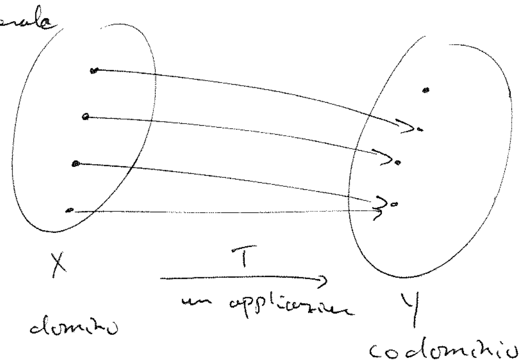
Torniamo alle applicazioni lineari

In generale



l'imagine di T:

$$Im(T) = \{ T(x) \mid x \in X \} \subseteq Y$$

Quale è la situazione per applicazione lineari?

OSS Sia T un'applicazione lineare : $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A la sua matrice

Allora $\vec{y} \in Im(T)$ se e solo se esite un $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ con $A\vec{x}_0 = \vec{y}$

se e solo se il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{y}$ ha soluzioni

OSS Se T è un'applicazione lineare allora $Im(T) \neq \emptyset$ perche $\vec{0} \in Im(T)$.

$A\vec{0} = \vec{0}$

Esempio

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Im(T)$?

Da vedere se esiste un $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

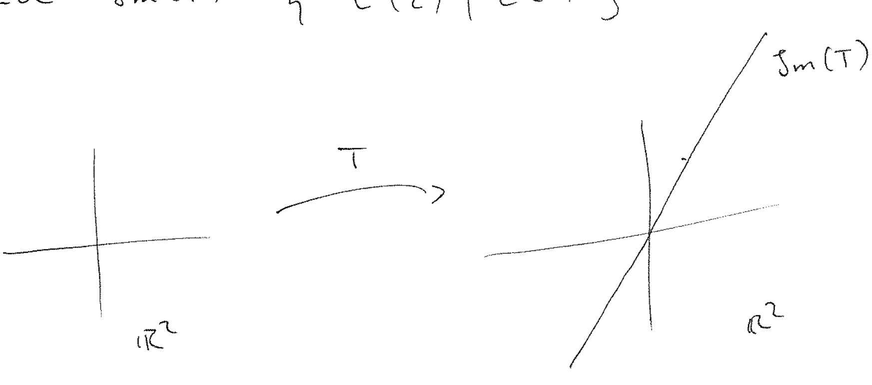
Quindi $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha soluzioni o no.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ non ha soluzioni, quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin Im(T)$

Infatti

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (x_1 + 3x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi $Im(T) = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$



una retta che passa tra o

Esempio

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$ la matrice è $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Quindi $Im(T)$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari possibile dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Questo è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$.

Definizione

Sia W un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.
Si dice che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se
1) $\vec{0} \in W$
2) se $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ allora $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$ (è chiuso sotto somma)
3) se $\vec{w} \in W$ e $k \in \mathbb{R}$ allora $k\vec{w} \in W$ (è chiuso sotto moltiplicazione con scalari)

Esempi

$\{\vec{0}\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$

$\left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$

$\left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, perché $\vec{0} \notin W$

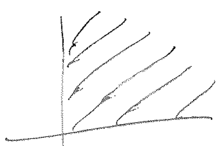
$U = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \right\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, perchè $-1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin U$.

$X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, xy \geq 0 \right\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{in } X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{in } X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin X$

vale 1, 3
non vale 2

$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \right\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$



$(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin Y$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Y$

vale 1 e 2
non vale 3

sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono:
- $\{\vec{0}\}$
- retta che passa tra 0
- $\mathbb{R}^2$

sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono
- $\{0\}$
- retta che passa tra 0
- piano che passa tra 0
- $\mathbb{R}^3$

OSS Se U e V sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$ allora $U \cap V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Definizione

siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_m \rangle = \{ c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_m \vec{v}_m \mid c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R} \}$$

si dice il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dai vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$.

si osserva che è un sottospazio, e consiste da tutti i combinazioni lineari possibile di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$.

oss Sia $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. allora

(1) $\mathrm{Im}(T)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$

perché: - $T(\vec{0}) = \vec{0}$, Quindi $\vec{0} \in \mathrm{Im}(T)$

- se $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathrm{Im}(T)$, allora $\vec{w}_1 = T(\vec{v}_1)$ e $\vec{w}_2 = T(\vec{v}_2)$ per certo $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}$
$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ Quindi $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in \mathrm{Im}(T)$.

