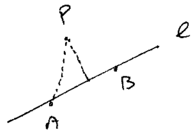
Compito 1 Soluzioni

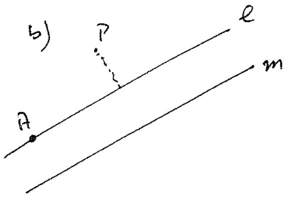
① a) 

$A=(5,2)$ $\quad B=(3,7)$ $\quad P=(2,-5)$ $\quad \vec{AB}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ $\quad$ eq. parametrica l: $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = 2+5t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

distanza tra P e l: $\| \vec{AP} - \mathrm{proj}_{\vec{AB}} \vec{AP} \|$. $\quad \vec{AP} = \begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}$

$\mathrm{proj}_{\vec{AB}} \vec{AP} = \dfrac{\langle \begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} = \dfrac{6-35}{4+25}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} = \dfrac{-29}{29}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

$\vec{AP} - \mathrm{proj}_{\vec{AB}}\vec{AP} = \begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ $\quad$ quindi $\| \vec{AP} - \mathrm{proj}_{\vec{AB}}\vec{AP} \| = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$

b) 

$A=(0,3)$ $\quad$ l è parallelo ad m, un vettore di direzione è $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \vec{v}$

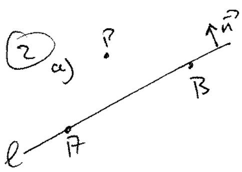
eq. parametrica l: $\begin{cases} x = t \\ y = 3-2t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

$P=(6,1)$

la distanza tra l e P è $\| \vec{AP} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{AP} \|$. $\quad \vec{AP} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

$\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{AP} = \dfrac{\langle \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \rangle}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \dfrac{10}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{AP} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{AP} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ Quindi $\| \vec{AP} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{AP} \| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

② a) 

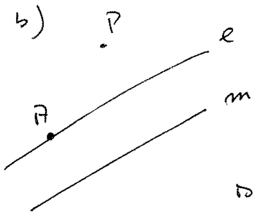
$A=(1,2)$ $\quad B=(3,8)$ $\quad P=(0,2)$ $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ $\quad$ un normale di l è $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \vec{n}$

un punto su l è A. $\quad \langle \begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \rangle = 0$

cioè $(-3)(x-1) + (1)(y-2) = 0$ $\quad$ cioè $-3x+y+1=0$ è l'equazione cartesiana di l

La distanza tra P e l è $\| \mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{AP} \|$.

$\vec{AP} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{AP} = \frac{3}{10}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ $\quad \| \mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{AP} \| = \frac{3}{10}\sqrt{10}$.

b) 

$A=(1,1)$. un normale di m è $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, quindi è anche un normale di l

un punto di l è $(1,1)$.

$\langle \begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \rangle = 0$ $\quad (x-1)+3(y-1) = 0$ $\quad x+3y-4=0$ eq. cartesiana di l

Distanza tra P e l: $\| \mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{AP} \|$.

$\vec{AP} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{AP} = \dfrac{\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \rangle}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $\quad \| \mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{AP} \| = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{10}\sqrt{10}$

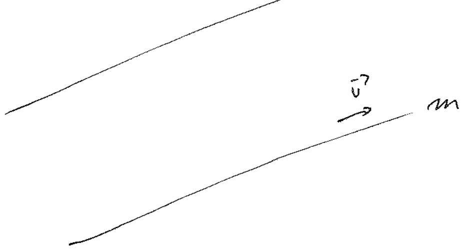
③ a) l: $x-y=3$ $\quad$ un normale di l è $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

m: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\quad$ un vettore di direzione di m è $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

l è parallelo ad m se e solo se un normale di l è perpendicolare a un vettore di direzione di m. $\quad \langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle = 1-1=0$

Quindi $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ è perpendicolare ad $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Le rette sono parallele:

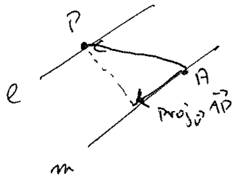


$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Trovare la distanza tra l e m

soluzione 1:



prendo un punto P su l e calcolo la distanza tra P e m:

sia $\vec{v}$ un vettore di direzione di m : $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

prendo un punto A su m : $A = (1,1)$

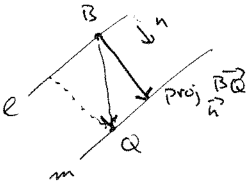
la distanza tra P e m è $\| -proj_{\vec{v}} \vec{AP} + \vec{AP} \|$

$\vec{AP} = -\vec{OA} + \vec{OP} = -\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$proj_{\vec{v}} \vec{AP} = \dfrac{\langle \vec{AP} | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} \vec{v} = \dfrac{\langle \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{2-1}{2} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$-proj_{\vec{v}} \vec{AP} + \vec{AP} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\-3/2\end{pmatrix}$. La distanza è $\left\| \begin{pmatrix}3/2\\-3/2\end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

soluzione 2:



prendo un punto Q su m e calcolo la distanza tra Q e l

sia $\vec{n}$ un normale di l : $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

prendo un punto B su l. la distanza tra Q e l è $\| proj_{\vec{n}} \vec{BQ} \|$

$B = (3,0)$ $\quad \vec{BQ} = -\vec{OB} + \vec{OQ} = -\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

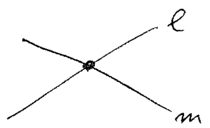
$Q = (1,1)$

$proj_{\vec{n}} \vec{BQ} = \dfrac{\langle \vec{BQ} | \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n} | \vec{n} \rangle} \vec{n} = \dfrac{\langle \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \dfrac{-3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

La distanza è $\left\| -\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\| = 3/2 \left\| \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\| = 3/2 \sqrt{2}$.

b) $l = \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \end{cases} t \in \mathbb{R}$, $\quad m = \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

un vettore di direzione di l è $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono paralleli, quindi
un vettore di direzione di m è $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad$ le rette si intersecano.

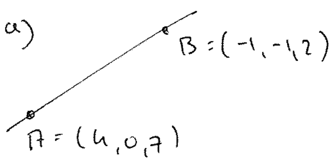


$l = \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ $\qquad m = \begin{cases} x = s \\ y = 1-s \end{cases} s \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} 1+t = s \\ 1+t = 1-s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t-s = -1 \\ t+s = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2t = -1 \\ t+s = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -1/2 \\ s = 1/2 \end{cases}$

per $t = -1/2$ trovo il punto $(1/2, 1/2)$ su l
controllo per $s = 1/2$ trovo il punto $(1/2, 1/2)$ su m. ok!!

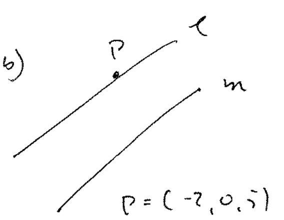
4 a)



un vettore di direzione è $\vec{AB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\-5\end{pmatrix}$

$l: \begin{cases} x = 4-5t \\ y = -t \\ z = 7-5t \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

b)



un vettore di direzione di m è $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$. l è parallelo ad m, quindi
un vettore di direzione di l è $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

$l = \begin{cases} x = -2+2t \\ y = -t \\ z = 5+2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

5 $\quad l = \begin{cases} x = -1+4t \\ y = 3+t \\ z = 1 \end{cases} t \in \mathbb{R}$ $\qquad m: \begin{cases} x = -5+12t \\ y = -4+6t \\ z = -5+3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

un vettore di direzione di l è $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono paralleli
un vettore di direzione di m è $\vec{w} = \begin{pmatrix}12\\6\\3\end{pmatrix}$
Quindi l e m sono sghembe o si intersecano.

$$l: \begin{cases} x = -1+4t \\ y = 3+t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad m = \begin{cases} x = -5+12s \\ y = -4+6s \\ z = -5+3s \end{cases} \qquad \begin{cases} -1+4t = -5+12s \\ 3+t = -4+6s \\ 1 = -5+3s \end{cases} \to \begin{cases} 4t-12s=-4 \\ t-6s=-7 \\ -3s=-6 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 4t-12s=-4 \\ t-6s=-7 \\ s=2 \end{cases} \to \begin{cases} 4t=20 \\ t=5 \\ s=2 \end{cases}$$ soluzioni $t=5$, $s=2$ Quindi si intersecano.

per $t=5$ trovo su l il punto $(19, 8, 1)$ Q
(controllo per $s=2$ trovo su m il punto $(19, 8, 1)$ ok!!)

