MATEMÁTICAS ENSEÑANZA MEDIA
TEXTO GUÍA DE 1º A 4º MEDIO

EDICIÓN PAES
2022

JOSÉ MANUEL CARTES URZÚA

Autor: José Manuel Cartes Urzúa
Ingeniero Civil Estructural, Pontificia Universidad Católica de Chile.
Profesor de Matemáticas, Colegio Epullay Montessori de Santiago.
Deportista y Presidente Club Viverunning.

1° Edición: Marzo de 2009
Edición Actualizada PAES 2022: Marzo de 2022
Edición y diagramación: José Manuel Cartes Urzúa

I.S.B.N: 978-956-319-818-8

Autor: José Manuel Cartes Urzúa
Diseño Portada 1° Edición: Alejandro Rojas
Edición Digital

A Mis Padres: María Soledad y Manuel Eduardo,

Que siempre han estado conmigo.

PRÓLOGO

El presente texto corresponde a una actualización de la versión inicial de "Matemáticas Enseñanza Media", creada hace 13 años, cuyo objetivo es presentar, de manera simple y amigable, los temas consultados en la nueva Prueba de Admisión a la Educación Superior (PAES) 2022 de matemática, combinando conceptos, fórmulas y ejercicios resueltos paso a paso.

Este nuevo proceso de ingreso a la educación superior considera dos pruebas de matemáticas: Prueba de Competencia Matemática M1, que posee contenidos generales de enseñanza media, y que es obligatoria para todas las carreras. Y también una prueba específica de competencia Matemática M2, para carreras de fuerte índole matemático, como ingenierías, física, pedagogía en matemática, entre otras.

Al revisar los contenidos propuestos para la prueba M1, observamos unidades básicas de enseñanza media, con contenidos que en general deberían ser trabajados hasta segundo año medio. Sin embargo, producto de la pandemia y otras situaciones, es posible que muchos colegios hayan revisado esas temáticas en 3ero y 4to medio, o incluso jamás haberlas visto. Por otra parte, la Prueba M2, que promete ser una evaluación que apunte a habilidades más elevadas, considera los mismos contenidos que la prueba M1, pero además incorpora: habilidades superiores en el conjunto de los números reales, logaritmos, análisis de soluciones en sistemas de 2x2, profundización de ecuaciones de 2do grado y tipos de soluciones, homotecia, trigonometría, medidas de dispersión, probabilidad condicional y combinatoria. Este texto presenta todas las unidades tanto de las pruebas M1 como M2, por ende, un estudiante solo rinda M1, puede omitir los contenidos específicos.

Las matemáticas, así como otras disciplinas humanas, se deben ir construyendo paso a paso para lograr una base sólida, donde de manera gradual se irán generando los cimientos para consolidar un buen aprendizaje. De ahí la importancia de la constancia, disciplina, curiosidad y motivación por desarrollar el pensamiento matemático, junto con querer conocer cómo funciona la naturaleza. En efecto, la preparación para la PAES se parece más a un maratón que a una carrera de 100 metros planos, una carrera de largo aliento, donde el secreto del éxito no son solo los chispazos de inspiración, sino que las muchas horas de transpiración y determinación. Y para esto, es muy importante tener claro el sentido, y ser capaz de sostener un trabajo en el tiempo, por eso es muy necesario que te preguntes: ¿para qué haces todo esto?" y según mi modesta opinión, la respuesta debería estar asociada a tus verdaderas motivaciones intrínsecas como ser humano.

En relación al trabajo específico para preparar las pruebas de competencias matemáticas, la recomendación será complementar el estudio de este texto, con ejercitación extensiva de guías o textos en formato selección múltiple. Lo mínimo recomendado para un estudiante de 4to medio son alrededor de 60 ejercicios semanales. Es conveniente también sumar ensayos PTU completos cada cierto tiempo, especialmente cuando se acerque la fecha de la prueba. En estos ensayos, además de verificar el puntaje, se deben revisar los errores y recibir retroalimentación para así poder mejorar.

Concluyo este prólogo invitando a los estudiantes a entregar lo mejor de sí mismos, y confiar plenamente en que es posible lograr sus sueños si se lucha con alegría y convicción por ellos. Desde mi mirada como creyente, no me cabe duda que todos tenemos un propósito en esta vida, el cual está vinculado a descubrir tu verdadero talento, desarrollarlo, pulirlo y ponerlo al servicio, no solo de ti mismo, sino que también de los demás. Así la humanidad seguirá avanzando, podremos ser felices, y posiblemente habrá valido la pena este breve paso por acá.

¡¡¡El mayor de los éxitos en su preparación, especialmente en sus sueños y proyectos personales!!!

José Manuel Cartes Urzúa, marzo de 2022

INDICE

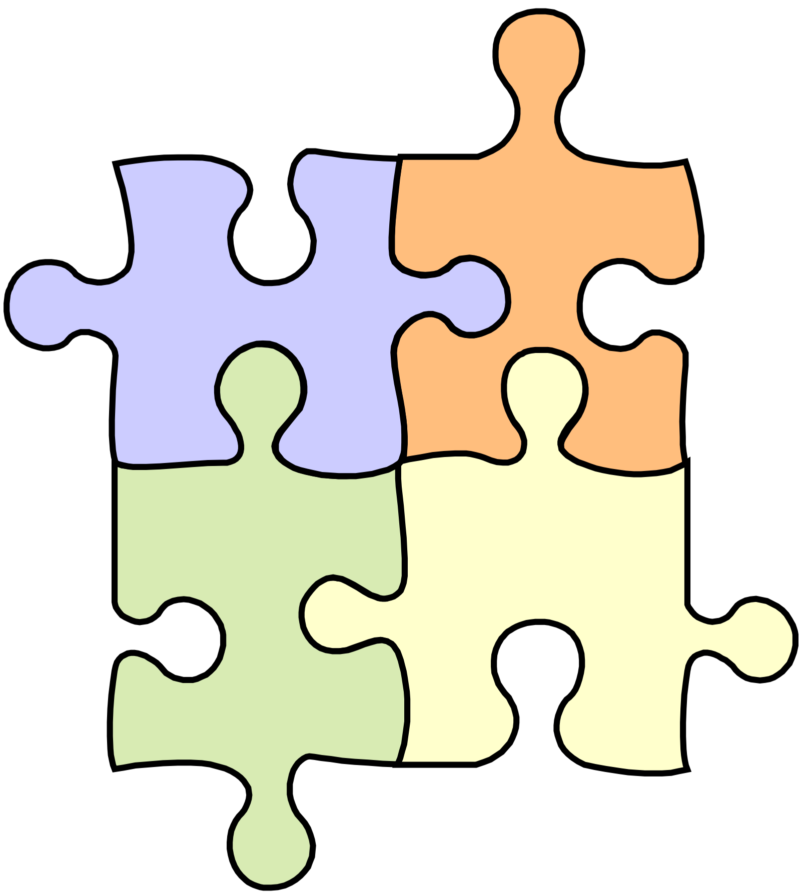
CAPÍTULO I: NÚMEROS, PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJE

CAPÍTULO II: ALGEBRA

CAPÍTULO III: ECUACIONES

CAPÍTULO IV:GEOMETRÍA

CAPÍTULO I
NÚMEROS, PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJE

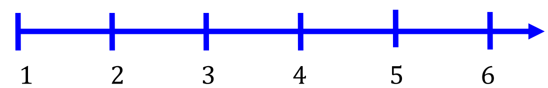


I.- LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

1.- Los números Naturales ($\mathbb{N}$)

1.1. Definición: El conjunto de los números naturales es aquel que incluye a los números entre el 1 y el infinito positivo. En sus orígenes, este conjunto se utilizaba básicamente para contar y ordenar.

$$\boxed{\mathbb{N} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, \dots, \infty\}}$$



- **Los Múltiplos** de un número $\boldsymbol{x}$ son aquellos que resultan de multiplicar $\boldsymbol{x}$ por cada uno de los números naturales. Por ejemplo, los múltiplos del 4 son: $\{4, 8, 12, 16, \dots\}$.

- **Los Divisores:** de un número $\boldsymbol{x}$, son todos aquellos que dividen en forma entera a $\boldsymbol{x}$. Por ejemplo, los divisores del 8 son: $\{1, 2, 4, 8\}$.

- **Reglas de divisibilidad:**
  - Un número es divisible por $\mathbf{2}$ si es par.
  - Un número es divisible por $\mathbf{3}$ si la suma de sus dígitos es divisible por 3.
  - Un número es divisible por $\mathbf{5}$ si termina en 0 o en 5.
  - Un número es divisible por $\mathbf{9}$ si la suma de sus cifras es divisible por 9.
  - Un número es divisible por $\mathbf{10}$ si termina en 0.

- **Números primos:** corresponden a los números naturales mayores que 1, cuyos únicos divisores son el 1 y el mismo número.

$$\boxed{\textbf{Primos} = \{\mathbf{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}, \dots\}}$$

Se denominan **números compuestos** a aquellos que se pueden escribir como el producto de dos o más números primos. Por ejemplo, el $\mathbf{24}$ es un número compuesto y presenta la siguiente **descomposición *en factores primos***: $\mathbf{24} = 12 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \underbrace{\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}}_{\text{Descomposición prima}} = \mathbf{2^3 \bullet 3} \leftarrow$ Factores primos son el 2 y el 3

- **El Mínimo común múltiplo (MCM)** de un conjunto de números naturales se obtiene multiplicando todos sus factores primos distintos, con sus respectivos exponentes. Si se repite un factor, se elije el de mayor exponente.
- **El Máximo común divisor (MCD)** de un conjunto de números naturales es el mayor de los divisores comunes a esos números.

Ejemplo 1 Obtengamos el MCM entre los números: $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8$.

1° Forma: Descomponiendo en factores primos: $2 = 2;\quad 3 = 3;\quad 4 = 2^2;\quad 5 = 5;\quad 8 = 2^3$
$\rightarrow\ MCM = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{120}$

2° Forma: Tabla:

2	3	4	5	6	8	÷ 2
1	3	2	5	3	4	÷ 2
	3	1	5	3	2	÷ 2
	3		5	3	1	÷ 3
	1		5	1		÷ 5
			1			

La columna derecha lleva los números que dividen a aquellos de los que se desea obtener su MCM.

$MCM = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \rightarrow \boldsymbol{MCM} = \mathbf{120}$

El procedimiento se completa cuando cada fila termina con cuociente igual a 1.

Ejemplo 2 Obtengamos el máximo común divisor (MCD) entre los números: $8,\ 24\ ,12$.

1° forma: Anotar los divisores de cada número y escoger al máximo común:

$$Div(4) = \{1,2,\mathbf{4}\}\ ;\ Div(8) = \{1,2,\mathbf{4},8\};\ Div(16) = \{1,2,\mathbf{4},8,16\} \ \rightarrow\ \boldsymbol{MCD = 4}$$

2° Forma: Tabla: a partir del producto de los números obtenidos en la columna derecha que dividen simultáneamente al 8, 12 y 24. Es decir: $\boldsymbol{MCD\ =\ 2 \cdot 2\ =\ 4}$

8	**24**	**12**	**÷ 2**
4	12	6	**÷ 2**
2	6	3	**÷ 2**
1	3	3	**÷ 3**
	1	1	

Observación: se le denomina conjunto de los números cardinales y se designa por $\mathbb{N}_\mathbf{0}$, a los naturales más el cero. Es decir:

$$\mathbb{N}_\mathbf{0}\ =\ \{\mathbf{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}, \dots, \infty\}$$

1.2. Fórmulas básicas en $\mathbb{N}$

Dentro de los números naturales, nos encontramos con conceptos muy recurrentes, los que se pueden generalizar por medio de fórmulas.

Concepto	**Fórmula**
Antecesor de $\boldsymbol{n}$	$n-1$
Sucesor de $\boldsymbol{n}$	$n+1$
Número par	$2n$
Número impar	$2n-1$
Números consecutivos	$n, n+1, n+2, \dots$
Pares consecutivos	$2n, 2n+2, 2n+4, \dots$
Impares consecutivos	$2n-1, 2n+1, 2n+3, \dots$
Múltiplos de 5 consecutivos	$5n, 5n+5, 5n+10, \dots$
Número de dos dígitos (xy)	$10x+y$

Donde $\boldsymbol{n}$ es un número natural

Observación:
par+par=par; par+impar=impar; impar+impar=par
par · par=par; par · impar=par; impar · impar= impar

Ejemplo 3 El promedio entre un número natural y su antecesor es $6{,}5$. ¿Cuál es el sucesor de ese número natural?

Solución: Los dos números naturales consecutivos cuyo promedio es $6{,}5$, son el 6 (antecesor) y el 7 (número aludido en el enunciado). Por lo tanto, el número buscado es el sucesor de 7, que corresponde a $\mathbf{8}$.

Ejemplo 4 ¿Por cuál de los siguientes números es divisible siempre la suma de 3 impares consecutivos?
I) 3 II) 6 III) 9

Solución: Partamos probando con algunos grupos de números impares consecutivos:

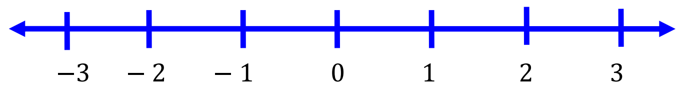
1° grupo: $1+3+5=9$, es divisible por 3 y por 9, pero no por 6.
2° grupo: $3+5+7=15$, es divisible solo por 3.
3° grupo: $5+7+9=21$, es divisible solo por 3.

Una vez descartados el 6 y el 9, intuimos que el 3 será siempre un divisor, lo que se confirma al observar que cada grupo difiere en 6 unidades del grupo anterior, por lo que, si el primer grupo es divisible por 3, los demás grupos también lo serán. Entonces: **sólo I) es correcta.**

2.- Los números Enteros ($\mathbb{Z}$)

2.1. Definición: El conjunto de los números enteros es aquel que está conformado por los números naturales, sus opuestos (aquellos con signo negativo) y el cero.

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, \mathbf{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}, \dots, \infty\}}$$



- **Enteros negativos:** $\mathbb{Z}^- = \{-\infty, \dots, \mathbf{-5, -4, -3, -2, -1}\}$
- **Enteros positivos:** $\mathbb{Z}^+ = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5}, \dots \infty\}$

$$\boxed{\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+}$$

2.2. Valor absoluto

El valor absoluto de un número representa la distancia entre este número y el 0 en la recta numérica. En términos prácticos, corresponde al número sin el signo.

Ejemplo 5 $|-2| = \mathbf{2}$; $|-100| = \mathbf{100}$; $|3-5| = |-2| = \mathbf{2}$; $|3| - |5| = 3 - 5 = \mathbf{-2}$

2.3. Elemento inverso aditivo

El inverso aditivo (u opuesto) de un número $\boldsymbol{x}$ es igual a $-\boldsymbol{x}$, y se cumple que: $\boxed{\boldsymbol{x + inverso\ aditivo\ de\ x = 0}}$
Donde $\mathbf{0}$ es el elemento neutro aditivo.

Ejemplo 6 $Inverso\ aditivo\ de\ (2) = \mathbf{-2}$; $Inverso\ aditivo\ de\ (-10) = \mathbf{10}$

2.4. Adición en $\mathbb{Z}$

Se tienen 2 casos:

- **Ambos números poseen igual signo**: se deben sumar los valores absolutos de los números y conservar el signo.
- **Números con distinto signo**: se deben restar ambos números y el resultado tendrá el mismo signo que el número con mayor valor absoluto.

Ejemplo 7 $-3 + -5 = \mathbf{-8}$; $-3 + 5 = \mathbf{2}$; $-5 + 3 = \mathbf{-2}$; $3 + 5 = \mathbf{8}$

2.5. Sustracción en $\mathbb{Z}$

La sustracción equivale a la adición del inverso aditivo:

Minuendo Sustraendo

$$\boxed{\boldsymbol{a - b = a + (-b)}}$$

Ejemplo 8 $5 - 7 = 5 + (-7) = \mathbf{-2}$; $-5 - 7 = -5 + (-7) = \mathbf{-12}$; $-5 - (-7) = -5 + (+7) = \mathbf{2}$

2.6. Multiplicación y división en $\mathbb{Z}$

El procedimiento es similar al empleado en $\mathbb{N}$, con la salvedad de que el signo resultante estará determinado por lo siguiente:

- Si ambas expresiones presentan **igual signo**: (+) con (+) o (–) con (–), el resultado presentará signo **(+)**.
- Si ambas expresiones presentan **distinto signo**: (–) con (+) o (+) con (–), el resultado presentará signo **(–)**.

Ejemplo 9 $5 \cdot -2 = \mathbf{-10}$; $-10 \div -2 = \mathbf{5}$; $-12 \cdot -2 = \mathbf{24}$; $5 \cdot 2 = \mathbf{10}$

- **Propiedad de las divisiones:** en toda división se cumple lo siguiente:

$$\boxed{\boldsymbol{Dividendo = Divisor \cdot Cuociente + Resto}}$$

Dividendo

Ejemplo 10 $11 \div 5 = \mathbf{2}$ Cuociente *Comprobación:* $\mathbf{11} = \mathbf{5} \cdot \mathbf{2} + \mathbf{1}$

Divisor

Resto: 1

2.7. Operatoria con paréntesis

Como norma general, se resuelven primero los paréntesis, a continuación, las potencias, luego las multiplicaciones y divisiones y finalmente las sumas y restas. Siempre se debe comenzar resolviendo los paréntesis más internos.

Ejemplo 11 Calculemos: $\{\mathbf{-5 - [-4 - 2 \cdot (-7 + 2 \cdot 3)]}\}$

$$\rightarrow \{-5 - [-4 - 2 \cdot (-7 + 6)]\} = \{-5 - [-4 - 2 \cdot (-1)]\} = \{-5 - [-4 + 2]\} = \{-5 - [-2]\} = \{-5 + 2\} = \mathbf{-3}$$

Ejemplo 12 En una fiesta de cumpleaños hay 237 golosinas para repartir entre 31 niños invitados. ¿Cuál es el número **mínimo** de golosinas que se necesita agregar para que cada niño invitado reciba la misma cantidad de golosinas, sin que sobre ninguna?

Solución: Al dividir 237 entre 31, se tiene que el cuociente es 7 y el resto es 20. Según esto, a cada niño le tocarían 7 golosinas, sobrando 20. Si se desea que cada niño reciba la misma cantidad de golosinas, sin que sobre ninguna, se deben agregar: 31 – 20 = **11 golosinas**.

Como comprobación, realizamos la división entre el nuevo total de golosinas: (237 + 11) = 248 y el número de niños: 31, lo que nos arroja un cuociente de 8 y un resto de 0, interpretándose como que cada niño recibirá 8 golosinas, no sobrando ninguna.

3.- Los números Racionales ($\mathbb{Q}$)

3.1. Definición: Los números Racionales corresponden a todos aquellos que pueden escribirse como una fracción, entendiendo por fracción al cuociente de números enteros, exceptuando el uso del 0 en el denominador.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} / \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z} \wedge \boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}\right\}$$

Al conjunto de los números racionales, pertenecen los números enteros, los decimales finitos, los decimales infinitos periódicos y los infinitos semiperiódicos. Los números decimales infinitos sin un período determinado no pertenecen a este conjunto.

3.2. Orden en $\mathbb{Q}$

- **Denominadores iguales**: será mayor la fracción que tenga el numerador mayor.
- **Denominadores distintos**: se igualan a partir de la obtención de MCM entre todos los denominadores, para luego amplificar la fracción. Finalmente se comparan los numeradores.
- **Numeradores iguales:** será mayor la que posea menor denominador.

Ejemplo 13 Ordenar de menor a mayor $2/3,\ 1/6\ y\ 5/8$.

Solución: Con los denominadores 3, 6 y 8 obtenemos como MCM al 24. Ahora debemos obtener una fracción equivalente a cada una de las anteriores, amplificándolas hasta obtener denominador 24:
- Amplificamos $\mathbf{2/3}$ por $\mathbf{8}$ obteniéndose $\mathbf{16/24}$.
- Amplificamos $\mathbf{1/6}$ por $\mathbf{4}$, obteniéndose $\mathbf{4/24}$.
- Amplificamos $\mathbf{5/8}$ por $\mathbf{3}$, obteniéndose $\mathbf{15/24}$.

Al ordenar de menor a mayor resulta: $4/24 < 15/24 < 16/24$. Entonces: $\mathbf{1/6 < 5/8 < 2/3}$

Ejemplo 14 Si $\boldsymbol{a}$ es un número natural mayor que 1, ¿cuál es el orden de menor a mayor entre las siguientes fracciones: $p = 3/a;\ \ t = 3/(a-1);\ \ r = 3/(a+1)$?

Solución: Dado que la relación será la misma para cualquier $a > 1$, podemos probar con $a = 2$ y reemplazar.

$p\ = \mathbf{3/2};\quad t\ = \mathbf{3/1};\quad r\ = \mathbf{3/3};$ Entonces: $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{p} < \boldsymbol{t}$

3.3. Elemento inverso multiplicativo

El inverso multiplicativo (o recíproco) de un número $\boldsymbol{x}$ es igual a $\mathbf{1}/\boldsymbol{x}$, y se cumple que:

$\boldsymbol{a} \cdot\ inverso\ multiplicativo\ de\ \boldsymbol{a}\ =\ \mathbf{1}$ Donde $\mathbf{1}$ es el elemento neutro multiplicativo.

Ejemplo 15 $inverso\ multiplicativo\ de\ (2)\ =\ \mathbf{1/2};$ $inverso\ multiplicativo\ de\ (-3/7)\ =\ \mathbf{-7/3}$

3.4. Operatoria básica

- **Suma o resta de fracciones:** se debe obtener denominador común y luego amplificar cada fracción por un valor tal que iguale su denominador al MCM de todos los denominadores. Finalmente se suman o restan los numeradores según sea el caso.

- **Multiplicación de fracciones:** el numerador resultante se calcula a partir del producto de los numeradores, mientras que el denominador se obtiene a partir del producto de los denominadores. Se recomienda simplificar antes de realizar la operación (se puede simplificar cualquier numerador con cualquier denominador en el caso de la multiplicación).

Ejemplo 16 *Calculemos:* $\frac{-7}{11}\cdot\left(\frac{7}{5}+\frac{1}{10}-\frac{3}{35}\right)\cdot\frac{2}{-3}$

$$\rightarrow \quad \frac{-7}{11}\cdot\left(\frac{7\cdot 14+1\cdot 7-3\cdot 2}{70}\right)\cdot\frac{2}{-3}=\frac{\cancel{-7}}{\cancel{11}}\cdot\left(\frac{\cancel{99}}{\cancel{70}}\right)\cdot\frac{2}{-3}=\frac{-1}{1}\cdot\frac{\cancel{9}}{\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{-3}}=\frac{-1}{1}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{-1}=\frac{3}{5}$$

- **División de fracciones:** se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor, es decir: "se invierte el divisor y se multiplica normalmente".

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{d}\cdot\frac{d}{c}$$

- **Número mixto:** corresponde a un número entero más una fracción menor que la unidad (fracción propia). La relación es la siguiente:

$$A\frac{m}{n}=A+\frac{m}{n}=\frac{A\cdot n+m}{n}$$

Ejemplo 17 *Calculemos:* $1\frac{1}{2}\div\left(\frac{\frac{-5}{7}}{\frac{8}{-7}}\right)$

$$\rightarrow \quad \frac{3}{2}\div\left(\frac{-5}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{-7}}{8}\right)=\frac{3}{2}\div\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{8}}{5}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$$

3.5. ¿Cómo expresar números decimales finitos en forma de fracción?

Cuando se trata de decimales finitos, el numerador llevará el número sin comas y el denominador "un **1** acompañado de tantos **0** como cifras decimales tenga el número".

Ejemplo 18 $1,15=\frac{115}{100}=\frac{23}{20}$

2 cifras decimales

Tenemos 2 cifras decimales, por lo tanto el denominador lleva ''un **1** acompañado de **dos 0**''. Se lee **115 centésimos**. Luego simplificamos.

Para expresar una fracción en un número decimal se debe dividir el numerador por el denominador.

Ejemplo 19 $\frac{5}{8}=5\div 8=0,625$

50
20
40
0//

Recordar que cuando el divisor es mayor que el dividendo se coloca un cero en el cuociente y luego una coma, mientras que al dividendo se le agrega un cero.

3.6. ¿Cómo expresar números periódicos y semiperiódicos en fracción?

Para transformar un número decimal periódico o semiperiódico a fracción, se debe colocar el número completo sin comas, restarle la parte no periódica y dividir el resultado por "**tantos 9 como decimales periódicos existan** y **tantos 0 como decimales no-periódicos existan**".

Ejemplo 20 $\mathbf{3,\overline{45}} = \frac{345-3}{99} = \mathbf{\frac{342}{99}}$; $\mathbf{8,1\overline{5}} = \frac{815-81}{90} = \mathbf{\frac{734}{90}}$; $\mathbf{0,1\overline{54}} = \frac{154-1}{990} = \mathbf{\frac{153}{90}}$

Ejemplo 21 Ordenar de mayor a menor: $a = 0,\overline{383}$; $b = 0,3\overline{83}$; $c = 0,38\overline{3}$; $d = 0,383$

Solución: Para poder comparar, escribimos un par de decimales más a cada número:

$a \approx 0,383/\mathbf{38}$; $b \approx 0,383/\mathbf{83}$; $c \approx 0,383/\mathbf{33}$; $d \approx 0,383/\mathbf{00}$; De lo anterior es claro que: $\boldsymbol{b > a > c > d}$

Ejemplo 22 Juan, Arturo y Marcelo corrieron los 100 metros planos. Juan demoró 11,3 s; Arturo 11,02 s y Marcelo 11,2 s. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) Juan llegó después de Marcelo
II) Marcelo llegó 18 centésimas después de Arturo
III) Arturo llegó primero

Solución:
- Dado que 11,3 (Juan) > 11,2 (Marcelo) >11,02 (Arturo) → **I) y III) son verdaderas**
- 11,2 – 11,02 = 0,18 segundos = 18 centésimas → **II) es verdadera**

Ejemplo 23 Calculemos: $\mathbf{\frac{2,6 - 2\cdot 3,8}{2,6\cdot 6 + 3,8}} \rightarrow \frac{2,6-7,6}{15,6+3,8} = \frac{-5}{19,4} = \frac{-50}{194} = \mathbf{\frac{-25}{97}}$

Amplificamos por 10 para eliminar el decimal y simplificar más fácilmente.

Ejemplo 24 Una persona debe recorrer 12,3 kilómetros y ha caminado 7.850 metros, ¿cuánto le falta por recorrer?

Solución: Lo primero es dejar ambas cantidades en una unidad común, preferentemente en la unidad menor (para no usar decimales), que en este caso es el metro. Entonces 12,3 km = 12,3 · 1.000 m = 12.300 m. Entonces, lo que falta por recorrer es: 12.300 m – 7.850 m = **4.450 metros = 4,45 kilómetros.**

Ejemplo 25 Calculemos: $\mathbf{\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{0,\overline{2}}}}} \rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{9}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{9}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{11}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{11}} = \frac{1}{\frac{13}{11}} = \mathbf{\frac{11}{13}}$

Notar que: $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

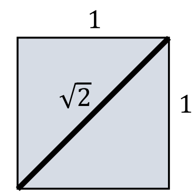
3.7. Fracción de un número

Para obtener una fracción de un número, se debe multiplicar la fracción por aquel número. En términos prácticos: **de** = **multiplicación**.

Ejemplo 26 Calculemos los 2/3 **de** 30. → $\frac{2}{3} \bullet 30 =$ **20**

10	10	10

4.- Los números Irracionales ($\mathbb{I}$)



4.1. Definición: Los números Irracionales corresponden a todos los números decimales infinitos sin período, razón por la cual no pueden expresarse como una fracción. Por ejemplo, las raíces no exactas son irracionales. La intersección entre los números racionales y los irracionales es vacía.

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \phi$$

Posiblemente el primer número irracional que se descubrió fue la "raíz de dos", que se obtiene a partir de calcular la diagonal de un cuadrado de lado uno por medio del teorema de Pitágoras ($\sqrt{2} \approx 1{,}414 \ldots$).

Ejemplo 27 Son irracionales: $\pi = 3{,}14 \ldots$; $\sqrt{3} = 1{,}732 \ldots$; $log2 = 0{,}301 \ldots$
Son racionales: $3{,}14$; $\sqrt{4} = 2$; $log10 = 1$

4.2. Aproximaciones

Dado que en muchas ocasiones es engorroso trabajar con números que presentan muchos decimales, éstos se pueden aproximar usando **redondeo** (se eliminan los decimales a partir de un cierto dígito, pero se aumenta en una unidad este dígito, si el que estaba a la derecha era mayor o igual que 5) o **truncamiento** (se eliminan los decimales a partir de un cierto dígito).

Ejemplo 28 Aproximemos el número ***125,475*** según lo que se indica:

Redondeado a los décimos	*Truncado a los décimos*	*Redondeado a los centésimos*	*Truncado a los centésimos*
125,5	***125,4***	***125,48***	***125,47***

5.- Los números Reales ($\mathbb{R}$)

5.1. Definición: El conjunto de los números Reales corresponde a la unión entre el conjunto de los números Racionales y el conjunto de los números Irracionales. Son todos aquellos números que pueden expresarse en forma de decimal finito o infinito. Es lo que conocemos hoy como toda la recta numérica.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

5.2. Limitaciones de los Reales

Existen muchos casos que escapan al conjunto de los números reales, por ejemplo:

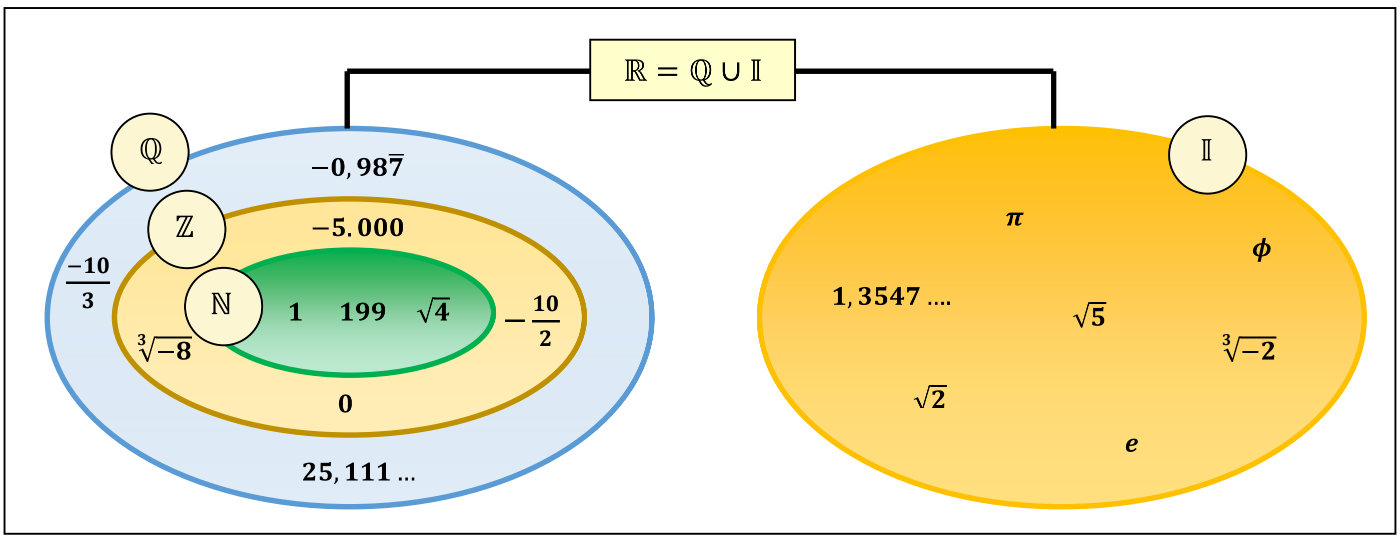
- Raíces de índice par y cantidad subradical negativa, por ejemplo: $\sqrt{-4}$
- Cuocientes con divisor igual a cero, por ejemplo: 1/0
- Potencia con base cero y exponente cero: 0^0

Ejemplo 29 Repaso teoría de conjuntos. Dados los conjuntos: *A = {1, 2, 3, 4}*, *B = {3, 4, 5}* y *D = {3, 4}*

Entonces:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (unión de conjuntos)
$A \cap B = \{3, 4\}$ (intersección de conjuntos)
$D \subset A$ (D es subconjunto de A)
$B \not\subset A$ (B no es subconjunto de A)
$A - B = \{1, 2\}$ (diferencia entre A y B: "lo que tiene A y no tiene B")

En el siguiente diagrama se presentan los distintos conjuntos numéricos estudiados. Además, se incorporan como ejemplo, algunos de los elementos de estos conjuntos.



5.3. Propiedades de los reales

Propiedad	Adición	*Multiplicación*
Clausura	$\forall\, a,b \in R:\ a+b \in R$	$\forall\, a,b \in R:\ a \cdot b \in R$
Conmutativa	$\forall\, a,b \in R:\ a+b = b+a$	$\forall\, a,b \in R:\ a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$\forall\, a,b,c \in R: (a+b)+c = a+(b+c)$	$\forall\, a,b,c \in R: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Elemento Neutro	$\forall\, a \in R, \exists\, (0) \in R \,/\, a+0 = a$	$\forall\, a \in R, \exists\, (1) \in R \,/\, a \cdot 1 = a$
Elemento Inverso	$\forall\, a \in R, \exists (-a) \in R \,/\, a+(-a) = 0$	$\forall\, a \in R, \exists (a^{-1}) \in R \,/\, a \cdot (a^{-1}) = 1$
Distributiva	$\forall\, a,b,c \in R:\ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	

6.- Regularidades numéricas

Muchas secuencias, tanto de tipo gráficas como numéricas, cumplen con ciertos patrones para los cuales se puede obtener una regla de formación. Esta regla de formación usualmente es una fórmula que genera una sucesión numérica. La sucesión se construye a partir de ir reemplazando cada uno de los números naturales en la fórmula. Por ejemplo, el primer término de una sucesión se obtiene cuando n = 1, el segundo término cuando n = 2, y así sucesivamente.

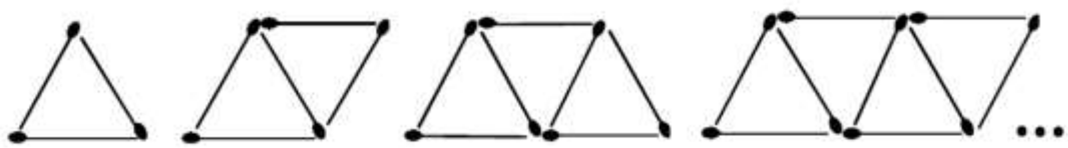
Ejemplo 30 Encontrar la expresión que representa el término n-ésimo de la secuencia: $\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}, \ldots$

Solución: Para obtener el patrón general, se analiza el numerador (siempre hay un 4) y el denominador, que está conformado por potencias de 3, es decir: $\frac{4}{3^1}, \frac{4}{3^2}, \frac{4}{3^3}, \frac{4}{3^4}, \ldots$

Dado que los exponentes de los denominadores coinciden con el número del término (por ej., para n = 1 se tiene 3^1, para n = 2 se tiene 3^2, etc...), podemos escribir el término general de la sucesión como:

$$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3^n}}$$ **(expresión general de la sucesión)**

Ejemplo 31 Dadas las siguientes figuras:



¿Cuántos triángulos se formarán con 71 fósforos, si se sigue con la secuencia?

Solución: La idea es encontrar una fórmula que permita calcular el número de fósforos (f) en relación al número de triángulos (n), para lo cual se estudian los primeros casos, tal como se muestra en la tabla.

Figura (n)	Fósforos (f)
$\mathbf{1}$	$\mathbf{3} = 2 \cdot 1 + 1$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{5} = 2 \cdot 2 + 1$
$\mathbf{3}$	$\mathbf{7} = 2 \cdot 3 + 1$
$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{2n + 1}$

La fórmula general que se obtiene, es $\boldsymbol{f = 2n + 1}$ (notar que el término $2n$ está relacionado con que a cada figura se le van agregando 2 fósforos). Por lo que si disponemos de 71 fósforos: $71 = 2n + 1 \rightarrow 2n = 70 \rightarrow \boldsymbol{n = 35}$, lo que implica se podrán formar **35 triángulos.**

Ejemplo 32 ¿Cuál es la última cifra del número 4^{271}?

Solución: Calculemos las primeras potencias y analicemos la última cifra de cada una:

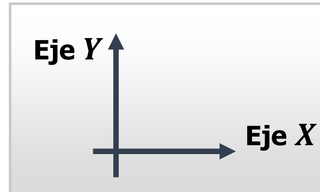
Exponente	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Resultado	$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1.024$
Ultima cifra	**4**	**6**	**4**	**6**	**4**

Se observa que aquellas potencias de exponente impar presentan como última cifra el número 4, mientras que las de exponente par el número 6. Dado que 271 es impar, ***la última cifra de 4^{271} es 4.***

II.- PROPORCIONALIDAD

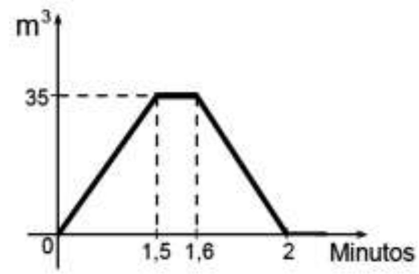
1.- Tablas y gráficos

Dentro de las formas de presentar la información, las tablas y los gráficos constituyen una poderosa herramienta que nos permite ordenar y visualizar los datos de forma eficiente. En general, un gráfico está compuesto por dos ejes perpendiculares, denominados eje X (abscisas) y eje Y (ordenadas).



