Lezione: Sviluppo di Laplace & La formula di Cramer.

Torniamo alla formula per il determinante della lezione 15:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} e(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \qquad \text{(E1)}$$

Quando n=3, abbiamo

$$S_3 \begin{cases} \sigma_1 : 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 3, \quad e(\sigma_1) = 1 \\ \sigma_2 : 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 2, \quad e(\sigma_1) = -1 \\ \sigma_3 : 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 3, \quad e(\sigma_1) = -1 \\ \sigma_4 : 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1, \quad e(\sigma_1) = 1 \\ \sigma_5 : 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2, \quad e(\sigma_1) = 1 \\ \sigma_6 : 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 1, \quad e(\sigma_1) = -1 \end{cases} \qquad \text{(E2)}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad \text{(E3)} \end{aligned}$$

dove (lezione 15):

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Definizione: Sia A una matrice $n \times n$ con $n \geq 2$. Dato un paio di indici i e j con $1 \leq i, j \leq n$ il minore complementare C_{ij} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A rimuovendo la i -esima riga e la j-esima colonna.

Esempio: Se $A = (a_{ij})$ è una matrice 3×3 allora

$$C_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22} \quad a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32} \quad a_{33}} \end{pmatrix}, \qquad C_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}, \qquad C_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31} \quad a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix},$$

Quindi, l'equazione (E3) diventa

$$\det(A) = a_{11} \det(C_{11}) - a_{12} \det(C_{12}) + a_{13} \det(C_{13}) \qquad \text{(E4)}$$

Teorema (Sviluppo di Laplace): Sia A una matrice $n \times n$. Per ogni i fissato,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(C_{ij}) \qquad \text{(E5)}$$

Esempio (confronta con la lezione 15):

Calcolare utilizzando questa riga

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 9\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 9\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$
$$= (18-12) - (9-4) + (3-2) = 2$$

Fine

Ricorada che l'insieme di matrici $n \times n$ è un spazio vettoriale $M_{n\times n}$ di dimensione n^2 con base canonica

$$\{E_{ij} \mid 1 \le i,j \le n\}, \qquad E_{ij}(e_k) = \begin{cases} e_i & k=j \\ 0 & k \ne j\end{cases} \tag{E6}$$

dove $\{e_1,\dots,e_n\}$ è base canonica di $\mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n$). Quando $n=2$, abbiamo

$$E_{11} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad E_{12} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad E_{21} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad E_{22} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

In generale,

$$A = (a_{ij}) \iff A = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} \tag{E7}$$

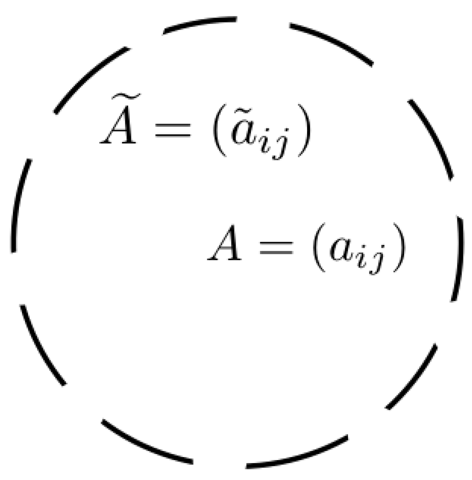
Quindi,

$$\det : M_{n\times n} \to \mathbb{R} \text{ (oppure } \mathbb{C}), \qquad \det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} e(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

è una funzione polinomiale dei coefficienti (a_{ij}) di A. Come tale, $\det$ è una funzione differenziabile dei coefficienti. Allora, $\det$ è una funzione continua dei coefficienti. In particolare,

$$\det(A) \ne 0 \implies \det(\widetilde{A}) \ne 0$$

per tutte le matrici $\widetilde{A}$ "vicino ad" A.



$\widetilde{A}$ vicino a A :

$$\sum_{i,j} (\tilde{a}_{ij} - a_{ij})^2 < \epsilon$$

Domanda: Se $\det(A) \ne 0$ è $\widetilde{A} \mapsto (\widetilde{A})^{-1}$ una funzione differenziabile dei coefficienti di $\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$?

Nota: Se la risposta è si, allora la soluzione

$$x = (\widetilde{A})^{-1}b$$

di $\widetilde{A}x = b$ è una funzione derivabile dei coefficienti di $\widetilde{A}$ e b per $\widetilde{A}$ vicino a A .

