compito 11

1 a) $\binom{11}{7}$ b) $(-2)^7\binom{13}{6}$ c) $2^9\binom{17}{8}$ d) $3^7 \cdot 2^6\binom{13}{7}$

e) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}x^{100-j}x^{-j} = \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}x^{100-2j}$

quindi il coefficiente davanti x^5 è 0 e davanti x^{32} è $\binom{100}{34}$

2 a) Siano S e T due insiemi disgiunti con $|S|=|T|=n$.

Allora in $S\cup T$ ci sono $\binom{2n}{2}$ sottoinsiemi di cardinalità 2.

Sia $R\subseteq S\cup T$ con $|R|=2$. Allora ci sono 3 possibilità:

$R\subseteq S$, $R\subseteq T$ o $|R\cap S|=|R\cap T|=1$.

ci sono $\binom{n}{2}$ sottoinsiemi di cardinalità 2 di $S\cup T$ con $R\subseteq S$,

ci sono $\binom{n}{2}$ sottoinsiemi di cardinalità 2 di $S\cup T$ con $R\subseteq T$ e

ci sono $\binom{n}{1}\binom{n}{1}$ sottoinsiemi di cardinalità 2 di $S\cup T$ con $|R\cap S|=|R\cap T|=1$.

Quindi $S\cup T$ contiene $2\binom{n}{2}+n^2$ sottoinsiemi di cardinalità 2.

Perciò $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$

b) $\binom{2n}{2}=\frac{(2n)!}{(2n-2)!\,2!}=\frac{2n(2n-1)}{2}=n(2n-1)=2n^2-n=n^2+(n^2-n)$

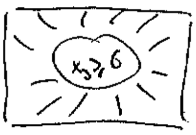
$\binom{n}{2}=\frac{n!}{(n-2)!\,2!}=\frac{n(n-1)}{2}$, quindi $2\binom{n}{2}=n(n-1)=n^2-n$

Quindi $\binom{2n}{2}=n^2+(n^2-n)=n^2+2\binom{n}{2}$.

3 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=29$ $x_1,\dots,x_6\in\mathbb{Z}$, $x_1,\dots,x_6\geq 0$: $29*$ $5/$

a) $x_i > 1$ per $i=1,\dots,6$ $29-12=17*$ $5/$ $\binom{22}{5}$

b) $x_1\geq 1$, $x_2\geq 2$, $x_3\geq 3$, $x_4\geq 4$, $x_5\geq 5$, $x_6\geq 6$ $29-1-2-3-4-6-6=7*$ $5/$ $\binom{12}{5}$

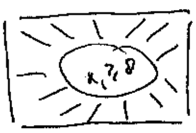
c) 

$29*$ $5/$: $\binom{34}{5}$ soluzioni del equazione.

$x_3\geq 6$ $29-6=23*$ $5/$ $\binom{28}{5}$ soluzioni con $x_3\geq 6$

quindi $\binom{34}{5}-\binom{28}{5}$ soluzioni con $x_3\leq 5$.

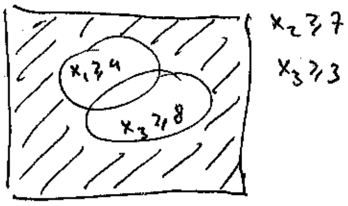
d) $x_1\leq 7$ e $x_5\geq 7$ $29-7=22*$ $5/$ ci sono $\binom{27}{5}$ soluzioni con $x_5\geq 7$



$x_5\geq 7$

$x_5\geq 7$ e $x_1\geq 8$: $29-7-8=14*$ $5/$ ci sono $\binom{19}{5}$ soluzioni con $x_5\geq 7$ e $x_1\geq 8$. Quindi ci sono $\binom{27}{5}-\binom{19}{5}$ soluzioni con $x_5\geq 7$ e $x_1\leq 7$.

e)



$x_2 \geq 7$ e $x_3 \geq 3$ $\quad 29-10=19 * 5|$ $\quad \binom{24}{5}$ soluzioni

$x_2 \geq 7,\ x_3 \geq 3,\ x_1 \geq 4$ $\quad 29-14=15 * 5|$ $\quad \binom{20}{5}$ soluzioni

$x_2 \geq 7,\ x_3 \geq 3,\ x_3 \geq 8$ cioè $x_2 \geq 7$ $x_3 \geq 8$ $\quad 29-15=14 * 5|$ ci sono $\binom{19}{5}$ soluzioni

