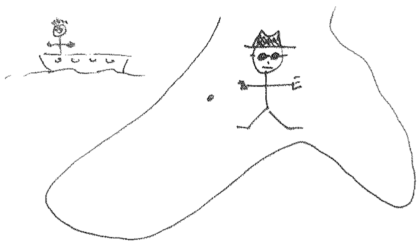
Applicazioni lineari



posizione reale della barca $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

trasmette i coordinate $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dove $\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 2x_1 + 5x_2 \end{cases}$

Esempio se $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 42 \end{pmatrix}$ viene mandato $\begin{pmatrix} 131 \\ 220 \end{pmatrix}$

cioè $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ allora. $\vec{y} = A\vec{x}$

ha ricevuto
$\begin{pmatrix} 133 \\ 223 \end{pmatrix}$ Quale è la posizione reale? Deve risolvere $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 133 \\ 2x_1 + 5x_2 = 223 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 133 \\ 2 & 5 & 223 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 133 \\ 0 & -1 & -43 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 133 \\ 0 & 1 & 43 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 43 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 43 \end{pmatrix}.$$

poi riceve $\begin{pmatrix} 140 \\ 235 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 144 \\ 242 \end{pmatrix}$, ... che fatica, deve sempre risolvere il sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 5x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 2 & 5 & y_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & -1 & y_2 - 2y_1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & 1 & 2y_1 - y_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5y_1 + 3y_2 \\ 0 & 1 & 2y_1 - y_2 \end{array}\right)$$

Quindi $\begin{cases} x_1 = -5y_1 + 3y_2 \\ x_2 = 2y_1 - y_2 \end{cases}$ cioè $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

o meglio

$$\begin{array}{cccc} & & y_1 & y_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

sia $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ allora $\vec{x} = B\vec{y}$

cioè: $\vec{x} \underset{\text{molt. con } B}{\overset{\text{molt. con } A}{\rightleftarrows}} \vec{y}$ è come una applicazione

B è l'inversa di A.

Non funziona sempre.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = y_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 43 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 133 \\ 266 \end{pmatrix}$$

però $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 133 \\ 2x_1 + 6x_2 = 266 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 133 \\ 2 & 6 & 266 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 133 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ha infinite soluzioni

Quindi non posso calcolare la posizione reale.

oss: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$ si blocca!!

Possiamo formalizzare così: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \longmapsto & A\vec{x} \end{array}$ una funzione che manda un vettore ad un vettore.

Def un'applicazione $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice un'applicazione lineare se esiste una matrice $m \times n$ A tale che $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ per ogni $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

cioè $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} & \longmapsto & A\vec{x} \end{array}$

$$\begin{array}{cc} & n \text{ colonne} \\ m \text{ righe} & \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & A & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Esempio

$F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare perché

la matrice che la rappresenta è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

In fatti: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}$

$I: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare, la matrice che la rappresenta

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'identità

$G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non è un'applicazione lineare:
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

perchè: $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sarebbe la matrice che la rappresenta allora

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} a = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2c \end{pmatrix} \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} 2a = 4 \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} a = 2 \\ c = 0 \end{cases}$$

non è possibile.

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ l'applicazione $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ è lineare.

se $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Allora

$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è la prima colonna di A

$T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ è la seconda colonna di A

$T(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ è la terza colonna di A.

OSS Se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare allora la matrice che rappresenta T è la matrice:

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posto } i$$

perchè se $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ è la matrice che rappresenta T allora

$$T(\vec{e}_i) = A\vec{e}_i = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_i$$

Def I vettori $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ si dicono vettori standard.

Quindi se T è un'applicazione lineare allora la matrice che rappresenta T si ottiene applicando T sui vettori standard.

<u>OSS</u> Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare rappresentata dalla matrice A

cioè $T: \vec{x} \mapsto A\vec{x}$

se $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ allora $T(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = T(\vec{x}_1) + T(\vec{x}_2)$

se $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$ allora $T(h\vec{x}_1) = A(h\vec{x}_1) = h(A\vec{x}_1) = h\, T(\vec{x}_1)$.

