Nome: ______________________________ Matricola: ______________

Matematica Discreta

Esame del 22-06-2011

Esercizio 1. (6 pt)
Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare, e la base naturale e b la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ dove F è data dalla matrice $[F]_e^e = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 6 & -8 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$ e calcolare $[F]_b^b$.

Esercizio 2. (2 pt)
Calcolare la distanza tra il piano $\pi_1 : 3x - 4y + 5z = 1$ e il piano $\pi_2 : 8y - 10z - 6x + 42 = 0$.

Esercizio 3. (5 pt)
Risolvere in $\mathbb{Z}$ il sistema dato da $\begin{cases} x \equiv -567 \pmod{59} \\ x \equiv 987 \pmod{61} \\ 27x \equiv 16 \pmod{65} \end{cases}$.

Esercizio 4. (5 pt)
Consideriamo la ricorrenza $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2} + 3n - 15$, per $n \geq 2$.
a.) Dimostrare che $a_n = 1 - \frac{1}{3}n$, $n \geq 0$, è una soluzione della ricorrenza.
b.) Trovare tutte le soluzioni della ricorrenza.
c.) Trovare la soluzione con $a_0 = 2$ e $a_1 = 2$, e calcolare a_0, a_1, a_2 e a_3 usando la ricorrenza e la risposta.

Esercizio 5. (4 pt)
Quanti bit string di lunghezza 41 ci sono tale che
a.) il bit string ha almeno ventisette 0 e almeno tredici 1, oltre si deve avere che il bit string corrispondente alle prime venti posizione contiene esattamente tredici 0 e il bit string corrispondente alle ultimi sedici posizioni contiene al massimo quattro 1.
b.) il bit string corrispondente alle prime dieci posizioni ha esattamente sei 0 e il bit string corrispondente alle ultime ventuno posizioni contiene lo string 100110 come sotto-string.

Esercizio 6. (2 pt)
Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data dalla rotazione di angolo $\frac{1}{2}\pi$ in senso anti-orario e sia $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data dalla riflessione rispetto alla retta $x + 3y = 0$. Esiste un riflessione $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $T^{-1} \circ S \circ T = R$? In caso di si trovare l'equazione parametrica della retta corrispondente a R.

Esercizio 7. (4 pt)
a.) Quanti $x \in \mathbb{Z}$ con $23132123132 \leq x \leq 60000000000$ si può fare usando le cifre di 22333567000 tale che x è pari e contiene 007 come sotto espressione.
b.) Quante soluzioni ci sono dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 700$, dove $x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{Z}$ e $x_1, \ldots, x_7 \geq 0$, con $x_2 \geq 11$, $50 \leq x_3 \leq 90$, $90 \leq x_5 \leq 123$, $x_1 + x_7 = 100$ e $x_3 < x_5$?

Esercizio 8. (2 pt)
8.1 Il numero $(111122220000333300004444000033330000222211111)_9$ è
(a) divisibile per 17 ma non per 32.
(b) divisibile per 32 ma non per 17.
(c) divisibile per 17 e per 32.
(d) divisibile nè per 17 e nè per 32.

8.2. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ il vettore $\vec{v} = \binom{1}{-2}$. Le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base $b = (\binom{1}{2}, \binom{3}{4})$ sono:

(a) $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$ (b) $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$ (c) $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d) $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5 ,6 e 7 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 8, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorrettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.