Entendemos por **variable,** a una característica de la realidad, de sus individuos u objetos, la cual puede mostrar diferentes valores de un elemento a otro. Ejemplos de variables son: edad, estatura, número de hermanos, residencia, color de ojos, costo, tiempo, etc.

Ejemplo 1 El gráfico de la figura, representa el volumen de agua que hay en un estanque en un período de tiempo. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?



I) El volumen máximo de agua se mantiene por 1 segundo.
II) No hay agua en el estanque a los 2 minutos.
III) A los 1,55 minutos hay 35 m³ de agua.

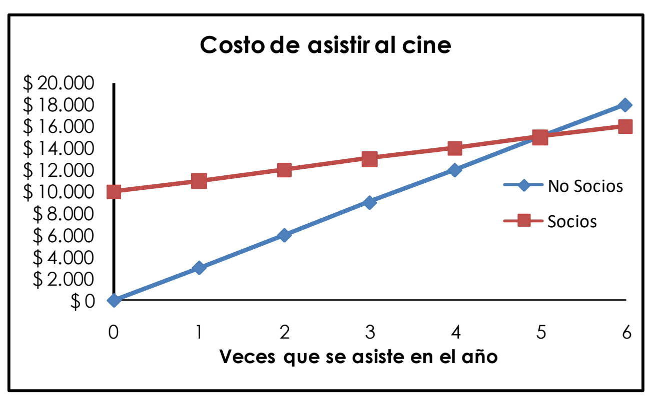
Solución:

I) El volumen máximo se mantiene por 0,1 minutos = 0,1 · 60 = 6 segundos → **I) es falsa**
II) Según el gráfico, a partir de los 2 segundos no hay agua en el estanque → **II) es verdadera**
III) 1,55 minutos está entre 1,5 y 1,6 minutos, valor en el cual la cantidad de agua en el estanque se mantiene constante en su máximo, que corresponde a 35 m³ → **III) es verdadera**

Ejemplo 2 Para ser socios de un cine hay que inscribirse y cancelar una cuota anual de $10.000, con ello uno recibe un boletín mensual con todas las películas que se exhibirán en el mes y paga solo $1.000 por la entrada a cada película. Si los que no son socios pagan una entrada de 3.000, ¿conviene ser socio de este cine?

Solución: Si conviene o no ser socio, dependerá del número de veces que asistamos al cine durante el año. Realicemos una tabla y posteriormente un gráfico que describa la situación.

Asistencia	Costo No socios	Costo Socios
0	$0	$10.000
1	$3.000	$11.000
2	$6.000	$12.000
3	$9.000	$13.000
4	$12.000	$14.000
5	**$15.000**	**$15.000**
6	$18.000	$16.000



Del gráfico es claro que, si se asiste **más de 5 veces** al cine durante el año, **conviene ser socio**.

2.- Concepto de razón y proporción

2.1. Razón

Se denomina razón entre dos cantidades $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, distintas de cero, a la comparación entre éstas por medio de un cuociente, lo que se anota como: $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ o bien $\boldsymbol{a} \div \boldsymbol{b}$, y se lee: "$\boldsymbol{a}$ es a $\boldsymbol{b}$".

En una razón:

- El numerador $(\boldsymbol{a})$ se denominada **antecedente**
- El denominador $(\boldsymbol{b})$ se denomina **consecuente**

Ejemplo 3 Supongamos, que unas vacaciones a Brasil cuestan U$500, mientras que unas vacaciones a Europa tienen un costo de US$ 2.000. Estas cantidades se pueden comparar a través de una **diferencia**, indicando que las vacaciones a Europa son **US$1.500 más caras** que las vacaciones a Brasil, o bien, se pueden comparar mediante una **razón**, señalando que el viaje a Europa **es 4 veces más caro** que el viaje a Brasil. Es decir, la razón entre el costo del viaje a Europa y el del viaje a Brasil es $\mathbf{4 \div 1}$.

2.2. Proporción

Se denomina proporción, a la igualdad entre dos razones: $\boxed{\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}}$ o bien: $\boldsymbol{a} \div \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \div \boldsymbol{d}$

Extremos

Medios

Donde a, b, c y d son distintos de cero y se lee **"** $\boldsymbol{a}$ es a $\boldsymbol{b}$ como $\boldsymbol{c}$ es a $\boldsymbol{d}$ **"**.

2.3. Teorema fundamental de las proporciones

En toda proporción se cumple lo siguiente: $\boxed{\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}}$

Ejemplo 4 3/5 y 6/10 son dos razones iguales, por lo que forman una proporción, lo cual se puede comprobar a partir del teorema fundamental:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \rightarrow 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5 \rightarrow \mathbf{30 = 30 \ \ ok}$$

Ejemplo 5 Las alturas de dos edificios están en la razón 4 : 5 . Si el primero mide 20 m, ¿cuánto mide el segundo?

Solución:

Edificio 1 →
Edificio 2 →

$$\frac{4}{5} = \frac{20m}{x} \rightarrow x = \frac{20m \cdot 5}{4} \rightarrow \boldsymbol{x = 25\ m}$$

A esta forma de despejar x en una proporción, se le denomina "**regla de tres**".

Ejemplo 6 $\boldsymbol{P}$ objetos valen $\$\boldsymbol{S}$, ¿cuánto valen $\boldsymbol{N}$ de esos objetos?

Solución: Si designamos por $\boldsymbol{x}$ a la cantidad buscada, tendremos:

Objetos	Costo
$\frac{P}{N}$ =	$\frac{\$S}{x}$

$$\rightarrow\ \boldsymbol{x} = \frac{\$\boldsymbol{SN}}{\boldsymbol{P}}$$

2.4. Cambios en los términos de una proporción

A partir de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se pueden formar las siguientes proporciones:

- Intercambiando medios: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
- Intercambiando extremos: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
- Invirtiendo: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

2.5. Proporción múltiple

Corresponde a una serie de razones iguales (tres o más). Por ejemplo si: $\boldsymbol{a \div b = c \div d = e \div f}$, tendremos:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = K}}$$

Se lee: " $\boldsymbol{a}$ es a $\boldsymbol{b}$ como $\boldsymbol{c}$ es a $\boldsymbol{d}$ como $\boldsymbol{e}$ es a $\boldsymbol{f}$ ".

Donde $\boldsymbol{K}$ es el valor de cada una de estas razones.

Ejemplo 7 María, Rocío y Francisca se reparten 48 dulces en la razón 5 ÷ 4 ÷ 3. Calcular la cantidad de dulces que obtiene cada una.

Solución: Si designamos por $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{F}$ a las cantidades de dulces que reciben María, Rocío y Francisca respectivamente, podremos formar la siguiente proporción múltiple:

$$\frac{M}{5} = \frac{R}{4} = \frac{F}{3} = K$$

De lo anterior se desprenden 3 ecuaciones: $M = 5K$; $R = 4K$; $F = 3K$

Por lo tanto: María recibe $\boldsymbol{5K}$ dulces, Rocío recibe $\boldsymbol{4K}$ dulces y Francisca recibe $\boldsymbol{3K}$ dulces. Entonces, si sumamos todos los dulces, tendremos la siguiente igualdad: $\boldsymbol{5K + 4K + 3K = 48}$.

Resolviendo esta ecuación se obtiene: $\boldsymbol{12K = 48}\ \rightarrow\ \boldsymbol{K = 4}$.

Por lo tanto, las cantidades recibidas son:

María: $5 \cdot 4\ = \boldsymbol{20}$ dulces,
Rocío: $4 \cdot 4\ = \boldsymbol{16}$ dulces
Francisca: $3 \cdot 4\ = \boldsymbol{12}$ dulces.

3.- Proporcionalidad Directa

3.1. Definición: Dos magnitudes $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son directamente proporcionales si su **razón es constante,** lo que se traduce en que si una variable aumenta, la otra aumenta en similar proporción. Por ejemplo si el valor de $\boldsymbol{a}$ se duplica, el valor de $\boldsymbol{b}$ también se duplica.

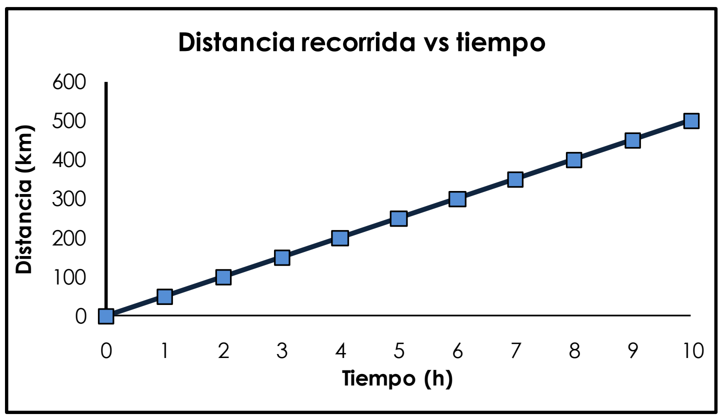
Algebraicamente se tiene: $\boxed{\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{K}}$ También se puede expresar como: $\boxed{\dfrac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{b_1}} = \dfrac{\boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{b_2}}}$

Donde $\boldsymbol{K}$ es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo 8 Un automóvil se desplaza a **50** km/h. ¿Cuál será la distancia recorrida al cabo de **15** horas?, ¿y la distancia recorrida a las $\boldsymbol{n}$ horas?

<u>Solución</u>: Comencemos realizando una tabla y un gráfico que nos presenten la distancia recorrida al final de cada hora:

Tiempo (horas)	Distancia (Km)
1	50
2	100
3	150
4	200
5	250
6	300
7	350
8	400
9	450
10	500



En la tabla se observa que la razón (o división) entre las variables (tiempo/distancia), toma siempre en el mismo valor: $\mathbf{1/50} = \mathbf{2/100} = \mathbf{3/150} = \cdots = \mathbf{1/50}$, valor que corresponde a la constante de proporcionalidad de este problema. Por otra parte, el gráfico es una línea recta que pasa por el origen. Entonces, para conocer la distancia cubierta a las 15 horas, debemos igualar razones y formar una proporción:

Tiempo →
Distancia →
$$\frac{1}{50} = \frac{15}{x}$$
Ahora intercambiamos los medios para visualizar cada variable como columna:

En proporcionalidad directa siempre podemos usar " regla de tres".

Tiempo	**Distancia**
1	50
15	x

$$\frac{1}{15} = \frac{50}{x} \rightarrow x = \frac{50 \cdot 15}{1} \rightarrow \boldsymbol{x = 750\ km}$$ **(distancia recorrida)**

Y si queremos conocer la distancia recorrida a las $\boldsymbol{n}$ horas:

$$\boxed{\frac{1}{n} = \frac{50}{x}} \rightarrow x = \frac{50 \cdot n}{1} \rightarrow \boldsymbol{x = 50n\ km}$$ **(distancia recorrida)**

4.- Proporcionalidad Inversa

4.1. Definición: Dos magnitudes $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son inversamente proporcionales, **si su producto es constante** lo que se traduce en que si una variable aumenta, la otra disminuye en similar proporción. Por ejemplo si el valor de $\boldsymbol{a}$ se duplica, el valor de $\boldsymbol{b}$ se reduce a la mitad.

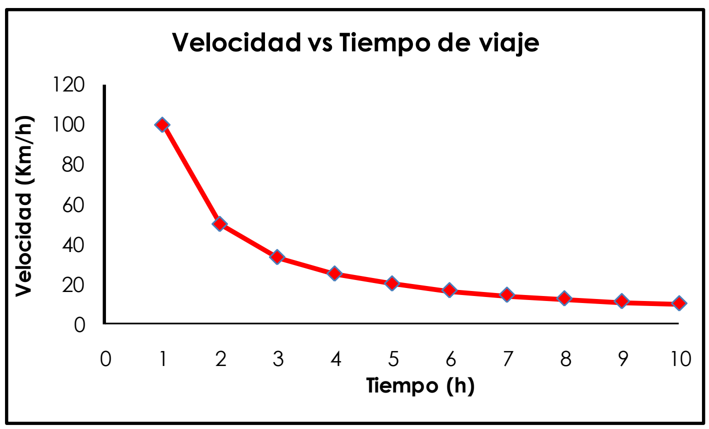
Algebraicamente se tiene: $\boxed{\boldsymbol{a \cdot b = K}}$ También se puede expresar como: $\boxed{\boldsymbol{a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2}}$

Donde $\boldsymbol{K}$ es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo 9 En un cierto viaje, debemos recorrer **100** kilómetros. ¿A qué velocidad debemos viajar para demorarnos **20** horas?, ¿y si queremos demorarnos $\boldsymbol{n}$ horas?

Solución: Realicemos una tabla y un gráfico donde se indique la velocidad a la que debemos viajar en función del tiempo de viaje. Se considera, en todos los casos, que la distancia a cubrir se mantiene constante en 100 kilómetros.

Tiempo (horas)	Velocidad (Km/h)
1	100
2	50
3	33,3
4	25
5	20
6	16,6
7	14,3
8	12,5
9	11,1
10	10



De la tabla se observa que el producto entre las variables (velocidad/tiempo), toma siempre en el mismo valor: $1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 3 \cdot 33,\overline{3} = \mathbf{100}$, valor que corresponde a la constante de proporcionalidad de este problema. Por otra parte, el gráfico es una curva que nunca toca los ejes, llamada hipérbola.

Entonces, si queremos demorarnos **20** horas, debemos igualar productos:

En proporcionalidad inversa no se aplica "regla de tres" .

Tiempo		Velocidad
1	$\cdot$	100
20	$\cdot$	x

$$\rightarrow \; 1 \cdot 100 = 20 \cdot x \; \rightarrow \; x = \frac{1 \cdot 100}{20} \; \rightarrow \; \boldsymbol{x = 5\, km/h}$$ **(velocidad de viaje)**

Y si queremos demorarnos $\boldsymbol{n}$ horas:

Tiempo		Velocidad
1	$\cdot$	100
n	$\cdot$	x

$$\rightarrow \; x = \frac{1 \cdot 100}{n} \; \rightarrow \; \boldsymbol{x = \frac{100}{n}\, km/h}$$ **(velocidad de viaje)**

Ejemplo 10 En la tabla adjunta, z es directamente proporcional a $1/y$. Según los datos registrados, ¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{a} / \boldsymbol{b}$?

z	y
8	2
$\boldsymbol{a}$	4
1	16
1/4	$\boldsymbol{b}$

Solución: Si z es directamente proporcional a $1/y$, entonces: $\dfrac{z}{\left(\frac{1}{y}\right)}$ = constante → $z \cdot y$ = constante

La constante de proporcionalidad se obtiene a partir del primer caso: $8 \cdot 2 = \mathbf{16}$, luego:

$a \cdot 4 = 16 \rightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{4}$ y $1/4 \cdot b = 16 \rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{64}$ Entonces: $\boldsymbol{a} / \boldsymbol{b} = \mathbf{4/64} = \mathbf{1/16}$

Ejemplo 11 En un curso de 40 estudiantes, la razón entre mujeres y hombres es $\boldsymbol{m} : \boldsymbol{h}$. Encontrar una expresión que represente el número de mujeres.

Solución: Si la razón entre mujeres y hombres es $\boldsymbol{m} : \boldsymbol{h}$, las cantidades de cada tipo de persona serán proporcionales a lo siguiente:

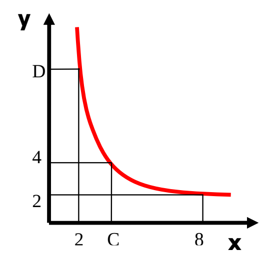
- Mujeres: $\boldsymbol{m}$
- Hombres: $\boldsymbol{h}$ →
- Total: $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{h}$

Para conocer la cantidad de mujeres (x), podemos plantear la siguiente proporción: →

	Razón		Realidad
Mujeres / Total	$\dfrac{m}{m+h}$	$=$	$\dfrac{x}{40}$

→ $\boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{40}\boldsymbol{m}}{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{h})}$

Ejemplo 12 Según el gráfico de la figura, **x** e **y** son inversamente proporcionales. ¿Cuál es el valor de C - D?



Solución: Primero encontramos la constante de proporcionalidad a partir de los datos del gráfico, donde: $D \cdot 2 = C \cdot 4 = 2 \cdot 8 = \boldsymbol{K}$.

Entonces: $\boldsymbol{K} = \mathbf{16} \rightarrow \boldsymbol{D} = \mathbf{8} \rightarrow \boldsymbol{C} = \mathbf{4} \rightarrow \boldsymbol{C} - \boldsymbol{D} = \mathbf{-4}$

Ejemplo 13 En un balneario, hay 2.500 residentes permanentes. En el mes de febrero, de cada seis personas sólo una es residente permanente, ¿cuántas personas hay en febrero?

Solución: La razón entre los residentes permanentes y el total de personas en febrero es 1:6, entonces:

	Razón		Realidad
Permanentes / Total	$\dfrac{1}{6}$	$=$	$\dfrac{2.500}{x}$

→ $x = \dfrac{2.500 \cdot 6}{1}$ → $\boldsymbol{x} = \mathbf{15.000}\ \boldsymbol{personas\ hay\ en\ febrero}$

Ejemplo 14 La escala de un mapa es 1 : 500.000. Si en el mapa la distancia entre dos ciudades es 3,5 cm, ¿cuál es la distancia real, en kilómetros, entre ellas?

Solución: Existe proporcionalidad directa entra las distancias del mapa y las distancias reales, entonces:

Mapa		Realidad
$\dfrac{1}{3{,}5cm}$	$=$	$\dfrac{500.000}{x}$

→ $x = \dfrac{500.000 \cdot 3{,}5cm}{1}$ → $\boldsymbol{x} = \mathbf{1.750.000}\ \boldsymbol{cm} = \mathbf{1.750}\ \boldsymbol{km}$

Para transformar de cm a km, dividimos por 1.000 :

5.- Proporcionalidad Compuesta

5.1. Definición: La proporcionalidad compuesta se aplica en problemas donde intervienen tres o más variables. Para resolver estos problemas, se debe detectar previamente el tipo de proporcionalidad existente entre las variables.

Las **magnitudes directamente proporcionales se dividen** (razón constante) y las **inversamente se multiplican** (producto constante) para así dar lugar a una constante global.

Ejemplo 15 Si **10** máquinas fabrican **4.000** unidades de un producto en **5** días, ¿cuántas máquinas serán necesarias para **triplicar** la producción en **6** días trabajando la misma cantidad de horas diarias?

Solución:

	Nº de Máquinas	Unidades de producto	Días
Situación conocida	**10**	**4.000**	**5**
Situación por conocer	**x**	**12.000**	**6**

La incógnita es el **número de máquinas**. Para obtener su valor, se debe analizar el tipo de proporcionalidad existente entre las variables:

- **Nº de máquinas** es **directamente proporcional** a las **unidades de producto**, si se mantienen los días constantes, ya que si aumentan las máquinas deberían aumentar también las unidades de producto que se fabrican en un período determinado.

- **Nº de máquinas** es **inversamente proporcional** al número de **días de trabajo**, si se mantienen las unidades de producto constantes, ya que si aumenta el número de máquinas disminuirán los días necesarios para fabricar una determinada cantidad de unidades de producto.

Entonces la constante de proporcionalidad estará dada por la siguiente expresión: $\frac{\boldsymbol{Maquinas \cdot Dias}}{\boldsymbol{Unidades}} = \boldsymbol{K}$

Por lo que, si igualamos las expresiones de la situación conocida, con la de la situación por conocer, podremos obtener una ecuación que nos permita obtener **x**:

- Para despejar x, los valores que están multiplicando pasan dividiendo al otro lado de la ecuación, y los que están dividiendo pasan multiplicando.

- Se recomienda siempre simplificar antes de multiplicar.

$$\frac{10 \cdot 5}{4.000} = \frac{x \cdot 6}{12.000} \rightarrow x = \frac{\cancel{12.000} \cdot \cancel{10} \cdot 5}{\cancel{4.000} \cdot \cancel{6}} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{1 \cdot 3} \rightarrow \boldsymbol{x = 25 \text{ máquinas}}$$

Ejemplo 16 $\boldsymbol{z}$ es inversamente proporcional al cuadrado de $\boldsymbol{x}$ y directamente proporcional a la raíz cuadrada de $\boldsymbol{y}$, con una constante de proporcionalidad $\boldsymbol{K}$. ¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{z}$?

Solución: Aplicando los conceptos de proporcionalidad vistos: $\frac{z \cdot x^2}{\sqrt{y}} = K \rightarrow \boldsymbol{z = \frac{K \cdot \sqrt{y}}{x^2}}$

III.- PORCENTAJE

1.- Definición de porcentaje

Porcentaje es el valor que resulta de comparar una parte con un todo en una escala de **0 a 100**. Se puede considerar que el porcentaje es un caso particular de la proporcionalidad directa, donde el total equivale al $\mathbf{100}\%$, mientras que una parte del total equivaldrá a un $\boldsymbol{x}\%$. Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{\textbf{Parte del Total}}{\textbf{Total}} = \frac{\boldsymbol{x}\%}{\mathbf{100}\%}}$$

En términos prácticos, $\boldsymbol{x}\%$ significa tomar $\boldsymbol{x}$ partes de un total de **100** partes, lo que se expresa por: $\boldsymbol{x}/\mathbf{100}$. Por lo que en matemáticamente: $\% = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}$. Por ejemplo: $50\% = 50 \cdot \dfrac{1}{100} = 0{,}5$.

2.- Procedimiento de cálculo y aplicaciones

Los problemas que involucran porcentaje pueden resolverse básicamente a través de 3 métodos: proporcionalidad directa, factor fraccionario o factor decimal.

2.1. Porcentaje como proporcionalidad directa

Ejemplo 1

- Calcular el 25% de 7.000. $\rightarrow \dfrac{x}{7.000} = \dfrac{25\%}{100\%} \rightarrow x = \dfrac{7.000 \cdot 25\%}{100\%} \rightarrow \boldsymbol{x = 1.750}$

Notar que en todos los casos se utiliza una **"regla de tres"**.

- ¿Qué tanto por ciento es 2.000 de 8.000? $\rightarrow \dfrac{2.000}{8.000} = \dfrac{x\%}{100\%} \rightarrow x = \dfrac{2.000 \cdot 100\%}{8.000} \rightarrow \boldsymbol{x = 25\%}$
- ¿Cuánto es 5.500 aumentado en un 10%? $\rightarrow \dfrac{x}{5.500} = \dfrac{100\%+10\%}{100\%} \rightarrow x = \dfrac{110\% \cdot 5.000}{100\%} \rightarrow \boldsymbol{x = 6.050}$

2.2. Porcentaje como factor fraccionario centesimal

Para obtener el $\boldsymbol{a}\ \%$ de un número en forma rápida, podemos multiplicar el número por: $\boldsymbol{a}/\mathbf{100}$, dado que:

El $\boldsymbol{a}\%$ de $\boldsymbol{b}$ es equivalente a: $\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{100}}\right) \cdot \boldsymbol{b}$

➢ **Corolario:** El $\boldsymbol{a}\%$ de $\boldsymbol{b}$ es igual al $\boldsymbol{b}\%$ de $\boldsymbol{a}$.

Ejemplo 2 El 10% de 70 = $\left(\dfrac{10}{100}\right) \cdot 70 = \mathbf{7}$ El 70% de 10 = $\left(\dfrac{70}{100}\right) \cdot 100 = \mathbf{7}$

2.3. Porcentaje como factor decimal

En el ejemplo anterior, observamos que el 10% de 70 es: $\left(\frac{10}{100}\right) \cdot 70$, pero el factor: $\left(\frac{10}{100}\right) = \mathbf{0,1}$.

Por lo tanto, el 10% de un número "$\boldsymbol{a}$" se puede calcular mediante el producto: $\mathbf{0,1} \cdot \boldsymbol{a}$.

Ejemplo 3 El 45% de 200 = $0{,}45 \cdot 200 = \mathbf{90}$ El 4,5% de 200 = $0{,}045 \cdot 200 = \mathbf{9}$

2.4. Tantos por cientos notables

A partir de lo estudiado, existe una correspondencia entre un porcentaje, una fracción y un número decimal. La siguiente tabla presenta los casos más recurrentes.

Tanto por ciento	Fracción	Decimal
1% de x	$\frac{1}{100} \cdot x$	$0{,}01 \cdot x$
10% de x	$\frac{1}{10} \cdot x$	$0{,}1 \cdot x$
20% e x	$\frac{1}{5} \cdot x$	$0{,}2 \cdot x$
25% de x	$\frac{1}{4} \cdot x$	$0{,}25 \cdot x$
$33\frac{1}{3}$% de x	$\frac{1}{3} \cdot x$	$0,\overline{3} \cdot x$

Tanto por ciento	Fracción	Decimal
50% de x	$\frac{1}{2} \cdot x$	$0{,}5 \cdot x$
$66\frac{2}{3}$% de x	$\frac{2}{3} \cdot x$	$0,\overline{6} \cdot x$
75% de x	$\frac{3}{4} \cdot x$	$0{,}75 \cdot x$
100% de x	$1 \cdot x$	$1 \cdot x$
150% de x	$\frac{3}{2} \cdot x$	$1{,}5 \cdot x$

3.- Aplicaciones del porcentaje

3.1. Aplicaciones básicas del porcentaje

Ejemplo 4 Un auto se vende con un 10% de descuento a $4.500.000. ¿Cuál es el precio sin rebaja del automóvil?

Notar que el precio con descuento equivale a 100% - 10% = 90% del precio inicial.

Solución: Sea **x** el precio del auto sin rebaja, entonces: $\frac{\$4.500.000}{x} = \frac{90\%}{100\%} \rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{\$5.000.000}$

Ejemplo 5 Un número aumenta en un 50% y luego disminuye en un 50%. ¿Qué porcentaje es el número final del número inicial?

Solución: Designemos por **x** al número inicial y consideremos el enunciado:

- El número **aumenta en un 50%,** entonces tendremos: **1,5 · x**
- El número anterior **disminuye en un 50%,** entonces tendremos: 0,5 · (1,5x) = **0,75 x**

Dado que el número final es **0,75x**, éste representa un **75% del número inicial**.

Ejemplo 6 En un supermercado hay supervisores, cajeros y reponedores. Si el 60% de los trabajadores son reponedores, 18 son supervisores y éstos son un tercio de los cajeros, ¿cuál es el total de trabajadores?

Solución: Dado que el 60% son reponedores, el 40% será la suma entre los supervisores y los cajeros. De este 40% nos señalan que los 18 supervisores son 1/3 de los cajeros, es decir los cajeros son 3 veces los supervisores = 3 · 18 = **54**.

Entonces, el **40%** formado por supervisores y cajeros está constituido por: 18 + 54 = **72** personas. Por lo tanto, para obtener el total de trabajadores del supermercado, planteamos la siguiente proporción:

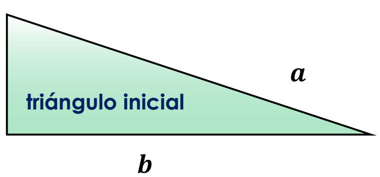
$$\frac{72}{x} = \frac{40\%}{100\%} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 180\ trabajadores}$$

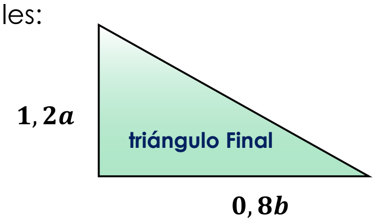
Ejemplo 7 En una casa de dos pisos se necesita alfombrar 60 m² en el primer piso y 40 m² en el segundo. Si la alfombra que se debe usar en el segundo piso cuesta $\$\boldsymbol{p}$ el metro cuadrado y la otra es un 60% más cara, se pide obtener una expresión que represente el costo total $\boldsymbol{C}$ en alfombras.

Solución: Costo = costo alfombrar 1° piso + costo alfombrar 2° piso
Costo = precio alfombra 1° piso · superficie 1° piso + precio alfombra 2° piso · superficie 2° piso
Costo = $1{,}6\,p \cdot 60 + p \cdot 40 = 96p + 40p \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{C = 136\,p}$

Ejemplo 8 Uno de los catetos de un triángulo rectángulo aumenta su largo en un 20% y el otro disminuye en el mismo porcentaje. ¿Cuál es la variación porcentual del área del triángulo?

Solución: Partimos planteando las situaciones iniciales y finales:





Se aísla el valor inicial, para visualizar fácilmente la variación.

$$\boldsymbol{Area\ inicial} = \left(\frac{\boldsymbol{a \cdot b}}{\boldsymbol{2}}\right) \qquad \boldsymbol{Area\ final} = \frac{\boldsymbol{1{,}2a \cdot 0{,}8b}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{0{,}96}\left(\frac{\boldsymbol{a \cdot b}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

Por lo tanto, el área final es $\boldsymbol{0{,}96}$ = **96%** de la inicial, lo que significa que el área **disminuyó en un 4%.**

Ejemplo 9 Un automovilista debe recorrer $\boldsymbol{a}$ kilómetros. Después de recorrer $\boldsymbol{b}$ kilómetros, ¿qué porcentaje le falta por recorrer?

Solución: Si el automovilista ya ha recorrido $\boldsymbol{b}$ kilómetros y debe recorrer $\boldsymbol{a}$, entonces le falta por recorrer $\boldsymbol{a - b}$ kilómetros. Esta última cantidad se compara con la cantidad de referencia $\boldsymbol{a}$ (que corresponde al 100%), formando una proporción:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{x\%}{100\%} \rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{100\%(a-b)}}{\boldsymbol{a}}$$

Ejemplo 10 Las edades de Matías y Lucas están en la razón 2:5. ¿Qué tanto por ciento es la edad de Matías respecto de la de Lucas?

Solución: Dado que nos dicen "respecto de la edad de Lucas", la edad de Lucas es la referencia o sea el 100%. Luego:

$$\frac{edad\ Matías}{edad\ Lucas} = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x\%}{100\%} \rightarrow \boldsymbol{x = 40\%} \rightarrow$$ La edad de Matías es un **40%** de la de Lucas.

¿Qué hubiera sucedido si nos hubieran preguntado: qué tanto por ciento es la edad de Lucas "respecto de la de Matías"? En este caso la referencia habría sido la edad de Matías = 100%. Luego:

$$\frac{edad\ Matías}{edad\ Lucas} = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{100\%}{x\%} \rightarrow \boldsymbol{x = 250\%} \rightarrow$$ La edad de Lucas es un **250%** de la de Matías.

Ejemplo 11 Calcular el 20% del 50% de 70 más el 75% del 25% de 80.

Solución:
$$= 20\% \text{ del } 50\% \text{ de } 70 + 75\% \text{ del } 25\% \text{ de } 80$$
$$= 20/100 \cdot 50/100 \cdot 70 + 75/100 \cdot 25/100 \cdot 80$$
$$= 1/5 \cdot 1/2 \cdot 70 + 3/4 \cdot 1/4 \cdot 80 = 7 + 15 = \mathbf{22}$$

Ejemplo 12 El estadio A de una ciudad tiene capacidad para 40.000 personas sentadas y el estadio B para 18.000. Se hacen eventos simultáneos: en el A se ocupa el 25% de su capacidad y en el B el 50%. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es son verdaderas?

I) El estadio A registró mayor asistencia que el estadio B.
II) Si se hubiese llevado a los asistentes de ambos estadios al A, habría quedado en éste, menos del 50% de los asientos vacíos.
III) Los espectadores que asistieron en conjunto a los estadios superan en 1.000 a la capacidad de B.

Solución: Verifiquemos una a una las afirmaciones:

I) Asistencia estadio A = $25\% \text{ de } 40.000 = 0{,}25 \cdot 40.000 = 1/4 \cdot 40.000 = \mathbf{10.000}$
Asistencia estadio B = $50\% \text{ de } 18.000 = 0{,}5 \cdot 18.000 = 1/2 \cdot 18.000 = \mathbf{9.000}$
Luego, hubo mayor asistencia en el estadio A que en el B
→ **I) es verdadera**

II) El 50% de la capacidad del estadio A, corresponde a: $50\% \text{ de } 40.000 = 0{,}5 \cdot 40.000 = 1/2 \cdot 40.000 = 20.000$ personas.
Al llevar la gente del estadio B al estadio A, este último habría quedado con 10.000 + 9.000 = 19.000 asistentes, por lo que el número de asientos vacíos correspondería a 21.000, valor superior al 50% de la capacidad del estadio, entonces:
→ **II) es falsa**

III) La asistencia total corresponde a 19.000 espectadores, valor superior en 1.000 unidades a la capacidad de B, luego:
→ **III es verdadera**

3.2. Aplicaciones comerciales del porcentaje

3.2.1. IVA

En Chile existe un impuesto llamado IVA (impuesto al valor agregado), correspondiente en el año 2009 al **19% del valor neto** de un producto. De esta forma, el valor total para el comprador viene dado por:

$$\boldsymbol{Valor\ total\ =\ Valor\ neto\ +\ IVA\ =\ Valor\ neto\ +\ 19\%\ valor\ neto\ =\ 119\%\ valor\ neto}$$

Ejemplo 13 Un computador cuesta \$476.000 (IVA incluido). Calcular el valor neto y el IVA respectivo.

Solución:

$$\frac{Valor\ neto}{\$476.000} = \frac{100\%}{119\%} \rightarrow Valor\ neto = \frac{\$476.000 \cdot 100\%}{119\%} \rightarrow \boldsymbol{Valor\ neto} = \$\mathbf{400.000}$$

$$\frac{IVA}{\$400.000} = \frac{19\%}{100\%} \rightarrow IVA = \frac{\$400.000 \cdot 19\%}{100\%} \rightarrow \boldsymbol{IVA} = \$\mathbf{76.000}$$

También podíamos obtener el IVA a partir de la diferencia entre el valor total y el neto.

3.2.2 Interés

Se coloca un capital de **\$1.000.000** a una tasa de interés del **10% anual**. ¿Cuál es capital final al cabo de **3 años**?
La respuesta a esta interrogante dependerá del tipo de interés que se aplique: simple o compuesto.

- **Interés simple:** se calcula el interés ganado en un cierto período sólo en base al capital inicial. Lo que significa que la utilidad de cada período es constante. La evolución de un capital sujeto a interés simple está dada por:

$$\boldsymbol{C_f = C_i \cdot (1 + n \cdot r)}$$

$\boldsymbol{C_f}$ = capital final.
$\boldsymbol{C_i}$= capital inicial.
$\boldsymbol{n}$ = número de períodos.
$\boldsymbol{r}$ = tasa de interés.

Volviendo a nuestro ejemplo, el capital final al cabo de 3 años será:

$$\boldsymbol{C_f} = 1.000.000 \cdot (1 + 3 \cdot 10\%) = 1.000.000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}1) = 1.000.000 \cdot (1{,}3) = \$\mathbf{1.300.000}$$

- **Interés compuesto**: un capital sujeto a interés compuesto va capitalizando los intereses cada cierto período, por lo que luego de cada período de capitalización, el interés se calculará sobre el nuevo capital. Una expresión simplificada para la evolución de un capital sujeto a interés compuesto es la siguiente:

$$\boldsymbol{C_f = C_i \cdot (1 + r)^n}$$

Retomando el ejemplo, si capitalizamos anualmente, tendremos el siguiente capital final:

$$\boldsymbol{C_f} = 1.000.000 \cdot (1 + 10\%)^3 = 1.000.000 \cdot (1 + 0{,}1)^3 = 1.000.000 \cdot (1{,}1)^3 = \$\mathbf{1.331.000}$$

La siguiente tabla presenta la evolución del capital año a año según el tipo de interés:

	Año 0: inicio	Año 1	Año 2	Año 3
Interés simple	$\$\mathbf{1.000.000}$	$\$1.000.000 \cdot 1{,}1 = \$\mathbf{1.100.000}$	$\$1.000.000 \cdot 1{,}2 = \$\mathbf{1.200.000}$	$\$1.000.000 \cdot 1{,}3 = \$\mathbf{1.300.000}$
Interés compuesto	$\$\mathbf{1.000.000}$	$\$1.000.000 \cdot 1{,}1 = \$\mathbf{1.100.000}$	$\$1.000.000 \cdot 1{,}1^2 = \$\mathbf{1.210.000}$	$\$1.000.000 \cdot 1{,}1^3 = \$\mathbf{1.331.000}$

CAPÍTULO II

ALGEBRA

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y). \end{cases}$$

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1x^2}{2!} - \frac{B_2x^4}{4!} + \frac{B_3x^6}{6!} - \cdots \quad |x| < 2\pi$$

$$1 - \frac{x}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{B_1x^2}{2!} + \frac{B_2x^4}{4!} + \frac{B_3x^6}{6!} + \cdots \quad |x| < \pi$$

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) - \cos(u+v)\right]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) + \cos(u+v)\right]$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}\left[\sin(u+v) + \sin(u-v)\right]$$

$$\cos u \sin v = \frac{1}{2}\left[\sin(u+v) - \sin(u-v)\right]$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a}, u^2 < a^2$$

I.- EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS

1.- El lenguaje algebraico

El Álgebra es la rama de las matemáticas, donde por medio del uso de letras y otros símbolos, es posible representar ciertas cantidades y generalizar diferentes situaciones. Por ejemplo:

- El perímetro de un cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$ se puede representar por: $\boldsymbol{P = 4a}$
- El área de un círculo de radio $\boldsymbol{r}$ se puede representar por: $\boldsymbol{A = \pi \cdot r^2}$

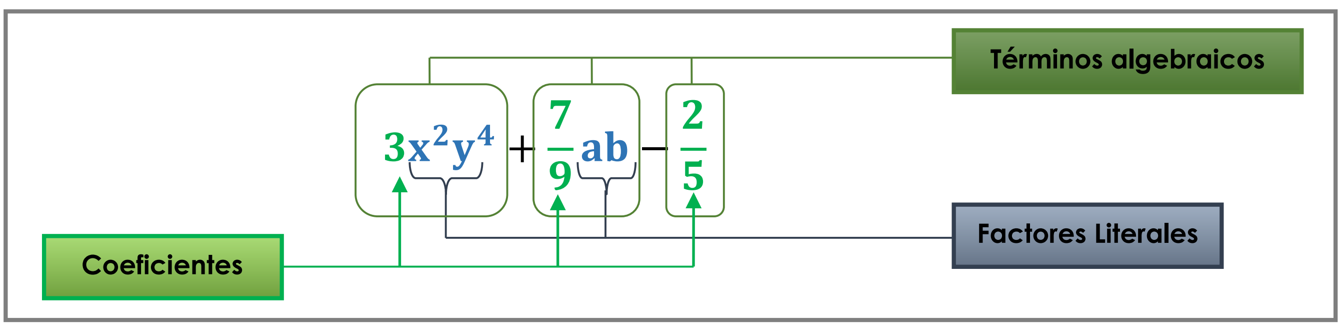
Cada una de las letras involucradas en las fórmulas anteriores es una variable, la que puede tomar diferentes valores.
Dentro del lenguaje algebraico, es posible hacer referencia a las operaciones básicas de distintas maneras, tal como se presenta a continuación:

- $+$ -----> "Más", "suma", "adición", "agregar", "añadir", "aumentar"
- $-$ -----> "Menos", "diferencia", "disminuido", "exceso", "restar"
- $\bullet$ -----> "Multiplicación", "de", "del", "veces", "producto", "por", "factor"
- $\div$ -----> "División", "cuociente", "razón", "es a"
- $=$ -----> "Igual", "es", "da", "resulta", "se obtiene", "equivale a"

1.1. Definiciones

- **Término algebraico**: corresponde a un conjunto de números (coeficientes) y letras (factores literales) relacionados entre sí por medio de una multiplicación o una división.