Esempio $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$T(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2)$$

$$T(3\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\, T(\vec{e}_1)$$

$$T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2)$$

vale anche l'altra implicazione? Sì!

<u>OSS</u> $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare se e solo se

(1) $T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$ per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

(2) $T(k\vec{v}) = k\, T(\vec{v})$ per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$.

perché:

"$\Rightarrow$" già fatto

"$\Leftarrow$" supponiamo che valgono (1) e (2). Sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$

Allora $T(\vec{x}) = T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) = T(x_1\vec{e}_1) + T(x_2 e_2) + \dots + T(x_n e_n) =$

$$x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \dots + x_n T(e_n) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Quindi T è un'applicazione lineare.

<u>OSS</u> se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un applicazione lineare allora $T(\vec{0}) = \vec{0}$

Esempio

$T\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ non è lineare.

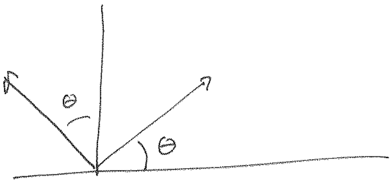
Perché: $T\left(5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $5\, T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Alternativa: se fosse lineare la matrice sarebbe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$)

Alcune esempi di applicazioni lineari

1) $R_\Theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione i $\mathbb{R}^2$ sul angolo Θ è lineare.



$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}$$

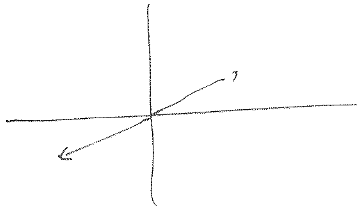
$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ la rotazione antiorario sul angolo Θ

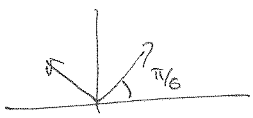
In particolare:

$\Theta = \pi$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

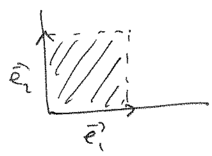


$\Theta = \pi/6$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

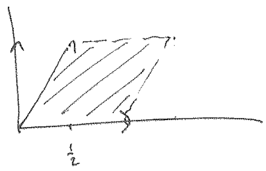


2)

$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

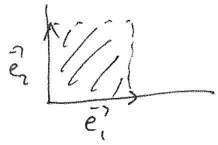


$\rightarrow$

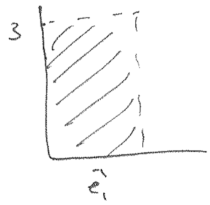


shear

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$



$\rightarrow$

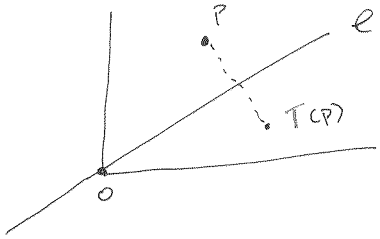


$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

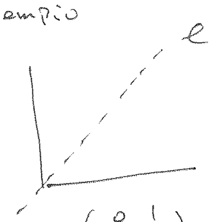
$\rightarrow$

l'applicazione lineare $\vec{x} \mapsto r\vec{x}$ è dato da $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.
dove $r \in \mathbb{R}$.

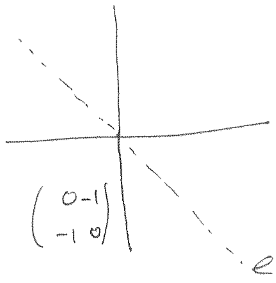
3) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la riflessione nella retta ℓ che contien $(0,0)$



