Isomorfismo

Definizione: Un isomorfismo tra due spazi vettoriali è una trasformazione biunivoca che sia anche lineare. Gli spazi vettoriali U e V si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo da U a V.

Esempi:

(a) $L : \mathbb{R}^{n+1} \to P_n[x], \qquad L(a_0, \ldots, a_n) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$

(b) $L : M_{n\times n} \to \mathbb{R}^{nm}, \quad L(E_{ij}) = e_{m(i-1)+j}$

E_{ij} è la matrice in cui ogni voce è zero, tranne la voce (i, j) che è 1.
$\{e_1, \ldots, e_{nm}\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^{nm}$

(c) Sia una $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutazione. Allora,

$$L_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad L_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

è un isomorfismo che semplicemente riordina le voci del vettore.

(d) Sia $S = \{1, \ldots, n\}$. Allora,

$$L : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^n, \quad L(a) = (a(1), a(2), \ldots, a(n))$$

è un isomorfismo.

Teorema: Sia U e V spazi vettoriali di dimensione finita. Allora U e V sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

Dimonstrazione:

(a) Sia $L : U \to V$ un isomorphismo. Poiché $L(U) = V$ segue dal Lemma A a pagina 6 che

$$\dim U \geq \dim V$$

Poiché L è iniettivo, segue dal Lemma B a pagina 6 che

$$\dim U \leq V$$

Quindi $\dim U = \dim V$.

(b) Supponiamo che $\dim U = \dim V < \infty$ e che $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ sia una base di U e $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sia una base di V. Sia $L : U \to V$ la mappa lineare definita dalla regola

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n \implies L(u) = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

(questo è ben definito poiché ogni $u \in U$ ha una rappresentazione unica della forma $u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$).

(i) L è surjettiva: Poiché C è una base di V, ogni $v \in V$ può essere scritto come $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Quindi $L(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n) = v$.

(ii) L è iniettiva:

$$L(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n) = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0 \implies a_1 = \cdots = a_n = 0$$

poiché C è una base di V.

Prodotto di spazi vettoriali

Lemma: Siano U e V spazi vettoriali. Allora il prodotto cartesiano $U \times V$ è uno spazio vettoriale rispetto alle seguenti operazioni:

(a) $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$

(b) $c(u, v) = (cu, cv)$

Dimonstrazione: Esercizio per lo studente.

Esempio: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{n+m}$ via la mappa lineare

$$L((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m)) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

Lo spazio vettoriale $U \times V$ è chiamato il prodotto diretto di U e V.

Chiaramente,

$$\dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \dim(\mathbb{R}^{n+m}) = n + m = \dim(\mathbb{R}^n) + \dim(\mathbb{R}^m)$$

Lo stesso vale per qualsiasi coppia di spazi vettoriali di dimensione finita

$$\dim U \times V = \dim U + \dim V$$

Esercizio: Verificare che $\dim U \times V = \dim U + \dim V$

In relazione a questo esercizio, notiamo che abbiamo le seguenti mappe lineari utili:

$$\begin{aligned} i_U &: U \to U \times V, \quad i_U(u) = (u, 0), \\ i_V &: V \to U \times V, \quad i_V(v) = (0, v), \\ \pi_U &: U \times V \to U, \quad \pi_U(u, v) = u, \\ \pi_V &: U \times V \to V, \quad \pi_V(u, v) = v, \end{aligned}$$

La mappa i_U (risp. i_V) si chiama inclusione di U (risp. V) in $U \times V$. Si possono usare per costruire una base di $U \times V$ da una base di U e una base di V. La mappa π_U (risp. π_V) si chiama proiezione da $U \times V$ (risp. V).

La somma di sottospazi

Siano U e W due sottospazi di V. Indicando con $U + W$ il sottospazio somma di U e W dato da:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$$

Ovviamente abbiamo una mappa lineare suriettiva

$$L : U \times W \to U + W, \quad L(u, w) = u + w \qquad \text{(E1)}$$

Algoritmo per trovare una base di U+W:

Per i sottospazi di $\mathbb{R}^n$, l'equazione (E1) fornisce un metodo semplice per trovare una base di $U + W$. Sia B_U (risp. B_W) un insieme di vettori colonna che formano una base di U (risp. W). Sia M la matrice le cui colonne sono costituite dalle colonne di B_U e B_W. Allora, $U + W$ è l'immagine di M, quindi applichiamo semplicemente l'algoritmo per trovare una base dello spazio delle colonne alla matrice M.

