

2. Funciones de una variable real. Generalidades

Análisis de Variable Real

2018–2019

Resumen

Estudiamos aquí conceptos relacionados con las funciones, especialmente con las funciones reales de variable real. Hacemos un recorrido por las diferentes operaciones que con ellas se pueden realizar, y las diferentes propiedades que pueden verificar. Estudiamos también algunas funciones sencillas, y nos fijamos finalmente, con mayor detalle, en algunas funciones de las llamadas *trascendentes*.

Índice

1. Primeros conceptos	1
1.1. Funciones. Clases particulares de funciones	1
1.2. Operaciones con funciones	12
1.3. Ejemplos de funciones	14
2. Funciones trascendentes	16
2.1. Funciones exponencial y logarítmica	16
2.2. Funciones trigonométricas. Funciones trigonométricas inversas . .	21
2.3. Funciones hiperbólicas. Funciones hiperbólicas inversas	26

1. Primeros conceptos

1.1. Funciones. Clases particulares de funciones

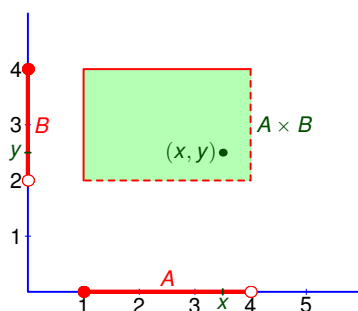
Producto cartesiano

Recordemos el concepto de *producto cartesiano*.

Definición 2.1. Dados dos conjuntos A y B , llamamos *producto cartesiano* de A y B , y lo denotamos $A \times B$ al conjunto de los pares ordenados (a, b) , donde $a \in A$ y $b \in B$. En símbolos,

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Ejemplo. Si $A = [1, 4)$ y $B = (2, 4]$, entonces $A \times B = \{ (x, y) \mid x \in [1, 4), y \in (2, 4] \}$.

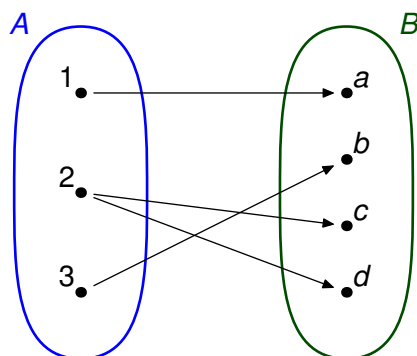


Correspondencias

Definición 2.2.

- (I) Se llama *correspondencia* $f: A \rightarrow B$ a una terna (A, B, \mathcal{G}_f) , donde A y B son conjuntos y \mathcal{G}_f es un subconjunto de $A \times B$.
- (II) Al conjunto A se le llama *dominio* o *conjunto inicial* de f .
- (III) Al conjunto B se le llama *codominio* o *conjunto final* de f .
- (IV) El conjunto \mathcal{G}_f recibe el nombre de *gráfico* o *gráfica* de f .

Ejemplo. Frecuentemente las correspondencias se suelen representar en un diagrama de Venn. Por ejemplo, consideremos la correspondencia (A, B, \mathcal{G}_f) , donde $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $\mathcal{G}_f = \{(1, a), (2, c), (2, d), (3, b)\}$ tendremos la siguiente representación:

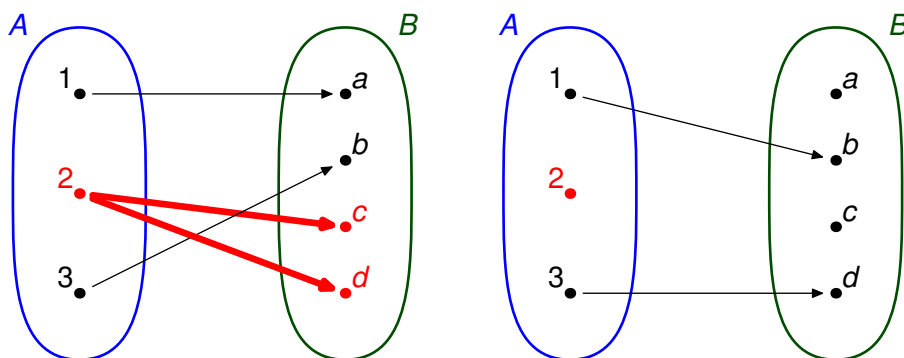


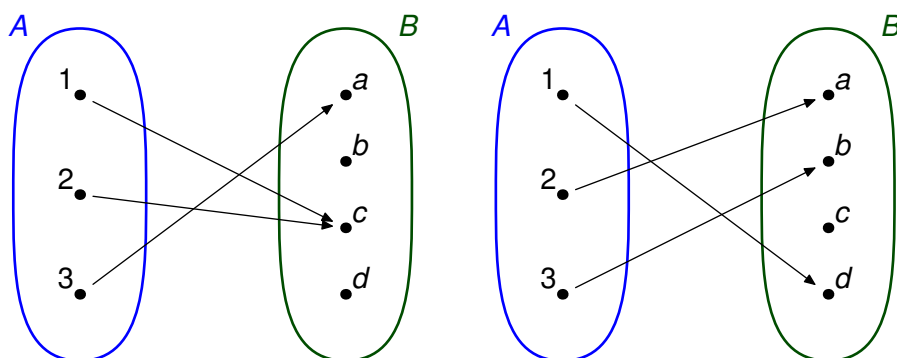
Funciones

Las correspondencias más importantes son las aplicaciones o funciones, que se definen de la siguiente manera:

Definición 2.3. Se dice que una correspondencia $f: A \rightarrow B$ es una *aplicación* o *función* si para todo $x \in A$ existe un elemento único $y \in B$ de modo que $(x, y) \in \mathcal{G}_f$. (Ese elemento y unívocamente asociado a x suele denotarse por $f(x)$ y se llama *valor* de la aplicación f en el punto x o *imagen* de x por f).

En los siguientes diagramas de Venn, las dos primeras correspondencias no son aplicaciones, pero las siguientes sí lo son.





Función real de variable real

Las aplicaciones que a nosotros nos van a importar durante este curso son las siguientes:

Definición 2.4. Una *función real de variable real* es una aplicación $f: A \rightarrow B$ con $A, B \subset \mathbb{R}$.

Datos de definición de una función

Informalmente, definir una función f supone dar:

- *dominio* de f (que se suele escribir $\text{dom } f$);
- *codominio* de f ;
- una *regla de definición* que permita asignar inequívocamente a cada elemento x de A , sin excepción, un elemento $f(x)$ de B perfectamente determinado por x y f .

Ejemplo. Cambiar una cualquiera de estas tres cosas (el dominio, el conjunto final o la regla de definición) hace que la función cambie. Por ejemplo, si tenemos una función $f: A \rightarrow B$ y consideramos un subconjunto S de A , la *restricción* de f a S es la función $f|_S: S \rightarrow B$ tal que $f|_S(x) = f(x)$ para cada $x \in S$, *que no es la misma función f* (se ha cambiado el dominio), aunque venga dada por la misma regla de correspondencia. (A cada x de S , la restricción $f|_S$ hace corresponder el mismo valor que f).

Observación. En la práctica raras veces se muestra una función como una terna, tal como requeriría su definición formal: lo habitual es especificar su dominio y la regla que permite determinar el valor de la función en cada elemento del dominio (ver los comentarios de [1, sec. 1.2, págs. 22–25]). En cuanto al conjunto final de una función, cuando no se mencione explícitamente se sobrentenderá que dicho conjunto es \mathbb{R} . En cuanto al dominio, es frecuente que tampoco se especifique, entendiéndose que es el mayor conjunto en que la regla de definición tiene sentido.

