

Nome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

**Matematica Discreta***Esame del 18-09-2012***Esercizio 1.**

(6 pt)

Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare,  $e$  la base naturale e  $b$  la base  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  dove  $F$ è data dalla matrice  $[F]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .Trovare le matrici di cambiamento di base  $[I]_e^b$  e  $[I]_b^e$  e calcolare  $[F]_b^b$ .**Esercizio 2.**

(2 pt)

Consideriamo in  $\mathbb{R}^3$  i piani  $\pi_1 : x + y + z = 11$  e  $\pi_2 : x + 4z - 5y + 25 = 0$  e il punto  $A = (4, 5, 6)$ .Sia  $l$  la retta d'intersezione di  $\pi_1$  con  $\pi_2$ . Calcolare la distanza tra la retta  $l$  e il punto  $A$ .**Esercizio 3.**

(5 pt)

Risolvere in  $\mathbb{Z}$  il sistema dato da 
$$\begin{cases} x \equiv 864 \pmod{69} \\ 40x \equiv 101 \pmod{73} \\ x \equiv -579 \pmod{79} \end{cases}.$$
**Esercizio 4.**

(5 pt)

Consideriamo la ricorrenza  $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - n + \frac{1}{3}$ , per  $n \geq 2$ .a.) Dimostrare che  $a_n = -\frac{1}{3}n - 1$ ,  $n \geq 0$ , è una soluzione della ricorrenza.

b.) Trovare tutte le soluzioni della ricorrenza.

c.) Trovare la soluzione con  $a_0 = 1$  e  $a_1 = 2$ , e calcolare  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  usando la ricorrenza e la risposta.**Esercizio 5.**

(4 pt)

Quanti bit string di lunghezza 60 ci sono tale che

a.) il bit string ha almeno trentotto 0, oltre si deve avere che il bit string corrispondente alle prime ventidue posizioni contiene almeno dodici 1 e il bit string corrispondente alle ultime venticinque posizioni contiene al massimo diciassette 0 e al massimo nove 1.

b.) il bit string ha esattamente nove 0 e il bit string corrispondente alle prime dieci posizioni contiene esattamente un zero e il bit string corrispondente alle ultime ventisette posizioni contiene lo string 101110 come sotto-string.

**Esercizio 6.**

(2 pt)

Sia  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la base naturale di  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare data  $T : \vec{v} \mapsto -3\vec{v}$ , per ogni  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ .Sia  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare definita tramite  $S(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2$ ,  $S(3\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ .Esiste un riflessione  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $S \circ T = R$ ? In caso di sì trovare l'equazione cartesiana della retta corrispondente a  $R$ .**Esercizio 7.**

(4 pt)

a.) Quanti  $x \in \mathbb{Z}$  con  $100100 \leq x \leq 999000$  ci sono tale  $x$  contiene 12 come sotto espressione e c'è esattamente una cifra ripetuta almeno due volte.b.) Quante soluzioni ci sono dell'equazione  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 2021$ , dove  $x_1, \dots, x_8 \in \mathbb{Z}$  e  $x_1, \dots, x_8 \geq 0$ , con  $50 \leq x_2 \leq 100$ ,  $30 \leq x_3 \leq 40$ ,  $x_4 \geq 10$ ,  $30 \leq x_6 \leq 70$ ,  $x_1 + x_3 + x_5 = 789$  e  $x_3 + x_6 \neq 110$ ?**Esercizio 8.**

(2 pt)

8.1 Il numero  $(10101010101000000010101010101010101010101000000101010)_2$  è

(a) divisibile per 21 ma non per 15.

(c) divisibile per 15 e per 21.

(b) divisibile per 15 ma non per 21.

(d) divisibile nè per 15 e nè per 21.

8.2. Consideriamo in  $\mathbb{R}^2$  il vettore  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Le coordinate di  $\vec{v}$  rispetto alla base  $b = \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  sono:(a)  $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b)  $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c)  $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d)  $[\vec{v}]_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 

Per gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 le risposte devono essere giustificate. Per l'esercizio 8, dove ogni parte vale 1 punto, basta solo rispondere. Ogni scorrettezza durante la prova comporterà l'immediato annullamento della prova e altre sanzioni in accordo con la presidenza del corso di Laurea.