9. Sucesiones y series de funciones. Series de potencias

Análisis de Variable Real

2018–2019

Resumen

Estudiaremos sucesiones y series de funciones, y los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme de estas. Relacionaremos estos con todos las nociones vistas anteriormente en el curso: continuidad, derivadas e integrales. Tras esto, Se estudiará un tipo especial de serie de funciones: las series de potencias. Veremos que estas tienen unas propiedades muy particulares, que las hacen especialmente agradables. Incidiremos especialmente en el concepto de radio de convergencia.

Índice

1. Convergencia puntual

1.1. Sucesiones de funciones

¿Qué es una sucesión de funciones?

Definición 9.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Supongamos que para cada número natural n está dada una función $f_n \colon A \to \mathbb{R}$.

(I) La aplicación $n \mapsto f_n$ recibe el nombre de *sucesión de funciones* (en A, si es necesaria la precisión), y se denota (f_n).

(II) La función f_n asociada al número natural n recibe el nombre de *término n-ésimo* de la sucesión.

Obviamente, para cada $x \in A$, la sucesión de funciones (f_n) define una sucesión de números reales $(f_n(x))$. Para algunos valores de $x \in A$, puede que esta sucesión numérica sea convergente, mientras que para otros es posible que no converja. Obsérvese también que allá donde exista, el límite de la sucesión $(f_n(x))$ no será fijo, sino que dependerá del valor de $x \in A$. Esto justifica la siguiente definición:

Definición 9.2. Sea (f_n) una sucesión de funciones en $A \subset \mathbb{R}$.

(I) El conjunto C de los puntos $x \in A$ tales que la sucesión numérica $(f_n(x))$ converge se denomina *conjunto* (o *campo*, o *dominio*) *de convergencia* de la sucesión de funciones (f_n).

(II) Si $C \neq \varnothing$, a la función $f \colon C \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lim_n f_n(x)$ se le denomina *función límite* de (f_n).

1.2. Definición de convergencia puntual

¿Qué es convergencia puntual?

Las definiciones anteriores pueden ser consideradas desde otro punto de vista. Esto da origen al concepto de *convergencia puntual*.

Definición 9.3. Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, sea $S \subset A$ y f una función definida en S.

(I) Si para cada $x \in S$, $f(x) = \lim_n f_n(x)$, se dice que la sucesión (f_n) *converge puntualmente* a f en S, o que *converge punto a punto* a f en S.

(II) Cuando existe tal función f, decimos que la sucesión (f_n) es *convergente puntualmente* o *convergente punto a punto* en S o que f es el *límite puntual* de (f_n) en S.

(III) Cuando $S = A$ diremos sencillamente que (f_n) converge puntualmente a f, o que f es el límite puntual de (f_n), y lo denotaremos $f = \text{lím}_n f_n$ o $f_n \to f$.

Ejemplos.

- $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

  Un sencillo cálculo muestra que, fijado un $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, se tiene

$$\text{lím}_n f_n(x) = \text{lím}_n \frac{x}{n} = x \cdot \text{lím}_n \frac{1}{n} = x \cdot 0 = 0.$$

  Esto nos indica que la sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función límite $f(x) = 0$.

- $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$.

  Si tomamos un $x \in [0, 1)$, se tiene que $\text{lím}_n f_n(x) = \text{lím}_n x^n = 0$. Esto no es así si $x = 1$. En efecto, $\text{lím}_n f_n(1) = \text{lím}_n 1^n = 1$. Por tanto, la sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente a la función f definida en $[0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

- $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, $x \in [0, \infty)$.

  Si $0 \leqslant x < 1$ se tiene

$$\text{lím}_n f_n(x) = \text{lím}_n \frac{x^n}{1 + x^n} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

  Si $1 < x$, en cambio, tenemos

$$\text{lím}_n f_n(x) = \text{lím}_n \frac{x^n}{1 + x^n} = \text{lím}_n \frac{1}{1/x^n + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1.$$

  Por último, para $x = 1$ obtenemos

$$\text{lím}_n f_n(1) = \text{lím}_n \frac{1^n}{1 + 1^n} = \frac{1}{2}.$$

  En conclusión, la función límite puntual está definida en $[0, \infty)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

- $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

  Cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

  $$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{x^2 + nx}{n} = \lim_n \Big(\frac{x^2}{n} + x \Big) = x.$$

  En consecuencia, el límite puntual de nuestra sucesión de funciones $f_n(x)$ es en este caso la función definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = x$.

- $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{\sqrt{n}}$.

  Dado que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

  $$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

  está claro que $\lim_n f_n(x) = 0$, por lo que (f_n) converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función $f(x) = 0$.

- $f_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$, $x \in \mathbb{R}$.

  Resulta evidente que esta sucesión de funciones converge puntualmente a 0 en todos los $x \in \mathbb{Z}$. Menos trivial es probar que en los demás puntos no converge. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ y supongamos que $\operatorname{sen} n\pi x \to l \in \mathbb{R}$. Entonces

  $$l = \lim_n \operatorname{sen} 2n\pi x = 2 \lim_n \operatorname{sen} n\pi x \cos n\pi x = 2l \lim_n \cos n\pi x.$$

  De aquí se deduce que o bien $l = 0$, o bien $\lim_n \cos n\pi x = 1/2$.

  No puede ser $\lim_n \cos n\pi x = 1/2$, ya que tendríamos

  $$\frac{1}{2} = \lim_n \cos 2n\pi x = \lim_n (2\cos^2 n\pi x - 1) = -\frac{1}{2}.$$

  Por tanto, debe ser $l = 0$, luego

  $$\lim_n |\cos n\pi x| = \lim_n \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 n\pi x} = 1.$$

  Como

  $$\operatorname{sen}(n+1)\pi x = \operatorname{sen} n\pi x \cos \pi x + \cos n\pi x \operatorname{sen} \pi x,$$

  queda $\lim_n \cos n\pi x \operatorname{sen} \pi x = 0$ y, así, $\operatorname{sen} \pi x = 0$. Es decir, $x \in \mathbb{Z}$.

Análisis de la definición de convergencia puntual

Teniendo en cuenta la definición de sucesión convergente, está claro que el concepto de sucesión de funciones puntualmente convergente se puede reescribir de la siguiente manera:

Proposición 9.4. *Sean (f_n) una sucesión de funciones en $A \subset \mathbb{R}$, $S \subset A$, y f una función definida en S. Son equivalentes:*

(I) *(f_n) converge puntualmente a f en S.*

(II) *Para cada $x \in S$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n \geqslant n_0$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

De la misma manera, teniendo en cuenta la equivalencia entre los conceptos de sucesión convergente y sucesión de Cauchy, se establece con facilidad el resultado siguiente:

Proposición 9.5 (Criterio de Cauchy puntual)**.** *Sean (f_n) una sucesión de funciones en $A \subset \mathbb{R}$, y $S \subset A$. Son equivalentes:*

(I) *(f_n) converge puntualmente en S.*

(II) *Para cada $x \in S$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $m, n \geqslant n_0$ se verifica $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.*

1.3. Series de funciones

¿Qué es una serie de funciones?

De manera análoga a como se han definido las sucesiones de funciones, también podemos definir las series de funciones.

Definición 9.6.

(I) Una *serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en $A \subset \mathbb{R}$ es un par ordenado de sucesiones de funciones $((f_n), (s_n))$ de funciones en A, relacionados por la condición de que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.

(II) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el término n-ésimo de la primera sucesión, f_n, recibe el nombre de *término n-ésimo* de la serie.

(III) El término n-ésimo de la segunda sucesión, s_n, recibe el nombre *suma parcial n-ésima* de la serie.

También podemos definir para estas el concepto de convergencia puntual, de manera análoga a lo que se hizo con sucesiones de funciones.

Definición 9.7. Decimos que una serie de funciones *converge puntualmente* a una función f en un conjunto S si lo hace la sucesión de sus sumas parciales. En tal caso, la función f se denomina *suma* de la serie en el conjunto S.

Ejemplo.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad x \in [0, 1].$$

Las sumas parciales de esta serie de funciones son de la forma

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \\ &= \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & 0 \leqslant x < 1, \\ n+1, & x = 1.. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $0 \leqslant x < 1$, se tiene que $s_n(x) \to 1/(1-x)$. Si $x = 1$, en cambio, se tiene $s_n(x) \to \infty$. Por tanto la suma de la serie en $[0, 1]$ no existe, pero sí en $[0, 1)$, y es la función $s\colon [0, 1) \to \mathbb{R}$, $s(x) = 1/(1-x)$.

1.4. Deficiencias de la convergencia puntual

Convergencia puntual y su relación con continuidad, integrales y derivadas

La relación de la convergencia puntual con la continuidad, la derivabilidad o las integrales puede ser resumido de manera muy sencilla: *¡Nada funciona como debe!* Esto se evidenciará suficientemente en los ejemplos que siguen.