- se $\vec{w} \in \mathrm{Im}(T)$ e $k \in \mathbb{R}$, allora $\vec{w} = T(\vec{v})$ per certo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$
$T(k\vec{v}) = k\,T(\vec{v}) = k\vec{w}$ Quindi $k\vec{w} \in \mathrm{Im}(T)$.

(2) Se A è la matrice che rappresenta T, con $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$,

allora $\mathrm{Im}(T) = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$.

(cioè $\mathrm{Im}(T)$ è lo sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A).

Dim

"$\subseteq$" sia $\vec{y} \in \mathrm{Im}(T)$. Allora $\vec{y} = T(\vec{x})$ per certo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

sia $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, allora $\vec{y} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_n \vec{v}_n \in \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rangle$.

"$\supseteq$" sia $\vec{z} \in \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rangle$ allora $z = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n$

per certo $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Allora $\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \vec{z}$ Quindi $T\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right) = \vec{z}$

segue che $\vec{z} \in \mathrm{Im}(T)$.

Esempio $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dato da $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$

$\mathrm{Im}(T) = \{ T(\vec{x}) \mid x \in \mathbb{R}^3 \} = \{ A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \} =$

$\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$

ma $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ è un sotto spazio di $\mathbb{R}^3$, quindi

$\{\vec{0}\}$, una retta, un piano o $\mathbb{R}^3$. Cosè?

Posso $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ scrivere come un combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

cioè esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ con $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \to \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{cases}$

Quindi $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Im}(T) = \{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} =$

$\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \left(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} =$

$\{ (x_1 + 2x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} =$

$\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

questi due vettori generano un piano $\subseteq \mathbb{R}^3$: $-x - y + z = 0$.

Sia $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un applicazione lineare, sia A la matrice che la rappresenta.

Il nucleo di T, che viene denotato con $\mathrm{Ker}(T)$, è

$$\mathrm{Ker}(T) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \}.$$

<u>OSS</u> $\mathrm{Ker}(T)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (il dominio di T).

Dim - $T(\vec{0})=\vec{0}$, quindi $\vec{0}\in \ker(T)$

- se $\vec{v},\vec{w}\in\ker(T)$ allora $T(\vec{w})=0$ e $T(\vec{v})=0$, quindi $T(\vec{v}+\vec{w})=$ $T(\vec{v})+T(\vec{w})=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$. Quindi $\vec{v}+\vec{w}\in\ker(T)$.
- se $\vec{w}\in\ker(T)$ e $k\in\mathbb{R}$ allora $T(\vec{w})=0$, quindi $T(k\vec{w})=kT(\vec{w})$ $=k\vec{0}=\vec{0}$. Quindi $k\vec{w}\in\ker(T)$.

Esempio.

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dato dalla matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$

$x\mapsto A\vec{x}$

$$\ker(T)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x})=\vec{0}\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&2&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&2&0\end{array}\right)\to\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}\to\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-2x_3\end{cases}$$

$$\ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1=x_3,\ x_2=-2x_3\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_3\\-2x_3\\x_3\end{pmatrix}\;\middle|\; x_3\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\;\middle|\; x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle \text{ è una retta in } \mathbb{R}^3$$

$$\operatorname{Im}(T)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \text{ perché } \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$=\mathbb{R}^2.$$

OSS Sia $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ un applicazione lineare

a) T è iniettiva se e solo se $\ker(T)=\{\vec{0}\}$.

b) T è surjettiva se e solo se $\operatorname{Im}(T)=\mathbb{R}^m$

Dim a) "$\Rightarrow$" $T(\vec{0})=\vec{0}$ quindi se T è iniettiva allora $\ker(T)=\{\vec{0}\}$.

"$\Leftarrow$" Siano $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ con $T(\vec{v})=T(\vec{w})$. Allora $T(\vec{v}-\vec{w})=T(\vec{v})-T(\vec{w})=\vec{0}$. Quindi $\vec{v}-\vec{w}\in\ker(T)=\{\vec{0}\}$. Quindi $\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$, cioè $\vec{v}=\vec{w}$. Segue che T è iniettiva.

b) ovvio.