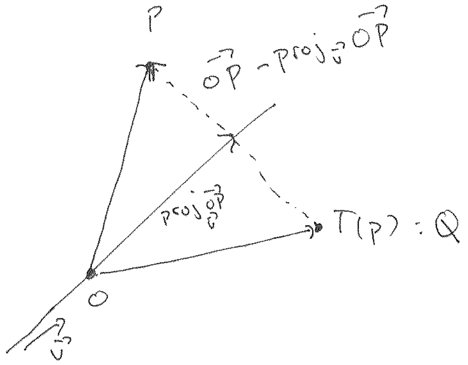
esempio



$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$



$$\vec{OQ} = \vec{OP} - 2\left(\vec{OP} - \text{proj}_{\vec{v}}\vec{OP}\right)$$
$$= -\vec{OP} + 2\,\text{proj}_{\vec{v}}\vec{OP}$$

esempio

$$\ell = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

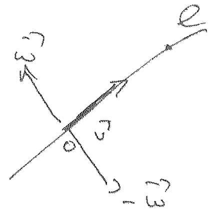
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\,\text{proj}_{\vec{v}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\,\frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\text{proj}_{\vec{v}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

controlli: $\vec{v}$ deve andare a $\vec{v}$

un vettore perpendicolare ad $\vec{v}$ deve andare a $-$ il vettore.



$$\ell = \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\,\text{proj}_{\vec{v}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\,\frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\,\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\text{proj}_{\vec{v}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

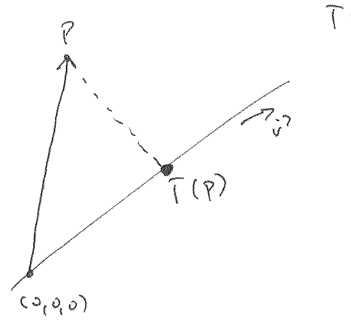
Quindi la matrice è: $\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

controlli $\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ok!

$\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ok!

4) la proiezione su una retta : $\mathbb{R}^3$, la retta contiene $(0,0,0)$

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$



$$\vec{OP} \mapsto \operatorname{proj}_{\vec v} \vec{OP}$$

$$\vec{OP} \mapsto \frac{\langle \vec{OP} \mid \vec v \rangle}{\langle \vec v \mid \vec v \rangle} \vec v$$

esempio

$$\ell = \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\vec{e}_1 \mapsto \frac{\langle \vec e_1 \mid \vec v \rangle}{\langle \vec v \mid \vec v \rangle} \vec v = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 \mapsto \frac{\langle \vec e_2 \mid \vec v \rangle}{\langle \vec v \mid \vec v \rangle} \vec v = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 \mapsto \frac{\langle \vec e_3 \mid \vec v \rangle}{\langle \vec v \mid \vec v \rangle} \vec v = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice è

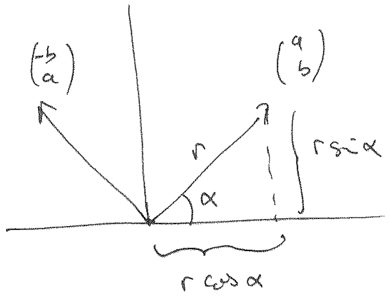
$$\begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 2/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/6 \\ 2/6 & 2/6 & 4/6 \end{pmatrix}$$

controlli: $\vec v$ deve andare a $\vec v$

un vettore perpendicolare a $\vec v$ a $\vec 0$

5) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(\vec x) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \vec x \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \qquad \text{cosa fa geometricamente?}$$



$$\vec e_1 \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{sia } r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\vec e_2 \mapsto \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

allora $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}$

Quindi $\vec x \xrightarrow{\text{rotazione sul angolo } \theta} \xrightarrow{\text{multiplicaz. con } r}$

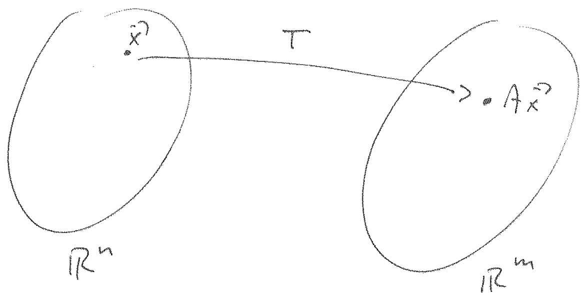
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

Tanti altri esempi più tardi.