Ejemplos.

- $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$.

  Ya vimos que esta sucesión de funciones converge puntualmente a la función

  $$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

  Obsérvese que las funciones f_n son todas continuas. (Son, de hecho, derivables.) Sin embargo, su límite puntual f no es una función continua. Así pues, el límite puntual de una sucesión de funciones continuas no tiene por qué ser continuo, y el límite puntual de una sucesión de funciones derivables no tiene por qué ser derivable.

- Sea (r_n) una enumeración de los racionales y

  $$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

  Para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es acotada y tiene solo n puntos de discontinuidad (a saber, r_1, r_2, ..., r_n); en consecuencia, f_n es localmente integrable.

  Veamos quién es el límite puntual de esta sucesión de funciones. Si $x \notin \mathbb{Q}$, $f_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que $\lim_n f_n(x) = 0$. Supongamos ahora que $x \in \mathbb{Q}$. Como (r_n) es una enumeración de los racionales, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x = r_{n_0}$. Por tanto, si $n \geqslant n_0$, se da que $x = r_{n_0} \in \{ r_1, r_2, \dots, r_n \}$, con lo que $f_n(x) = 1$. En conclusión, $\lim_n f_n(x) = 1$. Resumiendo, el límite puntual de (f_n) es la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

  $$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

  o, lo que es lo mismo, la función "peine" de Dirichlet, que, como se sabe, no es integrable en ningún intervalo (no degenerado). Vemos de esta manera que el límite puntual de una sucesión de funciones integrables no tiene por qué ser integrable.

- $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = m/n!, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$

  Este ejemplo sigue la misma línea que el anterior, pero sin hacer uso de una enumeración de los racionales.

  Es obvio que las funciones (f_n) son localmente integrables, ya que en cada intervalo cerrado y acotado, f_n solo puede tener un número finito de discontinuidades (a saber, los puntos del intervalo de la forma $m/n!$).

  Si $x \notin \mathbb{Q}$, es obvio que x no se puede escribir en la forma $x = m/n!$, así que $f_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $\lim_n f_n(x) = 0$.

  Si $x \in \mathbb{Q}$, en cambio, se tendrá que $x = p/n_0$, donde $p \in \mathbb{Z}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $n \geqslant n_0$, entonces el número $n' = n!/n_0$ es un entero, y tenemos

  $$x = \frac{n'p}{n'n_0} = \frac{n'p}{n!},$$

  de donde $f_n(x) = 1$ para todo $n \geqslant n_0$. Así, $\lim_n f_n(x) = 1$.

  Se llega así a la conclusión de que el límite puntual de la sucesión (f_n) es también en este caso la función "peine" de Dirichlet, que no es integrable en ningún intervalo.

- $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$.

  Para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es una función continua y por ello es integrable. Haciendo el cambio de variable $u = 1 - x^2$, $du = -2x\,dx$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n &= n\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx \\ &= -\frac{n}{2}\int_1^0 u^n\,du = \frac{n}{2}\int_0^1 u^n\,du \\ &= \frac{n}{2}\cdot\frac{u^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

  Por otro lado, es fácil ver que $(f_n(x))$ converge a 0 para todo $x \in [0,1]$. Es decir, el límite puntual de esta sucesión de funciones es la función idénticamente nula $f(x) = 0$, con lo que en este caso sí resulta ser integrable. Sin embargo, tenemos que

$$\lim_n \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f.$$

  Con esto se concluye que, aun en el caso en que el límite puntual de una sucesión de funciones integrables resulte ser integrable, no tiene por qué cumplirse que el límite de las integrales sea igual a la integral del límite.

- $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} n\pi x}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$.

  Como, para todo x, es $|f_n(x)| \leqslant 1/\sqrt{n}$, está claro que esta sucesión de funciones converge puntualmente a 0.

  Por otro lado, cualquiera que sea n, la función f_n es derivable. Su derivada es

$$f_n'(x) = \frac{n\pi\cos n\pi x}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\pi\cos n\pi x.$$

  Ya vimos que la sucesión $(\operatorname{sen} n\pi x)$ converge solo si $x \in \mathbb{Z}$, en cuyo caso converge a 0. Esto implica que la sucesión $(|\cos n\pi x|)$ converge solo si x es un entero y en ese caso su límite es 1. De aquí se deduce que la sucesión $(f_n'(x))$ no converge para ningún valor de x. Es decir: la convergencia puntual de una sucesión de funciones derivables no implica la convergencia puntual de sus derivadas.

2. Convergencia uniforme

2.1. Definición de convergencia uniforme

¿Qué es convergencia uniforme?

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que el concepto de convergencia puntual es sumamente defectuoso. Afortunadamente, existe un concepto relacionado, un tipo más fuerte de convergencia, que tiene un comportamiento mucho mejor. Para motivar la definición, reescribamos la definición tal como señala la Proposición 9.4.

Definición de convergencia puntual

Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$, $S \subset A$, y f una función definida en S. Decimos que (f_n) *converge puntualmente* a f en S si para cada $x \in S$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ *(dependiente, quizá, de x)* tal que siempre que $n \geqslant n_0$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Obsérvese que en la definición anterior el $n_0 \in \mathbb{N}$ aparece dependiendo, no solamente de $\varepsilon > 0$, sino también de $x \in S$. Es decir, si cogemos un x diferente, también tendremos seguramente que escoger un n_0 diferente.

¿Podría en algún caso escogerse un n_0 que dependa solo de ε y no dependa del x elegido inicialmente, sino que sirva para todos los x? A esto corresponde el concepto de *convergencia uniforme*.

Definición 9.8. Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$, $S \subset A$, y f una función definida en S. Decimos que (f_n) *converge uniformemente* a f en S, o que f es el *límite uniforme* de (f_n) en S, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n \geqslant n_0$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in S$.

Si $S = A$ diremos sencillamente que (f_n) converge uniformemente a f, o que f es el límite uniforme de (f_n). Esto se denotará a veces $f_n \rightrightarrows f$.

Relación entre convergencia puntual y uniforme

Observación. Evidentemente, si (f_n) converge uniformemente a f, entonces (f_n) converge puntualmente a f. El recíproco no es cierto, lo que quedará bien claro en ejemplos posteriores.

Convergencia uniforme de series de funciones

El concepto de convergencia uniforme de funciones se extiende fácilmente a series de funciones.

Definición 9.9. Una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se dice que converge uniformemente a una función f en un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ cuando la sucesión (s_n) de sus sumas parciales $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ converge uniformemente a f en el conjunto S.

Un criterio secuencial para la convergencia uniforme

Antes de estudiar algunos ejemplos de convergencia uniforme (y no uniforme), veamos una técnica muy sencilla que nos permite probar con facilidad que algunas sucesiones de funciones no convergen uniformemente.

Proposición 9.10. *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$, $S \subset A$, y f una función definida en S. Son equivalentes:*

(I) *(f_n) converge uniformemente a f en S.*

(II) *Para toda sucesión (x_n) en S, la sucesión $(f_n(x_n) - f(x_n))$ converge a 0.*

Demostración. Supongamos que la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en S. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *cualquiera que sea* $x \in S$. En particular, si (x_n) es una sucesión en S, se tendrá $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ si $n \geqslant n_0$. Es decir, $f(x_n) - f(x_n) \to 0$.

Recíprocamente, supongamos que (f_n) no converge uniformemente a f en S. Construiremos una sucesión (x_n) en S de forma que $f_n(x_n) - f(x_n)$ no converja a 0. Para ello, construiremos primero una subsucesión (x_{i_n}), que luego completaremos para obtener toda la sucesión (x_n).

Negando la definición de convergencia uniforme, obtenemos:

$$\text{Existe un } \varepsilon > 0 \text{ tal que para todo } n_0 \in \mathbb{N} \text{ existen un } n \geqslant n_0 \text{ y un } x \in S \text{ de forma que } |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Fijemos este $\varepsilon > 0$. Podemos refrasear la proposición (1) de la manera siguiente:

$$\text{Para todo } n \in \mathbb{N} \text{ existen un } j_n \geqslant n \text{ y un } x_{j_n} \in S \text{ de forma que } |f_{j_n}(x_{j_n}) - f(x_{j_n})| \geqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Observamos que la sucesión de índices (j_n) que aparece en (2) no tiene por qué ser creciente, por lo que los f_{j_n} no forman en principio una subsucesión de (f_n). Sin embargo, como $j_n \geqslant n$, resulta evidente que la sucesión (j_n) no está acotada superiormente, por lo que podremos extraer de ella una subsucesión (i_n) que sí que es estrictamente creciente. En consecuencia, los f_{i_n} forman una subsucesión de la sucesión de funciones (f_n).