$x_2 \geq 7,\ x_3 \geq 3,\ x_3 \geq 8\ x_1 \geq 4$ cioè $x_2 \geq 7\ x_1 \geq 4\ x_3 \geq 8$ $\quad 29-19=10 * 5|$ ci sono $\binom{15}{5}$ soluzioni

$$\binom{24}{5} - \left[\binom{20}{5} + \binom{19}{5} - \binom{15}{5}\right]$$

f) $x_1 = 4$ quindi l'equazione è $x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 25$, $x_2 \geq 2$ $\quad 4 \leq x_3 \leq 5$

$x_2 \geq 2\ x_3 \geq 4$ $\quad 25-6=19 * 4|$ $\quad \binom{23}{4}$

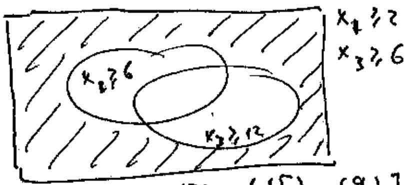
$x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 4\ x_3 \geq 6$ cioè $x_2 \geq 2$ $x_3 \geq 6$ $\quad 25-8=17 * 4|$ $\quad \binom{21}{4}$

quindi $\binom{23}{4} - \binom{21}{4}$.

g) $x_2 + x_4 = 5$ $\quad 2 \leq x_4 \leq 5$ $\quad 6 \leq x_3 \leq 11$. ci sono due equazioni da risolvere:

1) $x_2 + x_4 = 5$ $\quad 5 * 1|$: $\binom{6}{1}$

2) $x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 24$ con $2 \leq x_4 \leq 5$ e $6 \leq x_3 \leq 11$



$x_4 \geq 2,\ x_3 \geq 6$: $24-8=16 * 3|$ $\quad \binom{19}{3}$

$x_4 \geq 2\ x_3 \geq 12$: $24-14=10 * 3|$ $\quad \binom{13}{3}$

$x_4 \geq 6\ x_3 \geq 6$: $24-12=12 * 3|$ $\quad \binom{15}{3}$

$x_4 \geq 6\ x_3 \geq 12$: $24-18=6 * 3|$ $\quad \binom{9}{3}$

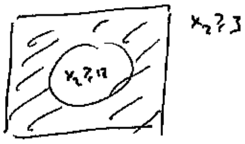
$$\binom{19}{3} - \left[\binom{13}{3} + \binom{15}{3} - \binom{9}{3}\right]$$

Quindi la soluzione del problema è $\binom{6}{1} \cdot \left[\binom{19}{3} - \left[\binom{13}{3} + \binom{15}{3} - \binom{9}{3}\right]\right]$

h) Abbiamo $x_1 + x_3 + x_5 = 15$ $\quad 5 \leq x_1 \leq 10$ e $x_2 + x_4 + x_6 = 14$ $\quad 3 \leq x_2 \leq 11$

$15-5=10 * 2|$ $\quad \binom{12}{2}$

$15-11=4 * 2|$ $\quad \binom{6}{2}$



$14-3=11 * 2|$ $\quad \binom{13}{2}$

$14-12=2 * 2|$ $\quad \binom{4}{2}$

$$\left[\binom{12}{2} - \binom{6}{2}\right] \cdot \left[\binom{13}{2} - \binom{4}{2}\right]$$

4) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ $\quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ $\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Consideriamo l'equazione: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 11$ con $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ $\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

$11 * 3|$: questa equazione ha $\binom{14}{3}$ soluzioni

sia $A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z} \mid x_1+x_2+x_3 \leq 11,\ x_1,x_2,x_3 \geq 0\}$

$B = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Z} \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 11,\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0\}$. Allora $|B| = \binom{14}{3}$.

se $(a,b,c) \in A$ allora $(a,b,c,11-(a+b+c)) \in B$

se $(a,b,c,d) \in B$ allora $(a,b,c) \in A$ e questa corrispondenza è biunivoca.

Quindi $|A| = |B| = \binom{14}{3}$.