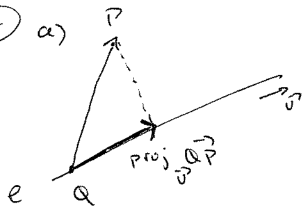
6 $$l = \begin{cases} x = 1+7t \\ y = 3+t \\ z = 5-3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad e \quad m = \begin{cases} x = 4-s \\ y = 6 \\ z = 7+2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

un vettore di direzione di l è $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono paralleli

un vettore di direzione di m è $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ quindi le rette non sono parallele

$$\begin{cases} 1+7t = 4-s \\ 3+t = 6 \\ 5-3t = 7+2s \end{cases} \to \begin{cases} 7t+s = 3 \\ t = 3 \\ -3t-2s = 2 \end{cases} \to \begin{cases} s = 18 \\ t = 3 \\ s = -11/2 \end{cases}$$ non c'è una soluzione, quindi le rette sono sghembe

7 a)



$P = (1, 0, -1)$ $\quad$ un vettore di direzione di l è $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

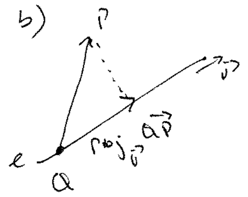
$Q = (2, 0, 1)$

$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{proj}_{\vec{v}} \vec{QP} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+16} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{QP} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{QP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/17 \\ -4/17 \\ -2 \end{pmatrix}$$

la distanza tra P e l: $\| \vec{QP} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{QP} \| = \left\| \begin{pmatrix} -16/17 \\ -4/17 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{-16}{17}\right)^2 + \left(\frac{-4}{17}\right)^2 + \left(\frac{-34}{17}\right)^2} = \frac{1}{17} \sqrt{1428}$

b)



$P = (1, 5, 4)$ $\quad$ un vettore di direzione di l è $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

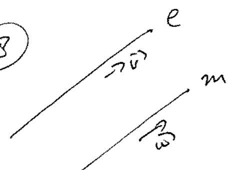
$Q = (7, 3, 8)$

$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{proj}_{\vec{v}} \vec{QP} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-18-2-8}{9+1+4} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-28}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{QP} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{QP} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ $\quad \| \vec{QP} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{QP} \| = 0$, la distanza è 0

infatti P è su l (prendo $t = -2$)

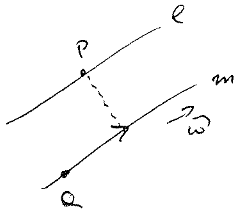
8



un vettore di direzione di l è $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad -2\vec{v} = \vec{w}$ quindi

un vettore di direzione di m è $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ l e m sono paralleli.

Prendo un punto P su l e calcolo la distanza tra P e m:



$P = (2, 0, 1)$

Prendo un punto Q su m: $\quad Q = (1, 3, 5)$

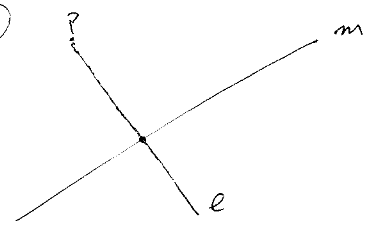
$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{proj}_{\vec{w}} \vec{QP} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{22}{24} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{QP} - \text{proj}_{\vec{w}} \vec{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{11}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\| \vec{QP} - \text{proj}_{\vec{w}} \vec{QP} \| = \frac{1}{6} \sqrt{25+16+169} = \frac{1}{6} \sqrt{210}$$

La distanza tra l e m è $\frac{1}{6} \sqrt{210}$.