Definizione. Sia A una matrice. Il nucleo di A è il nucleo dell'applicazione lineare $\vec{x}\mapsto A\vec{x}$.

OSS Se A è una matrice $n \times n$ allora A è invertibile se e solo se $\ker A = \{\vec{0}\}$

Dim. A è invertibile se e solo se rango $A = n$
se e solo se il sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ ha un unica soluzione
se e solo se $\ker A = \{\vec{0}\}$.

Vogliamo descrivere meglio il nucleo e Immagine di un'applicazione lineare.

Esempio
$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dato dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

sia $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Allora $\operatorname{Im}(T) = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4} \rangle = \{ x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + x_3\vec{v_3} + x_4\vec{v_4} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$

osserviamo che $\vec{v_3} = 2\vec{v_1}$ e $\vec{v_4} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$. Sia $\vec{w} \in \operatorname{Im}(T)$
allora esistono $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{R}$ con $\vec{w} = x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + x_3\vec{v_3} + x_4\vec{v_4}$ ma $\vec{v_3} = 2\vec{v_1}$
e $\vec{v_4} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$; quindi $\vec{w} = (x_1 + 2x_3 + x_4)\vec{v_1} + (x_2 + x_4)\vec{v_2}$. cioè $\vec{w} \in \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$
Quindi $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4} \rangle \subseteq \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$. Ma $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle \subseteq \langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4} \rangle$.

Quindi $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4} \rangle = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$

visto che $\vec{v_1}$ non è un multiplo di $\vec{v_2}$ e viceversa questa è la scrittura più economica di $\operatorname{Im}(T)$. (è un piano di $\mathbb{R}^3$)

Definizione. Siano $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \dots, \vec{v_m} \in \mathbb{R}^n$
i vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}$ si dicono linearmente indipendenti
se la relazione $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_m\vec{v_m} = \vec{0}$ con $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$
può esistere solo quando $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$
cioè se scrivo $\vec{0}$ come combinazione lineare di $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}$, lo posso solo fare nel modo banale: mettendo $c_1 = \dots = c_m = 0$.
se i vettori non sono linearmente indipendenti si dice che i vettori $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}$ sono linearmente dipendenti

Esempio
in $\mathbb{R}^2$. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti

perché: $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = \vec{0}$: $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$.

Esempio

su $\mathbb{R}^3$ $\vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ i vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ sono linearmente dipendenti

perché: $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3} = \vec{0}$ $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\1&2&3&0\\1&3&4&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&2&2&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \to \begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 = -c_3 \\ c_2 = -c_3 \end{cases}$$

se prendo $c_3 = -1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$: $\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3} = \vec{0}$

<u>oss</u> se $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}$ sono linearmente dipendenti allora esistono $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ non tutti 0 con $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_m\vec{v_m} = \vec{0}$.
Supponiamo che $c_i \neq 0$. Allora:

$$-c_i\vec{v_i} = c_1\vec{v_1} + \dots + c_{i-1}\vec{v_{i-1}} + c_{i+1}\vec{v_{i+1}} + \dots + c_m\vec{v_m}$$
$$\vec{v_i} = \left(\frac{-c_1}{c_i}\right)\vec{v_1} + \dots + \left(-\frac{c_{i-1}}{c_i}\right)\vec{v_{i-1}} + \left(-\frac{c_{i+1}}{c_i}\right)\vec{v_{i+1}} + \dots + \left(-\frac{c_m}{c_i}\right)\vec{v_m}$$

Quindi $\vec{v_i}$ è una combinazione lineare di $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_{i-1}}, \vec{v_{i+1}}, \dots, \vec{v_m}$.

