

# Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Biegung und dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls

Alexander Adam  
1946255

Friedrich Jahns  
1960002

Jan Lietz  
1922360

7. März 2020

## Ziel des Versuchs

Bei diesem Versuch sollen die materialspezifischen Größen Elastizitätsmodul und Torsionsmodul bestimmt werden und eine Vereinfachung für diese entwickelt werden. Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls erfolgt durch Biegung verschiedener Eisenstäbe und die des Torsionsmoduls durch Drehschwingungen eines gespannten Drahtes.

## Geräte

- Meßuhr
- Kraftmesser
- Eisenstäbe
- Lineal
- Schieblehre
- Waage
- Zylindrische Gewichte
- Halterungsplatte
- Mikrometerschraube
- Torsionsvorrichtung

# 1 Theorie

## 1.0.1 Flächenträgheitsmoment einer Kreisfläche bezüglich einer äquatorialen neutralen Achse

Das Flächenträgheitsmoment  $I = \int \bar{r}^2 dA$  beschreibt die Trägheit einer Fläche gegenüber Verformungen.  $\bar{r}$  ist der Abstand des Massenelementes  $dm$  (Flächenelementes  $dA$ ) von der Drehachse. Zur Vereinfachung der Berechnung bietet es sich an in Polarkoordinaten zu rechnen. Für das Flächenelement  $dA$  in Polarkoordinaten ergibt sich:

$$dA = dx \, dy = r \, dr \, d\phi \quad (1)$$

Nach oben genannten Überlegungen erhalten wir:

$$I = \int_A \bar{r}^2 dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} \bar{r}^2 r \, dr \, d\phi \quad (2)$$

Der Abstand  $\bar{r}$  des Flächenelementes von der neutralen Achse ist gerade  $y = r \sin \phi$ :

$$I = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \, r^3 \sin^2 \phi \quad (3)$$

$$I = \frac{\pi}{4} R^4 \quad (4)$$

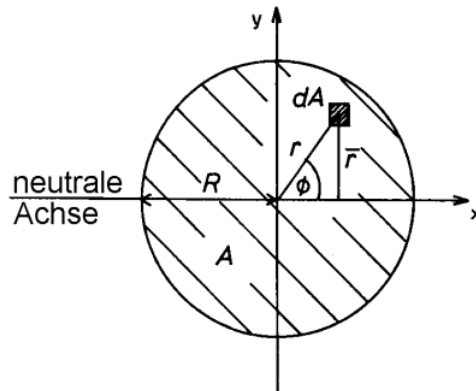


Abbildung 1: <http://www.atlas.uni-wuppertal.de/kind/M3.pdf>

## 1.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Biegung

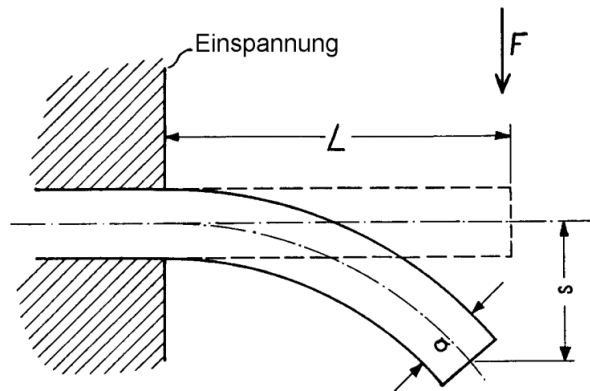


Abbildung 2: <http://www.atlas.uni-wuppertal.de/kind/M3.pdf>

Im Versuch wird ein Metallstab der Breite  $b$  und Dicke  $a$  an einem Ende befestigt. Für die Länge des Stabes  $L$  wird lediglich das aus der Befestigung herausstehende Stück des Stabes vermessen. Am überstehenden Ende wird eine Kraft  $F$  verursacht, welche senkrecht zur Stabachse wirkt. Die resultierende Biegung des Stabes wird durch die Absenkung des Stabendes mit dem so genannten Biegunbspfeil  $s$  als Strecke beschrieben.

Der Stab wird in dem Vorgang auf der Oberseite gedehnt und auf der Unterseite gestaucht. Dazwischen verläuft die so genannte "neutrale Faser", welche den Übergang von Dehnung zu Stauchung darstellt.

Unter den Voraussetzungen, dass:

1. Bei der Biegung rechteckige Querschnitte des Stabes in ihrer Form erhalten bleiben und
2. Die neutrale Faser in der geometrischen Mitte liegt.

Gilt für  $s$ :

$$s = \frac{L^3}{3EI} F \quad (5)$$

$E$  ist das Elastizitätsmodul.

$I$  ist das Flächenträgheitsmoment.

Für das Flächenträgheitsmoment gilt für:

a) Einen rechteckigen Stab:  $I = \frac{1}{12} a^3 b$

b) Einen runden Stab:  $I = \frac{\pi}{4} R^4$  ( $R = \text{Radius}$ )

Mit  $F$  als bekannte Größe ergibt sich aus der Formel ein Zusammenhang zwischen dem Biegunbspfeil und dem Elastizitätsmodul.