Ejemplo. <2> Suele chocar al principiante que a veces la regla de definición de una función aparece dividida en varias subreglas parciales (expresadas habitualmente mediante fórmulas), tendiendo a interpretar incorrectamente que se han definido tantas funciones como subreglas se enuncien. Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

es una sola función, la función *valor absoluto*, y no dos funciones, aunque sus valores coincidan en parte de su dominio (no en todo) con los que toman las dos funciones distintas $g: x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) = x \in \mathbb{R}$ y $h: x \in \mathbb{R} \mapsto h(x) = -x \in \mathbb{R}$.

Dada una función, emplearemos la expresión “ f está definida en S ” como un sinónimo de que S es un subconjunto de $\text{dom } f$. El dominio de f es, en este sentido, el mayor subconjunto de \mathbb{R} en el que f está definida.

Imagen y antiimagen

Definición 2.5. Sea f una función con dominio A y sean $S \subset A, T \subset \mathbb{R}$.

(I) Llamamos *conjunto imagen* (o simplemente *imagen*) de S por f al conjunto

$$f(S) = \{ f(x) \mid x \in S \}.$$

(II) Llamamos *conjunto antiimagen* (o *imagen inversa*) de T por f al conjunto

$$f^{-1}(T) = \{ x \mid f(x) \in T \}.$$

(III) El conjunto imagen del dominio de f suele denominarse, simplemente, *conjunto imagen* de f o *rango* de f , y se denota a veces $\text{im } f$ o $\text{rang } f$; por tanto, se tiene

$$\text{im } f = f(\text{dom } f) = \{ f(x) \mid x \in \text{dom } f \}.$$

Funciones inyectivas

Definición 2.6. Una función f se dice *inyectiva* si elementos distintos de su dominio tienen siempre imágenes distintas.: es decir, si dados $x, y \in \text{dom } f$, de $x \neq y$ se sigue $f(x) \neq f(y)$.; o, equivalentemente, si dados $x, y \in \text{dom } f$, de $f(x) = f(y)$ se sigue $x = y$.

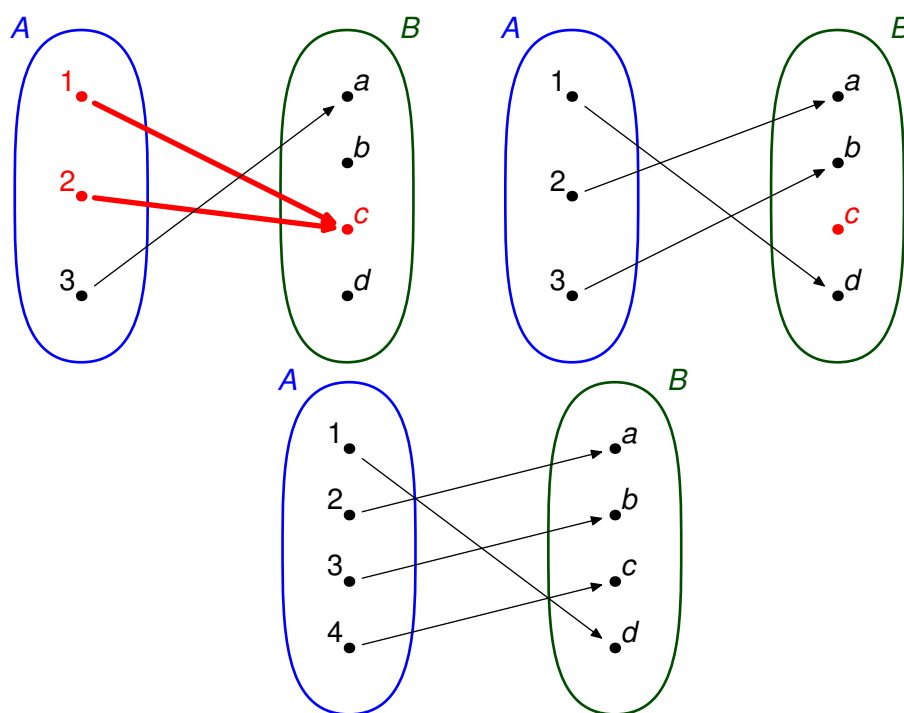
Funciones suprayectivas

Definición 2.7. Una función $f: A \rightarrow B$ se dice *suprayectiva* si $f(A) = B$, o sea, si el conjunto final y el conjunto imagen de f coinciden.; dicho de otra forma, si cada elemento de B es imagen de algún (o algunos) elemento(s) de A .

Funciones biyectivas

Definición 2.8. Una función se dice *biyectiva* si es simultáneamente inyectiva y suprayectiva.

Si estudiamos los siguientes diagramas de Venn, nos damos cuenta de que la primera aplicación no es inyectiva, pero la segunda sí; sin embargo, esta última no es suprayectiva. En cuanto a la tercera, es tanto inyectiva como suprayectiva. Por tanto, es biyectiva.



Ejemplos.

- La función *identidad*

$$\text{id}: x \in \mathbb{R} \mapsto \text{id}(x) = x \in \mathbb{R}.$$

es trivialmente biyectiva.

- La función *parte entera*, que asocia a cada $x \in \mathbb{R}$ su parte entera, no es inyectiva ni suprayectiva.

Función inversa

Definición 2.9. <1-> Dada una función inyectiva $f: A \rightarrow B$, se llama *función inversa* de f a la función $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ tal que $f^{-1}(y) = x$ si y solo si $f(x) = y$.

En términos más formales, f^{-1} sería la función dada por la terna $(f(A), A, \mathcal{G}_{f^{-1}})$, donde

$$\mathcal{G}_{f^{-1}} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{G}_f \},$$

y \mathcal{G}_f es, por supuesto, la gráfica de f . Para ser rigurosos, deberíamos comprobar que tal terna define efectivamente una función; esto es una consecuencia inmediata de que f es inyectiva.

En muchos textos aparece definida la función inversa solamente para funciones biyectivas. Sin embargo, la práctica usual en Análisis Matemático recomienda ampliar la definición a todas las funciones inyectivas, como acabamos de hacerlo. Obsérvese que, en cualquier caso, lo que hemos definido sería la función inversa de la función biyectiva $\tilde{f}: A \rightarrow f(A)$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$, que, recordémoslo, salvo cuando f es además suprayectiva, es otra función (la biyección asociada a f) pues cambia el conjunto final.

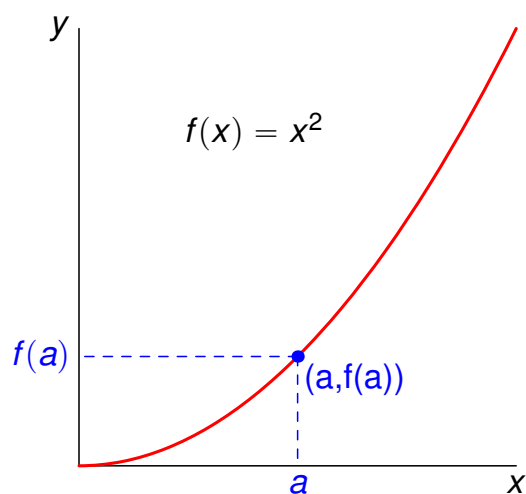
Observación. <2> Dada una función inyectiva $f: A \rightarrow B$, una función g es la inversa de f si y solo si $g: f(A) \rightarrow A$ y

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \in A, \quad f(g(y)) = y \text{ para todo } y \in f(A).$$

Representación gráfica de una función

Dada una función f , para cada $x \in \text{dom } f$ el par ordenado de números reales $(x, f(x))$ puede interpretarse como coordenadas de un punto del plano respecto de un sistema de coordenadas cartesianas, de modo que la gráfica de f , es decir, $\{ (x, f(x)) \mid x \in \text{dom } f \}$, vendrá representada por un subconjunto del plano, que da la representación gráfica de la función f . Observar esta representación puede proporcionar a veces información interesante sobre f , por lo que más adelante nos ocuparemos con detalle de la representación gráfica de funciones.

