1 a) . . . . $2^{10} = 1024$

b) 1 . . . . 1 $2^8 = 256$

c)
1 . . . . 2^9
. . . . 1 2^9
1 . . . . 1 2^8

$2^9 + 2^9 - 2^8 = 768$

d) $1 + 2 + \cdots + 2^{10} = 2047$

e)
000 . . . . 2^7
. . . . 00 2^8
000 . . . . . 00 2^5

quindi $2^7 - 2^5 = 96$ cominciano con 000 e non termina con 00

$2^8 - 2^5 = 224$ termina con 00 e non cominciano con 000

quindi $96 + 224 = 224$ o cominciano con 000 o termina con 00

f) $2^7 + 2^8 - 2^5 = 352$

g) contiamo prima quelli con almeno cinque 1 consecutivi

10: 1 - - - 1 1

9: 1 - - - 1 0, 0 1 - - - 1 } 2

8: 1 - - - 1 0 . 2, 0 1 - - - 1 0 1, . 0 1 - - - 1 2 } 5

7: 1 - - - 1 0 . . 4, 0 1 - - - 1 0 . 2, . 0 1 - - - 1 0 2, . . 0 1 - - - 1 4 } 12

6: 1 - - - 1 0 . . . 8, 0 1 - - - 1 0 . . 4, . 0 1 - - - 1 0 . 4, . . 0 1 - - - 1 0 4, . . . 0 1 - - - 1 8 } 28

5: 1 - - - 1 0 . . . . 16, 0 1 - - - 1 0 . . . 8, . 0 1 - - - 1 0 . . 8, . . 0 1 - - - 1 0 . 8, . . . 0 1 - - - 1 0 8, ... 0 1 - - - 1 16 } 64

Quindi ci sono $1 + 2 + 5 + 12 + 28 + 64 = 112$ bitstring con almeno 5 1 consecutivi

Alternativa:
11111 32
011111 16
. 011111 . . . 16
. . 011111 . . 16
. . . 011111 . 16
. . . . 011111 16
} 112

similmente ci sono 112 bitstring con almeno 5 0 consecutivi

ci sono 2 bitstring con 5 uno e 5 zeri consecutivi : 1111100000 0000011111

Quindi ci sono 110 bitstring con almeno cinque 1 consecutivi ma non con almeno cinque 0 consecutivi e ci sono 110 bitstring con almeno cinque 0 consecutive ma non con almeno cinque 1 consecutivi.

Quindi la risposta è $110 + 110 = 220$

2 . . . . . 128^5 parole e 127^5 parole senza @.

Quindi ci sono $128^5 - 127^5$ parole con almeno un @

3 a) $\left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$

b) mcm $(7, 11) = 77$ $\left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12$

c) $142 - 12 = 130$

d) divisibili per 11 : $\left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90$

Quindi $142 + 90 - 12 = 220$

e) $(142 - 12) + (90 - 12) = 208$

f) $1000 - 220 = 780$

g) 4 cifre .... nessuno

3 cifre ... $9 \cdot 9 \cdot 8$ (perché la prima non è 0) : 648

2 cifre .. $9 \cdot 9$: 81

1 cifra . 9 : 9

$\overline{}$ 738

Alternativa: contare quelli con e senza 0 separatamente:

senza 0 .... nessuno
... $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
.. $9 \cdot 8 = 72$
. $9 = 9$

con un 0 .... nessuno
... $2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$
.. 9
. nessuno.

Quindi $504 + 72 + 9 + 144 + 9 = 738$

h) 4 cifre .... nessuno

3 cifre ... $\to$ ..0 : $9 \cdot 8 = 72$
$\to$ ..$\neq 0$: $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$

2 cifre .. $\to$ .0 : $9 = 9$
.$\neq 0$: $4 \cdot 8 : 32$

1 cifra . $\to$ $\neq 0$: $4 = 4$

$\overline{}$ 373

Alternativa

senza 0 .... nessuno
... $4 \cdot 8 \cdot 7 = 224$
.. $4 \cdot 8 = 32$
. $4 = 4$

con un 0 .... nessuno
... $\to$ ..0 : $9 \cdot 8 = 72$
$\to$ .0. : $4 \cdot 8 = 32$
.. $\to$ .0 : 9
. nessuno

Quindi $224 + 32 + 4 + 72 + 32 + 9 = 373$

Alternativa contare quelli dispari

4 cifre .... nessuno
3 cifre ... $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$
2 cifre .. $5 \cdot 8 = 40$
1 cifra . $5 : 5$
$\overline{}$ 365

ci sono 365 numeri dispari con tutte le cifre diversi. Quindi $738 - 365 = 373$ pari.

4) $\updownarrow 5$ $\xleftrightarrow{8}$ 13 passi da fare. Per viaggiare via D si deve passare via D_1 e D_2

a) $A \to B : \binom{13}{5} = 1287$

b) $A \to C : \binom{5}{2}$ $\quad C \to B : \binom{8}{3}$ $\quad$ quindi $\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{3} = 10 \cdot 56 = 560$

c) $A \to D_1 : \binom{8}{3}$ $\quad D_1 \to D_2 : 1$ $\quad D_2 \to B : \binom{4}{2}$ $\quad$ quindi $\binom{8}{3} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2}$ passano tra D

Quindi $\binom{13}{5} - \binom{8}{3} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} = 1287 - 336 = 951$ non passano tra D

d) $A \to C : \binom{5}{2}$ $\quad C \to D_1 : \binom{3}{1}$ $\quad D_1 \to D_2 : 1$ $\quad D_2 \to B : \binom{4}{2}$.

