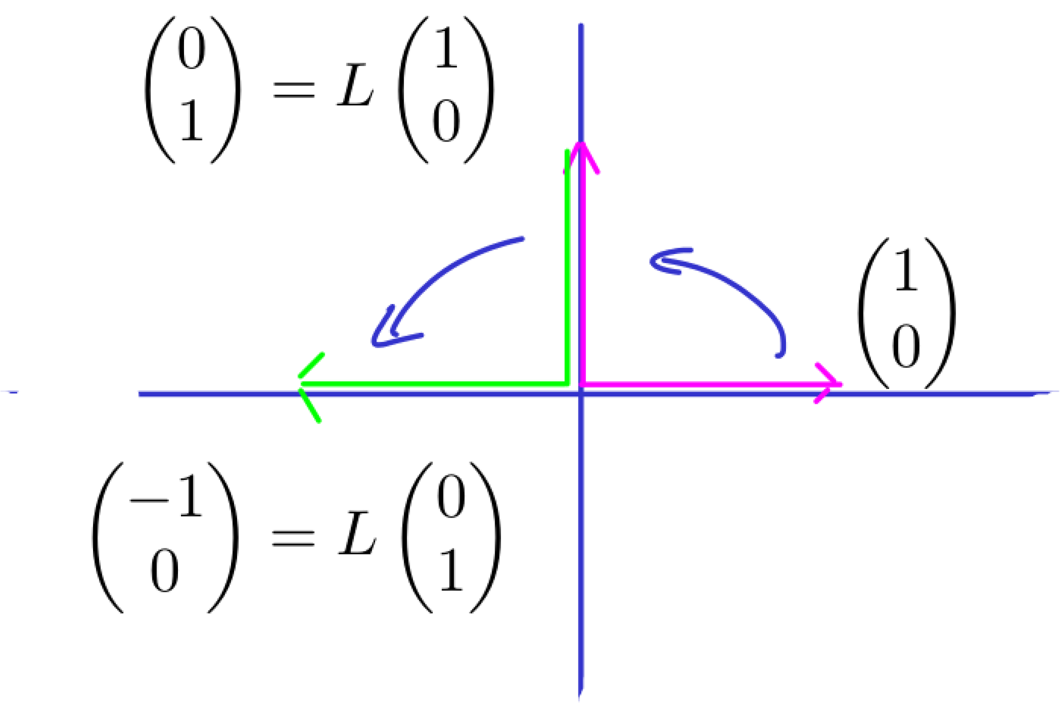
Lezione 13, Algebra delle Matrici

Ricordiamo alcuni esempi:

Esempio: Rotazione di $\pi/2$ radianti intorno all'origine in senso antiorario:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$



La matrice di L è $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ (E1)

Esempio: Supponiamo che $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ è una funzione 1-1. Sia

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{(E2)}$$

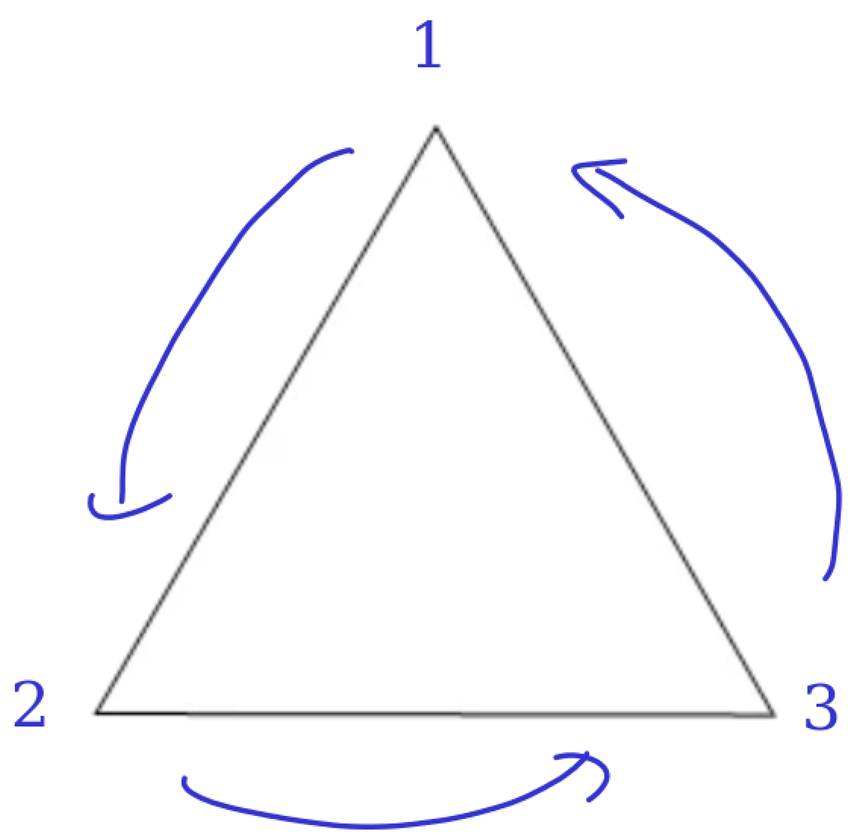
(la base canonica di $\mathbb{R}^3$). Sia A la matrice 3×3 con colonne

