Matematica Discreta

Primo test di autovalutazione

Esercizio 1.

Consideriamo il sistema lineare $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 & + & 2x_2 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & (c-2)x_3 & + & x_4 & = & c \\ x_1 & - & x_2 & - & (c-4)x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{array}\right.$, dove $c \in \mathbb{R}$.

a.) Trovare, usando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, tutti i valori di c tale che il sistema ha soluzioni.

b.) Per i valori di c trovati nel punto precedente trovare tutti gli soluzioni del sistema.

Esercizio 2.
Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i punti $P = (0, 1, 3)$ e $Q = (1, 2, -2)$ e il piano $\pi : x + y - 2z = 4$.
a.) Calcolare la distanza tra P e π.
b.) Dimostare che la retta passante tra P e Q non è perpendicolare a π.
c.) Trovare l'equazione cartesiano del piano che contiene i punti P e Q e che è perpendicolare a π.

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare dato da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 3x_1 - x_2 - x_4 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + 2x_3 \end{pmatrix}$.

a.) Trovare la matrice A che rappresenta T.
b.) Calcolare il rango di A.

Esercizio 4. Vero o falso?

1. Il piano $2x+2y-z = 12$ contiene le rette $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & & & t \\ y & = & 7 & - & t \\ z & = & 2 & & \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ e $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 3 & + & t \\ y & = & 3 & + & t \\ z & = & & & 4t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
2. L' equazione Cartesiano della retta in $\mathbb{R}^2$ dato da $\left\{\begin{array}{l} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 3t \quad t \in \mathbb{R} \end{array}\right.$ è $2x - 3y = 5$.
3. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $\vec{b}$ una colonne di A. Allora il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ è sempre compatibile.
4. Se il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ha una unica soluzione, allora A deve essere una matrice quadrata.
5. Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono tre vettori di $\mathbb{R}^2$, allora $\vec{w}$ è una combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
6. Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
7. Se $\vec{u}$ è una combinazione lineare di $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e $\vec{v}$ è una combinazione lineare di $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{r}$, allora $\vec{u}$ è una combinazione lineare di $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ e $\vec{w}$.
8. Esiste una matrice 2×3 A tale che $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
9. L'applicazione lineare con matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è una riflessione.
10. L'applicazione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dato da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \end{pmatrix}$ è lineare.