- **Expresión algebraica**: corresponde a una combinación de términos algebraicos separados entre sí por sumas o restas.



- **Grado de un término:** corresponde a la suma de los exponentes de sus factores literales. Mientras que el **grado de una expresión algebraica** equivale al mayor de los grados de cada uno de sus términos.

Por ejemplo: $\boldsymbol{2x^3 + 4x^4}$ tiene grado **4**; $\boldsymbol{3xy^2z^3}$ tiene grado **6**; $\boldsymbol{100}$ tiene grado **0**.

1.2. Clasificación de expresiones algebraicas según el número de términos

Número de términos	Nombre	Ejemplo
1	Monomio	$-7xy^2$
2	Binomio	$a + 3abc$
3	Trinomio	$4x + 2y - 3x^2y$
4 o más	Polinomio*	$3x^4 + 2x^3 - 3y - 9$

*Habitualmente se utiliza el concepto de polinomio para designar a una expresión algebraica formada por dos o más términos.

1.3. Transformación al lenguaje algebraico

Para decodificar un enunciado algebraico y escribirlo matemáticamente, es importante saber que cuando se hace referencia a un término algebraico, siempre se parte mencionando desde lo más general hasta lo más particular de su estructura (desde afuera hacia adentro). No obstante, cuando nos referimos a polinomios, muchas veces se comienza señalando la operación que se llevará a cabo y luego se va mencionando acerca de la estructura de cada término según su orden.

En ocasiones una expresión algebraica completa, al estar entre paréntesis, puede ser tratada como un término algebraico.

Ejemplo 1 Transformemos los siguientes enunciados al lenguaje algebraico:

- "La diferencia entre un número cualquiera y 4": $\rightarrow$ $\boldsymbol{x-4}$
- "Al doble de un número agregarle el triple de otro número" $\rightarrow$ $\boldsymbol{2x+3y}$
- "El exceso del quíntuplo de un número sobre otro número cualquiera" $\rightarrow$ $\boldsymbol{5x-y}$
- "A la cuarta parte de un número agregarle el triple de otro número" $\rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{x}{4}+3y}$
- "El cuadrado de la diferencia entre un número cualquiera y 3" $\rightarrow$ $\boldsymbol{(x-3)^2}$
- "La diferencia entre el cuadrado de un número y 3" $\rightarrow$ $\boldsymbol{x^2-3}$
- "La cuarta parte de la diferencia entre el doble de un número y el triple de otro número" $\rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{2x-3y}{4}}$
- "La tercera parte del cuadrado de la suma entre dos números" $\rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{(x+y)^2}{3}}$
- "El cuadrado del quíntuplo de un número" $\rightarrow$ $\boldsymbol{(5x)^2}$
- "El quíntuplo del cuadrado de un número" $\rightarrow$ $\boldsymbol{5x^2}$
- "El exceso del cubo del doble de un número sobre el cuádruplo del cuadrado de otro" $\rightarrow$ $\boldsymbol{(2x)^3-4y^2}$

1.4. Valoración de expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas no representan una cantidad específica en sí, sino que pueden ser evaluadas para diferentes valores que se les asignen a las letras que las componen. Al sustituir el factor literal por su valor numérico, es recomendable colocarlo entre paréntesis, para evitar confusión con los signos y las potencias.

Ejemplo 2 Si $\boldsymbol{a=2;\ b=-3}$, ¿cuál es el valor de: $\boldsymbol{a^2+5b+\frac{12a^2}{b}+b^3a}$?

Solución: $\rightarrow$ $(2)^2+5\cdot(-3)+\frac{\cancel{12}(2)^2}{\cancel{(-3)}}+(-3)^3\cdot 2$

$= \ 4-15+(-4\cdot 4)+(-27\cdot 2)$

$= \ -11-16-54 = \boldsymbol{-81}$

1.5. Operaciones Binarias

Entendemos por operación binaria a un procedimiento o regla algebraica que relaciona a dos variables. Para obtener el resultado de una operación binaria, se debe reemplazar en la operación el respectivo valor de cada variable.

Ejemplo 3 Se define $\boldsymbol{a \Delta b = a^b + b}$ y $\boldsymbol{a \,\Theta\, b = 2a - 4b}$. Obtener el valor de $\boldsymbol{(2 \Delta 5)\, \Theta\, (-2)}$.

Solución: $(2 \Delta 5)\theta(-2) = (2^5 + 5)\,\theta\,(-2) = (32 + 5)\,\theta\,(-2) = (37)\,\theta\,(-2) = 2 \cdot 37 - 4 \cdot -2 = 74 + 8 = \mathbf{82}$

$a = 2;\ b = 5$ $\qquad$ $a = 37;\ b = -2$

2.- Reducción de términos semejantes

Los términos semejantes corresponden a aquellos que poseen el **mismo factor literal**. Para reducir términos semejantes, éstos se deben agrupar, para luego sumar y/o restar, sus coeficientes numéricos, conservando el factor literal. En el caso de la resta, es recomendable considerarla como una suma con signo cambiado y así aprovechar la conmutatividad y asociatividad de la suma.

Ejemplo 4 Reducir: $\boldsymbol{3a - 5b + 8a - b - a - 2b + 5b + 6a}$

Reagrupamos los términos: $= 3a + 8a - a + 6a - 5b - b - 2b + 5b$
Sumamos o restamos los coeficientes numéricos: $= (3 + 8 - 1 + 6)a + (-5 - 1 - 2 + 5)b = \mathbf{16a - 3b}$

2.1. Uso de paréntesis

Los paréntesis son signos que se emplean para separar operaciones y/o términos. Estos no deben ser obviados, ya que sin ellos cambia el ejercicio y los resultados obtenidos. Los pasos para trabajar con paréntesis son los siguientes:

1. Partir resolviendo los paréntesis que estén dentro de otros, es decir los más internos.
2. Eliminar paréntesis si el signo que lo antecede es positivo (que no haya ningún signo equivale a signo +).
3. Si el signo que lo antecede es negativo, cambiar todos los signos internos.
4. Se reducen términos semejantes si los hay y se continúa con el procedimiento.

Ejemplo 5 Reducir: $\boldsymbol{3m - [(-m - n) + (3m + 2n - 4m)] - 3n}$

Solución:

$$\begin{aligned} &= 3m - [(-m - n) + (-m + 2n)] - 3n \\ &= 3m - [-m - n - m + 2n)] - 3n \\ &= 3m - [-2m + n] - 3n \\ &= 3m + 2m - n - 3n \\ &= \mathbf{5m - 4n} \end{aligned}$$

Dado que, si el signo que antecede a un paréntesis es negativo, debemos cambiar sus signos al momento de extraer el paréntesis, **podemos cambiar los signos de una expresión algebraica** colocando un signo negativo afuera de toda esta expresión entre paréntesis. Por ejemplo: $\mathbf{5a - 3b = -(-5a + 3b)}$

3.- Multiplicación de expresiones algebraicas

3.1. Propiedades básicas de las potencias

- Multiplicación con igual base: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ → se conserva la base y se suman los exponentes.
- División con igual base: $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ → se conserva la base y se restan los exponentes.

3.2. Multiplicación de monomios

Se deben multiplicar los coeficientes numéricos y los factores literales entre sí. Dado que la multiplicación es asociativa y conmutativa, se agrupan los coeficientes numéricos con sus respectivos signos y luego los factores literales, sumando o restando los exponentes respetivos.

Ejemplo 6 $(\boldsymbol{4a^2xy^3}) \cdot (\boldsymbol{-5a^3x^2}) \cdot (\boldsymbol{-2ay^2x}) \;\rightarrow\; (4 \cdot -5 \cdot -2)(a^2 \cdot a^3 \cdot a)(x \cdot x^2 \cdot x)(y^3 \cdot y^2) = \boldsymbol{40a^6x^4y^5}$

3.3. Multiplicación de un monomio por un polinomio

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio

Ejemplo 7 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \;\rightarrow\; \boldsymbol{ab + ac}$ $\qquad$ $\boldsymbol{3ab} \cdot (\boldsymbol{2a - 4ab + a^2b}) \;\rightarrow\; \boldsymbol{6a^2b - 12a^2b^2 + 3a^3b^2}$

3.4. Multiplicación de un polinomio por otro polinomio

Se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio.

Ejemplo 8 $(\boldsymbol{2a + b}) \cdot (\boldsymbol{c - 3d}) \;\rightarrow\; \boldsymbol{2ac - 6ad + bc - 3bd}$

Ejemplo 9 Reducir: $\boldsymbol{3a - [b - a(b - c)] - [2a(b + 2c)]}$

Solución: $= 3a - [b - ab + ac] - [2ab + 4ac] = 3a - b + ab - ac - 2ab - 4ac$
$= \boldsymbol{3a - b - ab - 5ac}$

Ejemplo 10 Reducir: $\boldsymbol{-2xy - [(x - 2y)(x + y) - y(x - y)]}$

Solución: $= -2xy - [x^2 + xy - 2xy - 2y^2 - xy + y^2] = -2xy - (x^2 - y^2 - 2xy) = -2xy - x^2 + y^2 + 2xy$
$= \boldsymbol{-x^2 + y^2}$

4.- Productos notables

4.1. Definición: Entendemos por producto notable a aquel cuyos factores presentan una estructura estandarizable, lo que permite obtener su resultado rápidamente, sin realizar todos los pasos de la multiplicación.

- **Caso 1: Cuadrado de binomio:** $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

"El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más (o menos) el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término".

- **Caso 2: Suma por su diferencia:** $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

"El producto de una suma de dos términos por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo".

Ejemplo 11 Reducir: $\boldsymbol{(7x^2y - 4ay^2)^2} \rightarrow (7x^2y)^2 - 2\cdot(7x^2y)\cdot(4ay^2) + (4ay^2)^2 = \boldsymbol{49x^4y^2 - 56ax^2y^3 + 16a^2y^4}$

Ejemplo 12 Reducir: $\boldsymbol{(5x^2 + 3yz)\cdot(5x^2 - 3yz)} \rightarrow (5x^2)^2 - (3yz)^2 = \boldsymbol{25x^4 - 9y^2z^4}$

Ejemplo 13 Reducir: $\boldsymbol{(3w - 2)^2 - 2(2w - 3)(2w + 3)}$

Solución: Usamos las fórmulas de cuadrado de binomio y suma por su diferencia:

$$9w^2 - 12w + 4 - 2(4w^2 - 9) = 9w^2 - 12w + 4 - 8w^2 + 18 = \boldsymbol{w^2 - 12w + 22}$$

- **Caso 3: Producto de binomios con un término en común:** $\boldsymbol{(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq}$
- **Caso 4: Cubo de binomio:** $\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ $\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$
- **Caso 5: Cuadrado de un trinomio:** $\boldsymbol{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$

Ejemplo 14 $\boldsymbol{(x+8)(x-5)} \rightarrow x^2 + (8-5)x + 8\cdot -5 = \boldsymbol{x^2 + 3x - 40}$

Ejemplo 15 $\boldsymbol{(2x^2 + 3y)^3} \rightarrow (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2(3y) + 3(2x^2)(3y)^2 + (3y)^3$
$= 8x^6 + 3\cdot 4x^4\cdot 3y + 3\cdot 2x^2\cdot 9y^2 + 27y^3 = \boldsymbol{8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3}$

Ejemplo 16 $\boldsymbol{(2x + 5y - 4z)^2} \rightarrow (2x)^2 + (5y)^2 + (4z)^2 + 2(2x)(5y) + 2(2x)(-4z) + 2(5y)(-4z)$
$= \boldsymbol{4x^2 + 25y^2 + 16z^2 + 20xy - 16xz - 40yz}$

5.- Factorización

5.1. Definición: El proceso de factorización corresponde a una transformación que se utiliza generalmente para reducir el número de operaciones y/o facilitar la simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias. Consiste en transformar la expresión algebraica en una serie de factores.
En general, una expresión algebraica puede ser presentada de dos maneras: en forma desarrollada o en forma factorizada, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

Factorizar

Ejemplo 17 $\mathbf{3a - 3b = 3(a - b)}$ $\mathbf{x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)}$

Desarrollar

5.2. Métodos de Factorización

A grandes rasgos, existen 2 métodos de factorización:

- **Aislar términos en común**
- **Usar productos notables**

5.2.1. Primer Método: Factorización aislando términos en común

Se deben separar los coeficientes y factores literales comunes de todos los términos (MCD), lo que corresponderá al primer factor. El otro factor llevará las sumas (o restas) de los coeficientes y factores literales no comunes asociados a cada término. Este método se debe ocupar siempre primero que los relacionados con productos notables.

Ejemplo 18 Factorizar: $\mathbf{5x^2y^3 + 25xy^4 - 10x^3y^2} \rightarrow \mathbf{5xy^2(xy + 5y^2 - 2x^2)}$

En ciertas ocasiones, es conveniente usar este método por partes, agrupando según corresponda, ya que no hay factores o coeficientes literales comunes a todos los términos. Por lo tanto el método se realizará 2 o más veces. Notar que es posible dejar a un polinomio como factor común.

Ejemplo 19 Factorizar: $\mathbf{2ax + 2ay + 3bx + 3by} \rightarrow 2a(x+y) + 3b(x+y) = \mathbf{(x + y)\,(2a + 3b)}$

Ejemplo 20 Factorizar: $\mathbf{\frac{15}{4}a^2 - \frac{21}{4}ac - \frac{10}{3}ab + \frac{14}{3}bc + 5a - 7c} \rightarrow \frac{3}{4}a(5a-7c) + \frac{2}{3}b(-5a+7c) + (5a-7c)$

$$= \frac{3}{4}a(5a-7c) - \frac{2}{3}b(5a-7c) + (5a-7c) = \mathbf{(5a - 7c)\left(\frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b + 1\right)}$$

Cambiamos los signos internos,
colocando un (-) fuera del paréntesis.

5.2.2. Segundo método: Factorización usando productos notables

Existen cuatro formas básicas asociadas a productos notables de **binomios** y **trinomios** que son importantes de conocer. La siguiente tabla resume cada una de ellas, con sus respectivos ejemplos.

NOMBRE	DESARROLLO	FACTORIZACIÓN	*Ejemplo 21*
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2$	$(a+b)(a-b)$	$36x^2 - 25y^2$ $\rightarrow (6x)^2 - (5y)^2$ $= (6x+5y)(6x-5y)$
Suma o diferencia de cubos	$a^3 + b^3$ $a^3 - b^3$	$(a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$\frac{x^3}{8} - \frac{1}{27} \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3$ $= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$ $= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{6} + \frac{1}{9}\right)$
Trinomio: $x^2 + bx + c$ Factorizable en binomios con término en común (números que multiplicados dan c y sumados dan b)	$x^2 + bx + c$	$(x+p)(x+q)$ *Tal que:* $p \cdot q = c$ $p + q = b$	$x^2 + 5x - 6 \rightarrow (x+6)(x-1)$ *ya que:* $6 \cdot -1 = -6$ $6 + -1 = 5$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 + 2ab + b^2$ $a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)^2$ $(a-b)^2$	$9x^2 + 30xy + 25y^2$ $\rightarrow (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2$ $= (3x+5y)^2$

- **Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 1)$**

Dentro del método de factorización a través de productos notables, algunos trinomios del tipo: $ax^2 + bx + c$ pueden ser factorizados como el producto de dos binomios. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 22 Factorizar: $6x^2 - 11x - 10$

- Multiplicamos y dividimos por **6** para formar un cuadrado perfecto en el primer término:

$$\frac{6 \cdot 6x^2 - 6 \cdot 11x - 6 \cdot 10}{6} = \frac{(6x)^2 - 11 \cdot (6x) - 60}{6}$$

Se dejan de esa forma los términos, ya que son lo que precederán a ambos paréntesis al factorizar. El término central no se multiplica.

- Dado que $(-15) \cdot (4) = -60$ y $(-15) + (4) = -11$, se tiene: $\frac{(6x-15)(6x+4)}{6}$

Se factoriza como binomios con término en común (6x).

- Factorizando el primer término por **3**, el segundo por **2** y luego simplificando se obtiene:

$$\frac{\cancel{3}(2x-5) \cdot \cancel{2}(3x+2)}{\cancel{6}} = (2x-5)(3x+2)$$

<u>Observación</u>: Para comprobar si una factorización es correcta, se debe realizar el producto los factores encontrados y verificar que ese resultado equivalga a la expresión inicial.

Ejemplo 23 Factorización combinada:

- $\boldsymbol{m^2 - n^2 + m + n} \;\rightarrow\; (m+n)(m-n) + (m+n) \;=\; \boldsymbol{(m-n)(m-n+1)}$
- $\boldsymbol{a^2 - 4ab + 4b^2 - 9n^2} \rightarrow (a-2b)^2 - (3n)^2 = [(a-2b)+(3n)]\cdot[(a-2b)-(3n)] = \boldsymbol{(a-2b+3n)(a-2b-3n)}$
- $\boldsymbol{5x^3 - 40} \;\rightarrow\; 5(x^3-8) \;=\; 5(x^3-2^3) \;=\; 5(x-2)(x^2+2x+2^2) \;=\; \boldsymbol{5(x-2)(x^2+2x+4)}$
- $\boldsymbol{a^8 - b^8} \;\rightarrow\; (a^4)^2 - (b^4)^2 \;=\; (a^4+b^4)(a^4-b^4) = (a^4+b^4)[(a^2)^2-(b^2)^2] \;=\; (a^4+b^4)[(a^2+b^2)(a^2-b^2)]$

  $= (a^4+b^4)[(a^2+b^2)(a+b)(a-b)] \;=\; \boldsymbol{(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}$
- $\boldsymbol{a^9 + b^9} \;\rightarrow\; (a^3)^3 + (b^3)^3 \;=\; [a^3+b^3][(a^3)^2 - (a^3)(b^3) + (b^3)^2] \;=\; [a^3+b^3][a^6 - a^3b^3 + b^6]$

  $= [(a+b)\,(a^2-ab+b^2)][a^6-a^3b^3+b^6] \;=\; \boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b^6)}$

Ejemplo 24 Dada la expresión $\boldsymbol{x^2y^2 + x^2y + xy + x}$, ¿cuál de las siguientes expresiones es (son) factor(es) de ella?

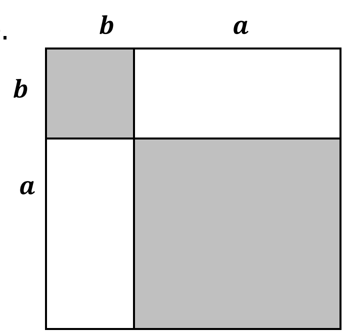
I) $xy + 1$
II) $x + 1$
III) $y + 1$

<u>Solución</u>: Debemos factorizar el polinomio, buscando un factor común, y luego agrupar por partes.

$$x^2y^2 + x^2y + xy + x = x[xy^2 + xy + y + 1] = x[xy(y+1) + (y+1)] = x[(y+1)(xy+1)]$$
$$= \boldsymbol{x(y+1)(xy+1)}$$

Luego **I) y III) son factores.**

Ejemplo 25 Dada la siguiente figura. Se sabe que a y b son positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?



I) El área del cuadrado de lado $(\boldsymbol{a+b})$ es igual al área achurada.
II) $(\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a-b})$ es igual a la diferencia entre el área del cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$ y la del cuadrado de lado de $\boldsymbol{b}$.
III) $\boldsymbol{a(a+b) > a^2 + b^2}$

<u>Solución</u>:
- El área achurada corresponde a la suma de las áreas de dos cuadrados: uno de lado $\boldsymbol{a}$ y el otro de lado $\boldsymbol{b}$, es decir el área achurada es igual a: $\boldsymbol{a^2 + b^2} \neq \boldsymbol{(a+b)^2} \rightarrow$ **I) es falsa**
- La diferencia entre las áreas de los cuadrados de lado $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es: $\boldsymbol{a^2 - b^2} = \boldsymbol{(a+b)(a-b)} \rightarrow$ **II) es verdadera**
- Si $a(a+b) > a^2 + b^2 \leftrightarrow a^2 + a\cancel{b} > a^2 + \cancel{b}^2 \;\leftrightarrow\; ab > \cancel{b}^2 \;\leftrightarrow\; \cancel{a} > b$, lo que según el enunciado es verdadero → **III) es verdadera**

II.- EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

1.- División algebraica y simplificación

1.1. División de un polinomio (o monomio) por un monomio

Se divide cada término del polinomio por el monomio.

Ejemplo 1 $\quad (\mathbf{64x^4 - 8x^3 + 4x^2}) \div (\mathbf{2x^2}) \;\rightarrow\; \dfrac{64x^4-8x^3+4x^2}{2x^2} = \dfrac{64x^4}{2x^2} - \dfrac{8x^3}{2x^2} + \dfrac{4x^2}{2x^2} = \mathbf{32x^2 - 4x + 2}$

1.2. División de un polinomio por otro polinomio (división larga)

El procedimiento es muy similar al método de división aritmético tradicional:

- Se ordenan los polinomios en potencias decrecientes con respecto a un factor literal.
- Se divide el 1er término del dividendo con el 1er término del divisor resultando el 1er término del cuociente.
- Se multiplica el 1er término del cuociente por el divisor y este resultado se resta al dividendo.
- Se divide el 1er término del resto por el 1er término del divisor para obtener el 2do término del cuociente.
- Se repite el procedimiento hasta obtener un resto igual a 0 o de menor grado que el divisor.

Ejemplo 2 A continuación se contrasta una división aritmética convencional con una división de polinomios.

$$\begin{array}{rl} & (\mathbf{52}) \div \mathbf{3} = 17 \\ & \underline{-(30)} \\ & \;\;22 \\ & \underline{-(21)} \\ \text{Resto:} & \;\;\;1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} & (\mathbf{x^2 - 3x + 4}) \div (\mathbf{x - 2}) = x - 1 \\ & \underline{-(x^2 - 2x)} \\ & \qquad -x + 4 \\ & \quad \underline{-(-x + 2)} \\ \text{Resto:} & \qquad 2 \end{array}$$

1.3. Simplificación

Para simplificar una fracción es necesario y suficiente que el numerador y el denominador estén factorizados y presenten al menos un factor en común. Observar el ejemplo:

- **Es correcto:** $\dfrac{\cancel{(x+1)}\cdot 5}{\cancel{(x+1)}\cdot 9} = \dfrac{5}{9}$ ✓

No es factor de todo el numerador, por lo que NO se puede simplificar.

- **Es incorrecto:** $\dfrac{\cancel{(x+1)}\cdot 5+3a}{\cancel{(x+1)}\cdot 9+4a} = \dfrac{5}{9}$ ✗

No es factor de todo el denominador, por lo que NO se puede simplificar.

- **Es correcto:** $\dfrac{\cancel{(x+1)}\cdot(5+3a)}{\cancel{(x+1)}\cdot(9+4a)} = \dfrac{(5+3a)}{(9+4a)}$ ✓

En la mayoría de los casos es necesario factorizar previo a la simplificación, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3 Simplificar:

- $\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1} \rightarrow \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-1)} = \frac{(x+4)}{(x-1)}$
- $\frac{8x-4y}{2y-4x} \rightarrow \frac{4(2x-y)}{2(y-2x)} = \frac{-2\cancel{(y-2x)}}{\cancel{(y-2x)}} = -2$
- $\frac{x^4-1}{1+x^2} \rightarrow \frac{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}{\cancel{(1+x^2)}} = x^2-1$
- $\frac{x^3+y^3}{x+y} \rightarrow \frac{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)}{\cancel{x+y}} = x^2-xy+y^2$

2.- Multiplicación y división de fracciones algebraicas

2.1. Multiplicación

Para efectuar la multiplicación de fracciones se deben multiplicar los numeradores y los denominadores entre sí, haciendo previamente todas las simplificaciones posibles. En el caso de los polinomios siempre se recomienda factorizar primero.

Ejemplo 4 Efectuar el producto: $\frac{\cancel{3a}b}{\cancel{2a}} \cdot \frac{\cancel{2}b}{\cancel{3}a^2} \rightarrow \frac{b}{1} \cdot \frac{b}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$

2.2. División

Para dividir fracciones algebraicas, podemos multiplicar el dividendo por el recíproco (inverso multiplicativo) del divisor, lo que equivale a "dar vuelta la segunda fracción y multiplicar".

Ejemplo 5 Efectuar la división: $\frac{2ab}{3x} \div \frac{2a}{3xy} \rightarrow \frac{\cancel{2a}b}{\cancel{3x}} \cdot \frac{\cancel{3x}y}{\cancel{2a}} = \frac{b}{1} \cdot \frac{y}{1} = by$

Ejemplo 6 Efectuar la división: $\frac{x^2+8x+16}{3-x} \div \frac{x+4}{x^2-9}$

$$\rightarrow \frac{x^2+8x+16}{3-x} \cdot \frac{x^2-9}{x+4} = \frac{(x+4)^2}{3-x} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{x+4} = \frac{(x+4)^{\cancel{2}}}{-\cancel{(x-3)}} \cdot \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x+4}} = -(x+4)(x+3)$$

Cambiamos los signos internos, colocando un (-) fuera del paréntesis.

Ejemplo 7 Simplificar: $\frac{\boldsymbol{x^2-9}}{\boldsymbol{x^2-6x+9}}\cdot\frac{\boldsymbol{x^2-7x+12}}{\boldsymbol{x^2+8x+16}}\div\frac{\boldsymbol{x^2-4x}}{\boldsymbol{x^2+7x+12}} \rightarrow \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}\cdot\frac{x^2-7x+12}{x^2+8x+16}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2-4x}$

$$=\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}^2}\cdot\frac{\cancel{(x-3)}\cancel{(x-4)}}{(x+4)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{(x+3)\cancel{(x+4)}}{x\cancel{(x-4)}}=\frac{(x+3)}{1}\cdot\frac{1}{(x+4)}\cdot\frac{(x+3)}{x}=\frac{\boldsymbol{(x+3)^2}}{\boldsymbol{x(x+4)}}$$

3.- Adición y sustracción de expresiones algebraicas fraccionarias

3.1. Adición y sustracción con mismo denominador

Se conserva el denominador y se suman o restan los numeradores (según sea el caso).

Ejemplo 8 Reducir: $\frac{\boldsymbol{2a+3b}}{\boldsymbol{a+b}}+\frac{\boldsymbol{a-b}}{\boldsymbol{a+b}} \rightarrow \frac{2a+3b+a-b}{a+b}=\frac{\boldsymbol{3a+2b}}{\boldsymbol{a+b}}$

Ejemplo 9 Reducir: $\frac{\boldsymbol{5a-2b}}{\boldsymbol{a-1}}-\frac{\boldsymbol{a+6b}}{\boldsymbol{a-1}} \rightarrow \frac{5a-2b-(a+6b)}{a-1}=\frac{5a-2b-a-6b}{a-1}=\frac{\boldsymbol{4a-8b}}{\boldsymbol{a-1}}$

Notar que dejamos esta parte del numerador entre paréntesis ya que hay un signo menos que lo antecede.

3.2. Mínimo común múltiplo (MCM) de expresiones algebraicas

Para obtener el MCM de una serie de expresiones algebraicas, primero éstas deben ser factorizadas. El **MCM** corresponderá **"al producto de todos los factores presentes, elevados a sus mayores exponentes".**

Ejemplo 10 Obtengamos el MCM entre: $\boldsymbol{3ax},\ \boldsymbol{2a}\ y\ \boldsymbol{4a^2}$

- El MCM entre los coeficientes numéricos es: $\boldsymbol{12}$
- El primer factor literal con su máxima potencia es: $\boldsymbol{a^2}$
- El segundo factor literal con su máxima potencia es: $\boldsymbol{x}$

El MCM es: $\boldsymbol{12a^2x}$

Ejemplo 11 Encontremos el MCM y el MCD entre las siguientes expresiones:

$$\boldsymbol{m^2-mn};\qquad \boldsymbol{m^3-n^3};\qquad \boldsymbol{m^2-2mn+n^2}$$

- Primero factorizamos: $m(m-n);\quad (m-n)(m^2+mn+n^2);\quad (m-n)^2$
- El MCM es: $\boldsymbol{m\,(m-n)^2(m^2+mn+n^2)}$
- El MCD es el factor que se repite: $\boldsymbol{(m-n)}$

3.3. Adición y sustracción con distinto denominador

Primero se debe encontrar el mínimo común múltiplo (MCM) entre los denominadores y luego amplificar cada fracción por un factor tal que iguale su denominador al MCM.

Ejemplo 12 Reducir las siguientes expresiones:

- $\frac{\boldsymbol{x+6}}{\boldsymbol{8x}} - \frac{\boldsymbol{2x+5}}{\boldsymbol{12x}} \rightarrow \frac{(x+6)\cdot 3-(2x+5)\cdot 2}{24x} = \frac{3x+18-4x-10}{24x} = \frac{\boldsymbol{-x+8}}{\boldsymbol{24x}}$

  - El MCM = **24x**, por lo que amplificamos la primera fracción por 3 y la segunda por 2.

- $\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{2a^2}} + \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{a}} - \frac{\mathbf{9}}{\boldsymbol{4a}} \rightarrow \frac{3\cdot 2+6\cdot 4a-9\cdot a}{4a^2} = \frac{6+24a-9a}{4a^2} = \frac{\boldsymbol{6+15a}}{\boldsymbol{4a^2}}$

  - El MCM = **4a²**, por lo que amplificamos cada fracción por el valor que le falta a su denominador para igualar al MCM.

- $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}} \rightarrow \frac{bc+ac-ab}{abc}$

  - MCM = **abc**

- $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x-3}} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x+5}} - \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x^2+2x-15}} \rightarrow \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+5} - \frac{x-1}{(x-3)(x+5)}$

  - Se parte factorizando el trinomio **x² + 2x – 15** por **(x – 3)(x + 5)** que equivaldrá al MCM.

  $$= \frac{1\cdot(x+5)+2(x-3)-(x-1)}{(x-3)(x+5)} = \frac{1\cdot(x+5)+2(x-3)-(x-1)}{(x-3)(x+5)} = \frac{x+5+2x-6-x+1}{(x-3)(x+5)} = \frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{(x-3)(x+5)}}$$

- $\frac{\boldsymbol{m+1}}{\boldsymbol{2m^2+4m}} - \frac{\boldsymbol{m+1}}{\boldsymbol{m^2-4}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m-2}} \rightarrow \frac{m+1}{2m(m+2)} - \frac{m+1}{(m+2)(m-2)} + \frac{1}{m-2}$

  - Primero se factoriza cada denominador.

  $$= \frac{(m+1)(m-2)-(m+1)\cdot 2m+1\cdot 2m(m+2)}{2m(m+2)(m-2)} = \frac{m^2-m-2-2m^2-2m+2m^2+4m}{2m(m+2)(m-2)}$$

  - Luego de obtener el MCM se amplifican los denominadores y se reduce.

  $$= \frac{m^2+m-2}{2m(m+2)(m-2)} = \frac{(\cancel{m+2})(m-1)}{2m(\cancel{m+2})(m-2)} = \frac{\boldsymbol{(m-1)}}{\boldsymbol{2m(m-2)}}$$

  - Finalmente se factoriza el numerador resultante y se simplifica.

4.- Operatoria combinada con expresiones algebraicas fraccionarias

Se recomienda seguir las siguientes reglas básicas:

- Respetar la prioridad de las operaciones: 1° paréntesis, 2° potencias, 3° multiplicación y división, 4° suma y resta.
- Cuando existan productos y divisiones, mantener las expresiones factorizadas, hasta cerciorarse de que no existen más simplificaciones que realizar. Luego de eso realizar los productos.
- En el caso de sumas y restas, resolver previa obtención del MCM y luego reducir términos semejantes en el numerador. En general el denominador se deja factorizado hasta el final por posibles simplificaciones.
- En el caso de fracciones compuestas, identificar cual es la operación principal y comenzar resolviendo las operaciones secundarias (las más externas). Se recomienda transformar los cuocientes en productos.

-Primero resolvemos los paréntesis (sumas y restas):

- Luego transformamos el cuociente en producto y simplificamos:

Ejemplo 13 Reducir: $\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\left(1-\frac{1}{x}\right)$ $\rightarrow$ $\left(\frac{x+1}{x}\right)\div\left(\frac{x-1}{x}\right)=\left(\frac{x+1}{\cancel{x}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{x}}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}$

Ejemplo 14 Reducir: $\left(\frac{2a}{2+c}\cdot\frac{4-c^2}{4b}\right)\div\left(\frac{2+c}{2c}-1\right)$

- En el primer paréntesis hay una multiplicación, por lo que factorizamos y simplificamos, mientras que en el segundo hay una suma, por lo que obtenemos MCM, amplificamos y reducimos:

- Luego transformamos la división en producto y simplificamos nuevamente (notar que no desarrollamos el producto hasta el final):

<u>Solución</u>: $\left(\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2+c}}\cdot\frac{\cancel{(2+c)}(2-c)}{\cancel{4}b}\right)\div\left(\frac{2+c-2c}{2c}\right)=\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{(2-c)}{2b}\right)\div\left(\frac{2-c}{2c}\right)=\frac{a\cancel{(2-c)}}{\cancel{2}b}\cdot\left(\frac{\cancel{2}c}{\cancel{2-c}}\right)$

$=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{1}\right)=\frac{ac}{b}$ - Una vez que se ha simplificado al máximo, se efectúa el producto.

Ejemplo 15 Reducir la fracción compuesta: $\dfrac{a+2-\frac{7a+9}{a+3}}{a-4+\frac{5a-11}{a+1}}$ $\longleftarrow$ División principal

- Lo primero es reconocer la división principal, que será la última operación general que se realizará. Dado que en el numerador y denominador de la fracción compuesta hay sumas y restas, obtenemos los MCM, amplificamos y desarrollamos:

<u>Solución</u>: $\dfrac{\frac{(a+2)(a+3)-(7a+9)}{a+3}}{\frac{(a-4)(a+1)+(5a-11)}{a+1}}=\dfrac{\frac{a^2+5a+6-7a-9}{a+3}}{\frac{a^2-3a-4+5a-11}{a+1}}=\dfrac{\frac{a^2-2a-3}{a+3}}{\frac{a^2+2a-15}{a+1}}=\dfrac{\frac{(a-3)(a+1)}{a+3}}{\frac{(a-3)(a+5)}{a+1}}$

- Puesto que hay una división general, se factorizan los numeradores, se transforma la división principal en multiplicación y luego se simplifica:

$=\frac{\cancel{(a-3)}(a+1)}{a+3}\cdot\frac{a+1}{\cancel{(a-3)}(a+5)}=\frac{(a+1)}{a+3}\cdot\frac{a+1}{(a+5)}=\frac{(a+1)^2}{(a+3)(a+5)}$

Ejemplo 16 Reducir la fracción compuesta: $\dfrac{\frac{1}{x+1}}{x+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}}$ $\longleftarrow$ División principal

- Se parte calculando desde lo más exterior. Notar que mientras se va resolviendo la fracción, nos encontramos con expresiones de la forma: $\dfrac{1}{\frac{a}{b}}$, que equivalen a: $\dfrac{b}{a}$

<u>Solución</u>: $\dfrac{\frac{1}{x+1}}{x+\frac{1}{\frac{x^2-1}{x}}}=\dfrac{\frac{1}{x+1}}{x+\frac{x}{x^2-1}}=\dfrac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x^3-x+x}{x^2-1}}=\dfrac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x^3}{x^2-1}}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^3}=\frac{1}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{x^3}=\frac{(x-1)}{x^3}$

Ejemplo 17 El largo de un rectángulo mide $\mathbf{3x+2y}$. Si su perímetro mide $\mathbf{10x+6y}$, ¿cuánto mide el ancho del rectángulo?

