Lezione: Teorema spettrale.

Nelle lezioni precedenti, abbiamo definito la nozione di indipendenza lineare per un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale. Il concetto analogo per un insieme di sottospazi di uno spazio vettoriale è il seguente:

Definizione: Supponiamo che $U_1, \dots, U_n$ siano sottospazi vettoriali di V, allora la loro somma è data da

$$U_1 + \dots + U_n = \{u_1 + \dots + u_n \in V \mid u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n\}$$

I sottospazi $U_1, \dots, U_n$ si dicono indipendenti se

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0, \quad u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n \iff u_1 = 0, \dots, u_n = 0$$

Un sottospazio W è detto una somma diretta di $U_1, \dots, U_n$ se $W = U_1 + \dots + U_n$ e $U_1, \dots, U_n$ sono indipendenti.

Errore classico: Una collezione di spazi $U_1, \dots, U_n$ è indipendente se

$$U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Per $n = 2$, è solo $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Per $n > 2$, questa condizione è molto più forte del semplice $U_i \cap U_j = \{0\}$ se $i \neq j$.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2, \quad U_1 = \mathrm{span}\{(1,0)\}, \quad U_2 = \mathrm{span}\{(0,1)\}, \quad U_3 = \mathrm{span}\{(1,1)\}$
Allora

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}, \quad U_1 \cap U_3 = \{0\}, \quad U_2 \cap U_3 = \{0\}$$

ma $U_1,\ U_2,\ U_3$ non sono indipendenti perché

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lemma: Se $L : V \to V$ è una mappa lineare e $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ sono autospazi con autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ allora $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ sono indipendenti.
Dimostrazione: Questo è equivalente all'indipendenza degli autovettori con autovalori distinti. Applichiamo il principio di induzione. Sia P_k la proposizione che se $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sono autospazi di L con autovalori distinti allora $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sono indipendenti. Allora, P_1 è vero. Supponiamo che P_{n-1} è vero $(n > 1)$ e

$$v_1 + \dots + v_n = 0, \qquad v_1 \in V_{\lambda_1}, \dots, v_n \in V_{\lambda_n}$$

Allora

$$\begin{cases} \lambda_n(v_1 + \dots + v_n) = \lambda_n v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \\ L(v_1 + \dots + v_n) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \end{cases}$$

Sottraendo, si ottiene

$$(\lambda_n - \lambda_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})v_{n-1} = 0$$

Poiché abbiamo autovalori distinti, $\lambda_n - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_{n-1}$ sono tutti non nulli. Quindi, per l'ipotesi di induzione $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono tutti zero. Quindi, anche v_n è zero, il che verifica P_n.

Per continuare, ricordiamo che $\det(A)$ è una funzione differenziabile delle voci di $A = (a_{ij})$. Sostituendo a_{ii} con $a_{ii} - t$, vediamo che anche i coefficienti del polinomio caratteristico $p_A(t)$ sono funzioni differenziabili delle voci di A. Quindi, il risultante

$$R_A = R(p_A(t), p'_A(t))$$

è una funzione differenziabile delle voci di A. In particolare, se $R_A \neq 0$ allora anche $R_{\tilde{A}} \neq 0$ per tutte le matrici $\tilde{A}$ sufficientemente vicine ad A (la differenziabilità implica la continuità). Quindi,

$$\{A \in M_{n\times n} \mid R_A \neq 0\}$$

è un sottoinsieme aperto di $M_{n\times n}$. Per costruzione, la condizione $R_A \neq 0$ implica che A ha n autovalori distinti, e quindi A ha una base di autovettori.

Più intuitivamente: Ci si aspetta che una matrice scelta a caso abbia una base di autovettori.

Un tipico esempio di matrice che non è casuale è una matrice simmetrica ($A^t = A$), antisimmetrica ($A^t = -A$), hermitiana ($A = A^*$), antihermitiana ($A^* = -A$), ortogonale ($AA^t = I$) o unitaria ($AA^* = I$). [Richiamo, $A^* = (\bar{A})^t$]

Fortunatamente, possiamo raccogliere tutti questi casi in un tipo di matrice più generale. [Dove A deve essere reale nei casi simmetrico, anitsimmetrico e ortogonale].

Definizione: Una matrice quadrata A è normale se $AA^* = A^*A$.

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto hermtiano. Allora, una base B di V è una base unitaria di V se e solo se
(1) Ogni elemento di B ha norma 1,
(2) Ogni coppia di elementi distinti di B è ortogonale.
(Una base B di uno spazio vettoriale reale V che soddisfa le condizioni (1) e (2) è chiamata una base ortonormale di V.)