Matrice:

Sia A una matrice $m \times n$, consideriamo l'applicazione lineare

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$$



T è invertibile se e solo se
per ogni $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ esiste un unico $\vec{x}$ tale che $A\vec{x} = \vec{y}$

cioè
per ogni $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{y}$ ha un unico soluzione

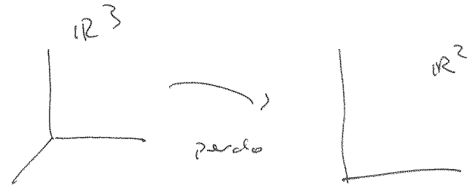
se T è invertibile si dice che la matrice A è invertibile.

cosa possiamo dire:

1) $m < n$

$$m \left(\begin{array}{c|c} \quad A \quad & \vec{y} \end{array} \right), \quad \overset{n}{\longleftrightarrow}$$

$A\vec{x} = \vec{y}$
numero dei gradini $\leq m < n$
quindi non ha soluzioni
o ne ha infinite.



2) $m = n$

$$n \left(\begin{array}{c|c} \quad A \quad & \vec{y} \end{array} \right), \quad \overset{n}{\longleftrightarrow}$$

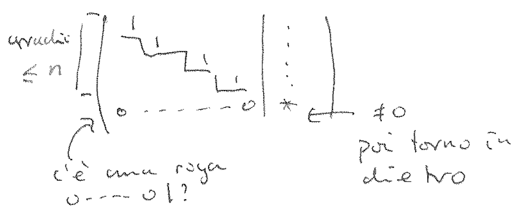
$A\vec{x} = \vec{y}$ ha un unico soluzione
se e solo se posso trasformare
$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cioè rango $A = n$.

3) $m > n$

$$m \left(\begin{array}{c|c} \quad A \quad & \vec{y} \end{array} \right), \quad \overset{n}{\longleftrightarrow}$$

Esiste un $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ tale che il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{y}$
non ha soluzione:

perchè: $\left(A \mid ? \right) \rightsquigarrow$



Quindi A è invertibile se e solo se
1) $m = n$
2) il rango di A è n

OSS Sia A una matrice $n \times n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$
se A è invertibile il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ha un unico soluzione, e la soluzione è $T^{-1}(\vec{b})$, dove $T: \vec{x} \mapsto A\vec{x}$

In particolare: per il sistema di equazioni lineari $A\vec{x} = \vec{0}$ si ha

se A è invertibile l'unico soluzione è $\vec{0}$

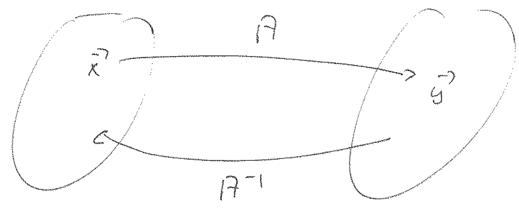
OSS Se T è un'applicazione lineare e è invertibile allora l'inverse di T è anche un'applicazione lineare.

perché: Sia S l'inverse di T, $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1) Siano $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$: $T(S(\vec{v}+\vec{w})) = \vec{v}+\vec{w}$
$T(S(\vec{v}) + S(\vec{w})) = T(S(\vec{v})) + T(S(\vec{w})) = \vec{v}+\vec{w}$
Quindi $S(\vec{v}+\vec{w}) = S(\vec{v}) + S(\vec{w})$ (perché T è iniettiva)

2) sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$: $T(S(k\vec{v})) = k\vec{v}$
$T(k\, S(\vec{v})) = k\, T(S(\vec{v})) = k\vec{v}$
Quindi $S(k\vec{v}) = k\, S(\vec{v})$. (perché T è iniettiva)

Sia T un'applicazione lineare e A la matrice che la rappresenta.
Se T è invertibile l'inverse viene denotato con T^{-1}, la matrice che rappresenta T^{-1} viene denotato con A^{-1}.
A^{-1} si dice l'inverse di A.



$T: \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$
$T^{-1}: \vec{y} \longmapsto A^{-1}\vec{y}$

Esempi:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ non è invertibile, rango è 2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile, rango è 3

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Come posso trovare l'inverse di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$?

sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ Devo risolvere $A\vec{x}=\vec{y}$ per ogni $\vec{y}\in\mathbb{R}^3$

Per trovare le colonne di A^{-1} basta farlo ~~per~~ i vettori standard.