El lector puede examinar cómo se refleja en su representación gráfica que una función es inyectiva o suprayectiva, y qué relación hay entre las representaciones gráficas de una función inyectiva y la de su inversa.



Tabulación de funciones

Cuando el dominio de una función es finito (y con un número no demasiado elevado de elementos) es a menudo útil describir la función escribiendo en forma de tabla los valores del dominio y a su lado, correlativamente, los valores de la función en cada uno de ellos. Así, por ejemplo, suele procederse en la recogida de datos experimentales, cuando se estudian dos magnitudes de las cuales una depende de la otra y, de hecho, las tablas de correspondencias entre números o magnitudes son históricamente muy anteriores a la idea misma de función.

También se procede a la tabulación de funciones aunque el dominio no sea finito, reflejando en tal caso, por descontado, tan solo una parte finita del mismo. Cabe señalar que en la mayoría de las tablas de funciones que se usan en las ciencias, los valores de la función que aparecen en las tablas no son, por razones obvias, valores exactos, sino valores aproximados con un error que es necesario controlar para poder utilizarlas adecuadamente. Existe una extensa bibliografía de libros de tablas de funciones, sustituidos casi totalmente en la actualidad por los ordenadores e incluso por las calculadoras científicas de bolsillo. Sin embargo, es muy conveniente conocer al menos uno de ellos, como [4].

La siguiente es una sencilla tabulación de la función $f(x) = x^2$.

x	x^2
0,1	0,01
0,2	0,04
0,3	0,09
0,4	0,16
0,5	0,25

Funciones monótonas

Veamos ahora algunas clases particulares de funciones que aparecerán frecuentemente a lo largo de todo el curso.

Definición 2.10.

- (I) Una función f se dice *creciente* en $S \subset \text{dom } f$ si dados cualesquiera $x, y \in S$ con $x < y$, es $f(x) \leq f(y)$.
- (II) Una función f se dice *decreciente* en $S \subset \text{dom } f$ si dados cualesquiera $x, y \in S$ con $x < y$, es $f(x) \geq f(y)$.
- (III) Si una función f es creciente o decreciente en $S \subset \text{dom } f$, diremos que es *monótona* en S .
- (IV) En el caso particular en que $S = \text{dom } f$, se dice sencillamente que f es creciente, decreciente o monótona.

Funciones estrictamente monótonas

Más fuerte que ser monótona, es cumplir lo siguiente:

Definición 2.11.

- (I) Una función f se dice *estrictamente creciente* en $S \subset \text{dom } f$ si dados cualesquiera $x, y \in S$ con $x < y$, es $f(x) < f(y)$.
- (II) Una función f se dice *estrictamente decreciente* en $S \subset \text{dom } f$ si dados cualesquiera $x, y \in S$ con $x < y$, es $f(x) > f(y)$.
- (III) Si una función f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $S \subset \text{dom } f$, diremos que es *estrictamente monótona* en S .
- (IV) En el caso particular en que $S = \text{dom } f$, se dice sencillamente que f es estrictamente creciente, estrictamente decreciente o estrictamente monótona.

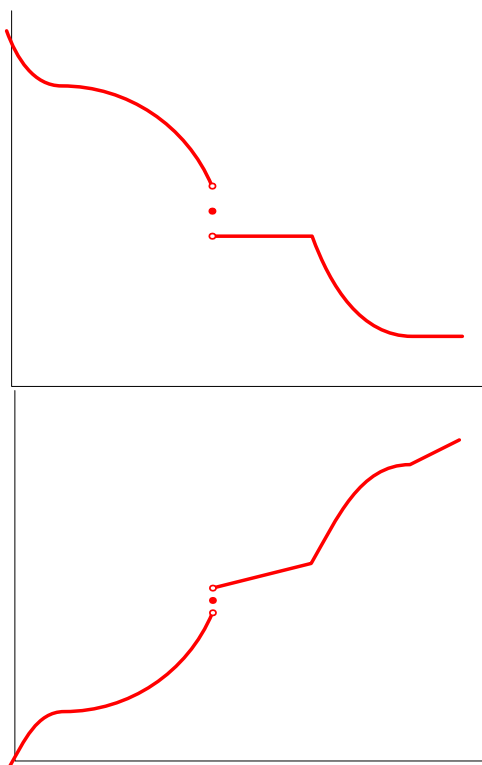
Esta nomenclatura puede variar de unos textos a otros: por ejemplo, algunos autores llaman *no decreciente* a lo que nosotros llamamos *creciente*, y *creciente* a lo que nosotros llamamos *estrictamente creciente*.

Es inmediata la siguiente relación:

Proposición 2.12.

- (I) *Toda función estrictamente creciente (en S) es creciente (en S).*
- (II) *Toda función estrictamente decreciente (en S) es decreciente (en S).*
- (III) *Toda función estrictamente monótona es siempre inyectiva.*

Observando las gráficas siguientes, vemos que la primera corresponde a una función decreciente, pero no estrictamente decreciente. La segunda es la gráfica de una función estrictamente creciente.



Ejemplos.

- La función $f(x) = x$ es estrictamente creciente en todo \mathbb{R} , ya que si $x < y$, es entonces $f(x) = x < y = f(y)$.
- La función $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en $[0, \infty)$, ya que, si $0 \leq x < y$, entonces $f(x) = x^2 < y^2 = f(y)$.
- La función $f(x) = x^2$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$, ya que, si $x < y \leq 0$, entonces $|x| > |y|$, de donde $f(x) = x^2 = |x|^2 > |y|^2 = y^2 = f(y)$.

Debe observarse que la monotonía no es una propiedad puntual de la función, sino que es una propiedad global. Esto significa que solo tiene sentido decir que una función es monótona en un determinado conjunto, no que es monótona en un punto del conjunto. La expresión *función monótona en un punto* carece de sentido.

Ejemplo. La función $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) = 1/x$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$. Pero no es estrictamente decreciente en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, porque $-1 < 1$ y sin embargo $f(-1) < f(1)$.

En general, dados dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ y una función $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$, si f es estrictamente decreciente en $A \cup B$, puede asegurarse que f es estrictamente decreciente en A y que f es estrictamente decreciente en B . Pero si f es estrictamente decreciente tanto en A como en B no puede asegurarse que f sea estrictamente decreciente en $A \cup B$. Lo mismo puede decirse con los demás tipos de monotonía.

Funciones acotadas

Definición 2.13.

- (I) Se dice que una función f está *acotada superiormente* si su conjunto imagen está acotado superiormente.
- (II) Se dice que una función f está *acotada inferiormente* si su conjunto imagen está acotado inferiormente.
- (III) Se dice que una función f está *acotada* si está acotada tanto inferior como superiormente.

O sea, para que una función esté acotada superiormente o inferiormente, se debe tener lo siguiente:

Proposición 2.14.

- (I) Una función f está acotada superiormente si existe un número fijo $M \in \mathbb{R}$ tal que, simultáneamente para todos los $x \in \text{dom } f$, se tiene $f(x) \leq M$.
- (II) Una función f está acotada inferiormente si existe un número fijo $m \in \mathbb{R}$ tal que, simultáneamente para todos los $x \in \text{dom } f$, se tiene $f(x) \geq m$.

Por comodidad, suele decirse entonces que M es una cota superior de f y m una cota inferior, y también que f está acotada superiormente por M o acotada inferiormente por m .

