Sistemi di equazioni lineari

Esempio

risolvere $\begin{cases} -x+2y+z=-2 \\ 3x-8y-2z=4 \\ x+4z=-2 \end{cases} \xrightarrow{2^\circ \to 2^\circ+3\times 1^\circ} \begin{cases} -x+2y+z=-2 \\ -2y+z=-2 \\ x+4z=-2 \end{cases}$

$\xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ+1^\circ} \begin{cases} -x+2y+z=-2 \\ -2y+z=-2 \\ 2y+5z=-4 \end{cases} \xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ+2^\circ} \begin{cases} -x+2y+z=-2 \\ -2y+z=-2 \\ 6z=-6 \end{cases} \xrightarrow{3^\circ \to \frac{1}{6}3^\circ} \begin{cases} -x+2y+z=-2 \\ -2y+z=-2 \\ z=-1 \end{cases}$

addesso posso già vedere le sol:

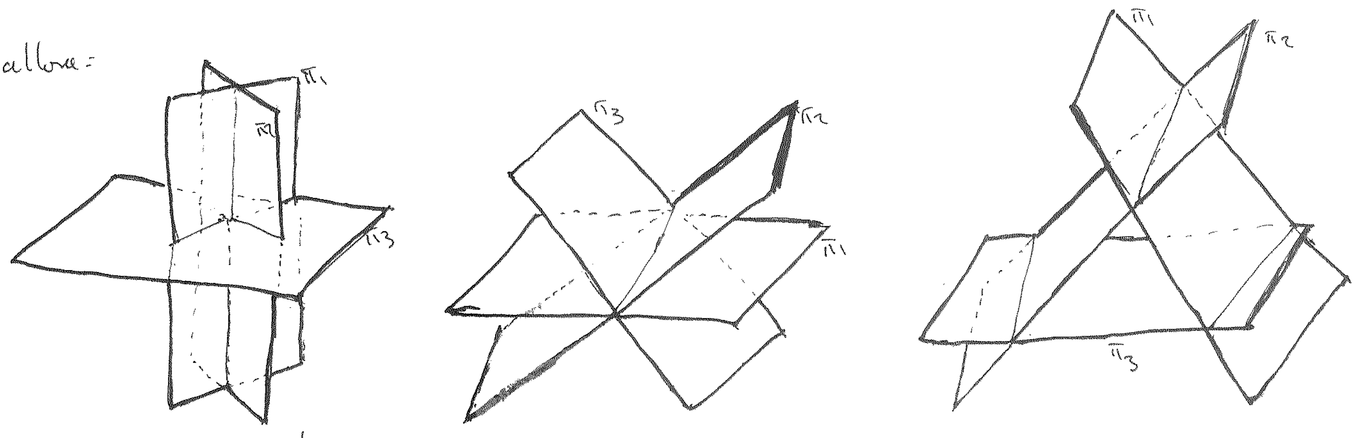
$\begin{cases} -x+2y-1=-2 \\ -2y-1=-2 \\ z=-1 \end{cases} \to \begin{cases} -x+2y-1=-2 \\ y=1/2 \\ z=-1 \end{cases} \to \begin{cases} x=2 \\ y=1/2 \\ z=-1 \end{cases}$ Fai il controllo! mettere le sol. nel eq. originale.

Però posso anche procedere:

$\xrightarrow{2^\circ \to 2^\circ-3^\circ} \begin{cases} -x+2y+z=-2 \\ -2y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \xrightarrow{1^\circ \to 1^\circ-3^\circ} \begin{cases} -x+2y=-1 \\ -2y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \xrightarrow{2^\circ \to -\frac{1}{2}2^\circ} \begin{cases} -x+2y=-1 \\ y=1/2 \\ z=1 \end{cases} \xrightarrow{1^\circ \to 1^\circ-2\cdot 2^\circ} \begin{cases} -x=-2 \\ y=1/2 \\ z=1 \end{cases}$

$\xrightarrow{1^\circ \to -1^\circ} \begin{cases} x=2 \\ y=1/2 \\ z=1 \end{cases}$

ogni equazione determina un piano in $\mathbb{R}^3$. Quindi risolvere il sistema è trovare i punti in commune dei 3 piani. Se ogni due piani non sono paralleli allora:



solo 1 punto in commune — una retta in commune — nessun punto in commune.

