Matematica Discreta
Compito 3

1.) Quanti soluzioni ha il sistema lineare dato da

a.) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right)$ b.) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ c.) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

2.) Trovare, usando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, tutti gli valori di a tale che il sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a^2-6)x_3 & = & a \end{array}\right.$$

a.) non ha soluzioni.
b.) ha un unico soluzione.
c.) ha infinite soluzioni.

3.) Trovare, usando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, tutti gli valori di a tale che il sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & (a^2+2)x_4 & = & a \end{array}\right.$$

a.) non ha soluzioni.
b.) ha un unico soluzione.
c.) ha infinite soluzioni.

4.) Trovare, usando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, tutti gli valori di a tale che il sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & (a^2-1)x_3 & + & 4x_4 & = & a+2 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & (a+1)x_4 & = & 2-a \end{array}\right.$$

a.) non ha soluzioni.
b.) ha un unico soluzione.
c.) ha infinite soluzioni.

5.) Calcolare il rango delle matrice dati:

a.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.) Calcolare, se è possibile,

a.) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ f.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

7.) In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Quali vettori sono una combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$?

a.) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ d.) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8.) Consideriamo il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ e il sistema lineare omogeneo associato $A\vec{x} = \vec{0}$.

a.) Dimostare che se $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ sono soluzioni di $A\vec{x} = \vec{b}$, allora $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ è una soluzione di $A\vec{x} = \vec{0}$.
b.) Dimostare che se $\vec{x}_1$ è una soluzione di $A\vec{x} = \vec{b}$ e $\vec{x}_2$ è una soluzione di $A\vec{x} = \vec{0}$, allora $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ è una soluzione di $A\vec{x} = \vec{b}$.
c.) Dimostare che se $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ sono soluzioni di $A\vec{x} = \vec{0}$, allora $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ è una soluzione di $A\vec{x} = \vec{0}$.
d.) Dimostare che se $k \in \mathbb{R}$ e $\vec{x}_1$ è una soluzione di $A\vec{x} = \vec{0}$, allora $k\vec{x}_1$ è una soluzione di $A\vec{x} = \vec{0}$.

Buon divertimento!