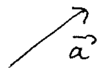
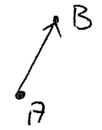
Vettori

un segmento orientato in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ si chiama un vettore



$\vec{a}$ si dice "il vettore a"

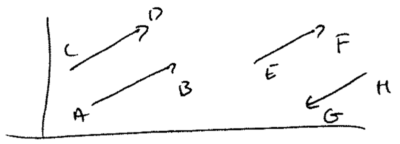
Se A è il punto iniziale e B il punto finale scriviamo spesso $\vec{AB}$



Un vettore $\vec{AB}$ ha : - una direzione (quella della retta per A e B)
- un verso (quella di A a B)
- un modulo (la lunghezza del segmento)

Scriviamo $\| \vec{AB} \|$ per il modulo.

Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si dice uguali se hanno lo stesso direzione, verso e modulo.



$\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF} \neq \vec{HG}$

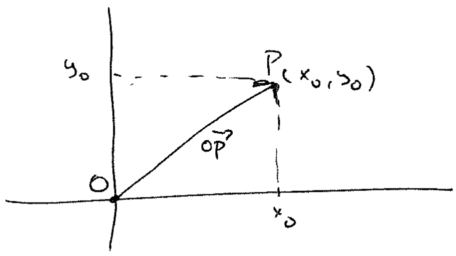
Due vettori si dicono parallele se hano lo stesso direzione

esempio : $\vec{HG}$ è parallelo a $\vec{AB}$

In $\mathbb{R}^2$

Scegliamo un sistema di coordinati ortogonali

ogni vettore posso mettere con il punto iniziale nel origine : $\vec{OP}$, dove p è il punto finale:

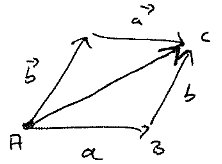


Se $P = (x_0, y_0)$ allora scriviamo $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Il modulo $\| \vec{OP} \| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

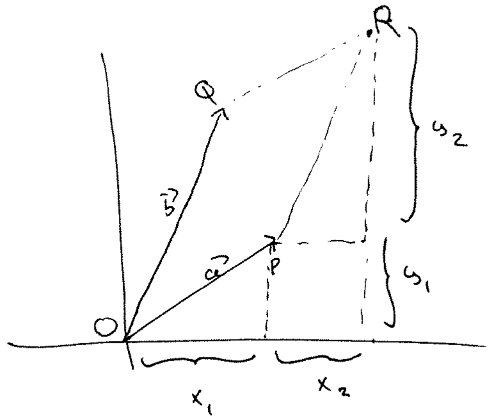
- Definiamo la somma di due vettori

$\vec{a} + \vec{b}$: il vettore $\vec{AC}$



oss : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Nel sistema di coordinate :



se $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OQ}$ con

$P = (x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ allora.

$\overrightarrow{OR}$ è determinato dai coordinate del punto R

$R = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

quindi $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

- il vettore nullo : $\vec{0}$ è il vettore di lunghezza 0
  è $\overrightarrow{OO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- l'opposto di $\vec{a}$ $\vec{a}$ ← l'opposto di $\vec{a}$

l'opposto di $\vec{a}$ è il vettore con lo stesso direzione e modulo come $\vec{a}$ ma verso opposto : scriviamo $-\vec{a}$: oss $\vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$ $\vec{a}$ $-\vec{a}$ $-\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$

esempio: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ allora $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$: oss $-\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PO}$

esempio: $A = (1,2)$ $B = (3,4)$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- moltiplicazione con scalari

sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{a}$ un vettore allora

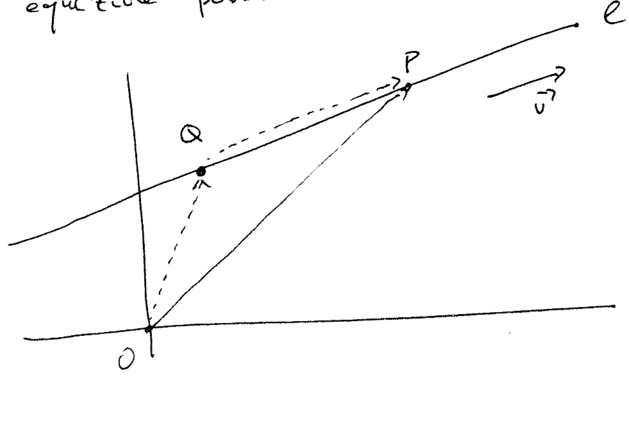
$\lambda\vec{a}$ è il vettore :
- con modulo $|\lambda| \, \|\vec{a}\|$
- lo stesso direzione come $\vec{a}$
- $\begin{cases} \text{il verso di } \vec{a} & \text{se } \lambda > 0 \\ \text{il verso opposto di } \vec{a} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$

$\vec{v}$ $\frac{1}{2}\vec{v}$ $\vec{v}$ $\vec{v}$ $2\vec{v}$ $\vec{v}$ $-\frac{1}{2}\vec{v}$ se $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ allora $\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

oss se $n \in \mathbb{N}$, allora $n\vec{v} = \underbrace{\vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \cdots + \vec{v}}_{n \text{ volte}}$; $0\vec{v} = \vec{0}$; se $\vec{v} \neq \vec{0}$ allora $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ è un vettore di modulo 1 con lo stesso direzione e verso come $\vec{v}$.

Equazioni di rette in $\mathbb{R}^2$

l'equazione parametrica e vettoriale



Sia l una retta in $\mathbb{R}^2$
sia $Q = (x_0, y_0)$ un punto (fissato) su l e sia P un punto generico

$P = (x, y)$

sia $\vec{v}$ un vettore di direzione di l
(cioè $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ dove A, B sono due punti diversi in l).