### 1.1.1 Herleitung zur Berechnung des Biegunbspfeils

Wir betrachten hier ein kleines Stück des Stabes an der Stelle  $x_0$  der Länge  $l$

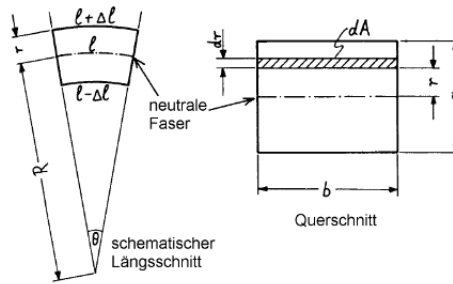


Abbildung 3: <http://www.atlas.uni-wuppertal.de/kind/M3.pdf>

Es gilt hier:  $\frac{\Delta l}{l} = \frac{r}{R}$

Die Dehnung nimmt folglich mit dem Abstand der neutralen Faser zu. Für die Kraft auf des Flächenelement  $dA$  Nach dem Hooke'schen Gesetz und der Definition von Spannung gilt:

$$dF = E \frac{\Delta l}{l} dA = E \frac{r}{R} dA \quad (6)$$

Für das Drehmoment  $dM$  bezüglich der neutralen Faser gilt dann:

$$dM = \frac{E}{R} r^2 dA \quad (7)$$

Man erhält dann des Drehmoment auf das Stück  $l$  an der Stelle  $x_0$  Des Stabes erhält man durch Integration:

$$M = \frac{E}{R} \int r^2 dA = \frac{E}{R} \int r^2 b dr = \frac{E}{R} \frac{1}{12} a^3 b = \frac{E}{R} I \quad (8)$$

$I$  Wird hierbei in diesem Kontext als Äquivalent zum Trägheitsmoment als Flächenträgheitsmoment bezeichnet.

$$I = \int r^2 dA \quad (9)$$

Das Drehmoment  $M$  muss hierbei gleich dem durch die äußere Kraft  $F$  auf des Stück  $l$  wirkende Drehmoment sein.

$$M = F(L - x_0) \quad (10)$$

Durch Gleichsetzen mit Gleichung (8) Erhalten wir:

$$\frac{1}{R} = \frac{F}{EI} (L - x_0) \quad (11)$$

Für dem Krümmungsradius einer Kurve mit  $y = f(x)$  gilt für kleine Biegungen  $L \gg s$  die Näherung:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (12)$$

Damit ergibt sich die Differenzialgleichung für die Biegekurve  $s = y = f(x)$ :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{EI} (L - x) \quad (13)$$

Durch zweimaliges Integrieren erhält man:

$$y = \frac{F}{EI} \left( L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (14)$$

Hierbei gelten folgende Randbedingungen:

- $y(0) = 0$  ( $s = 0$  gilt dort wo der Stab eingespannt ist)
- $\frac{dy}{dx}(0) = 0$
- $c_1 = c_2 = 0$

Damit erhält man den Biegungspeil  $s$  an der Stelle  $x = L$ :

$$s = \frac{L^3}{3EI} F \quad (15)$$

## 1.2 Dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls

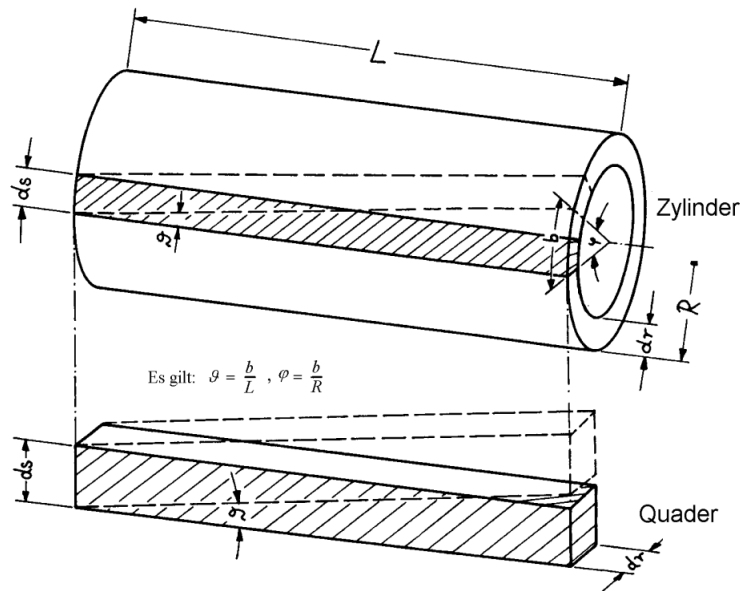


Abbildung 4: <http://www.atlas.uni-wuppertal.de/kind/M3.pdf>

Ein leicht gespannter Metalldraht der Länge  $L$  und mit dem Radius  $R$  wird durch ein äußeres Drehmoment  $M$  um den Winkel  $\varphi$  eingedreht.

