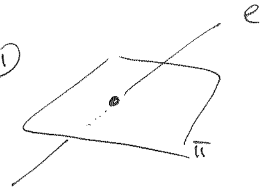
(1)



$(1+t) - (-1+3t) + 4(2+4t) = 7$

$14t + 10 = 7 \qquad t = -3/14 \qquad$ il punto è $\left(11/14, -23/14, 16/14\right)$

(2) a) un vettore di direzione della retta ℓ è $\vec v = \begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$

un normale del piano π è $\vec n = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 6-2-4=0$

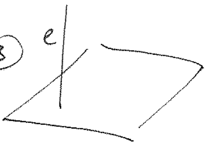
Quindi sono paralleli

b) un vettore di direzione della retta ℓ è $\vec v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

un normale del piano π è $\vec n = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\qquad \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\rangle = 1-2+6 = 5 \neq 0$

Quindi non sono paralleli

(3)



ℓ è perpendicolare a π se e solo se un vettore di direzione di ℓ è parallelo ad un normale di π.

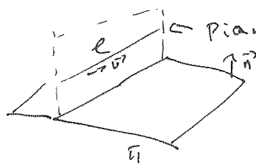
a) un vettore di direzione di ℓ è $\vec v = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, un normale di π è $\vec n = \begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\vec n = 2\vec v$ quindi ℓ è perpendicolare a π.

b) un vettore di direzione di ℓ è $\vec v = \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$, un normale di π è $\vec n = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

$\vec n$ non è un multiplo di $\vec v$, quindi ℓ non è perpendicolare a π.

$\left\langle \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} \right\rangle = 0$ Quindi ℓ è parallelo a π $\quad (3,2,1)$ è su ℓ ma non su π.



Il piano cercato è parallelo a $\vec v$ e $\vec n$, quindi un normale è $\vec v \wedge \vec n$

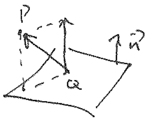
$$\vec v \wedge \vec n = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -1 & 1 & -3\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec k = 6\vec i - 6\vec j - 4\vec k = \begin{pmatrix}6\\-6\\-4\end{pmatrix}$$

un punto sul piano cercato è $(3,2,1)$

Quindi $\left\langle \begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}6\\-6\\-4\end{pmatrix} \right\rangle = 0$ $\qquad 6(x-3)-6(y-2)-4(z-1)=0$

$6x-6y-4z-2=0 \qquad 3x-3y-2z-1=0$

(4) (a)



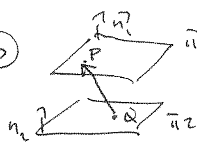
$P = (1,-2,3)$

$\pi: 2x-2y+z=4$ $\qquad$ un normale è $\vec n = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, un punto su π è $Q = (2,0,0)$

$\vec{QP} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} \qquad \mathrm{proj}_{\vec n}\vec{QP} = \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \dfrac{-2+4+3}{4+4+1}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \dfrac{5}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\|\mathrm{proj}_{\vec n}\vec{QP}\| = \dfrac{5}{9}\left\|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\| = 5/3$

(b)



un normale del piano π_1 è $\vec n_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad -3\vec n_1 = \vec n_2$ quindi i piani sono paralleli

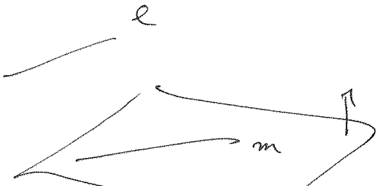
un normale del piano π_2 è $\vec n_2 = \begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix}$

$P = (0,0,0)$ è su π_1 (ma non su π_2).

