**Matematica Discreta**

**Compito 6**

1.) In $\mathbb{R}^5$ consideriamo i due sottospazi $V$ e $W$, dove $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

e $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid 3x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 0, \quad 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$, e il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a.)Trovare una base di $V$ e di $W$. b.) Stabilire se $\vec{u} \in V$ e se $\vec{u} \in W$.

2.) Stabilire se gli insiemi ordinati di vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.

a.) $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ b.) $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ c.) $(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

3.) Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare dato da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_4 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 \\ x_2 - x_1 + 2x_3 - 3x_4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$.

a.) Trovare una base di $Ker(F)$ e di $Im(F)$. b.) Stabilire se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in Im(F)$.

4.) Dimostare che $b$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e trovare il vettore delle coordinate di $\vec{x}$ rispetto alla base $b$, dove

a.) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$ e $b = (\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix})$ b.) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $b = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix})$

5.) Dimostare che $b$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e trovare il vettore delle coordinate di $\vec{x}$ rispetto alla base $b$, dove

a.) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $b = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ b.) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ e $b = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

6.) Sia $V$ lo sottospazio di $\mathbb{R}^3$ con base $b = (\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$. Sia $\vec{x} \in V$ con $[\vec{x}]_b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Trovare $\vec{x}$.

7.) Consideriamo l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato dalla matrice $A$. Trovare la matrice di $T$ rispetto alla base $b$.

a.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $b = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ b.) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ e $b = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix})$

8.) Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Viene dato che la matrice di $T$ rispetto alla base $b = (\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix})$ è $[T]_b^b = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$. Trovare la matrice di $T$ rispetto alla base naturale (cioè la matrice $[T]_e^e$, dove $e$ è la base naturale).

9.) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rifesione nel piano $x + 2y + 3z = 0$. Trovare la matrice di $T$ rispetto alla base naturale.

10.) Trovare una base $b$ di $\mathbb{R}^2$, se esiste, tale che $[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}]_b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

11.) Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$, e sia $e$ la base natuarale di $\mathbb{R}^2$. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare dato dalla matrice $[T]_e^e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Siano $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$.

Dimostare che $b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e trovare la matrice di $T$ rispetto alla base $b$.

*Buon divertimento!*