Quindi $\binom{5}{2}\binom{3}{1} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2}$ passano tra C e D
$\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{3}$ passano tra C

$\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{3} - \binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{2} = 380$ passano tra C ma non tra D.

e) $A \to C \to B \quad \binom{5}{2}\binom{8}{3} = 560$

$A \to D \to B \quad \binom{8}{3}\binom{4}{2} = 336$

$A \to C \to D \to B \quad \binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{2} = 180$

numero di strade che passano tra C o D : $560 + 336 - 180 = 716$

Quindi $1287 - 716 = 571$ che evitano C e D.

5 a) $\binom{10}{3} = 120$

b) 5 zeri e 5 uno : $\binom{10}{5} = 252$

c) almeno 7 uno : $\binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 120 + 45 + 10 + 1 = 176$

d) almeno 3 uno : tutti − al massimo 2 uno : $2^{10} - \left[\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}\right] = 968$

e) . . . . 1 : $2^{9} - \left[\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3}\right] = 512 - 1 - 9 - 36 - 84 = 382$

f) almeno quattro 1
almeno quattro 0 = al massimo sei 1 } $\binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} = 210 + 252 + 210 = 672$

g) almeno quattro 1
al massimo quattro 0 = almeno sei 1 } $\binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} =$
$210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 386$

h) 0 . . . . 0 almeno due 0 $\quad 2^{8} - \left[\binom{8}{0} + \binom{8}{1}\right] = 256 - 1 - 8 = 247$

6 a) $\binom{15}{11}$

b) $15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 5 = \dfrac{15!}{4!}$

c) esattamente 1 straniero : $\binom{3}{1}\binom{12}{10}$
esattamente 2 stranieri : $\binom{3}{2}\binom{12}{9}$
esattamente 3 stranieri : $\binom{3}{3}\binom{12}{8}$
} $\binom{3}{1}\binom{12}{10} + \binom{3}{2}\binom{12}{9} + \binom{3}{3}\binom{12}{8}$

7 a) $\underbrace{\qquad}_{5}\ \underbrace{\qquad\quad}_{20} \qquad \binom{5}{3} \cdot 2^{20}$

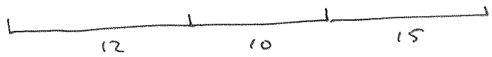
b) $\underbrace{\qquad}_{6}\ \underbrace{\qquad\quad}_{12}\ \underbrace{\qquad}_{7}$ sui primi 6 posizioni almeno quattro 1 = al massimo due 0

zeri			
0	10, 9, 8	0, 1, 2	$\binom{12}{10} + \binom{12}{9}\binom{7}{1} + \binom{12}{8}\binom{7}{2} +$
1	9, 8, 7	0, 1, 2	$\binom{6}{1}\left[\binom{12}{9} + \binom{12}{8}\binom{7}{1} + \binom{12}{7}\binom{7}{2}\right] +$
2	8, 7, 6	0, 1, 2	$\binom{6}{2}\left[\binom{12}{8} + \binom{12}{7}\binom{7}{1} + \binom{12}{6}\binom{7}{2}\right]$

c) $\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{17}\ \underbrace{\qquad\quad}_{8} \qquad \binom{5}{1}\binom{21}{8} - \binom{17}{6}$

8) a) contiamo 1 : al massimo quindici 0 → al meno venti due 1.

Quindi $22 \le \#\text{uno} \le 27$

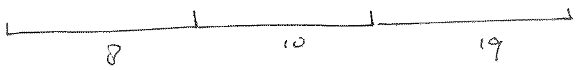


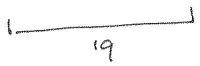
13 uno

al meno 11 uno

$$\left[\binom{12}{11}\binom{10}{0} + \binom{12}{12}\binom{10}{0} + \binom{12}{11}\binom{10}{1} + \binom{12}{12}\binom{10}{1} + \binom{12}{11}\binom{10}{2} + \binom{12}{12}\binom{10}{2} + \binom{12}{11}\binom{10}{3} \right] \binom{15}{13}$$

b)





: 101000101 : $\binom{11}{1} \cdot 2^{10}$

101000101000101 : $\binom{5}{1} \cdot 2^{4}$

10100010101000101 : $\binom{3}{1} \cdot 2^{2}$

<u>101000101</u> due volte : $\binom{3}{2} \cdot 2$

$$\binom{8}{5} \cdot 2^{10} \cdot \left[2^{19} - \left[\binom{11}{1} \cdot 2^{10} - \binom{5}{1} \cdot 2^{4} - \binom{3}{1} \cdot 2^{2} - \binom{3}{2} \cdot 2 \right] \right]$$