Siano $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}$ vettori in $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che $\vec{v_i}$ è una combinazione lineare degli altri. Allora esistono $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{v_i} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots + a_{i-1}\vec{v_{i-1}} + a_{i+1}\vec{v_{i+1}} + \dots + a_m\vec{v_m}$

perciò $\vec{0} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots + a_{i-1}\vec{v_{i-1}} + \underset{\neq 0}{(-1)}\vec{v_i} + a_{i+1}\vec{v_{i+1}} + \dots + a_m\vec{v_m}$

Quindi i vettori $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}$ sono linearmente dipendenti

Quindi:
$\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno dei vettori si può scrivere come combinazione lineare degli altri

Perciò:
$\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}$ sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno dei vettori posso scrivere come combinazione lineare degli altri

Esempio

$\mathbb{R}^n$ sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\vec{v}$ e $\vec{0}$ sono linearmente dipendenti perché $5\cdot\vec{0} + 0\cdot\vec{v} = \vec{0}$, ma anche perché $\vec{0} = 0\cdot\vec{v}$

siano $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{v} = k\vec{w}$, per certo $k \in \mathbb{R}$. Allora $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono linearmente dipendenti

sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, se $\vec{v} \neq \vec{0}$ allora $\vec{v}$ è linearmente indipendente
se $\vec{v} = \vec{0}$ allora $\vec{0}$ è linearmente dipendente

se $\vec{v}, \vec{w}$ sono due vettori non nulli con $\vec{v} \notin \langle \vec{w} \rangle$

allora i vettori sono linearmente indipendenti

perché: se $\vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente dipendenti allora esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

con $c_1 \vec{v} + c_2 \vec{w} = \vec{0}$ e c_1, c_2 non entrambi nullo.

se $c_1 = 0$ allora $c_2 \neq 0$ e $\vec{0} = c_1 \vec{v} + c_2 \vec{w} = c_2 \vec{w} \neq \vec{0}$ una contraddizione.

Quindi $c_1 \neq 0$ e $\vec{v} = -\frac{c_2}{c_1} \vec{w}$, cioè $\vec{v} \in \langle \vec{w} \rangle$ una contraddizione.

Esempio

- In $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} c_1 + 5c_3 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 = -5c_3 \\ c_2 = 2c_3 \end{cases}$$

Quindi $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$. $\quad -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ok!

si vede: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Quindi $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Quindi $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- In $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  (si osserva che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è una combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.)

Vogliamo descrivere un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ in modo più economico.

Def Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

l'insieme ordinato $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ si dice una base di V se

1) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ sono linearmente indipendenti

2) $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle = V$ (cioè ogni vettore di V è una comb. lin. di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$).
si dice anche: i vettori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ generano V.

Esempio

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sono linearmente indipendenti: $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$

In generale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$

si dice $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^n$.

Esempio

$T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ dato da $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\mathrm{Im}(T) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix} \right\rangle$.

i 5 vettori generano $\mathrm{Im}(T)$ ma non sono necessariamente linearmente indipendenti. Come posso trovare una base di $\mathrm{Im}(T)$?

<u>OSS</u> Siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_m \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_m \rangle$$
$$= \langle \lambda \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle \quad \text{se } \lambda \neq 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$= \langle \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Quindi le mosse di G. J. non cambiano lo sottospazio.

Trovare una base di $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle$:

1) scrivere i vettori come <u>righe</u> di una matrice
2) applicare Gauß-Jordan e metterlo a gradini
3) buttare le righe $0 \cdots\cdots 0$
4) le righe rimanente formano una base di $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle$ (ancora da vedere).

Esempio: di prima.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è a gradini!}$$

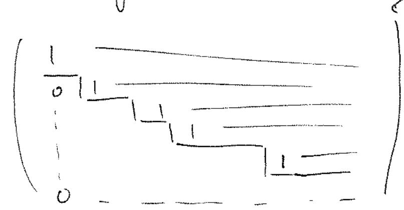
$$\mathrm{Im}(T) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right.$$

$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti perchè

$$c_1 \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right)$ è una base di $\mathrm{Im}(T)$.

