Matematica Discreta

Compito 10

1.) Siano A, B e C sottoinsiemi del insieme U. Dimostrare:
a.) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ b.) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ c.) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2.) Sia $U = \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$. Gli elementi di U sono ordinati in modo cresente.
a.) Per ogni insieme date trovare il bit string di lunghezza 16 correspondente: $A = \{x \in U \mid x \text{ è pari}\}$, $B = \{x \in U \mid 4 \leq x < 8\}$, $C = \{x \in U \mid x \text{ è un quadrato}\}$, $A \cap B$, $B \cup C$, $((A \cap B) \cup C)^c$, $A \cap (B \cup C)$.
b.) Per ogni bit string dato trovare il sottoinsieme di U correspondente:
0011001100110011, 1000110011001100, 1000011000001100 e 0011001100001001.

3.) Vero o falso?
a.) $\{x\} \in \{x\}$ b.) $\{x\} \in \{\{x\}\}$ c.) $\{x\} \subseteq \{x\}$ d.) $\emptyset \in \{x\}$ e.) $\emptyset \subseteq \{x\}$

4.) Dimostrare che le proposizioni sono logicamente equivalenti:
a.) $P \to Q$ e $(\neg P) \vee Q$ b.) $P \to Q$ e $\neg(P \wedge (\neg Q))$ c.) $P \leftrightarrow Q$ e $(P \to Q) \wedge ((\neg P) \to (\neg Q))$

5.) Dimostare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, vale $n < 2^n$.

6.) Dimostare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, vale $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

7.) Dimostare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, vale $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

8.) Dimostrare che con monete di 4 e 5 centesimi si può pagare ogni boletta di almeno 12 centesimi.

9.) Dimostrare che 5 divide $n^5 - n$ per ogni intero positivo n,
a.) usando l'induzione. b.) usando l'aritmetica modulare.

10.) Sia F la funzione definita recorsivamente da la relazione:
$F(n + 1) = F(n) + F(n - 1)$, per $n \geq 2$, e con $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$. (Cioè i numeri di Fibonacci.)
a.) Dimostrare che per $n > 2$ vale $F(n + 2) = 1 + F(0) + \cdots + F(n)$
b.) Dimostrare che per $n \geq 1$ vale $F(n)^2 - F(n + 1)F(n - 1) = (-1)^{n-1}$.

11.) Sia $S \subseteq \mathbb{Z}$ definita ricorsivamente dalle regole
1.) $-12 \in S$ e $20 \in S$
2.) Se $x, y \in S$ allora $x + y \in S$.
Dimostare (con induzione) che $S = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

12.) L'orario settimanale di lezioni di un corso di laurea è stato diviso in 38 periodi di un ora. Ogni settimane ci sono 677 ore di lezioni da fare. Non si può tenere contemporaneamente due lezioni in una sola aula. Di quante aule ci ha almeno bisognio?

13.) Nel piano sono dati cinque punti diversi con coordinate intere. Dimostrare che sulle rette tra i cinque punti esiste almeno un punto medio con coordinate intere.

Buon divertimento!