Compito 3

1) a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ il sistema lineare non ha soluzioni

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ il sistema lineare ha infinite soluzioni.

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ il sistema lineare ha un unica soluzione.

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-6 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a^2-6 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right)$

se $a^2-4 \neq 0$ allora il sistema ha una unica soluzione

se $a^2-4=0$ allora $a=2$ o $a=-2$

se $a=2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ il sistema ha infinite soluzioni

se $a=-2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ il sistema non ha soluzioni

Quindi: il sistema lineare non ha soluzioni se $a=-2$

ha un unica soluzione se $a^2 \neq 4$

ha infinite soluzioni se $a=2$

3) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & a^2+2 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a^2 & a+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 & a \end{array}\right)$

se $a^2-1 \neq 0$ allora il sistema ha infinite soluzioni

se $a^2-1=0$ allora $a=1$ o $a=-1$

se $a=1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ non ha soluzioni

se $a=-1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ non ha soluzioni

Quindi: il sistema lineare non ha mai una soluzione unica

ha infinite soluzioni se $a^2 \neq 1$

non ha soluzioni se $a=1$ o $a=-1$

4) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a^2-1 & 4 & a+2 \\ 1 & 0 & 1 & a+1 & 2-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-3 & 2 & a+1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & 1-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 2-a \end{array}\right)$

se $a \neq 0$ e $a^2-4 \neq 0$ allora il sistema ha un unica soluzione.

se $a=0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ non ha soluzioni

se $a^2-4=0$ allora $a=2$ o $a=-2$

se $a=2$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ non ha soluzioni

se $a=-2$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ha infinite soluzioni

Quindi il sistema lineare ha un unica soluzione se $a \neq 0$ e $a^2 \neq 4$
ha infinite soluzioni se $a = -2$
non ha soluzioni se $a = 0$ o $a = 2$

5 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ il rango è 2

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ il rango è 1

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ il rango è 3

6 a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non è possibile

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7 Dobbiamo risolvere $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 + x_4 \vec{v}_4 = \vec{v}$

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ il sistema ha soluzioni, quindi sì.

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & -6 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2/7 \\ 0 & -6 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 5/7 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -6/7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/7 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -6/7 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/7 \end{array}\right)$ il sistema non ha soluzioni, quindi no.

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ il sistema ha soluzioni, quindi sì.

d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ il sistema non ha soluzioni, quindi no

(8) a) se $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ sono soluzioni di $A\vec{x}=\vec{b}$, allora vale $A\vec{x}_1=\vec{b}$ e $A\vec{x}_2=\vec{b}$

Quindi $A(\vec{x}_1-\vec{x}_2)=A\vec{x}_1-A\vec{x}_2=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$. Quindi $(\vec{x}_1-\vec{x}_2)$ è una soluzione di $A\vec{x}=\vec{0}$.

b) se $\vec{x}_1$ è una soluzione di $A\vec{x}=\vec{b}$, allora vale $A\vec{x}_1=\vec{b}$.
se $\vec{x}_2$ è una soluzione di $A\vec{x}=\vec{0}$, allora vale $A\vec{x}_2=\vec{0}$

Quindi $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=A\vec{x}_1+A\vec{x}_2=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$. Quindi $(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$ è una soluzione di $A\vec{x}=\vec{b}$.

c) se $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ sono soluzioni di $A\vec{x}=\vec{0}$, allora vale $A\vec{x}_1=\vec{0}$ e $A\vec{x}_2=\vec{0}$

Quindi $A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=A\vec{x}_1+A\vec{x}_2=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$. Quindi $(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$ è una soluzione di $A\vec{x}=\vec{0}$.

d) se $\vec{x}_1$ è una soluzione di $A\vec{x}=\vec{0}$, allora vale $A\vec{x}_1=\vec{0}$. sia $k\in\mathbb{R}$.

Allora $A(k\vec{x}_1)=k(A\vec{x})=k\vec{0}=\vec{0}$. Quindi $k\vec{x}_1$ è una soluzione di $A\vec{x}=\vec{0}$.

Osservazione es. 7a e 7c

a)
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&1&-2&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&0&-1&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&3&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\begin{cases}x_1+3x_4=3\\x_2-x_4=0\\x_3-x_4=0\end{cases}\to\begin{cases}x_1=3-3x_4\\x_2=x_4\\x_3=x_4\end{cases}$$

$$\text{sol.}\ \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ x_1=3-3x_4,\ x_2=x_4,\ x_3=x_4\right\}=\left\{\begin{pmatrix}3-3x_4\\x_4\\x_4\\x_4\end{pmatrix}\ \middle|\ x_4\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ x_4\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&1&-2\\2&1&2&3\\1&-1&6&-1\\0&3&-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\3\\0\end{pmatrix}\ \text{ok!}\qquad\begin{pmatrix}1&4&1&-2\\2&1&2&3\\1&-1&6&-1\\0&3&-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \text{ok!}$$

Quindi se prendo $x_1=3-3t$ $x_2=x_3=x_4=t$ trovo per ogni t un modo di scrivere il vettore come una combinazione lineare di $\vec{v}_1\dots\vec{v}_4$.

c)
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&1&-2&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&4&0&-1&4\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&3&4\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\quad\begin{cases}x_1+3x_4=4\\x_2-x_4=0\\x_3-x_4=-1\end{cases}\to\begin{cases}x_1=4-3x_4\\x_2=x_4\\x_3=-1+x_4\end{cases}$$

$$\text{sol.}\ \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ x_1=4-3x_4,\ x_2=x_4,\ x_3=-1+x_4\right\}=\left\{\begin{pmatrix}4-3x_4\\x_4\\-1+x_4\\x_4\end{pmatrix}\ \middle|\ x_4\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ x_4\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&1&-2\\2&1&2&3\\1&-2&6&-1\\0&3&-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\-2\\5\end{pmatrix}\ \text{ok!}\qquad\begin{pmatrix}1&4&1&-2\\2&1&2&3\\1&-2&6&-1\\0&3&-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \text{ok!}$$

Quindi se prendo $x_1=4-3t$, $x_2=t$, $x_3=-1+t$, $x_4=t$ trovo per ogni t un modo di scrivere il vettore come una combinazione lineare di $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_4$.