Compito 4

1 a) sia $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ allora $2\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ $\quad F(\vec{v}) = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ $\quad F(2\vec{v}) = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \neq 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = 2F(\vec{v})$

Quindi non è lineare.

b) è lineare. $F\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

c) Non è lineare: $F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

Quindi $F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \neq F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

2 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}9\\2\\4\\5\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3\\-9\\-9\\1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\\5\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}9&3&-3\\2&-9&-1\\4&-9&-2\\5&1&5\end{pmatrix}$

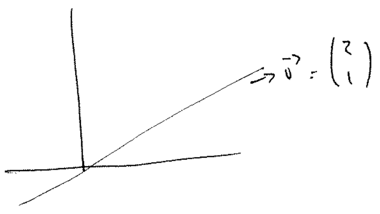
3 $T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}\right) = (x_1+y_1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + (x_2+y_2)\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} =$

$T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)$.

$T\left(k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\end{pmatrix} = kx_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + kx_2\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} = k\left(x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\right) = k\left(T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)\right)$

Quindi T è lineare. La matrice è $\begin{pmatrix}1&3\\2&5\\3&7\end{pmatrix}$.

4



$\omega \longmapsto 2\,\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{\omega} - \vec{\omega}$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto 2\dfrac{\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \rangle}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto 2\dfrac{\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \rangle}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/5\\-3/5\end{pmatrix}$

La matrice è $\begin{pmatrix}3/5&4/5\\4/5&-3/5\end{pmatrix}$

(controllo $\begin{pmatrix}3/5&4/5\\4/5&-3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ok! $\quad \begin{pmatrix}3/5&4/5\\4/5&-3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ ok!)

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3/5&4/5\\4/5&-3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7/5\\1/5\end{pmatrix}$

5 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-13\\7\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}7&6&-13\\11&9&7\end{pmatrix}$

6 a) $T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}$

$T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) - T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} a+3b=1 \\ a+7b=0 \end{cases}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\1&7&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&4&-1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&1&-1/4\end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cc|c}1&0&7/4\\0&1&-1/4\end{array}\right)$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{7}{4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ $\quad T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{7}{4}T\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) - \frac{1}{4}T\left(\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}7/4\\-1/4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} a+3b=0 \\ a+7b=1 \end{cases}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&3&0\\1&7&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&3&0\\0&4&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&3&0\\0&1&1/4\end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cc|c}1&0&-3/4\\0&1&1/4\end{array}\right)$ $\quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ $\quad T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = -\frac{3}{4}T\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{4}T\left(\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-3/4\\1/4\end{pmatrix}$

Quindi $\begin{pmatrix} 7/4 & -3/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Alternativa

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi $\begin{cases} a+b=1 \\ c+d=0 \\ 3a+7b=0 \\ 3c+7d=1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 3&7&0&0 \\ 0&0&3&7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&1&0 \\ 3&7&0&0&0 \\ 0&0&3&7&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&4&0&0&-3 \\ 0&0&3&7&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1 \\ 0&4&0&0&-3 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&0&3&7&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&-3/4 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&0&3&7&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&-3/4 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&4&1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&-3/4 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1/4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&-3/4 \\ 0&0&1&0&-1/4 \\ 0&0&0&1&1/4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&7/4 \\ 0&1&0&0&-34 \\ 0&0&1&0&-1/4 \\ 0&0&0&1&1/4 \end{array}\right) \quad \begin{cases} a=7/4 \\ b=-3/4 \\ c=-1/4 \\ d=1/4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 7/4 & -3/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

7) a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1&3&1&0 \\ 2&4&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&3&1&0 \\ 0&-2&-2&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&3&1&0 \\ 0&1&1&-1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&0&-2&3/2 \\ 0&1&1&-1/2 \end{array}\right)$ l'inversa è $\begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1&3&1&0 \\ 2&6&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&3&1&0 \\ 0&0&-2&0 \end{array}\right)$ $\begin{pmatrix} 1&3 \\ 2&6 \end{pmatrix}$ non è invertibile.