se due dei piani sono paralleli (e diverso) allora non c'è nessun punto in commune

se due dei piani sono uguali allora i tre piani hanno oppure una retta in commune, nessun punto in commune o i tre piani sono uguali

Esempio

risolvere $\begin{cases} 2x+4y+6z=0 \\ 4x+5y+6z=3 \\ 7x+8y+9z=6 \end{cases} \xrightarrow{1^\circ \to \frac{1}{2}1^\circ} \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=3 \\ 7x+8y+9z=6 \end{cases} \xrightarrow{2^\circ \to 2^\circ - 4\,1^\circ} \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=3 \\ 7x+8y+9z=6 \end{cases}$

$\xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ - 7\,1^\circ} \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=3 \\ -6y-12z=6 \end{cases} \xrightarrow{2^\circ \to -\frac{1}{3}2^\circ} \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+2z=-1 \\ -6y-12z=6 \end{cases} \xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ + 6\,2^\circ} \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+2z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \xrightarrow{1^\circ \to 1^\circ - 2\,2^\circ} \begin{cases} x-z=2 \\ y+2z=-1 \\ 0=0 \end{cases}$

Allora le sol. sono $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = 2+z \,,\; y = -1-2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2+z \\ -1-2z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$

è la retta: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Esempio

risolvere $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=3 \\ 7x+8y+9z=0 \end{cases} \xrightarrow{2^\circ \to 2^\circ - 4\,1^\circ} \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=3 \\ 7x+8y+9z=0 \end{cases} \xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ - 7\,1^\circ} \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=3 \\ -6y-12z=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{2^\circ \to -\frac{1}{3}2^\circ} \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+2z=-1 \\ -6y-12z=0 \end{cases} \xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ + 6\,2^\circ} \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+2z=0 \\ 0=-6 \end{cases} \Leftarrow$ non ci sono soluzioni

Vogliamo:
- più equazioni in più variabili
- farlo più veloce
- farlo in un modo algoritmico
- sapere quanti soluzioni ci sono (senza calcolarli)

Notazione

$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ una tabella rettangolare con numeri dentro si dice una matrice

per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sono matrice.

Per una matrice si può parlare di righe e colonne

per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ ha 3 righe e 4 colonne

Se una matrice ha n righe e m colonne si dice anche che la matrice

$$n\left\{\begin{matrix}\to\\ \to\\ \vdots\\ \to\end{matrix}\right.\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{\uparrow\ \uparrow \cdots\cdots \uparrow}_{m}$$

è una matrice $n \times m$. Per esempio la matrice di sopra è una matrice 3×4.

Se A è una matrice 3×4 scriviamo anche: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

se i numeri a_{ij} sono in $\mathbb{R}$ si dice anche che A è una matrice 3×4 a coefficienti in $\mathbb{R}$.

In generale una matrice $n \times m$ è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

dove a_{ij} sono numeri (usualmente $\mathbb{R}$)

la riga   la colonne

una matrice $n \times 1$ si dice anche vettore, scriviamo $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ si dice i componenti del vettore.

L'insieme dei matrice $n \times 1$ con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ si dinota con $\mathbb{R}^n$

Quindi $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$.

Metodo di eliminazione di Gauß-Jordan.

Esempio: consideriamo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 9 \end{cases}$$

possiamo scrivere:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & = \text{ i costanti} \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

la matrice dei coefficienti

la matrice orlata del sistema

Quindi le colonne sono i coefficienti davanti $x_1\ x_2 \dots x_5$ poi | (=) e poi la colone con i costanti. Ogni riga corresponde con un equazione.

Quando abbiamo risolto il sistema abbiamo fatto:

I scambiare tra di loro due equazioni

II moltiplicare una equazione con un numero non nullo

III sostituire una equazione con quella ottenuta sommando ad essa un moltiplo di una altra equazione.

ogni di questi operazioni non cambia l'insieme delle soluzioni del sistema lineare.

Questi operazioni sulla matrice orlata del sistema sono

I scambiare tra di loro due righe

II moltiplicare una riga con un numero non nullo

III sostituire una riga con quella ottenuta sommando ad essa un moltiplo di una altra riga.