Solución: Recordemos que el perímetro (P) de un rectángulo se calcula como: $P=2L+2A$, donde L y A son el largo y el ancho respectivamente. Por lo tanto, podemos obtener el ancho a partir de lo siguiente:

$$2(3x+2y)+2A=10x+6y \rightarrow 6x+4y+2A=10x+6y \rightarrow 2A=10x+6y-6x-4y \rightarrow 2A=4x+2y \rightarrow \boldsymbol{A=2x+y}$$

Ejemplo 18 ¿Cuándo la expresión $\dfrac{\mathbf{1}+\frac{x+y}{x-y}}{\mathbf{1}-\frac{x+y}{x-y}}$ es positiva?

I) $x\cdot y<0$ II) $x\cdot y>0$ III) $x<0$ IV) $x>0$

Solución: Lo primero es desarrollar la expresión: $\dfrac{1+\frac{x+y}{x-y}}{1-\frac{x+y}{x-y}}=\dfrac{\frac{x-y+x+y}{x-y}}{\frac{x-y-(x+y)}{x-y}}=\dfrac{\frac{2x}{x-y}}{\frac{-2y}{x-y}}=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{x-y}}\cdot\dfrac{\cancel{x-y}}{-\cancel{2}y}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{-y}}$

Entonces, para que la expresión inicial sea positiva → $\boldsymbol{x/y}$ debe ser negativo, por lo que: **x · y < 0,** ya que la regla de los signos es idéntica para la multiplicación y la división → **I) es verdadera**

Ejemplo 19 Si $\boldsymbol{P=\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}}$ con a,b,c,d distintos de 0, ¿cuál(es) de las siguientes alternativas es(son) siempre verdaderas?

I) $P=\dfrac{a+c}{b+d}$

II) El inverso aditivo de P es $-\dfrac{ad+cb}{bd}$

III) El inverso multiplicativo de P es $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$

Solución: Lo primero es obtener el valor de P, calculando el MCM y amplificando:

$P=\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+cb}{bd}$ → **I) es falsa**, entonces el inverso aditivo es $P=-\dfrac{ad+cb}{bd}$ → **II) es verdadera**

El inverso multiplicativo es: $\dfrac{bd}{ad+cb}$, que difiere de $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$ → **III) es falsa**

Ejemplo 20 Si se sabe que $\boldsymbol{a^2-b^2=5}$, y que $\boldsymbol{a-b=5}$, ¿cuánto vale $\boldsymbol{a+b}$?

Solución: Dado que $a^2-b^2=5$ → $(a+b)(a-b)=5$, pero, del enunciado, $a-b=5$ → $(a+b)\cdot 5=5$

Entonces: $\boldsymbol{a+b=1}$

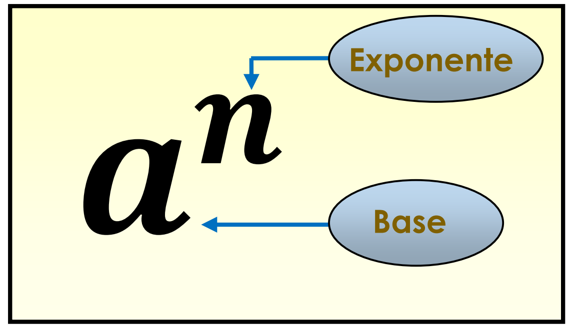
III.- POTENCIAS

1.- Conceptos y propiedades de las potencias

1.1. Definición: Para una base real ($\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$) y un exponente natural ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$), se define:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a^0 = 1 \quad con \;\; a \neq 0} \\ \boldsymbol{a^1 = a} \\ \boldsymbol{a^{n+1} = a^n \cdot a} \end{cases}$$

En términos prácticos: $\boldsymbol{a^n = a \cdot a \cdot a \ldots}$ (n veces), donde $\boldsymbol{a^n}$ corresponde a la enésima potencia de $\boldsymbol{a}$.



1.2. Propiedades algebraicas de las potencias

- **Multiplicación con igual base:** se conserva la base y se **suman** los **exponentes**.

$$\boxed{\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}}$$

Ejemplo 1 $\quad \boldsymbol{2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^6} \;\rightarrow\; 2^{2+3+6} = \boldsymbol{2^{11}}$

- **División con igual base:** se conserva la base y se **restan** los **exponentes**.

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}}$$

Ejemplo 2 $\quad \boldsymbol{\frac{2^4}{2^3}} \;\rightarrow\; 2^{4-3} = 2^1 = \boldsymbol{2}$

- **Multiplicación con igual exponente:** se conserva el exponente y se **multiplican** las **bases**.

$$\boxed{\boldsymbol{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}}$$

Ejemplo 3 $\quad \boldsymbol{3^2 \cdot 5^2} \;\rightarrow\; (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = \boldsymbol{225}$

- **División con igual exponente:** se conserva el exponente y se **dividen** las **bases**.

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}}$$

Ejemplo 4 $\quad \boldsymbol{\frac{3^4}{6^4}} \;\rightarrow\; \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{16}}$

- **Potencia de una potencia:** se conserva la base y se **multiplican** los **exponentes**.

$$\boxed{\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}}$$

Ejemplo 5 $\quad \boldsymbol{(3^{1,5})^2} \;\rightarrow\; 3^{1,5 \cdot 2} = 3^3 = \boldsymbol{27}$

- **Definición de potencia con exponente negativo:** una potencia con exponente negativo, es igual al **inverso multiplicativo** de dicha potencia, pero con exponente positivo.

$$\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}} \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}}$$

Ejemplo 6

$$5^{-2} \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2} = \mathbf{\frac{1}{25}}$$

$$\mathbf{\frac{1}{0{,}2}} \rightarrow 0{,}2^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \mathbf{5}$$

- **Suma y restas de potencias:** no existen propiedades especiales. Hay 2 tipos de procedimientos que se pueden utilizar:

  - Resolver cada potencia y sumar (o restar) los resultados.
  - Si las potencias tienen igual bases, se puede factorizar por la de menor exponente.

Ejemplo 7 $\quad \mathbf{2^3 + 3^3 + 4^3} \rightarrow 8 + 27 + 64 = \mathbf{99;}$

$$\mathbf{\frac{2^{10}+2^{11}}{2^8-2^6}} \rightarrow \frac{2^{10}(1+2^1)}{2^6(2^2-1)} = \frac{2^{10}(\cancel{3})}{2^6(\cancel{3})} = \frac{2^{10}}{2^6} = \mathbf{2^4}$$

1.3. Signo de una potencia

- Toda potencia de exponente **par** es **siempre positiva (o cero)**. $\rightarrow a^{2n} \geq 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$
- Toda potencia de exponente **impar conserva el signo de la base**. $\rightarrow \begin{cases} a^{2n-1} \geq 0 \ \ si\ a \geq 0 \\ a^{2n-1} < 0 \ \ si\ a < 0 \end{cases}$

La base de la potencia es **-1** $\qquad$ La base de la potencia es **1**

Ejemplo 8 $\quad (-1)^{100} = \mathbf{1}; \quad (-1)^{101} = \mathbf{-1}\,; \quad -1^{100} = \mathbf{-1}; \quad -1^{99} = \mathbf{-1}; \quad 1^n = \mathbf{1}$

2.- Ejercicios resueltos con potencias

2.1. Descomponer el número $\mathbf{7.032}$ en potencias de 10 $\rightarrow \mathbf{7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0}$

2.2. Obtener el valor de: $\mathbf{-2 \cdot (-3)^2 + (-2)^2 \cdot (-2)^{-1}} \rightarrow -2 \cdot 9 + (-2)^{2-1} = -18 + (-2)^1 = -18 + -2 = \mathbf{-20}$

Al reemplazar, es recomendable colocar los datos entre paréntesis para no confundirse con los signos:

2.3. Evaluar: $\left(\mathbf{\frac{a^2b^{-2}}{a^{-1}b^5}}\right)^{\mathbf{3}}$ si $a = 2,\ b = -1 \rightarrow \left(\frac{(2)^2(-1)^{-2}}{(2)^{-1}(-1)^5}\right)^3 = \left(\frac{4 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot -1}\right)^3 = (-8)^3 = (-2^3)^3 = (-2)^9 = \mathbf{-512}$

2.4. Obtener el valor de: $\mathbf{4^{-2} + 2^{-3} - 2^{-4}} \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

2.5. Obtener el valor de: $\mathbf{\frac{7^{-2}+3^{-2} \cdot 2^{-2}}{6^{-2}}} \rightarrow \frac{7^{-2}+6^{-2}}{6^{-2}} = \frac{7^{-2}}{6^{-2}} + \frac{6^{-2}}{6^{-2}} = \left(\frac{7}{6}\right)^{-2} + 1 = \frac{36}{49} + 1 = \mathbf{1\frac{36}{49}} = \mathbf{\frac{85}{49}}$

2.6. $\dfrac{\mathbf{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4}}{\mathbf{36^2}} \rightarrow \dfrac{(2\cdot3\cdot5)^4}{(6^2)^2} = \dfrac{(30)^4}{6^4} = \left(\dfrac{30}{6}\right)^4 = \mathbf{5^4 = 625}$

- Al tener sólo multiplicaciones y divisiones, es posible agrupar todo bajo un mismo exponente y simplificar.

2.7. $\mathbf{(0,03^2 \cdot 0,3^2)^{-1}} \rightarrow \left(\left(\dfrac{3}{100}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{10}\right)^2\right)^{-1} = \left(\left(\dfrac{9}{1.000}\right)^2\right)^{-1} = \left(\dfrac{81}{1.000.000}\right)^{-1} = \dfrac{\mathbf{1.000.000}}{\mathbf{81}}$

2.8. $\mathbf{(5^2)^3 \cdot 10^4 \div 4^3 \div 25^4} \rightarrow \dfrac{5^6\cdot10^4}{4^3\cdot25^4} = \dfrac{5^6\cdot(5\cdot2)^4}{(2^2)^3\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^6\cdot5^4\cdot2^4}{2^6\cdot5^8} = \dfrac{5^{6+4-8}}{2^{6-4}} = \dfrac{5^2}{2^2} = \dfrac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}}$

- Usualmente se dejan las bases de forma tal que sus exponentes queden positivos.

2.9. $\dfrac{\mathbf{\frac{1}{3} \div 27 \div 9}}{\mathbf{3^{-5} \cdot 3^{-3}}} \rightarrow \dfrac{3^{-1}\div3^3\div3^2}{3^{-8}} = \dfrac{3^{-1-3-2}}{3^{-8}} = \dfrac{3^{-6}}{3^{-8}} = 3^{-6--8} = 3^2 = \mathbf{9}$

- Lo más cómodo es dejar todo en una misma base y sumar o restar los exponentes.

2.10. El valor del producto entre la tercera potencia de ocho y la cuarta potencia de cuatro, dividido por 16 al cuadrado es: $\rightarrow \dfrac{\mathbf{8^3\cdot4^4}}{\mathbf{16^2}} = \dfrac{(2^3)^3\cdot(2^2)^4}{(2^4)^2} = \dfrac{2^9\cdot\cancel{2^8}}{\cancel{2^8}} = \mathbf{2^9}$

2.11. $\mathbf{[(3^4)^5]^{2\frac{3}{4}}} \rightarrow [(3^4)^5]^{\frac{11}{4}} = 3^{4\cdot5\cdot\frac{11}{4}} = \mathbf{3^{55}}$

2.12. $\dfrac{\mathbf{10^5\cdot5^2\cdot2^{-4}}}{\mathbf{100^3\cdot25^2\cdot4^{-4}}} \rightarrow \dfrac{(5\cdot2)^5\cdot5^2\cdot2^{-4}}{((5\cdot2)^2)^3\cdot(5^2)^2\cdot(2^2)^{-4}} = \dfrac{5^5\cdot2^5\cdot5^2\cdot2^{-4}}{5^6\cdot2^6\cdot5^4\cdot2^{-8}} = \dfrac{5^7\cdot2^1}{5^{10}\cdot2^{-2}} = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{125}}$

2.13. $\mathbf{2^{3x} + 2^{-3x} - (8^x + 8^{-x})} \rightarrow 2^{3x} + 2^{-3x} - ((2^3)^x + (2^3)^{-x}) = 2^{3x} + 2^{-3x} - (2^{3x} + 2^{-3x}) = \mathbf{0}$

2.14. $\mathbf{2\cdot2^n + 4\cdot2^{n-2} + 8\cdot2^{n-3}} \rightarrow 2^{n+1} + 2^2\cdot2^{n-2} + 2^3\cdot2^{n-3} = 2^{n+1} + 2^n + 2^n = 2^n(2+1+1) = 2^n(4) = \mathbf{2^{n+2}}$

2.15. $\dfrac{\mathbf{3^{n+4} - 6\cdot3^{n+2}}}{\mathbf{7\cdot3^{n+2}}} \rightarrow \dfrac{\cancel{3^{n+2}}(3^2-6)}{7\cdot\cancel{3^{n+2}}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$

2.16. $\dfrac{\left(\dfrac{\mathbf{27a^{-3}b^5c^{-2}}}{\mathbf{3^{-2}a^{-1}b^{-3}}}\right)}{\mathbf{3^{-5}abc}} \rightarrow \dfrac{3^3\cdot3^2a^{-3--1}b^{5--3}c^{-2}}{3^{-5}abc} = \dfrac{3^5a^{-2}b^8c^{-2}}{3^{-5}abc} = 3^{5--5}a^{-2-1}b^{8-1}c^{-2-1} = 3^{10}a^{-3}b^7c^{-3} = \dfrac{\mathbf{3^{10}b^7}}{\mathbf{a^3c^3}}$

2.17. $\mathbf{(a^{-1} + b^{-1})^{-1} \div (a+b)^{-1}} \rightarrow \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)^{-1} \div \dfrac{1}{a+b} = \left(\dfrac{b+a}{ab}\right)^{-1} \cdot \dfrac{a+b}{1} = \dfrac{ab}{\cancel{a+b}} \cdot \dfrac{\cancel{a+b}}{1} = \boldsymbol{ab}$

2.18. $\dfrac{\mathbf{a^{12n+4}b^{4n-16}c^{16n}}}{\mathbf{a^{2n-4}b^{4n-2}c^{4n}}} \rightarrow a^{12n+4-(2n-4)}b^{4n-16-(4n-2)}c^{16n-4n} = \mathbf{a^{10n+8}b^{-14}c^{12n}} = \dfrac{\mathbf{a^{10n+8}c^{12n}}}{\mathbf{b^{14}}}$

2.19. $\dfrac{\mathbf{4y^{-2} + 3x^2}}{\mathbf{(xy)^{-7}}} \rightarrow \dfrac{\frac{4}{y^2} + 3x^2}{\frac{1}{x^7y^7}} = \dfrac{\frac{4+3x^2y^2}{y^2}}{\frac{1}{x^7y^7}} = \dfrac{4+3x^2y^2}{\cancel{y^2}} \cdot \dfrac{x^7\cancel{y^7}}{1} = \dfrac{4+3x^2y^2}{1} \cdot \dfrac{x^7y^5}{1} = \mathbf{4x^7y^5 + 3x^9y^7}$

2.20. $\dfrac{\mathbf{(6x-3y)^{2a+b}}}{\mathbf{(36x^2-9y^2)^{2a+b}}} \rightarrow \dfrac{(6x-3y)^{2a+b}}{[(6x+3y)\cdot(6x-3y)]^{2a+b}} = \dfrac{(\cancel{6x-3y})^{2a+b}}{(6x+3y)^{2a+b}\cdot(\cancel{6x-3y})^{2a+b}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{(6x+3y)^{2a+b}}}$

3.- Notación científica

3.1. Concepto

- Las potencias de $\mathbf{10}$ permiten escribir números muy grandes o muy pequeños de manera abreviada.
- La notación científica se estructura con un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia de 10. Es decir: $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{10}^{\boldsymbol{n}}$ está escrito en notación científica, si $\mathbf{1}\leq\boldsymbol{a}<\mathbf{10}$ y $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}$.

3.2. ¿Cómo transformar un número en notación decimal a notación científica?

Ejemplo 9 Expresar los siguientes números en notación científica: $\mathbf{3.241,64}$ $\quad$ $\mathbf{0,00437}$

- Se mueve la coma hasta quedar justo después de la primera cifra natural.
- El número anterior se multiplica por 10 elevado al número de veces que se movió la coma desde su estado original hasta nuestra nueva situación.
  Si el cambio anterior, generó que el número (sin considerar la potencia) disminuyera, entonces, la potencia de 10 tendrá exponente positivo para compensar esta disminución. Lo contrario ocurrirá si el número creció con el cambio.

$\mathbf{3.241,64}$	$\mathbf{0,00437}$
Número disminuye	Número crece
$\downarrow$	$\downarrow$
3,24164	4,37
$\downarrow$	$\downarrow$
$\mathbf{3,24164\cdot 10^{3}}$	$\mathbf{4,37\cdot 10^{-3}}$

3.3. ¿Cómo transformar un número en notación científica a notación decimal?

Ejemplo 10 Expresar los siguientes números en notación decimal: $\mathbf{5,4332\cdot 10^{2}}$ $\quad$ $\mathbf{9,2\cdot 10^{-5}}$

Dado que se trata de un proceso inverso al anterior, se debe mover la coma a la derecha (agrandar el número) tantas veces como sea el exponente, si éste es positivo, o a la izquierda (disminuir el número) tantas veces como sea el exponente, si éste es negativo. En caso que falten números, se deben agregar ceros. Finalmente, en notación decimal: $\mathbf{543,32}$ $\quad$ $\mathbf{0,000092}$

3.4. Ejemplos del uso de notación científica y de las potencias de 10

Ejemplo 11

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0,001}}+\frac{\mathbf{100}}{\mathbf{0,02}}+\frac{\mathbf{0,0001}}{\mathbf{10}}\rightarrow\frac{1}{10^{-3}}+\frac{10^{2}}{2\cdot 10^{-2}}+\frac{10^{-4}}{10}=10^{3}+\frac{10^{4}}{2}+10^{-5}=1.000+5.000+0,00001$$

$$=\mathbf{6.000,00001}$$

Ejemplo 12

$$\frac{\mathbf{0,006\cdot 54.000\cdot 160}}{\mathbf{360\cdot 0,08\cdot 90}}\rightarrow\frac{6\cdot 10^{-3}\cdot 54\cdot 10^{3}\cdot 16\cdot 10}{36\cdot 10\cdot 8\cdot 10^{-2}\cdot 9\cdot 10}=\frac{\cancel{6}\cdot\cancel{54}\cdot\cancel{16}}{\cancel{36}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{9}}\cdot\frac{10^{-3}\cdot 10^{3}\cdot\cancel{10}}{10\cdot 10^{-2}\cdot\cancel{10}}=\frac{1\cdot 6\cdot 2}{6\cdot 1\cdot 1}\cdot\frac{10^{-3+3-1--2}}{1}$$

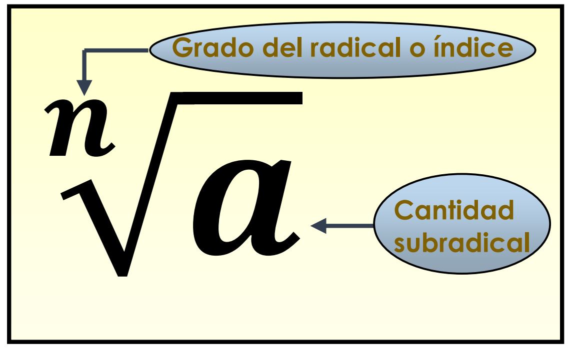
$$=\mathbf{2\cdot 10^{1}=20}$$

Conviene escribir cada número con una potencia de 10 tal, que no haga necesario el uso de decimales.

IV.- RAÍCES

1.- Conceptos y propiedades de las raíces

1.1. Definición: Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, entonces:



$$\boxed{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b} \ \leftrightarrow \ \boldsymbol{b}^{n} = \boldsymbol{a}}$$

Dependiendo del valor del índice, las raíces se designan por:

$\sqrt[2]{\boldsymbol{a}}$: raíz cuadrada de $\boldsymbol{a}$ (generalmente se escribe $\sqrt{a}$).
$\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}$: raíz cúbica de $\boldsymbol{a}$.
$\sqrt[4]{\boldsymbol{a}}$: raíz cuarta de $\boldsymbol{a}$ … etc.

Ejemplo 1 $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$ ya que $2^2 = 4$; $\sqrt[3]{27} = \mathbf{3}$ ya que $3^3 = 27$; $\sqrt[5]{32} = \mathbf{2}$ ya que $2^5 = 32$

1.2. Propiedad fundamental de las raíces

Toda potencia con exponente fraccionario se puede expresar como una raíz, cuyo índice es el denominador del exponente:

$$\boxed{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{m}} = \boldsymbol{a}^{\frac{m}{n}}}$$

➢ **Corolarios:** $\boxed{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}^{m}} = \boldsymbol{a}}$ $\boxed{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{m}} = \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{m}}$

Ejemplo 2 $\mathbf{8^{\frac{2}{3}}} \to \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = (2)^2 = \mathbf{4;}$ $\mathbf{243^{0,4}} \to 243^{\frac{4}{10}} = 243^{\frac{2}{5}} = \left(\sqrt[5]{243}\right)^2 = (3)^2 = \mathbf{9}$

Generalmente es más fácil calcular primero la raíz y luego la potencia.

➢ El índice y el exponente del subradical son **amplificables** y **simplificables entre** sí: $\boxed{\sqrt[kn]{\boldsymbol{a}^{km}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{m}}}$

➢ Además, cuando se tiene **raíz de una raíz,** se **multiplican los índices**: $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[m \cdot n]{\boldsymbol{a}}}$

Ejemplo 3 $\sqrt[24]{\mathbf{256^{6}}} \to \sqrt[4\cancel{6}]{256^{1\cancel{6}}} = \sqrt[4]{256} = \mathbf{4}$; $\sqrt{\sqrt[3]{\mathbf{64}}} \to \sqrt[6]{64} = \mathbf{2}$

1.3. Signo de las raíces

➢ **Raíces impares:** tienen el mismo signo que la cantidad subradical, por ejemplo: $\sqrt[3]{27} = \mathbf{3;}$ $\sqrt[3]{-27} = \mathbf{-3}$

➢ **Raíces pares:** Si es número mayor o igual que cero conserva signo: $\sqrt{25} = \mathbf{5,}$ Si es negativa la cantidad subradical, entonces no es real el resultado.

1.4. Tipos de Raíces

- Toda **raíz exacta** es **racional** y en caso contrario es **irracional**. Por ejemplo $\sqrt{4}=2$ es racional, mientras que $\sqrt{5}\approx 2{,}236\ldots$ es irracional.

- Las **raíces de índice par** de una **cantidad negativa** tienen por resultado un número que **no es real**, porque toda cantidad real, ya sea positiva o negativa, elevada a una potencia par, da un resultado positivo. Por ejemplo $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-a^2}$ **no son números reales**.

1.5. Propiedades algebraicas de las raíces

- **Multiplicación de raíces de igual índice**: se conserva el índice y se multiplican las cantidades subradicales. O bien, una raíz puede ser separada en el producto de dos raíces de similar índice:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}}$$

Ejemplo 4 $\sqrt[3]{\mathbf{2^2}}\cdot\sqrt[4]{\mathbf{3}} \rightarrow \sqrt[12]{2^8}\cdot\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{\mathbf{2^8\cdot 3^3}}$

$$\sqrt{\mathbf{3.600}} \rightarrow \sqrt{36\cdot 100}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{100}=\mathbf{6\cdot 10=60}$$

- **División de raíces de igual índice**: se conserva el índice y se dividen las cantidades subradicales. O bien, una raíz puede ser separada en un cuociente de dos raíces de similar índice:

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

Ejemplo 5 $\sqrt{\mathbf{0,04}} \rightarrow \sqrt{\frac{4}{100}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}}=\frac{2}{10}=\mathbf{0,2}$

- **Composición y descomposición de una raíz**: un factor puede ingresar a una raíz si se eleva al índice de ella. De igual forma un factor puede salir de una raíz, si dicho factor tiene raíz exacta.

$$\boldsymbol{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}}$$

Ejemplo 6 $\sqrt{\mathbf{48}} \rightarrow \sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{4^2\cdot 3}=\mathbf{4\sqrt{3}}$

$$\sqrt[3]{\mathbf{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} \rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2\sqrt{2}}}=\sqrt[3\cdot 2]{2^3\sqrt{2}}=\sqrt[6]{\sqrt{2^6\cdot 2}}=\sqrt[12]{\mathbf{2^7}}$$

- **Suma y resta de radicales: sólo** se pueden reducir los **radicales iguales**. No obstante, a través de la descomposición de raíces, es posible muchas veces igualar radicales y luego reducirlos.

Ejemplo 7 $\mathbf{5\sqrt{5}+4\sqrt{20}-3\sqrt{45}} \rightarrow 5\sqrt{5}+4\sqrt{4\cdot 5}-3\sqrt{9\cdot 5}=5\sqrt{5}+4\cdot 2\sqrt{5}-3\cdot 3\sqrt{5}=5\sqrt{5}+8\sqrt{5}-9\sqrt{5}=\mathbf{4\sqrt{5}}$

Ejemplo 8 $\frac{\mathbf{\sqrt{18}+\sqrt{98}+\sqrt{50}}}{\mathbf{2\sqrt{2}}} \rightarrow \frac{\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{49\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+7\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{15\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}$

2.- Ejercicios resueltos con raíces

2.1. Expresar con exponentes positivos y en forma radical: $\dfrac{\mathbf{3a^2mn}}{\mathbf{a^{-3}m^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{4}}}} \rightarrow 3a^5m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{7}{4}} = \mathbf{3a^5 \cdot \sqrt{m^3} \cdot \sqrt[4]{n^7}}$

2.2. Hallar el valor de: $\mathbf{16^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \left(\sqrt[2]{16}\right)^3 = (4)^3 = \mathbf{64}$

2.3. Hallar el valor de: $\left(\dfrac{\mathbf{-32}}{\mathbf{243}}\right)^{\frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{5}}} \rightarrow \left(\dfrac{-243}{32}\right)^{\frac{2}{5}} = \dfrac{\left(\sqrt[5]{-243}\right)^2}{\left(\sqrt[5]{32}\right)^2} = \dfrac{(-3)^2}{2^2} = \mathbf{\dfrac{9}{4}}$

2.4. Hallar el valor de: $\mathbf{243^{-\frac{1}{5}} \cdot 128^{\frac{3}{7}}} \rightarrow \dfrac{128^{\frac{3}{7}}}{243^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{\left(\sqrt[7]{128}\right)^3}{\left(\sqrt[5]{243}\right)^1} = \dfrac{(2)^3}{(3)^1} = \mathbf{\dfrac{8}{3}}$

2.5. Hallar el valor de: $\sqrt{\mathbf{6 + \frac{1}{4}}} - \sqrt{\mathbf{5 + \frac{1}{16}}} + \sqrt{\mathbf{8 - \frac{4}{25}}} \rightarrow \sqrt{\frac{25}{4}} - \sqrt{\frac{81}{16}} + \sqrt{\frac{196}{25}} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{4} + \dfrac{14}{5} = \dfrac{50-45+56}{20} = \mathbf{\dfrac{61}{20}}$

2.6. Reducir: $\mathbf{\sqrt{4 \cdot 3^2 \cdot 5}} \rightarrow \sqrt{4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = \mathbf{6\sqrt{5}}$

2.7. Reducir: $\mathbf{3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{18}} \rightarrow 3 \cdot 2\sqrt{2 \cdot 18} = 6\sqrt{36} = 6 \cdot 6 = \mathbf{36}$

2.8. Simplificar: $\sqrt[3]{\dfrac{\mathbf{-125x^9}}{\mathbf{216m^{12}}}} \rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{-125x^9}}{\sqrt[3]{216m^{12}}} = \mathbf{\dfrac{-5x^3}{6m^4}}$

2.9. Reducir: $\mathbf{\sqrt[3]{27^x \cdot 27^{-3}}} \rightarrow \sqrt[3]{3^{3x}} \cdot \sqrt[3]{3^{-9}} = 3^x \cdot 3^{-3} = \mathbf{3^{x-3}}$

2.10. Simplificar: $\mathbf{\sqrt[6]{18x^3y^4z^5} \div \sqrt[4]{3x^2y^2z^3}} \rightarrow \sqrt[12]{18^2x^6y^8z^{10}} \div \sqrt[12]{3^3x^6y^6z^9} = \sqrt[12]{\dfrac{(3^2{\cdot}2)^2x^6y^8z^{10}}{3^3x^6y^6z^9}}$

$= \sqrt[12]{\dfrac{(3^2{\cdot}2)^2y^2z}{3^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^4{\cdot}2^2y^2z}{3^3}} = \mathbf{\sqrt[12]{12y^2z}}$

2.11. Simplificar: $\dfrac{\mathbf{8^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{2}}}{\mathbf{\sqrt{0{,}5}}} \rightarrow \dfrac{(2^3)^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^{\frac{9}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2^{-\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = 2^3 = \mathbf{8}$

2.12. Reducir: $\mathbf{\sqrt{80} - 2\sqrt{252} + 3\sqrt{405} - 3\sqrt{500}} \rightarrow \sqrt{16 \cdot 5} - 2\sqrt{36 \cdot 7} + 3\sqrt{81 \cdot 5} - 3\sqrt{100 \cdot 5}$

$= 4\sqrt{5} - 2 \cdot 6\sqrt{7} + 3 \cdot 9\sqrt{5} - 3 \cdot 10\sqrt{5} = 4\sqrt{5} - 12\sqrt{7} + 27\sqrt{5} - 30\sqrt{5} = \mathbf{\sqrt{5} - 12\sqrt{7}}$

2.13. Simplificar: $\dfrac{\mathbf{\sqrt{5^5+5^5+5^5+5^5+5^5}}}{\mathbf{\sqrt[3]{5^5+5^5+5^5+5^5+5^5}}} \rightarrow \dfrac{\sqrt{5^5(5)}}{\sqrt[3]{5^5(5)}} = \dfrac{\sqrt{5^6}}{\sqrt[3]{5^6}} = \dfrac{5^3}{5^2} = \mathbf{5}$

2.14. Si $\mathbf{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = t}$, entonces, ¿el valor de $\mathbf{t^2 - 2}$ es? $\rightarrow \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 2$

$= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 2 = 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} - 2$

$= 2 - 2\sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 - 2\sqrt{1} = \mathbf{0}$

3.- Racionalización

Muchas veces, al resolver un problema, el resultado presenta una fracción cuyo denominador tiene raíces. Dado que es incómodo trabajar con denominadores irracionales, existe un método llamado racionalización, el que por medio de una amplificación especial elimina las raíces del denominador.

3.1. Denominador monomio

- **Raíz cuadrada:** se amplifica por la misma raíz.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Ejemplo 9 $\quad \frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

- **Raíz no cuadrada:** se debe amplificar por una raíz de igual índice, cuya cantidad subradical presente un exponente tal que, sumado con el exponente de la raíz inicial, iguale al índice de la raíz.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \rightarrow \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Ejemplo 10 $\quad \frac{5}{\sqrt[3]{6}} \rightarrow \frac{5}{\sqrt[3]{6}} \cdot \frac{\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^2}} = \frac{5\sqrt[3]{6^2}}{6} = \frac{5\sqrt[3]{36}}{6}$

3.2. Denominador binomio de raíces cuadradas

Se amplifica la fracción por un factor tal, que forme una **suma por su diferencia** en el denominador, lo que desembocará en una diferencia de cuadrados que eliminará las raíces cuadradas. Es decir, si tenemos en el denominador una suma de términos, amplificaremos por el mismo binomio, pero con una diferencia. Y en caso de tener una diferencia de términos, amplificaremos por la suma de éstos.

Ejemplo 11 Racionalizar las siguientes cantidades:

$$\frac{6}{\sqrt{13}-\sqrt{10}} \rightarrow \frac{6}{\sqrt{13}-\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{13}+\sqrt{10}}{\sqrt{13}+\sqrt{10}} = \frac{6(\sqrt{13}+\sqrt{10})}{(\sqrt{13})^2-(\sqrt{10})^2} = \frac{6(\sqrt{13}+\sqrt{10})}{13-10} = \frac{6(\sqrt{13}+\sqrt{10})}{3} = 2(\sqrt{13}+\sqrt{10})$$

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}} \rightarrow \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}} = \frac{a-2\sqrt{a}\sqrt{a+b}+a+b}{a-(a+b)} = \frac{2a-2\sqrt{a^2+ab}+b}{-b} = \frac{-2a}{b} + \frac{2\sqrt{a^2+ab}}{b} - 1$$

Ejemplo 12 Ordenar de menor a mayor: $M = \sqrt{6}$; $N = \sqrt{2}+\sqrt{3}$; $P = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Solución: Comparamos M con N: $M = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} < \sqrt{2}\cdot\sqrt{4} = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2} < \sqrt{2}+\sqrt{3} = N \rightarrow \boldsymbol{M < N}$

Racionalizamos P y lo comparamos con N: $P = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 2(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 2N \rightarrow \boldsymbol{N < P}$

Entonces: $\boldsymbol{M < N < P}$

4.- Ejercicios adicionales con raíces

Ejemplo 13 Calcular: $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{2+\sqrt{2}}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2-\sqrt{2}}}$

Solución: Si bien podemos racionalizar los denominadores antes de sumar las fracciones, se observa que el MCM de éstos es justamente una diferencia de cuadrados, lo que nos entregará un denominador común racionalizado.

$$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{2+\sqrt{2}}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2-\sqrt{2}}} \quad \rightarrow \quad \frac{6(2-\sqrt{2})-3(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{12-6\sqrt{2}-6-3\sqrt{2}}{4-2} = \frac{\mathbf{6-9\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

Ejemplo 14 ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) racional(es)?

I) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ II) $\sqrt{3}+3\sqrt{3}$ III) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$

Solución: Se reducen al máximo las expresiones, recordando que los números racionales son aquellos que se pueden escribir como una fracción.

I) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{16} = \mathbf{4}$ → **Racional**

II) $\sqrt{3}+3\sqrt{3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$ → **Irracional**

III) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{6}{24}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ → **Racional**

Ejemplo 15 ¿Cuál(es) de las siguientes relaciones es(son) verdadera(s)?

I) $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ II) $3\sqrt{3} < 2\sqrt{5}$ III) $4\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

Solución: Se componen las raíces, dejando todos los términos dentro de ellas:

I) $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} \;=\; \sqrt{2^2\cdot 3} < \sqrt{3^2\cdot 2} \;=\; \sqrt{12} < \sqrt{18}$ → **Verdadero**

II) $3\sqrt{3} < 2\sqrt{5} \;=\; \sqrt{3^2\cdot 3} < \sqrt{2^2\cdot 5} \;=\; \sqrt{27} < \sqrt{20}$ → **Falso**

III) $4\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ → **Falso obviamente**

Ejemplo 16 Reducir: $(\sqrt{2}-2)^3(\sqrt{2}+2)^4 + (\sqrt{2}-2)^4(\sqrt{2}+2)^3$

Solución: En lugar de resolver los binomios al cubo y los binomios a la cuarta, agrupamos formando sumas por su diferencia, que eliminarán las raíces:

$$[(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)]^3(\sqrt{2}+2) + [(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)]^3(\sqrt{2}-2) \;=\; [2-4]^3(\sqrt{2}+2) + [2-4]^3(\sqrt{2}-2)$$

$$= [-2]^3(\sqrt{2}+2) + [-2]^3(\sqrt{2}-2) \;=\; -8(\sqrt{2}+2) - 8(\sqrt{2}-2) = -8\sqrt{2} - 16 - 8\sqrt{2} + 16 = \mathbf{-16\sqrt{2}}$$

V.- LOGARITMOS

1.- Conceptos básicos

1.1. Definición: Si $\boldsymbol{b}$ es una base **real positiva distinta** de $\mathbf{1}$, entonces:

$$\boldsymbol{y = log_b x \ \leftrightarrow \ b^y = x}$$

Por convención, cuando $\boldsymbol{b} = \mathbf{10}$, se omite la base, por ejemplo: $log_{10}100 = \ log100$.

Ejemplo 1 $\quad \boldsymbol{log_3 81 = 4} \leftrightarrow 3^4 = \ 81;$ $\quad \boldsymbol{log_2 \frac{1}{4} = -2} \leftrightarrow 2^{-2} = \frac{1}{4}$ $\quad \boldsymbol{log 1.000 = 3} \leftrightarrow 10^3 = \ 1.000$

Ejemplo 2 Calcular: $\boldsymbol{log_2 \sqrt[3]{8^5}}$ $\quad \rightarrow \quad 2^x = \sqrt[3]{8^5} \ \rightarrow \ 2^x = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 \ \rightarrow \ 2^x = (2)^5 \ \rightarrow 2^x = 2^5 \ \rightarrow \ \boldsymbol{x = 5}$

Ejemplo 3 Calcular $\boldsymbol{x}$ en: $\boldsymbol{log_x 32 = 5}$ $\quad \rightarrow \quad x^5 = 32 \ \rightarrow x \ = \sqrt[5]{32} \ \rightarrow \ \boldsymbol{x = 2}$

2.- Propiedades de los logaritmos

- **Logaritmo de 1:** siempre es cero.

$\boldsymbol{log_b 1 \ = 0}$ $\qquad$ **Ejemplo:** $\boldsymbol{log_5 1 \ = 0}$

- **Logaritmo en su misma base:** es igual a 1.

