# 3. Números complejos

Análisis de Variable Real

2018–2019

**Resumen**

Introducimos en este tema los números complejos, que son una ampliación de los números reales, obtenida mediante el añadido de las raíces de números negativos. Estudiamos sus propiedades algebraicas elementales. Desembocamos después en la exponencial compleja, que nos permite considerar la forma polar de los números complejos, muy conveniente a la hora de realizar determinados cálculos, como son las potencias y raíces de número complejos. Finalmente, vemos algunas funciones trascendentes, que en los números complejos están muy relacionadas con la exponencial.

# Índice

# 1. El cuerpo de los complejos

## 1.1. Definición de los números complejos

**Números complejos**

De los axiomas que rigen el comportamiento de los números reales se deduce que el cuadrado de un número nunca es negativo. Esto hace que ecuaciones cuadráticas elementales, tales como, por ejemplo, $x^2 = -1$ no posean solución entre los números reales. Se puede introducir una nueva clase de números, los *números complejos*, con el fin de conseguir soluciones de tales ecuaciones. La introducción de tales números proporciona, de hecho, soluciones de las ecuaciones algebraicas generales de la forma

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales cualesquiera. (Este resultado se conoce como *Teorema Fundamental del Álgebra*.)

**Definición 3.1.**

(I) Por *número complejo* entendemos un par ordenado de números reales, que designaremos por $z = (z_1, z_2)$.

(II) La primera componente, $z_1$, se llama *parte real* del número complejo $z$, y se denota $\operatorname{Re} z$.

(III) La segunda componente, $z_2$, se llama *parte imaginaria* de $z$, y se denota $\operatorname{Im} z$.

(IV) El conjunto de los números complejos se denota como $\mathbb{C}$.

Obsérvese que, si $z = (z_1, z_2)$ e $w = (w_1, w_2)$, entonces $z = w$ si y solo si $z_1 = w_1$ y $z_2 = w_2$.

**Operaciones en los complejos**

**Definición 3.2.** Dados dos números complejos $z = (z_1, z_2)$ e $w = (w_1, w_2)$, se definen:

(I) su *suma* como $z + w = (z_1 + w_1, z_2 + w_2)$;

(II) su *producto* como $zw = (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + z_2 w_1)$.

*Ejemplos.* Si $z = (1, 1)$, $w = (1, -3)$, entonces

- $z + w = (1 + 1, 1 - 3) = (2, -2)$,
- $zw = (1 \cdot 1 - 1 \cdot (-3), 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1) = (4, -2)$.

## 1.2. Propiedades algebraicas básicas

**Propiedades algebraicas de los complejos**

La suma y el producto le dan a $\mathbb{R}$ una estructura de *cuerpo conmutativo*. Esto quiere decir que se verifican las siguientes propiedades:

**Proposición 3.3** (Propiedades de la suma)**.**

(I) *Propiedad asociativa de la suma:* $(z+w)+t = z+(w+t)$.

(II) *Propiedad conmutativa de la suma:* $z+w = w+z$.

(III) *Elemento neutro (o nulo) de la suma: hay un número complejo,* $0_{\mathbb{C}} = (0,0)$*, tal que* $z + 0_{\mathbb{C}} = z$*, cualquiera que sea* $z$.

(IV) *Elemento opuesto para la suma: para cada número complejo* $z = (z_1, z_2)$*, hay otro número complejo,* $-z = (-z_1, -z_2)$*, tal que* $z + (-z) = 0_{\mathbb{C}}$.

*Demostración.* Supondremos siempre que $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$, $t = (t_1, t_2)$.

(I) Esta propiedad se hereda inmediatamente de la equivalente en los números reales. En efecto,

$$\begin{aligned}(z+w)+t &= \big((z_1,z_2)+(w_1,w_2)\big)+(t_1,t_2)\\ &= \big((z_1+w_1)+t_1,(z_2+w_2)+t_2\big)\\ &= \big(z_1+(w_1+t_1),z_2+(w_2+t_2)\big)\\ &= (z_1,z_2)+\big((w_1,w_2)+(t_1,t_2)\big) = z+(w+t).\end{aligned}$$

(II) También esta propiedad es heredada, ya que

$$\begin{aligned}z+w &= (z_1,z_2)+(w_1,w_2)\\ &= (z_1+w_1,z_2+w_2) = (w_1+z_1,w_2+z_2)\\ &= (w_1,w_2)+(z_1,z_2) = w+z.\end{aligned}$$

(III) Claramente,

$$z+0_{\mathbb{C}} = (z_1,z_2)+(0,0) = (z_1+0,z_2+0) = (z_1,z_2) = z.$$

(IV) Por último,

$$\begin{aligned}z+(-z) &= (z_1,z_2)+(-z_1,-z_2)\\ &= \big(z_1+(-z_1),z_2+(-z_2)\big) = (0,0) = 0_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

□

**Proposición 3.4** (Propiedades del producto)**.**

(V) *Propiedad asociativa del producto:* $(zw)t = z(wt)$*.*

(VI) *Propiedad conmutativa del producto:* $zw = wz$*.*

(VII) *Elemento neutro (o identidad) para el producto: hay un número complejo,* $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$*, tal que* $z \cdot 1_{\mathbb{C}} = z$*, cualquiera que sea* $z$*.*