Teorema Spettrale: Una matrice quadrata è normale se e solo se ha una base unitaria di autovettore rispetto al prodotto interno standard su $\mathbb{C}^n$:

$$\langle (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n) \rangle = u_1\bar{v}_1 + \cdots + u_n\bar{v}_n$$

Casi Speciali:
(1) Gli autovalori di una matrice Hermitiana sono reali.
(2) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A è hermetiana (quindi i suoi autovalori sono reali) e ha una base di autovettori che sono elementi di $\mathbb{R}^n$. Infatti, se A è una matrice reale e λ è un autovalore reale di A, allora l'autospazio E_λ ha una base costituita da elementi di $\mathbb{R}^n$.
(3) Gli autovalori di una matrice antihermitiana sono immaginari puri (questo include lo zero).
(4) Gli autovalori di una matrice unitaria hanno norma 1. Si noti che una matrice reale ortogonale è unitaria.

Attenzione: Una matrice reale ortogonale può avere autovalori complessi. Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies AA^t = I_2, \qquad p_A(t) = t^2 + 1$$

Nota: Una matrice A $n \times n$ si dice diagonalizzabile se ha una base di autovettori. In particolare, una matrice normale A è diagonalizzabile (utilizzando autovettori e autovalori complessi). Allo stesso modo, A è diagonalizzabile se ha n autovalori distinti.

La chiave per dimostrare queste proposizione sugli autovalori è il fatto che (Lezione 17)

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle$$

Dimostrazione:

(1) $Av = \lambda v \ (v \neq 0), \quad A = A^* \implies \lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, A^* v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$
Poiché, $|v|^2 = \langle v, v\rangle \neq 0$ dobbiamo avere $\lambda = \bar{\lambda}$.

(3) $Av = \lambda v \ (v \neq 0), \quad A^* = -A \implies \bar{\lambda} = -\lambda$ usando lo stesso metodo di (1).

(4) Cominciamo con l'osservazione che $AA^* = I$ implica che A^* è l'inverso di A.
Quindi, abbiamo anche $A^* A = A^{-1} A = I$.

$$Av = \lambda v \ (v \neq 0), \quad AA^* = I \implies \langle v, v\rangle = \langle A^* A v, v\rangle = \langle Av, Av\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = |\lambda|^2\langle v, v\rangle$$

Poiché, $|v|^2 = \langle v, v\rangle \neq 0$ dobbiamo avere $|\lambda|^2 = 1$.

Lemma: Se u è un autovettore di una matrice normale A con autovalore λ, allora u è un autovalore di A^* con autovalore $\bar{\lambda}$.
Dimostrazione:

$$AA^* = AA^* \implies |Av|^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle A^* A v, v\rangle = \langle AA^* v, v\rangle = \langle A^* v, A^* v\rangle = |A^* v|^2$$

Si verifica facilmente che $AA^* = A^* A \implies (A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = (A - \lambda I)^*(A - \lambda I)$. Quindi,

$$|(A - \lambda I)v|^2 = |(A - \lambda I)^* v|^2$$

In particolare, se u è un autovettore di A con autovalore λ allora

$$0 = |(A - \lambda I)u|^2 = |(A - \lambda I)^* u|^2 \implies (A - \lambda I)^* u = 0$$

Tuttavia $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda} I$. Così $A^* u = \bar{\lambda} u$.

Corollario: Se A è una matrice normale e u e v sono autovettori di A con autovalori distinti, allora u e v sono ortogonali.
Dimostrazione: Sia $Au = \alpha u$ e $Av = \beta v$. Allora,

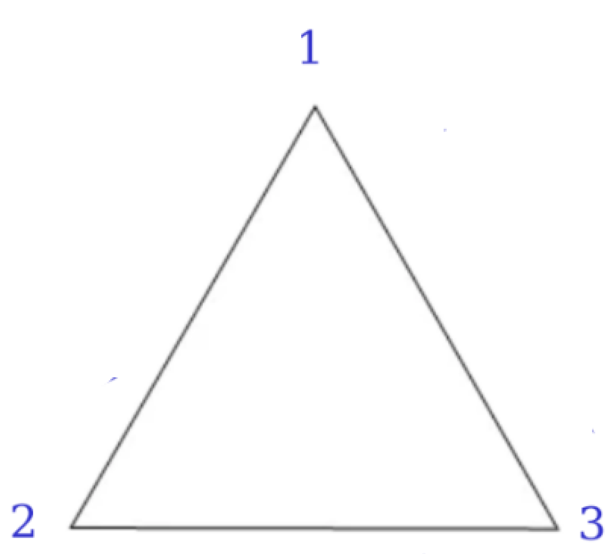
$$\alpha\langle u, v\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle = \langle u, \bar{\beta} v\rangle = \beta\langle u, v\rangle$$

