OSS Siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$. Se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ sono linearmente indipendenti allora esiste una base di $\mathbb{R}^n$ che contiene $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$.

Dim $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$. l'algoritmo di prima adesso da una base che commincia con $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$, perchè $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ sono linearmente indipendenti.

Teorema Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Ogni base di V ha lo stesso numero di vettori

Def Il numero di vettori in una base di U viene chiamato la dimensione di U e viene denotato con $\dim(U)$. Per definizione $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Esempi

$\mathbb{R}^3$ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, quindi $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

$\mathbb{R}^n$ $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$, quindi $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ non è una base di $\mathbb{R}^3$, perchè non ha 3 vettori

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right)$ non è una base di $\mathbb{R}^3$, perchè non ha 3 vettori

OSS Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, con $V \neq \{\vec{0}\}$. Allora V ha una base.

Dim: Sia $\vec{v}_1 \in V$ con $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$. Se $\langle \vec{v}_1 \rangle = V$ allora $(\vec{v}_1)$ è una base di U, se no allora esiste un $\vec{v}_2 \in U$ con $\vec{v}_2 \notin \langle \vec{v}_1 \rangle$. Se $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = U$ allora $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ è una base di U, se no allora esiste un $\vec{v}_3 \in U$ con $\vec{v}_3 \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$. Se $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = U$ allora $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ è una base di U se no .....

$\vdots$

Il processo finisce dopo al massimo n passi: Se no dopo $n+1$ passi abbiamo trovati $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}$ linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$. Quindi esiste una base di $\mathbb{R}^n$ che contiene $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1}$, cioè di almeno $n+1$ vettori. Contraddizione.

OSS Se U e W sono due sottospazi di $\mathbb{R}^n$ con $U \subseteq W$, allora $\dim(U) \leq \dim(W)$.

Dim: Se $U = \{\vec{0}\}$ allora $\dim(U) = 0$ e la conclusione vale. Se $V \neq \{\vec{0}\}$ prendiamo una base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ di V e una base $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p$ di W. Allora $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p \rangle = W$ quindi esiste una base di W che contiene $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$. Perciò $\dim(W) \geq r = \dim(U)$.

OSS Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, con $\dim(U) = m$. Allora

(a) Ogni insieme di vettori di U che è linearmente indipendenti ha al massimo m vettori

(b) Ogni insieme di vettori di U che generano U ha almeno m vettori

(c) m vettori in U che sono linearmente indipendenti sono una base di U (cioè generano U)

(d) m vettori in U che generano U sono una base di U (cioè sono linearmente indipendenti)

Dim

(a) Supponiamo che abbiamo $m+1$ vettori di V che sono linearmente indipendenti. Allora possiamo trovare una base di U che gli contiene. Quindi possiamo trovare una base di U che contiene al meno $m+1$ vettori, questo non è possibile perchè $\dim(U) = m$. Quindi non esistono $m+1$ vettori in U che sono linearmente indipendenti

(b) Supponiamo che abbiamo $< m$ vettori di U che generano U. Tra questi posso prendere alcuni in modo tale che formano una base di U. Quindi posso trovare una base di U con $< m$ vettori. Una contraddizione con $\dim(U) = m$.

ⓒ Ogni insieme di vettori linearmente indipendenti posso estendere ad una base di U. Visto che ne ho già m e $\dim(U)=m$ questi già formano una base di U.

ⓓ Da ogni insieme di vettori che generano U posso costruire una base di U eliminando alcuni vettori del insieme. Visto che ne ho m e $\dim(U)=m$ non posso eliminare vettori del insieme. Quindi questi già formano una base di U.

<u>OSS</u> Se U e W sono due sottospazi di $\mathbb{R}^n$ con $V \subseteq W$ e $\dim(U)=\dim(W)$, allora $U=W$

Dim: Sia b una base di U, allora i vettori sono linearmente indipendenti e sono $\subseteq W$. Dato che $\dim(U)=\dim(W)$ segue dal punto c precedente che questi sono anche una base di W. Cioè generano W. Quindi $U=W$.
se $U=\{\vec{0}\}$ allora $\dim(U)=0=\dim(W)$ quindi $W=\{\vec{0}\}$.

