Nome: ______________________________ Matricola: ______________

Matematica Discreta

Esame del 22-09-2011

Esercizio 1. (6 pt)
Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare, e la base naturale e b la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ dove F è data dalla matrice $[F]_e^e = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -9 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$ e calcolare $[F]_b^b$.

Esercizio 2. (2 pt)
Calcolare la distanza tra il punto $P = (5, 4, 2)$ e il piano passante per i punti A, B e C, dove $A = (2, 0, 2)$, $B = (4, 2, 6)$ e $C = (5, 2, 7)$.

Esercizio 3. (5 pt)
Risolvere in $\mathbb{Z}$ il sistema dato da $\begin{cases} 31x \equiv 18 \pmod{79} \\ x \equiv -654 \pmod{83} \\ x \equiv 432 \pmod{88} \end{cases}$.

Esercizio 4. (5 pt)
Consideriamo la ricorrenza $a_n = 16a_{n-2} - 3n + \frac{17}{5}$, per $n \geq 2$.
a.) Dimostrare che $a_n = \frac{1}{5}n + \frac{1}{5}$, $n \geq 0$, è una soluzione della ricorrenza.
b.) Trovare tutti le soluzioni della ricorrenza.
c.) Trovare la soluzione con $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$, e calcolare a_0, a_1, a_2 e a_3 usando la ricorrenza e con la risposta.

Esercizio 5. (4 pt)
Quanti bit string di lunghezza 53 ci sono tale che
a.) il bit string ha esattamente ventotto 1, oltre si deve avere che il bit string correspondente alle prime ventidue posizioni contiene almeno venti 1 e il bit string correspondente alle ultimi venti posizioni ha al massimo quindici 0?
b.) il bit string correspondente alle prime dieci posizioni contiene esattemente sette 1 e il bitstring correspondente alle ultmi venticinque posizioni contiene lo string 101110111 come sotto-string.

Esercizio 6. (2 pt)
Sia $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base naturale di $\mathbb{R}^2$, $\vec{w} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ e $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$. Siano $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare dato da $T : \vec{v} \mapsto \vec{v} - proj_{\vec{w}}(\vec{v})$, $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita tramite $S(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ e $S(\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ e $P_{\vec{n}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare dato da $P_{\vec{n}} : \vec{v} \mapsto proj_{\vec{n}}(\vec{v})$.
Trovare, se esistono, tutti i $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ tale che, $S^{-1} \circ T \circ S = P_{\vec{n}}$ o spegiare perchè non esistono.

Esercizio 7. (4 pt)
a.) Quanti coppie di numeri $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con $12312312 \leq x \leq 98798798$, $100 \leq y \leq 999$ e con x divisibile per 3 e y non contiene lo string 02 come sotto string si possono comporre usando le cifre di 12223333990.
b.) Quante soluzioni ci sono dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4200$, dove $x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{Z}$ e $x_1, \ldots, x_7 \geq 0$, con $70 \leq x_2 \leq 169$, $x_3 \geq 200$, $300 \leq x_4 \leq 699$, $x_7 \leq 599$, $x_1 + x_3 + x_7 = 900$ e $2x_4 - x_7 \neq 3$?

Esercizio 8. (2 pt)
8.1 Il numero $(33011033011033011033011033011022011022011022011022011022011)_4$ è
(a) divisibile per 35 ma non per 9 .
(b) divisibile per 9 ma non per 35.
(c) divisibile per 9 e per 35.
(d) divisibile nè per 9 e nè per 35.

8.2. La matrice, rispetto alla base naturale, della riflesione in $\mathbb{R}^2$ rispetto la retta l è dato da $\frac{1}{29}\begin{pmatrix} 20 & -21 \\ -21 & -20 \end{pmatrix}$.
L'equazione cartesiano della retta l è
(a) $3x + 7y = 0$ (b) $7x + 3y = 0$ (c) $3x - 7y = 0$ (d) $7x - 3y = 0$

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5 ,6 e 7 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 8, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorrettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.