$\boldsymbol{log_b b \ = 1}$ $\qquad$ **Ejemplo:** $\boldsymbol{log_5 5 \ = 1}$

- **Logaritmo de un producto:** es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$\boldsymbol{log_b(x \cdot y) = log_b x + \ log_b y}$ $\qquad$ **Ejemplo:** $\mathbf{log_2 48} = \log_2(16 \cdot 3) = \log_2 16 + \log_2 3 = \mathbf{4 + log_2 3}$

- **Logaritmo de un cuociente:** es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo con el del divisor.

$\boldsymbol{log_b(x \div y) = log_b x \ - log_b y}$ $\qquad$ **Ejemplo:** $\mathbf{log_3}\left(\frac{\mathbf{81}}{\mathbf{243}}\right) = \log_3 81 - \log_3 243 = 4 - 5 = \mathbf{-1}$

- **Logaritmo de una potencia:** es igual exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

$\boldsymbol{log_b x^n = n \cdot log_b x}$ $\qquad$ **Ejemplos:** $\mathbf{log_2 4^3} = 3 \cdot \log_2 4 = 3 \cdot 2 = \mathbf{6};$ $\qquad \mathbf{log_4 \sqrt[6]{4^5}} = \frac{5}{6}\log_4 4 = \frac{5}{6} \cdot 1 = \mathbf{\frac{5}{6}}$

- **Cambio de base de un logaritmo:** para cambiar de una base $\boldsymbol{b}$ a una base $\boldsymbol{c}$:

$\boldsymbol{log_b x = \frac{log_c x}{log_c b}}$ $\qquad$ **Ejemplo:** $\mathbf{log_4 8} = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \mathbf{\frac{3}{2}}$

Ejemplo 4 Desarrollar la siguiente expresión: $\boldsymbol{log\sqrt[3]{\frac{xy^2}{z^5t}}}$

Solución: $log\sqrt[3]{\frac{xy^2}{z^5t}} = \frac{1}{3}log\frac{xy^2}{z^5t} = \frac{1}{3}\left(logxy^2 - logz^5t\right) = \frac{1}{3}\left(logx+logy^2 - (logz^5 + logt)\right)$

$= \frac{1}{3}\left(logx + 2logy - 5logz - logt\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}logx + \frac{2}{3}logy - \frac{5}{3}logz - \frac{1}{3}logt}$

Ejemplo 5 Reducir (agrupar) siguiente expresión: $\boldsymbol{\frac{1}{3}loga - \frac{2}{3}logb + \frac{1}{3}logc}$

Solución: $\frac{1}{3}loga - \frac{2}{3}logb + \frac{1}{3}logc = loga^{\frac{1}{3}} - logb^{\frac{2}{3}} + logc^{\frac{1}{3}} = log\frac{a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} = log\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b^2}} = \boldsymbol{log\sqrt[3]{\frac{ac}{b^2}}}$

Ejemplo 6 Si $\boldsymbol{log2 = a}$, encontrar una expresión para $\boldsymbol{log500}$ en función de $\boldsymbol{a}$.

Solución: Debemos descomponer $\boldsymbol{log(500)}$ en logaritmos cuyo resultado exacto conozcamos, como por ejemplo $log1, log10, log100, log1.000$, etc., y en "logaritmos de dos", que según el enunciado son iguales a $\boldsymbol{a}$.

Entonces: $\boldsymbol{log500} = log\frac{1.000}{2} = log1.000 - log2 = \boldsymbol{3 - a}$

3.- Conceptos adicionales sobre los logaritmos

3.1. Logaritmos Neperianos

Se denominan logaritmos Neperianos, naturales o hiperbólicos a aquellos que tienen por base el número $\boldsymbol{e}$.

$\boxed{\boldsymbol{log_e x = lnx}}$ Con $\boldsymbol{e \approx 2,718}$..

3.2. Funciones inversas: exponencial y logarítmica

A partir de la definición de logaritmo, es claro que las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas, por lo que al aplicarse simultáneamente ambas sobre una variable, éstas "se anulan". Desde luego que, para anularse, estas funciones deben presentar la misma base.

$\boxed{\boldsymbol{b^{log_b x} = x = log_b b^x}}$

Ejemplo 7 $\boldsymbol{e^{lnx} = x}$; $\boldsymbol{log10^x = x}$; $\boldsymbol{log_2 3^x \neq x}$; $\boldsymbol{log_3 3^x = x}$

CAPÍTULO III

ECUACIONES E INECUACIONES

I.- ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1.- Conceptos y soluciones de una ecuación

1.1. Definición: Entendemos por **ecuación** a una **igualdad** entre expresiones algebraicas, en la que intervienen una o más incógnitas ($\boldsymbol{x}$) cuyos valores hay que determinar. Se denomina **solución** o **raíz** de una ecuación a un valor o conjunto de valores de la incógnita $\boldsymbol{x}$, para los cuales se verifica la igualdad.
Por otra parte, las **identidades** corresponden a igualdades que se cumplen para **todo** valor de $\boldsymbol{x}$.

1.2. Soluciones de una ecuación

Una ecuación puede tener ninguna, una o varias soluciones. Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones o si ambas carecen de solución.

Ejemplo 1

- $\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{9}=\mathbf{1}$ es una ecuación con una incógnita, cuya solución es: $\boldsymbol{x}=\mathbf{2}$.
- La ecuación: $\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{7}=\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$ es equivalente a: $\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{8}=\mathbf{0}$, porque ambas tienen como solución $\boldsymbol{x}=\mathbf{4}$.
- $\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{5} \;=\; \mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}$ es una identidad, ya que es válida para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$.
- $\boldsymbol{x}+\mathbf{3}=\boldsymbol{x}+\mathbf{2}$ es una ecuación que no tiene solución.

1.3. Grado de una ecuación

El grado de una ecuación corresponde al grado más alto que presentan sus incógnitas, después de haber reducido términos semejantes. En el caso de una ecuación de 1° grado, la incógnita sólo está elevada a la primera potencia, es decir, una vez reducidos los términos semejantes presentan la siguiente forma:

$\boxed{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}}$ (la incógnita es $\boldsymbol{x}$, mientras que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son constantes)

Ejemplo 2 La siguiente ecuación: $(\boldsymbol{x}-\mathbf{5})^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}$ pareciera que fuera de segundo grado, no obstante es de primer grado, ya que al desarrollar y simplificar se obtiene: $-\mathbf{10}\boldsymbol{x}+\mathbf{29}=\mathbf{0}$.

1.4. Resolución de ecuaciones

Resolver una ecuación es hallar su(s) solución(es), o llegar a la conclusión de que ésta no tiene solución. Para resolver una ecuación, se pasa a otra equivalente cuya apariencia sea más sencilla. Para averiguar el valor de la incógnita, ésta debe **despejarse**. Para ello nos valemos de una propiedad matemática que nos permite realizar una misma operación en ambos lados de la igualdad. En la práctica, esta propiedad se traduce en el criterio del **operador inverso**.

2.- Ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros

El procedimiento general consiste en reducir los términos semejantes a ambos lados de la ecuación y posteriormente dejar todas las incógnitas a un lado (idealmente donde está la con mayor coeficiente) y las constantes al otro, transponiendo términos por medio del criterio del operador inverso.

Ejemplo 3

$$\mathbf{2x - 3 = 53} \quad /+3$$
$$2x - 3 + 3 = 53 + 3$$
$$2x = 53 + 3$$
$$2x = 56 \quad /\div 2$$
$$2x \div 2 = 56 \div 2$$
$$x = 56 \div 2$$
$$\mathbf{x = 28}$$

- Si queremos despejar **x**, debemos partir eliminando el **3** que está **restando** en el lado izquierdo, para lo cual **sumamos 3** a ambos lados de la ecuación.
- Es por este motivo, que cuando un número está **restando** pasa **sumando** al otro lado (la operación inversa de la suma es la resta).
- Ahora debemos eliminar el **2** que está **multiplicando** a **x**, para lo cual **dividimos** por **2** a ambos lados de la ecuación.
- Por esta razón, cuando un número está **multiplicando** pasa al otro lado **dividiendo** (la operación inversa de la multiplicación es la división).
- Encontramos el valor de **x** y comprobamos.

En la práctica nos ahorramos los pasos intermedios y aplicamos directamente el criterio del operador inverso:

$$\mathbf{2x - 3 = 53}$$
$$2x = 53 + 3$$
$$2x = 56$$
$$x = 56/2$$
$$\mathbf{x = 28}$$

Comprobación:

Lado izquierdo		Lado derecho		
$2x - 3$	$=$	53		
$2 \cdot 28 - 3$	$=$	53		
$\mathbf{53}$	$=$	$\mathbf{53}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{OK}$

Dado que ambos lados de la ecuación presentan el mismo valor, la solución encontrada es correcta.

Ejemplo 4

$$\mathbf{2x - [x - (x - 50)] = x - (800 - 3x)}$$
$$2x - [x - x + 50] = x - 800 + 3x$$
$$2x - [50] = 4x - 800$$
$$2x - 50 = 4x - 800$$
$$2x - 4x = -800 + 50$$
$$-2x = -750$$
$$x = -750/-2$$
$$\mathbf{x = 375}$$

- Quitamos los paréntesis más internos en cada lado de la ecuación.
- Reducimos términos semejantes.
- Quitamos el último paréntesis.
- Transponemos los términos empleando el criterio de las operaciones inversas.
- Reducimos términos semejantes. Pasamos dividiendo el **-2** y simplificamos.

Ejemplo 5

$$\mathbf{x(x+5)^2 + 2x^3 - 4x^2 = 3x(1+x)^2 + 22}$$
$$x(x^2 + 10x + 25) + 2x^3 - 4x^2 = 3x(1 + 2x + x^2) + 22$$
$$x^3 + 10x^2 + 25x + 2x^3 - 4x^2 = 3x + 6x^2 + 3x^3 + 22$$
$$3x^3 + 6x^2 + 25x = 3x + 6x^2 + 3x^3 + 22$$
$$3x^3 + 6x^2 + 25x - 6x^2 - 3x^3 - 3x = 22$$
$$22x = 22$$
$$\mathbf{x = 1}$$

- Se reducen los términos semejantes de cada lado, aplicando las fórmulas de los cuadrados de binomio.
- Si bien aparecen términos de segundo y tercer grado, estos se cancelan, por lo que la ecuación final es de primer grado.

Ejemplo 6

$$\mathbf{2x + 5 = 2x + 5}$$
$$2x - 2x = 5 - 5$$
$$\mathbf{0 = 0}$$

Esta ecuación tiene **infinitas** soluciones

$$\mathbf{2x + 5 = 2x + 3}$$
$$2x - 2x = 3 - 5$$
$$\mathbf{0 = -2}$$

Esta ecuación **no** tiene solución

3.- Ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios

3.1. Denominador numérico

Se eliminan los denominadores, amplificando a ambos lados de la ecuación por el MCM de éstos, transformando la ecuación fraccionaria en una de coeficientes enteros.

Ejemplo 7 $\frac{x-3}{8}+\frac{2x-1}{6}=\frac{5x+3}{9}$ /• 72

$$\cancel{72}\cdot\frac{x-3}{\cancel{8}}+\cancel{72}\cdot\frac{2x-1}{\cancel{6}}=\cancel{72}\cdot\frac{5x+3}{\cancel{9}}$$

$$\begin{aligned}9(x-3)+12(2x-1)&=8(5x+3)\\9x-27+24x-12&=40x+24\\33x-39&=40x+24\\-39-24&=7x\\-63&=7x\\\boldsymbol{x}&=\mathbf{-9}\end{aligned}$$

- El MCM = 72, por lo tanto amplificamos por **72** a ambos lados de la ecuación.
- Simplificamos los numeradores con los denominadores de cada término.
- Aplicamos la metodología conocida.

3.2. Denominador algebraico

Se recomienda factorizar siempre el denominador para poder buscar el denominador común. El procedimiento es análogo al anterior, es decir, se amplifica a ambos lados de la ecuación por el MCM de los denominadores, para así eliminarlos.

Ejemplo 8 $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{5}{(x+1)(x-1)}$$ / • (x + 1)(x – 1)

$$\frac{1(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}+\frac{2\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}=\frac{5\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}$$

$$1(x+1)+2(x-1)=5\ \rightarrow\ x+1+2x-2=5\ \rightarrow\ 3x-1=5\ \rightarrow\ 3x=6\ \rightarrow\ \boldsymbol{x}=\mathbf{2}$$

- Factorizamos lo que sea factorizable (suma por su diferencia).
- Amplificamos por el MCM a ambos lados de la ecuación, el que corresponde a: **(x + 1)(x – 1).**
- Se despeja **x**.

Ejemplo 9 $\frac{5}{2x-2}-\frac{2x+3}{3x-3}+\frac{3x+2}{4x-4}-2=\frac{4x+1}{5x-5}\ \rightarrow\ \frac{5}{2(x-1)}-\frac{2x+3}{3(x-1)}+\frac{3x+2}{4(x-1)}-2=\frac{4x+1}{5(x-1)}$ / • 60(x – 1)

$$\begin{aligned}5\cdot30-(2x+3)\cdot20+(3x+2)\cdot15-2\cdot60(x-1)&=(4x+1)\cdot12\\150-40x-60+45x+30-120x+120&=48x+12\\240-115x&=48x+12\\228&=163x\\\boldsymbol{x}&=\mathbf{228/163}\end{aligned}$$

- Factorizamos todos los denominadores (factor común), amplificamos por el MCM y luego aplicamos la metodología conocida.

4.- Ecuaciones literales

Se denominan ecuaciones literales a aquellas que contienen otras variables además de la incógnita. Estas otras variables representan constantes a la hora de resolver la ecuación.
Para resolver estas ecuaciones, se transponen los términos de forma tal, que las incógnitas queden a un lado y todos los otros términos al otro. En muchas ocasiones, los términos con $\boldsymbol{x}$ (u otra incógnita) no son semejantes, por lo tanto es necesario factorizar por $\boldsymbol{x}$, para luego pasar dividiendo hacia el otro lado el factor encontrado y así despejar la incógnita.

Ejemplo 10 Encontrar el valor de x: $\boldsymbol{b^2x - 2 = b + 4x}$

Solución:

$$b^2x - 4x = b + 2$$

- Dejamos los términos con **x** a la izquierda y los sin **x** a la derecha.

$$x(b^2 - 4) = b + 2$$

- Factorizamos por **x** lado izquierdo.

$$x = \frac{b+2}{b^2-4}$$

- Pasamos dividiendo el factor encontrado al lado derecho.

$$x = \frac{\cancel{b+2}}{(\cancel{b+2})(b-2)}$$

- El denominador es una diferencia de cuadrados, por lo que se factoriza como una suma por su diferencia.

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{(b-2)}}$$

- Simplificamos y obtenemos el valor de **x**.

Ejemplo 11 Encontrar el valor de x: $\boldsymbol{\frac{x+a}{2a+b} + \frac{x+b}{a+2b} = 2}$ / • **(2a + b)(a + 2b)**

Solución:

$$(x + a)(a + 2b) + (x + b)(2a + b) = 2(2a + b)(a + 2b)$$
$$ax + 2bx + a^2 + 2ab + 2ax + bx + 2ab + b^2 = 2(2a^2 + 5ab + 2b^2)$$

- Amplificamos por el MCM y simplificamos los denominadores.

$$3ax + 3bx + a^2 + 4ab + b^2 = 4a^2 + 10ab + 4b^2$$
$$3ax + 3bx = 3a^2 + 6ab + 3b^2 \quad /: \boldsymbol{3}$$

- Reducimos términos semejantes y transponemos términos.

$$ax + bx = a^2 + 2ab + b^2$$

- Simplificamos la ecuación completa por **3**.

$$x(a + b) = (a + b)^2$$
$$x = \frac{(a+b)^{\cancel{2}}}{\cancel{a+b}}$$

- Factorizamos por **x** el lado izquierdo y pasamos dividiendo el factor encontrado.

$$\boldsymbol{x = a + b}$$

- Simplificamos para encontrar el valor de **x**.

Ejemplo 12 Si $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\frac{r-q}{p-q}}$, entonces $\boldsymbol{q}$ = ?

Solución: En este caso nos piden despejar q, variable que pasa a jugar el rol de la incógnita en la ecuación.

$$t = \frac{r-q}{p-q} \; / \bullet \; \textbf{(p – q)} \quad \rightarrow \quad t(p - q) = r - q \quad \rightarrow \quad pt - qt = r - q$$

- Amplificamos por **(p – q)** y transponemos los términos dejando los valores con q a un lado.

$$pt - r = qt - q \quad \rightarrow \quad pt - r = q(t - 1)$$

- Factorizamos por **q** y pasamos el factor encontrado dividiendo.

$$\boldsymbol{q = \frac{pt-r}{t-1} = \frac{r-pt}{1-t}}$$

- El resultado se puede presentar de dos formas.

5.- Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado

Para resolver un problema recomendamos seguir los siguientes pasos:

1. Leer atenta y comprensivamente el enunciado.
2. Identificar la incógnita y los datos que se utilizarán en la solución.
3. Plantear una ecuación relacionando los datos con la incógnita.
4. Resolver la ecuación.
5. Analizar la solución, cuidando de que tenga relación con el enunciado del problema.

Ejemplo 13 La suma de tres números impares consecutivos es 81. ¿Cuáles son los números?

Solución: Si designamos los tres números por: $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x+2}$ y $\boldsymbol{x+4}$, podemos plantear la siguiente ecuación:

$x + (x+2) + (x+4) = 81 \ \rightarrow\ 3x+6 = 81 \ \rightarrow\ 3x = 75 \ \rightarrow\ \boldsymbol{x = 25} \ \rightarrow$ Los números son: $\mathbf{25, 27}$ y $\mathbf{29}$

Ejemplo 14 Jorge es 3 años menor que Álvaro, pero 7 años mayor que María. Si la suma de las edades de los tres es 38, ¿qué edad tiene cada uno?

Solución: Si definimos por $\boldsymbol{J}$ a la edad de Jorge, podemos designar por $\boldsymbol{J+3}$ a la edad de Alvaro y $\boldsymbol{J-7}$ a la edad de María. Entonces:

$J + (J+3) + (J-7) = 38 \ \rightarrow\ 3J - 4 = 38 \ \rightarrow\ 3J = 42 \ \rightarrow\ \boldsymbol{J = 14} \ \rightarrow$ **Jorge tiene 14, Álvaro 17 y María 7 años.**

Ejemplo 15 Pedro tiene $ 2.400 en monedas de $50, $100 y $500. Las monedas de $100 son una más que las de $50 y una menos que las de $500. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

Solución: Designemos a $\boldsymbol{x}$ como el número de monedas de $100 que tiene Pedro. Por lo tanto el número de monedas de $50 será: $\boldsymbol{x-1}$ y el número de monedas de $500 será: $\boldsymbol{x+1}$. Si consideramos que el total de dinero es $2.400, podremos escribir la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
50(x-1) + 100x + 500(x+1) &= 2.400 \quad /:\mathbf{10} \\
5(x-1) + 10x + 50(x+1) &= 240 \\
5x - 5 + 10x + 50x + 50 &= 240 \\
65x + 45 &= 240 \\
65x &= 195 \\
\boldsymbol{x} &= \mathbf{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de monedas de cada tipo es:

- De $50: $x - 1 = 3 - 1 = \mathbf{2}$
- De $100: $x = \mathbf{3}$
- De $500: $x + 1 = 3 + 1 = \mathbf{4}$

Ejemplo 16 Ignacio pinta completamente una pieza en 10 horas y María hace lo mismo en 15 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán ambos en pintar la pieza si trabajan juntos?

Solución: Ignacio pinta $\mathbf{1/10}$ de la pieza por hora y María $\mathbf{1/15}$ por hora, luego ambos juntos pintarán $\mathbf{1}/\boldsymbol{x}$ de la pieza por hora, donde $\boldsymbol{x}$ representa el tiempo de pintado trabajando juntos, entonces:

$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{x} \ /\cdot \boldsymbol{30x} \ \rightarrow\ 3x + 2x = 30 \ \rightarrow\ 5x = 30 \ \rightarrow\ \boldsymbol{x = 6} \ \rightarrow$ ambos juntos pintan la pieza en ***6* horas**.

Ejemplo 17 Un vendedor recibe $ 215.000 de sueldo al mes, más un 8% de las ventas por comisión. ¿Cuánto debe vender para ganar $ 317.000 en el mes?

Solución: Si designamos por $\boldsymbol{x}$ a las ventas mensuales, podremos plantear la siguiente ecuación:

$$215.000 + 8\%\, x = 317.000 \quad \rightarrow \quad 0{,}08 \cdot x = 102.000 \quad \rightarrow \quad \frac{8}{100}x = 102.000 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{25}x = 102.000 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \$\mathbf{1.275.000}$$

Ejemplo 18 Compré $\boldsymbol{x}$ kg de café en $ 36.000 y compré 40 kg más de té que de café en $ 48.000. ¿Cómo se expresa el valor de 1 kg de café más 1 kg de té, en función de $\boldsymbol{x}$?

Solución: 1 kg de café + 1 kg de té = $\dfrac{\mathbf{36.000}}{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\mathbf{48.000}}{\mathbf{40}+\boldsymbol{x}}$

Ejemplo 19 Juan en 10 años más tendrá el doble de la edad que tenía hace 5 años. ¿Qué edad tendrá Juan en un año más?

-Edad de Juan en 10 años más   -Edad de Juan hace 5 años

Solución: Si designamos por $\boldsymbol{J}$ a la edad de Juan, entonces: $J + 10 = 2(J - 5) \rightarrow J + 10 = 2J - 10$
$\rightarrow \boldsymbol{J} = \mathbf{20}$ **años** $\rightarrow$ en 1 año más Juan tendrá **21 años**.

Ejemplo 20 Un estudiante debe leer una novela en una semana. Entre lunes y martes lee 1/5 del libro y el miércoles 1/3 del resto. Si para los restantes días de la semana todavía le quedan 64 páginas por leer, ¿cuál es el número total de páginas del libro?

Solución: Designemos por $\boldsymbol{x}$ al total de páginas del libro.

- Entre el lunes y el martes lee *1/5* de x, lo que equivale a $\mathbf{1/5}\,\boldsymbol{x}$.
- El miércoles lee *1/3* de (*4/5*) de x (ya que 4/5 de x es el resto), lo que es igual a $1/3 \cdot 4/5 \cdot x = \mathbf{4/15}\,\boldsymbol{x}$.
- Los otros días lee $\mathbf{64}$ páginas.

Entonces, la ecuación que describe la situación es:

$$\frac{1}{5}x + \frac{4}{15}x + 64 = x \ / \bullet 15 \quad \rightarrow \quad 3x + 4x + 960 = 15x \quad \rightarrow \quad 960 = 8x \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 120 \text{ páginas}}$$

Ejemplo 21 Si te regalo la quinta parte de mis camisetas y a Carmen le regalo 5 más que a ti, me quedo con 4 camisetas. ¿Cuántas camisetas tenía?

Solución: Si designamos por $\boldsymbol{x}$ al número total de camisetas, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$x - \frac{x}{5} - \left(\frac{x}{5} + 5\right) = 4 \quad \rightarrow \quad x - \frac{2x}{5} - 5 = 4 \ / \bullet 5$$

$$\rightarrow \quad 5x - 2x - 25 = 20 \quad \rightarrow \quad 3x = 45 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{15} \textbf{\textit{ camisetas}}$$

II.- SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1.- Conceptos generales y tipos de soluciones

1.1. Definición: Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones, usualmente con dos o más incógnitas, cuya solución corresponde a aquella que se verifica simultáneamente para todas las ecuaciones. Los sistemas de ecuaciones que **presentan soluciones** se llaman **compatibles** y los que **no tienen solución**, **incompatibles**. Un sistema de ecuaciones **compatible** es **determinado** cuando tiene **solución única** y es **indeterminado** cuando presenta **infinitas soluciones**.

1.2. Tipos de soluciones

Analicemos con ejemplos, los distintos casos de soluciones que puede presentar un sistema de ecuaciones:

- La ecuación: $\mathbf{6x+8y=360}$ tiene **infinitas soluciones**, p.ej.: $\mathbf{x=40, y=15}$; $\mathbf{x=60, y=0}$; $\mathbf{x=0, y=45}$. Esto lo podemos corroborar, por ejemplo, para la primera solución: $\mathbf{6\cdot 40+8\cdot 15=360} \rightarrow \boldsymbol{OK}$

- Si a la ecuación anterior, le adicionamos la ecuación: $\mathbf{x+y=55}$, se formará el siguiente sistema:

$$\begin{array}{r|}\mathbf{6x+8y=360}\\ \mathbf{x+y=55}\end{array}$$

Notaremos que la **única solución** que satisface a ambas ecuaciones es $\mathbf{x=40}$, $\mathbf{y=15}$. Ambas ecuaciones se denominan **linealmente independientes (LI)** y **compatibles**.

- Si en vez de adicionar: $x+y=55$, hubiésemos adicionado: $\mathbf{6x+8y=350}$, se formaría el sistema:

$$\begin{array}{r|}\mathbf{6x+8y=360}\\ \mathbf{6x+8y=350}\end{array}$$

Notaríamos que **no existe solución** común que satisface a ambas ecuaciones. Ambas **son incompatibles** entre sí, ya que $6x+8y$ no puede tomar dos valores diferentes.

- Si al segundo caso le hubiésemos agregado la siguiente ecuación: $\mathbf{2x+y=10}$, se formaría el sistema:

$$\begin{array}{r|}\mathbf{6x+8y=360}\\ \mathbf{x+y=55}\\ \mathbf{2x+y=10}\end{array}$$

Notaríamos que **no existe solución** común a todas las ecuaciones, ya que hay **más ecuaciones LI que incógnitas.**

- Pero si al segundo caso le hubiésemos agregado la ecuación $\mathbf{2x+2y=110}$, se formaría el sistema:

$$\begin{array}{r|}\mathbf{6x+8y=360}\\ \mathbf{x+y=55}\\ \mathbf{2x+2y=110}\end{array}$$

Notaríamos que **sigue existiendo una solución** común dada por $\mathbf{x=40}$, $\mathbf{y=15.}$ Esto porque la tercera ecuación es **linealmente dependiente (LD) de la segunda**, es decir es similar a ésta, sólo que amplificada por 2.

Conclusiones

- Para que un sistema de ecuaciones presente **solución única**, deben existir la misma cantidad de ecuaciones **LI** que de incógnitas, y **no** deben existir ecuaciones con **incompatibilidades**.
- Si hay menos ecuaciones **LI** que incógnitas y **no hay incompatibilidades**, entonces se tendrán **infinitas soluciones**. Pero si hay **más ecuaciones LI** que incógnitas, entonces el sistema **no tendrá solución**.
- Si existen al menos un par de **ecuaciones incompatibles** (coeficientes de las incógnitas son múltiplos, pero el término libre no es múltiplo), entonces el sistema **no tiene solución**.

2.- Métodos de solución de sistemas de ecuaciones de 2x2

2.1. Método de Sustitución

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra, transformando esta última, en una ecuación con una sola incógnita. Una vez conocido el valor de dicha incógnita se obtiene el valor de la otra, reemplazando su valor en las expresiones iniciales.

Ejemplo 1 Resolver: $\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - 5y} &= \mathbf{16} \\ \mathbf{4x + y} &= \mathbf{10} \end{aligned}\right|$

Solución:

$$y = \underbrace{10 - 4x}$$

$$\begin{aligned} 2x - 5(\mathbf{10 - 4x}) &= 16 \\ 2x - 50 + 20x &= 16 \\ 22x &= 66 \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

$$y = 10 - 4 \cdot \mathbf{3} \rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{-2}$$

- Por conveniencia, para evitar el uso de fracciones, se despeja de la segunda ecuación la incógnita **y**.
- Se reemplaza la expresión que equivale a **y** en la primera ecuación y se encuentra el valor de **x**.
- Una vez obtenido el valor de **x**, éste se reemplaza en la expresión equivalente a **y**, obteniendo así el valor de esta última incógnita.
- Para comprobar las soluciones, éstas se verifican en ambas ecuaciones.

Comprobación: $\left.\begin{aligned} 2 \cdot 3 - 5 \cdot -2 &= 16 \\ 4 \cdot 3 + -2 &= 10 \end{aligned}\right| \rightarrow \left.\begin{aligned} 6 + 10 &= 16 \\ 12 - 2 &= 10 \end{aligned}\right| \rightarrow \left.\begin{aligned} 16 &= 16 \\ 10 &= 10 \end{aligned}\right|$ ***OK***

2.2. Método de Igualación

En este método se debe despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones y luego igualar las expresiones obtenidas, resultando así una ecuación con una sola incógnita. Luego se reemplaza el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de las expresiones iniciales, para así determinar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 2 Resolver: $\left.\begin{aligned} \mathbf{3x + 4y + 6} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{2x - 3y - 13} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right|$

Solución: $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= -6 \\ 2x - 3y &= 13 \end{aligned}\right|$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-6-4y}{3} \\ x = \dfrac{13+3y}{2} \end{cases}$$

- Lo primero es dejar el sistema de la forma estándar, transponiendo los coeficientes numéricos libres al lado derecho.
- Despejamos la misma incógnita en cada ecuación (en este caso la **x**).
- Igualamos ambas expresiones y obtenemos el valor de **y**.
- Finalmente reemplazamos el valor de **y** en cualquiera de las expresiones obtenidas inicialmente, para así encontrar **x**.

$$\frac{-6-4y}{3} = \frac{13+3y}{2} \;/ \bullet \mathbf{6} \rightarrow -12 - 8y = 39 + 9y \rightarrow -17y = 51 \rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{-3} \rightarrow x = \frac{13+3\cdot -3}{2} = \frac{13-9}{2} \rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{2}$$

La solución del sistema también la podemos escribir como un par ordenado: $(\mathbf{2}, \mathbf{-3})$

2.3. Método de Reducción

El método de Reducción procura que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente (en valor absoluto) en las dos ecuaciones (amplificándolas si es necesario) para que al sumarlas (o restarlas) se elimine dicha incógnita, dando lugar a una ecuación con una sola incógnita. Luego se reemplaza el resultado obtenido en las ecuaciones primarias para obtener la otra incógnita.

Ejemplo 3 Resolver: $\begin{array}{r} \mathbf{5x - 3y = 18} \\ \mathbf{3x + 4y = 5} \end{array}$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 5x - 3y = 18 & /\cdot 4 \rightarrow \\ 3x + 4y = 5 & /\cdot 3 \rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20x - 12y = 72 \\ + \quad 9x + 12y = 15 \\ \hline 29x = 87 \end{array} \rightarrow \mathbf{x = 3}$$

$$\rightarrow 3 \cdot 3 + 4y = 5 \rightarrow 4y = -4 \rightarrow \mathbf{y = -1}$$

→ La solución es $(\mathbf{3}, -\mathbf{1})$

- Ambas incógnitas tienen coeficientes de similar complejidad, pero la **y** tiene distinto signo en las ecuaciones, por lo que la estrategia será eliminarla, igualando el valor absoluto de sus coeficientes.
- Para esto amplificamos la primera ecuación por **4** y la segunda por **3**.
- Ahora sumamos ambas ecuaciones y obtenemos **x**.
- El valor de **x**, lo reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales (idealmente la de aspecto más sencillo) y así obtenemos **y**.

2.4. Ecuaciones linealmente dependientes (LD), linealmente independientes (LI) e incompatibles

Por medio del método de reducción es muy fácil determinar si las ecuaciones son **LI, LD** o incompatibles.

Ejemplo 4

- Consideremos el sistema: $\begin{array}{r|l} \mathbf{3x - 2y = 10} & /\cdot \mathbf{3} \\ \mathbf{-9x + 6y = -30} & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 9x - 6y = 30 \\ + \quad -9x + 6y = -30 \\ \hline \mathbf{0x + 0y = 0} \end{array}$

Cualquier valor de **x** e **y** satisface la ecuación.

Como conclusión, cada vez que hagamos reducción y resulte una ecuación de la forma $\mathbf{0x + 0y + 0 \ldots = 0}$, significa que una ecuación es **LD** respecto de la otra**.** Es decir, son ecuaciones equivalentes.

- Consideremos el sistema: $\begin{array}{r|l} 3x - 2y = 10 & \cdot\, /\mathbf{3} \\ -9x + 6y = -40 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 9x - 6y = 30 \\ + \quad -9x + 6y = -40 \\ \hline \mathbf{0x + 0y = 10} \end{array}$

Ningún valor de **x** e **y** satisface la ecuación

Como conclusión, cada vez que hagamos reducción y resulte una ecuación de la forma $\mathbf{0x + 0y + 0 \ldots = \boldsymbol{c}}$, con $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$ significa que las ecuaciones son **incompatibles**.

En cualquier otro caso, es decir para $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \ldots = \boldsymbol{c}$ donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ o cualquier otro coeficiente que acompañe a una incógnita es distinto de cero, las ecuaciones **serán LI.**

2.5. Sistemas literales

Ejemplo 5 Resolver:
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x-a=b-y} \\ \boldsymbol{ax+by-a^2-b^2=0} \end{aligned}\right|$$

Solución:
$$\left.\begin{aligned} x+y=a+b \\ ax+by=a^2+b^2 \end{aligned}\right| \ /\cdot\ \mathbf{-b}$$

$$\begin{aligned} -bx+-by&=-ab-b^2 \\ + \quad ax+by&=a^2+b^2 \\ \hline ax-bx&=a^2-ab \\ x(a-b)&=a(a-b) \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{x=a} \end{aligned}$$

$$\rightarrow\ a+y=a+b \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{y=b}$$

- Lo primero es dejar el sistema de la forma estándar, transponiendo los coeficientes numéricos libres al lado derecho.
- Luego, para eliminar **y**, amplificamos la primera ecuación por **-b**
- Ahora sumamos ambas ecuaciones y obtenemos **x**.
- Finalmente, obtenemos el valor de **y**, reemplazando **x** en la ecuación más sencilla (que en este caso es la primera).

2.6. Sistemas de ecuaciones con 3 o más incógnitas

Todos los métodos anteriores tienen sus ventajas y desventajas para la resolución de los sistemas de ecuaciones con 3 o más incógnitas, sin embargo, el más usado es el método de Reducción.

Ejemplo 6
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x+3y-3z=-16} \\ \boldsymbol{-3x+2y-2z=4} \\ \boldsymbol{12x-25y-2z=-2} \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\textbf{(Ec1)} \\ &\textbf{(Ec2)} \\ &\textbf{(Ec3)} \end{aligned}$$

Reducción: 3(Ec1) + (Ec2)

$$\begin{aligned} 3x+9y-9z&=-48 \\ + \quad -3x+2y-2z&=4 \\ \hline 11y-11z&=-44 \quad /:11 \\ y-z&=-4 \quad \textbf{(Ec4)} \end{aligned}$$

Reducción: -12(Ec1) + (Ec3)

$$\begin{aligned} -12x-36y+36z&=192 \\ + \quad 12x-25y-2z&=-2 \\ \hline -61y+34z&=190 \quad \textbf{(Ec5)} \end{aligned}$$

Reducción 34(Ec4) + (Ec5):

$$\begin{aligned} 34y-34z&=-136 \\ + \quad -61y+34z&=190 \\ \hline -27y&=54 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{y=-2} \end{aligned}$$

Reemplazo en (Ec4) $\rightarrow -2-z=-4 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{z=2}$

Reemplazo en (Ec1) $\rightarrow\ x+3\cdot-2-3\cdot2=-16 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{x=-4}$

- Lo primero es enumerar las ecuaciones para poder ordenarnos mejor.
- La estrategia en este caso será hacer reducción entre (Ec1) y (Ec2) y reducción entre (Ec1) y (Ec3) eliminado en ambos casos la **x**, para así obtener un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (**y**, **z**).
- El resultado de reducir (Ec1) y (Ec2) lo simplificamos por 11 y le llamamos (Ec4).
- El resultado de reducir (Ec1) y (Ec3) lo designamos por (Ec5).
- Ahora hacemos un sistema de 2x2 con (Ec4) y (Ec5), amplificando (Ec4) por 34 para eliminar la **z**.
- Se obtiene **y =-2**, resultado que se reemplaza en la (Ec4), que es la más sencilla para obtener **z.**
- Finalmente reemplazamos y **= -2**, **z = 2** en la (Ec1) para obtener **x.**

Entonces, la solución del sistema es: $(\boldsymbol{-4,-2,2})$

2.7. Ejemplos adicionales

En ocasiones se entrega un sistema de ecuaciones, solicitándose el valor de una expresión determinada, no siendo necesario obtener el valor específico de ninguna incógnita. Muchas veces, para dar una respuesta rápida al problema, basta con realizar algún truco algebraico, tal como se presenta a continuación.

