Matematica Discreta

Compito 5

1.) Consideriamio gli sotto insiemi X, Y e Z di $\mathbb{R}^2$ dato da

$X = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x_2\}$, $\quad Y = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$, $\quad Z = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 3x_2\}$

e gli sotto insiemi P, Q, R e S di $\mathbb{R}^3$ dato da $P = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$,

$Q = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\}$, $\quad R = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$, $\quad S = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 = x_2\}$.

a.) Stabilire quali di X, Y, Z sono un sotto spazio di $\mathbb{R}^2$.
b.) Stabilire quali di P, Q, R, S sono un sotto spazio di $\mathbb{R}^3$.

2.) Siano X e Y due sotto spazi di R^n. Quali di $X \cap Y$, $X \cup Y$ e $X \backslash Y$ sono sotto spazi di R^n?

3.) Sia T un'applicazione lineare dato dalla matrice A. Per ogni matrice discrivere l'imagine di T geometricamente (cioè come punto, rette, piano o tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$).

a.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ b.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$ $\quad$ c.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$

d.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ e.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ f.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

4.) Stabilire se i vettori dati sono linearmente indipendenti o no.

a.) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ b.) $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad$ c.) $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d.) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ e.) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ f.) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

5.) Stabilire se gli insiemi ordinati di vettori formano una base di $\mathbb{R}^2$.

a.) $(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ $\quad$ b.) $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix})$ $\quad$ c.) $(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix})$

6.) Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dato da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_4 \end{pmatrix}$. E' $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in Ker(T)$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in Im(T)$?

7.) Sia T un'applicazione lineare dato dalla matrice A. Trovare un base del nucleo di T.

a.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ b.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad$ c.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ e.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ f.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8.) Sia T un'applicazione lineare dato dalla matrice A. Determinare una base di $Im(T)$.

a.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ b.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad$ c.) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ e.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ $\quad$ f.) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Buon divertimento!