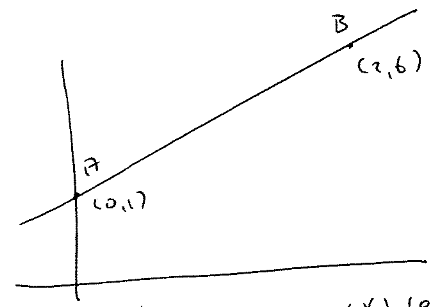
sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Il vettore $\vec{QP}$ è un multiplo di $\vec{v}$

quindi $\vec{QP} = \lambda \vec{v}$ per certo $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$ quindi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ eq. vettoriale

$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ eq parametrica.

esempio



trovare la retta tra A e B, dove

$A = (0,1)$ e $B = (2,6)$

un vettore di direzione è: $\vec{AB}$

$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

e l'eq. parametrica: $\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

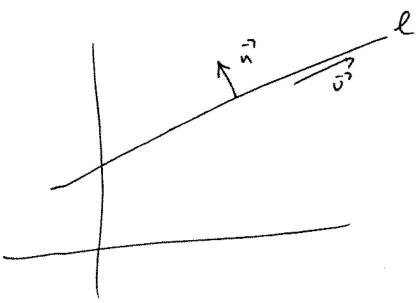
Quindi l'equazione vet. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

oss un vettore di direzione si vede come i coefficienti davanti t.

In fatti per $t=0$ trovo $P: (x_0, y_0)$
per $t=1$ trovo $Q: (x_0+a, y_0+b)$ quindi un vettore di direzione è

$\vec{PQ} = -\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0+a \\ y_0+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

In $\mathbb{R}^2$ c'è un altro metodo:



un vettore (non nullo) perpendicolare alla retta si dice un normale della retta

oss se $\vec{n}$ è un normale allora $\lambda\vec{n}$ con $\lambda \neq 0$ lo è.

cerchiamo un metodo di trovare $\vec{n}$

Prodotto scalare (in $\mathbb{R}^2$)

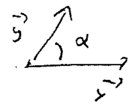
Siano $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, definiamo il prodotto scalare $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

esempio $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle = 1.5 + 2.7 = 5 + 14 = 19$.

oss $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle$

oss: $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = x_1 x_1 + x_2 x_2 = \| \vec{x} \|^2$

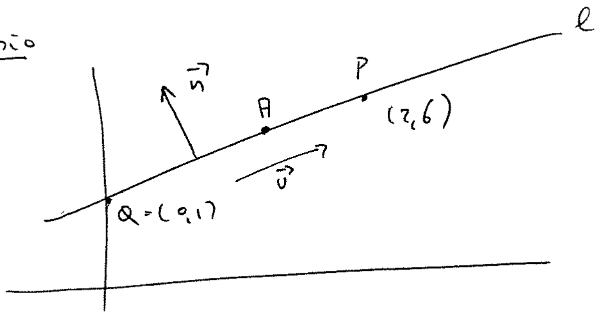
propietà: $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{x} = \vec{0} \text{ o } \vec{y} = \vec{0} \\ \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\alpha & \text{dove } \alpha \text{ è:} \end{cases}$



(segue dalle formule del sen e cos).

oss se $\vec{x} \neq \vec{0}$ e $\vec{y} \neq \vec{0}$ Allora $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$ se e solo se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono perpendicolari:

esempio



$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ un vettore di direzione

un normale di ℓ è un vettore perpendicolare su $\vec{v}$ cioè un vettore $\vec{n}$ con $\langle \vec{n} \mid \vec{v} \rangle = 0$

per esempio $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

un punto $A = (x, y)$ è sulla retta ℓ se e solo se $\vec{QA}$ è perpendicolare su $\vec{n}$ se e solo se $\langle \vec{QA} \mid \vec{n} \rangle = 0$

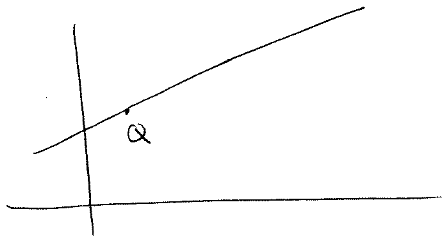
$\vec{QA} = -\vec{OQ} + \vec{OA} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$

quindi $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ cioè $-5(x) + 2(y-1) = 0$

cioè $\boxed{-5x + 2y - 2 = 0}$ eq. cartesiana di ℓ.

(fai il controllo se P e Q sonno su ℓ!)

In generale:



Q un punto dato su ℓ, $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ un normale.

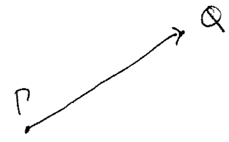
$P = (x, y)$ $\quad Q = (x_0, y_0)$

$\vec{QP} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

$\langle \vec{QP} \mid \vec{n} \rangle = 0$: $n_1 x + n_2 y + \cdots\cdots = 0$

$\uparrow \quad \uparrow$ i componenti del normale scelta.

