Matematica Discreta

Review

Esercizio 1.

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la retta l e i due piani π_1 e π_2, dove $l = \begin{cases} x &= 3-t \\ y &= -1+3t \\ z &= 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, e

$\pi_1 : x - y + 2z = 2$ e $\pi_2 : x + y - z = 0$.

a.) Calcolare la distanza tra l e π_1.

b.) Trovare l'equazione cartesiano del piano che contiene la retta d'intersezione dei piani π_1 e π_2 e la retta l.

Esercizio 2.

Sia $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 - 2x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 \end{pmatrix}$.

Trovare una base di $Ker(F)$.

Esercizio 3.

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare, e la base naturale e b la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ dove F è dato da la matrice $[F]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -\frac{5}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Trovare le matrici di cambiamento di base $[I]_e^b$ e $[I]_b^e$ e calcolare $[F]_b^b$.

Esercizio 4.

Siano $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da $T : \vec{v} \mapsto proj_{\vec{w}}(\vec{v})$, dove $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di angolo $\frac{3}{2}\pi$ in senso anti-orario.

a.) Trovare la matrice di $S^{-1} \circ T \circ S$.

b.) Esiste un $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ tale che $(S^{-1} \circ T \circ S)(\vec{v}) = proj_{\vec{n}}(\vec{v})$, per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$?

Esercizio 5.

Risolvere in $\mathbb{Z}$ il sistema dato da $\begin{cases} x \equiv 347 \pmod{22} \\ 17x \equiv 77 \pmod{31} \\ x \equiv -300 \pmod{51} \end{cases}$.

Esercizio 6.

Quanti bit string di lunghezza 36 ci sono tale che

a.) il bit string ha al massimo sedici 0 e al massimo ventisette 1, oltre si deve avere che il bit string correspondente alle prime quindici posizione contiene al massimo due 0, e il bit string correspondente alle ultimi diciotto posizioni contiene esattamente undici 1.

b.) il bit string correspondente alle prime dieci posizioni ha esattamente cinque 1 e il bit string correspondente alle ultime venti posizioni contiene lo string 10100101 come sotto-string.

Esercizio 7.

a.) Quanti $x \in \mathbb{Z}$, con $200000000 \leq x \leq 400000000$, si può fare, usando le cifre di 123322321, che non contengano 131 come sotto espressione.

b.) Quante soluzioni ci sono dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 33$, dove $x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{Z}$ e $x_1, \ldots, x_7 \geq 0$, con $x_1 + x_2 \neq 10$, $x_3 + x_4 + x_5 \neq 13$ e $x_6 \geq 7$?

Le risposte devono essere giustificate. Ogni scorettezza durante la prova comporterà l'immediato annulamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.