$$\begin{pmatrix}e_{f(1)} & e_{f(2)} & e_{f(3)}\end{pmatrix}$$

Allora,

$$A(e_j)=e_{f(j)}$$

Esempio: Considera le simmetrie dell'insieme {1,2,3} dei vertici di un triangolo equilatero

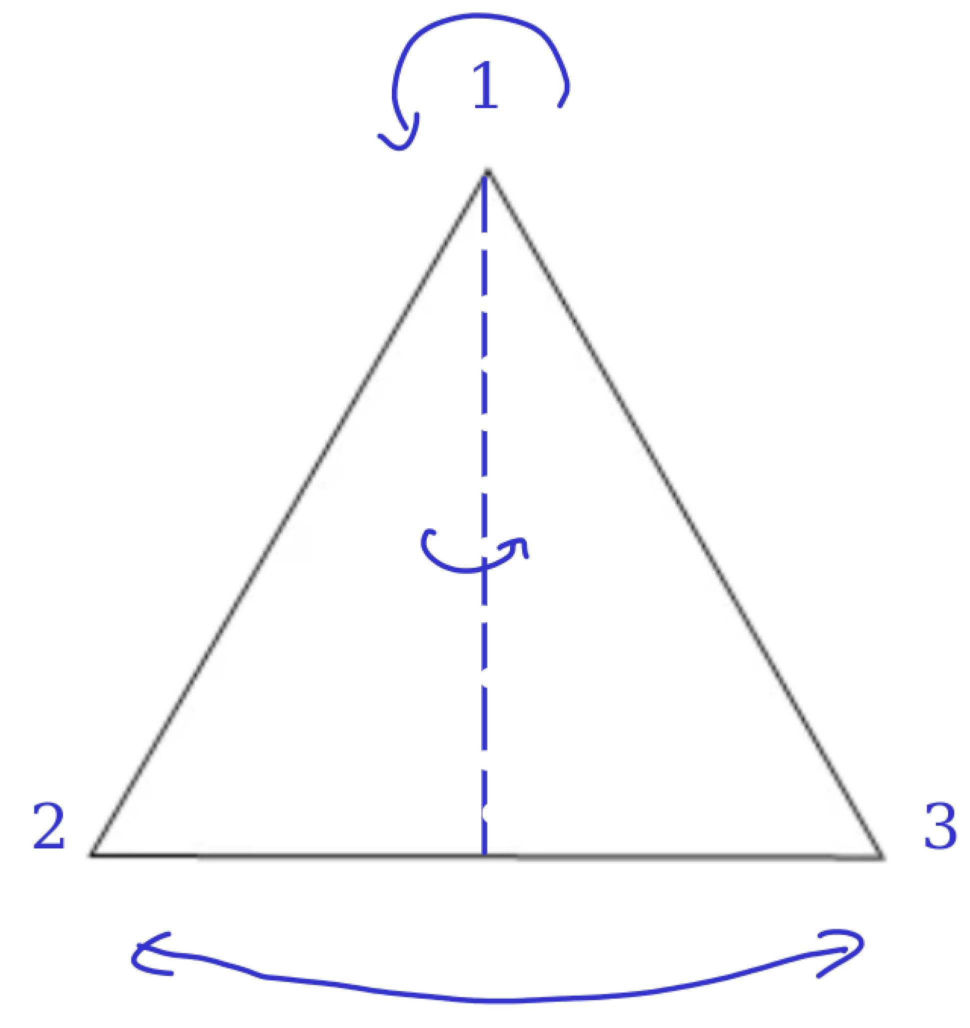


$$f(1)=2, \quad f(2)=3, \quad f(3)=1$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{(E3)}$$