De esta forma, hemos construido una sucesión estrictamente creciente de números naturales (i_n) y una sucesión (x_{i_n}) formada por elementos de S, tales que $|f_{i_n}(x_{i_n}) - f(x_{i_n})| \geqslant \varepsilon$. Si completamos la definición de una sucesión (x_n), fijando el valor de x_n para los índices n que no son de la forma i_n, es obvio que la sucesión $(f_n(x_n) - f(x_n))$ no converge a 0, ya que tampoco lo hace su subsucesión $(f_{i_n}(x_{i_n}) - f(x_{i_n}))$. $\square$

Ejemplos.

- $f_n(x) = x/n$, $x \in \mathbb{R}$.

  Se vio anteriormente que esta sucesión converge puntualmente a $f(x) = 0$, así que de converger uniformemente, debe hacerlo a $f(x) = 0$ también. A continuación veremos que este no es el caso. En efecto, sea $x_n = n$. Entonces $f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{n}{n} - 0 = 1$. Por tanto, $f_n(x_n) - f(x_n) \to 1 \neq 0$. Por la Proposición 9.10, esta sucesión de funciones no converge unifomemente a 0, y por tanto no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

  Sin embargo, sí que converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado. En efecto, sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sea $\varepsilon > 0$ y definamos $K = \max\{|a|, |b|\}$. Escojamos ahora un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K/n_0 < \varepsilon$. (Obsérvese que este n_0 depende de ε, *pero no* de x.) Para todo $x \in [a, b]$ y todo $n \geqslant n_0$, se tiene que $|f_n(x) - 0| = |x|/n \leqslant K/n \leqslant K/n_0 < \varepsilon$, Por tanto, (f_n) converge uniformemente a 0 en $[a, b]$.

- $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$.

  Vimos que esta sucesión de funciones convergía puntualmente a la función

  $$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

  así que este es el único posible candidato a límite uniforme de (f_n). Veamos a continuación que (f_n) tampoco converge uniformemente a f. En efecto, sea $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_n(x_n) - f(x_n) = 1/2 - 0 = 1/2$. Por tanto, $(f_n(x_n) - f(x_n))$ no converge a 0, y se concluye que (f_n) no converge uniformemente en $[0, 1]$.

  Por otro lado, si $0 < a < 1$, (f_n) sí converge uniformemente en $[0, a]$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} < \varepsilon$. (Este n_0 existe porque $\lim_n a^n = 0$, y observamos que no depende de x: solo de ε.) Si $x \in [0, a]$ y $n \geqslant n_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| = x^n \leqslant a^n \leqslant a^{n_0} < \varepsilon$.

- $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, $x \in [0, \infty)$.

  Se vio anteriormente que esta sucesión de funciones converge puntualmente a la función

  $$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Esta sucesión de funciones no converge uniformemente en $\mathbb{R}$. De hecho, no lo hace ni en $[0, 1]$, ni en $[1, \infty)$.

Para ver que no converge uniformemente en $[0, 1]$, sea $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$. Entonces

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1/2}{1 + 1/2} - 0 = \frac{1}{3},$$

así que $(f_n(x_n) - f(x_n))$ no converge a 0.

Veamos ahora que tampoco converge uniformemente en $[1, \infty)$. Para ello, definamos ahora $x_n = \sqrt[n]{2}$. Entonces

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{2}{1 + 2} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

Por tanto, en este caso $(f_n(x_n) - f(x_n))$ tampoco converge a 0.

Por otro lado, (f_n) converge uniformemente en $[0, a]$, si $0 < a < 1$. En efecto, dado un $\varepsilon > 0$, escojamos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} < \varepsilon$. Entonces, si $n \geqslant n_0$, para todo $x \in [0, a]$ obtenemos

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{1 + x^n} - 0 \right| = \frac{x^n}{1 + x^n} \leqslant x^n \leqslant a^n \leqslant a^{n_0} < \varepsilon.$$

Esta sucesión de funciones también converge uniformemente en cualquier intervalo de la forma $[a, \infty)$, donde $a > 1$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_n 1/a^n = 0$, podemos elegir un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/a^{n_0} < \varepsilon$. Si $x \in [a, \infty)$ y $n \geqslant n_0$, se cumple que

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{1 + x^n} - 1 \right| = \frac{1}{1 + x^n} < \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{a^n} \leqslant \frac{1}{a^{n_0}} < \varepsilon.$$

- $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

  Ya sabemos que esta sucesión de funciones converge puntualmente a la función $f(x) = x$. No lo hace uniformemente. Para verlo, sea $x_n = \sqrt{n}$. Entonces

  $$f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{n + n\sqrt{n}}{n} - \sqrt{n} = 1.$$

  De aquí se sigue que $f_n(x_n) - f(x_n)$ no converge a 0.

  El lector sin duda no tendrá dificultad para probar, de forma similar a como se hizo en el primer ejemplo, que sí converge uniformemente sobre cualquier intervalo cerrado y acotado.

- $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{\sqrt{n}}$.

  Esta sucesión converge uniformemente a 0 en todo $\mathbb{R}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, si $n_0 \in \mathbb{N}$ es tal que $1/\sqrt{n_0} < \varepsilon$, se tiene entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \geqslant n_0$ que

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\operatorname{sen}(n\pi x)|}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

La norma uniforme

Mostraremos ahora un método que hace todavía más sencillo el juzgar si una sucesión de funciones es uniformemente convergente o no, pues reduce este hecho a la convergencia de una sucesión de números reales.

Definición 9.11. Sea f una función definida en $A \subset \mathbb{R}$. Llamamos *norma uniforme* de f al número (posiblemente infinito)

$$\|f\|_\infty := \sup\{\, |f(x)| \mid x \in A \,\}.$$

Relación entre la convergencia uniforme y la norma uniforme

Obsérvese que la norma uniforme es un elemento de la recta ampliada: no tiene por qué ser un número real, sino que puede valer también ∞. Para el siguiente resultado, adoptaremos el siguiente convenio:

Definición 9.12. Sea (s_n) una sucesión de elementos de $\overline{\mathbb{R}}$. Diremos que (s_n) converge a $l \in \mathbb{R}$ si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que s_n es finito si $n \geqslant n_0$ y la sucesión de números reales $(s_n)_{n \geqslant n_0}$ converge a l.

Proposición 9.13. *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$, y f una función definida en A. Son equivalentes:*

(I) *(f_n) converge a f uniformemente.*

(II) *La sucesión de la recta ampliada $(\|f_n - f\|_\infty)$ converge a 0.*

Demostración. (I) $\Rightarrow$ (II). Si (f_n) converge uniformemente, dado $\varepsilon > 0$, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant n_0$ y $x \in A$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Por tanto, si $n \geqslant n_0$, tendremos que

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{\, |f_n(x) - f(x)| \mid x \in A \,\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(Obsérvese que $\|f_n - f\|_\infty$ es finito si $n \geqslant n_0$.) Por tanto $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$.

(II) $\Rightarrow$ (I). Supongamos ahora que $(\|f_n - f\|_\infty)$ converge a 0. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ y todo $x \in A$, se tendrá

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup\{\, |f_n(t) - f(t)| \mid t \in A \,\} = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Hemos concluido así que (f_n) converge uniformemente a f. $\square$

Ejemplos.

- $f_n(x) = x/n$, $x \in \mathbb{R}$.

  Sabemos que (f_n) converge puntualmente a la función $f(x) = 0$. Por tanto,

  $$\|f_n - f\|_\infty = \sup\left\{ \frac{|x|}{n} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \infty,$$

  cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la sucesión $(\|f_n - f\|_\infty)$ no converge a 0 y, en consecuencia, la convergencia de (f_n) no es uniforme.

- $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$.

  El límite puntual de esta función es, según ya se vio,

  $$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

  En consecuencia,

  $$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

  Se sigue que

  $$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{\, x^n \mid 0 \leqslant x < 1 \,\} = 1$$

  para todo $n \in \mathbb{N}$. De nuevo tenemos que la sucesión $(\|f_n - f\|_\infty)$ no converge a 0. Así, la convergencia no es uniforme.

- $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, $x \in [0, \infty)$.

  El límite puntual es en este caso la función

  $$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Por tanto,

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{1+x^n}, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ -\frac{1}{1+x^n}, & x > 1. \end{cases}$$

Deducimos de aquí que, para todo n,

$$\begin{aligned} &\|f_n - f\|_\infty \\ &\quad = \text{máx}\Big\{\sup\Big\{\frac{x^n}{1+x^n} \;\Big|\; 0 \leqslant x < 1\Big\}, \sup\Big\{\frac{1}{1+x^n} \;\Big|\; x > 1\Big\}\Big\} \\ &\quad = \text{máx}\Big\{\sup\Big\{1 - \frac{1}{1+x^n} \;\Big|\; 0 \leqslant x < 1\Big\}, \sup\Big\{\frac{1}{1+x^n} \;\Big|\; x > 1\Big\}\Big\} \\ &\quad = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así pues, la convergencia tampoco en este caso resulta uniforme.