<u>OSS</u> Sia $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = n.$$

Dimostrazione: Sia $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ una base di $\ker(T)$. Allora possiamo trovare una base di $\mathbb{R}^n$ che gli contiene: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n$. Sia $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, allora
$\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_r\vec{v}_r + a_{r+1}\vec{v}_{r+1} + \dots + a_n\vec{v}_n$, per certo $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Allora

$$T(\vec{w}) = a_1T(\vec{v}_1) + a_2T(\vec{v}_2) + \dots + a_rT(\vec{v}_r) + a_{r+1}T(\vec{v}_{r+1}) + \dots + a_nT(\vec{v}_n)$$
$$= a_{r+1}T(\vec{v}_{r+1}) + \dots + a_nT(\vec{v}_n), \quad \text{perché } T(\vec{v}_1) = \dots = T(\vec{v}_r) = 0.$$

Quindi $\operatorname{Im}(T) = \langle T(\vec{v}_{r+1}), \dots, T(\vec{v}_n) \rangle$.

Ma questi vettori sono anche linearmente indipendenti:
se $c_{r+1}T(\vec{v}_{r+1}) + \dots + c_nT(\vec{v}_n) = \vec{0}$, allora $T(c_{r+1}\vec{v}_{r+1} + \dots + c_n\vec{v}_n) = \vec{0}$.
Quindi $c_{r+1}\vec{v}_{r+1} + \dots + c_n\vec{v}_n \in \ker(T)$. Cioè esistono $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ con
$c_{r+1}\vec{v}_{r+1} + \dots + c_n\vec{v}_n = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_r\vec{v}_r$. Quindi
$-c_1\vec{v}_1 - \dots - c_r\vec{v}_r + c_{r+1}\vec{v}_{r+1} + \dots + c_n\vec{v}_n = 0$. Segue che $c_1 = c_2 = \dots = c_r = c_{r+1} = \dots = c_n = 0$
perché $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ era una base di $\mathbb{R}^n$, quindi i vettori erano linearmente indipendenti.

<u>Def</u> Sia A una matrice $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

il rango righe di A è la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A. cioè $\dim\left(\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle\right)$

il rango colonne di A è la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A cioè $\dim\left(\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle\right)$.

<u>Teorema</u>

rango righe di A = rango colonne di A = rango di A.

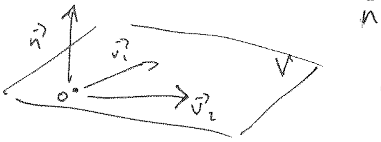
OSS Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, e sia $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ una base di V. Allora ogni vettore $\vec{v} \in V$ si può scrivere in un modo <u>unico</u> come combinazione lineare di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$.

perché: $\vec{v} \in V$ e $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle = V$ quindi esistono $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ con
$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_m \vec{v}_m$. Supponiamo che esistono anche $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ con
$\vec{v} = d_1 \vec{v}_1 + d_2 \vec{v}_2 + \dots + d_m \vec{v}_m$. Allora

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_m \vec{v}_m) - (d_1 \vec{v}_1 + \dots + d_m \vec{v}_m)$$
$$= (c_1 - d_1)\vec{v}_1 + (c_2 - d_2)\vec{v}_2 + \dots + (c_m - d_m)\vec{v}_m$$

Ma $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sono linearmente indipendenti. Quindi
$c_1 - d_1 = 0$, $c_2 - d_2 = 0$, $\dots$, $c_m - d_m = 0$. Cioè $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, $\dots$, $c_m = d_m$.

Esempio:
- In $\mathbb{R}^3$ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è una base $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ allora $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$
- In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il piano $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$



$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è un normale

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono due vettori perpendicolari a $\vec{n}$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono linearmente indipendente

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ è un base di V.

$V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ ha dimensione 2

sia $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ allora $\vec{\omega} \in V$ (perché $\langle \vec{n} | \vec{\omega} \rangle = \vec{0}$)

Quindi $\vec{\omega} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$ dove c_1, c_2 sono unicamente determinato.

Allora $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Quindi

$\vec{\omega} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ (controllo $3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$)

$\vec{\omega}$ è determinato unicamente dai coefficienti davanti $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

Quindi se voglio posso identificare $\vec{\omega}$ con questi numeri.

Def Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, $\dim(V) = m$

Sia $b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ una base di V.