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Facciamo G-J sulla matrice a sinistra per ottenere I_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

Quindi $\begin{cases} x_1 = 10y_1 - 6y_2 + y_3 \\ x_2 = -2y_1 + y_2 \\ x_3 = -7y_1 + 5y_2 - y_3 \end{cases}$

cioè $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & -6 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix}10 & -6 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

<u>OSS</u> se la matrice a sinistra non era invertibile, cioè il rango $< n$, l'algoritmo si sarebbe bloccato.

Esempi.

- Trovare, se esiste, l'inversa di $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1 \end{array}\right)$$

l'algoritmo si blocca perché il rango di A non è 3. Quindi la matrice non è invertibile.

- Trovare, se esiste, l'inversa di $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1/2 & -1/2\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 3/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

posso fare un controllo che non ho sbagliato i conti?

Sì!! Però prima un po' di teoria ....

Il prodotto tra due matrice.

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dato da $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ $\qquad A = m\begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}\end{array}$ matrice $m \times n$

$F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ dato da $\vec{y} \mapsto B\vec{y}$ $\qquad B = r\begin{array}{c} m \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}\end{array}$ matrice $r \times n$

Possiamo considerare l'applicazione $F \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ dato da

$F \circ T(\vec{x}) = F(T(\vec{x}))$ cioè $\mathbb{R}^n \xrightarrow[T]{} \mathbb{R}^m \xrightarrow[F]{} \mathbb{R}^r$

oss $F \circ T$ è un'applicazione lineare.

1) siano $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ $\quad F\circ T(\vec{v}+\vec{w}) = F(T(\vec{v}+\vec{w})) = F(T(\vec{v}) + T(\vec{w})) = F(T(\vec{v})) + F(T(\vec{w}))$
$= F\circ T(\vec{v}) + F\circ T(\vec{w})$.

2) siano $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$. $\quad F\circ T(k\vec{v}) = F(T(k\vec{v})) = F(kT(\vec{v})) = kF(T(\vec{v}))$
$= k\, F\circ T(\vec{v})$.

Quindi $F\circ T$ può essere rappresentato tramite una matrice

Quella matrice viene chiamato il prodotto di B con A e denotato con BA. si osserva che questa è una matrice $r \times n$

Come possiamo trovare BA?

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{F\circ T} \mathbb{R}^r \qquad x \longmapsto (BA)\vec{x}$$
$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[T]{} \mathbb{R}^m \xrightarrow[F]{} \mathbb{R}^r \qquad x \longmapsto A\vec{x} \longmapsto B(A\vec{x})$$

Sia $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \cdots & \vec{w}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

Troviamo le colonne di BA, cioè l'immagine sotto $F\circ T$ dei vettori standard.

$\vec{e}_1 \longmapsto A\vec{e}_1 = \vec{v}_1 \longmapsto B\vec{v}_1$ è la prima colonna di BA

$e_2 \longmapsto A\vec{e}_2 = \vec{v}_2 \longmapsto B\vec{v}_2$ è la seconda colonna di BA

$\vdots$

$\vec{e}_n \longmapsto A\vec{e}_n = \vec{v}_n \longmapsto B\vec{v}_n$ è l'ultima colonna di BA

Quindi

$$BA = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \cdots & \vec{w}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ B\vec{v}_1 & B\vec{v}_2 & \cdots & B\vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Esempi

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ allora $\quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

perchè $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 11 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ perchè $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$.

<u>OSS</u> - Se A è una matrice $m \times n$ allora $I_m A = A = A I_n$

- Se C è una matrice $m \times n$ e D una matrice $p \times q$ loro prodotto CD è solo definito se $n = p$

$$\begin{array}{c} \\ m \end{array}\!\begin{pmatrix} n \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ D \end{pmatrix}\!\begin{array}{c} \\ p \end{array}$$

- Se A, B, C sono matrice con A una matrice $m \times n$, B una matrice $n \times q$, C una matrice $q \times p$ Allora

$$\underbrace{(\underbrace{AB}_{m \times q})C}_{m \times p} = \underbrace{A(\underbrace{BC}_{n \times p})}_{m \times p}$$

Esempio

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ non è definita.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

ATTenzione: in generale <u>non</u> vale $AB = BA$.