- $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

  El límite puntual, calculado anteriormente, era la función $f(x) = x$. Tenemos que $f_n(x) - f(x) = x^2/n$, de donde $\|f_n - f\|_\infty = \infty$ para todo n. Se concluye que (f_n) no converge uniformemente.

- $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{\sqrt{n}}$.

  Esta sucesión converge puntualmente hacia $f(x) = 0$. En este caso, obtenemos
  $$\|f_n - f\|_\infty = \sup\Big\{\frac{|\operatorname{sen}(n\pi x)|}{\sqrt{n}} \;\Big|\; x \in \mathbb{R}\Big\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$
  En consecuencia (f_n) converge uniformemente a 0.

El Criterio de Cauchy Uniforme

Teorema 9.14 (Criterio de Cauchy Uniforme)**.** *Sean (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto A. Son equivalentes:*

(I) *(f_n) converge uniformemente.*

(II) *Dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geqslant n_0$ entonces $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, cualquiera que sea $x \in A$.*

(III) *Dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geqslant n_0$ entonces $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$.*

Demostración.

(I) $\Rightarrow$ (II). Supongamos que (f_n) converge uniformemente a f. Dado $\varepsilon > 0$, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ para todo $x \in A$. Por tanto, si $m, n \geqslant n_0$ y $x \in A$, será

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(II) $\Rightarrow$ (III). Dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geqslant n_0$ y $x \in A$, entonces $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$. Se sigue de aquí que

$$\|f_m - f_n\|_\infty = \sup\{\, |f_m(x) - f_n(x)| \mid x \in A \,\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(III) $\Rightarrow$ (I). Dado un $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$ si $m, n \geqslant n_0$ y $x \in A$. Se tiene entonces que para todo $x \in A$ es

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

si $m, n \geqslant n_0$. Por tanto, cualquiera que sea $x \in A$, la sucesión $(f_n(x))$ es de Cauchy y, en consecuencia, es convergente. Definamos la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \qquad \text{para todo } x \in A.$$

Haciendo $m \to \infty$ en (3), obtenemos que para todo $x \in A$ tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \text{para todo } n \geqslant n_0.$$

En conclusión, la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente a f. □

Criterio de Cauchy Uniforme para series de funciones

Del Criterio de Cauchy Uniforme podemos extraer de forma inmediata una versión para series de funciones.

Corolario 9.15 (Criterio de Cauchy Uniforme para series de funciones)**.** *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto A. Son equivalentes:*

(I) *$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente.*

(II) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant m \geqslant n_0$ entonces*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon \qquad \textit{para todo } x \in A.$$

(III) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant m \geqslant n_0$ entonces*

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} f_k\right\|_\infty < \varepsilon.$$

El Criterio "M"

El Criterio de Cauchy Uniforme 9.15 nos permite probar una condición suficiente para la convergencia uniforme de una serie de funciones, que se utiliza muy frecuentemente debido a su sencilla comprobación.

Teorema 9.16 (Criterio "M", de Weierstrass). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto A para la que se puede encontrar una serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ de términos no negativos de manera que, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, se tiene $|f_n(x)| \leqslant M_n$ para todo $x \in A$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A y absolutamente en cada punto de A.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=m}^{n} M_k < \varepsilon$ si $n \geqslant m \geqslant n_0$. Por tanto, cualquiera que sea $x \in A$, si $m \geqslant n \geqslant n_0$ se obtiene que

$$\sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{n} M_k < \varepsilon.$$

Se concluye de esta manera que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ es siempre absolutamente convergente. Además, si $x \in A$ y $m \geqslant n \geqslant n_0$,

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| < \varepsilon.$$

Se obtiene así por el Criterio de Cauchy Uniforme 9.15 que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es uniformemente convergente. □

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad x \in [-1, 1].$

  Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [-1, 1]$ se tiene que $x^n/n^2 \leqslant 1/n^2$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ es convergente, el Criterio M nos dice que esta serie de funciones converge absoluta y uniformemente en $[-1, 1]$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in [-1, 1].$

  Cualesquiera que sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [-1, 1]$, se cumple que $x^n/n! \leqslant 1/n!$. Como $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$ converge (a e), la serie de funciones que estamos estudiando converge absoluta y uniformemente en $[-1, 1]$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

  Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, tenemos $1/(n^2+x^2) \leqslant 1/n^2$. Como $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ converge, la serie de funciones estudiada converge absoluta y uniformemente en todo $\mathbb{R}$.

Una consecuencia del Criterio M

Eligiendo $M_n = \|f_n\|_\infty$ en el Criterio M 9.16, obtenemos la siguiente consecuencia inmediata:

Corolario 9.17. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones en un conjunto A. Si se cumple la condición $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_\infty < \infty$, la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente en A.*

2.2. Convergencia uniforme y continuidad

Continuidad del límite uniforme

A diferencia de lo que ocurría con la convergencia puntual, la convergencia uniforme sí se lleva bien con la continuidad.

Teorema 9.18 (de la Convergencia Uniforme, de Cauchy)**.** *Sea (f_n) una sucesión de funciones que converge uniformemente en un conjunto A a una función f definida en A. Si cada función f_n es continua en $c \in A$, entonces f también es continua en c.*

Demostración. Por hipótesis, dado un $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in A$. Por la Desigualdad Triangular, se tiene

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| + |f_{n_0}(c) - f(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Como f_{n_0} es continua en c, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ y $x \in A$ entonces $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| < \varepsilon/3$. En consecuencia, si $|x - c| < \delta$ y $x \in A$ se tiene entonces que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Esto establece la continuidad de f en c. $\square$

Obsérvese que el resultado anterior puede ser considerado como algo acerca de intercambio de límites: La conclusión del enunciado puede ser reescrita como

$$\lim_{x\to c} \lim_n f_n(x) = \lim_n \lim_{x \to c} f_n(x).$$

Es decir, ambos límites conmutan en esta situación.

El correspondiente resultado para series de funciones puede establecerse como sigue:

Corolario 9.19. *Si una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente hacia la función suma f en su dominio A y si cada término f_n es una función continua en un punto $c \in A$, entonces también f es continua en c.*

En lenguaje de intercambio de límites, la conclusión de este corolario se puede escribir como

$$\lim_{x \to c} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to c} f_n(x),$$

es decir, que el límite conmuta con la suma o, lo que es lo mismo, el límite en c de la suma se puede calcular término a término.

Un ejemplo muy notable

El Teorema 9.18 (o más bien el Corolario 9.19) nos permite construir un ejemplo verdaderamente asombroso.

Ejemplo. Existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es continua en todos los puntos, pero no es derivable en ninguno.

Para ver esto, empecemos por definir la función $\varphi(x) = |x|$ en $[-1, 1]$, y extendamos la definición de $\varphi(x)$ a todos los reales x, exigiendo que

$$\varphi(x + 2) = \varphi(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, cualesquiera que sean x e y, se tiene que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |x - y|. \tag{4}$$

En particular, φ es continua en todo $\mathbb{R}$. Definamos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x). \tag{5}$$

Como $|(3/4)^n \varphi(4^n x)| \leqslant (3/4)^n$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (3/4)^n$ es convergente, el Criterio M 9.16 nos dice que la serie de funciones (5) converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$. Por el Corolario 9.19 se sigue que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Ahora fijemos un número real x y un número natural m. Escribamos

$$\delta_m = \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m},$$

donde el signo se elige de forma que no exista ningún entero entre $4^m x$ y $4^m(x + \delta_m)$. Esto se puede hacer, ya que $4^m |\delta_m| = 1/2$. Obsérvese que, por la forma que tiene φ, esto implica que

$$|\varphi(4^m(x + \delta_m)) - \varphi(4^m x)| = \left|\varphi\left(4^m x \pm \frac{1}{2}\right) - \varphi(4^m x)\right| = \frac{1}{2}.$$

Definamos $x_m = x + \delta_m$ y sea

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n x_m) - \varphi(4^n x)}{x_m - x}.$$

Cuando $n > m$, $4^n x_m - 4^n x = 4^n \delta_m$ es un entero par, así que $\gamma_n = 0$. Cuando $0 \leqslant n \leqslant m$, la desigualdad (4) implica que

$$|\gamma_n| = \frac{|\varphi(4^n x_m) - \varphi(4^n x)|}{|x_m - x|} \leqslant \frac{|4^n x_m - 4^n x|}{|x_m - x|} = 4^n.$$

Como

$$\begin{aligned}
|\gamma_m| &= \frac{|\varphi(4^m x_m) - \varphi(4^m x)|}{|x_m - x|} \\
&= \frac{|\varphi(4^m (x + \delta_m)) - \varphi(4^m x)|}{|\delta_m|} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 4^{-m}} = 4^m,
\end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x_m) - f(x)}{x_m - x} \right| &= \left| \frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| \\
&= \frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \varphi(4^n (x + \delta_m)) - \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \varphi(4^n x) \right|}{\delta_m} \\
&= \left| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n \right| \\
&\geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^m |\gamma_m| - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n |\gamma_n| \\
&\geqslant 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = 3^m - \frac{1 - 3^m}{1 - 3} = \frac{3^m + 1}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_m \left| \frac{f(x_m) - f(x)}{x_m - x} \right| = \infty.$$

Cuando $m \to \infty$, se tiene $\delta_m \to 0$ y por tanto $x_m \to x$. Esto implica que f no es derivable en x.