Allora ogni vettore $\vec{v} \in V$ posso scrivere in modo unico come

$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_m \vec{v}_m$.

i scalari $c_1, c_2, \dots, c_m$ si dicono i coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base b.

il vettore $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ si dice vettore delle coordinate rispetto alla base b

e viene denotato con $[\vec{v}]_b$

Esempio

- $\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ allora $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$

  Quindi $[\vec{x}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

  $f = (\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ allora $\vec{x} = x_2 \vec{e}_2 + x_1 \vec{e}_1 + x_3 \vec{e}_3$

  Quindi $[\vec{x}]_f = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$

- Nel esempio precedente.

  $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è una base di V.

  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ quindi $[\vec{w}]_b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\quad 3\vec{w} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ quindi $[3\vec{w}]_b = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Inoltre $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ perché $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

  se $\vec{u} \in V$ con $[\vec{u}]_b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ allora $\vec{u} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

  $\vec{u} + \vec{w} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ quindi $[\vec{u} + \vec{w}]_b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

OSS Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, sia $b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ una base di V

Allora: per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in V$ e $k \in \mathbb{R}$ vale

$$[\vec{v} + \vec{w}]_b = [\vec{v}]_b + [\vec{w}]_b$$

$$[k \vec{v}]_b = k [\vec{v}]_b$$

quindi i vettori di coordinate si comportano come vettori in $\mathbb{R}^m$

Dim: se $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ e $[\vec{w}]_b = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$ Allora $\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_m \vec{v}_m$

e $\vec{w} = d_1 \vec{v}_1 + \dots + d_m \vec{v}_m$. Quindi $\vec{v} + \vec{w} = (c_1 + d_1) \vec{v}_1 + \dots + (c_m + d_m) \vec{v}_m$

e $k\vec{v} = k c_1 \vec{v}_1 + \dots + k c_m \vec{v}_m$. Cioè $[\vec{v} + \vec{w}]_b = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ \vdots \\ c_m + d_m \end{pmatrix}$ e

$[k\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} k c_1 \\ \vdots \\ k c_m \end{pmatrix}$. Segue $[\vec{v} + \vec{w}]_b = [\vec{v}]_b + [\vec{w}]_b$ e $[k\vec{v}]_b = k[\vec{v}]_b$

Esempio: come trovare i coordinate di un vettore rispetto ad una base.

$\mathbb{R}^2$: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ $\vec{v}_2 \notin \langle \vec{v}_1 \rangle$, quindi $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono linearmente indipendenti

$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$. Due vettori linearmente indipendenti in un spazio di dimensione 2 generano lo spazio, quindi sono una base di $\mathbb{R}^2$.

$b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ è una base di $\mathbb{R}^2$

Vorrei trovare i coordinate di $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ rispetto alla base b. Cerco $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ con

$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ cioè devo risolvere $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

(so già che ha un unico soluzione perché b è una base)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 10/3 \\ 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 10/3 \\ 0 & 10/3 & 20/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 10/3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Quindi $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}\right]_b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Quindi la relazione è (in forma matriciale)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ [\vec{v}]_e}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ [\vec{v}]_b}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

sia $[I]^b_e = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice che ha come colonne i vettori della base b (dove i vettori sono scritto come vettori rispetto alla base e dove e è la base naturale di $\mathbb{R}^2$)

Quindi: $[\vec{v}]_e = [I]^b_e [\vec{v}]_b$

Questa relazione tra i coordinate di un vettore rispetto alla base b e alla base e vale sempre:

Sia $b = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ una base di $\mathbb{R}^n$

sia e la base naturale di $\mathbb{R}^n$ e sia $[I]^b_e = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

Allora $[\vec{v}]_e = [I]^b_e [\vec{v}]_b$

<u>Perché</u>: se $\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n$, Allora

$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = [I]^b_e [\vec{v}]_b.$$

Il problema era dato $[\vec{v}]_e$ trovare $[\vec{v}]_b$

Quindi la relazione non è scritta in modo che risolvo subito il problema.

consideriamo il sistema $[I]_e^b \, \vec{x} = [\vec{v}]_e$. Per ogni $[\vec{v}]_e$

questo sistema ha un unica soluzione: i coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base b.

Quindi la matrice $[I]_e^b$ è invertibile.