la matrice di f

(Esempio, continuato)



$$g(1) = 1, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(E4)}$$

la matrice di g

Fine Esempio

In generale, data una funzione

$$f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$$

abbiamo la matrice associata con colonne

$$(e_{f(1)} \; e_{f(2)} \; \cdots \; e_{f(n)}), \qquad \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ base canonica di } \mathbb{R}^n \qquad \text{(E4*)}$$

Date due funzioni

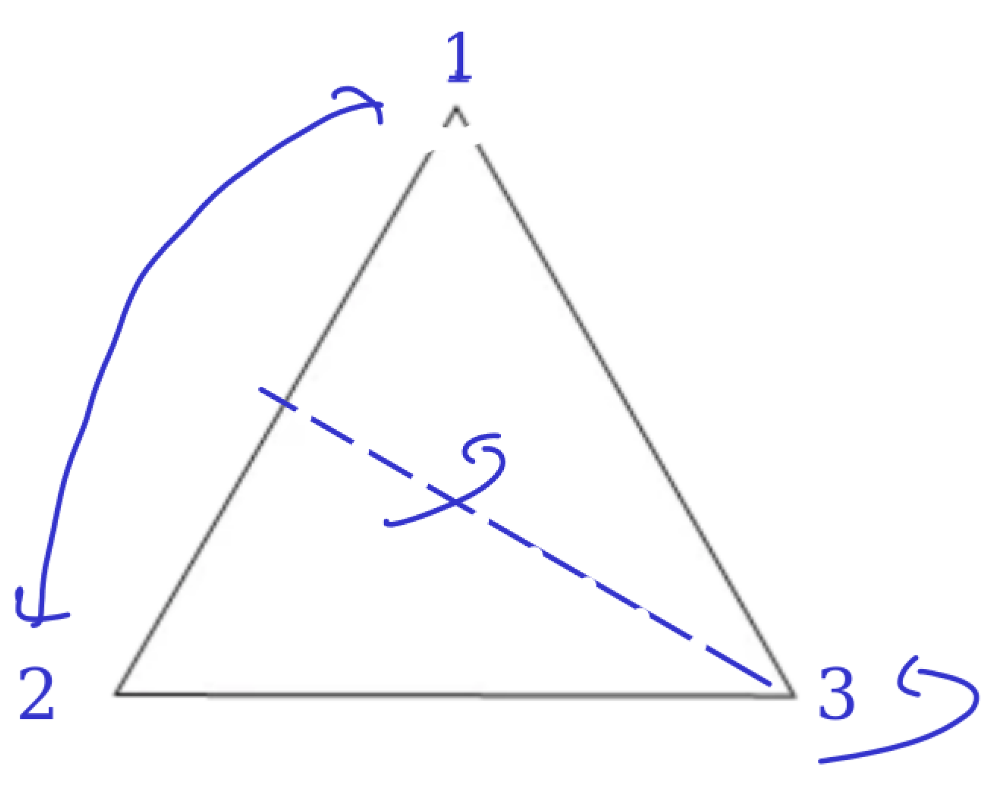
$$f, \, g : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$$

abbiamo la funzione composta

$$h(j) = (f \circ g)(j) = f(g(j)) \qquad \text{(E5)}$$

Torniamo a (E3) and (E4): La matrice (E5) della funzione composta sarà

$$h(1) = f(g(1)) = f(1) = 2, \quad h(2) = f(g(2)) = f(3) = 1, \quad h(3) = f(g(3)) = f(2) = 3$$



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(E6)}$$

la matrice di h

Vogliamo definire moltiplicazione di matrici tali che per (E3)...(E6):

$$C = AB \tag{E7}$$

In generale, dati spazi vettoriali $U,\ V,\ W$ di rispettive dimensioni $m,\ \ell,\ n$ e mappe lineari

$$\beta : U \to V, \qquad \alpha : V \to W \tag{E8}$$

con matrice B $(\ell \times m)$ e matrice A $(n \times \ell)$ relativa alle basi $\mathbf{B}_m,\ \mathbf{B}_\ell,\ \mathbf{B}_n$ per $U,\ V,\ W$ vogliamo che

$$C = AB \tag{E9}$$

sia la matrica della funzione composta $\alpha \circ \beta$ relativa alle basi $\mathbf{B}_m,\ \mathbf{B}_n$.