Come calcolare la distanza tra due punti in $\mathbb{R}^2$:

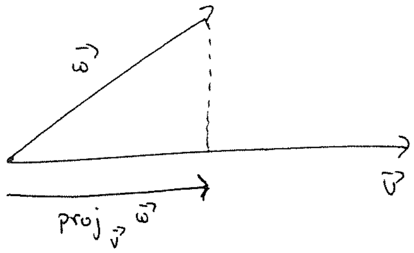


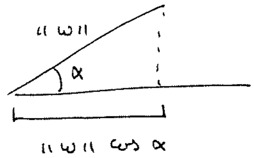
: la distanza tra P e Q è $\| \vec{PQ} \|$

esempio $P = (1, 2)$, $Q = (3, 5)$ $\quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \| \vec{PQ} \| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Siano $\vec{v}, \vec{w}$ due vettori in $\mathbb{R}^2$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

Definiamo la proiezione di $\vec{w}$ nella direzione di $\vec{v}$

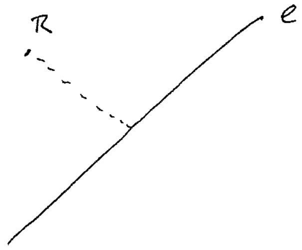




$$Proj_{\vec{v}} \vec{w} = \|w\| \cos\alpha \frac{1}{\|v\|} \vec{v} = \frac{\|\vec{w}\| \, \|\vec{v}\| \cos\alpha}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$ quindi

$$\boxed{proj_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\langle \vec{w} | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} \vec{v}}$$

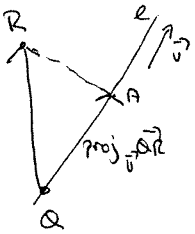
Trovare la distanza tra un punto e una retta



① dato un eq. parametrica di ℓ

② dato un eq cartesiana di ℓ

esempio ① $\ell : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$ $R = (1,1)$



un vettore di direzione di ℓ è $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

prendiamo un punto Q su ℓ : $Q = (-1, 1)$

Allora la distanza tra R e ℓ è $\|\vec{AR}\|$

$$\vec{AR} = -proj_{\vec{v}} \vec{QR} + \vec{QR}$$

Quindi la distanza tra R e ℓ è $\|\vec{QR} - proj_{\vec{v}} \vec{QR}\|$

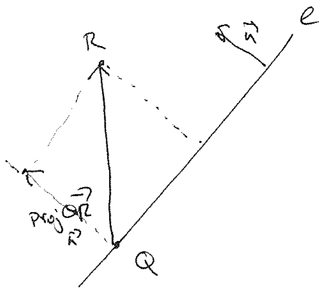
Allora $\vec{QR} = \vec{QO} + \vec{OR} = -\vec{OQ} + \vec{OR} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$proj_{\vec{v}} \vec{QR} = \frac{\langle \vec{QR} | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} \vec{v} = \frac{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{8+0}{16+9} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32/25 \\ -24/25 \end{pmatrix}$$

$$\vec{QR} - proj_{\vec{v}} \vec{QR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32/25 \\ -24/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/25 \\ 24/25 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{QR} - proj_{\vec{v}} \vec{QR}\| = \left\| \begin{pmatrix} 18/25 \\ 24/25 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{18}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2} = 6/5.$$

esempio (2)



$\ell : \; 3x + 4y = 1$

$R = (1,1)$

prendiamo un punto Q su ℓ. la distanza tra R e ℓ è $\| \mathrm{proj}_{\vec n} \overrightarrow{QR} \|$ dove $\vec n$ è un normale della retta.

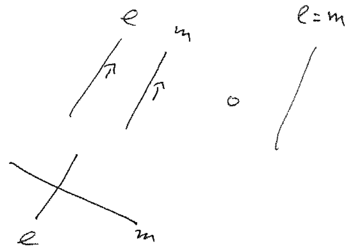
se $Q = (-1,1)$ (è su ℓ perché è una soluzione dell'equazione)

allora $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. un normale è: $\vec n = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{proj}_{\vec n} \overrightarrow{QR} = \frac{\langle \overrightarrow{QR} \mid \vec n \rangle}{\langle \vec n \mid \vec n \rangle} \vec n = \frac{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{6}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\| \mathrm{proj}_{\vec n} \overrightarrow{QR} \| = \frac{6}{25} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{6}{25} \sqrt{25} = 6/5.$$

due rette in $\mathbb{R}^2$:
- o sono paralleli (i vettori di direzione sono paralleli)
- o c'è un solo punto in commune.



esempio

ℓ la retta che passa tra $P = (1,1)$ e $Q = (2,4)$

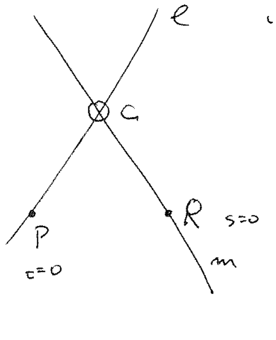
m la retta che passa tra $R = (-1,5)$ e $S = (2,8)$

ℓ: un vettore di direzione è $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

m: un vettore di direzione è $\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

} i vettori non sono paralleli

$\ell = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad m = \begin{cases} x = -1 + 3s \\ y = 5 + 3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$ Sia c il punto in $\ell \cap m$

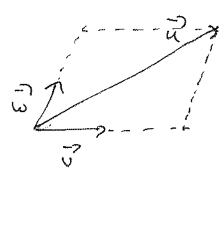


il punto c è su entrambi le rette quindi esistono t e s con

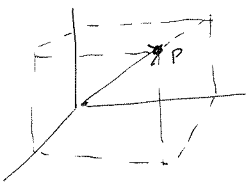
$$\begin{cases} 1 + t = -1 + 3s \\ 1 + 3t = 5 + 3s \end{cases} \to \begin{cases} t - 3s = -2 \\ 3t - 3s = 4 \end{cases} \to \begin{cases} t - 3s = -2 \\ 2t = 6 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} t = 3 \\ s = 5/3 \end{cases} \quad \text{allora} \quad c = (4, 10)$$

OSS se $\vec v$ e $\vec w$ sono due vettori non nulli di $\mathbb{R}^2$, e $\vec u$ è un vettore di $\mathbb{R}^2$, se $\vec v$ e $\vec w$ non sono paralleli allora esiste $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tale che $\vec u = \lambda \vec v + \mu \vec w$



In $\mathbb{R}^3$ la situazione è analoga.