Quindi $[\vec{v}]_b = \left([I]_e^b\right)^{-1} [\vec{v}]_e$

Nel esempio

$b = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ $\quad [I]_e^b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

per calcolare $[\vec{v}]_b$ per qualsiasi vettore $\vec{v}$ mi serve l'inversa di $[I]_e^b$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 10/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/10 & 3/10 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/10 & 1/10 \\ 0 & 1 & -1/10 & 3/10 \end{array}\right) \quad \text{Quindi } \left([I]_e^b\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -1/10 & 3/10 \end{pmatrix}.$$

e $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -1/10 & 3/10 \end{pmatrix} [\vec{v}]_e$

Quindi: dato un vettore $\vec{v}$ (rispetto alla base naturale), per trovare i coordinate rispetto alla base b, basta moltiplicare con $\begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -1/10 & 3/10 \end{pmatrix}$.

<u>Esempio</u>. $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ allora $[\vec{\omega}]_b = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -1/10 & 3/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/10 \\ 2/10 \end{pmatrix}$

controllo: $\vec{\omega} = \frac{4}{10} \vec{v}_1 + \frac{2}{10} \vec{v}_2$

$= \frac{4}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12-2}{10} \\ \frac{4+6}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ok!

In particolare $[\vec{e}_1]_b = \begin{pmatrix} 3/10 \\ -1/10 \end{pmatrix}$ e $[\vec{e}_2]_b = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 3/10 \end{pmatrix}$

1° colonna $\qquad 2^\circ$ colonna

Ma se $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Allora $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$,

Allora $[\vec{x}]_b = [x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2]_b = x_1 [\vec{e}_1]_b + x_2 [\vec{e}_2]_b$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -1/10 & 3/10 \end{pmatrix}}_{\text{ha come colonne i coordinate}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. quindi la matrice ha come colonne i coordinate rispetto alla base b dei vettori della base naturale. La matrice viene denotato con $[I]_b^e$

Definizione : Matrice di cambiamento di base

Sia $b = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ una base di $\mathbb{R}^n$. Sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
Sia $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base naturale di $\mathbb{R}^n$.

$[I]^b_e$: la matrice di cambiamento di base dalla base b alla base e
Le colonne sono le coordinate rispetto alla base e dei vettori della base b.

cioè $$[I]^b_e = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [\vec{v}_1]_e & [\vec{v}_2]_e & \cdots & [\vec{v}_n]_e \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

vale $$[\vec{v}]_e = [I]^b_e [\vec{v}]_b$$

$[I]^e_b$: la matrice di cambiamento di base dalla base e alla base b
Le colonne sono le coordinate rispetto alla base b dei vettori della base e.

cioè $$[I]^e_b = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [\vec{e}_1]_b & [\vec{e}_2]_b & \cdots & [\vec{e}_n]_b \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

vale $$[\vec{v}]_b = [I]^e_b [\vec{v}]_e$$ (perché se $\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ allora $[\vec{v}]_b = x_1[\vec{e}_1]_b + \dots + x_n[\vec{e}_n]_b = [I]^e_b [v]_e$)

Inoltre vale : $$[I]^e_b = \left([I]^b_e\right)^{-1}.$$

Problema ancora più generale :
Dato due basi di $\mathbb{R}^n$: $b = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ e $c = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$
Dato i coordinate rispetto alla base b di un vettore, come posso trovare i coordinate rispetto alla base c ? Cioè dato $[\vec{v}]_b$, trovare $[\vec{v}]_c$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr] & & c \\ & e \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Sia $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base naturale. Allora.

$$[\vec{v}]_e = [I]^b_e [v]_b \quad \text{e} \quad [\vec{v}]_c = [I]^e_c [\vec{v}]_e$$

Quindi $$[\vec{v}]_c = \underbrace{[I]^e_c [I]^b_e}_{\text{viene denotato con } [I]^b_c} [\vec{v}]_b$$

oss : la prima colonne di $[I]^b_c$ è $[I]^e_c [I]^b_e \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = [I]^e_c [\vec{v}_1]_e = [\vec{v}_1]_c$

$\vdots$

la i-esima colonne di $[I]^b_c$ è $[I]^e_c [I]^b_e \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} = [I]^e_c [\vec{v}_i]_e = [\vec{v}_i]_c$

