Lezione: Autovalori e Autovettori

Il problema di Fibonacci:

Supponiamo che:

(i) Iniziamo con un coniglio maschio e uno femmina.
(ii) I conigli sono in grado di accoppiarsi all'età di un mese.
Alla fine del secondo mese una femmina può produrre un'altra coppia di conigli.
(iii) I conigli non muoiono mai.
(iv) La femmina ne produce sempre una nuova coppia (un maschio, una femmina) ogni mese dal secondo in poi.

Quanti coppia conigli ci saranno doppo 6 mesi, 7 mesi, eccetera?

coppie:	$1 \longrightarrow$	$1 \longrightarrow$	$2 \longrightarrow$	$3 \longrightarrow$	$5 \longrightarrow$	$8 \longrightarrow$	$13 \longrightarrow$	$21 \longrightarrow$	$34 \longrightarrow \cdots$
mese:	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Osserviamo che: I numero di coppie ogni mese è uguale alla somma del numero di coppie dei due mesi precedenti

Nel linguaggio delle matrici:

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ C_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad C_n = \#\text{coppie dopo n mesi}$$

Quindi,

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} C_7 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Un problema più generale:

Sia A una matrice quadrata. Come calcolare la k-esima potenza di A?

(i) Caso più semplice: A è una matrice diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \tag{E1}$$

(ii) Prossimo caso: A è simile ad una matrice diagonale.

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1} \Longrightarrow A^k = B \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} B^{-1} \tag{E2}$$

Nota: Se A è simile ad una matrice diagonale via B, le colonne di B formano un base

$$\{b_1, \dots, b_n\} \tag{E3}$$

Tale che $Ab_j = \lambda_j b_j, \quad j = 1, \dots, n$.

Viceversa: Se che esiste un base $\{b_1, \dots, b_n\}$ tale che $Ab_j = \lambda_j b_j$ allora A è simile ad una matrice digaonale.

Domanda: Come trovare i numeri λ e vettore v tale che $Av = \lambda v$?

Nota: Poiché dobbiamo costruire un base, ci interesa solo trovare λ tale che esistano $v \neq 0$ soddisfacenti $Av = \lambda v$

Sia I la matrice identità. Allora, l'equazione $Av = \lambda v$ può essere riscritta come

$$Av = \lambda v \iff Av = \lambda I v \iff (A - \lambda I)v = 0 \tag{E4}$$

Quindi, se $v \neq 0$ allora $A - \lambda I$ è una matrice singolare, perciò

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{E5}$$

Viceversa: Se $\det(A - \lambda I) = 0$ allora esiste $v \neq 0$ tale che $Av = \lambda v$.
In altre parole, λ è una radice del polinomio caratteristico.

Torniamo al problema di Fibonacci:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \tag{E6}$$
$$\implies \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Quindi, $\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (numero aureo)

Sia $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1.6180...,$ $\qquad \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \sim -0.6180...$

$$Av = \lambda_1 v_1 \implies v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a meno di un multiplo scalare.}$$

$$Av = \lambda_2 v_2 \implies v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a meno di un multiplo scalare.}$$

Nota: A meno di un mulitiplo scalare

$$1, \lambda_1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \dots$$
$$1, \lambda_2, \lambda_2^2, \lambda_2^3, \dots$$

sono le uniche successioni che sono entrambi aritmetice e geometriche.

Dettagli:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + (\lambda - 1)R_2} \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{1 + (\lambda-1)(-\lambda)}^{\lambda^2 - \lambda - 1 = 0} \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

(continua, pagina successiva)

Se $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ allora $Av = \lambda v$ ha la stessa soluzione come

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a meno di un multiplo scalare} \tag{E7}$$

Sia $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dal teorema di cambiamento di base

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(facilmente verificabile via calcolo diretto)

Quindi,

$$A^n = B \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} B^{-1} \qquad B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Perciò,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ C_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} B \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} B \begin{pmatrix} \lambda_1^n (1 - \lambda_2) \\ \lambda_2^n (\lambda_1 - 1) \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} B \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ -(1 - \lambda_1)^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 - \lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ -(1 - \lambda_1)^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+2} - (1 - \lambda_1)^{n+2} \\ \lambda_1^{n+1} - (1 - \lambda_1)^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Riposta al problem di Fibonacci:

$$\#\ \text{coppie di conigli doppo n mesi} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^{n+1} - (1 - \phi)^{n+1}) \tag{E8}$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \text{numero aureo}$$

Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad a$: uno scalare

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & a \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

Quindi, dobbiamo avere $\lambda = 1$ se $A - \lambda I$ è singolare.

(continua, pagina successiva)

Però, $A - I = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ così $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione di $Av = v$ a meno di un multiplo scalare.

Ricordiamo, dobbiamo avere un base di soluzioni

$$Ab_j = \lambda_j b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

se A è simile a una matrice diagonale.

Quindi, A non è simile a una matrice diagonale.

Fortunatamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{E9}$$

Infatti, per induzione su n:

$$\begin{cases} n = 1 \implies \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Esempio: Siano A e B matrici commutative, cioè $AB = BA$. Allora,

$$(AB)^n = A^n B^n \tag{E10}$$

In particolare, se $A = \lambda I$ allora $AB = BA$ per ogni matrice B.

Siano $\lambda \neq 0$ e α scalari. Allora,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha/\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \tag{E11}$$

Quindi,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n\alpha/\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\alpha\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \tag{E12}$$

Lemma: Sia A una matrice 2×2 con polinomio caratteristico p_A. Allora,
(1) Se p_A ha due radici distinte λ_1 e λ_2 allora A è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(2) Se p_A ha una sola radice λ allora o A è la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ o A è simile a una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Attenzione: Il polinomio caratteristico è garantito solo avere radici sui numeri complessi. Quindi, potremmo essere costretti a usare vettori complessi anche quando lavoriamo con matrici reali.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies p_A(t) = \det(I - tA) = t^2 + 1 \implies t = \pm i$$

Per generalizzare questo Lemma, facciamo la seguente definizione:

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale e $L : V \to V$ una mappa lineare. Allora, uno scalare λ è un autovalore di L se (e solo se) esiste un vettore v non nullo tale che

$$L(v) = \lambda v$$

Un vettore v non nullo v tale che $Av = \lambda v$ è chiamato un autovettore di A con autovalore λ.

In particolare, se V è di dimensione finita, allora gli autovalori sono solo le radici del polinomio caratteristico di L.

Esempio: I problemi di autovettore e valore proprio si presentano spesso nelle scienze naturali attraverso equazioni che coinvolgono una funzione e le sue derivate (ad esempio le leggi del moto di Newton).

$$\frac{df}{dx} = \lambda f(x) \implies f(x) = Ce^{\lambda x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Nota: In generale, si possono trovare solo approssimazioni numeriche degli autovalori. Questa è una conseguenza del teorema di Abel-Ruffini che afferma che non è possibile risolvere un'equazione polinomiale generica (cioè coefficienti random) i grado 5 o superiore usando i radicali (radici quadrate, cubo, ecc.).

Nota: Trovare gli autovalori può essere difficile. Nel caso di dimensione finita, una volta che avete un autovalore potete trovare gli autovettori corrispondenti usando l'eliminazione gaussiana.

Il prossimo lemma fornisce un semplice criterio affinche' la matrice abbia una base di autovettori:

Lemma: Sia $A : V \to V$ una mappa lineare. Allora, qualsiasi insieme S di autovettori di A che hanno autovalori distinti è linearmente indipendente. In particolare, se V ha dimensione n e il polinomio caratteristico di A ha n radici distinte, allora A ha una base di autovettori.
Dimostrazione: Questa è una dimostrazione per induzione sul numero di elementi di S. Il risultato è vero se S consiste in un solo autovettore. Il caso chiave è quando S ha 2 elementi, quindi spiegheremo solo questo caso.

Supponiamo che

$$S = \{v_1, v_2\}, \qquad A(v_1) = \lambda_1 v_1, \qquad A(v_2) = \lambda_2 v_2, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

(continua, pagina seguente)

Allora,

$$c_1v_1 + c_2v_2 = 0 \implies \begin{cases} A(c_1v_1 + c_2v_2) = \lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 v_2 = 0 \\ \lambda_1(c_1v_1 + c_2v_2) = \lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_1 c_2 v_2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo, si ottiene

$$(\lambda_1 - \lambda_2)c_2v_2 = 0 \implies c_2 = 0$$

dato che sia $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ che v_2 sono non-zero. Poiché $v_1 \neq 0$

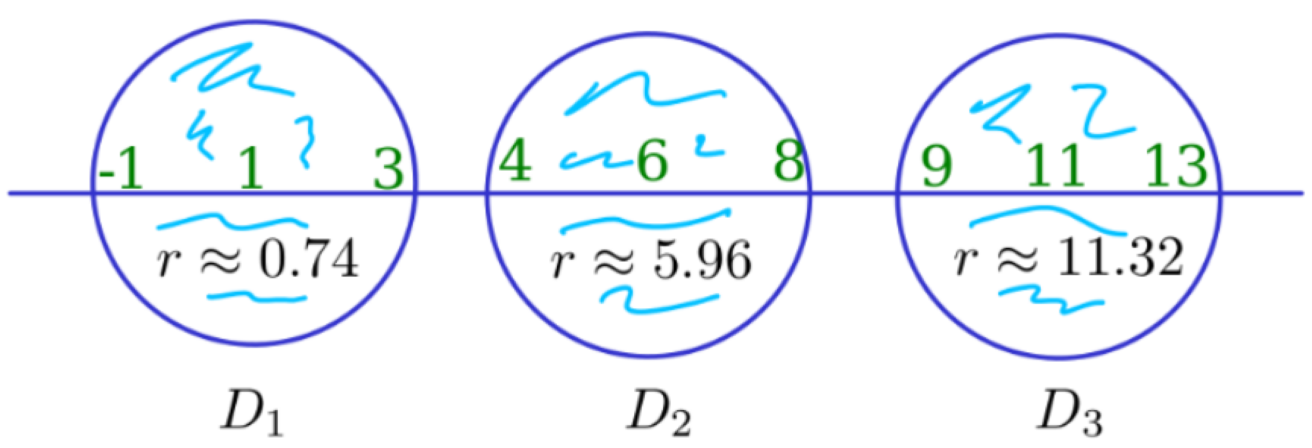
$$(c_1v_1 + c_2v_2 = 0, \quad c_2 = 0) \implies c_1v_1 = 0 \implies c_1 = 0$$

Quindi, $\{v_1, v_2\}$ è linearmente indipendente.