¿Qué es una sucesión de funciones monótona?

Para el siguiente resultado, necesitamos un concepto más.

Definición 9.20. Sea (f_n) una sucesión de funciones en $A \subset \mathbb{R}$.

(I) Decimos que (f_n) es *creciente* si $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in A$.

(II) Decimos que (f_n) es *decreciente* si $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in A$.

(III) Si (f_n) es creciente o decreciente, decimos que es *monótona*.

El Teorema de Dini

El Teorema 9.18 tiene un teorema *casi* recíproco. Si una sucesión de funciones continuas tiene límite continuo, entonces la convergencia es uniforme, con tal de que (f_n) cumpla una condición adicional: ser monótona.

Teorema 9.21 (de Dini)**.** *Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado I. Supongamos que (f_n) converge puntualmente a una función continua f y que (f_n) es monótona. Entonces (f_n) converge a f uniformemente.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos en I la función

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|.$$

La sucesión (g_n) es decreciente y converge puntualmente a 0. Tenemos que probar que (g_n) converge uniformemente a 0 o, lo que es lo mismo, que la sucesión numérica $(\|g_n\|_\infty)$ converge a 0.

Obsérvese en primer lugar que, como (g_n) es decreciente, se tiene que

$$\begin{aligned} \|g_{n+1}\|_\infty &= \sup\{\, g_{n+1}(x) \mid x \in I \,\} \\ &\leqslant \sup\{\, g_n(x) \mid x \in I \,\} = \|g_n\|_\infty, \end{aligned}$$

con lo que resulta que la sucesión $(\|g_n\|_\infty)$ es también decreciente.

Por otra parte, como las funciones g_n son continuas, el Teorema de Acotación de Weierstrass 5.47 nos asegura la existencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, de un $x_n \in I$ tal que $\|g_n\|_\infty = g_n(x_n)$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass 4.20, la sucesión (x_n) tiene una subsucesión (x_{i_n}) que converge a cierto elemento $c \in I$.

Sea $\varepsilon > 0$. Dado que (g_n) converge puntualmente a 0, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{n_1}(c) < \varepsilon/2$. Por otra parte, g_{n_1} es continua, así que existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - c| < \delta$ entonces $|g_{n_1}(x) - g_{n_1}(c)| < \varepsilon/2$. Como (x_{i_n}) converge a c, podemos encontrar un $n_2 \geqslant n_1$ tal que $|x_{i_{n_2}} - c| < \delta$ y, por tanto, $|g_{n_1}(x_{i_{n_2}}) - g_{n_1}(c)| < \varepsilon/2$. Definamos $n_0 = i_{n_2}$, y obsérvese que $n_0 = i_{n_2} \geqslant n_2 \geqslant n_1$.

Si $n \geqslant n_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|g_n\|_\infty &\leqslant \|g_{n_0}\|_\infty = g_{n_0}(x_{n_0}) = g_{i_{n_2}}(x_{i_{n_2}}) \\ &\leqslant g_{n_1}(x_{i_{n_2}}) \leqslant |g_{n_1}(x_{i_{n_2}}) - g_{n_1}(c)| + g_{n_1}(c) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ejemplo.

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (n+7)x^2 + nx^5}, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Obviamente, las funciones f_n son todas ellas continuas. Claramente, la sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente a 0 y además es decreciente. Por el Teorema de Dini 9.21, obtenemos que (f_n) converge uniformemente a 0.

La versión del Teorema de Dini 9.21 para series de funciones es como sigue:

Corolario 9.22. *Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas y no negativas en un intervalo cerrado y acotado I. Supongamos que la suma de la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una función continua. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente.*

2.3. Convergencia uniforme e integración

El Teorema de Osgood

Teorema 9.23 (de Osgood)**.** *Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables en un intervalo $[a, b]$ que convergen uniformemente en $[a, b]$ a una función f. Entonces f es integrable en $[a, b]$ y se cumple*

$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/(2(b-a))$. Para todo $x \in [a, b]$ se tendrá $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon/(2(b-a))$, es decir,

$$f_{n_0}(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x) < f_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Como f_{n_0} es acotada, esto implica que f es acotada también. Además, como $f(x) < f_{n_0}(x) + \varepsilon/2(b-a)$, se obtiene que

$$\overline{\int_a^b} f \leqslant \int_a^b f_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2},$$

y como $f(x) > f_{n_0}(x) - \varepsilon/2(b-a)$, se deduce también que
$$\underline{\int_a^b} f \geqslant \int_a^b f_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2}.$$
Se infiere así que
$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant \left(\int_a^b f_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_a^b f_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$
Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ y en consecuencia f es integrable.

Finalmente, utilizando la Desigualdad de Minkowski 7.35, se obtiene que si $n \geqslant n_0$ entonces
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| &= \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f_n - f| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_\infty (b-a) \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$
Por tanto, $\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f$. □

Entendido como un teorema sobre intercambio de límites, lo que este teorema concluye es que
$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_n f_n.$$
Es decir, en esta situación el límite conmuta con la integral.

La versión del Teorema de Osgood 9.23 para series de funciones reza como sigue:

Corolario 9.24. *Sea $\sum_{n=1}^\infty f_n$ una serie de funciones integrables que converge uniformemente hacia la función suma f en un intervalo $[a,b]$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n$ converge y*
$$\sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

En términos de intercambio de límites, lo que se tiene es que
$$\sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=1}^\infty f_n,$$
o sea: la suma conmuta con la integral.

2.4. Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme "falla" con las derivadas…

Nuestro deseo más inmediato sería que se pudiera obtener para la convergencia uniforme y las derivadas algún teorema en la línea de los anteriores para la continuidad y para las integrales, es decir algo así como

> Si (f_n) es una sucesión de funciones derivables que converge uniformemente a una función f, entonces f es derivable y la sucesión de funciones (f_n') converge también (¿quizá, incluso, uniformemente?) a la función f'.

Lamentablemente, este programa, que de forma tan optimista nos hemos propuesto, falla estrepitosamente, como se ve en los ejemplos que siguen.

Ejemplos.

- $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in [-1, 1]$.

  Todas las f_n son funciones derivables. Sin embargo la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente a la función $f(x) = |x|$, que no es derivable en 0. En efecto, para todo $x \in [-1, 1]$, se cumple

  $$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leqslant \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

  Por tanto,

  $$0 \leqslant \|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

- $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen} n\pi x$, $x \in \mathbb{R}$.

  Según ya vimos esta sucesión de funciones converge uniformemente a 0, pero la sucesión de derivadas $f_n'(x) = \sqrt{n}\pi \cos n\pi x$ no converge en ningún punto.

- $f_n(x) = x^n/n$, $x \in [0, 1]$.

  Como $\|f_n\|_\infty = 1/n \to 0$, esta sucesión de funciones converge uniformemente a 0. En este caso, la sucesión de derivadas $f_n'(x) = x^{n-1}$ sí converge, pero lo hace a la función

  $$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

  Como esta última función no es continua, pero las f_n' sí lo son, se concluye que la sucesión (f_n') no converge uniformemente.

. . . pero no falla del todo

Como acabamos de ver, la relación de la convergencia uniforme con las derivadas dista de ser perfecta. De la convergencia uniforme de (f_n) no se puede obtener la convergencia de (f_n'). Sin embargo, sí vamos a poder obtener un teorema en el sentido contrario, es decir, en el que surge la convergencia de (f_n) a partir de la convergencia uniforme de (f_n'). Aunque no encontremos este resultado tan satisfactorio como el que pretendíamos hallar al principio, es suficiente en la mayoría de los caso prácticos.

Teorema 9.25 (de Weierstrass)**.** *Sea (f_n) una sucesión de funciones derivables definidas en un intervalo $[a, b]$. Supongamos que:*

(I) *Existe un $c \in [a, b]$ tal que la sucesión $(f_n(c))$ converge.*

(II) *La sucesión de derivadas (f_n') converge uniformemente en $[a, b]$ a una función g.*

Entonces la sucesión (f_n) converge uniformemente en $[a, b]$ a una función f derivable en $[a, b]$, y además $f' = g$.

