Lezione 14: Matrice inversa, matrici simili

Ricordiamo il seguente.

(I) Siano R e S insieme finiti con lo stesso numero di elementi, e

$$f : R \to S$$

una funzione. Allora, i seguenti sono equivalenti:
(1) f è iniettiva.
(2) f è suriettiva.
(3) f è biunivoca.
(4) Esiste una funzione inversa $g : S \to R$ tale che

$$(g \circ f)(r) = r, \qquad (g \circ f)(s) = s$$

per tutti $r \in R,\ s \in S$. La funzione inversa è unica ed è indicata f^{-1}.

(II) Siano U e V spazi vettoriali a dimensione finita con la stessa dimensione, e

$$L : U \to V$$

un'applicazione. Allora, i seguenti sono equivalenti:
(1) L è iniettiva.
(2) L è suriettiva.
(3) L è biunivoca (oppure L è un isomorfismo).
(4) Esiste un'unica applicazione inversa $T : V \to U$ tale che

(5) rango(L) = dim U = dim V

$$(T \circ L)(u) = u, \qquad (L \circ T)(v) = v$$

per tutti $u \in U,\ v \in V$. La funzione inversa è unica ed è indicata L^{-1}.

Definizione: La matrice identita $n \times n$ I_n è la matrice con coefficiente (i, j) 1 se i=j e 0 altrimenti, i.e.:

$$I_n = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n}\right\} n$$

In particolare, la matrice della funzione identita $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ è I_n.
Parimenti, se U ha dimensione n, per qualsiasi scelta di base di U, la matrice della applicazione identica di U è I_n.

(I) Ricorda che se $f, g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ sono funzioni iniettive con rispettive matrici A, B allora AB è la matrice della funzione composta f(g). In particolare, se f e g sono funzioni inversa allora

$$AB = I_n \qquad \text{(E1)}$$

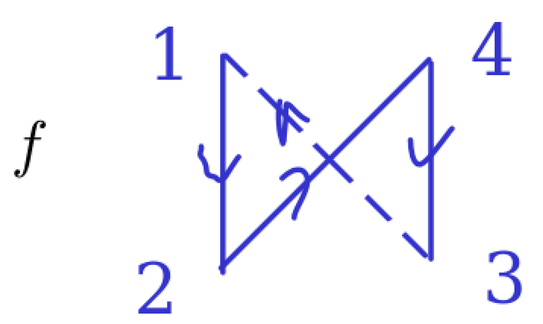
<u>Esempio</u>: Sia n=4,

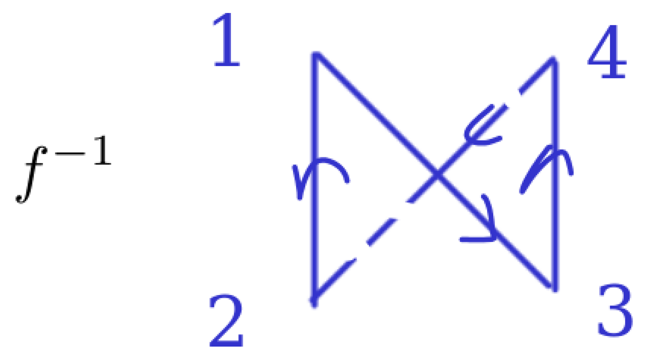
$$f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 1, \quad f(4) = 3$$

Quindi

$$f^{-1}(1) = 3, \quad f^{-1}(2) = 1, \quad f^{-1}(3) = 4, \quad f^{-1}(4) = 2$$

Un diagramma di f e f^{-1}. La matrice di f e f^{-1}.





$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di f La matrice di f^{-1}

<u>Nota</u>: Poiché $f(a) = b \iff f^{-1}(a) = b$ la matrice di f^{-1} è la trasposta A^t della matrice A di f :

$$A = (a_{ij}) \implies A^T = (\alpha_{ij}), \qquad \alpha_{ij} = a_{ji}$$

In generale, diciamo che una matrice A $n \times n$ è <u>ortogonale</u> se e solo se