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1&3&1&0 \\ -2&6&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&3&1&0 \\ 0&12&2&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&3&1&0 \\ 0&1&1/6&1/12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1&0&1/2&-1/4 \\ 0&1&1/6&1/12 \end{array}\right)$ l'inversa è $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/6 & 1/12 \end{pmatrix}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 0&2&3&0&1&0 \\ 1&2&4&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 0&2&3&0&1&0 \\ 0&0&1&-1&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 0&1&3/2&0&1/2&0 \\ 0&0&1&-1&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&4&0&-3 \\ 0&1&0&3/2&1/2&-3/2 \\ 0&0&1&-1&0&1 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-1&0 \\ 0&1&0&3/2&1/2&-3/2 \\ 0&0&1&-1&0&1 \end{array}\right)$ l'inversa è $\begin{pmatrix} 1&-1&0 \\ 3/2&1/2&-3/2 \\ -1&0&1 \end{pmatrix}$

e) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 1&1&2&0&1&0 \\ 0&1&2&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 0&-1&-1&-1&1&0 \\ 0&1&2&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 0&1&1&1&-1&0 \\ 0&1&2&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 0&1&1&1&-1&0 \\ 0&0&1&-1&1&1 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&4&-3&-3 \\ 0&1&0&2&-2&-1 \\ 0&0&1&-1&1&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&1&-1 \\ 0&1&0&2&-2&-1 \\ 0&0&1&-1&1&1 \end{array}\right)$ l'inversa è $\begin{pmatrix} 0&1&-1 \\ 2&-2&-1 \\ -1&1&1 \end{pmatrix}$

f) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 1&1&2&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 0&-1&-1&-1&1&0 \\ 0&1&1&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 0&1&1&1&-1&0 \\ 0&1&1&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0 \\ 0&1&1&1&-1&0 \\ 0&0&0&-1&1&1 \end{array}\right)$ $\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&1&2 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$ non è invertibile

g) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&2&1&0&1&0&0 \\ 0&-1&0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&2&0&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&-1&1&0&0 \\ 0&-1&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&-1&1&-1&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&-1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&-1&1&1&0 \\ 0&0&-1&1&-1&0&0&1 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&-1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&-1&1&1&0 \\ 0&0&0&2&-2&1&1&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&-1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&-1&1&1&0 \\ 0&0&0&1&-1&1/2&1/2&1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&0&2&-1/2&-1/2&-1/2 \\ 0&1&1&0&-1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&-1&1/2&1/2& \\ 0&0&0&1&-1&1/2&1/2&1/2 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&-1&-1&0 \\ 0&1&0&0&-1&1/2&-1/2&1/2 \\ 0&0&1&0&0&1/2&1/2&-1/2 \\ 0&0&0&1&-1&1/2&1/2&1/2 \end{array}\right)$ l'inversa è $\begin{pmatrix} 2&-1&-1&0 \\ -1&1/2&-1/2&1/2 \\ 0&1/2&1/2&-1/2 \\ -1&1/2&1/2&1/2 \end{pmatrix}$.

h) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&3&1&2&0&1&0&0 \\ 1&2&-1&1&0&0&1&0 \\ 5&9&1&6&0&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&2&0&1&-1&1&0&0 \\ 0&1&-2&0&-1&0&1&0 \\ 0&4&-4&1&-5&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1/2&-1/2&1/2&0&0 \\ 0&1&-2&0&-1&0&1&0 \\ 0&4&-4&1&-5&0&0&1 \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1/2&-1/2&1/2&0&0 \\ 0&0&-2&-1/2&-1/2&-1/2&1&0 \\ 0&0&-4&-1&-3&-2&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1/2&-1/2&1/2&0&0 \\ 0&0&1&1/4&1/4&1/4&-1/2&0 \\ 0&0&-4&-1&-3&-2&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1/2&-1/2&1/2&0&0 \\ 0&0&1&1/4&1/4&1/4&-1/2&0 \\ 0&0&0&0&-2&-1&-2&1 \end{array}\right)$ La matrice non è invertibile.

(8) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

se $a = 0$ la matrice non è invertibile.

se $a \neq 0 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/a & 1/a & 1/a \end{array}\right)$ e' inverse è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2/a & 1/a & 1/a \end{pmatrix}$

(9) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$A^8 = A^4 \cdot A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$A^8 = A^4 A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 256 \end{pmatrix}$ $A^{10} = A^2 A^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 256 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(10) a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) non è definita

c) non è definita

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(11) A è una matrice invertibile, quindi A^{-1} esiste

B è una matrice invertibile, quindi B^{-1} esiste

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B^{-1}B)A^{-1} = A\, I_n\, A^{-1} = A A^{-1} = I_n$

AB è una matrice $n \times n$ e $B^{-1}A^{-1}$ è una matrice $n \times n$ con $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$.

Quindi AB è invertibile e l'inverse è $B^{-1}A^{-1}$!