Para funciones acotadas (es decir, tanto superior como inferiormente) tenemos lo siguiente:

Proposición 2.15. Son equivalentes:

- (I) La función f está acotada.
- (II) Existen $m, M \in \mathbb{R}$, tales que para cada $x \in \text{dom } f$ se tiene $m \leq f(x) \leq M$.
- (III) Existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in \text{dom } f$.

Ejemplos.

- La función $f(x) = x^2$ está acotada inferiormente, ya que $f(x) \geq 0$ para todo x , así, 0 es una cota inferior para esta función. Pero f no está acotada superiormente, ya que dado $M \in \mathbb{R}$, siempre es $f(\alpha) \geq M$, donde $\alpha = \max\{1, M\}$.
- La función $f(x) = \sin x$ está acotada, ya que para todo x es $|f(x)| = |\sin x| \leq 1$.

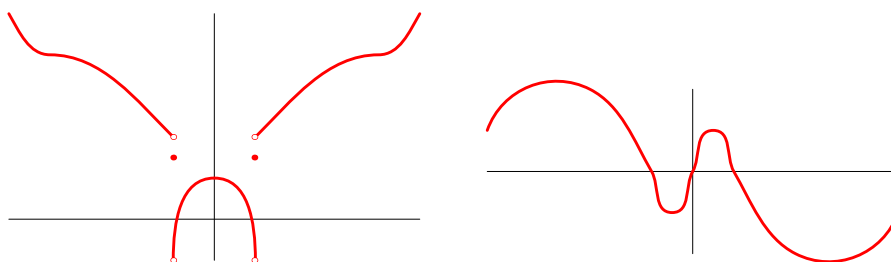
Funciones pares e impares

Definición 2.16. Sea f una función definida en \mathbb{R} . Se dice que f es

- par* si para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple $f(-x) = f(x)$ (su gráfica es entonces simétrica respecto del eje de ordenadas);
- impar* si para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple $f(-x) = -f(x)$ (su gráfica es entonces simétrica respecto del origen de coordenadas).

Nótese que la definición de función par y de función impar puede ampliarse de manera obvia a funciones f cuyo dominio sea simétrico (respecto al origen de coordenadas), es decir, tal que $-x \in \text{dom } f$ siempre que $x \in \text{dom } f$.

Las siguientes dos gráficas corresponden respectivamente a una función par y a una impar.



Ejemplos.

- La función $f(x) = x^2$ es par.
- La función $f(x) = x^3$ es impar.
- En general, la función $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, es par si n es par e impar si n es impar.

Observación. Toda función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ puede escribirse, además de manera única, como suma de una función par (su componente par) y una función impar (su componente impar). Concretamente, las componentes par e impar son

$$f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$$f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Es inmediato comprobar que f_P es par, f_I es impar y $f = f_P + f_I$. Para ver que la descomposición es única, supongamos que $f = g + h$, con g par y h impar. Entonces,

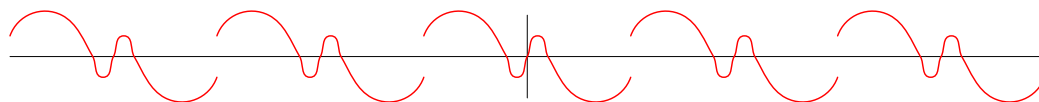
$$\begin{aligned} f_P(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{[g(x) + h(x)] + [g(-x) + h(-x)]}{2} \\ &= \frac{g(x) + h(x) + g(x) - h(x)}{2} = g(x), \end{aligned}$$

y de la misma manera se comprueba que $f_I = h$.

Funciones periódicas

Definición 2.17. Sea f una función definida en \mathbb{R} . Se dice que f es periódica de período $T \neq 0$ si para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple $f(x + T) = f(x)$. (Su gráfica puede obtenerse entonces por traslación reiterada de la gráfica en cualquier intervalo de longitud $|T|$).

La siguiente es una gráfica correspondiente a una función periódica.



1.2. Operaciones con funciones

Dadas dos funciones f y g , podemos construir a partir de ellas nuevas funciones de diferentes maneras. Para nosotros, las más útiles son las que a continuación exponemos.

Composición

Definición 2.18. La *composición* de f y g , denotada por $g \circ f$, es la función con dominio

$$\text{dom}(g \circ f) = f^{-1}(\text{dom } g),$$

dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para cada $x \in \text{dom}(g \circ f)$.

Obsérvese que los $x \in \text{dom}(g \circ f)$ son justamente aquellos para los que $g(f(x))$ tiene sentido.

Suma

Definición 2.19. La *suma* de f y g , denotada por $f + g$, es la función con dominio

$$\text{dom}(f + g) = \text{dom } f \cap \text{dom } g,$$

dada por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para cada $x \in \text{dom}(f + g)$.

Producto

Definición 2.20. El *producto* de f y g , denotado por $f \cdot g$ o fg , es la función con dominio

$$\text{dom}(fg) = \text{dom } f \cap \text{dom } g,$$

dada por

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

para cada $x \in \text{dom}(fg)$.

Cociente

Definición 2.21. El *cociente* de f y g , denotado por f/g , es la función con dominio

$$\text{dom}(f/g) = (\text{dom } f \cap \text{dom } g) \setminus g^{-1}(\{0\}),$$

dada por

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

para cada $x \in \text{dom}(f/g)$.

Ejemplo. Consideremos las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 1$. Su cociente es la función

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

definida para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Observemos que si $h(x) = x - 1$, entonces $h(x) = k(x)$ en $\text{dom } k$. Sin embargo, las dos funciones son distintas, ya que $\text{dom } h = \mathbb{R}$, mientras que $\text{dom } k = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1.3. Ejemplos de funciones

Sucesiones

Se entiende por *sucesión* una función cuyo dominio es el conjunto \mathbb{N} de los números naturales. Las sucesiones desempeñan un destacado papel en la elaboración de nuestra teoría, y a ellas dedicaremos específicamente el capítulo siguiente.

Funciones constantes

Funciones *constantes* son las que asignan a todos los valores de su dominio un mismo valor fijo, es decir, aquellas funciones f para las que existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a$ para todos los $x \in \text{dom } f$. (Se dice entonces que f es la función *constantemente a*.)

¿Puede una función constante ser inyectiva? ¿Y suprayectiva? ¿Y biyectiva? ¿Cómo es su representación gráfica? ¿Es monótona? ¿De qué tipo? ¿Es acotada? ¿Es par, impar, periódica?

Función identidad

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, la *identidad* en A es la función id tal que $\text{id}(x) = x$ para cada $x \in A$.

¿Es la identidad siempre inyectiva, suprayectiva o biyectiva? ¿Es monótona? ¿Es acotada? ¿Cómo es su representación gráfica? ¿Cuál es su inversa?

Funciones potenciales de exponente entero

Dado un número natural n , la función $f: x \in \mathbb{R} \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ (producto de n funciones iguales a la identidad) tiene distinto comportamiento según n sea par o impar. Para $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, la función $g: x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2k-1} \in \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y, por tanto, inyectiva. También es suprayectiva, aunque ahora no estamos todavía en condiciones de demostrarlo fácilmente.

Sin embargo, la función $h: x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2k} \in \mathbb{R}$ no es inyectiva (es una función par), aunque la restricción de h a $[0, \infty)$ es estrictamente creciente (luego inyectiva), y tiene por imagen el conjunto $[0, \infty)$, como justificaremos más adelante.

La potencia de exponente 0 es la función constante con valor siempre igual a 1. Para exponente negativo, $n = -m$ con $m \in \mathbb{N}$, se define

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto x^n = \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x^{-n}} \in \mathbb{R}.$$

Raíces

Dado $k \in \mathbb{N}$, se puede probar que la función $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2k-1} \in \mathbb{R}$ es biyectiva. Por tanto, posee una función inversa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denominada *raíz $(2k-1)$ -ésima*; su valor en un punto $x \in \mathbb{R}$ se denota por $\sqrt[2k-1]{x}$ o $x^{1/(2k-1)}$. De acuerdo con su definición, se tiene $y = \sqrt[2k-1]{x}$ si y solo si $y^{2k-1} = x$.

