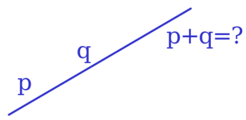
Lezione, Vettori in $\mathbb{R}^3$

La geometria euclidea è lo studio delle proprietà dello spazio euclideo tridimensionale che sono invarianti sotto rotazioni e movimenti rigidi.

Esempi:
(1) Il fatto che due punti distinti determinano una linea.
(2) La distanza tra due punti.
(3) L'angolo tra due linee non parallele.

Esempio: La somma di due punti nello spazio euclideo non ha senso.



$\mathbb{R}^3$ = Spazio euclideo + scelta del sistema di coordinate.
Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ possono essere aggiunti componente per componente

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \tag{E1}$$

Un numero reale è chiamato scalare. Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ possono essere moltiplicati per gli scalari componente per componente.

$$c(x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3) \tag{E2}$$

Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ possono anche essere sottratti componente per componente:

$$(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \tag{E3}$$

In generale

$$a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3) = (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3)$$

Esempi:

$$(1,1,2) + (1,2,3) = (2,3,5)$$

$$(1,4,9) - (1,2,3) = (0,2,6) = 2(0,1,3)$$

$$2(1,0,1) + 3(0,1,-1) = (2,3,-1)$$

Linea parametrica in $\mathbb{R}^3$

Dati due punti $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $q = (q_1, q_2, q_3)$ in $\mathbb{R}^3$, la mappa

$$X(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad X(t) = p + t(q - p) \tag{E4}$$

parametrizza la retta passante per p e q (supponendo che p e q siano distinti).

Esempio:

$$p = (1,0,1), \quad q = (1,1,1) \implies X(t) = (1,t,1)$$

è la forma parametrica della retta passante per p e q.

La costruzione dell'equazione parametrica della retta passante per p e q illustra un'importante dicotomia su $\mathbb{R}^3$:

Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ possono essere considerati sia come punti nello spazio euclideo sia come "vettori" che possono essere addizionati e moltiplicati per gli scalari.

In generale, dato un punto $p = (p_1, p_2, p_3)$ in $\mathbb{R}^3$ e un vettore $v = (v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{R}^3$, la retta parametrica passante nella direzione del vettore è data dall'equazione

$$L(t) = p + tv \qquad \text{(E5)}$$

Esempio:

$$p = (1,1,-1), \quad v = (1,0,1) \implies L(t) = (t+1, 1, t-1)$$

è la retta passante per p nella direzione di v.

Esempio: Una curva parametrica in $\mathbb{R}^3$ è una mappa della forma

$$r : (a,b) \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Non preoccupateti
di come calcolare r',
questo è coperto
da altri corsi.

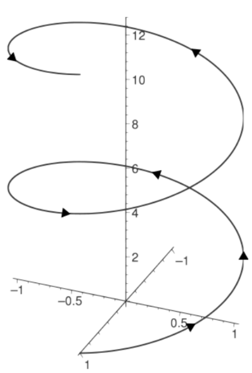
La derivata $\quad r'(c) = (x'(c), y'(c), z'(c)) \qquad \text{(E6)}$

(se esistono le tre derivate a destra) e l'equazione della retta tangente della curva a $c \in (a,b)$ è

$$L(t) = r(c) + tr'(c), \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{(E7)}$$

Esempio (Elica):

$$r(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$



$$r(2\pi) = (1,0,2\pi), \qquad r'(2\pi) = (0,1,1)$$

r' è dato

$$L(t) = (1,0,2\pi) + t(0,1,1) = (1, t, 2\pi + t)$$

π = p greco

Forma parametrica di un piano in $\mathbb{R}^3$:

Dati tre punti A, B e C in $\mathbb{R}^3$ che non sono collineari, il piano che passa per questi tre punti è il grafico della funzione

$$X(s,t) = s(B-A) + t(C-A) + A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{(E8)}$$

Si noti che

$$X(0,0) = A, \qquad X(1,0) = B, \qquad X(0,1) = C \qquad \text{(E9)}$$

Esempio: L'equazione del piano che passa per i punti $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ $C = (0,0,1)$ è

$$X(s,t) = (-1,1,0)s + (-1,0,1)t + (1,0,0) = (1-s-t, s, t)$$

Forma lineare di un piano in $\mathbb{R}^3$:

Tornando all'esempio precedente, vediamo che se

$$X(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = (1-s-t, s, t)$$

allora

$$x(s,t) + y(s,t) + z(s,t) = (1-s-t) + s + t = 1 \qquad \text{(E10)}$$

Viceversa, supponiamo che $x_o + y_0 + z_0 = 1$. Allora,

$$\begin{aligned} s_o = y_o, t_o = z_o \implies X(s_o, t_o) &= (1 - s_o - t_o, s_o, t_o) \\ &= ((1 - y_o - z_o), y_o, z_o) = (x_o, y_o, z_o) \end{aligned} \qquad \text{(E11)}$$

Siano $P = \{X(s,t) \in \mathbb{R}^3 \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2\}, \qquad P' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$

Allora,
(1) Per (E10), $P \subseteq P'$.
(2) Per (E11), $P' \subseteq P$
Quindi $P = P'$

In altre parole, l'equazione del piano che passa per $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ è

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$$

Proposizione: Sia $(a,b,c) \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R}$. Se $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ allora

$$ax + by + cz = d$$

è l'equazione di un piano in $\mathbb{R}^3$.