(VIII) *Elemento inverso para el producto: si* $z = (z_1, z_2) \neq 0_{\mathbb{C}}$*, hay un número complejo,* $z^{-1} = \left(\frac{z_1}{z_1^2+z_2^2}, \frac{-z_2}{z_1^2+z_2^2}\right)$*, tal que* $zz^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$*.*

*Demostración.*

(V) Por la definición del producto,

$$\begin{aligned}
(zw)t &= \big((z_1, z_2)(w_1, w_2)\big)(t_1, t_2) \\
&= (z_1w_1 - z_2w_2, z_1w_2 + z_2w_1)(t_1, t_2) \\
&= \big((z_1w_1 - z_2w_2)t_1 - (z_1w_2 + z_2w_1)t_2, \\
&\qquad (z_1w_1 - z_2w_2)t_2 + (z_1w_2 + z_2w_1)t_1\big) \\
&= \big(z_1(w_1t_1 - w_2t_2) - z_2(w_1t_2 + w_2t_1), \\
&\qquad z_2(w_1t_1 - w_2t_2) + z_1(w_1t_2 + w_2t_1)\big) \\
&= (z_1, z_2)(w_1t_1 - w_2t_2, w_1t_2 + w_2t_1) \\
&= (z_1, z_2)\big((w_1, w_2)(t_1, t_2)\big) = z(wt)
\end{aligned}$$

(VI) Se tiene

$$\begin{aligned}
zw &= (z_1, z_2)(w_1, w_2) = (z_1w_1 - z_2w_2, z_1w_2 + z_2w_1) \\
&= (w_1z_1 - w_2z_2, w_1z_2 + w_2z_1) = (w_1, w_2)(z_1, z_2) = wz.
\end{aligned}$$

(VII) Claramente,

$$\begin{aligned}
z \cdot 1_{\mathbb{C}} &= (z_1, z_2)(1, 0) \\
&= (z_1 \cdot 1 - z_2 \cdot 0, z_1 \cdot 0 + z_2 \cdot 1) \\
&= (z_1, z_2) = z.
\end{aligned}$$

(VIII) Si $z \neq 0_{\mathbb{C}}$, entonces $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$, lo cual significa que al menos uno de los números $z_1$, $z_2$ es no nulo. En consecuencia, $z_1^2 + z_2^2 > 0$, y el elemento $z^{-1}$ del enunciado está bien definido. Se tendrá entonces

$$\begin{aligned}
zz^{-1} &= (z_1, z_2)\left(\frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2}, \frac{-z_2}{z_1^2 + z_2^2}\right) \\
&= \left(z_1\frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2} - z_2\frac{-z_2}{z_1^2 + z_2^2}, z_1\frac{-z_2}{z_1^2 + z_2^2} + z_2\frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2}\right) \\
&= \left(\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 + z_2^2}, \frac{-z_1z_2 + z_2z_1}{z_1^2 + z_2^2}\right) = (1, 0) = 1_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

□

**Proposición 3.5** (Relación de suma y producto)**.**

(IX) *Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:* $z(w+t) = zw + zt$.

*Demostración.* Suponiendo de nuevo que $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$, $t = (t_1, t_2)$,

$$\begin{aligned} z(w+t) &= (z_1, z_2)\big((w_1, w_2) + (t_1, t_2)\big) = (z_1, z_2)(w_1 + t_1, w_2 + t_2) \\ &= \big(z_1(w_1 + t_1) - z_2(w_2 + t_2), z_1(w_2 + t_2) + z_2(w_1 + t_1)\big) \\ &= (z_1 w_1 + z_1 t_1 - z_2 w_2 - z_2 t_2, z_1 w_2 + z_1 t_2 + z_2 w_1 + z_2 t_1) \\ &= (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + z_2 w_1) + (z_1 t_1 - z_2 t_2, z_1 t_2 + z_2 t_1) \\ &= (z_1, z_2)(w_1, w_2) + (z_1, z_2)(t_1, t_2) = zw + zt. \end{aligned}$$ □

A partir de estas propiedades, todas las igualdades que en el primer tema se probaron para los números reales como consecuencia de su estructura de cuerpo conmutativo siguen siendo ciertas cuando pasamos a los complejos.

### Inclusión de los reales en los complejos

El siguiente resultado es inmediato:

**Teorema 3.6.** *Se tienen las siguientes igualdades:*

(I) $(z_1, 0) + (w_1, 0) = (z_1 + w_1, 0)$,

(II) $(z_1, 0)(w_1, 0) = (z_1 w_1, 0)$.