Questi si chiamano operazioni elementari sulle righe

l'obiettivo è di arrivare, se è posibile, a $\begin{cases} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \\ \vdots \\ x_n = \dots \end{cases}$

cioè mettere la matrice dei coefficienti nella forma $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & \vdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \end{array}\right)$

Non è detto che si può!!

Esempio

$$\begin{cases} -x + 2y + z = -2 \\ 3x - 8y - 2z = 4 \\ x + 4z = -2 \end{cases}$$

voglio un 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ \to -1\, 1^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{2^\circ \to 2^\circ - 3\, 1^\circ}$$

voglio 0

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ - 1^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

voglio 0

la prima colonne è a posto adesso la seconda ma non posso usare più la prima riga voglio che il posto 2,2 deventa 1

$$\xrightarrow{2^\circ \to -\frac{1}{2} 2^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ - 2\, 2^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{3^\circ \to \frac{1}{6} 3^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

voglio 0

la seconda colonne è a posto, voglio che il posto 3,3 diventa 1 la matrice è a gradini

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

andiamo avanti: voglio sopra ogni gradino zeri

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2^\circ \to 2^\circ + \frac{1}{2} 3^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1^\circ \to 1^\circ + 3^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ \to 1^\circ + 2\, 2^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

quindi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1/2 \\ z = -1 \end{cases}$ Fai il controllo!!

Esempio

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + 7z = 3 \\ x + 5z + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{2^\circ \to 2^\circ - 2\, 1^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ - 1^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2^\circ \leftrightarrow 3^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{3^\circ \to \frac{1}{3} 3^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2^\circ \to 2^\circ - 3\, 3^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ \to 1^\circ - 2\, 3^\circ}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ \to 1^\circ - 2^\circ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

sol: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases}$ Fai il controllo!!

Esempio

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ \leftrightarrow 2^\circ}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ \to \frac{1}{2} 1^\circ} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ - 1^\circ} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{4^\circ \to 4^\circ - 2\, 1^\circ}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{4^\circ \to 4^\circ - 2^\circ} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4^\circ \to 4^\circ - 3^\circ} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4^\circ \to \frac{1}{3} 4^\circ} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

è a gradini
uso il primo uno su ogni gradino per eliminare i numeri sopra il gradino

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3^\circ \to 3^\circ - 4^\circ} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2^\circ \to 2^\circ + 4^\circ} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ \to 1^\circ - 4^\circ}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2^\circ \to 2^\circ + 3^\circ} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ \to 1^\circ - 2\,3^\circ} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ \to 1^\circ - 2\,2^\circ}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ è a gradini fortemente ridotto

la colonne del primo 1 di ogni gradino è del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -10 \\ x_2 + x_3 = 5 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -10 + x_3 \\ x_2 = 5 - x_3 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

variabile non corrispondente a gradini

variabile corrispondente ai gradini.

$$\text{Sol} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x_1 = -10 + x_3,\ x_2 = 5 - x_3,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0 \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -10 + x_3 \\ 5 - x_3 \\ x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}. \quad \text{eq. di una retta in } \mathbb{R}^5$$

↑ è una sol. del sistema (Fai controllo!!)

<u>Esempi</u>

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$ è a gradini

← non ha soluzioni

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2+x_3=2 \\ x_3=3 \end{cases} \qquad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&1&1&2\\ 0&0&1&3 \end{array}\right)}_{\text{è a gradini}} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&-2\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&3 \end{array}\right) \longrightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-1\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&3 \end{array}\right)}_{\text{a gradini fortemente ridotta:}}$$

$$\text{sol.} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1=-1,\, x_2=-1,\, x_3=3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1\\-1\\3 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{unica soluzione } \begin{cases} x_1=-1\\ x_2=-1\\ x_3=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_3=1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 1&0&1&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&-1&0&0 \end{array}\right) \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&1&0&0 \end{array}\right)}_{\text{è a gradini}} \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&1&1\\ 0&1&0&0 \end{array}\right)}_{\text{a gradini fortemente ridotta}}$$