Quindi,

$$(\alpha - \beta)\langle u, v\rangle = 0$$

Poiché $\alpha - \beta \neq 0$ dobbiamo avere $\langle u, v\rangle = 0$.

Esempio: Sia A la matrice di adiacenza del grafo triangolo



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies p_A(t) = (t-2)(t+1)^2$$

Autovettori:

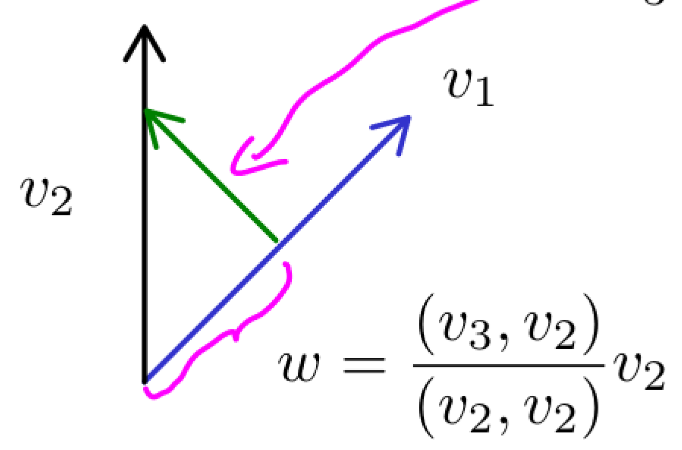
$$\lambda = 2, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = -1, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = -1, \ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In particolare, il teorema spettrale dice solo che A ha una base di autovettori unitaria, non che ogni base di autovettori è unitaria. In questo caso, $(v_2, v_3) = 1$.

(continua, pagina seguente)

Per ottenere una base unitaria per E_{-1}, iniziamo con v_2 e calcoliamo la proiezione ortogonale w di v_3 su v_2:

$$v_3' = v_3 - w = v_3 - \frac{(v_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2$$



$$\boxed{v_3' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Allora, v_2 e $v_3' = v_3 - w$ saranno ortogonali. Ora riscaliamo per ottenere una base unitaria.

$\boxed{\text{Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt}}$

Se V è uno spazio vettoriale reale (risp. complesso) con un prodotto scalare (risp. prodotto hermitiano) e u è un elemento non nullo di V allora

$$\mathrm{Proj}_u : V \to V, \qquad \mathrm{Proj}_u(v) = \frac{(v, u)}{(u, u)} u, \qquad \left(\text{risp. } \mathrm{Proj}_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u\right)$$

è una mappa lineare (rispetto a v, non a u!).

Lemma (Gram-Schmidt): Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ è un insieme finito di vettori linearmente indipendenti allora

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_2), \quad v_3 = u_3 - \mathrm{Proj}_{v_2}(u_3) - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_3), \ \ldots, \ v_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Proj}_{v_k}(u_n)$$

è un insieme di vettori ortogonali tale che

$$\mathrm{span}(u_1, \ldots, u_\ell) = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_\ell), \qquad \ell = 1, \ldots, n$$

Dimostrazione: Questa è un'induzione sul numero di elementi di S.

Osservazione: Una volta ottenuto l'insieme ortogonale $\{v_1, \ldots, v_n\}$, possiamo ottenere una base unitaria (o ortonormale) per $\mathrm{span}(S)$ ponendo

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|}, \ w_2 = \frac{v_2}{|v_2|}, \ \ldots, \ w_n = \frac{v_n}{|v_n|}$$

Esempio: Applicare il processo di Gram-Schmidt alla base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $P_3[x]$ relativa al prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

Per iniziare, si calcola

$$(x^a, x^b) = \int_{-1}^{1} x^{a+b}\, dx = \left.\frac{x^{a+b+1}}{a+b+1}\right|_{-1}^{1} = \begin{cases} \dfrac{2}{a+b+1}, & a+b \text{ pari} \\ 0, & a+b \text{ dispari} \end{cases}$$