Um  $M$  bestimmen zu können betrachtet man den Draht als dünnwandige Hohlzylinder mit einem Radius  $r$  und der Wandstärke  $dr$ . Die Länge  $L$  bleibt unverändert.

Auf einem Zylinder dieser Art betrachtet man nun näherungsweise einen Quader mit den Kantenlängen  $L, ds$  und  $dr$ . Wird nun der Draht um den Winkel  $\varphi$  eingedreht, so entsteht durch Scherung um den Winkel  $\vartheta$  aus dem Rechteck  $L ds$ , welches die Oberseite des Quaders darstellt, ein Parallelogramm.

Nach dem Hookeschen Gesetz gilt für die Scherspannung T:

$$T = G\vartheta = G\frac{r}{L}\vartheta \quad (G=\text{Torsionsmodul}) \quad (16)$$

Die an der Fläche  $dr \, ds$  wirkende Tangentialkraft ist dann:

$$dF = G\frac{r}{L}\vartheta \, dr \, ds = T \, dr \, ds \quad (17)$$

Für das Drehmoment auf die neutrale Faser gilt:

$$dM = dF \, r = G\frac{\vartheta}{L}r^2 \, dr \, ds \quad (18)$$

Durch Integration Über  $ds$  ergibt sich das Drehmoment welches auf den Hohlzylinder wirkt:

$$M_H = \frac{G}{L}\vartheta 2\pi r^3 \, dr \quad (19)$$

Durch Integration Über  $dr$  erhält man das Drehmoment bezüglich des gesamten Drahtes:

$$M = \pi \frac{R^4}{2L}\vartheta = D\vartheta \quad D = \pi G \frac{R^4}{2L} \quad (20)$$

Werden für den Versuch zwei Drähte des selben Materials und der selben Dicke mit unterschiedlichen Längen  $l_1$  und  $l_2$  und den Winkel  $\varphi$  eingedreht so gilt für D:

$$D = D_1 + D_2 = \pi G \frac{R^4}{2} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \quad (21)$$

Das bedeutet das für  $L$  die effektive Länge  $l_e$  verwendet werden muss:

$$l_e = \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)^{-1} \quad (22)$$

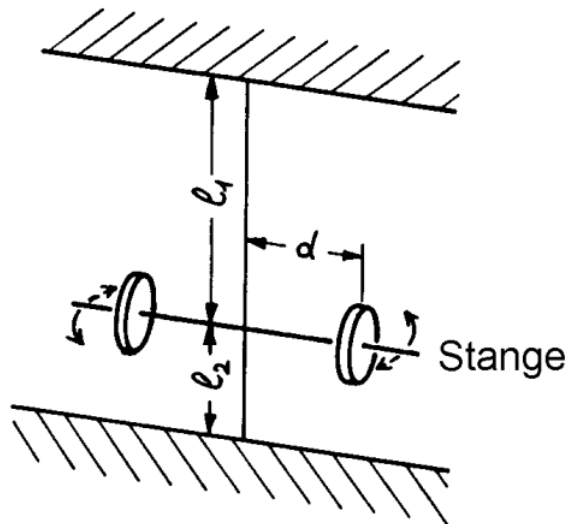


Abbildung 5: <http://www.atlas.uni-wuppertal.de/kind/M3.pdf>

Aufgrund des Drehmoments  $M = \theta \ddot{\varphi}$  befindet sich der aufgehängte Körper mit einem Trägheitsmoment von  $\theta$  in einer harmonischen Schwingung welche durch die Schwingungsgleichung:

$$\theta \ddot{\varphi} + D\varphi = 0 \quad (23)$$

beschrieben wird. Dabei haben  $\varphi$  und  $\ddot{\varphi}$  immer unterschiedliche Vorzeichen. Für die Schwingdauer  $T$  gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{D}} \quad (24)$$

Das Trägheitsmoment  $\theta$  des Körpers setzt sich aus dem Trägheitsmoment  $\theta_s$  des Stabes und dem Trägheitsmoment der auf dem Stab befestigten Gewichte  $\theta_x$  Zusammen.  $\theta_x$  ist dabei abhängig von der Masse der Zylindergewichte  $m$  und deren Abstand zur Drehachse  $d$ .

$$\theta = \theta_s + 2(\theta_x + md^2) \quad (25)$$

Damit erhält man eine Gradengleichung  $T^2 = f(d^2)$  aus deren Steigung sich das Torsionsmodul ermitteln lässt.