$P = (x_0, y_0, z_0)$ $\qquad \vec{OP} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ $\qquad \| \vec{OP} \| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$

la somma: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$

moltiplicazione con scalari: $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

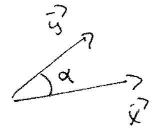
<u>oss</u> sia $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ allora

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}$$

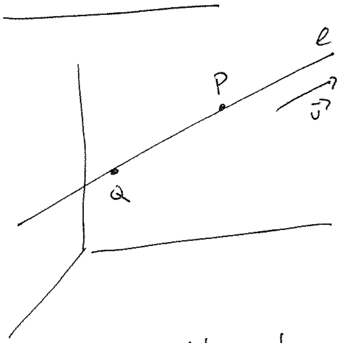
<u>prodotto scalare</u>

se $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ allora: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

$= \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \| \cos \alpha$



<u>Rette in $\mathbb{R}^3$</u>



un vettore di direzione $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

dato un punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$

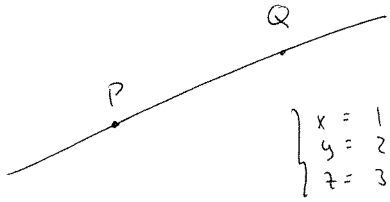
$P = (x, y, z)$ è sulla retta se e solo se

$\vec{OP} = \vec{OQ} + \lambda \vec{v}$ per certo $\lambda \in \mathbb{R}$

eq vettoriale: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

eq parametrica $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

<u>Esempio</u> trovare l'eq. parametrica della retta ℓ che passa tra P e Q dove $P = (1,2,3)$ e $Q = (4,5,6)$.



un punto su ℓ è $P = (1,2,3)$

un vettore di direzione è $\vec{PQ} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

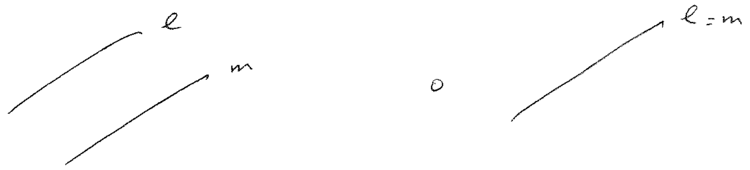
è $(8,9,10)$ su ℓ ?

$$\begin{cases} 8 = 1 + 3t \\ 9 = 2 + 3t \\ 10 = 3 + 3t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 7/3 \\ t = 7/3 \\ t = 7/3 \end{cases}$$

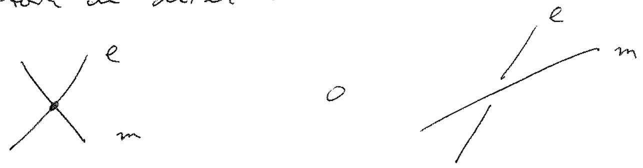
sì! perché il sistema ha una soluzione.

consideriamo due rette in $\mathbb{R}^3$ ℓ e m

- i vettori di direzione sono paralleli (cioè uno è un multiplo del altro)



- due vettori di direzione non sono paralleli



hanno un punto in comune

sghembe

<u>esempio</u> $\ell = \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 5 - 4t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ $\qquad m = \begin{cases} x = 2 + 8t \\ y = 4 - 3t \\ z = 5 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}$ è un vettore di direzione di ℓ e $\vec{w}$ è un vettore di direzione di m

$\vec{v}$ è parallelo a $\vec{w}$? $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 8\lambda \\ -4 = -3\lambda \\ 5 = \lambda \end{cases}$ non ha soluzioni!

Quindi $\vec{v}$ non è parallelo a $\vec{w}$

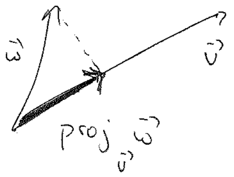
ℓ e m hanno un punto in comune? Se sì allora esistono t, s che danno lo stesso punto dove

$\ell: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 5 - 4t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad m: \begin{cases} x = 2 + 8s \\ y = 4 - 3s \\ z = 5 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$

cioè $\begin{cases} 1 + 4t = 2 + 8s \\ 5 - 4t = 4 - 3s \\ -1 + 5t = 5 + s \end{cases}$ deve avere soluzioni. $\rightarrow \begin{cases} 4t - 8s = 1 \\ -4t + 3s = -1 \\ 5t - s = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4t - 8s = 1 \\ -5s = 0 \\ 5t - s = 6 \end{cases}$

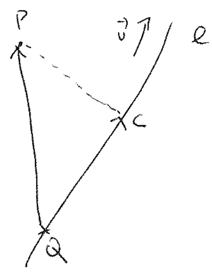
$\rightarrow \begin{cases} t = 1/4 \\ s = 0 \\ t = 5/6 \end{cases}$ non ha soluzioni, Quindi le rette non hanno un punto in comune; quindi sono sghembe.

Come nel $\mathbb{R}^2$ si può vedere che se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono due vettori



$$\text{proj}_{\vec v}\vec w = \frac{\langle \vec w \mid \vec v\rangle}{\langle \vec v \mid \vec v\rangle}\,\vec v$$

<u>Esempio</u> trovare la distanza tra un punto e una retta in $\mathbb{R}^3$



la distanza tra P e l è $\|\vec{CP}\|$

Prendiamo un punto su l: Q allora $\vec{QC} = \text{proj}_{\vec v}\vec{QP}$

$\vec{CP} = \vec{QP} - \text{proj}_{\vec v}\vec{QP}$ dove $\vec v$ è un vettore di direzione di l.

se $l = \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 5+t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ e $P=(1,1,1)$. $\vec v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ è un vettore di direzione di l