$\boxed{\text{La formula per moltiplicazione della matrice:}}$

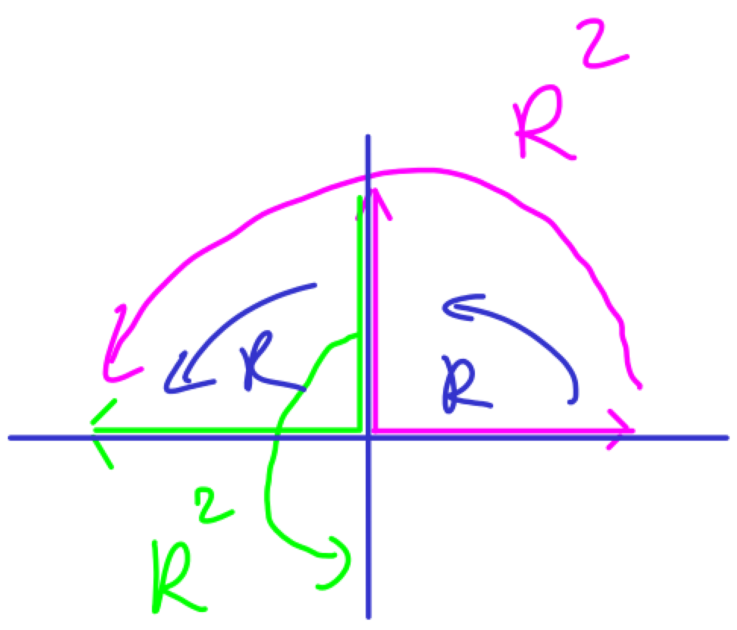
$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{jk}), \quad C = (c_{ik}) \implies c_{ik} = \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} b_{jk} \tag{E10}$$

Esempio: Per (E3), (E4), (E6):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

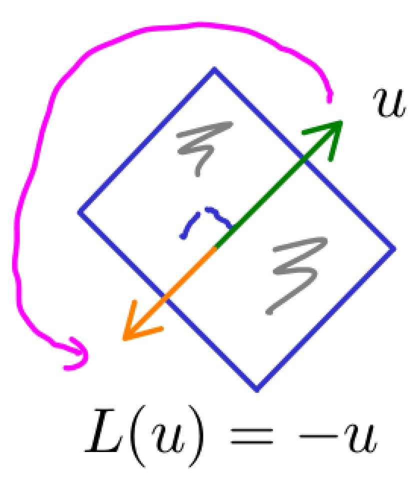
Esempio: Per (E1), rotazione di $\pi/2$ radianti intorno all'origine in senso antiorario:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{R^2}$$



Esempio: Dalla lezione 6 segue che, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$, la riflessione sul piano $P = \{x + y + z = 0\}$ è data dalla matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \implies M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

