b, at+b)$$

Allora, per proprietà (3), per ogni t,

$$f(t) \geq 0 \tag{E7}$$

Per proprietà (1) e (2),

$$f(t) = (a,a)t^2 + 2(a,b)t + (b,b) \tag{E8}$$

Per la formula quadratica, se $At^2 + Bt + C \geq 0$ allora

$$B^2 - 4AC \leq 0 \tag{E9}$$

Siano $A = (a,a), \quad B = 2(a,b), \quad C = (b,b)$. Allora, le equazioni (E7)-(E9) implicano che

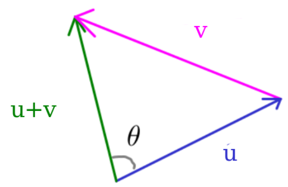
$$4(a,b)^2 - 4(a,a)(b,b) \leq 0$$

Equivalentemente,

$$|(a,b)| \leq |a||b|, \qquad |a| = (a,a)^{1/2}, \quad |b| = (b,b)^{1/2} \tag{E10}$$

L'equazione (E10) è chiamata disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Disuguaglianza triangolare: Siano u, v vettori allora $|u+v| \leq |u| + |v|$



Geometricamente, questo è solo l'affermazione che la somma della lunghezza di qualsiasi due lati di un triangolo è maggiore della lunghezza del lato rimanente.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $\Longrightarrow$ Disuguaglianza triangolare:
Dimonstrare:

$$|u+v|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + 2(u,v) + (v,v) = |u|^2 + 2|u||v|\cos\theta + |v|^2$$

Ricorda che $\cos\theta \leq 1$. Quindi,

$$|u+v|^2 \leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 = (|u| + |v|)^2$$

$$\Longrightarrow |u+v| \leq |u| + |v|$$

Come volevasi dimostrare

Prodotti scalari su spazi vettoriali

Sia V un spazio vettoriale reale e

$$(\text{—}, \text{—}) : V \times V \to \mathbb{R} \qquad \text{(E11)}$$

un funzione che soddisfi le proprietà (A1)-(A3). Allora, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è valida per V, perché la dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz dipende solo dalle proprietà (A1)-(A3).

La dimostrazione della disuguaglianza Triangolo dipende solo dalle proprietà (A1)-(A3), e quindi vale anche per qualsiasi spazio vettoriale reale dotato di una funzione (E11) che soddisfa le proprietà (A1)-(A3).

Definizione: Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione (E11) che soddisfa le proprietà (A1)-(A3).

Esempio: T è un insieme finito.

$$(f,g) = \sum_{t \in T} f(t)g(t) \qquad \text{(E12)}$$

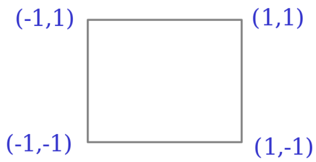
è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^T = \{\text{funzioni } h : T \to \mathbb{R}\}$:

(A1) $(f+g, h) = \sum_{t \in T} (f(t) + g(t))h(t) = \sum_{t \in T} f(t)h(t) + g(t)h(t) = (f,h) + (g,h)$

(A2) $(g,f) = \sum_{t \in T} g(t)f(t) = \sum_{t \in T} f(t)g(t) = (f,g)$

(A3) $(f,f) = \sum_{t \in T} f^2(t) \geq 0, \qquad (f,f) = 0 \implies f(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in T$

Esempio: $T =$ i vertici di un poligono $P \subseteq \mathbb{R}^2$.



$$f(x,y) = x, \quad g(x,y) = y$$

$$\begin{aligned}(f,g) &= f(1,1)g(1,1) + f(-1,1)g(-1,1) + f(-1,-1)g(-1,-1) + f(1,-1)g(1,-1) \\ &= (1)(1) + (-1)(1) + (-1)(-1) + (1)(-1) = 0\end{aligned}$$

Allora, f e g sono ortogonali.

Esempio: Sia $[a,b]$ un intervallo ($a \neq b$). Allora,

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

(f,g) è un prodotto scalare su $\mathbb{R}[x]$:

(A1) $$\begin{aligned}(f+g,h) &= \int_a^b (f+g)(x)\,h(x)\,dx = \int_a^b f(x)h(x) + g(x)h(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)h(x)\,dx + \int_a^b g(x)h(x)\,dx = (f,h) + (g,h)\end{aligned}$$

(A2) $$(cf,g) = \int_a^b cf(x)g(x)\,dx = c\int_a^b f(x)g(x) = c(f,g)$$

(A3) $$(f,f) = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0, \qquad (f,f) = 0 \iff f = 0$$

Nota: Questa costruzione funziona anche per lo spazio vettoriale delle funzioni continue (o anche leggermente discontinue) su $[a,b]$. Questo è molto importante nella teoria delle serie di Fourier.

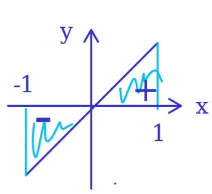
Esempi:

$$[a,b] = [-1,1] \implies (x,1) = \int_{-1}^1 (x)(1)\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^1 = 0$$

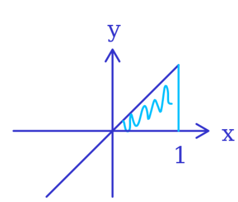
$$[a,b] = [0,1] \implies (x,1) = \int_0^1 (x)(1)\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$[a,b] = [-1,1] \implies (1,1) = \int_{-1}^1 1\,dx = x\big|_{-1}^1 = 2$$

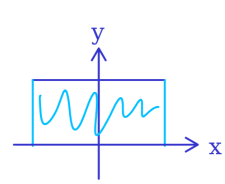
$$H\big|_a^b = H(b) - H(a)$$



$[a,b] = [-1,1], \quad (x,1) = 0$



$[a,b] = [0,1], \quad (x,1) = \frac{1}{2}$



$[a,b] = [-1,1], \quad (1,1) = 2$

Esempio: Dopo aver imparato l'integrazione per parti in analisi, sarete in grado di dimostrare la seguente formula molto utile

$$(f, g') + (f', g) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

per il prodotto scalare $\quad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

Illustrazione: Caso $\quad f = g$

$$2(f, f') = (f, f') + (f', f) = f^2(b) - f^2(a)$$

oppure $\quad (f, f') = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a)).$

Questo è collegato alla conservazione dell'energia in fisica.