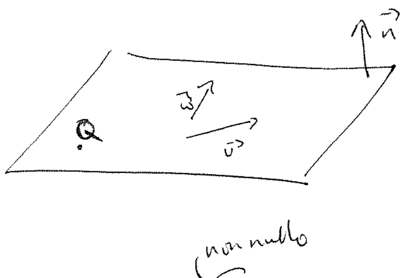
osserva che P non è su l. $Q=(1,2,5)$ è su l (prendo $t=0$)

$$\vec{QP} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix} \qquad \text{proj}_{\vec v}\vec{QP} = \frac{\langle \vec{QP}\mid\vec v\rangle}{\langle \vec v,\vec v\rangle}\vec v = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -\frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{QP} - \text{proj}_{\vec v}\vec{QP} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/3\\2/3\\-7/3\end{pmatrix}$$

$$\|\vec{QP} - \text{proj}_{\vec v}\vec{QP}\| = \left\|\begin{pmatrix}5/3\\2/3\\-7/3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(5/3)^2+(2/3)^2+(-7/3)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{78}$$

<u>Piani in $\mathbb{R}^3$</u>



① è data da un punto Q e due vettori paralleli al piano o (meglio)

② è data da un punto Q e un vettore $\vec n$ perpendicolare al piano

un vettore non nullo perpendicolare al piano si dice un normale del piano.

<u>oss</u> P è un punto del piano se e solo se $\vec{OP} = \vec{OQ} + \lambda\vec v + \mu\vec w$ per certi $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

se $P=(x,y,z)$, $Q=(x_0,y_0,z_0)$ $\vec v = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\vec w = \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$ $\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}}_{\text{eq. vettoriale del piano}}$

Abbiamo bisogno di un altra tecnica.

<u>Prodotto vettoriale</u> (solo definito $= \mathbb{R}^3$)

siano $\vec{x}$ e $\vec{y}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Il prodotto vettoriale $\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\vec{i} - (x_1 y_3 - x_3 y_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$

come ricordarlo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad (\text{cioè } \diagdown - \diagup)$$

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & x_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

<u>esempio</u> $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (2-0)\vec{i} - (1+6)j + (0-6)\vec{k}$$

$$= 2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

<u>oss</u> $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 - 14 + 12 = 0$

$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 + 0 - 6 = 0$

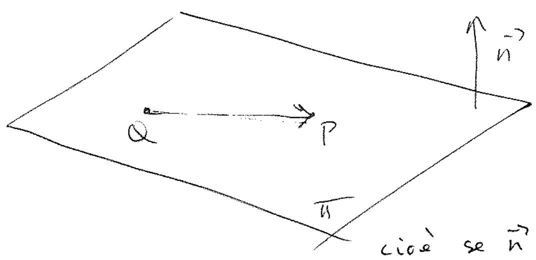
$\vec{u} \wedge \vec{v}$ è perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

<u>In generale</u>: $\vec{x} \wedge \vec{y}$ è un vettore perpendicolare a $\vec{x}$ e $\vec{y}$, cioè $\langle \vec{x} \wedge \vec{y} | \vec{x} \rangle = 0 = \langle \vec{x} \wedge \vec{y} | \vec{y} \rangle$

<u>oss</u> $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$.

Come trovare l'equazione cartesiana del piano π

dato un punto $Q \in \pi$ e un normale:



$P \in \pi$ se e solo se $\vec{QP}$ è parallelo al piano se e solo se $\vec{QP}$ è perpendicolare a $\vec{n}$ se e solo se $\langle \vec{QP} | \vec{n} \rangle = 0$.

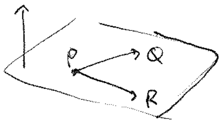
cioè se $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $Q = (x_0, y_0, z_0)$ $P = (x, y, z)$

$\left\langle \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ $\quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$ax + by + cz + \dots = 0$

coefficienti del normale

<u>esempio</u> trovare l'equazione del piano per i pti P, Q e R dove
$P = (1, 2, -1)$, $Q = (2, 3, 1)$ e $R = (3, -1, 2)$



i vettori $\vec{PQ}$ e $\vec{PR}$ sono paralleli al piano (e non paralleli tra di loro)
quindi $\vec{PQ} \wedge \vec{PR}$ è un normale del piano

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{PQ} \wedge \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 9\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

un punto $A = (x, y, z)$ è nel piano se e solo se $\vec{PA}$ è perpendicolare a $\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
cioè il prodotto scalare è zero.

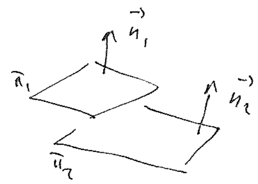
$$\vec{PA} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$9(x-1) + (y-2) - 5(z+1) = 0$$

$$\boxed{9x + y - 5z - 16 = 0}$$

(controlare se P, Q, R sono nel piano!)

<u>esempio</u> i piani
$3x - 4y + 5z = 0$
$-6x + 8y - 10z - 4 = 0$ sono paralleli?

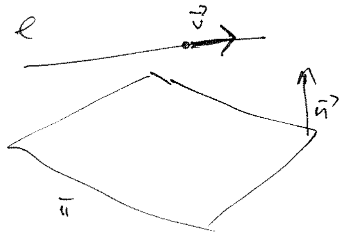


due piani sono paralleli se e solo se i vettori normali sono paralleli

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

e $-2\vec{n}_2 = \vec{n}_1$ Quindi i piani sono paralleli.

<u>esempio</u> la retta $\ell : \begin{cases} x = 3 + 8t \\ y = 4 + 5t \\ z = -3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ è parallelo al piano $\pi : x - 3y + 5z = 12$?



ℓ è parallelo al piano se e solo se un vettore di direzione di ℓ è perpendicolare a un normale del piano.