Quindi :

$[I]^b_c$: la matrice di cambiamento di base dalla base b alla base c

Le colonne sono le coordinate rispetto alla base c dei vettori della base b.

cioè
$$[I]^b_c = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [\vec{v}_1]_c & [\vec{v}_2]_c & \cdots & [\vec{v}_n]_c \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

vale $[\vec{v}]_c = [I]^b_c [\vec{v}]_b$

si osserva che $[I]^c_b = \left([I]^b_c\right)^{-1}$

Applicazioni lineari e basi

__Oss__ Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un applicazione lineare

Sia $b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ una base di $\mathbb{R}^n$.

Allora T è completamente determinato da $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)$

non esiste un altro applicazione lineare S con $S(v_1) = T(v_1), \ldots, S(\vec{v}_n) = T(\vec{v}_n)$.

__Dim.__ Sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Sia $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Allora $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$

Allora $T(\vec{v}) = T(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n) = c_1 T(\vec{v}_1) + c_2 T(\vec{v}_2) + \cdots + c_n T(\vec{v}_n)$.

Quindi T è determinato da $T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)$.

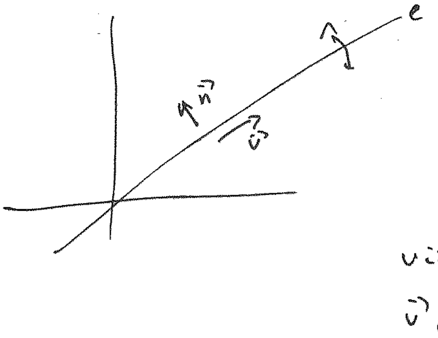
Supponiamo che $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare con

$S(\vec{v}_1) = T(\vec{v}_1), \ldots, S(\vec{v}_n) = T(\vec{v}_n)$. Allora

$S(\vec{v}) = S(c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) = c_1 S(\vec{v}_1) + \cdots + c_n S(\vec{v}_n) = c_1 T(\vec{v}_1) + \cdots + c_n T(v_n) = T(\vec{v})$

Quindi $S(\vec{v}) = T(\vec{v})$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Quindi $S = T$.

Esempio



Negli esempi di pag. 38 abbiamo trovato la matrice di una riflessione. Poi abbiamo controlato che $\vec{v} \mapsto \vec{v}$ dove $\vec{v}$ è un vettore di direzione di ℓ

$n \mapsto -\vec{n}$ dove $\vec{n}$ è un vettore perpendicolare su ℓ.

visto che $\vec{v}$ e $\vec{n}$ sono non nulli e perpendicolare, allora $\vec{v}, \vec{n}$ sono linearmente indipendenti. Dato che $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

segue che $(\vec{v}, \vec{n})$ è una base di $\mathbb{R}^2$.
Dato che la riflessione e la matrice mando entrambi $\vec{v} \mapsto \vec{v}$ e $n \to -\vec{n}$. Segue che questi due applicazioni lineari sono uguali. Quindi il controllo fatto dice che sono <u>sicuro</u> che non ho sbagliato i calcoli.

Guardiamo adesso come la matrice di T si comporta quando scegliamo una altra base.

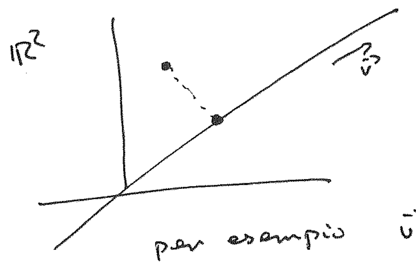
sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

la matrice che rappresenta T è $\begin{pmatrix} | & & | \\ T(\vec{e_1}) & \cdots & T(\vec{e_n}) \\ | & & | \end{pmatrix}$

tutto è scritto rispetto a le basi naturali.

