Matematica Discreta
Compito 4

1.) Quale delle applicazioni $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è lineare?

a.) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2+2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 3x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

2.) Trovare la matrice dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dato da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 9x_1+3x_2-3x_3 \\ 2x_1-9x_2-x_3 \\ 4x_1-9x_2-2x_3 \\ 5x_1+x_2+5x_3 \end{pmatrix}$.

3.) Consideriamo l'applicazione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dato da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Stabilire se T è lineare e, in caso di si, trovare la matrice.

4.) In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la retta l data da $l = \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trovare la matrice che rappresenta la rifessione in l e l'immagine del vettore $\vec{v}$ sotto questa riflessione.

5.) Trovare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con

$T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$, $T(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

6.) Trovare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con

a.) $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b.) $T(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $T(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.) Trovare, se è possibile, l'inverse dei seguente matrici:

a.) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ d.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

e.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ f.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ g.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ h.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

8.) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ è la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ invertibile? In tale casi trovare l'inverse.

9.) Sia A una matrice $n \times n$ e $m \in \mathbb{N}$. Il prodotto $AA \dots A$ (di m copie di A) viene denotato con A^m. Calcolare:

a.) A^8, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b.) A^{10}, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c.) A^5, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10.) Multiplicare, se è possibile, le matrici dati.

a.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ f.) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

11.) Siano A e B due matrici $n \times n$ invertibile. Dimostrare: AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Buon divertimento!