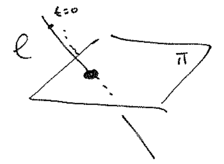
un vettore di direzione di ℓ è : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

un normale del piano è : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\langle \vec{v} | \vec{n} \rangle = 8 - 15 - 5 = -12 \neq 0$
Quindi $\vec{v}$ e $\vec{n}$ non sono perpendicolari

Dato che ℓ e π non sono paralleli c'è un punto di intersezione.

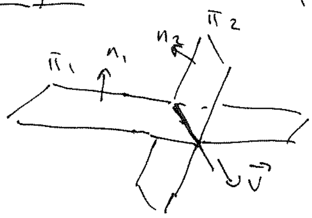
Allora



$$(3+8t)-3(4+5t)+5(-3-5t)=12$$
$$-24-12t=12$$
$$12t=-36$$
$$t=-3$$

quindi il punto è $(-21,-11,0)$.

<u>Esempio</u> Trovare la retta di intersezione di due piani



$\pi_1: \ -2x+3y+7z+2=0$ un normale $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\7\end{pmatrix}$

$\pi_2: \ x+2y-3z+5=0$ un normale $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

<u>oss</u> un vettore di direzione della retta è parallelo a π_1 e π_2 cioè è perpendicolare a $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Quindi $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ è un vettore di direzione della retta.

$$\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 7\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & -3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=-23\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}=\begin{pmatrix}-23\\1\\-7\end{pmatrix}.$$

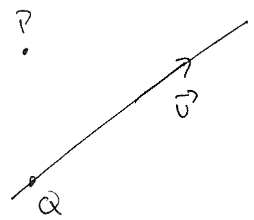
un punto sulla retta è in π_1 e π_2 quindi una soluzione del sistema

$$\begin{cases}-2x+3y+7z+2=0\\ x+2y-3z+5=0\end{cases} \to \begin{cases}7y+z+12=0\\ x+2y-3z+5=0\end{cases}$$

una sol. è $(-18,-1,-5)$

Quindi $\begin{cases}x=-18-23t\\ y=-1+t\\ z=-5-7t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ è un eq. parametrica della retta.

<u>Esempio</u> trovare l'equazione del piano che contiene il punto P e la retta ℓ dove $P=(1,2,3)$ e $\ell=\begin{cases}x=t\\ y=1-t\\ z=2+t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$



<u>oss</u> P non è su ℓ

se Q è su ℓ e $\vec{v}$ è un vettore di direzione di ℓ allora un normale del piano è perpendicolare su $\vec{v}$ e $\vec{PQ}$ quindi

$\vec{PQ}\wedge\vec{v}$ è un normale del piano.

Sia $Q = (0,1,2)$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 0\vec{j} + 2\vec{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

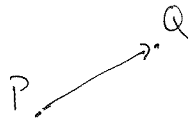
un normale del piano è $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, un punto è P quindi l'equazione

è $\left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ $\qquad -2(x-1) + 2(z-3) = 0$

$-2x + 2z - 4 = 0$ quindi $x - z + 2 = 0$

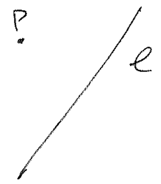
La distanza in $\mathbb{R}^3$

① Punto - Punto :



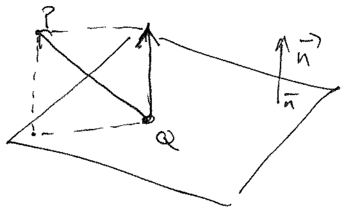
la distanza è $\|\vec{PQ}\|$

② Punto - retta :



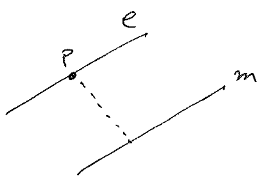
già fatto

③ Punto - piano :



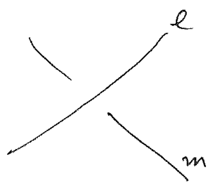
vedi esempio

④ retta - retta parallelo :



prendiamo un punto P su l e calcoliamo la distanza tra P e m. (vedi 2)

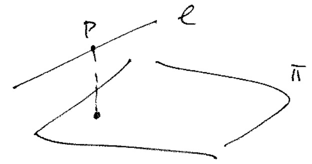
⑤ retta - retta sghemba



prendiamo il piano π che contiene m e è parallelo a l.

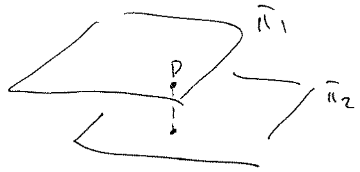
calcoliamo la distanza tra l e π (vedi ⑥)

(6) retta - piano (dove la retta è parallela al piano)



prendiamo un punto P su ℓ e calcoliamo la distanza tra P e π (vedi 3)

(7) piano - piano (dove i piani sono paralleli)



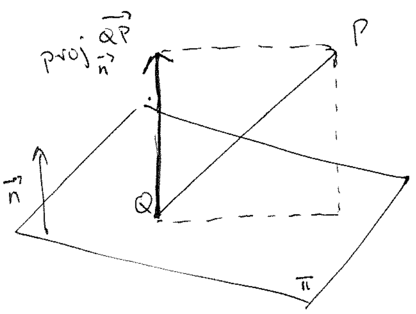
prendiamo un punto P su π_1 e calcoliamo la distanza tra P e π_2 (vedi 3)

<u>Esempio</u> la distanza tra un punto e un piano.

sia $P=(0,1,5)$ un punto e

$\pi: \ 3x+6y-2z-5=0$ un piano

<u>oss</u> P non è nel piano (perché non è una soluzione del eq. del piano).



se prendiamo un punto $Q \in \pi$ allora la distanza tra P e π è $\| \text{proj}_{\vec{n}} \vec{QP} \|$