Allora,

$$v_1 = u_1 = 1 \qquad v_2 = u_2 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_2) = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} x = x$$

$$v_3 = u_3 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_3) - \mathrm{Proj}_{v_2}(u_3) = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} 1 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$v_4 = u_4 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_4) - \mathrm{Proj}_{v_2}(u_4) - \mathrm{Proj}_{v_3}(u_4) = x^3 - \frac{3}{5} x$$

(continua, pagina seguente)

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{(1,1)}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad w_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{x}{\sqrt{(x,x)}} = x\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$w_3 = \frac{v_2}{\sqrt{(v_2, v_2)}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})}} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$w_4 = \frac{v_4}{\sqrt{(v_4, v_4)}} = \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\sqrt{(x^3 - \frac{3}{5}x, x^3 - \frac{3}{5}x)}} = \frac{1}{2}(5x^3 - 3)\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Isometria

Sia U e V spazi vettoriali reali (risp. complessi) dotati di prodotti (risp. hermitiani) scalari $(—,—)_U$ e $(—,—)_V$ (risp. $\langle —,— \rangle_U$ e $\langle —,— \rangle_V$). Allora, una mappa lineare $L : U \to V$ è chiamata e isometria se (e solo se)

$$u_1,\ u_2 \in U \implies (u_1, u_2)_U = (L(u_1), L(u_2))_V \qquad (\text{risp. } u_1,\ u_2 \in U \implies \langle u_1, u_2 \rangle_U = \langle L(u_1), L(u_2) \rangle_V)$$

In altre parole, un'isometria è una mappa lineare che conserva la lunghezza dei vettori e gli angoli tra loro.

Esempio: La rotazione intorno all'origine è un'isometria di $\mathbb{R}^2$. La riflessione attraverso un iperpiano è un'isometria di $\mathbb{R}^n$. Se $\ker(L)$ è non-zero allora L non è un'isometria, perché non conserva le lunghezze degli elementi di $\ker(L)$. In particolare, un'isometria è sempre iniettiva.

Per costruire un'isometria da uno spazio finito dimensionale U a uno spazio vettoriale finito dimensionale V, si scelgono semplicemente le basi unitarie (o ortonormali) B_U e B_V di U e V rispettivamente, e poi inviare elementi di B_U a B_V in modo 1-1.

Viceversa, ogni isometria tra spazi vettoriali di dimensione finita è di questa forma.

Esempio: $\quad U = P_3[x], \quad (f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx, \qquad V = \mathbb{R}^4,$ prodotto sclare standard

Rispetto ai polinomi dell'esempio precedente, la mappa lineare $T(w_j) = e_j$ è un'isometria

La matrice della mappa L rispetto alle basi $\{1, x, x^2, x^3\}$ e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}w_1 \implies T(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}T(w_1) = \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 \qquad \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$

$$w_4 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3)\sqrt{\frac{7}{2}} \implies \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}w_4 = 5x^3 - 3x$$

$$\implies \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}w_4 = 5x^3 - \sqrt{3}\sqrt{2}w_1 \implies x^3 = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}w_4 + \sqrt{3}w_1\right) \implies T(x^3) = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}e_4 + \sqrt{3}e_1\right)$$

Esempio: Sia $\quad L : P_3[x] \to P_3[x], \qquad L(p) = (1 - x^2)\frac{d^2p}{dx^2} - 2x\frac{dp}{dx}$

$$L(1) = 0, \qquad L(x) = -2x, \qquad L(3x^2 - 1) = 6(1 - x)^2 - 2x(6x) = 6 - 18x^2 = -6(3x^2 - 1)$$

$$L(5x^3 - 3x) = (1 - x^2)(30x) - 2x(15x^2 - 3) = 36x - 60x^3 = (-12)(5x^3 - 3x)$$

(continua, pagina seguente)

Così, la matrice di L relativa alla base ortonormale $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ di $P_3[x]$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

In particolare, poiché questa matrice è una matrice simmetrica e B è una base ortonormale di $P_3[x]$, segue che

$$f,\, g \in P_3[x] \implies (L(f), g) = (f, L(g))$$

Definizione: Sia U uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare $(—,—)$. Allora, una mappa lineare $L : U \to U$ è simmetrica se

$$f,\, g \in U \implies (L(f), g) = (f, L(g))$$

Allo stesso modo, L è antisimmetrica se

$$f,\, g \in U \implies (L(f), g) = -(f, L(g))$$

Nota: Se U è di dimensione finita, questo è equivalente alla matrice di L rispetto a una base ortonormale è simmetrica (risp. antisimmetrica).

