Lezione: Mappe lineari come matrici.
Forme canoniche di matrici.

Matrice di una trasformazione lineare relativa a una base

Siano U e V spazi vettoriali di dimensione finita e sia $L : U \to V$ una mappa lineare.

Sia $B_U = \{u_1, \dots, u_m\}$ una base di U. Sia $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

Poiché B_V è una base di V, per ogni $1 \le j \le m$ possiamo scrivere

$$L(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n$$

dove la scelta dei coefficienti a_{ij} è unica.

Poiché B_U è una base di U, ogni elemento $u \in U$ può essere scritto

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m$$

dove la scelta dei coefficienti c_j è unica. Quindi,

$$L(u) = \sum_{j=1}^{m} c_j L(u_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_j a_{ij} v_i$$

In particolare, l'coefficienti di v_i in $L(u)$ è

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j$$

In altre parole, $L(u)$ può essere calcolato come il prodotto matriciale di $A = (a_{ij})$
e il vettore di coordinate c di u:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

In questo modo, ogni metodo che abbiamo sviluppato per studiare i sistemi lineari
può essere trasferito agli spazi vettoriali a dimensione finita, facendo una scelta di basi.

Si può pensare a una base come a un dizionario che traduce dallo spazio vettoriale a $\mathbb{R}^m$.

In particolare, se calcoliamo il kernel usando questo metodo, otteniamo un sottospazio di $\mathbb{R}^m$. Abbiamo poi bisogno di usare la base B_U per tradurre il risultato in U.

Allo stesso modo, se calcoliamo l'immagine usando questo metodo, il risultato è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Dobbiamo poi usare la base B_V per ritrasformare il risultato in V.
Risolvere le equazioni differenziali

.

Esempio: Sia n un numero intero non negativo. Allora, l'equazione differenziale (chiamata equazione differenziale di Legender)

$$(1-x^2)\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right)\right]-2x\frac{dp}{dx}+n(n+1)p(x)=0$$

ha una soluzione polinomiale di grado n.

Questa equazione può essere riscritta come segue:

$$L_n : P_n[x] \to P_n[x], \quad L_n(p)=(1-x^2)\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right)\right]-2x\frac{dp}{dx}+n(n+1)p(x)$$

è una mappa lineare, dove $P_n[x]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a n.

Stiamo cercando il kernel di L_n.

Per qualsiasi n particolare, possiamo trovare la soluzione usando l'eliminazione gaussiana.

Supponiamo $n=3$. Nel nostro caso $U=V=P_3[x]$. Per semplicità, selezioniamo la base: $\{1,x,x^2,x^3\}$

$$L_3(1)=12, \quad L_3(x)=10x, \quad L_3(x^2)=6x^2+2, \quad L_3(x^3)=6x$$

La matrice corrispondente è

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il kernel di questa matrice è $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \leftrightarrow \operatorname{span}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)$

I pivot di questa matrice si trovano nelle colonne 1, 2, 3, quindi l'immagine di L_3 è generata dai primi tre elementi della base $\{1,x,x^2,x^3\}$:

$$\operatorname{Im}(L_3)=\operatorname{span}(1,x,x^2)$$

Rango di una matrice o di una mappa lineare

Definizione: Siano U e V spazi vettoriali. Sia $L: U \to V$ una mappa lineare. Allora, il rango di L è uguale alla dimensione dell'immagine di L:

$$\operatorname{rk}(k)=\dim L(U)$$

Se A è una matrice nxm, il rango di A è definito come il rango della mappa lineare associata

$$L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad L_A(x)=Ax$$

Lemma: Se U e V sono spazi vettoriali di dimensione finita e $L : U \to V$ è una mappa lineare, allora il rango di L è uguale al rango di qualsiasi matrice A che rappresenta L.

Algoritmo per calcolare il rango di A:

Passo 1: Applicare l'eliminazione gaussiana ad A' per produrre una matrice scalini A'.
Passo 2: Il rango è il numero di pivot di A'.

Esempio:

(Lezione 9, pagina 1):

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rk}(A) = 3$$

(Lezione 9, pagina 2):

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rk}(A) = 2$$

Il rango di una matrice può essere calcolato in molti modi. Infatti i seguenti sono equivalenti:

(1) Il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.
(2) Il massimo numero di righe linearmente indipendenti.
(3) La dimensione del sottospazio generato $(= \operatorname{span})$ dalle colonne della matrice.
(4) La dimensione del sottospazio generato $(= \operatorname{span})$ dalle righe della matrice.
(5) Se A è una matrice $n \times m$: $\operatorname{rk}(A) = \dim A(\mathbb{R}^m)$
Dopo la nostra discussione sulle matrici invertibili
(6) Il massimo ordine di un minore invertibile di A.