En vista del teorema anterior los números reales y los números complejos que tienen parte imaginaria nula tienen la misma estructura con respecto a la suma y el producto, así que se puede identificar un conjunto con el otro sin mayor problema. Así pues, a partir de ahora, si $x \in \mathbb{R}$, realizaremos siempre la identificación $x \equiv (x, 0) \in \mathbb{C}$. En particular, $0 \equiv (0,0) = 0_{\mathbb{C}}$ y $1 \equiv (1,0) = 1_{\mathbb{C}}$. Obtenemos, pues:

**Teorema 3.7.** *El conjunto de los reales $\mathbb{R}$ está contenido en el de los complejos $\mathbb{C}$, y consiste en el conjunto de los números complejos que tienen parte imaginaria nula.*

### La unidad imaginaria

Acabamos de ver lo que representan los números con parte imaginaria nula. Ahora veremos qué números son los que tienen parte real nula.

**Definición 3.8.** Se define la *unidad imaginaria* como $i = (0,1)$.

**Teorema 3.9.** *Se tiene la igualdad:* $i^2 = -1$.

*Demostración.*

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1. \qquad \square$$

Hemos visto que $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo. De la igualdad anterior se desprende que los números complejos no pueden ser dotados con un orden que sea compatible con la suma y el producto. En efecto, probamos en su momento que, en todo cuerpo ordenado (o sea, un cuerpo conmutativo con un orden total compatible con la suma y el producto), ningún cuadrado es negativo. También se vio que $-1$ es negativo en cualquier cuerpo ordenado. Así pues, si existiera un orden compatible en los complejos, el teorema anterior nos daría un cuadrado negativo, lo cual es absurdo.

### Forma algebraica de un número complejo

**Proposición 3.10.** *Todo número complejo* $z = (z_1, z_2)$*, puede escribirse en la forma* $z = z_1 + i\, z_2$.

*Demostración.*

$$z_1 + i\, z_2 = (z_1, 0) + (0,1)(z_2, 0) = (z_1, 0) + (0, z_2) = (z_1, z_2) = z. \qquad \square$$

A partir de ahora, utilizaremos esta forma de escribir los números complejos, en lugar de denotarlos como pares.

### Conjugado de un número complejo

**Definición 3.11.** Si $z_1$ y $z_2$ son reales y $z = z_1 + i\, z_2$, se define el *conjugado* de $z$ como $\bar{z} = z_1 - i\, z_2$.

*Ejemplos.*

- Si $z = i$, entonces $\bar{z} = -i$.
- Si $z = 1 - 2i$, entonces $\bar{z} = 1 + 2i$.

### Propiedades del conjugado

**Proposición 3.12.** *Si $z$ y $w$ son complejos, entonces*

(I) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,

(II) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,

(III) $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$,

(IV) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$,

(V) $\bar{z} = z$ *si y solo si* $z \in \mathbb{R}$,

(VI) $z\bar{z}$ *siempre es real y positivo (salvo cuando* $z = 0$*),*

(VII) $\bar{\bar{z}} = z$.

*Demostración.* Sean $z = z_1 + i\, z_2$, $w = w_1 + i\, w_2$.

(I) La prueba es casi trivial.

$$\begin{aligned}
\overline{z + w} &= \overline{(z_1 + w_1) + i(z_2 + w_2)} \\
&= (z_1 + w_1) - i(z_2 + w_2) \\
&= (z_1 - i\, z_2) + (w_1 - i\, w_2) = \bar{z} + \bar{w}.
\end{aligned}$$

(II) Por la definición del producto,

$$\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(z_1 w_1 - z_2 w_2) + i(z_1 w_2 + z_2 w_1)} \\
&= (z_1 w_1 - z_2 w_2) - i(z_1 w_2 + z_2 w_1) \\
&= \big(z_1 w_1 - (-z_2)(-w_2)\big) + i\big(z_1(-w_2) + z_2(-w_1)\big) \\
&= (z_1 - i\, z_2)(w_1 - i\, w_2) = \bar{z}\bar{w}.
\end{aligned}$$

(III) Por el apartado anterior,

$$\bar{z}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(z\frac{1}{z}\right)} = \bar{1} = 1.$$

Por tanto, $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$.

(IV) Probaremos solo la primera igualdad, siendo la otra análoga.

$$z + \bar{z} = (z_1 + i\, z_2) + (z_1 - i\, z_2) = 2z_1 = 2\operatorname{Re} z.$$

(V) Como $z = z_1 + i\, z_2$ y $\bar{z} = z_1 - i\, z_2$. La igualdad $z = \bar{z}$ se tiene si y solo si $z_2 = -z_2$, es decir, si $\operatorname{Re} z = z_2 = 0$. Esto ya sabemos que equivale a que $z$ sea un número real.

(VI) Si $z \neq 0$, tendrá que ser $z_1 \neq 0$ o $z_2 \neq 0$, y, en tal caso,

$$z\bar{z} = (z_1 + i\, z_2)(z_1 - i\, z_2) = z_1^2 - (i\, z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 > 0.$$

(VII) Trivial. □

### Módulo de un número complejo

A continuación extendemos a los números complejos el concepto de valor absoluto, que ya habíamos definido para los reales.

**Definición 3.13.** Si $z$ es un número complejo, su *valor absoluto* (o *módulo*) se define como $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$.

Obsérvese que esta definición tiene sentido, ya que, según hemos visto, siempre es $z\bar{z} \geqslant 0$.