5 a) O T E N 10 lettere
3 5 1 1

$$\binom{10}{3}\binom{7}{5}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{10!}{3!\,7!}\;\frac{7!}{5!\,2!}\;\frac{2!}{1!\,1!}\;\frac{1!}{1!\,0!},\quad \frac{10!}{3!\,5!\,1!\,1!}$$

b) O V I 5 lettere
2 2 1

$$\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{5!}{2!\,3!}\;\frac{3!}{2!\,1!}\;\frac{1!}{1!\,0!} = \frac{5!}{2!\,2!\,1!}$$

c) R A C O M N D Z I E 15 lettere
1 3 2 ~~2~~ 1 2 1 ~~2~~ ~~2~~ 1
1 0 0
zio 3 lettere (solo 1 un modo da fare)

rimangono 12 lettere e zio. Quindi

$$\binom{13}{1}\binom{12}{1}\binom{11}{3}\binom{8}{2}\binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 13\cdot\frac{12!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!}$$

6 1 2 3 4 5 0 10 cifre . . . .
3 2 2 1 1 1 ↑ non lo 0

a) Dispari: finiscono con 1, 3 o 5

- finiscono con 1: . . . . 1 metto prima lo 0 (non sul primo posto) e poi il resto

$$\binom{8}{1}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 8\cdot\frac{8!}{2!\,2!\,2!\,1!\,1!} = 40320$$

- finiscono con 3: . . . . 3 metto prima lo 0 (non sul primo posto) e poi il resto

$$\binom{8}{1}\binom{8}{3}\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 8\cdot\frac{8!}{3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 26880$$

- finiscono con 5: . . . . 5 metto prima lo 0 (non sul primo posto) e poi il resto

$$\binom{8}{1}\binom{8}{3}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 8\cdot\frac{8!}{3!\,2!\,2!\,1!} = 13440$$

Quindi $40320 + 26880 + 13440 = 80640$

Alternativa: in ognuno dei 3 casi puoi anche prima calcolare il totale e poi sottrarre quelli che cominciano con 0.

b) divisibile per 5, cioè finiscono con 0 o 5

- finiscono con 0: . . . . 0 $\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{9!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!} = 15120$
- finiscono con 5: . . . . 5 $\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{3}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 8\cdot\frac{8!}{3!\,2!\,2!\,1!} = 13440$

Quindi $15120 + 13440 = 28560$

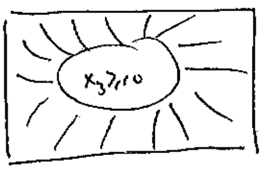
c) 111 2 3 4 5 0 . . . .
1 2 2 1 1 1 ↑ non lo 0.

$$\binom{7}{1}\binom{7}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 8820$$ (prima lo 0 poi il resto)

Alternativa: tutti − quelli che cominciano con 0: $\binom{8}{1}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} - \binom{7}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 8820$

7 a) $30 * 2|$ $\binom{32}{2} = 496$

b) $x_1 + x_2 + x_3 = 30$ $x_1 \geq 6$ $x_2 \geq 4$ $x_3 \leq 9$ $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.



$x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 4$

$30 - 10 = 20 * 2|$ $\binom{22}{2}$

$30 - 10 - 10 = 10 * 2|$ $\binom{12}{2}$

quindi $\binom{22}{2} - \binom{12}{2} = 165$

8 a) div. per 3 : $\left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$ div. per 3 e 7: $\left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47$ div per 3, 7, 13 = $\left\lfloor \frac{1000}{273} \right\rfloor = 3$

div per 7 : $\left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$ div per 3 e 13 $\left\lfloor \frac{1000}{39} \right\rfloor = 25$

div per 13 : $\left\lfloor \frac{1000}{13} \right\rfloor = 76$ div per 7 e 13 $\left\lfloor \frac{1000}{91} \right\rfloor = 10$

Quindi $1000 - [(333+142+76) - (47+25+10) + 3] = 528$

b) div. per 3 = 333, div per 13 = 76, div. per 3 e 13 = 25. Quindi ci sono $333+76-25 = 384$ numeri divisibile per 13 o 3. Se un numero è divisibile per 27 allora è divisibile per 3. ci sono $\left\lfloor \frac{1000}{27} \right\rfloor = 37$ numeri divisibile per 27 e tutti questi sono tra i 384 numeri divisibile per 13 o 3. Quindi: $384 - 37 = 347$ sono divisibile per 3 o 13 ma non per 27.