Demostración. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, apliquemos el Teorema del Valor Medio 6.13 a la diferencia $f_m - f_n$. Para todo $x \in [a, b]$ existirá un c_x entre c y x tal que

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + (x - c)(f_m'(c_x) - f_n'(c_x)).$$

De aquí se obtiene que

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leqslant |f_m(c) - f_n(c)| + (b - a)\|f_m' - f_n'\|_\infty.$$

Como la sucesión $(f_n(c))$ es de Cauchy y la sucesión de funciones (f_n') verifica el Criterio de Cauchy Uniforme 9.14, se sigue de aquí que la sucesión de funciones (f_n) también verifica este mismo resultado y, por tanto, (f_n) converge uniformemente. Sea f el límite de (f_n). Como todas las f_n son continuas y la convergencia es uniforme, deducimos que f es continua.

Sea ahora $d \in [a, b]$ y probemos la derivabilidad de f en d. Para ello, volvamos a aplicar el Teorema del Valor Medio 6.13 a $f_m - f_n$. Para cada $x \in [a, b]$ existe un d_x entre x y d tal que

$$(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(d) - f_n(d)) = (x - d)(f_m'(d_x) - f_n'(d_x)).$$

Por tanto, si $x \neq d$, se tiene

$$\left|\frac{f_m(x) - f_m(d)}{x - d} - \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d}\right| = |f_m'(d_x) - f_n'(d_x)| \leqslant \|f_m' - f_n'\|_\infty.$$

Como (f_n') converge uniformemente, dado $\varepsilon > 0$ existirá un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $m, n \geqslant n_1$ y $x \neq d$, entonces $\|f_m' - f_n'\|_\infty < \varepsilon/3$ y, por tanto,

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(d)}{x - d} - \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si se toma ahora el límite con respecto a m, se obtiene

$$\left| \frac{f(x) - f(d)}{x - d} - \frac{f_n(x) - f_n(d)}{x - d} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

siempre que $x \neq d$ y $n \geqslant n_1$. Por otra parte, como $g = \text{lím}_n f_n'$, existe un $n_0 \geqslant n_1$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $|f_n'(d) - g(d)| < \varepsilon/3$. Como f_{n_0} es derivable, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - d| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(d)}{x - d} - f_{n_0}'(d) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto, si $0 < |x - d| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x) - f(d)}{x - d} - g(d) \right| &\leqslant \left| \frac{f(x) - f(d)}{x - d} - \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(d)}{x - d} \right| \\
&\quad + \left| \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(d)}{x - d} - f_{n_0}'(d) \right| \\
&\quad + |f_{n_0}'(d) - g(d)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $f'(d) = g(d)$. Como d es arbitrario, se obtiene que $f' = g$. $\square$

La conclusión del Teorema 9.25 se puede escribir como

$$(\text{lím}_n f_n)' = \text{lím}_n f_n'.$$

Ejemplo. $f_n(x) = (-1)^n$.

La sucesión de funciones (f_n') converge uniformemente, pues todos sus términos son la función idénticamente nula. Sin embargo, la sucesión de funciones (f_n) no converge, ni siquiera puntualmente. Esto pone de manifiesto que la suposición (I) no es superflua en el Teorema 9.25.

¿Y para series?

Aquí está la versión del Teorema 9.25 para series de funciones:

Corolario 9.26. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones derivables definidas en un intervalo $[a, b]$. Supongamos que:*

(I) *Existe un $c \in [a, b]$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ converge.*

(II) *La serie de las derivadas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente en $[a, b]$ a una función g.*

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $[a, b]$ a una función f derivable en $[a, b]$, y además $f' = g$.

Escrita de otra forma, la conclusión de este corolario afirma que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

3. Teoremas de aproximación global

3.1. Aproximación por funciones escalonadas

Ya hemos visto anteriormente que una función, que cumpla ciertas condiciones, puede ser aproximada por su polinomio de Taylor. Pero esta aproximación es solo local. Es decir, el polinomio permanece cerca de la función original mientras no nos alejemos mucho del centro del polinomio, pero cuando nos alejamos ambas funciones pueden diferir bastante.

Lo que nos proponemos ahora es dar teoremas de aproximación *global*. Dicho de otra forma, pretendemos aproximar una función continua arbitraria por otra con ciertas propiedades agradables, de forma que las dos funciones estén muy cerca la una de la otra en *todo* el intervalo de definición de la función original.

¿Qué es una función escalonada?

Las primeras funciones que utilizaremos para realizar una aproximación son las llamadas funciones escalonadas. Estas son de una notable simplicidad, lo que hace que sean muy manejables, por ejemplo, a la hora de calcular integrales.

Definición 9.27. Una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una *función escalonada* si existe una partición

$$P = \{\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \,\}$$

tal que f es constante en el intervalo (x_{k-1}, x_k) para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

Una función escalonada

Ejemplo. La función $f\colon [2,4] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leqslant x < -1, \\ 1, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1/2, & 0 < x < 1/2, \\ 3, & 1/2 \leqslant x < 1, \\ -2, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2, & 3 < x \leqslant 4 \end{cases}$$

es escalonada.

Aproximación por funciones escalonadas

Teorema 9.28. *Sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una función escalonada $g\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Como, por el Teorema de Heine, f es uniformemente continua, se deduce que existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in I$ y $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Supongamos que $I = [a, b]$ y elijamos un número natural n tal que $(b - a)/n < \delta$. Consideremos la partición

$$P = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b \,\}$$

que divide I en n intervalos iguales. Debido a que cada intervalo de la partición tiene longitud $(b - a)/n < \delta$, la diferencia entre dos valores cualesquiera de f en $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, es menor que ε. Definamos en I la función escalonada

$$g(x) = \begin{cases} f(a), & \text{si } x = x_0 = a, \\ f(x_k), & \text{si } x \in (x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Si $x \in (x_{k-1}, x_k]$, se tiene

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Si $x = a$, también se tiene

$$|f(x) - g(x)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon. \qquad \square$$

Corolario 9.29. *Sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua. Existe una sucesión de funciones escalonadas en I que converge uniformemente a f.*

Demostración. Por el Teorema 9.28, para cada número natural n existe una función escalonada f_n definida en I tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}, \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Esto claramente implica que $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 1/n$. En consecuencia, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, es decir, (f_n) converge uniformemente a f. □

3.2. Aproximación por funciones poligonales

¿Qué es una función poligonal?

Las funciones escalonadas son bastante simples, pero con ellas aproximamos nuestra función continua original por otra que tiene algunos puntos de discontinuidad. Existen otras funciones bastante sencillas también, pero que sí son continuas.

Definición 9.30. Se dice que una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es *poligonal* si existe una partición

$$P = \{\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \,\}$$

tal que la restricción de f a $[x_{k-1}, x_k]$ es una función afín para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo. La función $f\colon [2,4] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ (1-x)/2, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ (10x+1)/2, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 8 - 10x, & 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x - 4, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2, & 3 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

es poligonal.

Aproximación por funciones poligonales

También con estas funciones obtenemos un buen teorema de aproximación global.

Teorema 9.31. *Sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una función poligonal $g\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Supongamos que $I = [a, b]$. Como, por el Teorema de Heine, f es uniformemente continua en I, existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in I$ y $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Escojamos un $n \in \mathbb{R}$ tal que $(b - a)/n < \delta$. Consideremos la partición

$$P = \{ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \}$$

que divide I en n intervalos iguales. Si $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$, será $|x-y| \leqslant (b-a)/n < \delta$ y por tanto $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Definamos en I la función poligonal

$$g(x) = \begin{cases} f(a), & \text{si } x = x_0 = a, \\ f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x - x_{k-1}), & \text{si } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ g es una función afín en $[x_{k-1}, f(x_k)]$. Además, se tiene $g(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ y $g(x_k) = f(x_k)$. Por tanto, para todo $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $g(x)$ está entre $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$. En consecuencia, si $x, y \in [x_{k-1}.x_k]$, se tendrá

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \text{máx}\{|f(x) - f(x_{k-1}|, |f(x) - f(x_k)|\} < \varepsilon.$$

Si $x = a$, está claro que $|f(x) - g(x)| = 0 < \varepsilon$. □

De forma análoga al Corolario 9.29, se obtiene la consecuencia siguiente:

Corolario 9.32. *Sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $f: I \to \mathbb{R}$ continua. Existe una sucesión de funciones poligonales en I que converge uniformemente a f.*

3.3. Aproximación por polinomios

El Teorema de Aproximación de Weierstrass

A veces resulta importante poder aproximar una función a través de otra que sea derivable, o incluso infinitas veces derivable, en todos los puntos. Entre este tipo de funciones, las más sencillas sin duda son las funciones polinómicas.