Sin embargo, puesto que la función $h : x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2k} \in \mathbb{R}$ no es inyectiva, no puede hablarse de raíz $2k$ -ésima en todo \mathbb{R} . No obstante, la restricción de h a $[0, \infty)$ es estrictamente creciente (luego inyectiva), y tiene por imagen el conjunto $[0, \infty)$; su inversa es la que llamamos función *raíz $2k$ -ésima*, de modo que dicha función tendrá ahora por dominio $[0, \infty)$. Es decir, solo está definida en un número real x si $x \geq 0$: su valor en dicho punto se representa por $\sqrt[2k]{x}$ o $x^{1/(2k)}$ excepto para el caso $k = 1$ (raíz cuadrada) que se usa abreviadamente \sqrt{x} . Nótese que siempre es $\sqrt{x} \geq 0$ y, en general, $\sqrt[2k]{x} \geq 0$.

Funciones polinómicas

Las funciones que pueden obtenerse mediante sumas y productos de funciones constantes y de la identidad en \mathbb{R} reciben el nombre de *funciones polinómicas*. Por tanto, Una función f es una *función polinómica* si y solo si existen $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. (También suelen denominarse funciones polinómicas las restricciones de las anteriores a cualquier subconjunto de \mathbb{R}).

Funciones racionales

Las funciones *racionales* son aquellas que pueden expresarse como cociente de dos funciones polinómicas. Su dominio es todo \mathbb{R} salvo un conjunto finito (quizás vacío): el conjunto de los ceros o raíces del denominador. Es habitual utilizar el mismo nombre para las restricciones de estas funciones a subconjuntos cualesquiera.

Funciones algebraicas

Reciben el nombre de *funciones algebraicas* las funciones tales que se pueden encontrar polinomios p_0, p_1, \dots, p_n de manera que para todo $x \in \text{dom } f$ se verifica

$$p_0(x) + p_1(x)f(x) + p_2(x)(f(x))^2 + \dots + p_n(x)(f(x))^n = 0.$$

Obsérvese que todas las funciones anteriormente descritas son algebraicas.

Si una función no es algebraica, se dice que es *trascendente*.

2. Funciones trascendentes

Las funciones que vamos a describir ahora, aunque quedan como las anteriores dentro de las que suelen denominarse genéricamente *funciones elementales*, y en buena parte son conocidas por el lector, requieren para su construcción técnicas de las que no disponemos todavía. No podemos, pues, definir las, pero vamos a emplearlas admitiendo de momento que existen y tienen las propiedades que enunciamos.

2.1. Funciones exponencial y logarítmica

Función exponencial

La *función exponencial*

$$\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que construiremos más adelante, aparece en la descripción de los fenómenos en los que la variación de una magnitud es proporcional al valor de dicha magnitud.

La principal propiedad que verifica la exponencial es la siguiente, que se probará más adelante:

Teorema 2.22. *La función exponencial $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y),$$

cualquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$.

El número $\exp(1)$ se denota por e . Es irracional; más todavía, es *trascendente*, lo que significa que no existe ningún polinomio con coeficientes enteros que se anule en e . Sus primeras cifras decimales son

$$e = 2,7182818284590453453602874713526624977572 \dots$$

(Sobre su historia, ver [3]).

En lugar de $\exp(x)$ suele escribirse e^x .

Propiedades de la exponencial

La exponencial cumple las siguientes propiedades. Algunas de ellas las admitiremos por el momento sin demostración, y las probaremos en el último capítulo:

Proposición 2.23.

- (I) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, es $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.*
- (II) $e^0 = 1$, $e^1 = e$.
- (III) *Para cada $x \in \mathbb{R}$, es $e^x \neq 0$ y $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.*
- (IV) *Dados $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene $e^{nx} = e^x \cdot \dots \cdot e^x$.*
- (V) *Para cada $x \in \mathbb{R}$, es $e^x > 0$.*
- (VI) *La función exponencial es estrictamente creciente. En particular, es inyectiva.*
- (VII) *El conjunto imagen de la función exponencial es $(0, \infty)$.*

Demostración.

- (I) Es simplemente el teorema 2.22, escrito de otra forma.
- (II) $e^1 = e$, ya que así definimos el número e . Por otro lado,

$$e^1 \cdot e^0 = e^{1+0} = e^1,$$

así que $e^0 = 1$.

- (III) Se tiene

$$e^x \cdot e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1.$$

Por tanto, no puede ser $e^x = 0$. Además, $e^{-x} = 1/e^x$.

- (IV) Por inducción sobre n . Para $n = 1$, es $e^{1 \cdot x} = e^x$. Supongamos que $e^{nx} = e^x \cdot \dots \cdot e^x$. Entonces

$$e^{(n+1)x} = e^{nx+x} = e^{nx} \cdot e^x = e^x \cdot \dots \cdot e^x \cdot e^x = e^x \cdot \dots \cdot e^x.$$

- (V) Ya sabemos que e^x es siempre diferente de cero, así que

$$e^x = e^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0.$$

- (VI) y (VII) Admítanse, de momento, sin demostración. □

Función logarítmica

Definición 2.24. Se llama función *logarítmica* $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a la inversa de la función exponencial, de modo que $\log x = y$ si y solo si $e^y = x$.

Por tanto, está caracterizada por cumplir

$$\log(e^x) = x$$

cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, y

$$e^{\log x} = x$$

cualquiera que sea $x \in (0, \infty)$.

Propiedades del logaritmo

La función logarítmica cumple las siguientes propiedades:

Proposición 2.25.

- (I) $\log 1 = 0$, $\log e = 1$.
- (II) Para cada $x \in (0, \infty)$, es $\log \frac{1}{x} = -\log x$.
- (III) Dados $x, y \in (0, \infty)$, es $\log(xy) = \log x + \log y$.
- (IV) Dados $n \in \mathbb{N}$ y $x \in (0, \infty)$, es $\log(x^n) = n \log x$.
- (V) El conjunto imagen de la función logarítmica es \mathbb{R} .
- (VI) La función logarítmica es estrictamente creciente. En particular, es inyectiva.

Demostración.

(I) Se tiene $\log 1 = 0$, ya que $e^0 = 1$. Además, $\log e = 1$, ya que $e^1 = e$.

(II) Tenemos

$$e^{-\log x} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

Por tanto, $-\log x = \log \frac{1}{x}$.

(III) Tenemos

$$e^{\log x + \log y} = e^{\log x} \cdot e^{\log y} = xy.$$

De aquí que $\log(xy) = \log x + \log y$.

(IV) Si realizamos los siguientes cálculos,

$$e^{n \log x} = e^{\log x \cdot \overset{(n)}{\dots}} e^{\log x} = x^{\overset{(n)}{\dots}} x = x^n,$$

deducimos inmediatamente que $\log x^n = n \log x$.

(V) Como el logaritmo es la inversa de la exponencial, su imagen será el dominio de la exponencial, que es \mathbb{R} .