$$\text{sistema: } \begin{cases} x_1+x_3=1 \\ x_2=0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1=1-x_3 \\ x_2=0 \end{cases} \qquad \text{Sol: } \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1=1-x_3,\ x_2=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1-x_3\\0\\x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1\\0\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3\\0\\x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1\\0\\0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3\in\mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 2x+2z=2 \\ 3x+3z=3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 2&2&2&2\\ 2&0&2&2\\ 3&0&3&3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&-2&0&0\\ 0&-3&0&0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&-2&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&-3&0&0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&-3&0&0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)}_{\text{è a gradini}} \longrightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&1&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)}_{\text{a gradini fortemente ridotta}} \qquad \begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{Sol. } \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=1-z,\ y=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-z\\0\\z \end{pmatrix} \;\middle|\; z\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z\\0\\z \end{pmatrix} \;\middle|\; z\in\mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z\in\mathbb{R} \right\}. \quad \left(\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}, \text{ una retta } \subset \mathbb{R}^3 \right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=4 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&-1&2\\ 1&2&1&-1&4\\ 1&1&1&-1&2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&-1&2\\ 0&1&0&0&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&-1&0\\ 0&1&0&0&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1+x_3-x_4=0 \\ x_2=2 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1=-x_3+x_4 \\ x_2=2 \end{cases} \quad \text{sol } \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1=-x_3+x_4,\ x_2=2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3+x_4\\2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3,x_4\in\mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3\\0\\x_3\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4\\0\\0\\x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 x_4\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3,x_4\in\mathbb{R} \right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\2\\0\\0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \quad s,t\in\mathbb{R}, \text{ un piano } \subset \mathbb{R}^5 \right)$$

In generale:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$

si dice un sistema lineare di m equazioni in n variabile.

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ si dice matrice dei coefficienti

La matrice $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ si dice matrice dei termini noti

il sistema lineare può essere rappresentata come matrice orlata:

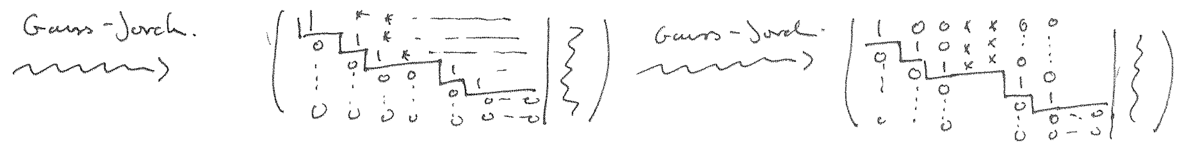
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matrice dei coefficienti — matrice di termini noti

gli operazioni del tipo I, II, III si dicono operazioni elementare sulle righe.

Quindi:

$(A \mid b)$



a gradini — a gradini fortemente ridotto.

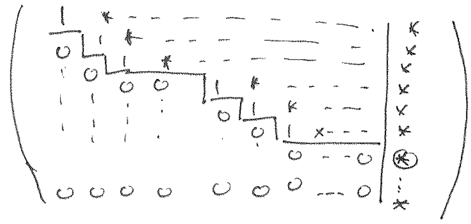
Se A è una matrice, il rango di A è il numero dei gradini dopo ho applicato il metodo di eliminazione di G.J. su A.

esempi
$$\begin{pmatrix} 1&2&3\\4&5&6\\7&8&9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&2&3\\0&1&2\\0&-6&-12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&2&3\\0&1&2\\0&0&0 \end{pmatrix}$$ Rango è 2

$$\begin{pmatrix} 1&2\\3&4\\5&6\\8&10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&2\\0&-2\\0&-4\\0&-6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&2\\0&1\\0&-4\\0&-6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&2\\0&1\\0&0\\0&0 \end{pmatrix}$$ Rango è 2.