Teorema: Sia A una matrice invertible. Sia (come nello Sviluppo di Laplace)

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{E8}$$

la matrice ottenuta da A rimuovendo la i -esima riga e la j-esima colonna. Allora,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \det(C_{ji}) E_{ij} \tag{E9}$$

($\det(C_{ji})E_{ij}$ non è un errore)

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies C_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{22}), \qquad C_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{21})$$

$$C_{21} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{12}), \qquad C_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11})$$

Allora,

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Esempio: $$A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 1$$

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{12} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{13} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(C_{11}) = 1, \qquad \det(C_{12}) = 0 \qquad \det(C_{13}) = 0$$

$$C_{21} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{22} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{23} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(C_{21}) = x, \qquad \det(C_{22}) = 1 \qquad \det(C_{23}) = 0$$

$$C_{31} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{32} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{33} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(C_{31}) = xy - z, \qquad \det(C_{32}) = y \qquad \det(C_{33}) = 1$$

$$\implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xy - z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In particolare, poiché i minori complementari C_{ij} sono funzioni polinomiali dei coefficienti, ne consegue per (E9) che

$$\det(A) \neq 0 \implies \widetilde{A} \mapsto (\widetilde{A})^{-1}$$

è una funzione derivabile dei coefficienti di $\widetilde{A}$ per $\widetilde{A}$ vicino a A.

Definizione: Sia A una matrice quadrata. Allora $\mathrm{Cof}(A)$ è la matrice con coeifficienti

$$\mathrm{Cof}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(C_{ij}) \tag{E10}$$

dove C_{ij} è definito da (E9).

Con questa notazione, le equazioni (E5) e (E9) diventano

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{Cof}(A)_{ij}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\mathrm{Cof}(A))^t \tag{E11}$$

Queste formule sono più utili per i calcoli teorici. Come abbiamo visto, esse implicano che $A \mapsto A^{-1}$ è una funzione derivabile dei coefficienti.

Esempio: Sia A una matrice quadrata con coeifficienti interi. Allora A^{-1} è una matrice con coeifficient interi se e solo se $\det(A) = \pm 1$.

Osservazione Importante: Sia B una matrice quadrata con coefficienti interi. Allora, ogni termine del'equazione (E1) è un intero. Quindi $\det(B)$ è un intero.

Supponiamo che A e A^{-1} siano matrici con coeifficienti interi. Allora, $\det(A)$ e $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ sono interi. Quindi $\det(A) = \pm 1$.

Supponiamo che A sia una matrice quadrata con coeifficienti interi e $\det(A) = \pm 1$. Allora, ogni matrice C_{ij} ha coeifficienti interi. Quindi $\mathrm{Cof}(A)$ è una matrice con coeifficienti interi. Allora, A^{-1} è una matrice con coeifficienti interi per equazione (E11).

Esempio: Sia A una matrice $n \times n$ con coefficienti interi e $\det(A) = \pm 1$. Sia b un vettore in $\mathbb{R}^n$ con componenti intere. Allora, $x = A^{-1} b$ è un vettore con componenti intere.

Teorema (Regola di Cramer). Se $\det(A) \neq 0$ il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione x, data da

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}, \qquad \text{per ogni componente di } x \tag{E12}$$

dove B_i indica la matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di A con b.

Dimostrazione: Facendo uso dell'identità $\det(M^t) = \det(M)$ e dello Sviluppo di Laplace vediamo che

$$\det(B_i) = \det(B_i^t) = \sum_{j=1}^{n} (B_i^t)_{ij} \mathrm{Cof}(B_i^t)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathrm{Cof}(A^t)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathrm{Cof}(A)_{ji} \qquad \text{(E13)}$$

Allora, per l'equazione (E11)

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} b_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Cof}(A))^t_{ij} b_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cof}(A)_{ji} b_j = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

Come volevasi dimostrare. (La dimostrazione non si porta all'esame)

Anche la regola di Cramer è più utile per i calcoli teorici.

Esempio: Considera una sistema lineare della forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

Se $ad - bc \neq 0$ la regola di Cramer implica che

$$u_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} -\alpha & b & 0 & 0 \\ -\beta & d & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & a & b \\ -\delta & 0 & c & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}} = \frac{-(\alpha d - \beta b)(ad - bc)}{(ad - bc)^2} = -\frac{\alpha d - \beta b}{ad - bc}$$

Un problema tipico nel calcolo multivariabile è calcolare le derivata di z e w rispetto a x e y se x, y, z e w soddisfano le equazioni $f(x, y, z, w) = 0$ e $g(x, y, z, w) = 0$. Questo produce un sistema lineare della forma:

$$\begin{pmatrix} f_z & f_w & 0 & 0 \\ g_z & g_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_z & f_w \\ 0 & 0 & f_z & f_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ w_x \\ z_y \\ w_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_x \\ g_x \\ f_y \\ g_y \end{pmatrix}$$