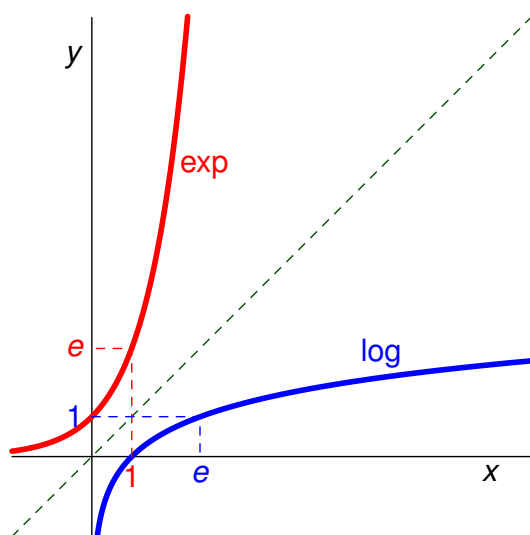
(VI) Utilizaremos que la exponencial es estrictamente creciente. Supongamos que $0 < x < y$. Si fuera $\log x \geq \log y$, tendríamos

$$x = e^{\log x} \geq e^{\log y} = y,$$

lo cual constituye una contradicción. Por tanto, ha de ser $\log x < \log y$, y así la función logarítmica es estrictamente creciente. \square

Representación gráfica de exponencial y logaritmo

Las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica toman la forma siguiente:



Función exponencial de base arbitraria

Basándonos en la función exponencial, podemos definir otras funciones similares, que nos permiten definir las potencias de base y exponente arbitrarios.

Definición 2.26. Dado un número real $a > 0$, la función *exponencial de base a* se define mediante la igualdad

$$a^x = e^{x \log a}.$$

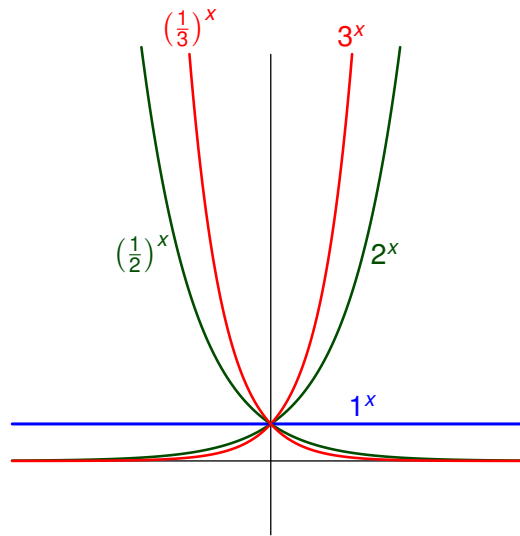
Propiedades de las exponenciales de base arbitraria

Las propiedades de estas funciones son similares a la de la exponencial ordinaria, pero $a^1 = a$, y además hay que realizar distinciones según como sea a :

- cuando $a > 1$, la función es estrictamente creciente y su imagen es $(0, \infty)$;
- cuando $a = 1$, se trata de la función constantemente 1;
- cuando $a < 1$, es una función decreciente y su imagen es $(0, \infty)$.

Representación de las exponenciales

En la figura siguiente están las gráficas de $f(x) = a^x$ para $a = 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Obsérvese la diferencia en cuanto al crecimiento, dependiendo de si a es mayor o menor que 1.



Propiedades de las potencias

Proposición 2.27. Dados $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, $b > 0$,

(I) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(II) $(ab)^x = a^x b^x$,

(III) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Demostración.

(I) Vemos que

$$a^{x+y} = e^{(x+y) \log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} e^{y \log a} = a^x a^y.$$

(II) Los cálculos son inmediatos.

$$(ab)^x = e^{x \log(ab)} = e^{x \log a + x \log b} = e^{x \log a} \cdot e^{x \log b} = a^x b^x.$$

(III) También en este caso el resultado se sigue inmediatamente.

$$(a^x)^y = e^{y \log a^x} = e^{y \log e^{x \log a}} = e^{xy \log a} = a^{xy}.$$

□

Logaritmo con base arbitraria

Definición 2.28. Dado $a > 0$, $a \neq 1$, la función logarítmica de base a se define en $(0, \infty)$ mediante la fórmula

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Es inmediato comprobar que esta función es la inversa de la función exponencial de base a .

Una propiedad de los logaritmos

Sus propiedades son similares a las del logaritmo ordinario. Como propiedad adicional interesante se tiene:

Proposición 2.29. Dados $a, b, x \in \mathbb{R}$ con $0 < a \neq 1$ y $b > 0$,

$$\log_a b^x = x \log_a b.$$

Demostración.

$$\log_a b^x = \frac{\log b^x}{\log a} = \frac{\log e^{x \log b}}{\log a} = x \frac{\log b}{\log a} = x \log_a b. \quad \square$$

2.2. Funciones trigonométricas. Funciones trigonométricas inversas

Funciones seno y coseno

Reciben el nombre de funciones trigonométricas una serie de funciones de origen geométrico, ligadas con la medida de ángulos y la descripción de fenómenos periódicos. Las principales son:

- la función *seno* $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y
- la función *coseno* $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

No estamos en condiciones de definir las, y lo haremos más adelante.

Propiedades del seno y el coseno

De momento, admitimos sin demostración que estas funciones satisfacen las propiedades que pasamos a enunciar:

Proposición 2.30.

(I) *El seno es una función impar, mientras que el coseno es una función par.*

(II) (Teorema de Pitágoras) *Para cada $x \in \mathbb{R}$ es*

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1.$$

(III) *Existe un número real positivo, denotado por π , tal que $\operatorname{sen} \pi = 0$ y $\operatorname{sen} x \neq 0$ si $0 < x < \pi$.*

(Este número π es irracional (y trascendente) y sus primeras cifras decimales son

$$3,14159265358979 \dots$$

El número π , “área del círculo de radio 1”, es de lejos la constante más célebre de las matemáticas. Aparecida inicialmente en Geometría, interviene hoy en los dominios más variados: Análisis, Teoría de Números, Probabilidades y Estadística, Combinatoria, etc. Los más grandes matemáticos se han interesado desde hace más de 2000 años por los problemas planteados por este número. Véase [2, pág. 50].)

(IV) $\cos \pi = -1$.

(V) *Las funciones sen y cos tienen por conjunto imagen el intervalo $[-1, 1]$.*

(VI) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x^2 + y^2 = 1$, existe un solo $\theta \in (-\pi, \pi]$ de modo que*

$$\cos \theta = x, \quad \operatorname{sen} \theta = y.$$

(Gráficamente, esto significa que las funciones seno y coseno que hemos definido se corresponden con las utilizadas en trigonometría.)

(VII) (Fórmulas de adición) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y,$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

(VIII) *Las funciones sen y cos son periódicas de período 2π .*

(IX) *La función sen es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$ y estrictamente decreciente en $[\pi/2, \pi]$.*

(X) *La función cos es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$.*

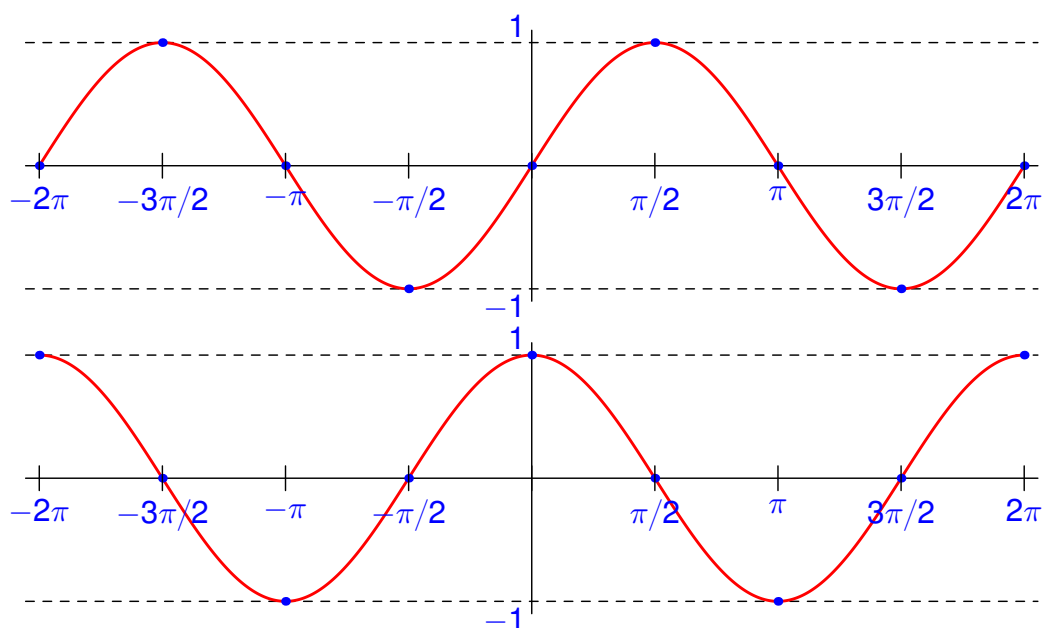
Algunos valores particulares

Damos ahora algunos valores particulares de estas funciones.