(identificando $\mathbb{R}^3$ con vettori colonna tridimensionali per risparmiare spazio)

Esempio: $U = \text{span}((1,1,1),(1,2,4)), \quad W = \text{span}((1,3,9),(1,4,16))$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$ è una base di $U+W$

$U = \text{span}((1,1,1,0),(1,1,0,1)), \qquad W = \text{span}((0,0,1,1),(1,1,1,1))$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ è una base di $U+W$

Formula di Grassmann:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Per verificare la formula di Grassmann, usiamo la mappa lineare (E1) e il teorema del rango

$$\dim \ker(L) + \dim \text{Im}(L) = \dim U \times W = \dim U + \dim W$$

Poiché L è una mappa lineare suriettiva, questa equazione diventa

$$\dim \ker(L) + \dim(U+W) = \dim U + \dim W$$

Infine,

$$(u,w) \in \ker L \iff u + w = 0 \iff u = -w$$

$\in U \quad \in W \quad \Rightarrow \quad u \in U \cap W$

Di conseguenza, u (e quindi w) sono elementi di $U \cap W$. Viceversa, se $u \in U \cap W$ allora

(i) $(u,-u) \in U \times W$

(ii) $(u,-u) \in \ker(L)$

Quindi, $\ker(L)$ è isomorfo a $U \cap W$ via la mappe lineare

$$u \in U \cap W \mapsto (u,-u) \in \ker(L)$$

Così,

$$\dim(U \cap W) + \dim(U+W) = \dim U + \dim W$$

Esempio: Tornando all'esempio precedente, abbiamo

(a) $U = \text{span}((1,1,1),(1,2,4)), \quad W = \text{span}((1,3,9),(1,4,16))$

$$\implies \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1$$

(b) $U = \text{span}((1,1,1,0),(1,1,0,1)), \qquad W = \text{span}((0,0,1,1),(1,1,1,1))$

$$\implies \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1$$

Nota: Nella parte (a), U e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$, quindi $\dim(U+W) = 3$ implica che $U+W$ è $\mathbb{R}^3$. Nella parte (b), $U+W$ è un sottospazio a 3 dimensioni di $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{Algoritmo per trovare una base di } U \cap W}$

Se U è il kernel di una matrice A $\ell \times m$ e W è il kernel di una matrice B $n \times m$ allora $U \cap W$ è il kernel della matrice ottenuta dall'unione delle righe di A e B.

Esempio: $U = \ker\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\right)$, $\quad W = \ker\left(\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\end{pmatrix}\right)$

$$U \cap W = \ker\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Algoritmo di Zassenhaus}}$

Input: $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base di vettori riga per un sottospazio U di $\mathbb{R}^m$

$B_W = \{w_1, \dots, w_\ell\}$ una base di vettori riga per un sottospazio W di $\mathbb{R}^m$

Sia $M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & m \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} B_U & B_U \\ \hline B_W & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \} n \\ \} \ell \end{array}$ una matrice a blocchi.

Applicare l'eliminazione gaussiana a M:

$$\left(\begin{array}{c|c} B_U & B_U \\ \hline B_W & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} C & E \\ \hline 0 & D \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

C una base di $U + W$

D una base di $U \cap W$

Questa parte potrebbe non apparire

Esempio: $B_U = \{(1,1,1),\ (1,2,4)\}$, $\quad B_W = \{(1,3,9), (1,4,16)\}$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4\\ \hline 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 & -7\\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

C

D

Per verificare che $\begin{pmatrix}2 & 5 & 11\end{pmatrix}$ è un elemento di $U \cap W$, risolviamo i sistemi lineari

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 4 & 11 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = 3,\ x_1 = -1 \qquad -\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\11\end{pmatrix} \checkmark$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\\ 9 & 16 & 11 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = -1,\ x_1 = 3 \qquad 3\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\11\end{pmatrix} \checkmark$$

Nota Importante: Questo algoritmo utilizza una base di vettori di riga.
Per verificare la risposta usando l'eliminazione gaussiana, dobbiamo riscrivere il problema usando i vettori colonna.

(continua, pagina successiva)

In precedenza (due pagine indietro), abbiamo trovato una base per $U+W$ usando i vettori colonna.

L'algoritmo di Zassenhaus produce una base di vettori di riga semplicemente elencando tutte le righe della base per U e W in una matrice e poi applicando l'eliminazione gaussiana per produrre una base per lo spazio di riga.

Per vedere che questi due metodi producono soluzioni equivalenti, dovremo semplicemente controllare che possiamo scrivere ogni elemento di una base in termini dell'altra base.

In teoria, questo richiede di risolvere essenzialmente lo stesso sistema lineare molte volte. Tuttavia, possiamo risparmiare tempo facendo le cose in parallelo aumentando il numero di colonne della matrice aumentata:

Passo 1: Trasformare una base di vettori riga in una base di vettori colonna:

$$B_{U+W} = \{(1,1,1),(0,1,3),(0,0,2)\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$$

Passo 2: Scrivere in "parallelo" le matrici aumentate:

Altra base per $U+W$: $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} \right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

Passo 3: Applicare l'eliminazione gaussiana in "parallelo"

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Si potrebbe dividere per 2 per ottenere questo (0 0 1 0 0 1)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$