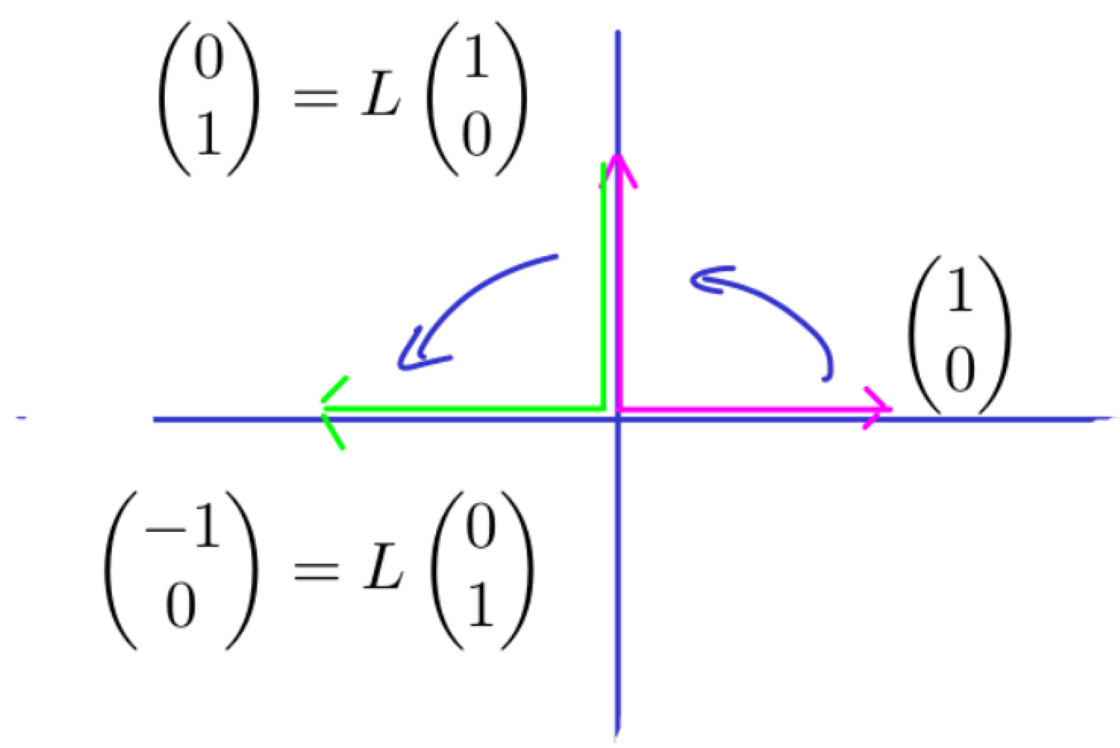
$$AA^t = I_n \qquad \text{(E2)}$$

(II) Siano U e V spazi vettoriali di dimensione n, e $L : U \to V$ un'applicazione con inversa $L^{-1} : V \to U$. Sia $\mathbf{B_U}$ una base di U e $\mathbf{B_V}$ una base di V. Sia A la matrice di L rispetto a $\mathbf{B_U}$ e $\mathbf{B_V}$. Sia B la matrice di L^{-1} rispetto a $\mathbf{B_V}$ e $\mathbf{B_U}$. Allora

$$AB = I_n \qquad \text{(E3)}$$

<u>Esempio</u>: Rotazione di $\pi/2$ radianti intorno all'origine in senso antiorario:

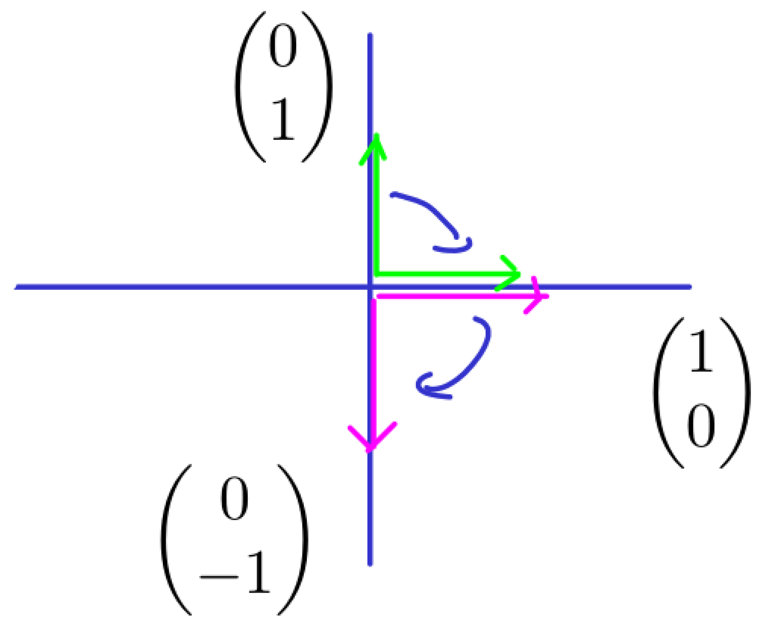
$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



La matrice di L è (per la base canonica di $\mathbb{R}^2$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotazione di $\pi/2$ radianti intorno all'origine in senso orario è la inversa di L :



$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: A è ortogonale.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione: Se A e B sono matrici $n \times n$ tali che $AB = I_n$, diciamo che B è la matrice inversa di A.