grados	x	$\text{sen } x$	$\text{cos } x$
0	0	0	1
15	$\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
90	$\pi/2$	1	0

Representación gráfica del seno y el coseno

He aquí las representaciones gráficas del seno y el coseno:



Tangente y cotangente, secante y cosecante

Definición 2.31. La función *tangente* \tan , la función *cotangente* \cotan , la función *secante* \sec y la función *cosecante* cosec se definen a partir de las funciones seno y coseno mediante las fórmulas

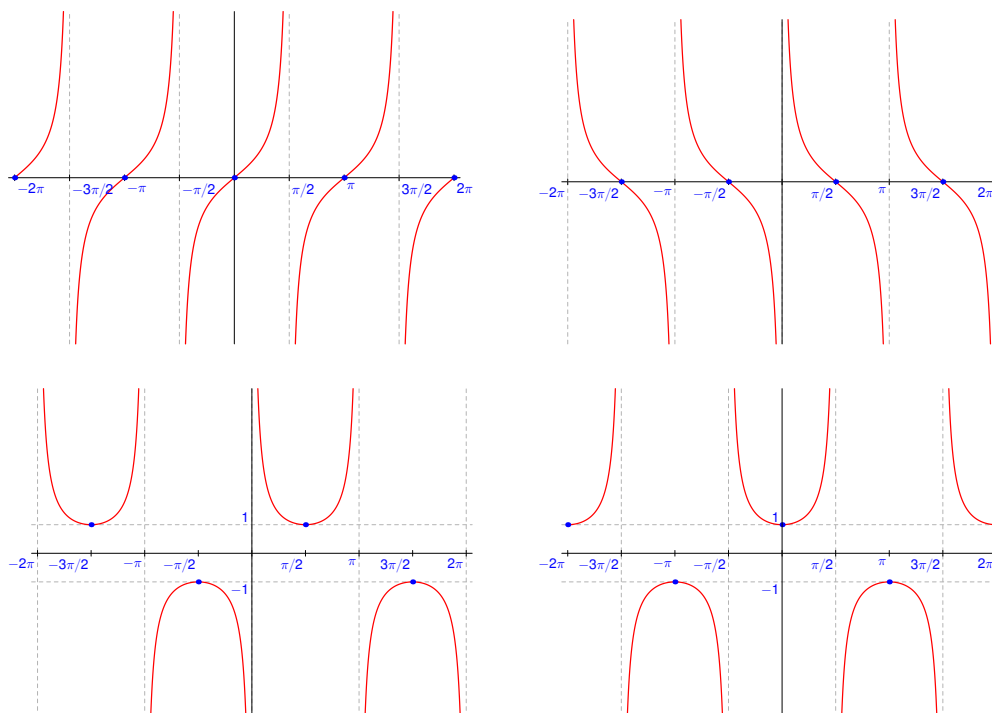
$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x},$$
$$\sec x = \frac{1}{\text{cos } x},$$

$$\cotan x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x},$$
$$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}.$$

¿Cuáles son los dominios de estas funciones?

Representación gráfica de tangente, etc.

Las siguientes son las gráficas, respectivamente, de tangente y cotangente, y de cosecante y secante.



La función arco seno

La función seno no es inyectiva, por lo que no puede hablarse estrictamente de inversa de la función seno. Sin embargo, la restricción de la función seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ es estrictamente creciente, luego inyectiva en particular, y su conjunto imagen es el intervalo $[-1, 1]$ (igual conjunto imagen que la función seno).

Definición 2.32. La función *arco seno* $\arcsen: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ es la inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

La función arco seno tiene las siguientes propiedades:

- La función arco seno es estrictamente creciente, impar y acotada. Además,
- $\arcsen x = y$ si y solo si $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ y $\sen y = x$, con lo cual
- $\sen(\arcsen x) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$, y
- $\arcsen(\sen x) = x$ si y solo si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

La función arco coseno

Pasando a la función coseno, su restricción al intervalo $[0, \pi]$ es una función decreciente cuyo conjunto imagen es $[-1, 1]$.

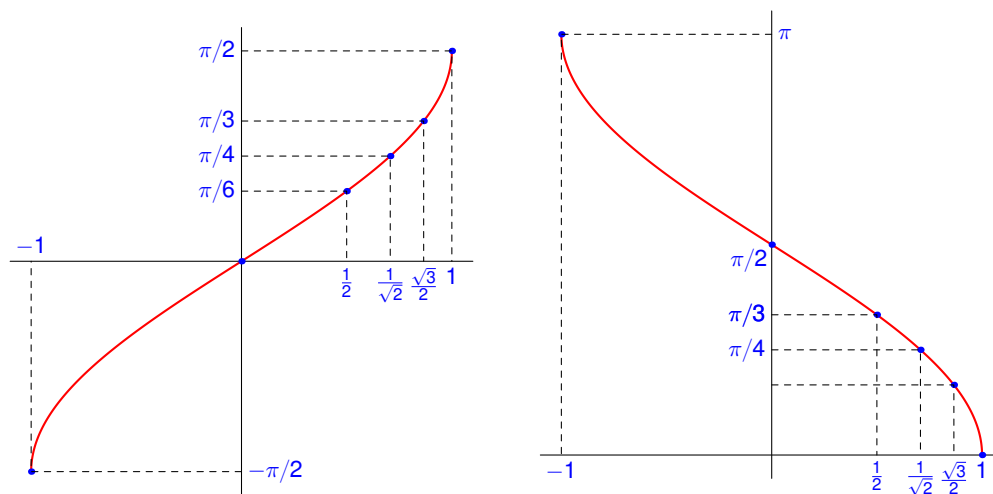
Definición 2.33. La función *arco coseno* $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ es la inversa de la restricción de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$.

La función arco coseno tiene las siguientes propiedades:

- La función arco coseno es estrictamente decreciente y acotada. Además,
- $\arccos x = y$ si y solo si $y \in [0, \pi]$ y $\cos y = x$, de donde
- $\cos(\arccos x) = x$, para todo $x \in [-1, 1]$,
- $\arccos(\cos x) = x$ si y solo si $x \in [0, \pi]$.

Representación de arco seno y arco coseno

Las siguientes son las gráficas, respectivamente, del arco seno y el arco coseno.



La función arco tangente

Definición 2.34. La función *arco tangente* $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es la inversa de la restricción de la función tangente al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$.