### 1.2.1 äquatoriales Trägheitsmoment eines Hohlzylinders

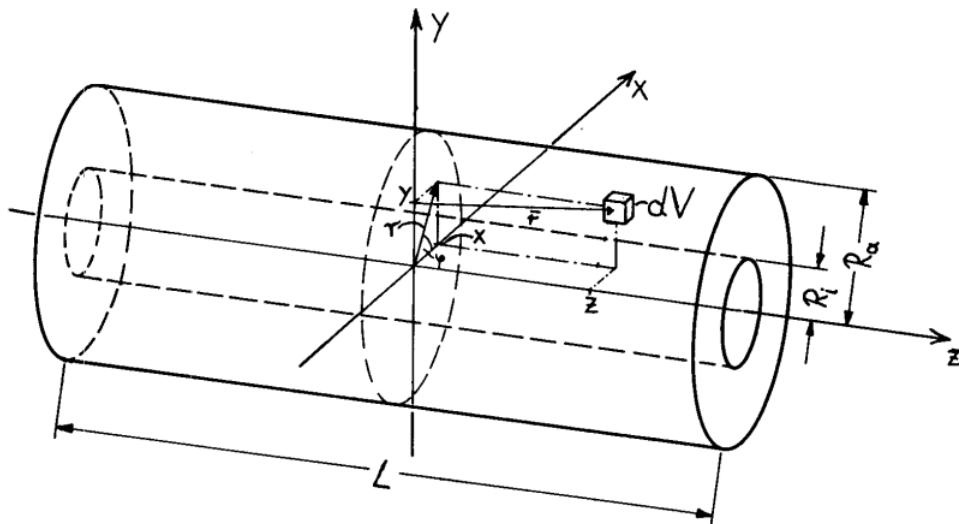


Abbildung 6: <http://www.atlas.uni-wuppertal.de/kind/M3.pdf>

In diesem Beispiel rotiert der Zylinder um die x-Achse. Zur Vereinfachung der Integration werden Zylinderkoordinaten eingeführt:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

Damit gilt für den Abstand des Volumens von der x-Achse:

$$\bar{r}^2 = y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \varphi + z^2 \quad (26)$$

Das Volumenelement  $dV$  mit der Masse  $dm$  lässt sich wie folgt darstellen:

$$dV = dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\varphi \, dz \quad (27)$$

Mit diesen Koordinaten, berechnet sich das äquatoriale Trägheitsmoment folgendermaßen:

$$\theta = \int \bar{r}^2 dm = \varrho \int_V \bar{r}^2 dV, \quad \varrho = \text{spez. Dichte} \quad (28)$$

$$\theta = \varrho \int_{R_i}^{R_a} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz (r^3 \sin^2 \varphi + r z^2) \quad (29)$$

$$\theta = \varrho \left\{ L \int_{R_i}^{R_a} dr \, r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi + 2\pi \int_{R_i}^{R_a} dr \, r \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dz \, z^2 \right\} \quad (30)$$

$$\theta = \varrho \left\{ L \frac{\pi}{4} (R_a^4 + R_i^4) + 2\pi \frac{L^3}{12} \frac{R_a^2 - R_i^2}{2} \right\} \quad (31)$$

Das Volumen des Hohlzylinders ist  $V = \pi(R_a^2 + R_i^2)L$ . Das heißt für  $\theta$ :

$$\theta = \frac{M}{4} (R_a^2 + R_i^2 + \frac{L^2}{3}) \quad (32)$$



## 2 Aufbau

### 2.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Biegung

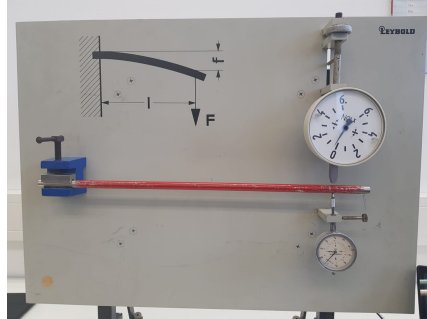


Abbildung 7

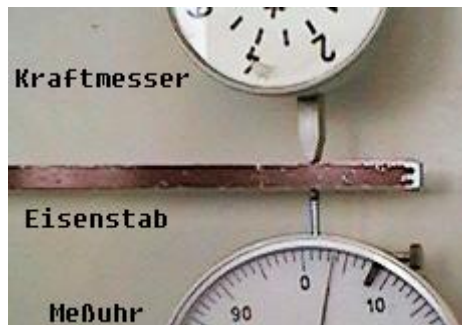


Abbildung 8: <http://www.atlas.uni-wuppertal.de/kind/apjpg/ap1m3pi.html>

Bei dem Versuch zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls werden auf der linken Seite nacheinander Eisenstäbe mit quadratischer, rechteckiger und runder Grundfläche in eine Halterung eingespannt. Auf der rechten Seite des Stabes befindet sich ein Bolzen der durch Herunterschrauben Druck auf den Eisenstab ausüben kann und einen an diesen angeschlossener Kraftmesser. Unter dem Stab auf dieser Seite befindet sich eine Meßuhr die die Biegung des Stabes auf einen hundertstel Millimeter genau bestimmen kann. Das ganze Konstrukt ist an einer Platte befestigt wie oben abgebildet.

