(1) $2^{11}-1 = 2047$ $\quad \sqrt{2047} < 46$: $\cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{11}, \cancel{13}, \cancel{17}, \cancel{19}, \underline{23}$ $\quad 2047 = 23 \cdot 89$

$\sqrt{89} < 10$ quindi 89 è primo. Quindi $2047 = 23 \cdot 89$

$$(2^{24}-1) = (2^{12}+1)(2^{12}-1) = (2^4+1)(2^8-2^4+1)(2^6+1)(2^6-1)$$
$$= (2^4+1)(2^8-2^4+1)(2^2+1)(2^4-2^2+1)(2^3+1)(2^3-1)$$
$$= (2^4+1)(2^8-2^4+1)(2^2+1)(2^4-2^2+1)(2+1)(2^2-2+1)\cdot(2-1)\cdot(2^2+2+1)$$
$$= 17 \cdot 241 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 7$$

i numeri 3, 5, 7, 13, 17 sono primi ben noti.

241 : $\sqrt{241} < 16$ $\quad \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{11}, \cancel{13}$ quindi 241 è primo.

Perciò $(2^{24}-1) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241$

(2) 569 $\quad \sqrt{569} < 24$ $\quad \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{11}, \cancel{13}, \cancel{17}, \cancel{19}, \cancel{23}$ $\quad$ 569 è primo.

106381 $\quad \sqrt{106381} < 327$ $\quad \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}, 11$ $\quad 106381 = 11 \cdot 9671$.

$\sqrt{9671} < 99$ $\quad \cancel{11}, \cancel{13}, \cancel{17}, 19$ $\quad 9671 = 19 \cdot 509$

$\sqrt{509} < 23$ $\quad \cancel{19}$, $\quad$ 509 è primo $\quad$ Quindi $11 \cdot 19 \cdot 509$

254609 $\quad \sqrt{254609} < 505$ $\quad \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{11}, \cancel{13}, 17$ $\quad 254609 = 17 \cdot 14977$

$\sqrt{14977} < 123$ $\quad 17$ $\quad 14977 = 17 \cdot 881$

$\sqrt{881} < 30$ $\quad \cancel{17}, \cancel{19}, \cancel{23}, \cancel{29}$ $\quad$ 881 è primo. Quindi $17^2 \cdot 881$

223092870 $\quad \sqrt{223092870} < 14937$ $\quad 223092870 = 2 \cdot 111546435$

$\sqrt{111546435} < 10562$ $\quad \cancel{2}, 3$ $\quad 111546435 = 3 \cdot 37182145$

$\sqrt{37182145} < 6098$ $\quad \cancel{3}, 5$ $\quad 37182145 = 5 \cdot 7436429$

$\sqrt{7436429} < 2727$ $\quad \cancel{5}, 7$ $\quad 7436429 = 7 \cdot 1062347$

$\sqrt{1062347} < 1031$ $\quad \cancel{7}, 11$ $\quad 1062347 = 11 \cdot 96577$

$\sqrt{96577} < 311$ $\quad \cancel{11}, 13$ $\quad 96577 = 13 \cdot 7429$

$\sqrt{7429} < 87$ $\quad \cancel{13}, 17$ $\quad 7429 = 17 \cdot 437$

$\sqrt{437} < 21$ $\quad \cancel{17}, 19$ $\quad 437 = 19 \cdot 23$

$\sqrt{23} < 19$ quindi 23 è primo.

Quindi $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$

(3) a) $\text{mcd}(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ $\quad \text{mcm}(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^5$

b) $\text{mcd}(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) = 3 \cdot 5 \cdot 7$ $\quad \text{mcm}(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

c) $\text{mcd}(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13, 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 11 \cdot 17^{14}) = 2 \cdot 3 \cdot 11$ $\quad \text{mcm}(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13, 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 11 \cdot 17^{14}) = 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17^{14}$

d) $\text{mcd}(0, 5) = 5$ $\quad \text{mcm}(0, 5) = 0$

4 a) $24 = 16 \cdot 1 + 8$
$16 = 8 \cdot 2 + 0$

$\mathrm{mcd}(24, 16) = 8$ $\mathrm{mcm}(24, 16) = \frac{24 \cdot 16}{8} = 48$ $\frac{48}{24} = 2$

b) $24 = 2^3 \cdot 3$
$15 = 3 \cdot 5$
$16 = 2^4$

$\mathrm{mcm}(24, 15, 16) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ $\frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3} = 2 \cdot 5 = 10$

5 $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ $45 = 3^2 \cdot 5$ $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

a) $\mathrm{mcm}(105, 90) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 2 \cdot 3 = 6$

b) $\mathrm{mcm}(105, 90) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 7$

c) $\mathrm{mcm}(45, 105) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $\frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7}{3^2 \cdot 5} = 7$

d) $\mathrm{mcm}(45, 105, 90) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{3^2 \cdot 5} = 14$.