Nótese también que, cuando $x$ es un número real, es $\bar{x} = x$, así que $|x| = (x\bar{x})^{1/2} = (x^2)^{1/2}$. Por tanto, $|x| = x$ si $x \geqslant 0$, y $|x| = -x$ si $x < 0$. Es decir, nuestra nueva definición de módulo es coherente con la que ya habíamos hecho de valor absoluto de un número real.

Si $z = z_1 + i\, z_2$, se prueba fácilmente que $|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$.

### Propiedades del módulo

**Proposición 3.14.** *Siendo $z$ y $w$ números complejos, se tiene:*

(I) $|z| > 0$ *(a menos que $z = 0$),* $|0| = 0$.

(II) $|\bar{z}| = |z|$,

(III) $|zw| = |z||w|$,

(IV) $|1/z| = 1/|z|$ *si* $|z| \neq 0$,

(V) $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$,

(VI) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

*Demostración.*

(I) Por definición, $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$. Si $z \neq 0$, ya hemos probado que $z\bar{z} > 0$, de donde $|z| > 0$. Si $z = 0$, será $z\bar{z} = 0$, y obtenemos que $|z| = 0$.

(II) De nuevo por definición, $|\bar{z}| = (\bar{z}\bar{\bar{z}})^{1/2} = (\bar{z}z)^{1/2} = |z|$.

(III) $|zw| = (zw\overline{zw})^{1/2} = (z\bar{z})^{1/2}(w\bar{w})^{1/2} = |z||w|$.

(IV) Por el apartado anterior, $|z||1/z| = |z \cdot 1/z| = 1$, así que $|1/z| = 1/|z|$.

(V) Basta darse cuenta de que $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2$.

(VI) Tomando cuadrados, y teniendo en cuenta el apartado anterior,

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)\overline{z + w} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\
&= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\
&= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\
&\leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

□

# 2. Funciones trascendentes en los complejos

## 2.1. Exponencial compleja y representación polar

### La exponencial compleja

Ya hemos tratado anteriormente la exponencial para números reales. Nos proponemos dar ahora una extensión de esta función a los números complejos. Si definimos bien esta función, deberá cumplirse la identidad fundamental de la exponencial, es decir, $e^{z+w} = e^z e^w$. Además, si $x \in \mathbb{R}$, el nuevo significado de $e^x$ deberá corresponderse con el que ya tenía. Así, pues, si $z = z_1 + i\, z_2$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, deberá ser $e^z = e^{z_1 + i\, z_2} = e^{z_1} e^{i\, z_2}$. Como $z_1 \in \mathbb{R}$, ya conocemos el sentido de $e^{z_1}$. Por tanto, queda por conocer tan solo a qué es igual $e^{iz_2}$.

**Definición 3.15.** Si $z = z_1 + i\, z_2$, definimos $e^z = e^{z_1 + i\, z_2}$ como el número

$$e^z = e^{z_1}(\cos z_2 + i \operatorname{sen} z_2).$$

### Propiedades de la exponencial compleja

**Proposición 3.16.**

(I) *Si* $z, w \in \mathbb{C}$, *entonces* $e^{z+w} = e^z e^w$.

(II) $e^z$ *no es nunca cero.*

(III) *Si* $x \in \mathbb{R}$, *entonces* $|e^{i\, x}| = 1$.

(IV) $e^z = 1$ *si y solo si* $z$ *es un múltiplo de* $2\pi i$.

(V) *Si* $z, w \in \mathbb{C}$, $e^z = e^w$ *si y solo si* $z - w$ *es un múltiplo de* $2\pi i$.

*Demostración.* Supongamos que $z = z_1 + i\, z_2$ y $w = w_1 + i\, w_2$.

(I) Según la definición de la exponencial,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^{z_1 + i\, z_2} e^{w_1 + i\, w_2} \\ &= e^{z_1}(\cos z_2 + i \operatorname{sen} z_2) e^{w_1}(\cos w_2 + i \operatorname{sen} w_2) \\ &= e^{z_1 + w_1}\big((\cos z_2 \cos w_2 - \operatorname{sen} z_2 \operatorname{sen} w_2) \\ &\quad + i(\cos z_2 \operatorname{sen} w_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos w_2)\big) \\ &= e^{z_1 + w_1}\big(\cos(z_2 + w_2) + i \operatorname{sen}(z_2 + w_2)\big) \\ &= e^{(z_1 + w_1) + i(z_2 + w_2)} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

(II) Por el apartado anterior, $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. Por tanto, $e^z$ no puede ser nulo.

(III) $|e^{ix}|^2 = |\cos x + i \operatorname{sen} x|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.