Nota tecnica: Nel caso dimensionale infinito, si dovrebbe aggiungere la condizione che L sia un operatore limitato. Non discuteremo questo argomento in questo corso.

Allo stesso modo, se U è uno spazio vettoriale complesso con prodotto hermitiano $\langle —,— \rangle$ allora una mappa lineare $L : U \to U$ è hermitiana (risp. antihermitiana) se

$$f,\, g \in U \implies \langle L(f), g \rangle = \langle f, L(g) \rangle, \qquad (\text{risp. } f,\, g \in U \implies \langle L(f), g \rangle = -\langle f, L(g) \rangle)$$

Se U è di dimensione finita, questo è equivalente alla matrice di L rispetto a una base unitaria è hermitiana (risp. antihermitiana). Allo stesso modo, L è normale se la sua matrice rispetto a una base unitaria è una matrice normale.

Tutto ciò che abbiamo detto sulle matrici simmetriche, antisimmetriche, hermitiane, antihermitiane e normali si applica altrettanto bene alle mappe lineari con la proprietà corrispondente attraverso la rappresentazione matriciale della mappa lineare.

Applicazione (Matrici Definite Positive): Ricordiamo che una matrice reale quadrata A è definita positiva se è simmetrica e

$$(u, v) = u^t A v$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$. Per il teorema dello spettro, poiché A è simmetrica ha una base ortonormale di autovettori. Rispetto a questa base di $\mathbb{R}^n$,

$$(u, v) = \lambda_1 u_1 v_1 + \cdots + \lambda_n u_n v_n$$

Quindi A è definita positivamente se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi. Il modo più semplice per verificare che A abbia autovalori positivi è applicare il teorema del disco di Gershgorin. Questo produce il risultato dichiarato alla fine della lezione 13:

Teorema: Sia A una matrice quadrata dominante diagonalmente per righe. Se $A = A^t$ e gli elementi diagonali di A sono positivi, allora A è definita positiva.

La chiave per dimostrare il teorema spettrale è considerare prima il caso in cui A è una matrice triangolare superiore:

Sia A una matrice triangolare superiore. Allora si calcola che l'elemento $(1,1)$ di AA^* è

$$|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2$$

e l'elemento $(1,1)$ di $A^*A = |a_{11}|^2$. Quindi, $AA^* = A^*A$ implica

$$|a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2 = 0 \implies a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$$

Avendo stabilito che tutti gli elementi non diagonali della prima riga di A sono zero, si procede a considerare l'elemento $(2,2)$ di AA^* e A^*A. Si ottiene,

$$|a_{22}|^2 + |a_{23}|^2 + \cdots + |a_{2n}|^2, \qquad |a_{22}|^2$$

rispettivamente. Quindi, $a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$. Procedendo in questo modo (o usando il principio di induzione), si vede che se A è una matrice triangolare superiore tale che $AA^* = A^*A$ allora A deve essere una matrice diagonale.

Questo ci porta al risultato finale di questo corso, la cui dimostrazione si basa sul processo di Gram-Schmidt.

Lemma di Schur: Sia A una matrice $n \times n$. Allora esiste una matrice unitaria U tale che

$$A = UTU^{-1}$$

dove T è una matrice triangolare superiore.

(fine lemma)

In particolare se $AA^* = A^*A$ e $A = UTU^{-1}$ dove U è unitaria e T è triangolare superiore, allora

$$AA^* = (UTU^*)(UTU^*)^* = UTU^*(U^*)^*T^*U^* = UTU^*UT^*U^* = UTT^*U^*$$
$$A^*A = (UTU^*)^*(UTU^*) = (U^*)^*T^*U^*UTU^* = UT^*U^*UTU^* = UT^*TU^*$$

perché

(1) U unitaria significa $U^*U = I$ e quindi $U^* = U^{-1}$.

(2) la moltiplicazione della matrice e la trasposizione coniugata soddisfano

$$(M_1M_2)^* = M_2^*M_1^*, \qquad (M^*)^* = M$$

Sottraendo, si ottiene

$$0 = AA^* - A^*A = U(TT^* - T^*T)U^*$$

poiché U è invertibile, segue che

$$TT^* - T^*T = 0$$

Quindi, T è una matrice diagonale poiché T è un triangolo superiore. Così, le colonne di U formano una base unitaria di $\mathbb{C}^n$ che sono autovettori di A.