9 div per 80 $\left\lfloor \frac{226680}{80} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{86419}{80} \right\rfloor = 2833 - 1080$

div per 225 $\left\lfloor \frac{226680}{225} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{86419}{225} \right\rfloor = 1007 - 384$

div per 324 $\left\lfloor \frac{226688}{324} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{86419}{324} \right\rfloor = 699 - 266$

div per 80 e 225 = $\left\lfloor \frac{226680}{3600} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{86419}{3600} \right\rfloor = 62 - 24$

div per 80 e 324 : $\left\lfloor \frac{226680}{6480} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{86419}{4680} \right\rfloor = 34 - 13$

div per 225 e 324 : $\left\lfloor \frac{226680}{8100} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{86419}{8100} \right\rfloor = 27 - 10$

div per 80, 225 e 324 : $\left\lfloor \frac{226680}{32400} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{86419}{32400} \right\rfloor = 6 - 2$

Quindi : $(2833-1080) + (1007-384) + (699-266) - (62-24) - (34-13) - (27-10) + (6-2) =$ 2737.

10 sia $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 43210\}$ e $Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 1349\}$

sia $A_1 = \{x \in X \mid 4 | x\}$ $A_2 = \{y \in Y \mid 4 | y\}$

$B_1 = \{x \in X \mid 18 | x\}$ $B_2 = \{y \in Y \mid 18 | y\}$

$C_1 = \{x \in X \mid 150 | x\}$ $C_2 = \{y \in Y \mid 150 | y\}$

$D_1 = \{x \in X \mid 270 | x\}$ $D_2 = \{y \in Y \mid 270 | y\}$

mcm(4, 18) = 36
mcm(4, 150) = 300
mcm(4, 270) = 540
mcm(18, 150) = 450
mcm(18, 270) = 270
mcm(150, 270) = 1350
mcm(4, 18, 150) = 900
mcm(4, 18, 270) = 540
mcm(4, 150, 270) = 2700
mcm(18, 150, 270) = 1350
mcm(4, 18, 150, 270) = 2700

Quindi $|A_1| = 10802$ $|B_1| = 2400$ $|C_1| = 288$ $|D_1| = 160$

$|A_1 \cap B_1| = 1200$ $|A_1 \cap C_1| = 144$ $|A_1 \cap D_1| = 80$ $|B_1 \cap C_1| = 96$ $|B_1 \cap D_1| = 160$ $|C_1 \cap D_1| = 32$

$|A_1 \cap B_1 \cap C_1| = 48$ $|A_1 \cap B_1 \cap D_1| = 80$ $|A_1 \cap C_1 \cap D_1| = 16$ $|B_1 \cap C_1 \cap D_1| = 32$ $|A_1 \cap B_1 \cap C_1 \cap D_1| = 16$

$|A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D_1| = (10802 + 2400 + 288 + 160) - (1200 + 144 + 80 + 96 + 160 + 32) + (48 + 80 + 16 + 32) - 16$
$= 12098$

$|A_2| = 337$ $|B_2| = 74$ $|C_2| = 8$ $|D_2| = 4$

$|A_2 \cap B_2| = 37$ $|A_2 \cap C_2| = 4$ $|A_2 \cap D_2| = 2$ $|B_2 \cap C_2| = 2$ $|B_2 \cap D_2| = 4$ $|C_2 \cap D_2| = 0$

$|A_2 \cap B_2 \cap C_2| = 1$ $|A_2 \cap B_2 \cap D_2| = 2$ $|A_2 \cap C_2 \cap D_2| = 0$ $|B_2 \cap C_2 \cap D_2| = 0$ $|A_2 \cap B_2 \cap C_2 \cap D_2| = 0$

$|A_2 \cup B_2 \cup C_2 \cup D_2| = (337 + 74 + 8 + 4) - (37 + 4 + 2 + 2 + 4 + 0) + (1 + 2 + 0 + 0) - (0) = 377$

$|A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D_1| - |A_2 \cup B_2 \cup C_2 \cup D_2| = 11721$

11 Sia $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \mid x_i \in \mathbb{Z},\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0,\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 29\}$

Per $i \in \{1,\dots,5\}$ sia $A_i = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in U \mid x_i \geq i+7\}$

cerchiamo $\left|U \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)\right|$

$|U| = \binom{33}{4}$

A_1 : $29-8 = 21$ * 4| : $\binom{25}{4}$
A_2 : $29-9 = 20$ * 4| : $\binom{24}{4}$
A_3 : $29-10 = 19$ * 4| : $\binom{23}{4}$
A_4 : $29-11 = 18$ * 4| : $\binom{22}{4}$
A_5 : $29-12 = 17$ * 4| : $\binom{21}{4}$