## 2.2 Dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls



Abbildung 9

Bei diesem Versuch werden zwei Drähte in eine Halterung eingespannt bis diese vollständig unter Spannung stehen. In der Mitte der beiden Drähte wird eine Achse eingespannt an die Gewichte in unterschiedlichen Abständen zu Schwerpunkt der Achse befestigt werden können. Der ganze Aufbau wird als Drehpendel bezeichnet.

## 3 Durchführung

### 3.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Biegung

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird durch den Bolzen mit dem angehängten Kraftmesser ein Kraft senkrecht zur Stabsachse auf einen Eisenstab mit quadratischer, rechteckiger und runder Grundfläche ausgeübt und an der Messuhr der Biegunspfeil  $s$  als Funktion der Kraft des Stabes abgelesen. Die Werte werden umgehend graphisch aufgetragen. Auch die Nulllage muss hierbei beachtet werden. Aus der Steigung der Graden für die beiden rechteckigen Stäbe kann jeweils das Elastizitätsmodul  $E$  bestimmt werden. Für den runden Stab wird aus der Steigung der Graden das Flächenträgheitsmoment  $I$  mithilfe des zuvor bestimmten  $E$  berechnet und mit dem theoretischen Wert für  $I$  verglichen.

### 3.2 Dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls

Um das Torsionsmodul zu bestimmen wird dem Stab durch Anstoßen ein Schwingungsimpuls gegeben und dann mithilfe einer Stoppuhr die Schwingungsdauer  $T$  für mehrere Schwingungsperioden bestimmt, um Ungenauigkeiten durch abweichende Messwerte zu minimieren und anschließend der Durchschnitt der Werte bestimmt. Für diesen Versuch werden Gewichte in unterschiedlichen Abständen  $d$  an die Achse zwischen den Drähten angehängt und der Abstand der Gewichtsmitten zum Schwerpunkt des Stabes jeweils um 1 cm erhöht. Die Messung von  $T$  wird hier für 10 verschiedene Abstände durchgeführt. In der Folge wird dann  $T^2$  gegen Den Abstand

$d^2$  aufgetragen. Die Messung wird ebenfalls für den Fall ohne Gewichte durchgeführt. Aus der Steigung der Graden  $T^2 = f(d^2)$  wird  $G$  bestimmt und das Ergebnis mit Tabellenwerten verglichen. Anschließend wird  $\Theta_S$  mit der Ergebnissen für  $T$  bestimmt und mit dem Wert für  $\Theta_x$  das man durch Berechnung des äquatorialen Trägheitsmoments des Massekörpers nach folgender Gleichung erhält:

$$\Theta = \frac{M}{4} \left( R_a^2 + R_i^2 + \frac{h^2}{3} \right) \quad (33)$$

## 4 Fehlerrechnung

Zur Berechnung der Fehler zusammengesetzter Größen wird die *Gauß'sche Fehlerfortpflanzung* genutzt:

$$\Delta f = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 (\Delta x)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 (\Delta y)^2 + \dots} \quad (34)$$

### 4.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Biegung

Unter Annahme mit  $\Delta a = \Delta b$  ergibt sich für den Fehler des Flächenträgheitsmoments:

$$\frac{\Delta I}{I} = \sqrt{\left( \frac{3\Delta a}{a} \right)^2 + \left( \frac{\Delta a}{b} \right)^2}$$

Fehler des Elastizitätsmoduls (eckigen Stäbe)

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left( 3 \frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \left( -3 \frac{\Delta a}{a} \right)^2 + \left( -\frac{\Delta b}{b} \right)^2 + \left( -\frac{\Delta A}{A} \right)^2}$$

Wird der Mittelwert gebildet, lässt sich der Fehler des Elastizitätsmoduls wie folgt berechnen:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta E_1)^2 + (\Delta E_2)^2}$$

Fehler des Flächenträgheitsmoments

$$\frac{\Delta I_{mess}}{I_{mess}} = \sqrt{\left( 3 \frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \left( -\frac{\Delta E}{E} \right)^2 + \left( -\frac{\Delta A}{A} \right)^2}$$

### 4.2 Dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls

Zur Bestimmung des Fehler der Schwingungsdauer werden folgende Formeln genutzt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

$$\Delta T = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Bei diesen Formeln bezieht sich  $n$  auf die Anzahl der Stichproben,  $x_i$  sind die einzelnen Messergebnisse und  $\mu$  ist der Mittelwert dieser.