6 p è un primo con $13p + 1 = x^2$ per certo $x \in \mathbb{Z}$. $x > 0$

Quindi $13p = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

se $(x-1) = 1$, allora $x = 2$ e $13p = 3$ ma $13 \nmid 3$. Quindi $(x-1) \neq 1$ cioè $(x-1) > 1$.

Allora $(x-1)$ e $(x+1)$ devono essere entrambi numeri primi, uno di questi è 13 e l'altro è p. se $x - 1 = 13$ allora $x = 14$ e $p = x+1 = 15$ che non è primo.

se $x + 1 = 13$ allora $x = 12$ e $p = x - 1 = 11$ che è primo.

Quindi $p = 11$ è l'unica possibilità. $13 \cdot 11 + 1 = 12^2$.

7 $60060 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Sia m il numero cercato.

sia $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0$ con $m = 60060 + x$.

Allora x non può essere 0 perchè 60060 è div. per 2.

x non può essere divisibile per 2, 3, 5, 7, 11 o 13.

$60060 = 17 \cdot 3532 + 16$ quindi $x \neq 1$, perciò $x \geq 17$ e $17 \nmid 60060 + 17$.

$60060 = 19 \cdot 3161 + 1$ quindi $60060 + 17$ non è divisibile per 19.

Segue che $60060 + 17$ non è divisibile per 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19.

Quindi 60077 è il numero cercato.

8 a) 4: 1, 3 $\varphi(4) = 2$
7: 1, 2, 3, 4, 5, 6. $\varphi(7) = 6$
14: 1, 3, 5, 9, 11, 13 $\varphi(14) = 6$.

b) - se n è primo, allora i divisori di n tra 1 e n sono 1 e n.
$\mathrm{mcd}(1, n) = 1$, $\mathrm{mcd}(n, n) = n$. Quindi $\varphi(n) = n - 1$.

- Se $\varphi(n) = n - 1$ allora dato che $\mathrm{mcd}(n, n) = n \neq 1$ segue che $\mathrm{mcd}(n, a) = 1$ per ogni $1 \leq a < n$. Perciò n è primo.

c) Sia $1 \le a \le p^k$. Allora $\mathrm{mcd}(a, p^k) \ne 1$ se e solo se a è un multiplo di p.

Tra 1 e p^k ci sono $\frac{p^k}{p} = p^{k-1}$ multipli di p.

Quindi $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$.

(9) a) $13 = 3 \cdot 4 + 1$ quindi $13 \equiv 1 \pmod 3$

b) $155 = 19 \cdot 8 + 3$ quindi $155 \equiv 3 \pmod{19}$

c) $97 = 11 \cdot 8 + 9$ quindi $-97 = 11 \cdot (-9) + 2$ e $-97 \equiv 2 \pmod{11}$

d) $211 = 23 \cdot 9 + 4$ quindi $-211 = 23(-9) - 4$ quindi $-211 \equiv -4 \pmod{23}$ ma $-4 \equiv 9 \pmod{23}$

(10) a) Sia y il numero di controllo, $y \in \{0, 1, 2, \dots, 9, X\}$

Allora

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 7 & 0 & 5 & 3 & 9 & 6 & 5 & y \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \end{array}$$

$0 + 0 + 21 + 0 + 25 + 18 + 63 + 48 + 45 + 10y \equiv 0 \pmod{11}$ cioè

$0 + 0 + 10 + 0 + 3 + 7 + 8 + 4 + 1 + 10y \equiv 0 \pmod{11}$ cioè $33 + 10y \equiv 0 \pmod{11}$

Quindi $10y \equiv 0 \pmod{11}$ per cui $y \equiv 0 \pmod{11}$: $y = 0$.

b)

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 5 & 7 & Q & 8 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \end{array}$$

$0 + 4 + 0 + 4 + 25 + 42 + 7Q + 64 + 81 + 10 \equiv 0 \pmod{11}$

$0 + 4 + 0 + 4 + 3 + -2 + 7Q + -2 + 4 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$

$7Q - 1 \equiv 0 \pmod{11}$ Quindi $7Q \equiv 1 \pmod{11}$ Quindi $Q = 8$.