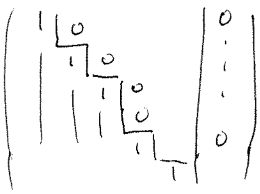
Perchè funziona?



la matrice a gradini:

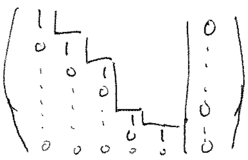
- lo spazio generato dalle righe è $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle$
- le righe $0 \dots 0$ non danno nessun contributo
- le righe diverse da $00 \dots 0$ generano $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle$

ma sono anche linearmente indipendenti perchè il sistema è



se fai G.J vedi che tutte sotto le 1 spariscono

e trovi



quindi $c_1 = \dots = c_? = 0$

come trovare una base di $Ker(T)$
(usiamo il esempio di prima).

$$Ker(T) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5 \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \}.$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 2x_3 + 3x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$Ker(T) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5 \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x_1 = -x_3 - 2x_4,\ x_2 = 2x_3 + 3x_4,\ x_5 = 0 \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -x_3 - 2x_4 \\ 2x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

i vettori $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti?

sì! $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

il vettore a sinistra ha sul posto 3 c_1 e sul posto 4 c_2 quindi $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$.

Trovare una base di $Ker(T)$

- considerare il sistema $A\vec{x} = \vec{0}$
- usare G-J per ottenere la matrice fortemente ridotta
- scrivere le soluzioni
- se c'è una sola soluzione (che è per forza $\vec{0}$) allora $Ker(T) = \{\vec{0}\}$
  se ci sono infinite soluzioni i vettori "corrispondenti ai variabile libere" formano una base di $Ker(T)$.

Perché funziona?
È chiaro che i vettori corrispondenti ai variabili liberi generano $Ker(T)$ ma sono anche linearmente indipendenti perché il vettore corrispondente al variabile x_i è l'unico che ha un 1 sul posto i, tutti gli altri hanno un 0 sul posto i. Quindi se prendo una combinazione lineare di questi vettori sul posto i vedo x_i. Perciò se scrivo $\vec{0}$ come combinazione lineare di questi vettori si ha $c_i = 0$. Perciò i vettori sono linearmente indipendenti

ATTENZIONE funziona perché prima ho messo la matrice fortemente ridotta!

C'è un altro metodo per trovare una base di $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m} \rangle$
È basata sulla seguente osservazione

OSS se $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m} \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti e $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{w} \notin \langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_m} \rangle$ Allora $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}, \vec{w}$ sono linearmente indipendenti

Dim. Scriviamo $\vec{0}$ come combinazione lineare i $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}, \vec{w}$:

$$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_m\vec{v_m} + a\vec{w} = \vec{0} \qquad c_1, \dots, c_m, a \in \mathbb{R}.$$

se $a \neq 0$ allora $\vec{w} = \frac{-1}{a}(c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_m v_m) \in \langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_m} \rangle$ ma non era così. Quindi $a = 0$. In particolare

$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_m\vec{v_m} = \vec{0}$. Ma $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}$ sono linearmente indipendenti, quindi $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$.

Segue che $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}, \vec{w}$ sono linearmente indipendenti.

Quindi se cerco una base di $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle$ posso anche farlo così:

$V := \langle \vec{0} \rangle$

considero $\vec{v}_1$. se $\vec{v}_1 = \vec{0}$ lo butto

se $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ $V := \langle \vec{v}_1 \rangle$.

considero $\vec{v}_2$ se $\vec{v}_2 \in V$ lo butto

se $\vec{v}_2 \notin V$ aggiungo $\vec{v}_2$ a V

considero $\vec{v}_3$ se $\vec{v}_3 \in V$ lo butto

se $\vec{v}_3 \notin V$ aggiungo $\vec{v}_3$ a V

$\vdots$

ad ogni passo aggiungo niente o un vettore in modo tale che i vettori sono linearmente indipendenti

Finisce con una base di $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle$ che consiste di vettori di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$. Quindi

<u>OSS</u> se $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle \neq \{\vec{0}\}$ ha una base che consiste di vettori di $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$.

Esempio $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\12\\17\end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ $\quad V := \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in V$ $\quad V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \notin V$ $\quad V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$, i vettori $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti vedi osservazione di prima.

$\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix} \in V$ perché $\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\quad V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} \in V$ perché $\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\quad V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix}7\\12\\17\end{pmatrix} \in V$ perché $\begin{pmatrix}7\\12\\17\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\quad V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\12\\17\end{pmatrix} \right\rangle$

stop. tutti i vettori di W sono in V e vice versa quindi $V = W$.

Quindi $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ è una base di W.

sta attento: ad ogni passo devo risolvere un sistema lineare quindi non è un metodo veloce!