Esempio: Se $P = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 3\}$ allora

$$(0,3,-1),\ (6,0,-1),(5,-1,0) \in P$$

Usando questi tre punti su P, possiamo quindi trovare un'equazione parametrica per P.

$$X(s,t) = (6,-3,0)s + (5,-4,1)t + (0,3,-1)$$

In generale, si passa dall'equazione lineare di un piano alla sua forma parametrica semplicemente trovando tre punti non lineari sul piano.

Osservazione: La forma parametrica di un piano non è unica, come si vede riordinando i tre punti dati. La forma lineare di un piano è unica modulo moltiplicare l'equazione per uno scalare non nullo.

In particolare, un piano ha un'equazione

$$ax + by + cz = d$$

con $d = 0$ se e solo se il piano contiene $(0,0,0)$. Altrimenti, d è non-zero e può essere scalato per essere uguale a 1.

$\boxed{\text{L'equazione lineare di un piano che passa per 3 punti:}}$

Forse il modo più semplice per trovare l'equazione lineare

$$ax + by + cz = d$$

del piano che passa per $(x_0, y_0, z_0),\ (x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2)$ è semplicemente scrivere il sistema 3x3 di equazioni lineari

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + cz_0 &= d \\ ax_1 + by_1 + cz_1 &= d \\ ax_2 + by_1 + cz_1 &= d \end{aligned}$$

e risolvere per $\{a, b, c, d\}$.

Esempio: Trova l'equazione del piano che passa per $(0,3,-1),\ (6,0,-1),(5,-1,0)$.

Dobbiamo risolvere le equazioni: $\begin{cases} 3b - c = d \\ 6a - c = d \\ 5a - b = d \end{cases}$

sottraendo la prima equazione dalla seconda equazione si ottiene

$$6a - 3b = 0$$

Quindi, ponendo $a = 1$ e $b = 2$, si ottiene $5a - b = d = 3$. Infine, $3b - c = d \implies c = 3$.

L'equazione del piano è quindi $x + 2y + 3z = 3$, che concorda con l'esempio all'inizio della pagina.

L'intersezione di una linea con un piano:

Se il piano è dato dall'equazione lineare

$$ax + by + cz = d$$

e la retta è data nella forma parametrica

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

si risolve semplicemente l'equazione

$$ax(t) + by(t) + cz(t) = d \qquad \text{(E12)}$$

per t .

Naturalmente, è possibile che il piano e la linea siano paralleli, in tal caso l'equazione (E12) non avrà soluzioni.

Esempio: $P = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$

$X(t) = t(1, 0, -1)$

Allora, $1 = x(t) + y(t) + z(t) = (t) + (0) + (-t) = 0$

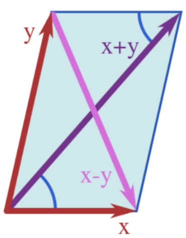
Quindi, il piano e la linea non si intersecano.

Esempio: $P = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$

$X(t) = t(6, 0, 0) - (0, 3, 2) = (6t, -3, -2) = (x(t), y(t), z(t))$

$1 = x(t) + y(t) + z(t) = 6t - 5 \implies s = 1 \implies r(t) = (6, -3, -2)$

Legge del parallelogramma



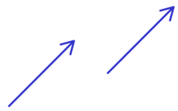
L'addizione e la sottrazione di vettori possono essere descritte geometricamente usando i lati di un parallelogramma come mostrato.

Geometricamente, la moltiplicazione di un vettore per uno scalare c corrisponde a moltiplicare la lunghezza del vettore per c mantenendo la sua direzione.

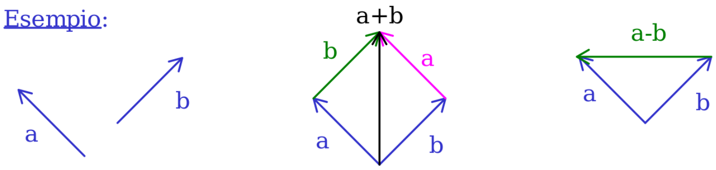
Se vogliamo pensare ai vettori come a frecce dirette in $\mathbb{R}^3$, allora siamo d'accordo nell'identificare due frecce che differiscono per un moto rigido (nessuna rotazione!).

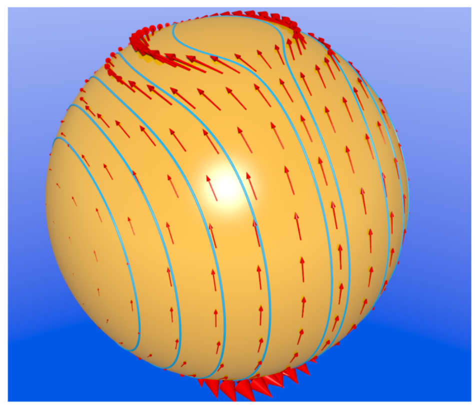
Possiamo poi sommare i vettori spostandoli in un "punto base" comune e usando la legge del parallelogramma.

Esempio: Questi vettori sono equivalenti perché hanno la stessa lunghezza e la stessa direzione:



Esempio:





Campi vettoriali:

In fisica, i campi vettoriali si presentano spesso come l'assegnazione di una "Forza" ad ogni punto di una regione dello spazio.

Questo viene visualizzato disegnando una freccia nei punti della regione.

Il campo vettoriale di Killing sulla sfera, chiamato così in onore di Wilhelm Killing.

Esempio: Fino a una costante, il campo vettoriale gravitazionale centrato in (0,0,0) è dato dalla formula:

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \mapsto \frac{(-x, -y, -z)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Sul lato sinistro di questa equazione, (x, y, z) è un punto. A destra, (x, y, z) è un vettore.