Cosè si può dire sul numero degli soluzioni?

si mette la matrice orlata del sistema di eq. lin. a gradini:

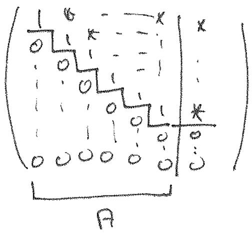


se c'è una riga del tipo

$0 \cdots\cdots 0 \mid a$ con $a \neq 0$

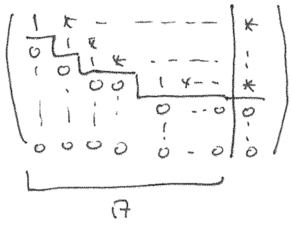
allora non ci sono soluzioni

se non c'è un tale riga allora ci sono due possibilità



il numero dei gradi = il numero delle colonne di A

Allora c'è un unico soluzione



il numero dei gradi $<$ il numero delle colonne di A

Allora c'è un numero infinito di soluzioni.

<u>Def</u> un sistema di equazioni lineare si dice

compatibile se ci sono soluzioni

non compatibile se non ci sono soluzioni

<u>OSS</u> il sistema è compatibile se e solo se

rango di A = rango di $(A\ b)$

Esempio
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$
non è compatibile perché

rango di $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è 3 e rango di $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è 4.

Esempio

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ ha un unico soluzione | infatti $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ ha infinte soluzioni | infatti $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

OSS Se in un sistema di equazioni lineare ci sono più variabile come equazioni allora il sistema o ha nessuna soluzione o ne ha infinite.

Perche: il numero delle colone > numero delle righe $\geq$ rango di A (dove A è la matrice di coeff.).

OSS un sistema di equazioni lineare di n equazioni in n variabile ha un unico soluzione se e solo se il rango di $A = n$. (dove A è la matrice di coefficinti)

cioè $\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$ il numero delle colone è n.

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + (a+1)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = a+1 \end{cases}$$

Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ il sistema ha un unico soluzione, non ha soluzioni, ci sono infinite soluzine?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right)$$

se $a \neq 0$ allora $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/a & -1/a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right)$ ha un unico soluzione.

se $a = 0$ allora $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ non ha sol.

Quindi: non ha soluzioni: se $a = 0$

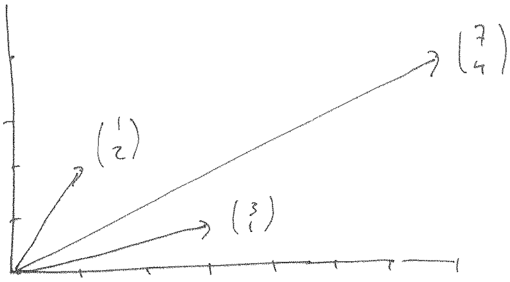
ha un unico sol.: se $a \neq 0$

ha infinite sol.: mai

C'è un altro modo di scrivere un sistema di eq. lin:

Esempio

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$ allora scrivo come 2 vettori



$$\begin{pmatrix} 3x+y \\ x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$ cioè $$\begin{pmatrix} 3x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Quindi $x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Quindi risolvere il sistema è come scrivere il vettore $\binom{7}{4}$ come un multiplo del vettore $\binom{3}{1}$ e un multiplo del vettore $\binom{1}{2}$

lo posso fare? si: $2 \cdot \binom{3}{1} + 1 \cdot \binom{1}{2} = \binom{7}{4}$

In generale:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ posso scrivere come:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ cioè

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ cioè

$$x_1\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}} + x_2\underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{\vec{v_2}} + \dots + x_n\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\vec{v_n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{b}}.$$

Quindi il sistema posso anche scrivere come:

$$x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \dots + x_n\vec{v_n} = \vec{b}$$

(dove $\vec{v_i}$ è il i-esimo colonne della matrice dei coefficienti)

Def Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{b}$ vettori di $\mathbb{R}^m$.

Si dice che $\vec{b}$ è una combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$

se esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{b} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$

Quindi risolvere il sistema è scrivere il vettore $\vec{b}$ come combinazione lineare delle colonne di A

Definiamo adesso la moltiplicazione di una matrice $m \times n$ con un vettore di $\mathbb{R}^n$

Sia A una matrice $m \times n$

scriviamo $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ (cioè le colonne vediamo come vettori di $\mathbb{R}^m$)

sia $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vettore di $\mathbb{R}^n$

Definiamo $A\vec{x}$: $\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è definito!!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La matrice $n \times n$ del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si dice matrice d'identità

lo denotiamo con I_n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

OSS

regola di moltiplicazione di una matrice con un vettore.