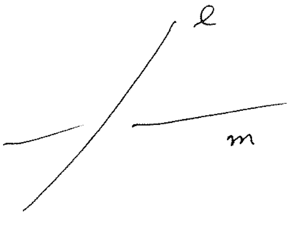
un punto $\in \pi$ è $Q = (1,0,-1)$, $\quad \vec{QP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

una normale di π è $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

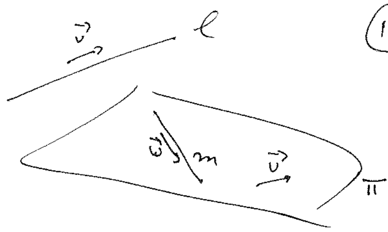
$$\text{proj}_{\vec{n}} \vec{QP} = \frac{\langle \vec{QP} \mid \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n} \mid \vec{n} \rangle} \vec{n} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-3+6-12}{9+36+4} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-9}{49} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\| \text{proj}_{\vec{n}} \vec{QP} \| = \frac{9}{49} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{9}{7}$$

<u>Esempio</u> la distanza tra due rette sghembe



sia $\ell = \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 5-4t \\ z = -1+5t \end{cases} \ t \in \mathbb{R}$ e $m = \begin{cases} x = 2+8t \\ y = 4-3t \\ z = 5+t \end{cases} \ t \in \mathbb{R}.$



un vettore di direzione di l è $\vec v = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

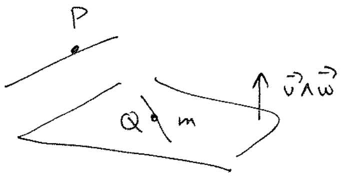
un vettore di direzione di m è $\vec w = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

un normale del piano π che contiene m e è parallelo a l è $\vec v \wedge \vec w$

$$\vec v \wedge \vec w = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 4 & -4 & 5 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \vec i - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \vec j + \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} \vec k$$

$$= 11\vec i + 36\vec j + 20\vec k = \begin{pmatrix} 11 \\ 36 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Prendiamo adesso un punto P su l e calcoliamo la distanza tra P e π: cioè prendiamo un punto Q su π (meglio su m)



e la distanza è

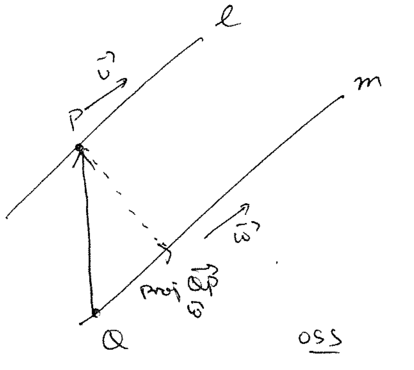
$\| \mathrm{proj}_{\vec v \wedge \vec w} \overrightarrow{QP} \|$. Prendiamo $P = (1,5,-1)$ e

$Q = (2,4,5)$, allora $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{proj}_{\vec v \wedge \vec w} \overrightarrow{QP} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 11 \\ 36 \\ 20 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 11 \\ 36 \\ 20 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 11 \\ 36 \\ 20 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 11 \\ 36 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{-95}{1817} \begin{pmatrix} 11 \\ 36 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Quindi la distanza tra l e m è $\frac{95}{1817} \left\| \begin{pmatrix} 11 \\ 36 \\ 20 \end{pmatrix} \right\| = \frac{95}{1817} \sqrt{1817}$

<u>Esempio</u> la distanza tra due rette parallele



$$l = \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 2 - 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad m = \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 6t \\ z = -9t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec w = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

<u>OSS</u> $\frac{3}{2} \vec v = \vec w$ e $Q = (1,0,0)$ è su m ma non su l

Quindi le due rette sono diversi e paralleli.

Prendiamo un punto P su ℓ e Q su m

la distanza tra ℓ e m è $\| \vec{QP} - \mathrm{proj}_{\vec{w}} \vec{QP} \|$.

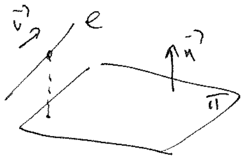
$P = (0,3,2)$

$Q = (1,0,0)$ $\quad \vec{QP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{proj}_{\vec{w}} \vec{QP} = \dfrac{\langle \vec{QP} \mid \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w} \mid \vec{w} \rangle} \vec{w} = \dots = \dfrac{-1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\vec{QP} - \mathrm{proj}_{\vec{w}} \vec{QP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/14 \\ 44/14 \\ 25/14 \end{pmatrix}$$

$$\| \vec{QP} - \mathrm{proj}_{w} \vec{QP} \| = \sqrt{\left(\frac{-13}{14}\right)^2 + \left(\frac{44}{14}\right)^2 + \left(\frac{25}{14}\right)^2} = \frac{1}{14} \sqrt{2730}$$

Esempio la distanza tra una retta parallela ad un piano



$\ell : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \pi = x + y + z = 1$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \langle \vec{v} \mid \vec{n} \rangle = 0$ quindi

ℓ è parallela a π.