$Q = (5/6, 0, 0)$ è su π_2 $\qquad \vec{QP} = \begin{pmatrix}-5/6\\0\\0\end{pmatrix}$

$\mathrm{proj}_{\vec n_2}\vec{QP} = \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}-5/6\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix} = \dfrac{-5}{54}\begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix} \qquad \|\mathrm{proj}_{\vec n_2}\vec{QP}\| = \dfrac{5}{54}\sqrt{54}.$

(c)



un vettore di direzione di ℓ è $\vec v = \begin{pmatrix}7\\1\\-3\end{pmatrix}$

un vettore di direzione di m è $\vec w = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

un normale del piano π che contiene m e che è parallelo ad ℓ è $\vec v \wedge \vec w$

$$\vec v \wedge \vec w = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 7 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec k = 2\vec i - 11\vec j + \vec k = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

un punto P su l è $P=(1,3,5)$

un punto Q su m è $Q=(4,6,7)$ $\qquad \vec{QP} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{proj}_{\vec v \wedge \vec w} \vec{QP} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-6+33-2}{4+121+1} \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{25}{126} \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

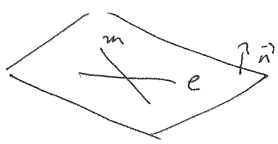
$$\| \mathrm{proj}_{\vec v \wedge \vec w} \vec{QP} \| = \frac{25}{126}\sqrt{126}.$$

(5) un vettore di direzione di l è $\vec v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

un vettore di direzione di m è $\vec w = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\vec v$ e $\vec w$ non sono paralleli

$$\begin{cases} -1+4t = -13+12s \\ 3+t = 1+6s \\ 1 = 2+3s \end{cases} \to \begin{cases} 4t-12s = -12 \\ t-6s = -2 \\ -3s = 1 \end{cases} \to \begin{cases} t-3s = -3 \\ t-6s = -2 \\ s = -1/3 \end{cases} \to \begin{cases} t = -4 \\ t = -4 \\ s = -1/3 \end{cases}$$

il punto di intersezione è $(-17,-1,1)$



un normale del piano è $\vec v \wedge \vec w$

$$\vec v \wedge \vec w = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 4 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}\vec k = 3\vec i - 12\vec j + 12\vec k = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

un normale del piano è $\vec n = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ un punto nel piano è $B=(-1,3,1)$. $A=(x,y,z)$

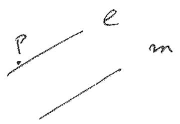
$\vec{BA} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \\ z-1 \end{pmatrix}$ $\quad \langle \vec{BA} | \vec n \rangle = 0 \quad \left\langle \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \\ z-1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad (x+1)-4(y-3)+4(z-1)=0$

$x-4y+4z+9=0.$

(6) un vettore di direzione di l è $\vec v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec v = -\vec w$ quindi le rette sono parallele

un vettore di direzione di m è $\vec w = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

il punto $P=(-2,3,4)$ è su l ma non su m.



il punto $Q=(3,4,0)$ è su m. $\quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

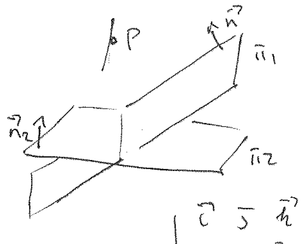
un normale del piano è $\vec v \wedge \vec{PQ}$

$$\vec v \wedge \vec{PQ} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\vec k = -7\vec i - \vec j - 9\vec k = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

un normale del piano è $\vec n = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$, un punto è $Q=(3,4,0)$

$\left\langle \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad 7(x-3)+(y-4)+9(z)=0 \qquad 7x+y+9z-25=0$

(7)



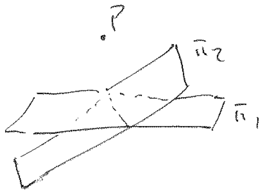
un vettore di direzione della retta di intersezione di π_1 e π_2 è $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$ dove $\vec{n_1}$ è un normale di π_1 e $\vec{n_2}$ un normale di π_2.

un normale di π_1 è $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, un normale di π_2 è $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec k = -2\vec i + 5\vec j + 11\vec k = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 5-2t \\ y = 5t \\ z = -2+11t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

8



$\pi_1: 2x+y+z=2$ un normale è $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$\pi_2: x+2y+z=3$ un normale è $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