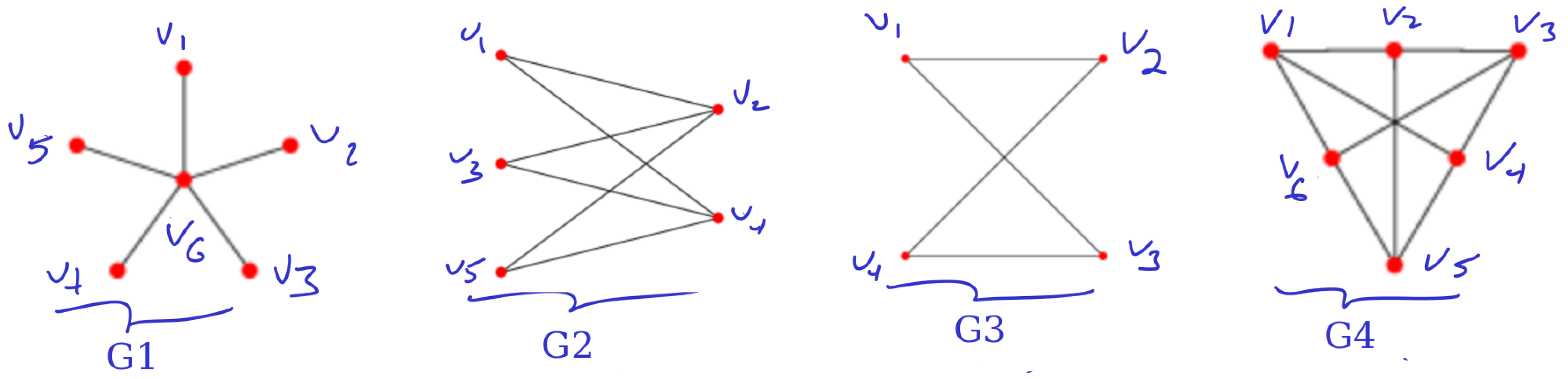
$L(v) = v,\ v \in P$

$L(u) = -u$

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in \mathbb{R}^3 \implies w = \lambda u + v,\ v \in P \\ L^2(w) = L^2(\lambda u) + L^2(v) = \lambda u + v = w \end{array} \right\}$$

Matrice di un grafo:

Pittorialmente, un grafo consiste un insieme V di vertici, e un insieme E di collegamenti tra i vertici:



Più formalmente, definiamo un grafo essere una tripla (V,E,f), dove

$$f : E \to \{\, (x, y) \in V \times V \mid x \neq y \,\}$$

è una funzione che specifica i punti finali (vertici) dei collegamenti.

Sia $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. La matrice delle adiacenze di G=(V,E,f) è la matrice $n \times n$

$$A(V, E, f) = (a_{ij}), \qquad \begin{cases} 1, & \text{c'è un collegamento che collega } v_i \text{ e } v_j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{(E11)}$$

Esempio: La matrice delle adiacenze di G1 è

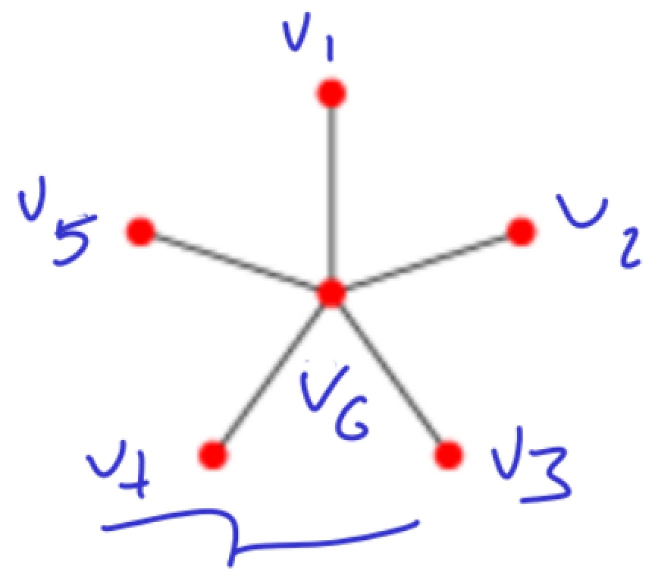
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(E12)}$$

Esempio: La matrice delle adiacenze di G3 è

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(E13)}$$

Teorema: Sia A la matrice adiacenza del grafo G. Allora, il coefficiente (i, j) di A^n è il numero percorsi di lunghezza n che collega v_i e v_j.
Dimostrazione: Questa è un'applicazione del principio di induzione.

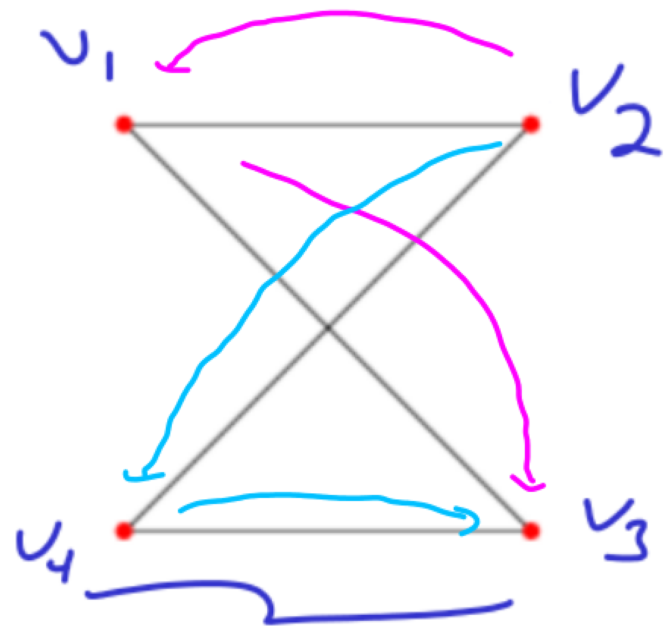
Esempio: C'è un percorso di lunghezza 2 che collega v_i e v_j min G1 per i, j < 6.
Ci sono cinque percosi di lunghezza 2 che collegano v_6 a se stesso