Ziel des zweiten Teil des Versuchs ist es das Torsionsmodul zu bestimmen, für dessen Fehler mit  $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$  gilt:

$$\frac{\Delta G}{G} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta B}{B}\right)^2 + \left(-4\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{l_2 \Delta l}{l_1(l_1 + l_2)}\right)^2 + \left(\frac{l_1 \Delta l}{l_2(l_1 + l_2)}\right)^2}$$

Außerdem wird das Richtmoment  $D$  für weitere Berechnungen genutzt, so dass auch sein Fehler bekannt sein muss:

$$\frac{\Delta D}{D} = \sqrt{\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l_1^2 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l_2^2 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)}\right)^2}$$

Für die Fehler der zu bestimmenden Trägheitsmomente gelten mit  $\Delta r_i = \Delta r_a = \Delta r$  folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \theta_{mess}}{\theta_{mess}} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l_1^2 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l_2^2 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)}\right)^2} \\ \frac{\Delta \theta_s}{\theta_s} &= \sqrt{\left(2\frac{\Delta T_s}{T_s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2} \\ \frac{\Delta \theta_{x\ mess}}{\theta_{x\ mess}} &= \sqrt{\left(\frac{(\Delta \theta_{mess})^2 + (\Delta \theta_s)^2}{(\theta_{mess} - \theta_s)^2}\right)} \\ \frac{\Delta \theta_{x\ theo}}{\theta_{x\ theo}} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{4(\Delta r)^2(r_a^2 + r_i^2) + (2h\Delta h)^2}{(r_a^2 + h^2/3 + r_i^2)^2}\right)} \end{aligned}$$

## 5 Messwerte

In den folgenden Tabellen beschreibt die Steigung  $A$  die Steigung welche durch das Plotten von  $s$  und  $F$  entsteht (siehe Abbildung 10)

### 5.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Tabelle 1: Eigenschaften der rechteckigen Stäbe

	Querschnittslänge a	Querschnittslänge b	L
Quad. Stab	$0.012 \text{ m}^2 \pm 0.0005 \text{ m}^2$	$0.012 \text{ m}^2 \pm 0.0005 \text{ m}^2$	$0.395 \text{ m} \pm 0.005 \text{ m}$
Rechteck. Stab	$0.0181 \text{ m}^2 \pm 0.0005 \text{ m}^2$	$0.0061 \text{ m}^2 \pm 0.0005 \text{ m}^2$	$0.395 \text{ m} \pm 0.005 \text{ m}$

Tabelle 2: Berechnete Größen der rechteckigen Stäbe

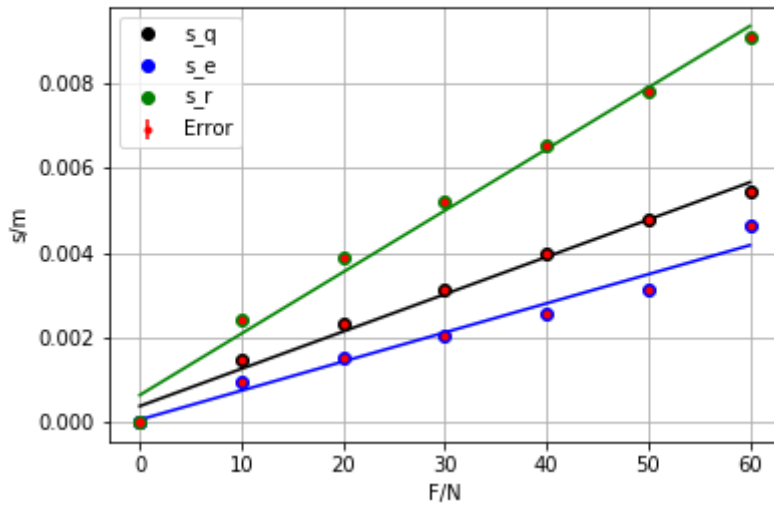
	Flächenträgheitsmoment $I$	Steigung $A$
Quad. Stab	$1.72 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \pm 0.227 \times 10^{-9} \text{ m}^4$	$8.82 \times 10^{-5} \text{ s}^2/\text{kg} \pm 4.44 \times 10^{-6} \text{ s}^2/\text{kg}$
Rechteck. Stab	$3.01 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \pm 0.351 \times 10^{-9} \text{ m}^4$	$6.88 \times 10^{-5} \text{ s}^2/\text{kg} \pm 5.78 \times 10^{-6} \text{ s}^2/\text{kg}$

Tabelle 3: Eigenschaft des Runden Stabes

Radius $r$	L	Steigung $A$
$0.006\,05\,\text{m} \pm 0.0005\,\text{m}$	$0.395\,\text{m} \pm 0.005\,\text{m}$	$14.5 \times 10^{-5}\,\text{s}^2/\text{kg} \pm 0.735 \times 10^{-5}\,\text{s}^2/\text{kg}$

Tabelle 4: Berechnete Elastizitätsmodule

	Elastizitätsmodul $E$
Quad. Stab	$135\,\text{GPa} \pm 20\,\text{GPa}$
Rechteck. Stab	$90\,\text{GPa} \pm 14\,\text{GPa}$
Durchschnitt	$117\,\text{GPa} \pm 12\,\text{GPa}$

Abbildung 10: Graph von  $s(F)$ 

## 5.2 Bestimmung des Torsionsmoduls

Im Rahmen der Messgenauigkeit konnte kein Unterschied der Zylinder festgestellt werden.

