Il determinante.

Sia A una matrice 2×2, con $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il determinante di A, che viene denotato con $\det A$ o con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, è il numero $ad-bc$

Esempio

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2 \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1-1=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 0.2 = 3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 0.4 = 6$$

Per una matrice $n\times n$ usiamo lo stesso notazione per il determinante.

Consideriamo adesso una matrice 3×3 e definiamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(si chiama sviluppo alla prima riga)

cioè!

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(50-48) - 2(40-42) + 3(32-35) = 2+4-9 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{(sviluppo alla 1° colonna)}$$

$$= 1(50-48) - 4(20-24) + 7(12-15) = 2+16-21 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{(sviluppo alla 2° riga)}$$

$$= -4(20-24) + 5(10-21) - 6(8-14) = 16-55+36 = -3$$

In generale: per calcolare il determinante di una matrice $n\times n$ si può sviluppare ad una riga o una colonna e trovi un espressione in determinanti di matrici $(n-1)\times(n-1)$. i segni vengono dati dalla matrice a fianco.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & + \end{pmatrix}$$

Esempi

$$\begin{vmatrix} 6&0&1&0&0 \\ 9&3&2&7&3 \\ 8&0&3&2&9 \\ 0&0&4&0&0 \\ 5&0&5&0&1 \end{vmatrix} \overset{2^\circ \text{ colone}}{\downarrow} = 3 \begin{vmatrix} 6&1&0&0 \\ 8&3&2&9 \\ 0&4&0&0 \\ 5&5&0&1 \end{vmatrix} \overset{3^\circ \text{ riga}}{\downarrow} = 3.(-4) \begin{vmatrix} 6&0&0 \\ 8&2&9 \\ 5&0&1 \end{vmatrix} \overset{1^\circ \text{ riga}}{\downarrow} = 3.(-4).6 \begin{vmatrix} 2&9 \\ 0&1 \end{vmatrix} = 3.(-4).6.2 = -144.$$

<u>Teorema</u>. Siano A e B due matrici $n\times n$, allora $Det(AB) = Det(A).Det(B)$.

<u>oss</u> Fare le mosse di Gauß-Jordan è come multiplicare la matrice a sinistra con un matrice del tipo:

$$\begin{array}{c} j \to \\ i \to \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \circ \quad \begin{pmatrix} 1 & & \lambda & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Questi matrici si dicono matrici elementari. Loro determinanti sono -1, λ, 1 rispettivamente.
la terza mossa non cambio il determinante

Esempio

$$\begin{vmatrix} 4&3&2&1&1 \\ 2&1&1&2&1 \\ 2&3&4&5&1 \\ 6&2&3&1&0 \\ 4&2&1&1&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&1&0&-3&-1 \\ 2&1&1&2&1 \\ 0&2&3&3&0 \\ 0&-1&0&-5&-3 \\ 0&0&-1&-3&-1 \end{vmatrix} \overset{1^\circ \text{ colone}}{\downarrow} = (-2) \begin{vmatrix} 1&0&-3&-1 \\ 2&3&3&0 \\ -1&0&-5&-3 \\ 0&-1&-3&-1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1&0&-3&-1 \\ 0&3&9&2 \\ 0&0&-8&-4 \\ 0&-1&-3&-1 \end{vmatrix} \overset{1^\circ \text{ colone}}{\downarrow} = (-2).1 \begin{vmatrix} 3&9&2 \\ 0&-8&-4 \\ -1&-3&-1 \end{vmatrix} = (-2). \begin{vmatrix} 0&0&-1 \\ 0&-8&-4 \\ -1&-3&-1 \end{vmatrix} \overset{1^\circ \text{ riga}}{\downarrow} = 2 \begin{vmatrix} 0&-8 \\ -1&-3 \end{vmatrix} = -16$$

<u>oss</u> se A è una matrice invertibile allora $Det\ A^{-1} = \dfrac{1}{det\ A}$

perchè $I_n = A.A^{-1}$ quindi $1 = det\ I_n = det\ A . det\ A^{-1} = (det\ A)(det\ A^{-1})$.

<u>oss</u> Una matrice $n\times n$ è invertibile se e solo se $det(A) \neq 0$

perchè A è invertibile se e solo se il rango di $A = 0$
se e solo se con G.J. posso arrivare a $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
se e solo se $det\ A \neq 0$

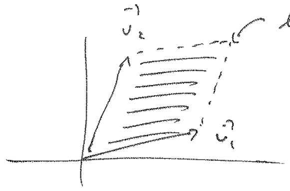
Alcuni determinanti speciali:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

<u>oss</u> Sia A una matrice $n\times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

In $\mathbb{R}^2$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$



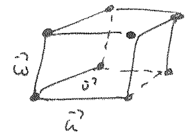
l'area è il valore assoluto di $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}$

In generale vale in $\mathbb{R}^2$ l'area del parallelogramo di $\vec{v}, \vec{w}$ è

$$\left| \det \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{v} & \vec{w} \\ | & | \end{pmatrix} \right| .$$

Simile in $\mathbb{R}^3$: il volume di un parallelopipido generato da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

è $$\left| \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ | & | & | \end{pmatrix} \right|$$



ci sono tante regole che coinvolgono il determinante.
Per esempio "la regola di Cramer" da un metodo di calcolare l'inverse di una matrice usando determinanti. Però da un punto di vista computazionale questo metodo è molto più lento del metodo che usa Gauß-Jordan.