Ejemplo 7 Si $\begin{array}{l|} \boldsymbol{a + b = 6} \\ \boldsymbol{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{3}} \end{array}$ entonces: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ?$

Solución: $\begin{array}{r|} a + b = 6 \\ 3b + 3a = 2ab \end{array}$

- Lo primero es amplificar la segunda ecuación por ***3ab***, para eliminar los denominadores.
- Observamos que al dado izquierdo de la 2º ec. tenemos ***2ab***, a partir de lo cual podemos obtener ***ab.***

Si: $2ab = 3b + 3a \quad \rightarrow \quad ab = 1{,}5(a + b)$

Pero según la primera ecuación: $a + b = 6$, por lo que: $ab = 1{,}5 \cdot (6) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a \cdot b = 9}$

Ejemplo 8 $\boldsymbol{n = (a + b)^2}$ y $\boldsymbol{p = (a - b)^2}$, entonces: $\boldsymbol{a \cdot b} = ?$

Solución: Se trata de ecuaciones literales, donde debemos partir desarrollando los cuadrados de binomio:

$$\begin{array}{rl} & n = a^2 + 2ab + b^2 \\ - & p = a^2 - 2ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

- Dado que nos piden $\boldsymbol{a \cdot b}$, lo más conveniente es restar ambas ecuaciones, quedando sólo así el término buscado.

$$n - p = 4ab \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a \cdot b = \frac{n - p}{4}}$$

3.- Problemas de aplicación

El procedimiento es similar al estudiado en ecuaciones con una incógnita, la diferencia es que ahora contamos con mejores herramientas, las que nos permiten expresar varias condiciones a la vez, permitiendo dar respuesta a problemas más complejos.

Ejemplo 9 Hace 4 años la edad de Ximena era 8 veces la edad de María. En cuatro años más la edad de Ximena será 4 veces la de María. ¿Cuál es la edad de cada una?

Solución: Definamos las siguientes incógnitas: $\boldsymbol{x}$ = edad de Ximena, $\boldsymbol{m}$ = edad de María y escribamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r|} \boldsymbol{x - 4 = 8(m - 4)} \\ \boldsymbol{x + 4 = 4(m + 4)} \end{array}$$

- Notar que hace 4 años ambas tenían 4 años menos que hoy.
- Y desde luego que en 4 años más ambas tendrán 4 años más que hoy.

Resolviendo el sistema: $\begin{array}{rl} & x - 4 = 8m - 32 \\ - & x + 4 = 4m + 16 \\ \hline \end{array}$

- Restamos las ecuaciones, eliminamos **x** y obtenemos **m**.
- Reemplazamos el valor de **m** en la segunda ecuación y obtenemos **x**.

$$-8 = 4m - 48 \quad \rightarrow \quad 40 = 4m \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m = 10} \quad \rightarrow \quad x - 4 = 8 \cdot 10 - 32 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 52}$$

Entonces: **Ximena tiene 52 años y María 10 años.**

Ejemplo 10 La señora Pilar acostumbra a comprar todas las semanas 3 kilogramos de plátanos y 2 kilogramos de manzanas. Cierta semana gastó $1.850. Como en la semana siguiente los plátanos habían subido $50 por kilogramo y las manzanas habían bajado $30 por kilogramo, cambió su costumbre y compró 2 kilogramos de plátanos y 3 kilogramos de manzanas, gastando $1.910. ¿Cuánto costaba el kilogramo de manzanas esa cierta semana?

Solución: Definamos las incógnitas: $\boldsymbol{p}$ = valor normal del kg. de plátanos; $\boldsymbol{m}$ = valor normal del kg. de manzanas y escribamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r|} \mathbf{3p + 2m = 1.850} \\ \mathbf{2(p+50) + 3(m-30) = 1.910} \end{array}$$

- 3kg de plátanos más 2 de manzanas totalizan $1.850.
- 2kg de plátanos con aumento de $50 el kg, más 3 de manzanas con disminución de $30 el kg, totalizan $1.910.

Resolviendo el sistema: $\begin{array}{r|l} 3p + 2m = 1.850 & /\cdot \mathbf{-3} \\ 2p + 3m = 1.900 & /\cdot \mathbf{2} \end{array} \rightarrow + \begin{array}{r} -9p - 6m = -5.550 \\ 4p + 6m = 3.800 \end{array}$

$$-5p = -1.750 \rightarrow \boldsymbol{p = 350}$$
$$\rightarrow 3 \cdot 350 + 2m = 1.850 \rightarrow \boldsymbol{m = 400}$$

Entonces, los **plátanos** costaban **$350** y las **manzanas $400** esa cierta semana.

Ejemplo 11 Unos amigos salen a almorzar a un restaurante y desean repartir la cuenta en partes iguales. Si cada uno pone $5.500 faltan $3.500 para pagar la cuenta y si cada uno pone $6.500 sobran $500. ¿Cuál es el valor de la cuenta?

Solución: Definamos las incógnitas $\boldsymbol{n}$ = número de amigos, $\boldsymbol{p}$ = valor total de la cuenta, y escribamos las ecuaciones:

Se reemplaza **n = 4** en la primera ecuación.

$$- \begin{array}{r|} \mathbf{5.500n = p - 3.500} \\ \mathbf{6.500n = p + 500} \end{array} \rightarrow 1.000n = 4.000 \rightarrow \boldsymbol{n = 4} \rightarrow 22.000 = p - 3.500 \rightarrow \boldsymbol{p = 25.500}$$

Entonces, la cuenta tiene un valor total de **$25.500**.

Ejemplo 12 Dos números están en la razón de 3 : 2. Si se resta 6 del primero y se suma 6 al segundo, la razón se invierte. ¿Cuáles son los números?

Solución: Si designamos por $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ a los números buscados, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{r|} \boldsymbol{\frac{x}{y} = \frac{3}{2}} \\ \boldsymbol{\frac{x-6}{y+6} = \frac{2}{3}} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|} 2x = 3y \\ 3x - 18 = 2y + 12 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 2x - 3y = 0 & /\cdot \mathbf{-2} \\ 3x - 2y = 30 & /\cdot \mathbf{3} \end{array} \rightarrow + \begin{array}{r} -4x + 6y = 0 \\ 9x - 6y = 90 \end{array}$$

$$5x = 90 \rightarrow \boldsymbol{x = 18} \rightarrow \boldsymbol{y = 12}$$

Entonces, los números buscados son **18** y **12**.

III.- INECUACIONES LINEALES

1.- Conceptos básicos

1.1. Definición: Por desigualdad entendemos a la comparación de dos cantidades que presentan distinto valor. Los símbolos utilizados para presentar las desigualdades son:

A $<$ **B** $\leftrightarrow$ "A es menor que B" **A** $\leq$ **B** $\leftrightarrow$ "A es menor o igual que B"
A $>$ **B** $\leftrightarrow$ "A es mayor que B" **A** $\geq$ **B** $\leftrightarrow$ "A es mayor o igual que B"

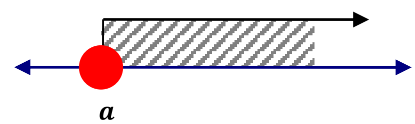
1.2. Intervalos de números reales

Un intervalo de números reales corresponde a una parte de la recta real, pudiendo ser abierto, cerrado o semiabierto. En los **intervalos abiertos**: $]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[$, **no se incluyen** los extremos, mientras que en los **cerrados**: $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ **si se incluyen** los extremos. Los intervalos semiabiertos presentan un extremo abierto y otro cerrado.

Ejemplo 1 Familiaricémonos con la nomenclatura por medio de los siguientes ejemplos.

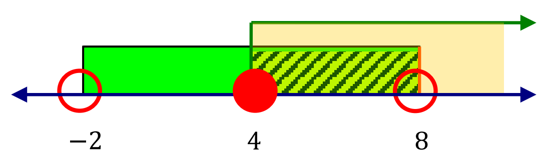
- El conjunto $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \,/\, \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ se lee como: "el conjunto de todos los números reales que son mayores que $\boldsymbol{a}$ y menores o iguales que $\boldsymbol{b}$". En notación de intervalo se escribe como $]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Mientras que gráficamente se puede representar como en la figura de la derecha.

- El conjunto $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \,/\, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}\}$ se lee como: "el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que $\boldsymbol{a}$". En notación de intervalo se escribe como $[\boldsymbol{a},\infty[$ (notar que el infinito siempre va abierto). Gráficamente se puede representar como en la figura de la derecha.



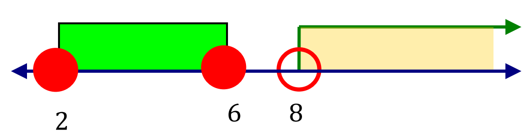
Ejemplo 2 Consideremos los siguientes intervalos de números reales:
$\boldsymbol{A} =]-\boldsymbol{2},\boldsymbol{8}[$; $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{4},\infty[$; $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{2},\ \boldsymbol{6}]$; $\boldsymbol{D} =]\boldsymbol{8},\infty[$

- Encontremos: $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$:



- El conjunto $\boldsymbol{A}$ está representado por la zona verde.
- El conjunto $\boldsymbol{B}$ está representado por la zona amarilla.
- $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ corresponde a la zona verde más la zona amarilla, es decir: $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} =]-\boldsymbol{2},\infty[$
- $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ corresponde a la zona común entre la verde y la amarilla (zona achurada), es decir: $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{4},\boldsymbol{8}[$

- Encontremos: $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D}$:



- El conjunto $\boldsymbol{C}$ está representado por la zona verde.
- El conjunto $\boldsymbol{D}$ está representado por la zona amarilla.
- $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$ corresponde a la zona verde más la zona amarilla, es decir: $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D} = [\boldsymbol{2},\boldsymbol{6}] \cup]\boldsymbol{8},\infty[$.
- $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D}$ corresponde a la zona común entre la verde y la amarilla, es decir: $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D} = \emptyset$ (vacío).

1.3. Tipos de desigualdades

➢ **Desigualdades absolutas**

Corresponden a aquellas que son siempre verdaderas dentro del dominio de los números reales, como por ejemplo:

$\mathbf{1 > 0}$; $\qquad$ $\boldsymbol{x^2 \geq 0}$; $\qquad$ $\boldsymbol{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2}$ si a y b son del mismo signo.

➢ **Desigualdades condicionales o inecuaciones**

Se refiere a aquellas que son verdaderas en algunos casos (intervalos), y se les nombra preferentemente como **inecuaciones**. Por ejemplo: $\boldsymbol{x + 2 > 3}$, es verdadera para todos los números reales **mayores que** $\mathbf{1}$.

1.4. Propiedades básicas de orden en las desigualdades

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales, entonces:

➢ **Al sumar o restar** la misma cantidad a ambos lados, **se conserva** el signo de la desigualdad.

$$\boxed{\boldsymbol{a < b \;\leftrightarrow\; a + c < b + c}}$$

➢ **Al multiplicar o dividir por un real positivo** a ambos lados, **se conserva** el signo de la desigualdad.

$$\boxed{\boldsymbol{a < b \;\leftrightarrow\; ac < bc \;\; si \;\; c > 0}}$$

➢ **Al multiplicar o dividir por un real negativo** a ambos lados, **se invierte** el signo de la desigualdad.

$$\boxed{\boldsymbol{a < b \;\leftrightarrow\; ac > bc \;\; si \;\; c < 0}}$$

➢ **Transitividad de los números reales.**

$$\boxed{\boldsymbol{si \;\; a < b} \text{ y } \boldsymbol{b < c \rightarrow a < c}}$$

Ejemplo 3 Si $a < 0$ y $a > b$, ¿cuál(es) de las siguientes relaciones es(son) verdaderas?

I) $\boldsymbol{a + b < a - b}$ $\qquad$ II) $\boldsymbol{a + b < b - a}$ $\qquad$ III) $\boldsymbol{a - b < b - a}$

Solución: A partir del enunciado, tanto $\boldsymbol{a}$ como $\boldsymbol{b}$ son negativos, siendo $\boldsymbol{b}$ menor que $\boldsymbol{a}$. A través de valorizar $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ podremos hacernos una idea de la veracidad de las aseveraciones, sin embargo, eso no nos garantiza que éstas se verifiquen para todos los casos. Por simplicidad, consideremos: $\boldsymbol{a = -2}$ y $\boldsymbol{b = -3}$.

I) $a + b < a - b \;\rightarrow\; -2 - 3 < -2 - -3 \;\rightarrow\; -5 < 1$ OK. Podemos extrapolar esto a todos los demás casos, ya que si a $\boldsymbol{a}$ le sumamos un número negativo ($\boldsymbol{b}$ es negativo), tendremos un menor valor que si le sumamos un positivo ($-\boldsymbol{b}$ es positivo) $\rightarrow$ **I) es verdadera**

II) $a + b < b - a \;\rightarrow\; -2 - 3 < -3 - -2 \;\rightarrow\; -5 < -1$ OK. Es correcta por la misma razón que el caso anterior $\rightarrow$ **II) es verdadera**

III) $a - b < b - a \;\rightarrow\; -2 - -3 < -3 - -2 \;\rightarrow\; 1 < -1$. Inmediatamente la aseveración ya no se cumplió, por lo tanto $\rightarrow$ **III) es falsa**

2.- Inecuaciones de primer grado con una incógnita

2.1. Procedimiento: En general se trabaja en forma similar que con las ecuaciones de primer grado, pero considerando que al multiplicar o dividir por un número negativo a ambos lados de la desigualdad, se **invertirá** el signo.

Ejemplo 4 Resolver: $\dfrac{\boldsymbol{x+5}}{\mathbf{3}} - \dfrac{\boldsymbol{x-4}}{\mathbf{2}} > \mathbf{4}$

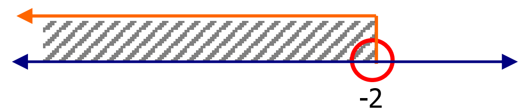
Solución:

$$\begin{aligned} 2(x+5) - (3x-12) &> 24 \\ 2x + 10 - 3x + 12 &> 24 \\ -x &> 2 \\ \boldsymbol{x} &< \mathbf{-2} \end{aligned}$$

- Amplificamos por **6** (MCM) a ambos lados.
- Reducimos términos semejantes y transponemos algunos valores.
- Finalmente multiplicamos por **-1** a ambos lados de la inecuación (se da vuelta el signo de la desigualdad), y obtenemos el valor de **x**.

- Solución en notación de conjunto: $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \;/\; \boldsymbol{x} < \mathbf{-2}\}$
- Solución en notación de intervalo: $]-\infty, \mathbf{2}[$

- Solución gráfica:



3.- Sistemas de inecuaciones

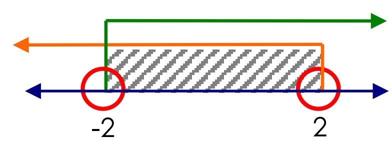
3.1. Definición: Un sistema de inecuaciones con una incógnita es un conjunto de dos o más inecuaciones que deben verificarse a la vez. La solución del sistema está dada por la **intersección** de los conjuntos solución de todas las inecuaciones.

Ejemplo 5 Encontrar el conjunto solución del siguiente sistema: $\begin{array}{r|} \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1} < \mathbf{5} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{x} - \mathbf{2} \\ \hline \end{array}$

Solución: $\begin{array}{r|l} 3x - 1 < 5 & \rightarrow\; 3x < 6 \;\;\rightarrow\; \boldsymbol{x} < \mathbf{2} \\ 2x > x - 2 & \rightarrow\; x > -2 \;\;\rightarrow\; \boldsymbol{x} > \mathbf{-2} \\ \hline \end{array}$

Ahora representamos gráficamente cada conjunto solución y luego los intersectamos:

- Solución gráfica:



Entonces, la solución general es: $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \;/\; \mathbf{-2} < \boldsymbol{x} < \mathbf{2}\} =]-\mathbf{2}, \mathbf{2}[$

3.2. Desigualdades compuestas

$\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$ equivale a $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$ y se lee: $\boldsymbol{x}$ está entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Es decir, esta desigualdad compuesta da lugar a un sistema de inecuaciones, cuyas soluciones se deben intersectar.

3.3. Conectivos Lógicos

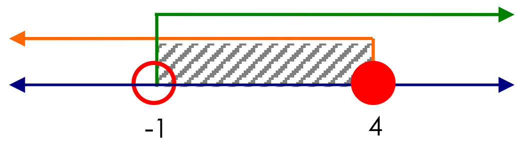
- Conectivo **v** es equivalente a "**y**". En las inecuaciones se utiliza para **intersectar** los conjuntos solución.
- Conectivo **∧** es equivalente a "**O**". En las inecuaciones se utiliza para **unir** los conjuntos solución.

Ejemplo 6 Encontrar el conjunto solución de: $\boldsymbol{x-9<3x-7\leq x+1}$

Solución: $x-9<3x-7 \quad \wedge \quad 3x-7\leq x+1$
$-2<2x \quad \wedge \quad 2x\leq 8$
$\boldsymbol{-1<x} \quad \wedge \quad \boldsymbol{x\leq 4}$

- Descomponemos en 2 inecuaciones y resolvemos.
- El resultado final será la intersección de ambas soluciones.

- Solución general: $\{\boldsymbol{x\in R} \,/\, \boldsymbol{-1<x\leq 4}\} =]-\boldsymbol{1},\boldsymbol{4}]$
- Solución gráfica:



4.- Inecuaciones con valor absoluto

4.1. El valor absoluto

El valor absoluto de un número real representa su distancia al origen y se designa por $|\boldsymbol{x}|$, donde:

$$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x \ si \ x\geq 0} \\ \boldsymbol{-x \ si \ x<0} \end{cases}$$

4.2. Propiedades del valor absoluto

a) $|x|\geq 0$

b) $|x|=|-x|$

c) $|x^2|=|x|^2$

d) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

e) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

f) $|x+y|\leq|x|+|y|$

g) $|x|=a \ \leftrightarrow \ x=a \ \vee \ x=-a$ para $a\geq 0$

h) $\sqrt{x^2}=|x|$

Ejemplo 7 Si $a<0$ calcular $|\boldsymbol{2a}|+|\boldsymbol{-3a}|$

Solución: Sabemos que si $a<0$ entonces $2a<0\rightarrow|2a|=-2a$ y $-3a>0\rightarrow|-3a|=-3a$.

Entonces: $|2a|+|-3a|=-2a+-3a=\boldsymbol{-5a}$

$=$

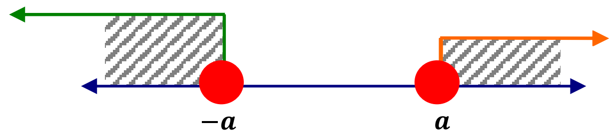
Ejemplo 8 Resolver la siguiente ecuación con valor absoluto: $|\boldsymbol{x-4}|=\boldsymbol{7}$

Solución: Aplicamos la propiedad g), entones si $|x-4|=7 \ \leftrightarrow \ x-4=7 \ \vee \ x-4=-7 \ \rightarrow \ \boldsymbol{x=11}$ o $\boldsymbol{x=-3}$

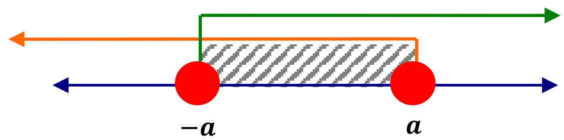
4.3. Resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

Si $\boldsymbol{a}$ es un número real positivo, entonces:

- $|\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{a} \ \leftrightarrow \ -\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{x} \ \vee \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}$
  (Unión de intervalos)



- $|\boldsymbol{x}| \leq \boldsymbol{a} \ \leftrightarrow \ -\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}$
  (Intersección de intervalos)



Los conceptos anteriores son también válidos para las desigualdades estrictas (intervalos abiertos).

Ejemplo 9 Resolver: $|\mathbf{1} - \boldsymbol{x}| > \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ ← Esto se puede leer como: la distancia entre **x** y **1** debe ser mayor que **1/2.**

Siempre que tengamos $|x| > a$, se forman dos inecuaciones, donde **se unen** sus soluciones:

Solución: $|1 - x| > \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ \underbrace{-\dfrac{1}{2} > 1 - x \ \vee \ 1 - x > \dfrac{1}{2}}$ $\rightarrow \ \boldsymbol{x} > \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \ \vee \ \boldsymbol{x} < \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$\rightarrow \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \ / \ \boldsymbol{x} < \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \ \vee \ \boldsymbol{x} > \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\} =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \infty[$

- Solución gráfica:

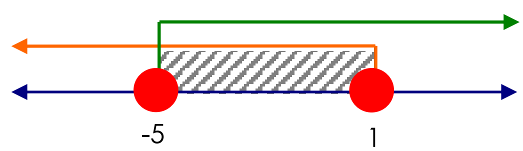
Ejemplo 10 Resolver: $|\boldsymbol{x} + \mathbf{2}| \leq \mathbf{3}$ ← Esto se puede leer como: la distancia entre **x** y **-2** debe ser menor o igual que **3.**

Siempre que tengamos $|x| \leq a$, se forman dos inecuaciones, donde **se intersectan** sus soluciones:

Solución: $|x + 2| \leq 3 \ \rightarrow \ \underbrace{-3 \leq x + 2 \leq 3}$ $\ \rightarrow \ -5 \leq x \leq 1$

$\rightarrow \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \ / \ -\mathbf{5} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}\} = [-\mathbf{5}, \mathbf{1}]$

- Solución gráfica:



Ejemplo 11 Analizar el conjunto solución de: a) $|\boldsymbol{x} - \mathbf{5}| \leq -\mathbf{5}$ b) $|\boldsymbol{x} - \mathbf{5}| \geq -\mathbf{5}$

a) No tiene solución (solución vacía o Ø) ya que el valor absoluto de un número nunca será negativo, por lo que es imposible que sea menor o igual a -5.

b) El valor absoluto de un número siempre será positivo y por ende mayor que -5. Luego el conjunto solución de este problema es igual a todos los reales.

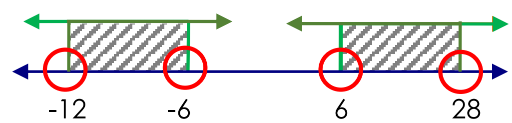
Ejemplo 12 ¿Cuál es el conjunto de todos los números que están a una distancia mayor que 6 de 0 y a una distancia menor que 20 de 8?

<u>Solución</u>: Las condiciones del enunciado pueden ser representadas por un par de inecuaciones con valor absoluto, donde tendremos que intersectar ambas soluciones, ya que hay que cumplir con ambas condiciones simultáneamente.

- Distancia mayor que 6 de 0 $\leftrightarrow$ $|x-0|>6$ $\rightarrow$ $|x|>6$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{-6>x} \lor \boldsymbol{x>6}$
- Distancia menor que 20 de 8 $\leftrightarrow$ $|x-8|<20$ $\rightarrow$ $-20<x-8<20$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{-12<x<28}$

Ahora nos apoyamos de un gráfico para obtener la solución:

Luego, el conjunto de números buscados es: $]-\mathbf{12},-\mathbf{6}[\ \cup\ ]\mathbf{6},\mathbf{28}[$



Ejemplo 13 Francisca puede gastar entre \$190.000 y \$210.000 en un equipo de música y algunos CD. Si compra un equipo de música a \$170.000, ¿cuál es la cantidad de CDs que puede comprar, si estos cuestan \$8.000 cada uno?

<u>Solución</u>: Del enunciado tenemos: ***\$190.000 ≤ presupuesto total ≤ \$210.000***

Restamos los *\$170.000* del equipo para determinar el presupuesto disponible sólo para CD:

\$190.000 – \$170.000 ≤ presupuesto total – \$170.000 ≤ \$210.000 – \$170.000

\$20.000 ≤ presupuesto para CD ≤ \$40.000

Ahora que tenemos acotado el presupuesto para los CDs, dividimos por *\$8.000* (valor de cada CD) para saber cuántos CD se podrán adquirir:

\$20.000 / \$8.000 ≤ presupuesto para CD / \$8.000 ≤ \$40.000 / \$8.000

2,5 ≤ número de CDs ≤ 5

Entonces, dependiendo del presupuesto definitivo, Francisca podría adquirir un mínimo de 2,5 CD y un máximo de 5 CD. Pero dado que no tiene sentido adquirir medio CD, la respuesta corresponde a **un mínimo** de ***2 CD y un máximo de 5 CD***.

Ejemplo 14 Problema de suficiencia de datos: se puede determinar el dinero que tiene Andrés, si:

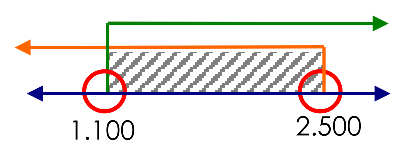
(1) Al darle \$2.000 no alcanza a completar \$4.500
(2) Al quitarle \$800 queda con más de \$300

<u>Solución</u>: El problema anterior se puede representar a través de un sistema de inecuaciones:

Si designamos por **x** a la cantidad de dinero que posee Andrés, tendremos:

1.	$x+2.000<4.500$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{x<2.500}$
2.	$x-800>300$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{x>1.100}$

Entonces $\boldsymbol{x}$ se encuentra en:



Por lo tanto, lo único que podemos afirmar acerca de la cantidad de dinero que tiene Andrés, es que está dentro del intervalo $]\mathbf{1.100},\mathbf{2.500}[$, por lo que es imposible determinar en forma precisa la cantidad que Andrés posee. Entonces, **se requiere información adicional**.

IV.- ECUACIONES EXPONENCIALES

El método de solución de las ecuaciones exponenciales consiste en igualar las bases por medio de las propiedades de las potencias, y posteriormente igualar los exponentes para hacer una ecuación con ellos, encontrando así el valor de la incógnita. Si en una ecuación no es posible igualar las bases, la solución se puede obtener aplicando logaritmos, tema que se verá más adelante.

Ejemplo 1

a) $\mathbf{4^{3-x} = 4}$

$$4^{3-x} = 4^1$$
$$\rightarrow \mathbf{3 - x = 1}$$
$$\mathbf{x = 2}$$

En color azul se anotan las ecuaciones provenientes de igualar los exponentes, procedimiento que se realiza una vez igualadas las bases.

b) $\mathbf{2^{x-1} = 1}$

$$2^{x-1} = 2^0$$
$$\rightarrow \mathbf{x - 1 = 0}$$
$$\mathbf{x = 1}$$

c) $\mathbf{\left(\frac{1}{4}\right)^x = 32}$

$$4^{-x} = 32$$
$$2^{-2x} = 2^5$$
$$\rightarrow \mathbf{-2x = 5}$$
$$\mathbf{x = \frac{-5}{2}}$$

d) $\mathbf{\sqrt[3x]{a^{3x+5}} = \sqrt[6]{a^7}}$

$$a^{\frac{3x+5}{3x}} = a^{\frac{7}{6}}$$
$$\rightarrow \mathbf{\frac{3x+5}{3x} = \frac{7}{6}}$$
$$18x + 30 = 21x$$
$$\mathbf{x = 10}$$

Ejemplo 2 $\mathbf{\left(6\frac{1}{4}\right)^{2x-1} \div (2,5)^{3x+5} = (0,4)^{x+3}}$

$$\left(\frac{25}{4}\right)^{2x-1} \div \left(\frac{5}{2}\right)^{3x+5} = \left(\frac{4}{10}\right)^{x+3}$$

- Transformamos las bases a fracciones.

$$\left(\frac{25}{4}\right)^{2x-1} \div \left(\frac{5}{2}\right)^{3x+5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x+3}$$

- Simplificamos.

$$\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{2x-1} \div \left(\frac{5}{2}\right)^{3x+5} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right)^{x+3}$$

- Expresamos todas las bases en términos de 5/2, ya que es la base más sencilla.

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{4x-2} \div \left(\frac{5}{2}\right)^{3x+5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x-3}$$

- Aplicamos la propiedad de la potencia de una potencia.

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{4x-2-3x-5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x-3}$$

- Reducimos y dejamos sólo una base por lado.
- Si las bases son iguales, los exponentes deben ser iguales.

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x-7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x-3} \rightarrow \mathbf{x - 7 = -x - 3} \rightarrow \mathbf{x = 2}$$

- Resolvemos la ecuación asociada a los exponentes.

Ejemplo 3 Si $\mathbf{a^x = 0,5}$, ¿cuál es el valor de $\mathbf{a^{-3x}}$?

<u>Solución</u>: En este caso no conviene resolver la ecuación, sino intentar escribir a^{-3x} en términos de a^x (conocido). Usando las propiedades de las potencias podemos plantear lo siguiente:

$$\mathbf{a^{-3x}} = (a^x)^{-3}\text{, pero } a^x = 0{,}5\text{, entonces } a^{-3x} = 0{,}5^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = \mathbf{8}$$

V.- ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1.- Conceptos básicos y métodos de solución

1.1. Definición: Las ecuaciones de segundo grado (o cuadráticas) son aquellas que presentan la siguiente forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.
En general, presentan 2 soluciones, denominadas x_1 y x_2.
Si $b = 0$ ó $c = 0$ se denomina **ecuación cuadrática incompleta.**

1.2. Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas

- **Tipo I:** $ax^2 + c = 0$**:** pasamos restando c al lado derecho, dividimos por a y aplicamos raíz cuadrada:

$$\boxed{x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}} \quad \boxed{x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}}$$

Ejemplo 1 $3x^2 - 27 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{27}{3}} = 3;\ x_2 = -\sqrt{\frac{27}{3}} = -3$

- **Tipo II:** $ax^2 + bx = 0$**:** se factoriza sacando factor común x para luego aplicar la siguiente propiedad:

Si $x(ax + b) = 0 \rightarrow x = 0$ ó $(ax + b) = 0$

Entonces: $\boxed{x_1 = 0}$ $\boxed{x_2 = \frac{-b}{a}}$

Ejemplo 2 $3x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(3x + 5) = 0 \rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{-5}{3}$

1.3. Solución de ecuaciones cuadráticas completas por factorización

Una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$ se puede intentar factorizar como un producto de binomios con término en común: $(x + p)(x + q) = 0$, por lo tanto:

Si $(x + p)(x + q) = 0$

$\boxed{x_1 = -p}$ $\boxed{x_2 = -q}$

Ejemplo 3 $x^2 - 21x + 54 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 18) \rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = 18$

1.4. Solución de ecuaciones cuadráticas usando fórmula general

Para todos los casos, es posible utilizar la siguiente fórmula: $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Ejemplo 4 Resolver usando la fórmula general: $2x^2 + 5x + 3 = 0$

Solución: Se tiene: $a = 2;\ b = 5;\ c = 3 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 1}{4}$

$x_1 = \frac{-5+1}{4} \rightarrow x_1 = -1$

$x_2 = \frac{-5-1}{4} \rightarrow x_2 = \frac{-3}{2}$

- **Observación**: si bien, la fórmula general funciona para todos los casos, usualmente solo se utiliza cuando es muy difícil recurrir a los otros métodos. Se recomienda siempre intentar resolver factorizando.

2.- Propiedades de las soluciones

2.1. Raíces y ecuaciones

Si $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son raíces de una ecuación cuadrática, entonces podemos encontrar una ecuación asociada a estas soluciones, planteando lo siguiente: $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_2})=\boldsymbol{0}$.

Ejemplo 5 Determinar una ecuación cuadrática, cuyas raíces sean $\mathbf{5}$ y $-\mathbf{6}$.

Solución: A partir de lo anterior, tenemos: $(x-5)(x+6)=0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{x^2+x-30=0}$
Además de esta ecuación, existen infinitas ecuaciones cuyas son soluciones son **5** y **- 6,** las que corresponden a cualquier múltiplo de $x^2+x-30=0$, como por ej.: $\mathbf{2x^2+2x-60=0;}\quad \boldsymbol{\frac{-x^2}{2}-\frac{x}{2}+15=0}$

Ejemplo 6 ¿Cuál es el menor valor para la expresión $\boldsymbol{x^2+\frac{2}{x}}$ cuando $\boldsymbol{x}$ satisface la igualdad $\boldsymbol{x+\frac{15}{x}=16}$?

Solución: Lo primero es calcular los posibles valores de $\boldsymbol{x}$ que satisfacen la igualdad, para luego reemplazarlos en la expresión y determinar así el menor valor de ésta.

- Amplificamos por **x.** - Transponemos al lado izquierdo. - Resolvemos factorizando.

$$x+\frac{15}{x}=16 \quad /\cdot x \quad \rightarrow \quad x^2+15=16x \quad \rightarrow \quad x^2-16x+15=0 \quad \rightarrow \quad (x-15)(x-1)=0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1=15;} \quad \boldsymbol{x_2=1}$$

- Reemplazando con $x=1 \;\rightarrow\; \mathbf{1^2+\frac{2}{1}=3}$
- Reemplazando con $x=15 \;\rightarrow\; \mathbf{15^2+\frac{2}{15}=225\frac{2}{15}}$

Entonces, el menor valor de la expresión es **3**

Ejemplo 7 ¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{k}$ en la ecuación $\boldsymbol{5x^2-kx+6=0}$ para que éste tenga una solución igual a $-\mathbf{3}$?

Solución: Puesto que $\boldsymbol{x=-3}$ es solución de la ecuación, este valor debe satisfacerla. Por lo tanto, se reemplaza $-\mathbf{3}$ en la ecuación: $5(-3)^2-k(-3)+6=0 \;\rightarrow\; 45+3k+6=0 \;\rightarrow\; 3k=-51 \;\rightarrow\; \boldsymbol{k=-17}$

2.2. Discriminante y tipos de soluciones

Se le denomina discriminante (Δ) a la cantidad que está dentro de la raíz cuadrada en la solución general de una ecuación de segundo grado. Es decir:

$\boxed{\Delta=\boldsymbol{b^2-4ac}}$ El discriminante determina el tipo de soluciones que tendrá la ecuación:

- Si $\Delta>\mathbf{0}$ existen **2 soluciones reales y distintas**.
- Si $\Delta=\mathbf{0}$ existen **2 soluciones reales iguales.**
- Si $\Delta<\mathbf{0}$ **no existen soluciones reales** (las soluciones existentes son complejas y distintas).

Ejemplo 8 Resolvamos: $\boldsymbol{x^2 + 3x + 4 = 0}$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = \frac{-3+\sqrt{-7}}{2}} \qquad x_2 = \frac{-3-\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} \rightarrow \boldsymbol{x_2 = \frac{-3-\sqrt{-7}}{2}}$$

Se observa que en ambas soluciones participa una raíz cuadrada con una cantidad subradical negativa. Por lo tanto, la ecuación **no tiene soluciones dentro de los números reales,** siendo éstas números **complejos**. Sin embargo, podríamos haber ahorrado tiempo y determinado directamente, en base al discriminante, la naturaleza de las soluciones:

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot1\cdot4 = 9 - 16 \rightarrow \Delta = \boldsymbol{-7}$ Entonces, dado que $\Delta < 0$, las soluciones **son complejas**.

Ejemplo 9 ¿Qué valor debe tomar $\boldsymbol{k}$ en la ecuación: $\boldsymbol{9x^2 - kx + 1 = 0}$ para que sus soluciones sean reales e iguales?

<u>Solución</u>: La condición necesaria, para obtener soluciones reales e iguales, es que el discriminante de la ecuación sea $\boldsymbol{0}$.

Reemplazando: $\Delta = (-k)^2 - 4\cdot9\cdot1 = k^2 - 36 = 0 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{k^2 = \pm 6} \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{k}$ puede ser $\boldsymbol{6}$ o $\boldsymbol{-6}$.

2.3. Propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática

Si $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son raíces de la ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, entonces: $\boxed{\boldsymbol{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}}$ $\boxed{\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}}$

Ejemplo 10 Si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son las raíces de la ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, ¿cuál es el valor de $\boldsymbol{p^2q + pq^2}$?

<u>Solución</u>: Factorizamos: $p^2q + pq^2 = pq(p+q)$ $\leftrightarrow$ producto raíces · suma raíces= $\frac{c}{a}\cdot\frac{-b}{a} = \boldsymbol{\frac{-bc}{a^2}}$

Ejemplo 11 ¿Cuál debe ser el valor de $\boldsymbol{k}$ en la ecuación: $x^2 - 5x + k - 2 = 0$, para que se cumpla la siguiente relación: $\boldsymbol{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}}$?

<u>Solución</u>: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12} \quad\rightarrow\quad \frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2} = \frac{5}{12} \quad\rightarrow\quad x_1+x_2 = 5R;\ \ x_1\cdot x_2 = 12R;$ Donde R es una constante de proporcionalidad.

Entonces: $x_1 + x_2 = 5R \rightarrow \frac{-b}{a} = 5R$, pero $a = 1$ y $b = -5$, por lo que $R = 1$

$x_1\cdot x_2 = 12R \rightarrow \frac{c}{a} = 12R \rightarrow \frac{c}{1} = 12 \rightarrow c = 12$

En la ecuación original: $c = k - 2 \quad\rightarrow\quad 12 = k - 2 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{k = 14}$

3.- Ecuaciones literales

En este tipo de ecuaciones es posible utilizar la fórmula general, no obstante, muchas veces es más fácil factorizar el trinomio y luego resolver según los procedimientos ya estudiados.

Ejemplo 12 Resolver $\boldsymbol{x^2-2ax-2bx+a^2+2ab=0}$

Solución:

- Fórmula general: Lo primero es agrupar los términos para determinar los coeficientes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

$x^2-2ax-2bx+a^2+2ab=0 \quad \rightarrow \quad x^2-2(a+b)x+a(a+2b)=0 \quad \rightarrow \boldsymbol{a=1}; \quad \boldsymbol{b=-2(a+b)}; \quad \boldsymbol{c=a(a+2b)}$

$$x=\frac{2(a+b)\pm\sqrt{\left(-2(a+b)\right)^2-4\cdot1\cdot a(a+2b)}}{2}=\frac{2a+2b\pm\sqrt{(4(a^2+2ab+b^2)-4a^2-8ab}}{2}$$

$$=\frac{2a+2b\pm\sqrt{4a^2+8ab+4b^2-4a^2-8ab}}{2}=\frac{2a+2b\pm\sqrt{4b^2}}{2}=\frac{2a+2b\pm2b}{2}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{x_1}=\frac{2a+2b+2b}{2}=\boldsymbol{a+2b} \qquad \rightarrow \boldsymbol{x_2}=\frac{2a+2b-2b}{2}=\boldsymbol{a}$$

- Factorización:

Factorizamos en **(x+p)(x+q)**, donde **p** y **q** son números que multiplicados resultan: **a(a+2b)** y sumados: **-2a- 2b**: claramente **p = -a** y **q = -(a+2b).**

$x^2-2(a+b)x+a(a+2b)=0 \quad \rightarrow \quad (x-a)\left(a-(a+2b)\right)=0$, por lo que inmediatamente las soluciones son: $\boldsymbol{x_1=a};\ \boldsymbol{x_2=a+2b}$, lo que coincide con lo ya obtenido, pero con un procedimiento bastante más sencillo.