Una matrice A $n \times n$ ha una inversa se e sole se A ha rango n. Se una matrice A ha una inversa, essa è unica e denotata A^{-1}.

Nota: Se A e B sono matrici $n \times n$ tali che $AB = I_n$ allora $BA = I_n$. Lo assumeremo senza dimostrazione.

Matrici 2x2: Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0$$

Allora,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{(E4)}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Questa matrice non è ortogonale.

Procedura per trovare la matrice inversa in generale: Sia A una matrice $n \times n$.
Forma la matrice augmentata (A | I_n). Applicare le "Mosse di Gauss" ridurre A alla matrica identica:

$$(A \,|\, I_n) \xrightarrow{\text{Mosse di Gauss}} (I_n \,|\, A^{-1})$$

Pagina 3.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{E5}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4}\right) \xrightarrow{r_2=r_2+r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3=r_3+r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4=r_4+r_3} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4}\right) \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2=r_2+2r_1,\, r_3=r_3-r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2=r_2+2r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(Continua)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 = -r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 = r_2 + r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 = r_3 + r_4} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Cambio di base: Supponiamo di avere trovato la matrice A di una mappa lineare

$$L : U \to U$$

relativa la base B. Supporre che dobbiamo sapere la matrice relative un'altra base B'. Potremmo trovare la matrice di L relative B' a partire da zero.

Alternativamente potremmo trovare una matrice P "traduzione" dalla base B' alla base B. Allora, la matrice A' di L relatva a B' sarà

$$A' = P^{-1}AP, \quad i.e. \quad [L]_{B'} = P^{-1}[L]_B\, P \qquad \text{(E6)}$$

Per trovare la matrice P, siano

$$B = \{u_1, \ldots, u_n\}, \qquad B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

Allora

$$P = (p_{ij}), \qquad v_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} u_j \qquad \text{(E7)}$$

in altre parole, la i-esima colonna di P è il vettore coordinate di v_i relativo a B.

Esempio: Sia U lo spazio vettoriale di polinomi grado minore o uguale a 3 nella variable x. Sia L = d/dx su U. La matrice di L relativa $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di L relativa a $B' = \{1 - x, x - x^2, x^2 - x^3, x^3\}$ è

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice P di cambio di basi da B' a B è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dall'equazione (E5) per l'inversa di P. Vediamo che:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A'$$

Esempio: Sia U lo spazio vettoriale di polinomi di grado minore o uguale 3 nella variable x. Sia (L(f))(x) = f(-x) su U. La matrice di L relativa a $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice di L relativa a $B' = \{1 + x^2, x + x^3, 1 - x^2, x - x^3\}$ è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: Entrambe basi B e B' hanno la stessa simmetria relativa a L. Questo spiega perché A e A' sono ugauli.

(Continua)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies P^2 = 2I_4 \implies P^{-1} = \frac{1}{2}P$$

Allora

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A'$$

Fine Esempio.

Matrici Simili.

Definizione: Due matrici quadrate A e A' sono simili quando esiste una matrice P invertible tali che

$$A' = M^{-1}AM$$

Fine definizione.

Per equazione (E6), due matrici A e A' che rappresentano la stessa applicazione L sono simili. Viceversa, due matrici A e A' sono simili solo se esiste un applicazione L e basi B, B' tali che

$$A' = [L]_{B'}, \qquad A = [L]_B$$

In particolare, matrici simili condividere le seguenti proprietà
(i) Rango
(ii) Determinante.
(iii) Autovalori.
(iv) Polinomio caratteristico.
(v) Forma canonica di Jordan (Non discusso in questo corso).

Commenti finali: Con calcolo diretto,

(1) Siano A e B matrici invertibili. Allora

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(2) Siano A e P matrici $n \times n$ con P invertibile. Allora,

$$(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$$