Tabelle 5: Werte beider Zylinder

Masse $m$	Höhe $h$	Innerer Radius $r_i$	Äußerer Radius $r_a$
$0.3527\,\text{kg} \pm 0.000\,05\,\text{kg}$	$0.0346\,\text{m} \pm 0.000\,05\,\text{m}$	$0.004\,025\,\text{m} \pm 0.000\,025\,\text{m}$	$0.02\,\text{m} \pm 0.000\,025\,\text{m}$

Tabelle 6: Werte der Drähte

Länge $l_1$	Länge $l_2$	Durchmesser $R$
$0.1885\,\text{m} \pm 0.0005\,\text{m}$	$0.2180\,\text{m} \pm 0.0005\,\text{m}$	$0.0003\,\text{m} \pm 0.000\,025\,\text{m}$

Tabelle 7: Gemessene Perioden und zugehörige Abstände zur Mitte

$d$	$T$
0.0473 m	3.085 s $\pm$ 0.0281 s
0.0573 m	3.578 s $\pm$ 0.0261 s
0.0673 m	4.114 s $\pm$ 0.0201 s
0.0773 m	4.590 s $\pm$ 0.0277 s
0.0873 m	5.152 s $\pm$ 0.0222 s
0.0973 m	5.681 s $\pm$ 0.0255 s
0.1073 m	6.214 s $\pm$ 0.0508 s
0.1173 m	6.794 s $\pm$ 0.0508 s
0.1273 m	7.326 s $\pm$ 0.0487 s
0.1373 m	7.819 s $\pm$ 0.0534 s
0.1473 m	8.40 s $\pm$ 0.0368 s

## 6 Auswertung

### 6.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Biegung

Aus der Messung beider Eisenstäbe ergab sich ein Elastizitätsmodul  $E$  von  $117 \text{ GPa} \pm 12 \text{ GPa}$ . Dieser Weicht von dem Literaturwert  $218 \text{ GPa}$  für Eisen um einen nicht vernachlässigbaren Wert ab. Dies könnte darauf zurückzuführen sein dass ggf. die Benutzten Eisenstäbe nicht aus reinem  $\alpha$ -Eisen waren sondern aus einer Mischung mit weiteren Elementen. Möglich ist ebenfalls das das Ergebnis verfälscht worden ist durch die Nullung der Zug- und Druckwaage, welche die Verformung  $s$  misst, da diese problematisch war.

Unter Verwendung der Eigenschaften des runden Stabes ließ sich zudem ein theoretischer Wert für das Flächenträgheitsmoment bestimmen  $I_{r \text{ theo}} = 1.052 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \pm 3.478 \times 10^{-10} \text{ m}^4$ . Dieser wert konnte jedoch ebenfalls aus den Messwerten bzw. der Steigung A ,des runden Stabes, errechnet werden  $I_{r \text{ mess}} = 1.208 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \pm 1.290 \times 10^{-10} \text{ m}^4$ . Ein Vergleich beider Messwerte lässt den Schluß dass die Messung der Elastizitätsmodule akkurat war und die Stangen nicht aus reinem Eisen bestanden.

## 6.2 Dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls

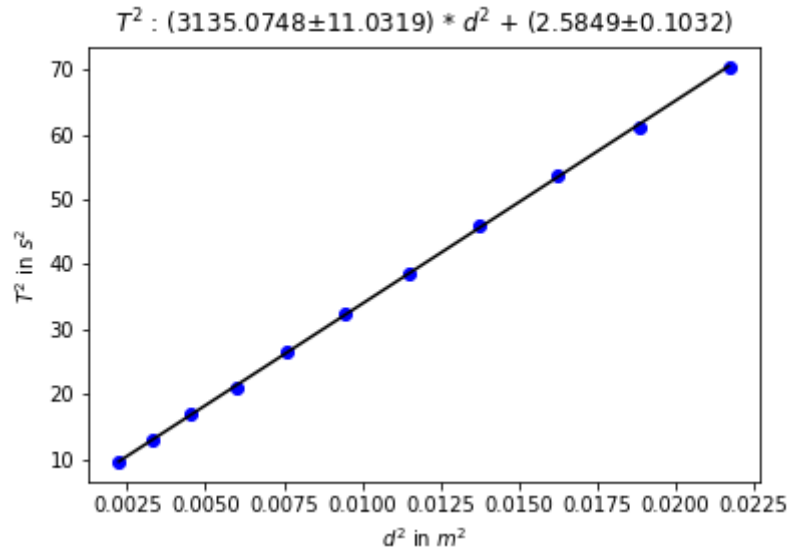


Abbildung 11:  $T^2$  gegen  $d^2$

Aus der Geradensteigung  $B$  des Plottes lässt sich ein Schubmodul  $G$  für den Draht von  $70.5 \text{ GPa} \pm 23.5 \text{ GPa}$  berechnen. Ein Vergleich mit dem Literaturwert, unter der Annahme es handelt sich um einen Stahldraht,  $80 \text{ GPa}$  zeigt dass der gemessene Wehrt annehmbar ist. Der große Fehler lässt sich zurückführen auf die Ungenauigkeit mit welcher die Dicke des Drahtes bestimmt wurde. Zudem wird es wahrscheinlich noch einen nicht irrelevanten Systematischen Fehler beim Messen der  $T$  geben aufgrund der Reaktionszeit des Menschen (ca.  $300 \text{ ms}$ ).