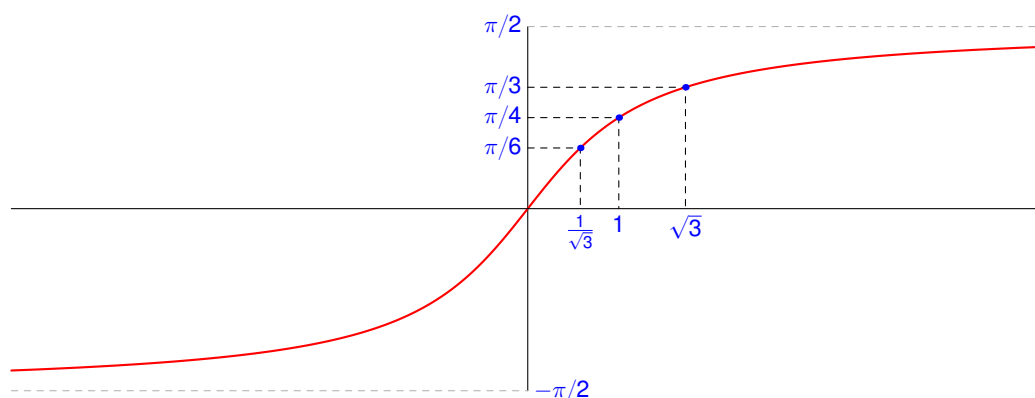
Tiene las siguientes propiedades:

- Es estrictamente creciente, impar, acotada.
- $\arctan x = y$ si y solo si $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ y $\tan y = x$,

- $\tan(\arctan x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$,
- $\arctan(\tan x) = x$ si y solo si $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Las funciones *arco cotangente*, *arco secante* y *arco cosecante* se usan raras veces. Su definición puede verse en [4].

Representación de la arco tangente



2.3. Funciones hiperbólicas. Funciones hiperbólicas inversas

La función coseno hiperbólico

Definición 2.35. La función *coseno hiperbólico* $\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida mediante

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

- Es una función par.
- Es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, \infty)$.
- Está acotada inferiormente por 1. En efecto, para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \geq 1, \quad \text{ya que } e^{2x} + 1 \geq 2e^x > 0.$$

- Su conjunto imagen es $[1, \infty)$.

La función seno hiperbólico

Definición 2.36. La función *seno hiperbólico* $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida mediante

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

- Es una función impar.
- Es estrictamente decreciente.
- No está acotada superior ni inferiormente.
- Su conjunto imagen es \mathbb{R} .

Propiedades del coseno y seno hiperbólicos

Estas funciones tienen un cierto parecido con el coseno y el seno trigonométricos, y pueden relacionarse geoméricamente con la hipérbola de manera similar a como las funciones trigonométricas se relacionan con la circunferencia. Aumentando la semejanza, existen fórmulas para las funciones hiperbólicas que, con variaciones en algunos signos, recuerdan las conocidas para las funciones trigonométricas: por ejemplo, calculando a partir de la definición se comprueba que

Proposición 2.37. Cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(I) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$(II) \quad \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$(III) \quad \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

Demostración.

(I) Sustituyendo con las definiciones,

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}) \\ &= \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

(II) Teniendo en cuenta de nuevo las definiciones,

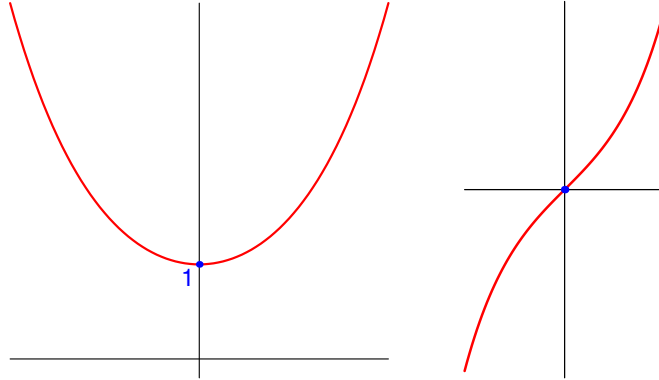
$$\begin{aligned}
 & \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
 &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
 &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-(x+y)}) \\
 &= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y).
 \end{aligned}$$

(III) Por último,

$$\begin{aligned}
 & \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y \\
 &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\
 &= \frac{1}{4} (e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)}) \\
 &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y). \quad \square
 \end{aligned}$$

Representación del coseno y seno hiperbólicos

Las siguientes son, respectivamente, las gráficas del coseno y el seno hiperbólicos.



La función tangente hiperbólica

Definición 2.38. La función *tangente hiperbólica* $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

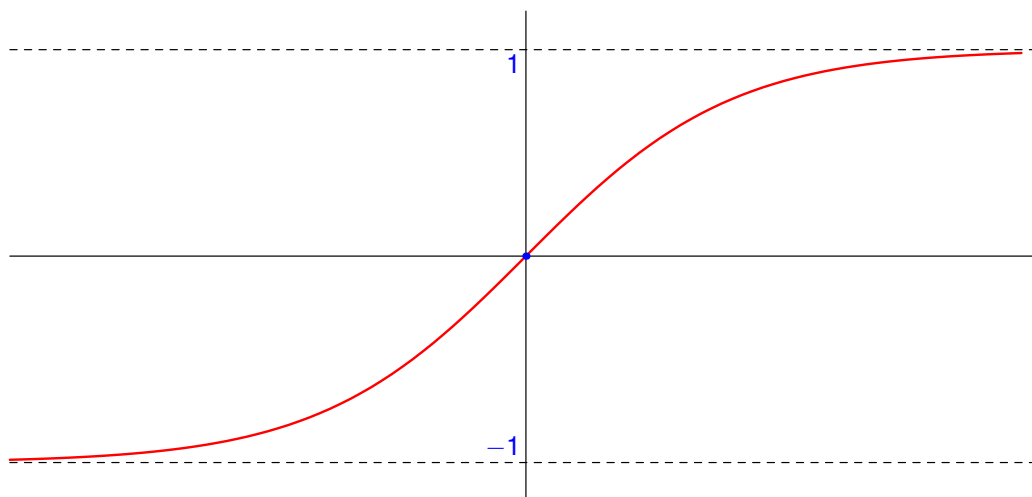
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

- Es una función impar.
- Es estrictamente creciente.
- Es acotada.
- Su conjunto imagen es el intervalo abierto $(-1, 1)$.

Representación de la tangente hiperbólica

La siguiente es la representación gráfica de la tangente hiperbólica.



Cotangente, secante y cosecante hiperbólicas

Definición 2.39.

(I) La función *cotangente hiperbólica* $\operatorname{cotanh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\operatorname{cotanh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

(II) La función *secante hiperbólica* es $\operatorname{sech} = \frac{1}{\cosh}$.

(III) La función *cosecante hiperbólica* es $\operatorname{cosech} = \frac{1}{\sinh}$.

Funciones hiperbólicas inversas

Definición 2.40.

(I) La función *arco coseno hiperbólico* $\operatorname{arc} \cosh: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, dada por

$$\operatorname{arc} \cosh x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

es la inversa de la restricción de la función coseno hiperbólico al intervalo $[0, \infty)$.

(II) La función *arco seno hiperbólico* $\operatorname{arc} \sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\operatorname{arc} \sinh x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

es la inversa de la función seno hiperbólico.

(III) La función *arco tangente hiperbólica* $\operatorname{arc} \tanh: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\operatorname{arc} \tanh x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x},$$

es la inversa de la función tangente hiperbólica.

(IV) La función *arco cotangente hiperbólica* $\operatorname{arc} \operatorname{coth}: (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\operatorname{arc} \operatorname{coth} x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1},$$

es la inversa de la función cotangente hiperbólica.

Referencias

- [1] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una variable*, Limusa, México, 1990.
- [2] F. Le Lionnais, *Les nombres remarquables*, Hermann, París, 1983.
- [3] E. Maor, *The story of a number*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1994.
- [4] M. R. Spiegel y L. Abellanas, *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*, McGraw Hill (colección Schaum), 1991.
- [5] M. Spivak, *Cálculo infinitesimal*, Reverté, 1994.