Teorema 9.33 (de Aproximación, de Weierstrass)**.** *Sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $f: I \to \mathbb{R}$ continua. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una función polinómica $g: I \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Admitiremos, sin pérdida de generalidad, que $I = [0, 1]$. También podemos suponer que $f(0) = f(1) = 0$, ya que si se demuestra el teorema en este caso, en el caso general en que $I = [a, b]$ podremos considerar

$$F(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0)), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Aquí $F(0) = F(1) = 0$, y si el resultado es cierto para F, es decir, existe una función polinómica G tal que $|F(x) - G(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in I$, definiendo

$$g(x) = G(x) + f(0) + x(f(1) - f(0)), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

g será también una función polinómica y además $|f(x)-g(x)| = |F(x)-G(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in I$.

Supondremos también que f vale 0 fuera de $[0, 1]$, con lo que f será uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existirá δ, $0 < \delta < 1$, tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Sea $M = \|f\|_\infty$ y escojamos un natural n tal que $8M\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n < \varepsilon$. Definamos $\varphi(x) = c(1 - x^2)^n$, donde $c = 1/\int_{-1}^{1}(1 - x^2)^n\, dx$ y, por tanto,

$$\int_{-1}^{1} \varphi = 1.$$

Vamos a realizar una estimación de lo que vale c. Utilizando la Desigualdad de Bernouilli,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)^n\, dx &= 2\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx \\ &\geqslant 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n\, dx \\ &\geqslant 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2)\, dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

así que deducimos que $c < \sqrt{n}$.

Esto último y la definición de φ implica que

$$\varphi(x) \leqslant \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n \qquad \text{si } \delta \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Definamos ahora

$$g(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t)\varphi(t)\, dt, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Por nuestras hipótesis sobre f, teniendo en cuenta que $f(x + t)$ vale 0 cuando t está en $[-1, -x]$ o en $[1 - x, 1]$ y realizando un cambio de variable, obtenemos

$$g(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x + t)\varphi(t)\, dt = \int_0^1 f(u)\varphi(u - x)\, du,$$

y la última integral es un polinomio en x. Por otra parte, para todo $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
|g(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} (f(x+t) - f(x))\varphi(t)\, dt \right| \\
&\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\varphi(t)\, dt \\
&\leqslant 2M \int_{-1}^{-\delta} \varphi(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)\, dt + 2M \int_{\delta}^{1} \varphi(t)\, dt \\
&\leqslant 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Corolario 9.34. *Sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua. Existe una sucesión de funciones polinómicas en I que converge uniformemente a f.*

4. Convergencia de las series de potencias

¿Qué es una serie de potencias?

Definición 9.35.

(I) Recibe el nombre de *serie de potencias* toda serie de funciones de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

(II) El número real a_n se denomina *coeficiente n-ésimo* de la serie de potencias.

(III) El número c se llama *centro* de la serie de potencias.

Si los coeficientes a_0, a_1, $\dots$, a_{m-1} son nulos, la serie suele escribirse $\sum_{n=m}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

En cierto modo, se trata de una especie de polinomio con infinitos términos. Veremos, de hecho, que las funciones definidas como suma de una serie de potencias comparten muchas propiedades con los polinomios.

¿Para qué valores de x converge una serie de potencias? Obviamente, es segura la convergencia para $x = c$, con suma a_0, y puede suceder que este sea el único punto en el que la seria converja. Fuera de este caso extremo, la situación es bastante satisfactoria, por lo sencilla. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos.

- (Serie geométrica) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

  Como ya sabemos esta serie de potencias converge (absolutamente) si, y solo si, $x \in (-1, 1)$, con suma $1/(1-x)$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

  El Criterio del Cociente 8.25 dice que la serie converge absolutamente si $|x| < 1$ y no converge si $|x| > 1$. En efecto,

$$\lim_n \frac{|x^{n+1}/(n+1)|}{|x^n/n|} = |x| \lim_n \frac{n}{n+1} = |x|.$$

  Si $x = -1$, la serie es la armónica alternada, que sabemos que converge (aunque no absolutamente). Si $x = 1$ la serie es la armónica, que diverge. Así pues, el campo de convergencia de esta serie de potencias es el intervalo $[-1, 1)$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

  De nuevo el Criterio del Cociente 8.25 nos dice que la serie converge absolutamente si $|x| < 1$ y no converge si $|x| > 1$. Las cuentas son:

$$\lim_n \frac{|x^{n+1}/(n+1)^2|}{|x^n/n^2|} = |x| \lim_n \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2 = |x|.$$

  En este caso, tanto si $x = 1$ como si $x = -1$, la serie converge, así que el campo de convergencia es el intervalo $[-1, 1]$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$.

  Utilizamos otra vez el Criterio del Cociente 8.25. Obtenemos

$$\lim_n \frac{|(-1)^{n+1} x^{2n+2}/(n+1)|}{|(-1)^n x^{2n}/n|} = x^2 \lim_n \frac{n}{n+1} = x^2.$$

  Así pues, la serie converge absolutamente cuando $x^2 < 1$ (es decir, $|x| < 1$) y no converge cuando $x^2 > 1$ (o sea, cuando $|x| > 1$). Si $x = -1$, la serie converge (condicionalmente), pues es la armónica alternada. Si $x = 1$, es la serie armónica, así que diverge. El campo de convergencia es, pues, el intervalo $[-1, 1)$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

  Usamos una vez más el Criterio del Cociente 8.25.

$$\lim_n \frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

  Por tanto, esta serie converge absolutamente para cualquier $x \in \mathbb{R}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

  Criterio del Cociente 8.25, otra vez. Si $x \neq 0$,

  $$\lim_n \frac{|(n+1)!x^{n+1}|}{|n!x^n|} = |x| \lim_n (n+1) = \infty > 1.$$

  Por tanto, esta serie de potencias converge solo para $x = 0$.

Radio e intervalo de convergencia

En todos los ejemplos anteriores, el campo de convergencia siempre ha sido un intervalo centrado en el centro de la serie de potencias (unas veces abierto, otras cerrado, otras semiabierto). Vamos a ver a continuación que ese es siempre el caso.

Definición 9.36. Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, su *radio de convergencia* es el número (posiblemente infinito) $R = 1/\rho$, donde

$$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|},$$

donde se aceptarán los convenios $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$.

Si $R > 0$, el intervalo $(c - R, c + R)$ se llama *intervalo de convergencia* de la serie de potencias.

Recordemos que cuando existe $\lim_n |a_{n+1}|/|a_n|$ tiene que coincidir con $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$. Esto tiene como consecuencia un método alternativo para calcular el radio de convergencia.

Proposición 9.37. *Supongamos que existe*

$$\rho = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *es* $R = 1/\rho$*, con los convenios* $1/0 = \infty$ *y* $1/\infty = 0$.

No hay que confundir el intervalo de convergencia de la serie de potencias con su campo de convergencia. Como veremos a continuación, el campo de convergencia de una serie de potencias es siempre un intervalo con extremos $c - R$ y $c + R$, pero no necesariamente abierto. El intervalo de convergencia, en cambio, es siempre un intervalo abierto.

Comportamiento de la serie de potencias en el intervalo de convergencia

Teorema 9.38 (de Cauchy-Hadamard)**.** *Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, con radio de convergencia R, se tiene:*

(I) *Si $|x-c| < R$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ converge absolutamente.*

(II) *Si $|x-c| > R$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ no converge.*

(III) *Si $0 < r < R$, la serie converge uniformemente en $[c-r, c+r]$.*

Demostración. (I) y (II). Apliquemos el Criterio de la Raíz a nuestra serie de potencias. Obtenemos

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} = |x-c| \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = |x-c|\rho = \frac{|x-c|}{R}.$$

Por tanto, la serie converge absolutamente si $|x-c| < R$ y no converge si $|x-c| > R$.

(III). Sea $M_n = |a_n|r^n$. Obviamente, si $x \in [c-r, c+r]$, se tiene

$$|a_n(x-c)^n| \leqslant |a_n|r^n) = M_n.$$

Por otra parte, si hacemos $x = c+r$, se tiene que $|x-c| = r < R$ y, por (I), la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-c)^n|$$

converge. El Criterio M de Weierstrass concluye ahora que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ converge uniformemente en $[c-r, c+r]$. □

Obsérvese que en el Teorema de Cauchy-Hadamard 9.38 nada se dice de lo que ocurre en los puntos $c-R$ y $c+R$. En estos puntos se pueden dar todo tipo de situaciones, como ya hemos visto.

Ejemplos.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$

  Tenemos que $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que

  $$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

  de donde el radio de convergencia es $R = 1/1 = 1$. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$ (que en este caso coincide con el campo de convergencia).