(11) a) $(1011)_2 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11$

b) $(100101)_2 = 2^5 + 2^2 + 2^0 = 37$

c) $(101010101)_2 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 341$

d) $(123)_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 83$

e) $(100101)_8 = 1 \cdot 8^5 + 1 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^0 = 32833$

f) $(ABC)_{16} = 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12 \cdot 16^0 = 2748$.

(12) a)

$321 = 2 \cdot 160 + 1$
$160 = 2 \cdot 80 + 0$
$80 = 2 \cdot 40 + 0$
$40 = 2 \cdot 20 + 0$
$20 = 2 \cdot 10 + 0$
$10 = 2 \cdot 5 + 0$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$
$1 = 2 \cdot 0 + 1$

$(101000001)_2$

$321 = 8 \cdot 40 + 1$
$40 = 8 \cdot 5 + 0$
$5 = 8 \cdot 0 + 5$

$(501)_8$

$321 = 16 \cdot 20 + 1$
$20 = 16 \cdot 1 + 4$
$1 = 16 \cdot 0 + 1$

$(141)_{16}$

b)

$4532 = 2 \cdot 2266 + 0$
$2266 = 2 \cdot 1133 + 0$
$1133 = 2 \cdot 566 + 1$
$566 = 2 \cdot 283 + 0$
$283 = 2 \cdot 141 + 1$
$141 = 2 \cdot 70 + 1$
$70 = 2 \cdot 35 + 0$
$35 = 2 \cdot 17 + 1$
$17 = 2 \cdot 8 + 1$
$8 = 2 \cdot 4 + 0$
$4 = 2 \cdot 2 + 0$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$
$1 = 2 \cdot 0 + 1$

$(1000110110100)_2$

$4532 = 8 \cdot 566 + 4$
$566 = 8 \cdot 70 + 6$
$70 = 8 \cdot 8 + 6$
$8 = 8 \cdot 1 + 0$
$1 = 8 \cdot 0 + 1$

$(10664)_8$

$4532 = 16 \cdot 283 + 4$
$283 = 16 \cdot 17 + 11$
$17 = 16 \cdot 1 + 1$
$1 = 16 \cdot 0 + 1$

$(11B4)_{16}$

c)

$97644 = 2 \cdot 48822 + 0$
$48822 = 2 \cdot 24411 + 0$
$24411 = 2 \cdot 12205 + 1$
$12205 = 2 \cdot 6102 + 1$
$6102 = 2 \cdot 3051 + 0$
$3051 = 2 \cdot 1525 + 1$
$1525 = 2 \cdot 762 + 1$
$762 = 2 \cdot 381 + 0$
$381 = 2 \cdot 190 + 1$
$190 = 2 \cdot 95 + 0$
$95 = 2 \cdot 47 + 1$
$47 = 2 \cdot 23 + 1$
$23 = 2 \cdot 11 + 1$
$11 = 2 \cdot 5 + 1$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$
$1 = 2 \cdot 0 + 1$

$(10111110101101100)_2$

$97844 = 8 \cdot 12205 + 4$
$12205 = 8 \cdot 1525 + 5$
$1525 = 8 \cdot 190 + 5$
$190 = 8 \cdot 23 + 6$
$23 = 8 \cdot 2 + 7$
$2 = 8 \cdot 0 + 2$

$(276554)_8$

$97844 = 16 \cdot 6102 + 12 \rightarrow C$
$6102 = 16 \cdot 381 + 6$
$381 = 16 \cdot 23 + 13 \rightarrow D$
$23 = 16 \cdot 1 + 7$
$1 = 16 \cdot 0 + 1$

$(17D6C)_{16}$

13) a.) Si b.) No c.) No d.) Si

14.) a.) Si b.) Si .c) Si d.) NO

15.) a.) Si b.) No c.) Si d.) No