Quale sarebbe la matrice se avevo preso una altra base di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{R}^m$

Esempio



$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\vec{w} \mapsto \mathrm{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$

per esempio $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

scelgo $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ allora $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ è una base di $\mathbb{R}^2$

$\vec{v_1} \longmapsto \vec{v_1}$ quindi $[T(\vec{v_1})]_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v_2} \longmapsto \vec{0}$ quindi $[T(\vec{v_2})]_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ allora $\vec{v} = c_1 \vec{v_1} + c_2 \vec{v_2}$, dove $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$,

Quindi
$$T(\vec{v}) = T(c_1 \vec{v_1} + c_2 \vec{v_2}) = c_1 T(\vec{v_1}) + c_2 T(\vec{v_2})$$

cioè
$$[T(\vec{v})]_b = [c_1 T(\vec{v_1}) + c_2 T(\vec{v_2})]_b = c_1 [T(\vec{v_1})]_b + c_2 [T(\vec{v_2})]_b$$
$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$[T(\vec{v_1})]_b$ $[T(\vec{v_2})]_b$ $[\vec{v}]_b$

quindi $T: [\vec{v}]_b \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{è la matrice che rappresenta } T \text{ rispetto alla base } b.} [\vec{v}]_b$

più generale:

Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare, sia $b = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ una base di $\mathbb{R}^n$ e b' una base di $\mathbb{R}^m$. La matrice di T rispetto alle basi b e b' è:

$$[T]^b_{b'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(\vec{v}_1)]_{b'} & [T(\vec{v}_2)]_{b'} & \cdots & [T(\vec{v}_n)]_{b'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

(si osserva: se b e b' sono le basi naturali trovo la vecchia matrice di T.)

$$T: \underset{b}{\mathbb{R}^n} \to \underset{b'}{\mathbb{R}^m}$$
$$[\vec{v}]_b \longmapsto [T(\vec{v})]_{b'} = [T]^b_{b'} [\vec{v}]_b$$

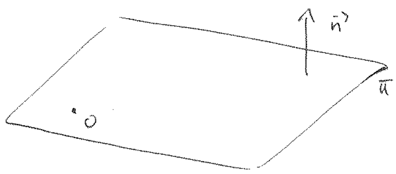
perché se $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n$

$T(\vec{v}) = c_1 T(\vec{v}_1) + \dots + c_n T(\vec{v}_n)$

$[T(\vec{v})]_{b'} = c_1 [T(\vec{v}_1)]_{b'} + \dots + c_n [T(\vec{v}_n)]_{b'}$

$= [T]^b_{b'} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = [T]^b_{b'} [\vec{v}]_b$

Esempio



π è il piano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

R: è la riflessione rispetto a π.

sia $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Allora $b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{n})$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (perché?)

$R: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la riflessione.

$\vec{v}_1 \longmapsto \vec{v}_1$ $\qquad [\vec{v}_1]_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_2 \longmapsto \vec{v}_2$ $\qquad [\vec{v}_2]_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \longmapsto -\vec{n}$ $\qquad [\vec{n}]_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Quindi $[R]^b_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

ma voglio sapere la risposta rispetto alla base naturale

come posso arrivare a $[R]^e_e$?

Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un applicazione lineare

Sia e la base naturale di $\mathbb{R}^n$ e b una base di $\mathbb{R}^n$

Sia e' la base naturale di $\mathbb{R}^m$ e b' una base di $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \text{ base } e \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift left] & \mathbb{R}^m \text{ base } e' \arrow[d, shift left] \\
\mathbb{R}^n \text{ base } b \arrow[r, "T"] \arrow[u, shift left] & \mathbb{R}^m \text{ base } b' \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[\vec{\omega}]_e} \arrow[r, "{[T]^e_{e'}}"] \arrow[d, shift right, "{[I]^e_b}"'] & {[T(\vec{\omega})]_{e'}} \arrow[d, shift right, "{[I]^{e'}_{b'}}"'] \\
{[\vec{\omega}]_b} \arrow[r, "{[T]^b_{b'}}"'] \arrow[u, shift right, "{[I]^b_e}"'] & {[T(\vec{\omega})]_{b'}} \arrow[u, shift right, "{[I]^{b'}_{e'}}"']
\end{tikzcd}$$

Quindi
$$[T]^e_{e'} = [I]^{b'}_{e'}\,[T]^b_{b'}\,[I]^e_b$$
$$[T]^b_{b'} = [I]^{e'}_{b'}\,[T]^e_{e'}\,[I]^b_e$$

nel nostro essempio

$$[R]^e_e = [I]^b_e\,[R]^b_b\,[I]^e_b$$

$$[R]^b_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [I]^b_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mi serve } [I]^e_b = \left([I]^b_e\right)^{-1}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \qquad \text{Quindi} \quad [I]^e_b = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\text{controllo: } \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ok!}\right)$$