(IV) Si $z = 2\pi i n$, donde $n$ es un número entero, entonces

$$e^z = \cos(2\pi n) + i\,\mathrm{sen}(2\pi n) = 1.$$

Recíprocamente, supongamos que $e^z = 1$. Esto significa que $e^{z_1}\cos z_2 = 1$ y $e^{z_1}\,\mathrm{sen}\, z_2 = 0$. Como $e^{z_1} \neq 0$, debe ser $\mathrm{sen}\, z_2 = 0$, y así, $z_2 = k\pi$, donde $k$ es un entero. Pero $\cos k\pi = (-1)^k$. Por lo tanto, $e^{z_1} = (-1)^k$, ya que $e^{z_1}\cos(k\pi) = 1$. Como $e^{z_1} > 0$, $k$ debe ser par. Por lo tanto, $e^{z_1} = 1$ y entonces $z_1 = 0$.

(V) $e^z = e^w$ si y solo si $e^{z-w} = 1$. $\square$

En los reales, ya sabemos que la exponencial es una función estrictamente creciente, y por tanto inyectiva. El último apartado de la proposición anterior nos dice que, cuando pasamos a los complejos, la situación es bien diferente. En los complejos, la función exponencial es una función periódica de período $2\pi i$.

**Argumento de un número complejo**

Sea $z = z_1 + i\, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sean $z_1' = z_1/|z|$ y $z_2' = z_2/|z|$. Entonces

$$(z_1')^2 + (z_2')^2 = \frac{z_1^2 + z_2^2}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1.$$

Sabemos, por tanto, que existe un único $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que $\cos\theta = z_1'$ y $\mathrm{sen}\,\theta = z_2'$.

Para este $\theta$, tendremos entonces

$$\frac{z}{|z|} = \frac{z_1 + i\, z_2}{|z|} = z_1' + i\, z_2' = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{i\theta}.$$

Por tanto, resulta que podemos escribir $z = |z|e^{i\theta}$. Esto motiva la siguiente definición:

**Definición 3.17.** Llamamos *argumento principal* del número complejo $z \neq 0$, y lo denotaremos $\arg z$, al único número $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que $z = |z|e^{i\theta}$.

**Forma polar de un número complejo**

Según acabamos de ver, cualquier número complejo no nulo $z$ se puede escribir de manera única en la forma $z = Re^{i\theta}$, donde $R = |z| > 0$, y $\theta = \arg z \in (-\pi, \pi]$. Esta forma de escribir un número complejo se llama *forma polar* de $z$.

## 2.2. Representación geométrica de los números complejos

**El plano de Gauss**

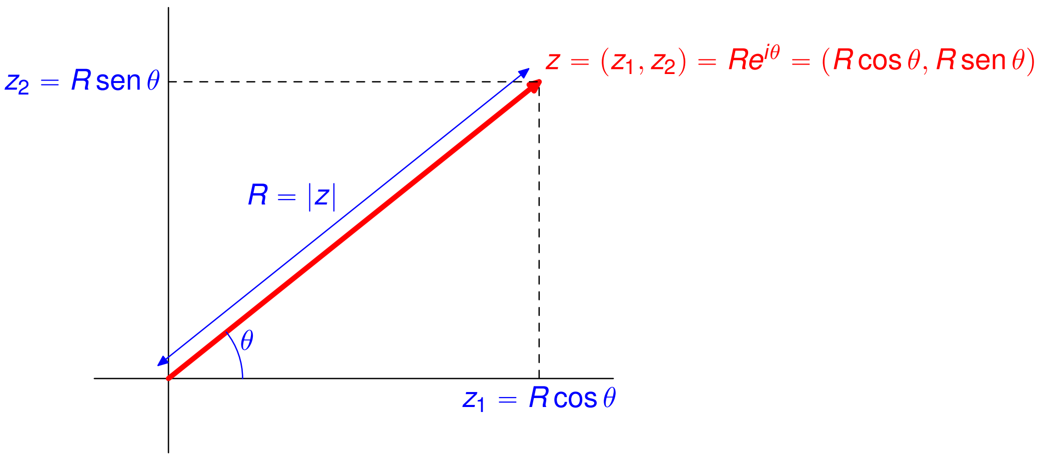
Todos los números complejos $z = z_1 + i\, z_2$ son, como ya sabemos, pares ordenados de la forma $(z_1, z_2)$, donde $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Por tanto, tales números pueden siempre ser representados como vectores en el plano $\mathbb{R}^2$, considerándose que su parte real $z_1$ es su componente horizontal, y su parte imaginaria $z_2$ es su componente vertical. El plano, considerado como una representación de $\mathbb{C}$, se denomina *Plano de Gauss*.

Si consideramos la longitud del vector $z = (z_1, z_2)$, esta es $\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, que es justamente el valor absoluto de nuestro número complejo $z$.

Desde otro punto de vista, si representamos este número en su forma polar $z = Re^{i\theta}$, entonces $R = |z|$, y, como acabamos de ver, $R$ no es más que la longitud del vector $z$. Por otro lado, tenemos

$$z = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = R\cos\theta + i\, R \operatorname{sen}\theta = (R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta).$$

Así, pues, la componente horizontal de $z$ es $z_1 = R\cos\theta$ y su componente vertical es $z_2 = R\operatorname{sen}\theta$. Esto nos indica que el número $\theta$ al que dimos el nombre de argumento principal de $z$ no es más que el ángulo que el vector $z$ forma con el eje de abscisas.