Unter Verwendung des Y-Achsenabschnittes des Plotes lässt sich das Trägheitsmoment des gesamten Systemes bestimmen  $\theta_{mess} = \theta_{s\ mess} + 2\theta_{x\ mess} = 0.000\ 582 \text{ kg/m}^2 \pm 0.000\ 275 \text{ kg/m}^2$ .

Unter Verwendung der Periodendauer ohne Gewichte  $T_s$  und Gleichung 24 lässt sich nun  $\theta_{s\ mess} = 0.000\ 382 \text{ kg/m}^2 \pm 0.000\ 180 \text{ kg/m}^2$  und  $\theta_{x\ mess} = 9.95 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2 \pm 14.4 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$  ermitteln.

Es ist jedoch ebenfalls möglich das Trägheitsmoment  $\theta_x$  direkt mittels der Gleichung 33 zu bestimmen. Es ergibt sich ein theoretischer Wert von  $\theta_{x\ theo} = 7.19 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2 \pm 5.47 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$ . Der Fehler beider werte ist zwar Groß jedoch lässt sich erkennen ,dass beide Werte in der selben Größenordnung liegen. Um eine genauere Aussage treffen zu können müsste der Zylinder besser vermessen werden und die Periode genauer bestimmt werden.

## 7 Zusammenfassung

Der Versuch welcher in zwei Teile unterteilt wurde ergab mehrere Ergebnisse. Zu nächst lässt sich sagen dass die Vermessen Eisenstäbe ein Elastizitätmodul von  $117 \text{ GPa} \pm 12 \text{ GPa}$  besitzen. Durch einen Vergleich mit dem Litaraturwert von Eisen lässt sich sagen, dass die Stäbe ggf. nicht aus reinem  $\alpha$ -Eisen bestanden. Diese Vermutung wird unterstützt durch einen Vergleich von dem gemessenen und theoretischen Flächenträgheitsmoment, da diese, im Rahmen der Fehler, übereinstimmen.

Durch den zweiten Teil des Versuches ergab sich ein Torsionsmodul bzw. Schubmodul für einen Draht von  $70.5 \text{ GPa} \pm 23.5 \text{ GPa}$ . Auf Grund des Aussehen des Drahtes und der Nähe des bestimmten Torsionsmodul zu dem von Stahl ( $80 \text{ GPa}$ ) war dieser vermutlich ein Stahldraht. Es wurde zudem, wie beim ersten Teil, eine weitere Größe gemessen und auch theoretisch bestimmt (Trägheitsmoment der Gewichte). Ein Vergleich dieser legte offen, dass die Messung einen großen Fehler beinhaltete welcher bei erneuter Durchführung verbessert werden sollte.

## 8 Anhang

Kraft	0 , 10, 20, 30, 40, 50, 60
Auflenkung Quad.	0,0.00146, 0.00232, 0.00312, 0.00397, 0.00481, 0.00545
Auslenkung Recht.	0,0.00095, 0.00151, 0.00204, 0.00256, 0.00311, 0.00463
Auslenkung Rund	0,0.00244, 0.00388, 0.00520, 0.00652, 0.00784, 0.00910

Tabelle 8: Messwerte Elastizität

$d$	$T$
keine Masse	[1.31 1.28 1.39 1.3 1.33 1.26 1.24 1.37 1.28 1.28]
0.0473 m	[3.03 3.11 3.12 3.07 3.15 2.99 3.2 2.94 3.03 3.21]
0.0573 m	[3.5 3.65 3.65 3.51 3.59 3.63 3.63 3.4 3.63 3.59]
0.0673 m	[4.07 4.2 4.1 4.12 4.1 4.06 4.05 4.14 4.06 4.24]
0.0773 m	[4.45 4.66 4.66 4.55 4.77 4.59 4.56 4.53 4.56 4.57]
0.0873 m	[5.13 5.03 5.18 5.19 5.19 5.23 5.09 5.06 5.21 5.21]
0.0973 m	[5.67 5.54 5.65 5.73 5.65 5.74 5.63 5.81 5.62 5.77]
0.1073 m	[6.16 6.2 6.23 6. 6.55 6.16 6.1 6.17 6.43 6.14]
0.1173 m	[6.75 6.67 6.56 6.95 6.89 6.58 6.88 6.73 6.89 7.04]
0.1273 m	[7.32 7.47 7.36 7.3 7.07 7.6 7.27 7.2 7.46 7.21]
0.1373 m	[7.76 7.94 7.92 7.79 7.96 7.59 8.02 7.98 7.67 7.56]
0.1473 m	[8.57 8.26 8.47 8.39 8.35 8.26 8.6 8.32 8.4 8.39]

Tabelle 9: Gemessene Perioden und zugehörige Abstände zur Mitte