Nome: ______________________________ Matricola: ______________

**Matematica Discreta**

*Esame del 11-07-2012*

**Esercizio 1.** (6 pt)
Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare, $e$ la base naturale e $b$ la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ dove $F$ è data dalla matrice $[F]_e^e = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$ e calcolare $[F]_b^b$.

**Esercizio 2.** (2 pt)
Calcolare la distanza tra il punto $A = (5, 3, 2)$ e il piano passante per i punti $P$, $Q$ e $R$, dove $P = (1, 0, 1)$, $Q = (2, 2, 2)$ e $R = (-1, 1, 5)$.

**Esercizio 3.** (5 pt)
Risolvere in $\mathbb{Z}$ il sistema dato da $\begin{cases} x \equiv & -543 \pmod{79} \\ x \equiv & 345 \pmod{81} \\ 33x \equiv & 111 \pmod{86} \end{cases}$.

**Esercizio 4.** (5 pt)
Consideriamo la ricorrenza $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} - 5n + 6$, per $n \geq 2$.
a.) Dimostrare che $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$, $n \geq 0$, è una soluzione della ricorrenza.
b.) Trovare tutte le soluzioni della ricorrenza.
c.) Trovare la soluzione con $a_0 = 1$ e $a_1 = \frac{7}{4}$, e calcolare $a_0$, $a_1$, $a_2$ e $a_3$ usando la ricorrenza e la risposta.

**Esercizio 5.** (4 pt)
Quanti bit string di lunghezza 50 ci sono tale che
a.) il bit string ha almeno trentacinque 0 e almeno nove 1, oltre si deve avere che il bit string corrispondente alle prime ventisei posizione contiene esattamente quattrodici 0 e il bit string corrispondente alle ultimi diciassette posizioni contiene al massimo un 1.
b.) il bit string corrispondente alle prime otto posizioni ha esattamente tre 1 e il bit string corrispondente alle ultime ventisei posizioni contiene lo string 1001010 come sotto-string.

**Esercizio 6.** (2 pt)
Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data dalla riflessione rispetto alla retta $x = 0$. Sia $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data dalla riflessione rispetto alla retta $x + 7y = 0$. Esiste un riflessione $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $T^{-1} \circ S \circ T = R$? In caso di si trovare l'equazione parametrica della retta corrispondente a $R$.

**Esercizio 7.** (4 pt)
a.) Quanti $x \in \mathbb{Z}$ con $101010101 \leq x \leq 747474747$ si può fare usando le cifre di 112555700 tale che $x$ è divisibile per 25 e contiene lo string 25 come sotto espressione.
b.) Quante soluzioni ci sono dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 800$, dove $x_1, \ldots, x_8 \in \mathbb{Z}$ e $x_1, \ldots, x_8 \geq 0$, con $x_2 \geq 50$, $60 \leq x_3 \leq 121$, $x_4 \geq 70$, $80 \leq x_5 \leq 111$, $x_2 + x_6 + x_8 = 200$ e $x_5 \leq x_2 + x_3$?

**Esercizio 8.** (2 pt)
8.1 Il numero $(5551110005553331110002220004443331113330000)_6$ è
(a) divisibile per 31 ma non per 43.
(b) divisibile per 43 ma non per 31.
(c) divisibile per 31 e per 43.
(d) divisibile nè per 31 e nè per 43.

8.2. Sia $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ un vettore non nullo e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $T : \vec{v} \mapsto \vec{v} - proj_{\vec{n}}(\vec{v})$.
Allora la dimensione di $Ker(T)$ è
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

---

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5 ,6 e 7 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 8, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorrettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.