## 2.3. Potencias enteras y raíces de un número complejo

**Cálculo del producto en polares**

La representación polar de números complejos tiene una propiedad que la hace especialmente útil a la hora de calcular los productos de los mismos.

**Teorema 3.18.** *Si $z = Re^{i\theta}$ y $w = Se^{i\omega}$ son dos números complejos no nulos, entonces $zw = RSe^{i(\theta+\omega)}$. Si $w \neq 0$, se tiene además $z/w = (R/S)e^{i(\theta-\omega)}$.*

*Demostración.* Trivial $\square$

Esto nos da la siguiente consecuencia acerca del argumento del producto:

**Corolario 3.19.** *Si $z$ y $w$ son dos números complejos no nulos,*

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w + 2\pi n(z, w),$$

*donde*

$$n(z,w) = \begin{cases} 0, & \textit{si } -\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi, \\ 1, & \textit{si } -2\pi < \arg z + \arg w \leqslant -\pi, \\ -1 & \textit{si } \pi < \arg z + \arg w \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

*Demostración.* Si ponemos estos números en forma polar como $z = Re^{i\theta}$, $w = Se^{i\omega}$, será $zw = RSe^{i(\theta+\omega)}$. Como $-\pi < \theta \leqslant \pi$ y $-\pi < \omega \leqslant \pi$, tenemos $-2\pi < \theta + \omega \leqslant 2\pi$. Por tanto, existe un entero $n$ tal que $-\pi < \theta + \omega + 2n\pi \leqslant \pi$. Este número $n$ es, precisamente, el $n(z, w)$ dado en el enunciado, y para este $n$ tenemos que $\arg(zw) = \theta + \omega + 2n\pi$. $\square$

### Potencias enteras

**Definición 3.20.** Dado un número complejo $z$ y un número entero $n$, se define la potencia $n$-esima de $z$ como sigue:

$$\begin{aligned} &z^0 = 1, \qquad z^{n+1} = z^n z, && \text{si } n \geqslant 0, \\ &z^{-n} = (z^{-1})^n, && \text{si } z \neq 0 \text{ y } n > 0. \end{aligned}$$

### Propiedades de las potencias enteras

Las demostraciones de los dos siguientes resultados, que se pueden realizar por inducción, se dejan como ejercicio.

**Proposición 3.21.** *Dados dos enteros $m$ y $n$, y $z$, $w$ complejos no nulos, se tiene*

$$z^n z^m = z^{n+m} \qquad y \qquad (zw)^n = z^n w^n.$$

**Proposición 3.22.** *Si $z = Re^{i\theta}$ es un número complejo escrito en forma polar, y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $z^n = R^n e^{in\theta}$.*

**Raíces de un numero complejo**

**Teorema 3.23.** *Si $z \neq 0$, y si $n \in \mathbb{N}$, entonces existen exactamente $n$ números complejos distintos $z_0$, $z_1$, $\ldots$, $z_{n-1}$, tales que $z_k^n = z$, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Además, estos números están dados por las fórmulas*

$$z_k = re^{i\theta_K}, \quad \textit{donde} \quad r = |z|^{\frac{1}{n}},$$

*y*

$$\theta_k = \frac{\arg z}{n} + \frac{2\pi k}{n} \qquad \textit{(}k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\textit{).}$$

*Demostración.* Los $n$ número complejos $re^{i\theta_k}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, son distintos y cada uno de ellos verifica la condición del enunciado, ya que

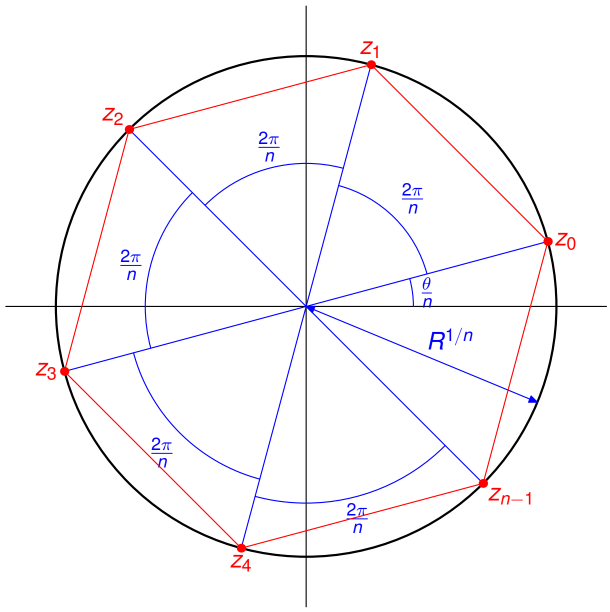
$$(re^{i\theta_k})^n = r^n e^{in\theta_k} = |z|e^{i(\arg z + 2nk)} = z.$$

Debemos probar ahora que no existen más números complejos que verifiquen esta condición. Supongamos que $w = re^{i\theta}$ es un número complejo tal que $w^n = z$. Entonces $|w|^n = |z|$, de donde $r^n = |z|$ y $r = |z|^{1/n}$. Por lo tanto $w^n = z$ puede escribirse $e^{in\theta} = e^{i \arg z}$, que implica $n\theta - \arg z = 2k\pi$ para algún entero $k$. Luego $\theta = (\arg z + 2k\pi)/n$. Pero mientras $k$ toma todos los valores, $w$ toma solo los valores distintos $z_0$, $z_1$, $\ldots$, $z_{n-1}$. □

**Definición 3.24.** A los números complejos $z_0$, $z_1$, $\ldots$, $z_{n-1}$ del teorema anterior, se les llama *raíces $n$-ésimas* de $z$. A $z_0$ se le llama *raíz $n$-ésima principal* de $z$.