G1

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Esempio: Ci sono due percorsi di lunghezza 2 che collegano v_2 e v_3 in G3, come mostrato sotto:



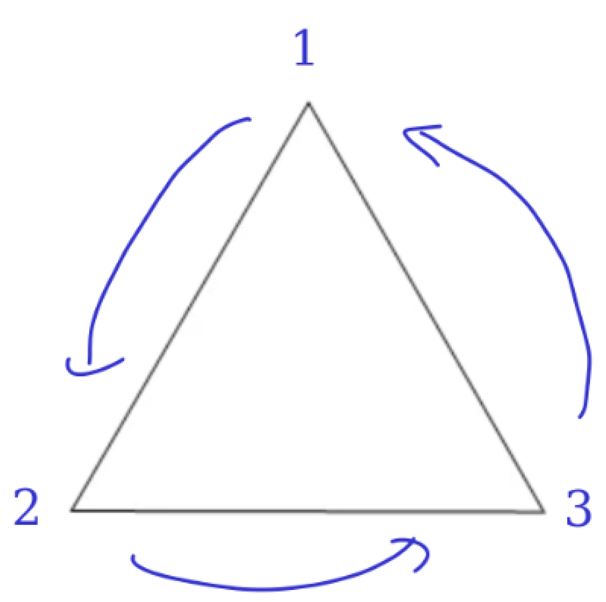
$$A_3^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La moltiplicazione delle matrici non è commutativa:

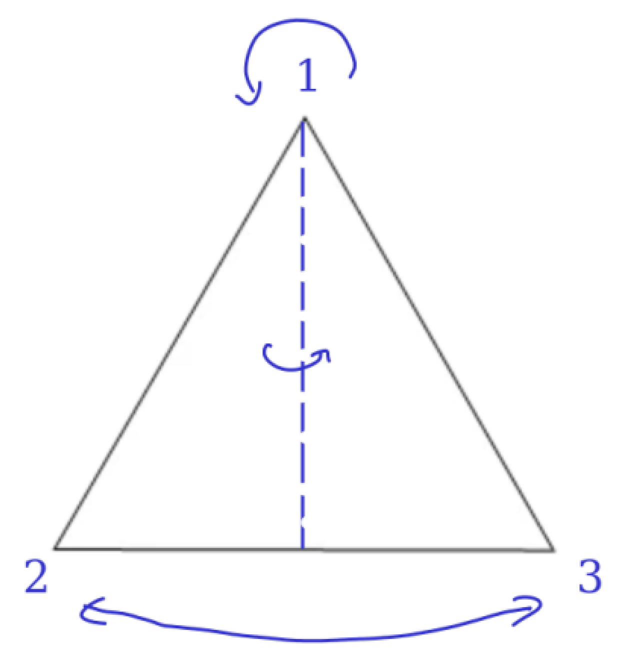
In generale, composizione delle funzioni non è commutativa (quando definita).
Lo stesso vale per la moltiplicazione di matrici.

Esempio: Torniamo alle (E3), (E4), (E6), $f \circ g \neq g \circ f$, $AB \neq BA$:

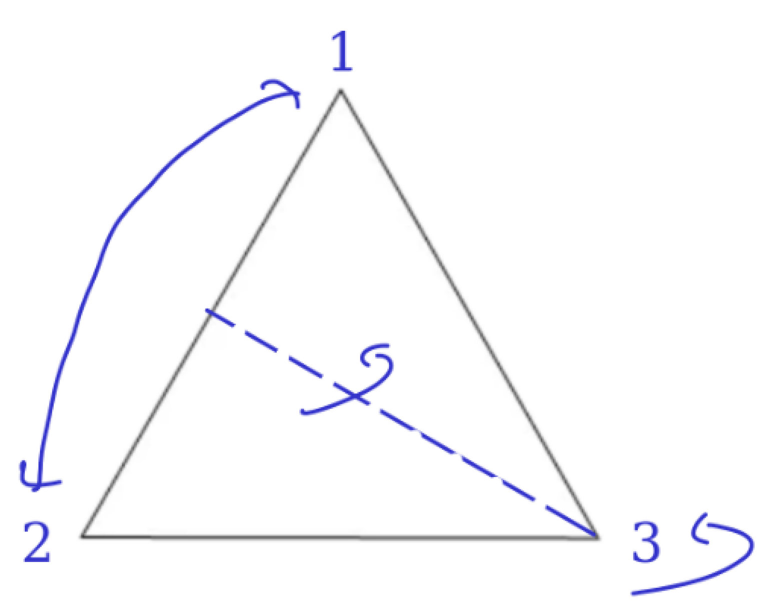
f:



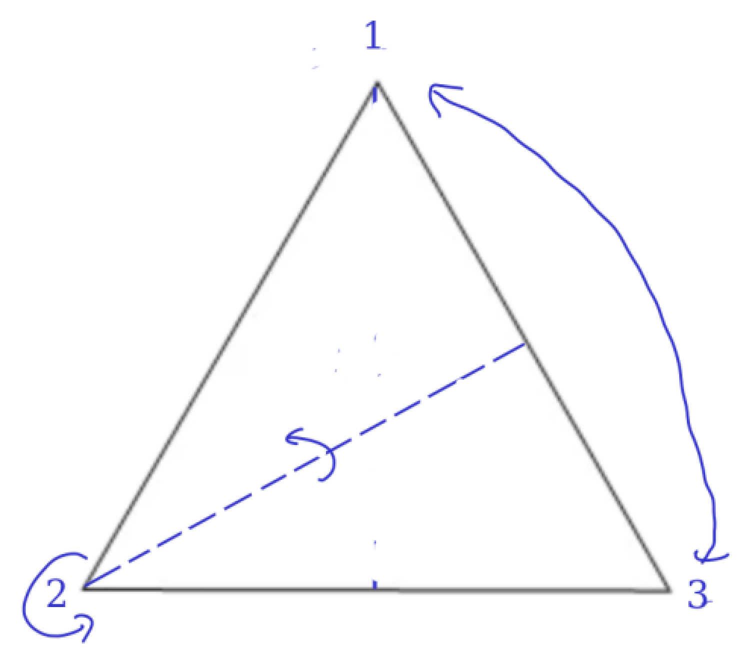
g:



f(g):



g(f):



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

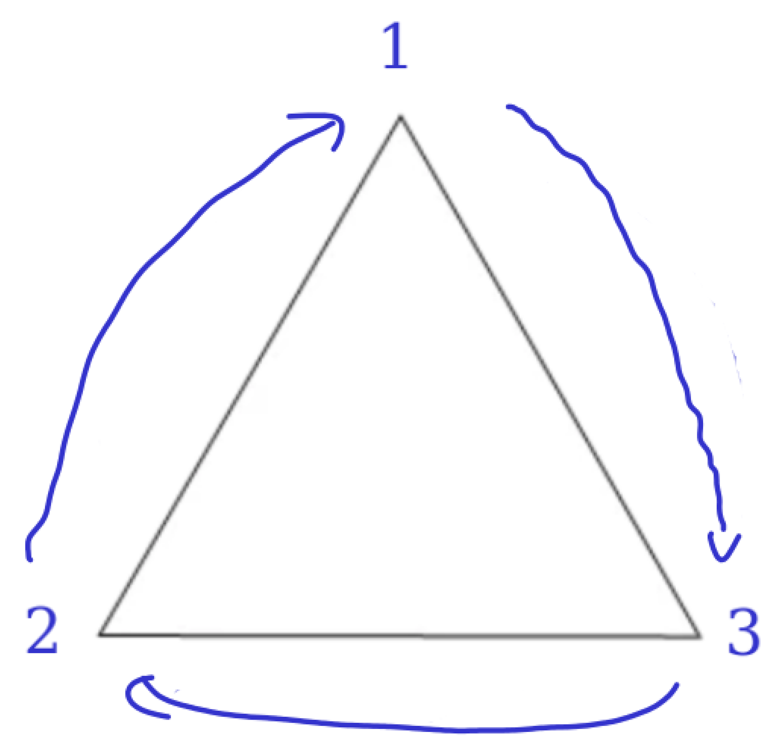
La moltiplicazione delle matrici è associativa:

Invece, la composizione delle funzioni è associativa (quando definita). Lo stesso vale per la moltiplicazione di matrici.