Sia $P = (1,2,3)$ su ℓ. La distanza tra ℓ e π è la distanza tra P e π. Sia Q su π : $Q = (1,0,0)$

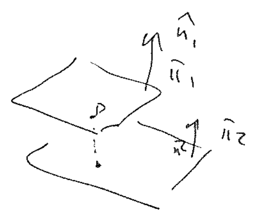
La distanza tra P e π è $\| \mathrm{proj}_{\vec{n}} \vec{QP} \|$. $\quad \vec{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mathrm{proj}_{\vec{n}} \vec{QP} = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \| \vec{QP} \| = \frac{5}{3} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5}{3} \sqrt{3}$

Esempio la distanza tra due piani paralleli

$\pi_1 : \quad x + 2y - 2z = 3 \qquad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un normale

$\pi_2 : \quad 2x + 4y - 4z = 7 \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ è un normale



$2\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ Quindi i piani sono paralleli

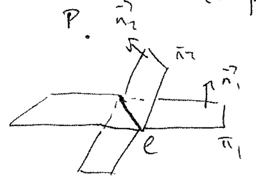
$P = (3,0,0)$ è su π_1 ma non su π_2 (quindi i piani sono diversi)

Sia $Q = (7/2, 0, 0)$ allora $\vec{QP} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La distanza tra π_1 e π_2 è la distanza tra P e π_2 $= \| \mathrm{proj}_{\vec{n}_2} \vec{QP} \|$

$\mathrm{Proj}_{\vec{n}_2} \vec{QP} = \dfrac{\langle \vec{QP} \mid \vec{n}_2 \rangle}{\langle \vec{n}_2 \mid \vec{n}_2 \rangle} \vec{n}_2 = \dfrac{-1}{36} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \| \mathrm{proj}_{\vec{n}_2} \vec{QP} \| = \dfrac{1}{6}$

Esempio Trovare l'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta d'intersezione dei piani $\pi_1: x+y+z=1$ e $\pi_2: x+y-z=0$ e il punto $P=(1,1,0)$.



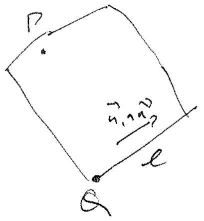
un normale di π_1 è $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

un normale di π_2 è $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Big\}$ $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$ è un vettore di direzione della retta d'intersezione l.

$\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$ è un vettore parallelo al piano π.

$$\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}\vec{k}=(-1-1)\vec{i}-(-1-1)\vec{j}+(1-1)\vec{k}$$
$$=-2\vec{i}+2\vec{j}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$



cerco un vettore di una direzione diversa di $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$ nel piano π.

Prendiamo un punto Q su l: $\begin{cases}x+y+z=1\\x+y-z=0\end{cases}\to\begin{cases}2z=1\\x+y-z=0\end{cases}\to\begin{cases}z=1/2\\x+y=1/2\end{cases}$

Allora $Q=(1/2,0,1/2)$ è su l

il punto P non è su l (perché non è in π_1 né π_2)

il vettore $\vec{QP}$ è un vettore parallelo al piano π diverso da $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$

$\vec{QP}=\begin{pmatrix}1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$.

un normale del piano π è $(\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2)\wedge\vec{QP}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&2&0\\1/2&1&-1/2\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}2&0\\1&-1/2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2&0\\1/2&-1/2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2&2\\1/2&1\end{vmatrix}\vec{k}=(-1)\vec{i}-(1)\vec{j}+(-3)\vec{k}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

un normale del piano π è $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

un punto sul piano π è $P=(1,1,0)$

Quindi: $\left\langle\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle=0$

$(x-1)+(y-1)+3z=0$

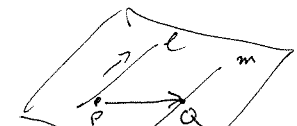
$x+y+3z-2=0$ è l'eq. cartesiana del piano.

Esempio

Trovare l'equazione cartesiana del piano che contiene le rette parallele l e m

$l:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3+t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $m:\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$. un vettore di direzione di l è $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

un punto su l: $P=(1,2,3)$ un punto su m: $Q=(1,0,1)$



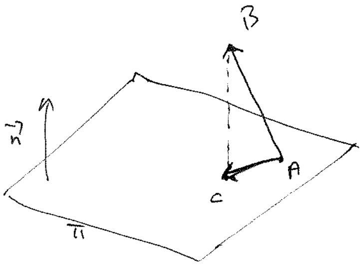
$\vec{PQ}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$ Quindi il piano è parallelo a $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

un normale è $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

un normale è $\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\left\langle\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0$ $-2(x-1)-(y-2)+(z-3)=0$

$-2x-y+z+1=0$

<u>esempio</u>



Dato un piano π, un punto A nel piano e un punto B non nel piano, trovare la proiezione ortogonale del vettore $\vec{AB}$ sul piano π. Cioè trovare il vettore $\vec{AC}$

OSS $\quad \vec{CB} = \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AB}$ quindi $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} - \vec{CB}$

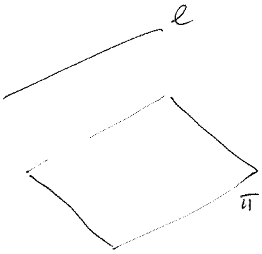
$$= \vec{AB} - \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AB}.$$

π : $x + y - z = 5$ $\qquad A = (2,3,0)$ e $B = (1,2,3)$

Allora $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AB} = \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\dfrac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - -\frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

<u>esempio</u>

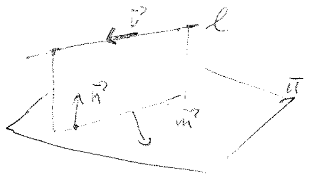


Dato un piano π e una retta ℓ, parallela al piano π, trovare l'equazione cartesiana del piano che contiene ℓ e è perpendicolare al piano π, dove:

$$\pi : 2x + 4y - 2z = 4 \qquad \ell : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 4 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

sia $\vec{v}$ un vettore di direzione di ℓ : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

sia $\vec{n}$ un vettore normale del piano π : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$



Allora $\vec{v} \wedge \vec{n}$ è un normale del piano cercato

$$\vec{v} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} = -6\vec{i} + 12\vec{j} + 18\vec{k} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

un normale del piano cercato è $\vec{m} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

un punto del piano cercato è $(3,4,1)$

Quindi $\left\langle \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$, $\qquad (-1)(x-3) + 2(y-4) + 3(z-1) = 0$

$$-x + 2y + 3z - 8 = 0$$