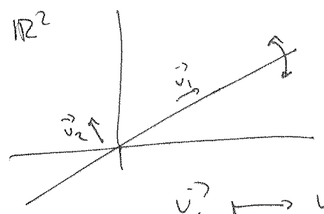
$$[R]^e_e = [I]^b_e\,[R]^b_b\,[I]^e_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

controllo
$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ok!} \qquad \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ok!}$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ok!}$$

Esempio



la riflessione rispetto alla retta $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

su $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora $b = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ è una base di $\mathbb{R}^2$ (perché?).

$$R: \begin{array}{l} \vec{v}_1 \longmapsto \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \longmapsto -\vec{v}_2 \end{array} \qquad [R]^b_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[I]^b_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad [I]^e_b = \left([I]^b_e\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

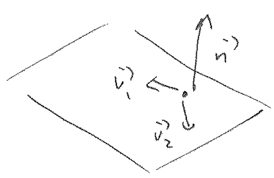
$$[R]^e_e = [I]^b_e \, [R]^b_b \, [I]^e_b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

(vedi anche compito 4)

Esempio

La matrice $[T]^e_e = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice di una riflessione rispetto ad un piano.

Trovare l'equazione cartesiana del piano



oss: un vettore $\vec{w}$ è un normale del piano se e solo se

$T(\vec{w}) = -\vec{w}$

cioè $T(\vec{w}) + \vec{w} = \vec{0}$, quindi $\left([T]^e_e + I_3\right)\vec{w} = \vec{0}$

Quindi ogni normale è in $\operatorname{Ker}\left([T]^e_e + I_3\right)$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

cerchiamo il ker di questa matrice. (usiamo GJ non l'algoritmo stretto)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4/3 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & 4/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 4/3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker}\left([T]^e_e + I_3\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -x_3,\ x_2 = -x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Quindi un normale è $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il piano è $-x - y + z = 0$

Alternativa.

trovo i vettori nel piano: sono quelli con $T(\vec{w}) = \vec{w}$

cioè $T(\vec{w}) - \vec{w} = 0$ quindi $([T]^e_e - I_3)\,\vec{w} = \vec{0}$.

Quindi sono i vettori in $\operatorname{Ker}([T]^e_e - I_3)$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$ cerco il Ker di questa matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2/3 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left\{ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right.$$

$$\operatorname{Ker}([T]^e_e - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -x_2 + x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

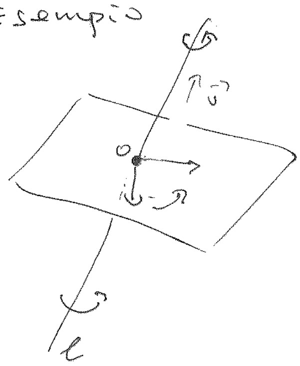
$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

una base è $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. questa è il piano con normale

è $$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - (-1)\vec{j} + (-1)\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi il piano è $x + y - z = 0$.

Esempio



la rotazione in $\mathbb{R}^3$ rispetto alla retta ℓ, passante tra 0

di angolo φ.

Sia $\vec{v}$ un vettore di direzione di ℓ : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $x_3 > 0$ (*)

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ due vettori nel piano perpendicolare su ℓ

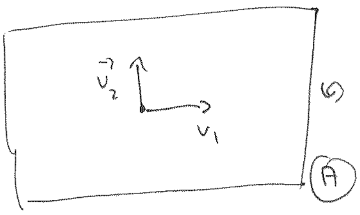
con $\|\vec{v}_1\| = 1 = \|\vec{v}_2\|$ e $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$.

Allora $(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e sul

$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ ho la rotazione di angolo φ. Se

scegliamo $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ tale che $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = k\vec{v}$ con $k > 0$

allora si ha il disegno A

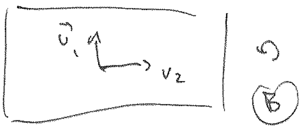


A

e la matrice rispetto a questa base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

(*) se $x_3 = 0$ sceglo $x_2 > 0$
se anche $x_2 = 0$ allora
sceglo $x_1 > 0$.



B