Regole di moltiplicazione

Siano A e B due matrice $m \times n$

Siano C e D due matrice $n \times r$, sia $k \in \mathbb{R}$.

Allora
1) $A(C + D) = AC + AD$
2) $(A + B)C = AC + BC$
3) $k(AC) = (kA)C = A(kC)$

OSS Sia A una matrice $n \times n$ invertibile

sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ $\quad T^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \mapsto A^{-1}\vec{y}$ $\quad$ Quindi $\mathbb{R}^n \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{x} \to A\vec{x}$, $\quad A^{-1}\vec{y} \leftarrow \vec{y}$

Allora $T^{-1} \circ T = id.$ $\quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n \xrightarrow{T^{-1}} \mathbb{R}^n$

$x \longmapsto A\vec{x}$

$\vec{y} \longrightarrow A^{-1}\vec{y}$

$x \longmapsto \vec{x}$

Quindi $A^{-1}A = I_n$

In modo simile si vede che $T \circ T^{-1} = id$, quindi $AA^{-1} = I_n$.

Questo posso usare per fare controlli se ho trovato l'inverse:

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare, se esiste, A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

controllo $\quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ok!!

$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ok!!

É sufficente di controllare solo uno dei due per essere sicure che non hai sbagliato

OSS Siano A e B due matrice $n \times n$ tale che $BA = I_n$. Allora

- A e B sono invertibile
- $A = B^{-1}$ e $B = A^{-1}$
- $AB = I_n$.

Dimostrazione:

Siano A e B due matrice $n \times n$ con $BA = I_n$

sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ con $A\vec{x} = \vec{0}$

Allora $B(A\vec{x}) = B\vec{0} = \vec{0}$

Quindi $(BA)\vec{x} = \vec{0}$

cioè $I_n\vec{x} = \vec{0}$ e di conseguenza $\vec{x} = \vec{0}$.

Abbiamo visto che il sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ ha un unico soluzione.

Ma A è una matrice quadrata, quindi A ha rango n, cioè A è invertibile

Quindi A^{-1} esiste.

Sappiamo che $BA = I_n$. Quindi $(BA)A^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1}$

$B(AA^{-1}) = BI_n = B$

Ma $(BA)A^{-1} = B(AA^{-1})$ e quindi $B = A^{-1}$.

Quindi B è invertibile e $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$.
In particolare $AB = I_n$.

Perciò se cerco l'inverse di A, faccio G-J e dopo è sufficiente di fare il controllo $AA^{-1} = I_n$ (o $A^{-1}A = I_n$) per essere sicuro che non ho sbagliato.

ATTENZIONE. l'osservazione vale solo per matrice $n \times n$. perché

$$\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}} \underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & ? \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non sono invertibile.

l'osservazione dice di più: posso anche indovinare l'inverse.

Esempio

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Sia $\mathrm{Det}\, A = ad - bc$

se $\mathrm{Det}\, A \neq 0$ allora A è invertibile e $A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}\, A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

perché: $\frac{1}{\mathrm{Det}\, A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{Det}\, A} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

se $\mathrm{Det}\, A = 0$ allora A non è invertibile.

perché: Se $\mathrm{Det}\, A = 0$ allora $ad = bc$.
se A è invertibile il rango di A deve essere 2.

1) Se $a = 0$ allora $b = 0$ o $c = 0$

se $b = 0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ rango ≤ 1

se $c = 0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ rango ≤ 1

A non è invertibile.

2) se $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & \underbrace{d - \frac{cb}{a}}_{0} \end{pmatrix}$$

rango $= 1$
A non è invertibile.

Quindi l'inverse di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ è $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

ATTENZIONE questa regola vale <u>solo</u> per matrice 2×2.
il procedimento con G-J funziona sempre.