También se podía haber realizado el cómputo de ρ de la forma siguiente:

$$\rho = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{1} = 1.$$

Este mismo ejemplo nos sirve para ilustrar otra cuestión acerca del Teorema de Cauchy-Hadamard 9.38. Ya hemos visto anteriormente que

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

mientras que las sumas parciales son de la forma

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Por definición de f, está claro que (s_n) converge puntualmente a f en $(-1, 1)$. Por otro lado,

$$|f(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{k=1}^{n} x^k\right| = \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}.$$

Como $\lim_{x\to 1^-} |x|^{n+1}/(1-x) = \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un $x_n \in (-1, 1)$ tal que

$$|f(x_n) - s_n(x_n)| = \frac{|x_n|^{n+1}}{1-x_n} > 1.$$

Por el Criterio Secuencial de Convergencia Uniforme 9.10, esto implica que la serie de potencias que estamos estudiando no converge uniformemente en $(-1, 1)$.

Es decir, aunque el Teorema de Cauchy-Hadamard 9.38 asegura la convergencia uniforme en un trozo $[c-r, c+r]$ arbitrariamente grande del intervalo de convergencia $(c-R, c+R)$, no necesariamente se tiene este mismo tipo de convergencia en todo el intervalo.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

  En este caso $a_n = 1/n$. Tenemos así que

$$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

y también en este caso se tiene $R = 1/1 = 1$. El intervalo de convergencia vuelve a ser $(-1, 1)$. Sin embargo, el campo de convergencia es en este caso el intervalo $[-1, 1)$, que no coincide con el intervalo de convergencia.

Un cálculo alternativo sería

$$\rho = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

  Ahora, $a_n = 1/n^2$. Tenemos

  $$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1.$$

  Así pues, el radio de convergencia es $R = 1$, con lo que el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$, aunque el campo de convergencia es $[-1, 1]$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$.

  Fijémonos en que

  $$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ impar o } 0, \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n/2}, & n \text{ par distinto de } 0. \end{cases}$$

  Por tanto,

  $$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, & n \text{ impar o } 0, \\ \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}, & n \text{ par distinto de } 0. \end{cases}$$

  Esta sucesión tiene solo dos límites subsecuenciales, que son 0 y 1. Se sigue que

  $$\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

  de aquí que el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia vuelve a ser $(-1, 1)$. El campo de convergencia es $[-1, 1]$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

  Aquí, $a_n = 1/n!$. Tenemos que

  $$\rho = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0.$$

  Se ve así que el radio de convergencia es $R = 1/0 = \infty$, de donde el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

  Se tiene ahora

  $$\rho = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_n (n+1) = \infty,$$

  así que $R = 1/\infty = 0$. El intervalo de convergencia es $(0,0) = \varnothing$. El campo de convergencia es $\{0\}$.

5. Funciones desarrollables en serie de potencias

Representación en serie de potencias

Tienen muchísima importancia las funciones que se pueden definir como una serie de potencias.

Definición 9.39. Sea I un intervalo y supongamos que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ converge en I. Definamos una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Decimos entonces que la serie de potencias *representa a la función* f en el intervalo I y que es el *desarrollo en serie de potencias* centrado en c de la función f. En estas condiciones, se dice también que f es *desarrollable en serie de potencias en* I.

Derivada de una función desarrollable en serie de potencias

A continuación, veremos que una serie desarrollable en serie de potencias es siempre derivable, y además su derivada es también desarrollable en serie de potencias, ya que se obtiene derivando la serie original término a término. Antes un resultado técnico.

Lema 9.40. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R. Entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ tiene también radio de convergencia R.*

Demostración. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ converge donde lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^n$, que es la misma serie multiplicada por $x-c$. Por tanto estas dos series tienen el mismo radio de convergencia.

Como

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \rho = \frac{1}{R},$$

se tiene que el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^n$ es $1/\rho'$, donde

$$\rho' = \limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}.$$

Esto nos indica que el radio de convergencia de esta serie de potencias es también R. □

Teorema 9.41. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, para $x \in (c-R, c+R)$. Entonces la función f es derivable, y para cada $x \in (c-R, c+R)$ se tiene*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n(x) = a_n(x-c)^n$. Sea $d \in (c-R, c+R)$ y elijamos r, $0 < r < R$ tal que $d \in (c-r, c+r)$. La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ tiene también radio de convergencia R por el Lema 9.40. En consecuencia, por el Teorema de Cauchy-Hadamard 9.38, la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ converge uniformemente en $[c-r, c+r]$. Además, es evidente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ converge. Se sigue de aquí que la función $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ es derivable en $(c-R, c+r)$ y se puede derivar término a término. Por tanto,

$$f'(d) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(d) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(d-c)^{n-1}.$$ □

Derivadas n-ésimas

El Teorema 9.41 tiene la siguiente importante consecuencia:

Corolario 9.42. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ si $x \in (c-R, c+R)$. Entonces, f tiene derivadas de todos los órdenes en $(c-R, c+R)$ y*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k}.$$

En consecuencia, $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Ejemplos.

- $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

  Partimos de un desarrollo en serie de potencias que ya conocemos, a saber,

  $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

  La función $1/(1-x)^2$ es la derivada de $1/(1-x)$, así que por el Teorema 9.41, la serie de potencias de $1/(1-x)^2$ se obtiene derivando término a término la de $1/(1-x)$ y además tiene el mismo radio de convergencia. Por tanto, en efecto, se tiene

  $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

- $$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

  La derivada k-ésima de la función $1/(1-x)$ es $k!/(1-x)^{n+1}$. Empleando el Corolario 9.42, obtenemos la fórmula anunciada.

Serie de Taylor

La obvia relación que tiene la última fórmula del Corolario 9.42 con el polinomio de Taylor sugiere la siguiente definición:

Definición 9.43. Sea f una función con infinitas derivadas en el punto c. Llamamos *serie de Taylor* de f centrada en c a la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Como clara consecuencia del Teorema 9.41, se tiene la unicidad del desarrollo en serie de potencias de una función.

Corolario 9.44. *Si una función f es desarrollable en serie de potencias en el punto c, el desarrollo de f en serie de potencias centrado en c es único, y es su serie de Taylor centrada en c.*

Primitiva de una función desarrollable en serie de potencias

Se sigue con facilidad del Teorema 9.41 que el mismo camino propuesto por él se puede recorrer también en el sentido contrario.

Teorema 9.45. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$ *y sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *para* $x \in (c-R, c+R)$. *Entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$ *tiene radio de convergencia* R, *y si* F *es una primitiva de* f *en* $(c-R, c+R)$, *para cada* $x \in (c-R, c+R)$ *se verifica* $F(x) = F(c) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$.

Demostración. Como la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ es la derivada término a término de la $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$, el Lema 9.40 nos dice que ambas series de potencias tienen el mismo radio de convergencia. Definamos

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}, \qquad x \in (c-R, c+R).$$

Por el Teorema 9.41, se tiene que $G'(x) = f(x)$ en $(c-R, c+R)$, es decir, G es una primitiva de f en $(c-R, c+R)$ y, por tanto, existe una constante K tal que $F(x)-G(x) = K$ para todo $x \in (c-R, c+R)$. En particular, $K = F(c)-G(c) = F(c)$. Se sigue que $F(x) = F(c) + G(x)$. □

Algunas series de potencias obtenidas mediante primitivas

Ejemplos.

- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

  Como
  $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
  siempre que $x \in (-1,1)$, tenemos también que
  $$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \tag{6}$$
  siempre que $-x \in (-1,1)$, o sea, cuando $x \in (-1,1)$.

  La función $\log(1+x)$ es una primitiva de la función $1/(1+x)$. Según el Teorema 9.45, podemos integrar la serie anterior término a término, y obtenemos

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \log 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

- $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

  Utilizando de nuevo la ecuación 6, obtenemos que

  $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

  siempre que $x^2 \in (-1,1)$, o sea, cuando $x \in (-1,1)$.

  Como la arco tangente es una primitiva de la función $1/(1+x^2)$, integramos término a término, y obtenemos

  $$\arctan x = \arctan 0 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

  siempre que $x \in (-1,1)$.

¿Infinitamente derivable implica desarrollable?

Está claro que toda función con derivadas de todos los órdenes en un punto c tiene una serie de Taylor centrada en ese punto. Puede dar la impresión que dicha función tiene que ser desarrollable en serie de potencias o, lo que es igual, debe ser igual a su serie de Taylor. Esto no es cierto en general, como se desprende del ejemplo que vemos a continuación.

Ejemplo.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Como ya se vio, esta función tiene derivadas de todos los órdenes. Tiene también la particularidad de que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que su serie de Taylor tiene todos los coeficientes nulos y, por tanto, es ella misma nula. Eso quiere decir que

$$f(x) \neq 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

para todo $x \neq 0$. Por tanto, esta función no es desarrollable en serie de Taylor.

Referencias

[1] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una variable*, Limusa, México, 1990.

[2] K. A. Ross, *Elementary analysis: The theory of calculus*, Springer, Berlín, 1980.

[3] T. M. Apostol, *Análisis Matemático* (2a. ed.). Reverté, Barcelona, 1991.

[4] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer-Verlag, Berlín, 2003.