Sia A una matrice $m \times n$ e siano $\vec{x}, \vec{y}$ due vettori di $\mathbb{R}^n$, e $k \in \mathbb{R}$.

1) $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

2) $A(k\vec{x}) = k(A\vec{x})$.

dim 1). sia $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots & \vec{v_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Allora. $A(\vec{x}+\vec{y}) =$

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots & \vec{v_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = (x_1+y_1)\vec{v_1} + (x_2+y_2)\vec{v_2} + \cdots + (x_n+y_n)\vec{v_n} =$$

$$x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \cdots + x_n\vec{v_n} + y_1\vec{v_1} + y_2\vec{v_2} + \cdots + y_n\vec{v_n} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= A\vec{x} + A\vec{y}.$$

2) simile.

l'esempio di prima

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$ posso adesso scrivere come $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

In generale.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

posso scrivere come

$A\vec{x} = \vec{b}$ dove A è la matrice dei coefficienti, $\vec{x}$ il vettore dei variabile, $\vec{b}$ il vettore dei termini noti

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

OSS

la prima riga è come il prodotto scalare tra la prima riga di A e $\vec{x}$
la seconda riga è come il prodotto scalare tra la seconda riga di A e $\vec{x}$
⋮
la m-esima riga è come il prodotto scalare tra la m-esima riga di A e $\vec{x}$.

Possiamo fare il prodotto tra una matrice e vettore più veloce:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3 + 0.1 + (-1).2 \\ 1.3 + 2.1 + 3.2 \\ 0.3 + 0.1 + 0.2 \\ 1.3 + 1.1 + 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Def
la somma tra due matrici $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

la moltiplicazione con uno scalare di una matrice:

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & & \\ ka_{m1} & & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Un sistema di equazioni lineari della forma $A\vec{x}=\vec{0}$ si dice omogeneo

cioè:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

oss un sistema di eq. lin. omogeneo ha sempre $\vec{0}$ come soluzione. Quindi o ha un unica soluzione (che è $\vec{0}$) o ne ha infinite.

Consideriamo il sistema di eq. lin. $A\vec{x}=\vec{b}$.
il sistema $A\vec{x}=\vec{0}$ si dice il sistema omogeneo associato.

Sia $S=\{\vec{y} \mid \vec{y}$ è una soluzione di $A\vec{y}=\vec{b}\}$, sia $\vec{x}_0$ una soluzione di $A\vec{x}=\vec{b}$.

$T=\{\vec{x}_0+\vec{z} \mid \vec{z}$ è una soluzione di $A\vec{x}=\vec{0}\}$.

oss $S=T$.

dim: 1) sia $y_0\in S$ allora $A\vec{y}_0=\vec{b}$. $A(\vec{y}_0-\vec{x}_0)=A\vec{y}_0-A\vec{x}_0=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$
quindi $(\vec{y}_0-\vec{x}_0)$ è una soluzione di $A\vec{x}=\vec{0}$. Ma $\vec{y}_0=\vec{x}_0+(\vec{y}_0-\vec{x}_0)$.
quindi $y_0\in T$. Segue che $S\subseteq T$.

2) sia $\vec{z}_0$ una soluzione di $A\vec{x}=\vec{0}$. Allora $\vec{x}_0+\vec{z}_0\in T$. $A(\vec{x}_0+\vec{z}_0)=A\vec{x}_0+A\vec{z}_0=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$.
quindi $\vec{x}_0+\vec{z}_0$ è una soluzione di $A\vec{x}=\vec{b}$. Quindi $\vec{x}_0+\vec{z}_0\in S$.
Segue che $T\subseteq S$.

Quindi $S=T$.

Quindi le soluzioni di $A\vec{x}=\vec{b}$ sono della forma
una soluzione particolare di $A\vec{x}=\vec{b}$ + una soluzione di $A\vec{x}=\vec{0}$.

Esempio
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+z=1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x=1-z \\ y=0 \end{cases} \quad \text{sol.: } \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=1-z,\ y=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1-z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z\in\mathbb{R}\right\} =$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

una sol. di $A\vec{x}=\vec{b}$ — una sol. di $A\vec{x}=\vec{0}$

controllo: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ok!

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ok!