4.- Ecuaciones irracionales

En este tipo de ecuaciones debemos aislar los radicales a un lado de la ecuación y elevar ambos lados a una potencia tal que elimine estas raíces. En caso de raíces cuadradas, se eleva al cuadrado. Si luego de realizar este procedimiento aún quedan radicales, estos se deben aislar nuevamente y repetir el proceso hasta eliminarlos. Una vez obtenidas las soluciones, éstas deben ser comprobadas.

Ejemplo 13 Resolver: $\boldsymbol{x+\sqrt{5x+10}=8}$

Solución:

$$\sqrt{5x+10}=8-x \quad /()^2$$
$$\left(\sqrt{5x+10}\right)^2=(8-x)^2$$
$$5x+10=64-16x+x^2$$
$$0=x^2-21x+54 \quad \rightarrow \quad 0=(x-3)(x-18) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1=3}; \quad \boldsymbol{x_2=18}$$

- Dejamos la raíz sola al lado derecho.
- Elevamos al cuadrado: notar que se eleva cada lado de la ecuación completo, formando un cuadrado de binomio al lado derecho.
- Se resuelve la ecuación de 2º grado factorizando.

Comprobación:

$$x_1=3 \quad \rightarrow \quad 3+\sqrt{5\cdot3+10}=8 \quad \rightarrow \quad 3+\sqrt{25}=8 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{8=8} \quad \boldsymbol{OK}$$
$$x_2=18 \quad \rightarrow \quad 18+\sqrt{5\cdot18+10}=8 \quad \rightarrow \quad 18+\sqrt{100}=8 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{28\neq8} \quad \textbf{No cumple}$$

Entonces, la única solución es: $\boldsymbol{x_1=3}$

Ejemplo 14 Resolver: $\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}-\sqrt{\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}=\mathbf{1}$

Solución:

$$\sqrt{x-1}=1+\sqrt{x+2} \;\; /()^2$$
$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+2}\right)^2$$
$$x-1=1+2\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}\right)^2$$
$$x-1=1+2\sqrt{x+2}+x+2$$
$$-4=2\sqrt{x+2} \quad /\div 2$$
$$-2=\sqrt{x+2} \quad /()^2$$
$$4=x+2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x}=\mathbf{2}$$

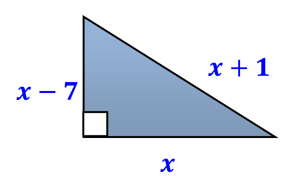
- Dejamos una raíz a cada lado
- Elevamos al cuadrado.
- Aún queda una raíz cuadrada que la aislamos al lado derecho.
- Volvemos a elevar al cuadrado.

Comprobación: $\sqrt{2-1}-\sqrt{2+2}=1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{1-2\neq 1}$ **No cumple** → **no hay solución**

5.- Problemas de aplicación

En muchos problemas de índole geométrico intervienen ecuaciones de segundo grado, las que muchas veces presentan dos soluciones. Sin embargo, en geometría no existen dimensiones negativas, por lo que sólo se utiliza la solución que nos entregue magnitudes positivas.

Ejemplo 15 Las medidas en centímetros de la hipotenusa y del cateto mayor de un triángulo rectángulo son números naturales consecutivos. Al cateto menor de faltan 7 cm para igualar al mayor. ¿Cuánto miden los tres lados?



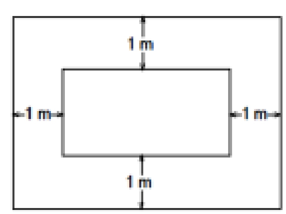
Solución: Si designamos por $\boldsymbol{x}$ al cateto mayor, entonces la hipotenusa será $\boldsymbol{x}+\mathbf{1},$ y el cateto menor $\boldsymbol{x}-\mathbf{7}$, tal como se muestra en la figura.
Ahora aplicamos el teorema de Pitágoras para formar una ecuación:

$$x^2+(x-7)^2=(x+1)^2 \quad \rightarrow \quad x^2+x^2-14x+49=x^2+2x+1$$
$$\rightarrow \quad x^2-16x+48=0 \quad \rightarrow \quad (x-4)(x-12)=0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1=4};\;\; \boldsymbol{x_2=12}$$

Usamos $\boldsymbol{x}=\mathbf{12}$, ya que $\boldsymbol{x}=\mathbf{4}$ nos arrojaría un valor negativo para el cateto menor.

Entonces: cateto menor = $12-7=\; \mathbf{5\;\boldsymbol{cm}}$; cateto mayor = $\mathbf{12\;\boldsymbol{cm}}$; hipotenusa = $\mathbf{13\;\boldsymbol{cm}}$.

Ejemplo 16 El largo de una piscina rectangular es el doble de su ancho. Se construyó una cerca, rodeándola, separada un metro de sus bordes. Si el área cercada es de $\mathbf{40}\; m^2$, ¿cuál es el largo de la piscina de la figura?



Solución: Si designamos por $\boldsymbol{x}$ al ancho de la piscina, el largo será $\mathbf{2}\boldsymbol{x}$, por lo que el ancho cercado toma el valor de $x+2$ y el largo cercado $2x+2$. Dado que el área es 40, podemos plantear lo siguiente:

$$(x+2)(2x+2)=40 \;\rightarrow\; 2x^2+6x+4=40 \;\rightarrow\; x^2+3x-18=0 \;\rightarrow\; (x-3)(x+6)=0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{x_1=3},\;\; \boldsymbol{x_2=-6}$$

Usamos $\boldsymbol{x}=\mathbf{3},$ por lo tanto, el largo de la piscina es: $2x\;=\;\mathbf{6}\;\boldsymbol{m}$.

VI.- ECUACIONES CON LOGARTIMOS

1.- Ecuaciones logarítmicas

El método de solución consiste en aplicar la definición de logaritmo y sus propiedades, para posteriormente eliminar los logaritmos. Una vez obtenidas las soluciones, se debe **comprobar** si éstas satisfacen la ecuación, recordando que los logaritmos solo están definidos para **argumentos positivos**.

Ejemplo 1 $\boldsymbol{log_{10}(x^2-6x-6)=1}$

Solución:

$$x^2-6x-6=10$$
$$x^2-6x-16=0$$
$$(x-8)(x+2)=0$$
$$\boldsymbol{x_1=8 \quad x_2=-2}$$

- Aplicamos la definición de logaritmo: **$\log_b x = y \leftrightarrow b^y=x$**.
- Queda una ecuación de 2° grado que la resolvemos factorizando.
- Si comprobamos las soluciones encontradas, observaremos que **ambas cumplen** con la ecuación original.

Ejemplo 2 $\boldsymbol{log(x+1)+log(x-1)=log(3)}$

Solución:

$$log(x+1)(x-1)=log(3)$$
$$(x+1)(x-1)=3$$
$$x^2-1=3$$
$$x^2=4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x_1=2}; \quad \boldsymbol{x_2=-2}$$

- Agrupamos todo el lado izquierdo en un mismo logaritmo, recordando que **log a + log b = log a · b**.
- Si tenemos un logaritmo por lado, podemos igualar los argumentos y hacer una ecuación con ellos: **logx = logy → x = y**

Comprobación:

- Para $\boldsymbol{x=-2}$: $log(-2+1)+log(-2-1)=log(3) \rightarrow log(-1)+log(-3)\neq log(3)$
  Dado que los logaritmos sólo admiten argumentos positivos, esta solución **no cumple**.
- Para $\boldsymbol{x=2}$: $log(2+1)+log(2-1)=log(3) \rightarrow log(1)+log(3)=log(3) \rightarrow log(1\cdot 3)=log(3)$
  Esta solución **cumple**, luego: $\boldsymbol{x=2}$ (solución única).

2.- Ecuaciones exponenciales con bases no igualables

En aquellas ecuaciones exponenciales donde no sea posible igualar las bases, podemos aplicar logaritmo a ambos lados de la ecuación para extraer los exponentes y trabajar con una ecuación convencional.

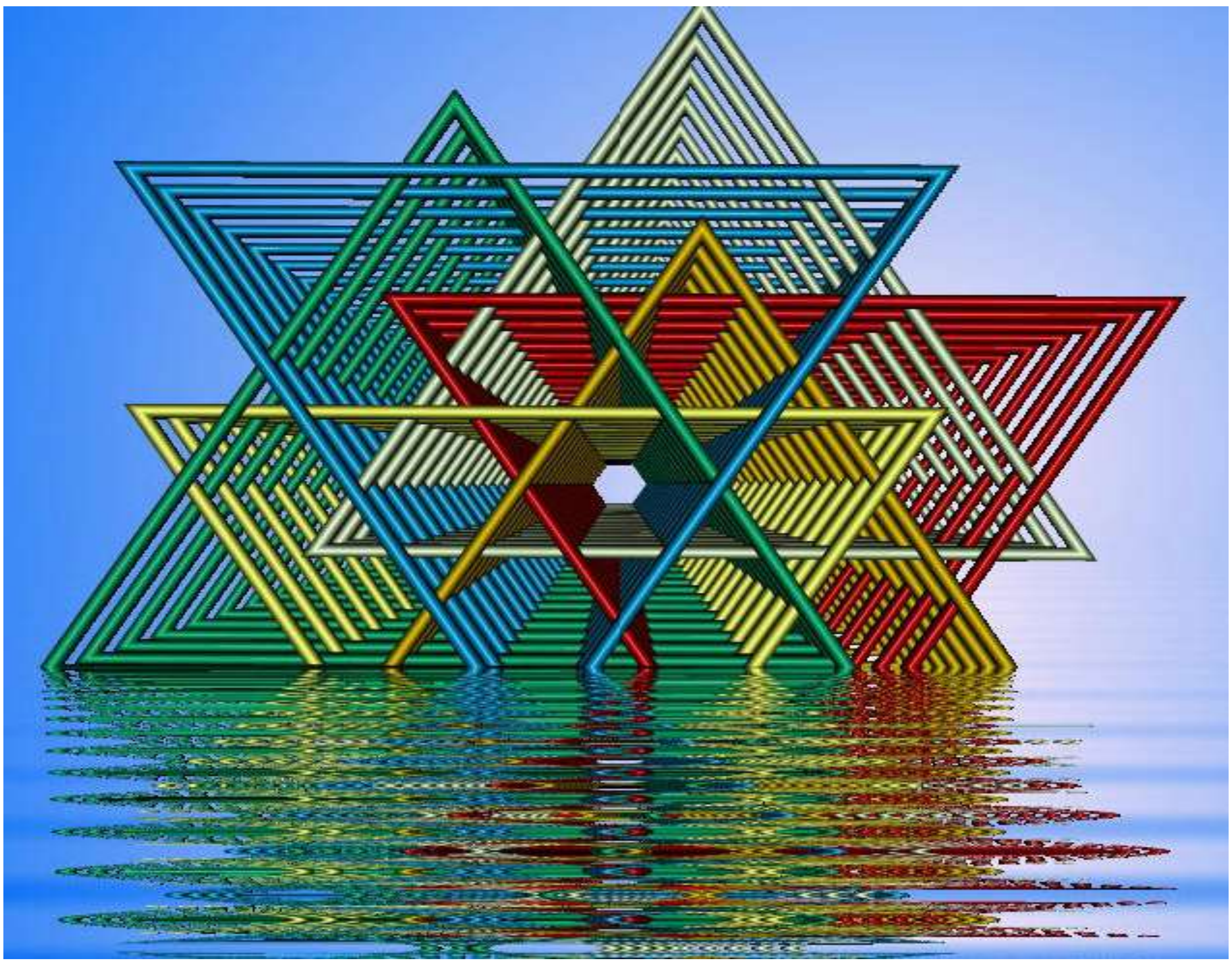
Ejemplo 3 $\boldsymbol{5^{x-2}=3^{3x+2}}$

Solución:

$$log(5^{x-2})=log(3^{3x+2})$$
$$(x-2)log5=(3x+2)log3$$
$$xlog5-2log5=3xlog3+2log3$$
$$xlog5-3xlog3=2log3+2log5$$
$$x(log5-3log3)=2log3+2log5$$
$$\boldsymbol{x=\frac{2log3+2log5}{log5-3log3}}$$

- Aplicamos logaritmo a ambos lados.
- Extraemos los exponentes, recordando que **$\log a^n = n\log a$**.
- Para despejar **x** dejamos todos los términos con la incógnita al lado izquierdo y los demás al derecho (se resuelve como una ecuación literal de 1° grado).
- Finalmente, factorizamos por **x** y pasamos dividiendo el factor encontrado para obtener el valor de la incógnita.

CAPÍTULO IV
GEOMETRÍA

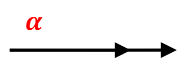
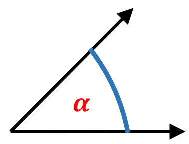
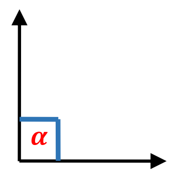
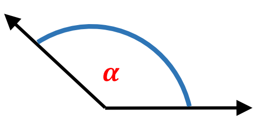
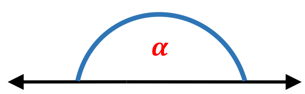
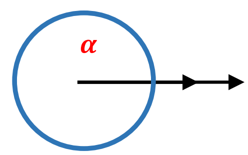


I.- TRIÁNGULOS Y ÁNGULOS

1.- Ángulos

1.1. Tipos de ángulos

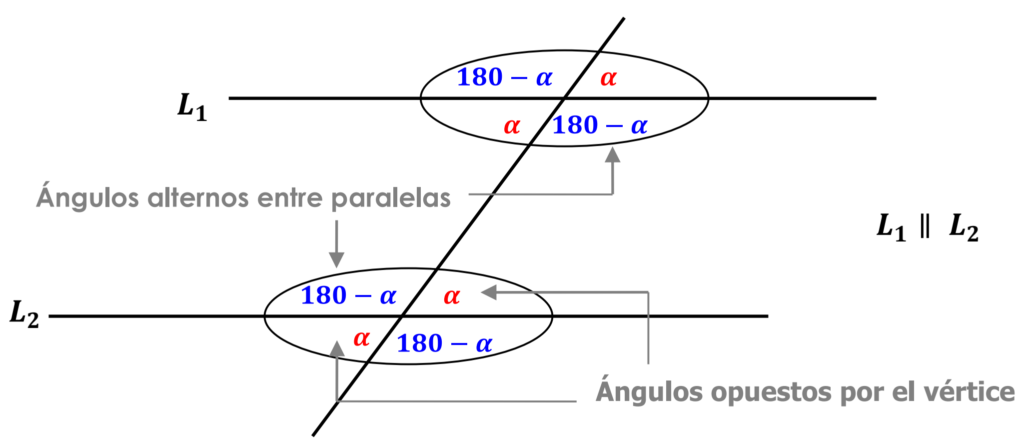
El sistema sexagesimal de medición angular es aquel que considera medidas entre $0°$ y $360°$, destacando los siguientes ángulos notables:

Ángulo **nulo** $\alpha = 0°$	Ángulo **agudo** $\alpha < 90°$	Ángulo **recto** $\alpha = 90°$
		
Ángulo **obtuso** $90 < \alpha < 180°$	Ángulo **extendido** $\alpha = 180°$	Ángulo **completo** $\alpha = 360°$
		

- **Complemento (C) de un ángulo α:** es a la cantidad que le falta a α para llegar a $90°$ → $C(\alpha) = 90 - \alpha$
- **Suplemento (S) de un ángulo α**: es la cantidad que le falta a α para llegar a $180°$ → $S(\alpha) = 180 - \alpha$

1.2. Ángulos entre paralelas y opuestos por el vértice

Cada vez que una recta corta a dos rectas paralelas, se forman dos grupos de 4 ángulos congruentes. Además, los ángulos de un grupo son suplementarios respecto de los ángulos del otro grupo.



1.3. Grados, minutos y segundos

Los ángulos del sistema de medición angular sexagesimal se puede dividir en cantidades menores, denominadas minuto ($1'$) y segundo ($1''$), a través de la siguiente conversión: $\mathbf{1^\circ = 60'}$ y $\mathbf{1' = 60''}$. Para sumar o restar medidas de ángulos, éstos se deben presentar en las mismas unidades, y luego convertir a la unidad superior si es posible.

Ejemplo 1 El complemento del suplemento de un ángulo α es igual a 30°. ¿Cuánto mide $\boldsymbol{\alpha}$?

Solución: Expresemos el enunciado como una ecuación:

El complemento del suplemento de un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ es igual a 30°

$$90^\circ \quad - \quad (180^\circ - \alpha) \quad = \quad 30^\circ \quad \rightarrow \quad 90^\circ - 180^\circ + \alpha = 30^\circ \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 120^\circ}$$

Ejemplo 2 Sea $\alpha = 26^\circ\,35'\,29''$ y $\beta = 51^\circ\,48'\,42''$. Calcular $\alpha + \beta$:

Solución:

$$\alpha = 27^\circ\,35'\,29''$$
$$\beta = 52^\circ\,48'\,42''$$
$$\alpha + \beta = 79^\circ\,83'\,71''$$

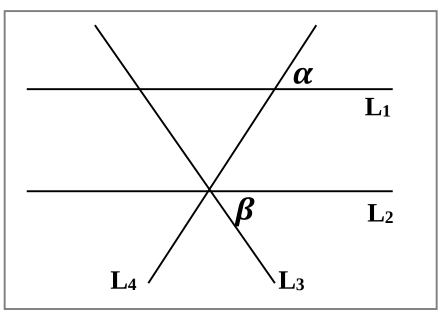
Pero $71'' = 60'' + 11'' = 1' + \mathbf{11''}$, por lo que se tiene: $83' + 1' = 84'$

De igual forma: $84' = 1^\circ + \mathbf{24'}$, por lo que se tiene: $79^\circ + 1^\circ = \mathbf{80^\circ}$

Entonces: $\boldsymbol{\alpha + \beta = 80^\circ\,24'\,11''} \leftrightarrow \boldsymbol{\alpha + \beta = 80^\circ + \frac{24^\circ}{60} + \frac{11^\circ}{3.600} = 80,4^\circ}$

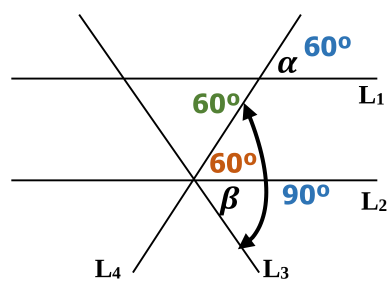
En grados, min. y seg. Solo en grados

Ejemplo 3 En la figura $L_1 \parallel L_2$, $L_3 \perp L_4$. Si $\alpha = 60^\circ$, entonces β = ?



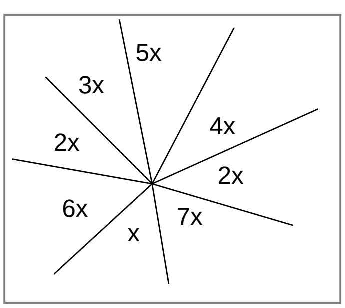
Solución:

Incorporamos los datos del problema y empleamos las propiedades angulares estudiadas. Además según la figura: $\beta = 90^\circ - 60^\circ \rightarrow \boldsymbol{\beta = 30^\circ}$



Observación: en azul se escriben los datos suministrados en el enunciado, mientras que en otros colores (de más claro a más oscuro) se van anotando los demás valores en el orden en que se van calculando.

Ejemplo 4 ¿Cuánto mide x en la siguiente figura?



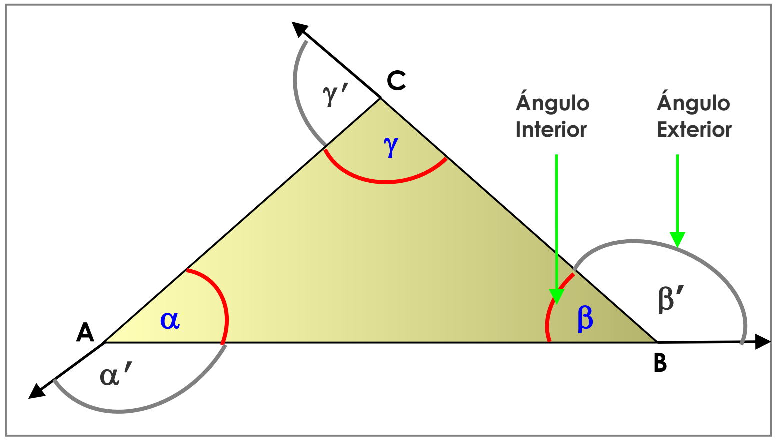
Solución: Dado que el ángulo completo equivale a $\mathbf{360^\circ}$, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$x + 7x + 2x + 4x + 5x + 3x + 2x + 6x = 360^\circ \quad \rightarrow \quad 30x = 360^\circ \quad \rightarrow \boldsymbol{x = 12^\circ}$$

2.- Triángulos

2.1. Teoremas acerca de sus ángulos

Los elementos angulares de los triángulos presentan interesantes propiedades matemáticas, representadas en los siguientes teoremas:



- La suma de las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180°.

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

- La suma de las medidas de un ángulo interior y del ángulo exterior adyacente es 180°.

$$\boxed{\beta + \beta' = 180°}$$

- La medida del ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes.

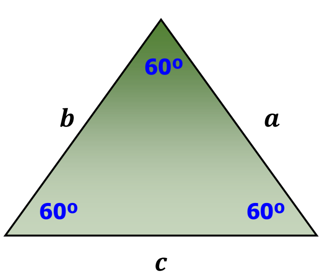
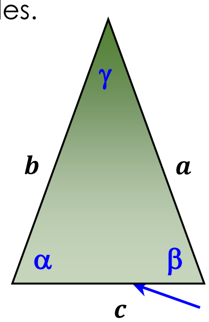
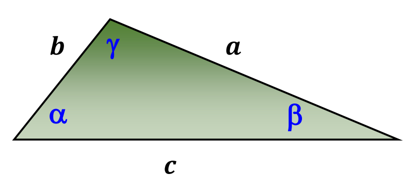
$$\boxed{\alpha' = \beta + \gamma} \quad \boxed{\beta' = \alpha + \gamma} \quad \boxed{\gamma' = \alpha + \beta}$$

- La suma de las medidas de los tres ángulos exteriores es igual a 360°. $\boxed{\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°}$

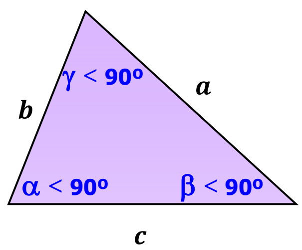
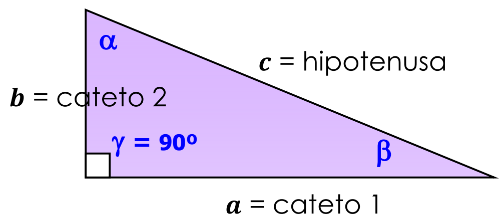
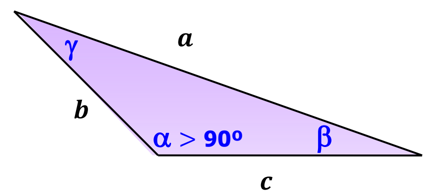
2.2. Clasificación de los triángulos

En términos generales, los triángulos pueden ser clasificados según sus lados o según sus ángulos.

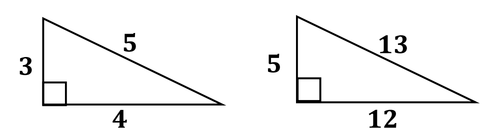
- **Clasificación según sus lados**

Triángulo Equilátero	**Triángulo Isósceles**	**Triángulo Escaleno**
- Todos los lados son iguales. - Todos sus ángulos son iguales a $60°$.  $\boxed{a = b = c}$	- Dos lados son iguales. - Los ángulos basales son iguales.  Se le denomina base al lado diferente del triángulo isósceles $\boxed{a = b \neq c}$ $\boxed{\alpha = \beta \neq \gamma}$	- Todos los lados son diferentes. - Todos los ángulos son diferentes.  $\boxed{a \neq b \neq c}$ $\boxed{\alpha \neq \beta \neq \gamma}$

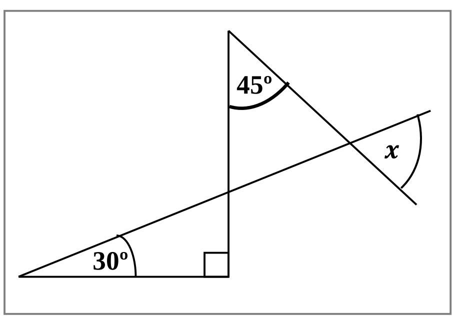
- **Clasificación según sus ángulos**

Triángulo Acutángulo	Triángulo Rectángulo	Triángulo Obtusángulo
- Posee todos los ángulos agudos.  	- Posee un ángulo de 90°.  - Se aplica el teorema de Pitágoras: $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$	- Posee un ángulo mayor de 90°. 

Tríos Pitagóricos: son aquellas ternas de números naturales que cumplen con el teorema de Pitágoras. Los más conocidos son: **(3, 4, 5)** y **(5, 12, 13).** Todos sus múltiplos también son tríos pitagóricos. Por ejemplo: (6, 8, 10), (30, 40, 50), (50, 120, 130), etc.

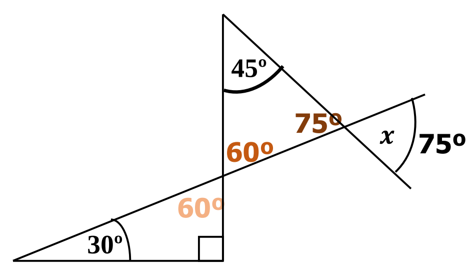


Ejemplo 5 Según los datos de la figura, ¿cuánto vale x?



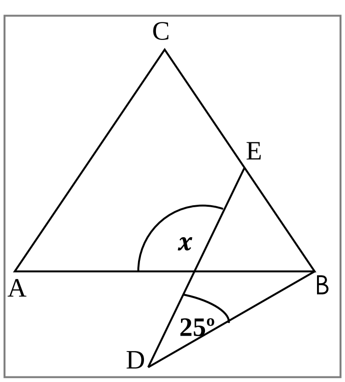
Solución:

Encontramos el valor de la mayor cantidad de ángulos, recordando que:
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°
- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales



Entonces: $x = 75°$

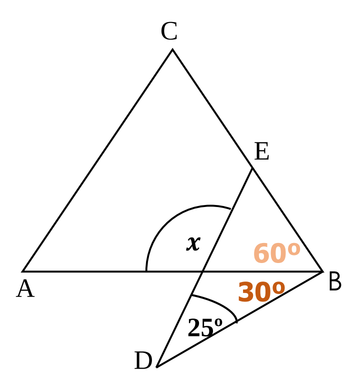
Ejemplo 6 ΔABC equilátero, ΔDBE rectángulo en B. Entonces, ¿cuánto vale x?



Solución:

- ΔABC equilátero $\rightarrow \measuredangle ABC = 60°$
- ΔDBE rectángulo en $B \rightarrow \measuredangle EBD = 90°$
- Entonces: $\measuredangle ABD = 90° - 60° = 30°$
- Finalmente: $x = 180° - (25° + 30°)$

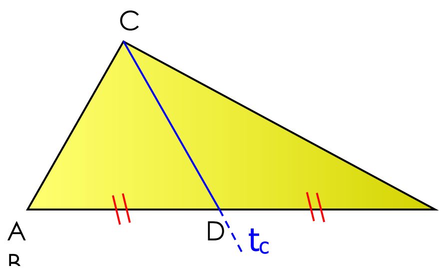
$\rightarrow$ $x = 125°$



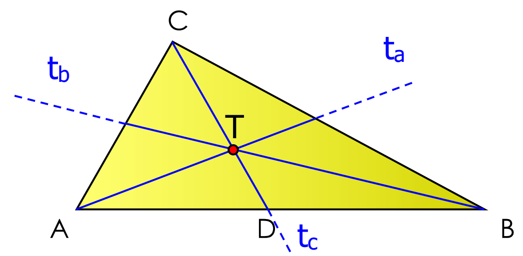
2.3. Elementos secundarios del triángulo

➢ Transversal de Gravedad

- Trazo que une un vértice con el **punto medio** del lado opuesto.

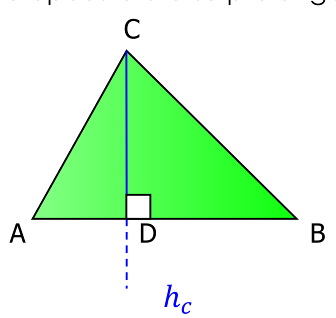


- Las 3 transversales se intersectan en un punto interno del triángulo, denominado ***centro de gravedad*** o baricentro.
- Se cumple que $\overline{CT} = 2\,\overline{TD}$.



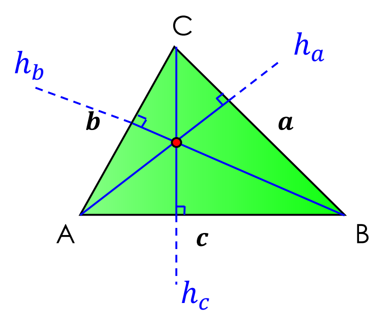
➢ Altura

- Trazo **perpendicular** desde el vértice al lado opuesto o a su prolongación.



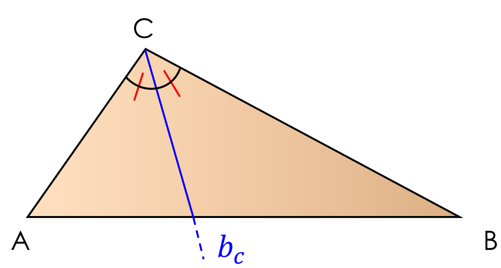
- Las 3 alturas se intersectan en el ***ortocentro*** (puede estar dentro o fuera del triángulo).
- Se cumple que:

$$\boxed{a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c}$$

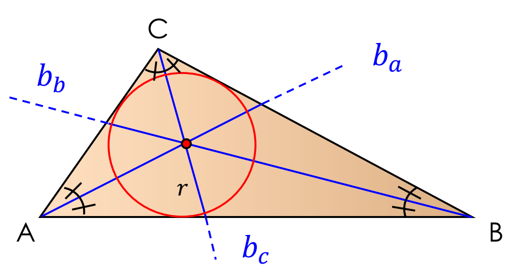


➢ Bisectriz

- Trazo que divide cada **ángulo** por la **mitad**.

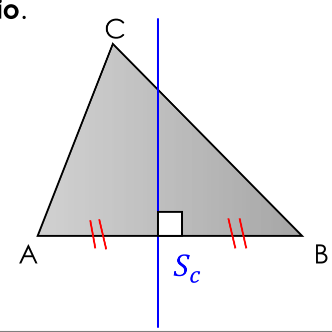


- Las tres bisectrices se intersectan en el ***incentro***, que es centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

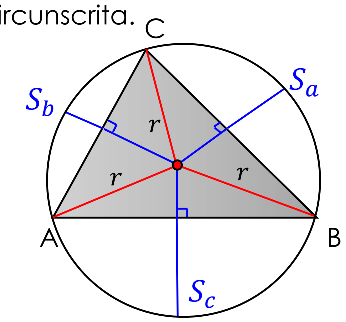


➢ Simetral

- Recta **perpendicular** a un lado, que a la vez pasa por su **punto medio**.

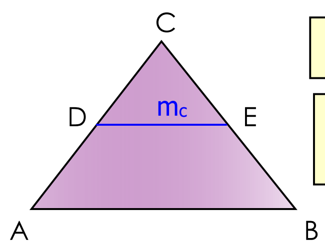


- Las tres simetrales se intersectan en el ***circuncentro***, punto que equidista de cada vértice y que es el centro de la circunferencia circunscrita.



➢ Mediana

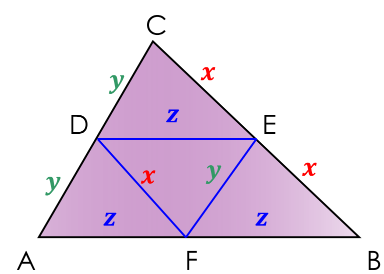
- Segmento que une los **puntos medios** de dos lados.
- Cada mediana es **paralela** al tercer lado.
- Mide la **mitad** del lado al cual es paralela.



$\boxed{\overline{DE} \parallel \overline{AB}}$

$\boxed{\overline{DE} = \dfrac{\overline{AB}}{2}}$

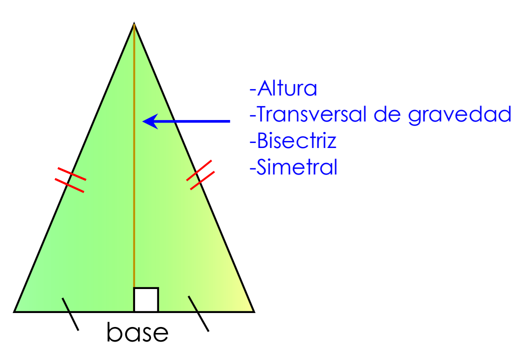
- Las uniones de las tres medianas forman 4 **triángulos congruentes**.
- Estos triángulos son **semejantes** al original pero con la **mitad** de sus dimensiones.



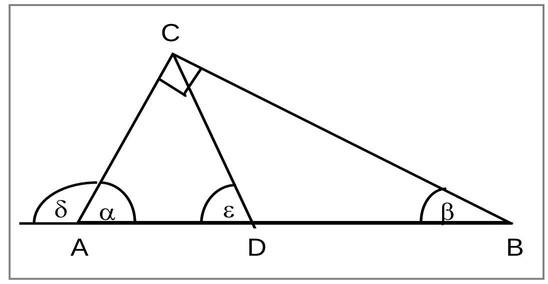
<u>Observación</u>: En el triángulo **isósceles** la altura basal coincide con la transversal de gravedad, la bisectriz del ángulo opuesto a la base y la simetral de la base.

Además, producto de su simetría, lo mismo ocurre entre cada uno de los lados del triángulo **equilátero** y sus elementos secundarios.

Triángulo Isósceles



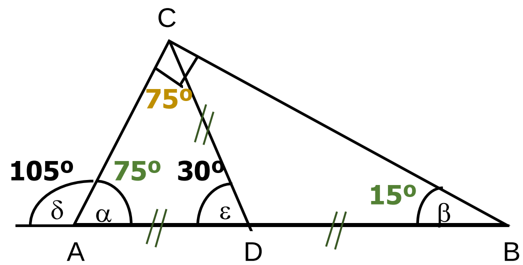
Ejemplo 7 ΔABC rectángulo. $\overline{CD}$ es transversal de gravedad de $\overline{AB}$ y $\alpha : \beta = 5 : 1$. ¿Cuánto mide $\delta + \varepsilon$?



<u>Solución</u>:

- Del ΔABC tenemos que $\alpha + \beta + 90° = 180° \;\rightarrow\; \alpha + \beta = 90°$
- Además $\alpha : \beta = 5 : 1 \rightarrow \; \alpha = 5x;\; \beta = x \rightarrow \; 5x + x = 90°$
  $\rightarrow \; x = 15° \;\rightarrow\; \boldsymbol{\alpha = 75°};\; \boldsymbol{\beta = 15°}$

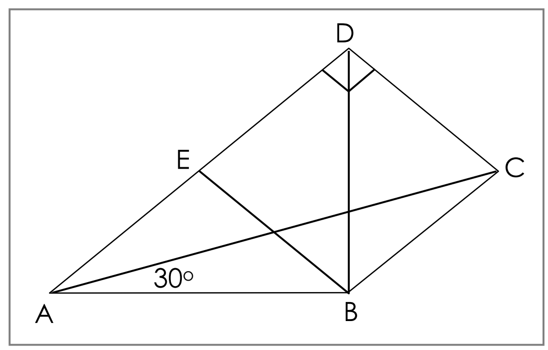
- Por otra parte, si $\overline{CD}$ es transversal de $\overline{AB} \;\rightarrow\; \overline{AD} = \overline{DB}$, y si además, ΔABC es rectángulo, $\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{CD}$. Luego ΔADC es isósceles de base $\overline{AC}$, por lo tanto $\boldsymbol{\varepsilon} = 180° - 2 \cdot 75° = \mathbf{30°}$



- Finalmente: $\boldsymbol{\delta} = 180° - 75° = \mathbf{105°}$

- Entonces: $\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} = 105° + 30° \;\;\rightarrow\;\; \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{135°}$

Ejemplo 8 En la figura, $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\measuredangle EBC = 2\measuredangle ABE$, $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ son bisectrices de los ángulos EBC y DAB respectivamente. Entonces: $\measuredangle BED + \measuredangle BDC = ?$



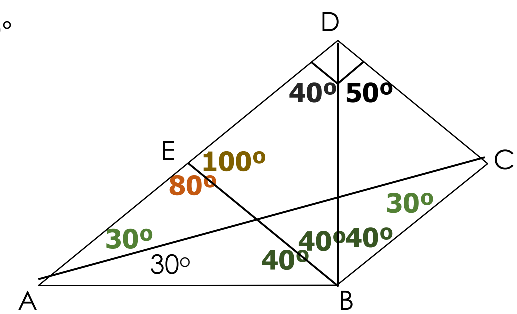
<u>Solución</u>:

- Si $\overline{AB} = \overline{BC} \rightarrow \Delta ABC$ isósceles de base $\overline{AC} \;\rightarrow\; \measuredangle ACB = 30°$
  $\rightarrow \measuredangle ABC = 180 - 60 = 120°$

- Además, si $\overline{AC}$ bisectriz de $\measuredangle DAB \rightarrow \measuredangle DAC = \measuredangle CAB = 30°$

- Si $\measuredangle EBC = 2\measuredangle ABE$ y $\overline{BD}$ bisectriz de $\measuredangle EBC$
  $\rightarrow \measuredangle ABE = \measuredangle EBD = \measuredangle DBC = 120/3 = 40°$

- Si nos fijamos en el ΔABE, tendremos que $\measuredangle AEB = 180° - 60° - 40° = 80°$
  $\rightarrow \measuredangle \boldsymbol{BED} = 180° - 80° = \mathbf{100°}$



- Ahora, pasando al ΔEBD: $\measuredangle \boldsymbol{EDB} = 180° - 100° - 40° = \mathbf{40°}$

- Entones: $\measuredangle \boldsymbol{BDC} = 90° - 40° = \mathbf{50°}$

- Finalmente: $\measuredangle BED + \measuredangle BDC = 100° + 50° \rightarrow \measuredangle \boldsymbol{BED} + \measuredangle \boldsymbol{BDC} = \mathbf{150°}$

Ejemplo 9 ¿Con cuáles de los siguientes tríos de lados se puede construir un triángulo?