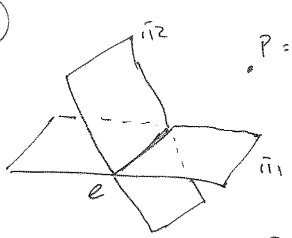
un normale del piano cercato è $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$ (che è un vettore di direzione della retta d'intersezione di π_1 e π_2).

$$\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

P è un punto sul piano. Quindi $\left\langle \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z+1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\rangle=0$ $\quad -(x-1)-(y-2)+3(z+1)=0$

$-x-y+3z+6=0 \qquad x+y-3z-6=0$

9



$P=(1,2,3)$ $\quad \pi_1: x-4y+z=23$ un normale è $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$

$\pi_2: 3x-z=2$ un normale è $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$

un vettore di direzione della retta d'intersezione ℓ è $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$

$$\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-4&1\\3&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&1\\3&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-4\\3&0\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}=\begin{pmatrix}4\\4\\12\end{pmatrix}$$

Quindi un vettore di direzione di ℓ è $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

prendiamo un pto su ℓ: $\begin{cases}x-4y+z=23\\3x-z=2\end{cases}$ per esempio $Q=(0,-\frac{25}{4},-2)$

$\vec{QP}$ è parallelo al piano cercato: $\vec{QP}=\begin{pmatrix}1\\33/4\\5\end{pmatrix}$

$\vec{v}$ è parallelo al piano cercato, un normale del piano cercato è $\vec{v}\wedge\vec{QP}$

$$\vec{v}\wedge\vec{QP}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&3\\1&\frac{33}{4}&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\\frac{33}{4}&5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&3\\1&5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&1\\1&\frac{33}{4}\end{vmatrix}\vec{k}=-\frac{79}{4}\vec{i}-2\vec{j}+\frac{29}{4}\vec{k}=\begin{pmatrix}-79/4\\-2\\29/4\end{pmatrix}$$

un normale del piano cercato è $\begin{pmatrix}79\\8\\-29\end{pmatrix}$

Quindi $\left\langle \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}79\\8\\-29\end{pmatrix}\right\rangle=0$ $\quad 79(x-1)+8(y-2)-29(z-3)=0$

$79x+8y-29z-8=0$

10

a) $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&5\\2&3&4&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&5\\0&1&8&-8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-10&13\\0&1&8&-8\end{array}\right)$ $\quad \begin{cases}x_1-10x_3=13\\x_2+8x_3=-8\end{cases}$

$\to \begin{cases}x_1=10x_3+13\\x_2=-8x_3-8\end{cases}$

sol: $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1=10x_3+13,\ x_2=-8x_3-8\right\}=\left\{\begin{pmatrix}10x_3+13\\-8x_3-8\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, x_3\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}13\\-8\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10x_3\\-8x_3\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, x_3\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix}13\\-8\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\-8\\1\end{pmatrix}t \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}.$

b) $(1\ 2\ 3\,|\,4)$ $\quad \{x+2y+3z=4 \to x=-2y-3z+4$

sol $=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=-2y-3z+4\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-2y-3z+4\\y\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, y,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2y\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3z\\0\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, y,z\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}t \,\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\}$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 13 & 7 & 0 \\ 7 & 22 & 13 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 7 & 22 & 13 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

non ha soluzioni

d) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

sol : $$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, x_1 = -2x_2 ,\ x_3 = x_4 = x_5 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

e) $$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ x_4 + 2x_5 - x_6 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_5 + x_6 \\ x_3 = 1 + x_5 - x_6 \\ x_4 = 2 - 2x_5 + x_6 \end{cases}$$

sol : $$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 - x_5 + x_6 \\ x_3 = 1 + x_5 - x_6 \\ x_4 = 2 - 2x_5 + x_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 - x_5 + x_6 \\ x_2 \\ 1 + x_5 - x_6 \\ 2 - 2x_5 + x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_5, x_6 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_5 \\ 0 \\ x_5 \\ -2x_5 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_6 \\ 0 \\ -x_6 \\ x_6 \\ 0 \\ x_6 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_5, x_6 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_5, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

f) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -13/3 & 26/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Sol: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = 1,\ y = 2,\ z = -2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ unica soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$