Come Volevasi Dimostrare

Esempio: Ricordiamo dalla lezione precedente che usando il metodo dei dischi di Gershgorin, abbiamo visto che il polinomio caratteristico di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$



ha tre radici distinte. Quindi, la matrice A ha una base di autovettori. Usando lo sviluppo di Laplace, troviamo che il polinomio caratteristico di A è

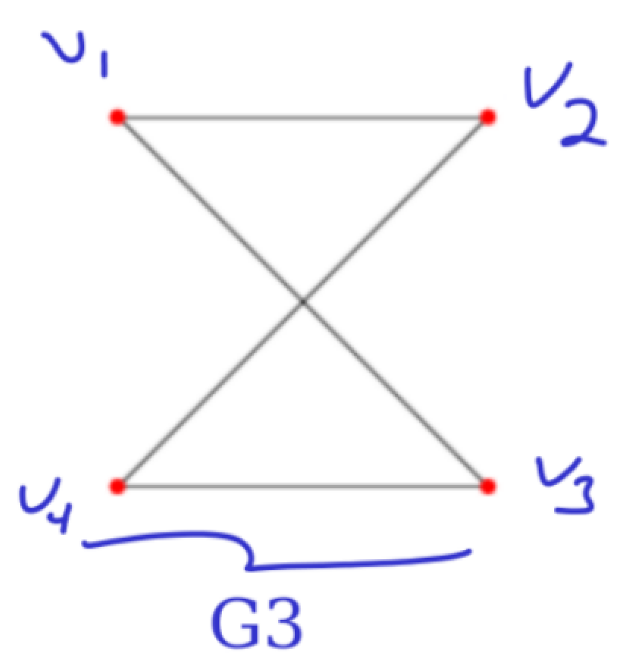
$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-6 & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix} = t^3 - 18t^2 + 80t - 50$$

Il risultante di $p_A(t)$ e $p_A'(t) = 3t^2 - 36t + 80$ è

$$R(p_A, p_A') = \begin{vmatrix} 1 & -18 & 80 & -50 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 80 & -50 \\ 3 & -36 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -36 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -36 & 80 \end{vmatrix} = -87700$$

il che implica anche che p_A ha radici distinte, e quindi A ha una base di autovettori.

Esempio:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & -1 & 0 \\ -1 & t & 0 & -1 \\ -1 & 0 & t & -1 \\ 0 & -1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2 - 4) \implies t = 2,\ t = -2,\ t = 0 \text{ (molteplicità 2)}$$

(continua, pagina seguente)

Gli autovettori di A sono

$$\lambda = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 0,\ v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 0,\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \lambda = -2,\ v_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

L'applicazione dell'eliminazione gaussiana a $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

dimostra che in questo caso, la matrice A ha una base di autovettori anche se p_A non ha 4 radici distinte.

<u>Definizione</u>: Sia λ un autovalore di una mappa lineare $L: V \to V$. Allora il λ autospazio di $L: V \to V$ è il sottospazio

$$E_\lambda(L) = \ker(L - \lambda I) = \{\, v \in V \mid L(v) = \lambda v\}$$

in altre parole, il λ autospazio di L è l'unione di tutti gli λ autovettori di L e il vettore zero.

<u>Esempio:</u> Tornando all'esempio precedente,

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \implies E_2(A) = \mathrm{span}(v_1), \qquad E_0(A) = \mathrm{span}(v_2, v_3), \qquad E_{-2}(A) = \mathrm{span}(v_4)$$

Similmente,

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \implies p_B(t) = (t-1)^2, \quad E_1(B) = \ker(I - B) = \ker\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{span}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

In particolare, per la matrice A la dimensione di ogni autospazio è uguale alla molteplicità dell'autovalore in polinomio caratteristico di A.

<u>Definizione:</u> Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $L: V \to V$ una mappa lineare. Se λ è un autovalore di L allora:
(i) La molteplicità algebrica di λ è la molteplicità di λ come radice di p_L (cioè il grado di $(t - \lambda)$ come fattore di $p_L(t)$).
(ii) La molteplicità geometrica di λ è la dimensione di $E_\lambda(L)$.
Lasciamo che $a_\lambda(L)$ denoti la molteplicità algebrica di λ e m_λ denoti la molteplicità geometrica di λ.

I nostri esempi precedenti possono essere generalizzati al seguente risultato:

<u>Teorema</u>: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $L: V \to V$ una mappa lineare. Allora, L ha una base di autovettori se e solo se $a_\lambda = m_\lambda$ per ogni autovalore di L.