$A_1 \cap A_2$: 12 * 4| : $\binom{16}{4}$
$A_1 \cap A_3$: 11 * 4| : $\binom{15}{4}$
$A_1 \cap A_4$: 10 * 4| : $\binom{14}{4}$
$A_1 \cap A_5$: 9 * 4| : $\binom{13}{4}$
$A_2 \cap A_3$: 10 * 4| : $\binom{14}{4}$
$A_2 \cap A_4$: 9 * 4| : $\binom{13}{4}$
$A_2 \cap A_5$: 8 * 4| : $\binom{12}{4}$
$A_3 \cap A_4$: 8 * 4| : $\binom{12}{4}$
$A_3 \cap A_5$: 7 * 4| : $\binom{11}{4}$
$A_4 \cap A_5$: 6 * 4| : $\binom{10}{4}$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$: 2 * 4| : $\binom{6}{4}$
$A_1 \cap A_2 \cap A_4$: 1 * 4| : $\binom{5}{4}$
$A_1 \cap A_2 \cap A_5$: 0 * 4| : $\binom{4}{4}$
$A_1 \cap A_3 \cap A_4$: 0 * 4| : $\binom{4}{4}$
$A_1 \cap A_3 \cap A_5$: $\emptyset$
$A_1 \cap A_4 \cap A_5$: $\emptyset$
$A_2 \cap A_3 \cap A_4$: $\emptyset$
$A_2 \cap A_3 \cap A_5$: $\emptyset$
$A_2 \cap A_4 \cap A_5$: $\emptyset$
$A_3 \cap A_4 \cap A_5$: $\emptyset$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$: $\emptyset$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5$: $\emptyset$
$A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5$: $\emptyset$
$A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$: $\emptyset$
$A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$: $\emptyset$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$: $\emptyset$

Quindi
$$\binom{33}{4} - \left[\binom{25}{4}+\binom{24}{4}+\binom{23}{4}+\binom{22}{4}+\binom{21}{4}\right] + \left[\binom{16}{4}+\binom{15}{4}+\binom{14}{4}+\binom{13}{4}+\binom{14}{4}+\binom{13}{4}+\binom{12}{4}+\binom{12}{4}+\binom{11}{4}+\binom{10}{4}\right]$$
$$- \left[\binom{6}{4}+\binom{5}{4}+\binom{4}{4}+\binom{4}{4}\right]$$

12 a)

Bambino i non ha una moneta : 3^7
Bambini i e j non hanno una moneta $i \neq j$: 2^7
Bambini i,j,k non hanno una moneta $i\neq j \neq k \neq i$: 1^7

$$4^7 - \left[\binom{4}{1}\cdot 3^7 - \binom{4}{2}\cdot 2^7 + \binom{4}{3}\cdot 1^7\right] = 8400$$

b) Prima dare la moneta di valore più alta al bambino più giovane:
1) il bambino più giovane riceverà solo quella : $3^6 - \binom{3}{1}\cdot 2^6 + \binom{3}{2}\cdot 1^6$
2) il bambino più giovane riceverà altri : $4^6 - \binom{4}{1} 3^6 + \binom{4}{2}\cdot 2^6 - \binom{4}{3} 1^6$

$(729 - 192 + 3) + (4096 - 2916 + 384 - 4) = 2100$

13 a) A_i : 10010 sui posti $i \dots i+4$. $|A_i| = 2^7$

$A_i \cap A_j$ { 10010010 : $|A_i \cap A_j| = 2^4$
10010 (due volte) : $|A_i \cap A_j| = 2^2$

$A_i \cap A_j \cap A_k$ | 10010010010 : $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2$

$$\binom{8}{1}\cdot 2^7 - \binom{5}{1}\cdot 2^4 - \binom{4}{2}\cdot 2^2 + \binom{3}{1}\cdot 2 = 908$$

b) $\binom{11}{1}\cdot 2^{10} - \binom{10}{2}\cdot 2^8 + \binom{9}{3}\cdot 2^6 - \binom{8}{4}\cdot 2^4 + \binom{7}{5}\cdot 2^2 - \binom{6}{6}\cdot 1 = 4083$

Alternativa: $2^{12} - 13 = 4083$

14

a) contengono 1000100 : $\binom{14}{1}\binom{13}{7} - \left[\binom{8}{2}\binom{6}{5} + \binom{10}{1}\binom{9}{6}\right] + \binom{6}{1}$

b) contengono 1011 : $\binom{16}{1}\binom{15}{5} - \left[\binom{12}{2}\binom{10}{1} + \binom{12}{1}\binom{4}{2} + \binom{13}{1}\binom{12}{3}\right]$

$$+ \left[\binom{9}{1} + \binom{9}{1} + \binom{10}{1}\binom{9}{1}\right]$$