**Representación de las raíces**

Obsérvese que las raíces $n$-ésimas de $z$ están igualmente espaciadas sobre la circunferencia de radio $R^{1/n}$, con centro en el origen.




*Ejemplos.*

- Calcular las raíces cuadradas de $1$.

  *Solución.* En primer lugar, observemos que $1$ tiene exactamente dos raíces, que denotamos $z_0$ y $z_1$. Sabemos que $1$ tiene por módulo $|1| = 1$ y argumento $\arg 1 = 0$. En consecuencia, las dos raíces tendrán por módulo $|1|^{1/2} = 1$. La raíz principal $z_0$ tiene por argumento $(\arg 1)/2 = 0$. Así, pues, $z_0 = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = e^0 = 1$. En cuanto al argumento de la segunda raíz, deberemos sumarle $2\pi/2 = \pi$ al argumento de $z_0$. Por tanto, $\arg z_1 = 0 + \pi = \pi$. Por tanto, $z_1 = 1 \cdot e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1$. $\square$

- Calcular las raíces cúbicas de $i - 1$.

  *Solución.* El módulo de $i - 1$ es $|i - 1| = 2^{1/2}$, mientras que su argumento es $\arg(i - 1) = 3\pi/4$. La raíz cúbica principal será por tanto

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{6}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1 + i}{\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

La segunda raíz tendrá por argumento $\arg z_1 = \pi/4 + 2\pi/3 = 11\pi/12$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}}\Big(\cos\frac{11\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}\Big) \\ &= 2^{\frac{1}{6}}\Big(-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\Big) \\ &= \frac{-(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i}{2\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

En cuanto a la tercera raíz, el argumento será $\arg z_2 = \pi/4 + 4\pi/3 = 19\pi/12$. Así,

$$\begin{aligned} z_2 &= 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{19\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}}\Big(\cos\frac{19\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\Big) \\ &= 2^{\frac{1}{6}}\Big(\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) - i\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\Big) \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1)i}{2\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$ □

## 2.4. Raíces de la unidad

**Raíces de la unidad**

Un caso particular de lo anterior los constituyen las raíces de la unidad, es decir, las raíces $n$-ésimas de 1. El siguiente teorema, cuya demostración es trivial teniendo en cuenta el teorema que acabamos de ver, nos indica que las raíces de la unidad son de cálculo inmediato, conociendo tan solo cuánto vale una de ellas.

**Teorema 3.25.** *Si $\alpha_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, son las raíces $n$-ésimas de la unidad, entonces $\alpha_k = e^{2k\pi\, i/n}$. En consecuencia, todas las raíces $n$-ésimas de la unidad son de la forma $\alpha_1^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Las raíces de la unidad son muy útiles para calcular raíces de números complejos en general. El siguiente resultado, de prueba sencilla, nos dice que, si conocemos una raíz $n$-ésima de un número, podemos averiguar de forma casi inmediata el resto de las raíces $n$-ésimas, sin más que ir multiplicando por las raíces de la unidad.

**Teorema 3.26.** *Si $z_k$ es una raíz $n$-ésima de $z$ fija, entonces todas las raíces $n$-ésimas de $z$ son de la forma $z_k\alpha_m$, donde $\alpha_m$ es una raíz $n$-ésima de la unidad.*

## 2.5. Logaritmos complejos

### El logaritmo

Ya sabemos que $e^z$ nunca es cero. Es natural preguntarse si existe algún otro valor que no pueda tomar nunca la exponencial. A continuación probamos que el cero es el único valor excepcional.

**Teorema 3.27.** *Si $z$ es un número complejo no nulo, existen infinitos números complejos $w$ tales que $e^w = z$. Uno de tales $w$ es el número complejo*

$$\log|z| + i \arg z,$$

*y todos los demás tienen la forma*

$$\log|z| + i \arg z + 2n\pi i,$$

*donde $n$ es un entero.*

*Demostración.* Como $e^{\log|z|+i\arg z} = e^{\log|z|}e^{i\arg z} = |z|e^{i\arg z} = z$, vemos que $w = \log|z| + i\arg z$ es una solución de la ecuación $e^w = z$. Pero si $w_1$ es otra solución, entonces $e^w = e^{w_1}$ y, por lo tanto, $w - w_1 = 2n\pi i$. □

**Definición 3.28.** Sea $z \neq 0$ un número complejo dado. Si $w$ es un número complejo tal que $e^w = z$, entonces $w$ se denomina un *logaritmo* de $z$. El valor particular de $w$ dado por

$$w = \log|z| + i\arg z$$

se llama *logaritmo principal* de $z$, y para este $w$ escribiremos $w = \operatorname{Log} z$.