Forma Echelon vs Forma Echelon Ridotta

Poiché questo non è un corso basato sulle dimostrazioni, non verificherò l'equivalenza di (1)-(6).

Invece, mostreremo che una matrice ha un'unica forma echelon ridotta

Algoritmo per trovare la forma echelon ridotta

Passo 1: Una matrice è in forma echelon se e solo se è una matrice scalini.

Per trasformare una matrice in forma echelon, applicare l'eliminazione gaussiana ad essa.

Passo 2: Avendo trasformato la matrice in forma echelon, possiamo semplificarla ulteriormente usando le operazioni di riga come segue:

(a) Riscala ogni pivot a 1.
(b) Se una colonna contiene un pivot, usate la riga corrispondente per eliminare tutte le voci sopra il pivot.

La definizione di forma echelon ridotta è solo una caratterizzazione dell'output di questo algoritmo:

Definizione: La matrice A è in forma echelon ridotta se:
(1) A è in forma row echelon (cioè A è una matrice scala).
(2) Ogni pivot di A è 1.
(3) Se una colonna di A contiene un pivot allora ogni altra voce in quella colonna è zero.

Esempio: Per ridurre il numero di passi, invece di applicare prima l'eliminazione gaussiana e poi semplificare la matrice risultante, non appena trovo un pivot, lo scalerò a 1 ed eliminerò tutte le voci rimanenti nella colonna (Questa modifica è chiamata metodo di Gauss-Jordan)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Equivalenti per righe

Definizione: Due matrici A, B si dicono equivalenti per righe se una si ottiene dall'altra usando le mosse di Gauss.

Teorema: Sia A una matrice. Allora, A è equivalente per righe esattamente a una matrice in forma echelon a righe ridotte, cioè la matrice ottenuta applicando ad A l'algoritmo descritto all'inizio della pagina.

.

Esempio: Le seguenti matrici sono equivalenti a righe?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow A,\ B \quad \text{equivalenti per righe}$$

$$C \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow C \quad \text{non è una riga equivalente ad } A \text{ o } B$$

Teorema del rango

Teorema del rango: Sia U uno spazio vettoriale a dimensione finita e $L : U \to V$ una mappa lineare. Quindi,

$$\dim \ker(L) + \operatorname{rk}(L) = \dim U$$

Nota: Solo la dimensione di U deve essere finita.

Esempio: $U = P_3[x],\ V = \mathbb{R}[x],\ L(p) = \dfrac{dp}{dx}$

Base per $P_3[x] = \{1, x, x^2, x^3\}$, $\quad \dim P_3[x] = 4$

$\ker(L) = \{\text{polinomi costanti}\} = \operatorname{span}(1), \quad \dim \ker(L) = 1$

Teorema del rango:

$$\dim \ker(L) + \operatorname{rk}(L) = \dim\ P_3[x] = 4 \implies \operatorname{rk}(L) = 3$$

Questo teorema è molto importante, perché significa che date (o avendo calcolato) due delle quantità

$$\dim \ker(L), \quad \operatorname{rk}(L) = \operatorname{Im}(K), \quad \dim U$$

allora si può calcolare l'altra.

Esempio: Sia $W = \{ A \in M_{n \times n} \mid tr(A) = 0\}$. Calcola la dimensione di W.

$$U = M_{n\times n}, \quad L : U \to \mathbb{R}, \quad L(A) = \operatorname{tr}(A)$$

$$W = \ker(L), \quad c \in \mathbb{R} \implies tr \begin{pmatrix} c/n & & \\ & \ddots & \\ & & c/n \end{pmatrix} = c \implies \operatorname{Im}(L) = \mathbb{R}$$

Teorema del rango

$$\dim W + \operatorname{rk}(K) = \dim M_{n\times} = n^2,\ \operatorname{rk}(L) = \dim\ \operatorname{Im}(L) = 1 \implies \dim W = n^2 - 1$$

Lemma A: Siano U e V spazi vettoriali a dimensione finita e $L : U \to V$ una mappa lineare. Se $L(U) = V$ allora

$$\dim U \geq \dim V$$

Dimostrazione:

$$\dim\ \ker(L) + \dim\ \mathrm{rk}(L) = \dim\ U$$

Per ipotesi,

$$L(U) = V \implies \mathrm{rk}(L) = \dim\ \mathrm{Im}(L) = \dim\ V$$

Così,

$$\dim\ \ker(L) + \dim\ V = \dim U$$

Poiché $\dim\ \ker(L) \geq 0$ segue che

$$\dim\ U = \dim\ V + \dim\ \ker(L) \geq \dim\ V$$

Come Volevasi Dimostrare.