9

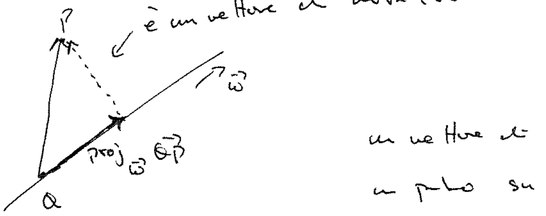


$P = (1,1,1)$

$$m = \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+2t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

un vettore di direzione di m è $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

soluzione 1



sia $Q = (0,1,0)$

$\vec{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{proj}_{\vec{\omega}} \vec{QP} = \frac{2}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

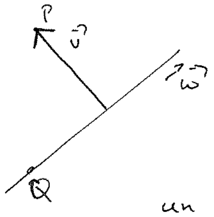
$\vec{QP} - \mathrm{proj}_{\vec{\omega}} \vec{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

un vettore di direzione di l è $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

un punto su l è P

$$l : \begin{cases} x = 1 + 1/2\, t \\ y = 1 - 1/2\, t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

soluzione 2



sia $Q = (0,1,0)$

allora $\vec{v}$ è perpendicolare a $\vec{\omega}$ e $\vec{v}$ è nel piano che contiene P e m. Cioè $\vec{v}$ è pependicolare ad un normale del piano che contiene P e m

un normale di questo piano è $\vec{n} = \vec{QP} \wedge \vec{\omega}$

$\vec{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$

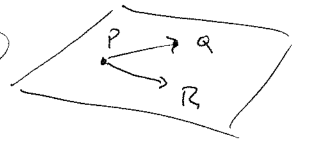
$= -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$\vec{v}$ è perpendicolare a $\vec{\omega}$ e $\vec{n}$ quindi parallelo a $\vec{\omega} \wedge \vec{n}$

$\vec{\omega} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$l : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + 8t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

10



a) $P = (-2,1,1)$, $\quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

$Q = (0,2,3)$ $\quad$ un normale del piano è $\vec{PQ} \wedge \vec{PR}$

$R = (1,9,-1)$

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \vec{k} = -18\vec{i} + 10\vec{j} + 13\vec{k} = \begin{pmatrix} -18 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -18 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad -18(x+2) + 10(y-1) + 13(z-1) = 0$

$-18x + 10y + 13z - 59 = 0$

b) $P = (1,2,3)$ $\quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ un normale del piano è $\vec{PQ} \wedge \vec{PR}$

$Q = (-1,-1,2)$ $\quad \vec{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

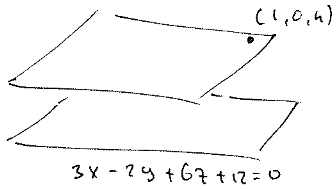
$R = (2,3,-1)$

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 5\vec{i} - 9\vec{j} - \vec{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad 5(x-1) - 9(y-2) - (z-3) = 0$

$5x - 9y - z + 10 = 0$

11



un normale del piano cercato è $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

un punto sul piano cercato è $(1,0,4)$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad 3(x-1) - 2(y) + 6(z-4) = 0$$

$$3x - 2y + 6z - 27 = 0.$$

Commento: 10 a) $\begin{pmatrix} -18 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$ deve essere perpendicolare a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$. Perciò

il prodotto scalare fra $\begin{pmatrix} -18 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è zero e

il prodotto scalare fra $\begin{pmatrix} -18 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ è zero.

$$\left\langle \begin{pmatrix} -18 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -36 + 10 + 26 = 0 \quad \text{ok!!}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -18 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = -54 + 80 - 26 = 0 \quad \text{ok!!}$$

10 b) simile: $\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -10 + 9 + 1 = 0$ ok!!

$\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 - 9 + 4 = 0$ ok!!

si può controllare la risposta!!