Esempio: Torniamo alle (E3), (E4), (E6):

$$(BA)B = DB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(AB) = BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$f^{-1} = (g \circ f) \circ g = g \circ (f \circ g)$$

La somma di matrici: Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici $n \times m$. Allora,

$$A + B = C, \qquad C = (c_{ij}) \quad \text{dove} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{E14}$$

Chiaramente:

$$A + B = B + A \tag{E15}$$

La Proprietà Distributiva: Quando definiti,

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)C = AC + BC \tag{E16}$$

Matrici di permutazione, Matrice di Identità

Una matrice P tipo $n \times n$ è detta matrice di permutazione se è la matrice (E4*) di a permutazione $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, cioè

$$P = (e_{f(1)} \quad e_{f(2)} \quad \cdots \quad e_{f(n)})$$

La matrice della permutazione identità è chiamata matrice identità

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots \; 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che se A è una qualsiasi matrice $n \times m$ allora

$$I_n A = A I_m = A$$

Matrici elementari (di Gauss)

Definizione: Una matrice elementare di Gauss è una matrice nxn ottenuta applicando una singola mosse di Gauss alla matrice identità .

Esempio: Per $n = 2$ i tipi di matrici elementari sono

(1) Aggiungi un multiplo di una riga a un'altra riga $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Moltiplicare una riga per uno scalare diverso da zero $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$

(3) Scambia due righe $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proprietà chiave: Sia E la matrice elementare ottenuta applicando una mossa di Gauss M alla matrice identità $n \times n$. Sia A una matrice $n \times m$. Quindi, EA è la matrice ottenuta applicando la mossa di Gauss M ad A.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

Lemma: Sia M una mossa di Gauss e M' la mossa inversa di Gauss. Siano E ed E' le matrici corrispondenti. Allora, $EE' = E'E = I_n$

Nota: E' è la matrice inversa di E, che di solito si scrive E^{-1}.

Fattorizzazione della matrice

In particolare, Sia A una matrice $n \times n$ e $M_1, \ldots, M_k$ le mosse di Gauss necessarie per trasformare A in una matrice scalina A' utilizzando l'eliminazione gaussiana.

Sia E_j la matrice elementare ottenuta applicando M_j alla matrice identità $n \times n$.
Allora,

$$E_k \cdots E_1 A = A'$$

Perciò,

$$A = E_1' \cdots E_{k-1}' E_k' A'$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2=r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3=r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4=r_4+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A' = I_4$$

Quindi:

$$M_1 = \{r_2 = r_2 + r_1\}, \quad M_2 = \{r_3 = r_3 + r_2\}, \quad M_3 = \{r_4 = r_4 + r_3\}$$

$$M_1' = \{r_2 = r_2 - r_1\}, \quad M_2' = \{r_3 = r_3 - r_2\}, \quad M_3' = \{r_4 = r_4 - r_3\}$$

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = E_1'E_2'E_3'A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice trasposta

Ricorda che la matrice trasposta A^t di una matrice A è la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A.

Segue per calcolo diretto utilizzando la formula (E10) che

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Matrice Definita Positiva

Sia A una matrice $n \times n$ tale che $A^t = A$. Allora A si dice una matrice definita positiva se (e sole se)

$$u^t A u > 0$$

per qualsiasi vettore colonna n-dimensionale diverso da zero u.

Esercizio: Se A è definita positiva allora la formula

$$(u, v) = u^t A v$$

definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ (spazio dei vettori colonna n-dimensionali).

Una matrice A tipo $n \times n$ si dice dominante diagonalmente per righe se e solo se

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Teorema: Sia A una matrice quadrata dominante diagonalmente per righe. Se $A = A^t$ allora A è definita positiva.

Esempio: Se A è la matrice di un grafo G, allora $A = A^t$. Quindi, possiamo ottenere una matrice definita positiva $\widehat{A} = (\hat{a}_{ij})$ ponendo

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} 1 + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| & i = j \\ a_{ij} & i \neq j \end{cases}$$