Lemma B: Siano U e V spazi vettorial a dimensione finita e $L : U \to V$ una mappa lineare. Se $\ker(L) = 0$ allora

$$\dim U \leq \dim V$$

Dimostrazione: Poiché $\mathrm{Im}(L)$ è un sottospazio di V: $\dim\ \mathrm{Im}(L) \leq \dim\ V$

Per il teorema del rango

$$\dim \ker(L) + \dim\ \mathrm{Im}(L) = \dim(U)$$

Per ipotesi, $\ker(L) = 0$. Quindi,

$$\dim U = \dim\ \mathrm{Im}(L) \leq \dim V$$

Come Volevasi Dimostrare

Corollario: Se U e V sono spazi vettoriali di dimensione finita tale che $\dim U > \dim V$ e $L : U \to V$ è una mappa lineare, allora $\ker(L) \neq 0$.

Dimostrazione: Ricorda che

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q) \implies (\neg P)$$

Sia P la proposizione $\ker(L) = 0$. Sia Q la proposizione $\dim\ U \leq \dim\ V$

Qual è il significato di $\ker(L) = 0$?

Ricordiamo che una funzione $f : A \to B$ si dice iniettiva se $f(a) = f(a') \iff a = a'$

Lemma: Siano U e V spazi vettoriali. Allora, una mappe lineare $L : U \to V$ è iniettiva se e solo se $\ker(L) = 0$.

Dimostrazione:

(a) Supponiamo che L sia iniettivo: L è una mappa lineare $\implies L(0) = 0$.
Per definizione, se $u \in \ker(L)$ allora $L(u) = 0$
Poiché L è iniettivo e $L(0) = 0$ segue che $L(u) = 0$ implica $u = 0$.
In altre parole: $\ker(L) = \{0\}$

(b) Supponiamo che $\ker(L) = \{0\}$: Assumiamo che $L(a) = L(a')$. Allora, $L(a - a') = 0$.
In altre parole, $a - a' \in \ker(L) = \{0\}$. Così $a = a'$, cioè L è iniettivo.

Come Volevasi Dimostrare.

Come dimostrare il teorema del rango?

Passo 1: Se M è in forma echelon ridotta il teorema è ovvio:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché M è in forma echelon ridotto, ogni colonna pivot di M contiene esattamente una voce diversa da zero. Quindi, le colonne non-pivot di M sono combinazioni lineari di colonne pivot di M. Di conseguenza, $\mathrm{Im}(M)$ è lo span lineare delle colonne pivot di M.

Per costruzione, le colonne pivot sono linearmente indipendenti. Quindi, le colonne pivot sono una base per $\mathrm{Im}(M)$.

Come abbiamo discusso, le colonne non pivot per M corrispondono alle variabili indipendenti utilizzate per costruire una base per lo spazio nullo di M.

Talmente, per una matrice in forma echelon ridotta, il teorema del rango è un modo elegante per dire:

(numero di colonne pivot) + (numero di colonne non pivot) = (numero di colonne)

Passo 2: Ricordiamo dalla nostra discussione sull'equivalenza di riga che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo esempio illustra due fatti generali:
(a) Le operazioni sulle righe possono cambiare lo span lineare delle colonne.
(La terza voce di qualsiasi combinazione lineare di colonne di M è zero, il che non è vero per le colonne di A.)
(b) Le operazioni sulle righe non modificano le relazioni tra le colonne della matrice.
(Per entrambe le matrici, il doppio della prima colonna più 5 volte la seconda colonna è uguale alla terza colonna.)

Notazione: Se A è una matrice con forma echelon ridotta M, diciamo che una colonna c di A è una colonna base di A se la corrispondente colonna di M è una colonna pivot. Chiamiamo le colonne rimanenti di A le colonne non di base.

Per la parte (b), le colonne di base di A sono una base dello spazio delle colonne di A.

Ecco come funziona l'algoritmo per calcolare una base dello spazio delle colonne.