*Ejemplos.*

- $\operatorname{Log} i = \log|i| + i\arg i = \log 1 + i\pi/2 = i\pi/2.$
- $\operatorname{Log}(-i) = \log 1 + i(-\pi/2) = -i\pi/2.$
- $\operatorname{Log}(-1) = \log 1 + i\pi = \pi i.$

### Propiedad fundamental de los logaritmos

**Teorema 3.29.** *Si $z, w \neq 0$, entonces*

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w + 2\pi i\, n(z,w),$$

*donde $n(z,w)$ es como se definió en 3.19.*

*Demostración.*

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(zw) &= \log|zw| + i\arg(zw)\\ &= \log|z| + \log|w| + i[\arg z + \arg w + 2\pi n(z,w)]\\ &= \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w + 2\pi i\, n(z,w).\end{aligned}$$

□

## 2.6. Potencias complejas

### Definición de potencia compleja

Utilizando los logaritmos complejos, se pueden ahora definir las potencias complejas de números complejos.

**Definición 3.30.** Si $z \neq 0$ y si $w$ es un número complejo cualquiera, definimos

$$z^w = e^{w \operatorname{Log} z}.$$

*Ejemplos.*

- $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$.
- $(-1)^i = e^{i \operatorname{Log}(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}$.
- Si $n$ es un natural, $z^{n+1} = e^{(n+1) \operatorname{Log} z} = e^{n \operatorname{Log} z} e^{\operatorname{Log} z} = z^n z$, con lo que nuestra definición extiende la de potencia entera, vista anteriormente.

### Propiedades de las potencias complejas

El teorema siguiente nos suministra las reglas de cálculo con potencias complejas.

**Teorema 3.31.**

(I) *Si $z \neq 0$, entonces $z^w z^\alpha = z^{w+\alpha}$.*

(II) *Si $z, w \neq 0$, entonces $(zw)^\alpha = z^\alpha w^\alpha e^{2\pi\alpha i\, n(z,w)}$, donde $n(z,w)$ es el que se definió en el corolario 3.19.*

*Demostración.*
(I) $z^{w+\alpha} = e^{(w+\alpha) \operatorname{Log} z} = e^{w \operatorname{Log} z} e^{\alpha \operatorname{Log} z} = z^w z^\alpha$.
(II) Teniendo en cuenta el teorema 3.29,

$$\begin{aligned}(zw)^\alpha &= e^{\alpha \operatorname{Log}(zw)} = e^{\alpha[\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w + 2\pi i\, n(z,w)]} \\ &= e^{\alpha \operatorname{Log} z} e^{\alpha \operatorname{Log} w} e^{2\pi\alpha i\, n(z,w)} = z^\alpha w^\alpha e^{2\pi\alpha i\, n(z,w)}.\end{aligned}$$

□

## 2.7. Senos y cosenos complejos

### El seno y el coseno complejos

**Definición 3.32.** Dado un número complejo $z$, se define

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Obsérvese que, cuando $z$ es un número real, esta definición nos da el coseno y el seno ordinarios.

También es interesante observar el estrecho paralelismo entre estas fórmulas y las que definen el seno y el coseno hiperbólico. ¿Puede el lector proporcionar fórmulas que, en el cuerpo complejo, definan el seno y cosenos trigonométricos en función de los hiperbólicos, y viceversa?

**Cálculo de seno y coseno complejos**

Las siguientes fórmulas nos dicen cuanto valen el coseno y el seno de un número complejo, cuando está expresado en forma algebraica (o cartesiana).

**Teorema 3.33.** *Si* $z = z_1 + i\, z_2$, *entonces*

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos z_1 \cosh z_2 - i \operatorname{sen} z_1 \operatorname{senh} z_2, \\ \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} z_1 \cosh z_2 + i \cos z_1 \operatorname{senh} z_2. \end{aligned}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} 2\cos z &= e^{iz} + e^{-iz} \\ &= e^{-z_2 + iz_1} + e^{z_2 - iz_1} \\ &= e^{-z_2}(\cos z_1 + i \operatorname{sen} z_1) + e^{z_2}(\cos z_1 - i \operatorname{sen} z_1) \\ &= \cos z_1 (e^{z_2} + e^{-z_2}) - i \operatorname{sen} z_1 (e^{z_2} - e^{-z_2}) \\ &= 2\cos z_1 \cosh z_1 - 2i \operatorname{sen} z_1 \operatorname{senh} z_1. \end{aligned}$$

La demostración de la otra igualdad es completamente análoga. □

En los ejercicios se podrán encontrar más propiedades del seno y el coseno complejos.

# Referencias


[1] T. M. Apostol, *Análisis Matemático* (2a. ed.), Reverté, Barcelona, 1991.

[2] W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático* (3a. ed.), McGraw-Hill, 1976.

[3] M. Spivak, *Cálculo infinitesimal* (2a. ed.), Reverté, 1994.