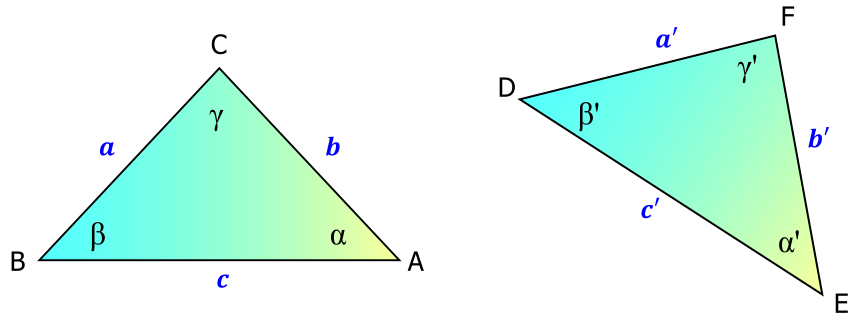
I) 3, 8, 5 II) 6, 19, 7 III) 3, 4, 5

<u>Solución</u>: En un triángulo, siempre el **lado mayor** debe ser **menor** que la **suma de los otros dos lados**, por lo tanto:

I) 8 = 5 + 3 → no cumple
II) 19 > 6 + 7 → no cumple
III) 5 < 3 + 4 → **si cumple**

3.- Congruencia de triángulos

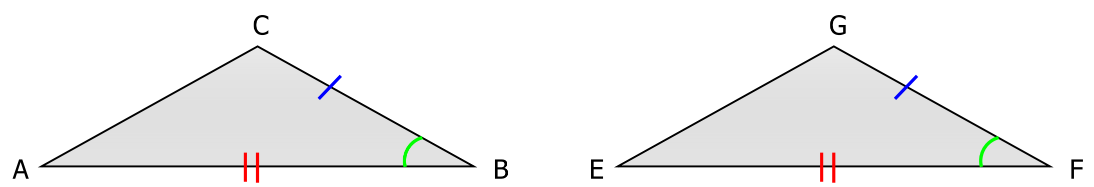
3.1. Definición: Dos o más triángulos son congruentes si éstos tienen la **misma forma y tamaño**, es decir, si todos sus **lados y ángulos** respectivos son **congruentes.** El símbolo ≅ se utiliza para indicar congruencia entre figuras geométricas.



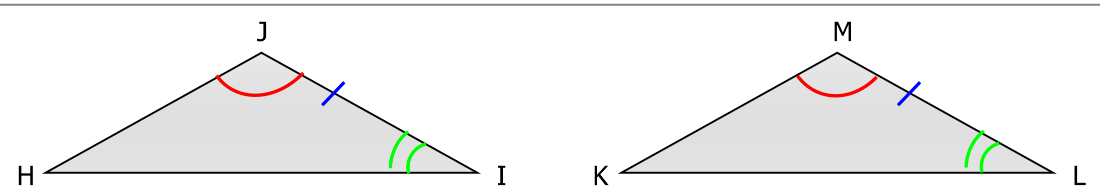
$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{cases}$$

Dado que los elementos primarios de un triángulo (lados y ángulos) no son independientes, no es necesario exigir las **6** igualdades anteriores para asegurar que 2 triángulos son congruentes. De hecho, en muchos casos, basta con tener **tres igualdades** para afirmar que dos triángulos son congruentes. Estas igualdades se representan en los denominados **criterios de congruencia.**

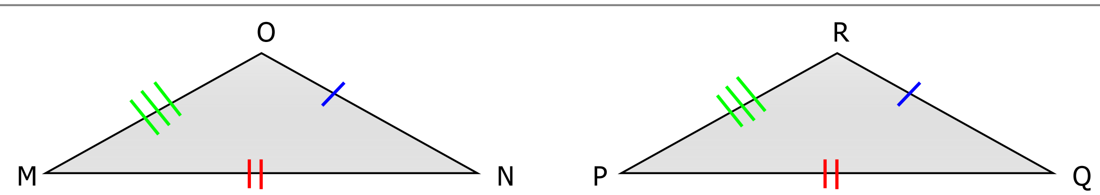
- **Criterio LAL** (lado-ángulo-lado): Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes, junto con el ángulo comprendido entre ellos también congruente.



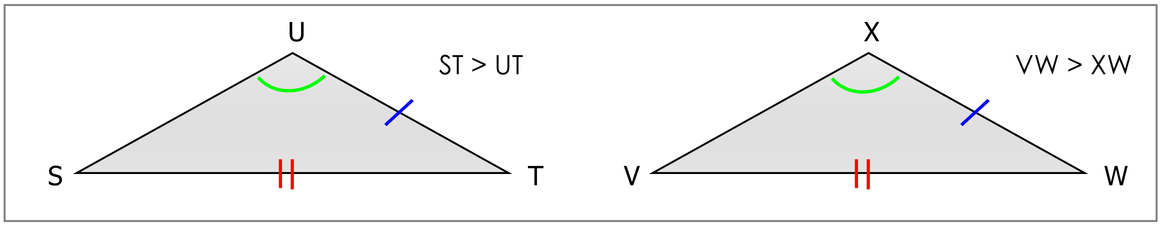
- **Criterio ALA** (ángulo-lado-ángulo): Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes, junto con el lado comprendido entre ellos también congruente.



- **Criterio LLL** (lado-lado-lado): Dos triángulos son congruentes si presentan tres lados congruentes.

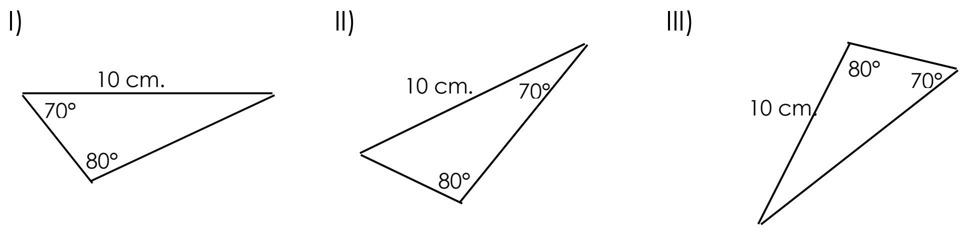


- **Criterio LLA>** (lado-lado-ángulo mayor): Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados congruentes, además de congruente el ángulo opuesto al lado de mayor medida.



<u>**Observación**</u>: Notar que, si sabemos que dos triángulos presentan **3 ángulos iguales**, sólo contamos con **dos igualdades**, debido a que el tercer ángulo se puede obtener a partir de la diferencia entre 180° y la suma de los otros dos ángulos. Dado lo anterior, el tercer ángulo no aporta información adicional.

Ejemplo 10 Dados los siguientes triángulos, determinar cuáles son congruentes.



<u>Solución</u>:

En cada caso se entregan dos ángulos, por ende el tercero se obtiene a partir de: $180° - (70° + 80°) = \mathbf{30°}$.
Además, se nos entrega un lado, por ende el criterio de congruencia a utilizar es **ALA**.

A partir de lo anterior, se observa que en los triángulos I) y II) tenemos el lado de 10 cm comprendido entre los ángulos de 70° y 30°, entonces por criterio ALA: **I) y II) son congruentes**.

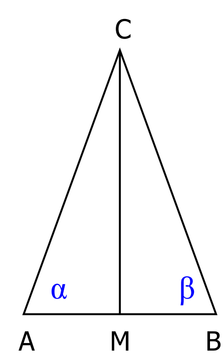
Notar que en el triángulo III) el lado de 10 cm está comprendido entre los ángulos de 80° y 30°, lo que difiere de los casos anteriores.

Ejemplo 11 Demostremos, usando congruencia de triángulos, que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a la base son congruentes.

<u>Demostración</u>: Sea $\overline{AC} = \overline{BC}$ (isósceles) y M el punto medio de la base. Entonces:

- $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ (por ser M punto medio)
- $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (por ser triángulo isósceles)
- $\overline{MC} \cong \overline{MC}$ (lado común)

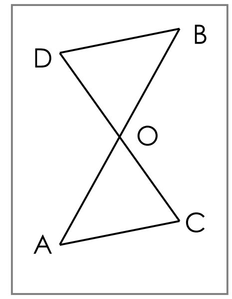
Luego, por el criterio de congruencia **LLL**, se tiene $\boldsymbol{\Delta CAM} \cong \boldsymbol{\Delta CBM}$, por lo que sus ángulos homólogos son congruentes, luego:



$\measuredangle\boldsymbol{\alpha} = \measuredangle\boldsymbol{\beta}$ (son homólogos, ya que ambos se oponen al mismo lado: $\overline{CM}$)

Ejemplo 12 En la figura, O es el punto medio de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. A partir de esta información se puede concluir que:

I) $\Delta ACO \cong \Delta BDO$
II) Las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{DB}$ son paralelas
III) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



Solución: Comencemos verificando si $\Delta ACO \cong \Delta BDO$:

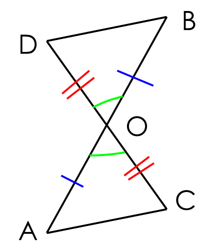
I) Si O es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ →

- $\overline{DO} \cong \overline{OC}$
- $\overline{BO} \cong \overline{OA}$

} (2 lados congruentes)

Además, por ser opuestos por el vértice:

- $\measuredangle AOC \cong \measuredangle DOB$ (1 ángulo congruente)



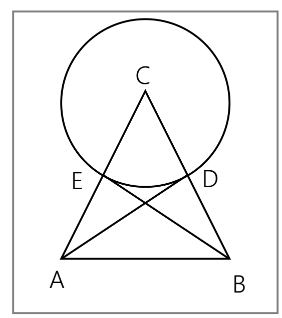
Entonces, por el criterio **LAL**: $\Delta ACO \cong \Delta BDO$ → **I) es correcta**

II) Si $\Delta ACO \cong \Delta BDO$ → $\measuredangle DBO \cong \measuredangle OAC$ y $\measuredangle ACO \cong \measuredangle ODB$, entonces, dado que los ángulos alternos entre paralelas son congruentes, podemos concluir que efectivamente $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{DB}$ son paralelas. → **II) es correcta**

III) A pesar de que $\Delta ACO \cong \Delta BDO$, no podemos asegurar que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Para esto los triángulos deberían ser isósceles. → **III) es incorrecta**

Ejemplo 13 El triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AB}$. La circunferencia es de centro C y radio $\overline{CD}$. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) afirmación(es) es(son) verdadera(s)?

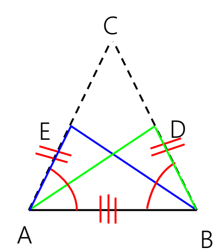
I) $\Delta ABE \cong \Delta BAD$
II) $\Delta BEC \cong \Delta ADC$
III) $\Delta ABD \cong \Delta ADC$



Solución:

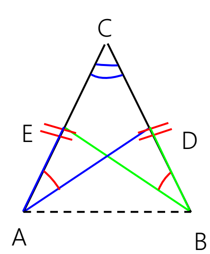
I) Verifiquemos si $\Delta ABE \cong \Delta BAD$
- Dado que ΔABC es isósceles de base $\overline{AB}$, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Además $\overline{EC} \cong \overline{DC}$ por ser radios de la circunferencia. Luego: $\overline{AE} \cong \overline{DB}$ (1 lado congruente)
- Dado que ΔABC es isósceles de base $\overline{AB}$, $\measuredangle CAB \cong \measuredangle ABC$ (1 ángulo congruente)
- Por ser lado común $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (1 lado congruente)

Entonces, por el criterio **LAL**: $\Delta ABE \cong \Delta BAD$ → **I) es verdadera**



II) Verifiquemos si $\Delta BEC \cong \Delta ADC$
- Dado que ΔABC es isósceles de base $\overline{AB}$, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (1 lado congruente)
- Por ser ángulo común $\measuredangle ACB \cong \measuredangle ACB$ (1 ángulo congruente)
- Ya se demostró que $\Delta ABE \cong \Delta BAD$, por lo tanto $\measuredangle EBC \cong \measuredangle DAB$ (1 ángulo congruente)

Entonces, por el criterio **ALA**: $\Delta BEC \cong \Delta ADC$ → **II) es verdadera**



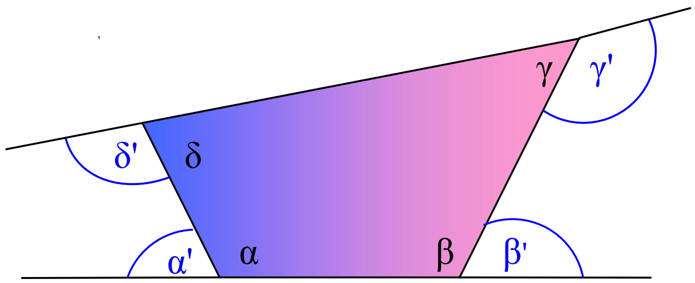
III) Verifiquemos si $\Delta ABD \cong \Delta ADC$
- En este caso tenemos solo un lado común $\overline{AD} \cong \overline{AD}$, pero no se indica que $\overline{CD} \cong \overline{DB}$ o que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, ni que $\measuredangle ADC \cong \measuredangle ADB$ o que $\measuredangle CAD \cong \measuredangle BAD$, por lo no tenemos suficiente información para asegurar que $\Delta ABD \cong \Delta ADC$ → **III) es Falsa**

II.- CUADRILÁTEROS Y POLÍGONOS

1.- Definición y propiedades angulares

Un cuadrilátero es un tipo de polígono (o figura plana cerrada) que posee cuatro lados. Los cuadriláteros se dividen en 3 grupos: **paralelógramos**, **trapecios** y **trapezoides**.

➢ **Propiedades de sus ángulos**



➢ La suma de los ángulos interiores es 360°

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

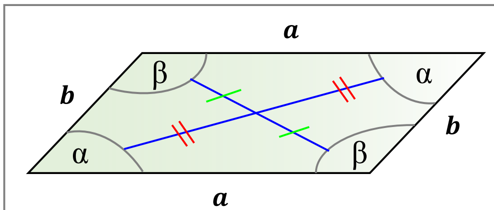
➢ La suma de los ángulos exteriores es 360°

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360°$$

2.- Paralelógramos

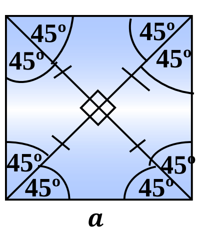
Son cuadriláteros que poseen **2 pares de lados paralelos**. Además, los **lados opuestos** y los **ángulos opuestos** son **congruentes**. Siempre se cumple que:

$$\alpha + \beta = 180°$$

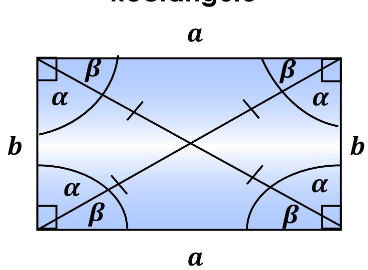


Dentro de los paralelógramos, podemos encontrar los siguientes casos:

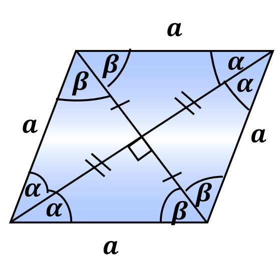
Cuadrado



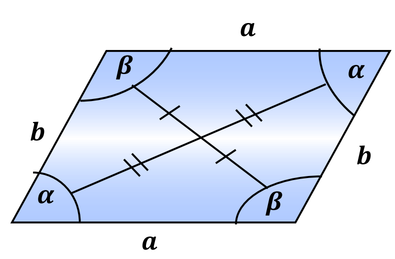
Rectángulo



Rombo

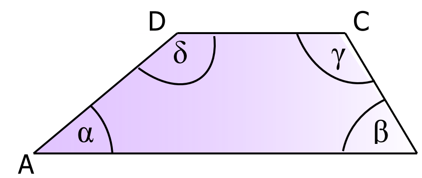


Romboide



- Las diagonales del **cuadrado y rombo** son bisectrices y se cortan en ángulo recto.
- Las diagonales forman, **en el rombo y cuadrado**, 4 pares de triángulos congruentes, mientras que, en el **rectángulo y romboide,** sólo 2 pares de triángulos congruentes.
- Las diagonales en **todo paralelogramo** se cortan en sus respectivos puntos medios.
- Las diagonales en el **cuadrado y rectángulo** son iguales.

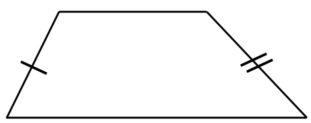
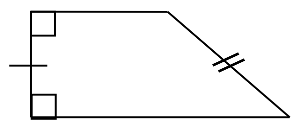
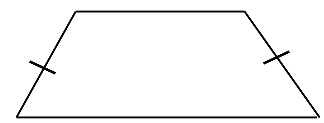
3.- Trapecios



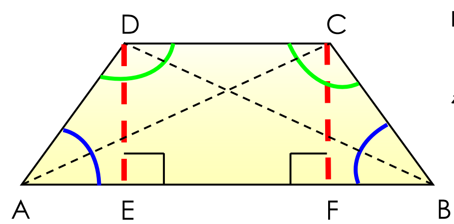
Son cuadriláteros que poseen **1 par de lados paralelos**. En todo trapecio se cumple:

$$\boldsymbol{\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°}$$

Dentro de los trapecios, podemos encontrar los siguientes casos:

Trapecio escaleno	**Trapecio escaleno rectángulo**	**Trapecio isósceles**
		

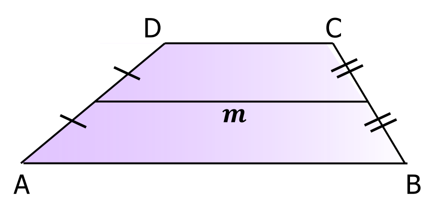
- **Trapecio isósceles**
  - Los lados no paralelos son iguales.
  - Los ángulos basales son iguales.
  - Las diagonales son iguales.



Propiedades:

∡DAE = ∡CBF
∡ADC = ∡BCD
$\overline{AD} = \overline{CB}$
$\overline{AE} = \overline{FB}$
$\overline{EF} = \overline{CD}$

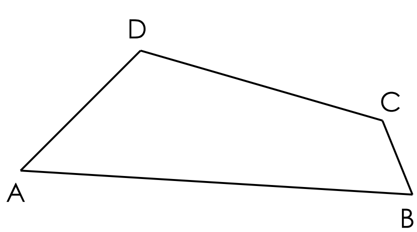
- **Mediana de un trapecio**
  - Une puntos medios de lados no paralelos.
  - Mediana $(\boldsymbol{m}) = (\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{CD})/\boldsymbol{2}$.
  - Es paralela a los lados paralelos.



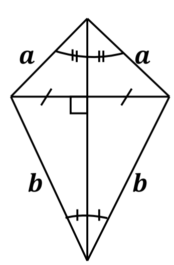
4.- Trapezoides

Son cuadriláteros que **no tienen lados paralelos**. Dentro de los trapezoides encontramos:

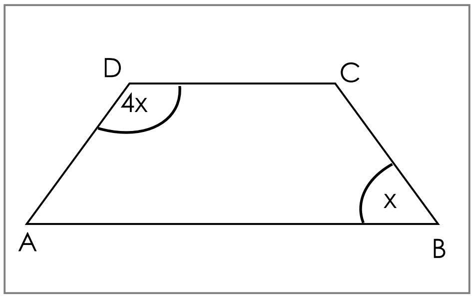
Trapezoide asimétrico



Trapezoide simétrico (deltoide)

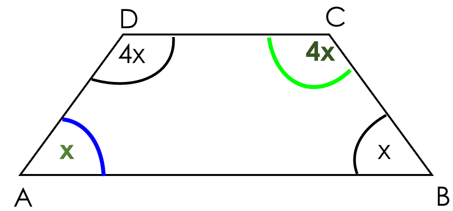


Ejemplo 1 ABCD trapecio isósceles, entonces ¿cuánto mide el ángulo DAB?

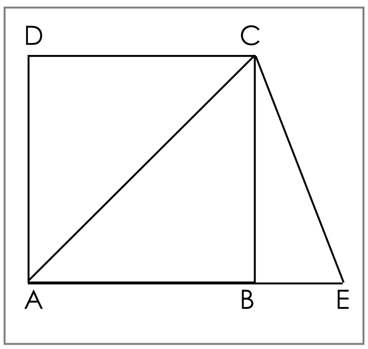


Solución:

- Dado que es un trapecio isósceles, los ángulos basales son iguales.
- Además, por ser un trapecio, se tiene: $x + 4x = 180° \rightarrow 5x = 180°$
$\rightarrow$ $\boldsymbol{x = 36°}$, por lo tanto: $\boldsymbol{\measuredangle DAB = 36°}$

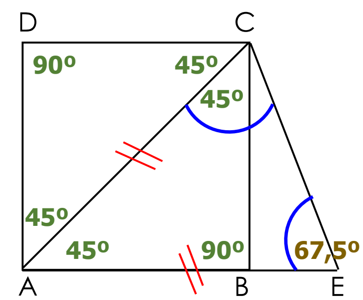


Ejemplo 2 $ABCD$ es un cuadrado; $\overline{AC} = \overline{AE}$, ¿cuánto mide el ángulo BCE?



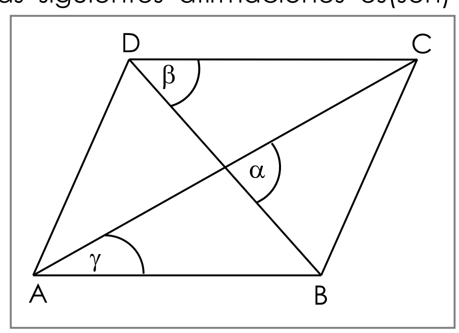
Solución:

- Recordamos que los ángulos interiores de un cuadrado miden 90°, mientras que las diagonales son bisectrices.
- Además, $\overline{AC} = \overline{AE} \rightarrow \Delta ACE$ es isósceles
 $\rightarrow$ $\measuredangle ACE = \measuredangle AEC = (180° - 45°)/2 = \boldsymbol{67,5°}$
- Por lo tanto, el ángulo BCE = 67,5° – 45°
 $\rightarrow$ $\boldsymbol{\measuredangle BCE = 22,5°}$



Ejemplo 3 En la figura, $ABCD$ es rombo. Entonces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) $\alpha = \beta + \gamma$
II) $\alpha = 2\beta$
III) $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$

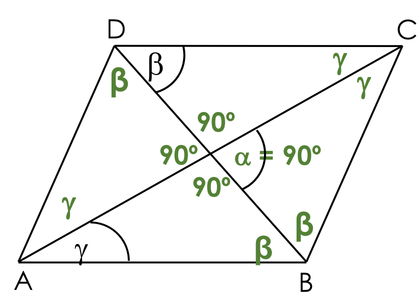


Solución: Partamos identificando la mayor cantidad de ángulos posibles, recordando que las diagonales de un rombo sin bisectrices y a la vez se intersectan en ángulo recto. Por otra parte, los ángulos interiores consecutivos son complementarios.

Ahora verifiquemos las afirmaciones:
I) Dado que: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (a partir de cualquiera de los triángulos que se forman) y a la vez: $\alpha = 90° \rightarrow 90° + \beta + \gamma = 180° \rightarrow \beta + \gamma = 90°$
$\rightarrow \boldsymbol{\alpha = \beta + \gamma} \rightarrow$ **I) es verdadera**

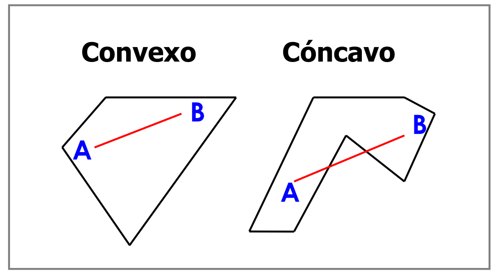
II) Para que $\alpha = 2\beta$ sería necesario que $\beta = 45°$, por lo tanto la figura debería ser un cuadrado en vez de un rombo $\rightarrow$ **II) es Falsa**

III) se pide verificar que: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$, que equivale a verificar:
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, lo cual ya se probó en I) $\rightarrow$ **III) es verdadera**



5.- Polígonos

5.1. Definición: Entendemos por polígono a una figura plana limitada por trazos que se intersectan en sus puntos extremos.



Los polígonos pueden ser **cóncavos o convexos**, tal como se muestra en la figura. Se observa que el polígono convexo es aquel que, para todo par de puntos de su región interior, el segmento que los une siempre está totalmente incluido en el interior del polígono (todos sus ángulos interiores son menores que 180°). En caso contrario, el polígono es cóncavo.

5.2. Nombre de los polígonos

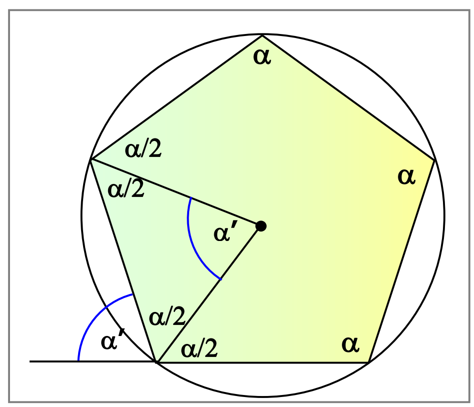
Los polígonos, dependiendo del número de lados, se denominan de la siguiente manera:

Nombre	Nº de lados	Nombre	Nº de lados	Nombre	Nº de lados	Nombre	Nº de lados
Triángulo	3	Hexágono	6	Eneágono	9	Dodecágono	12
Cuadrado	4	Heptágono	7	Decágono	10	Pentadecágono	15
Pentágono	5	Octágono	8	Endecágono	11	Icoságono	20

5.3. Propiedades de los polígonos convexos de "n" lados

- La suma de las medidas de los ángulos interiores es: $\mathbf{180 \cdot (n-2)}$.
- La suma de las medidas de los ángulos exteriores es: $\mathbf{360°}$.
- El número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice es: $\mathbf{n-3}$
- El número de diagonales totales que se pueden trazar es: $\mathbf{n \cdot (n-3)/2}$

5.4. Polígonos regulares



Los polígonos regulares son aquellos que poseen todos sus lados y ángulos congruentes. Por ejemplo, el triángulo equilátero y el cuadrado son polígonos regulares. En caso contrario se dice que el polígono es irregular.

➢ **Propiedades de los polígonos regulares de "n" lados**

- Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia.
- Ángulo del **centro** = ángulo **exterior** = $\boldsymbol{\alpha' = 360°/n}$.
- Ángulo **interior** $= \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{180 - \alpha' = 180° - (360°/n)}$.

Ejemplo 4 ¿Cuántos lados y diagonales tiene el polígono cuyo ángulo **exterior** mide **12°**? ¿Cuánto suman sus ángulos interiores?

<u>Solución</u>: - Si el ángulo exterior mide 12°, el ángulo del centro también. Entonces, existen $360°/12° = \mathbf{30}$ ángulos del centro, por lo que el polígono tiene **30 lados**.

- Si el polígono tiene 30 lados, el número de diagonales que posee es: $n \cdot \frac{n-3}{2} = 30 \cdot \frac{27}{2} = \mathbf{405}$ **diagonales**.

- Sus ángulos interiores suman: $180°(n-2) = 180°(30-2) = \mathbf{5.040°}$.

III.- TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

1.- Conceptos básicos

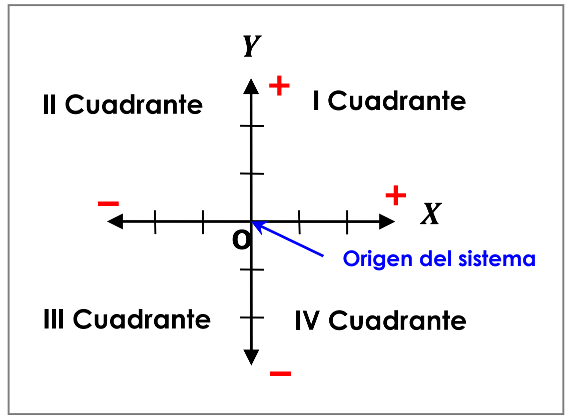
1.1. Definición: Por **transformación isométrica** entendemos a aquella transformación geométrica de un cuerpo, que presenta la propiedad de mantener inalteradas las distancias y formas del mismo. A los puntos de la figura original se les denomina **orígenes,** y a los de la figura final, **imágenes**.

1.2. Sistema de Coordenadas Cartesianas

El plano cartesiano está formado por dos líneas o ejes, perpendiculares entre sí.

- El eje horizontal se denominada eje de **abscisas** o también **eje** X.
- El eje vertical se denominada eje de las **ordenadas** o también **eje** Y.

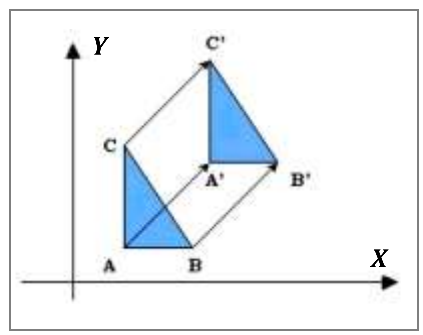
Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes, numerados según se muestra en la figura.



2.- Tipos de transformaciones isométricas

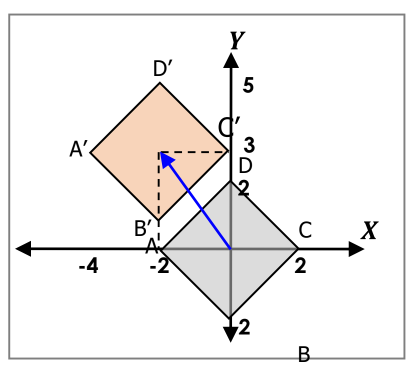
2.1. Traslación

Consiste en un desplazar una figura en una dirección determinada. La dirección, sentido y magnitud del desplazamiento están determinados por el **vector traslación**. Cada uno de los puntos de la figura presenta un desplazamiento similar, dado por este vector.
Si un punto (x, y) se traslada en un vector (a, b) se obtiene una imagen dada por $(x + a, y + b)$**.** Es decir, siempre de cumple:



coordenadas imagen = coordenadas origen + vector traslación

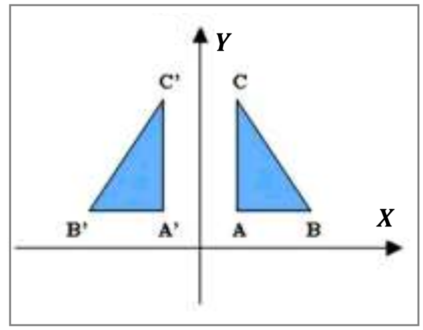
Ejemplo 1 El cuadrado ABCD de vértices A(-2, 0); B(0, -2); C(2, 0); D(0, 2) se ha trasladado en la dirección del vector T(-2, 3). ¿Cuáles son sus nuevos vértices?



Solución: A los vértices iniciales (origen) le sumamos las coordenadas del vector traslación T, para obtener los vértices finales (imagen):

- **A'** = A + T = (-2, 0) + (-2, 3) = (-2+-2, 0+3) = $(\mathbf{-4, 3})$
- **B'** = B + T = (0, -2) + (-2, 3) = (0+-2, -2+3) = $(\mathbf{-2, 1})$
- **C'** = C + T = (2, 0) + (-2, 3) = (2+-2, 0+3) = $(\mathbf{0, 3})$
- **D'** = D + T = (0, 2) + (-2, 3) = (0+-2, 2+3) = $(\mathbf{-2, 5})$

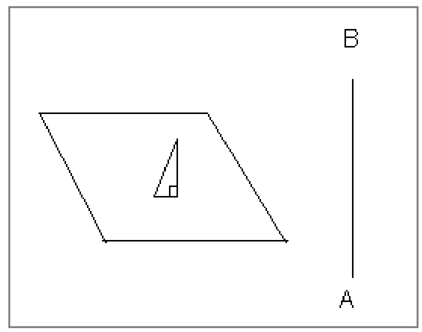
2.2.1. Simetría axial o reflexión en torno a un eje



Una **simetría axial** es una isometría que está determinada por una recta llamada **eje de simetría**. Al reflejarse un punto respecto de un eje de simetría determinado, su imagen queda justo al otro lado de este eje. Además, el eje de simetría pasa a ser la simetral del segmento que un punto origen con su imagen.

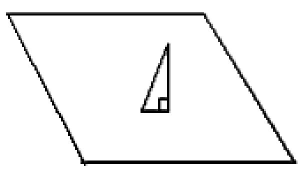
Por ejemplo, en el caso de la figura de la derecha, la distancia desde el eje $\boldsymbol{Y}$ hasta $\boldsymbol{A}$ es la misma que desde $\boldsymbol{A'}$ al mismo eje, además $\overline{\boldsymbol{AA'}}$ es perpendicular al eje $\boldsymbol{Y}$.

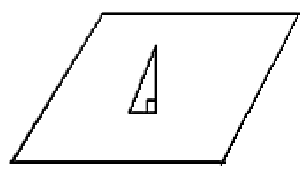
Ejemplo 2 En la figura hay un romboide con un triángulo rectángulo.

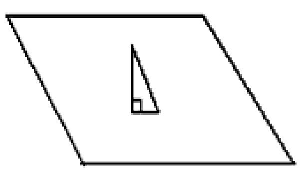


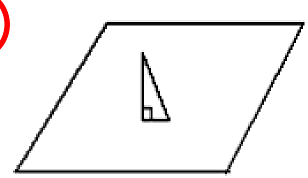
¿Cuál de las siguientes opciones representa mejor una simetría axial de la figura con respecto a $\overline{AB}$?

Solución:

A) 

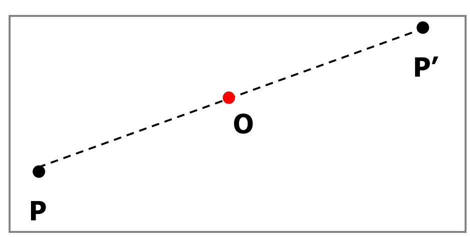
B) 

C) 

D) 

E) Ninguna de las anteriores

2.2.2. Simetría central o reflexión en torno a un punto



Se denomina así a una simetría respecto de un punto, llamado **centro de simetría**.

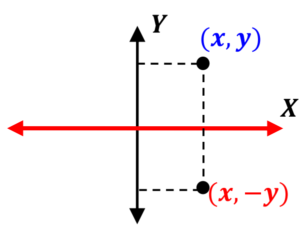
En una simetría central, se cumple que: $\boxed{\overline{OP} = \overline{OP'}}$

Siempre, el punto, su imagen y el centro de simetría están en una misma recta.

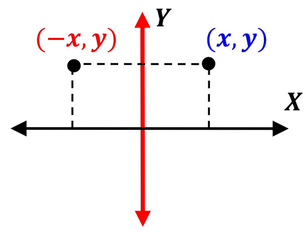
2.2.3. Reglas básicas para las simetrías

Consideremos un punto origen (x, y), entonces, dependiendo del tipo simetría, se tendrán las siguientes imágenes para ese punto:

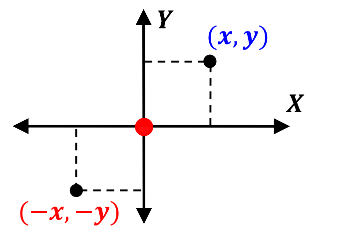
Simetría eje X



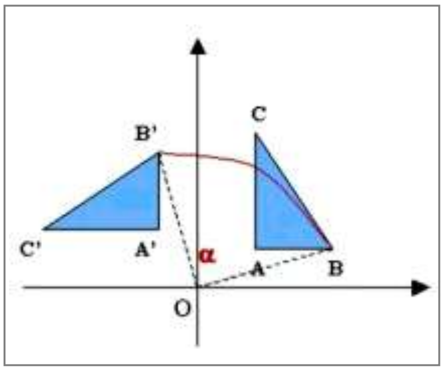
Simetría eje Y



Simetría en torno al origen

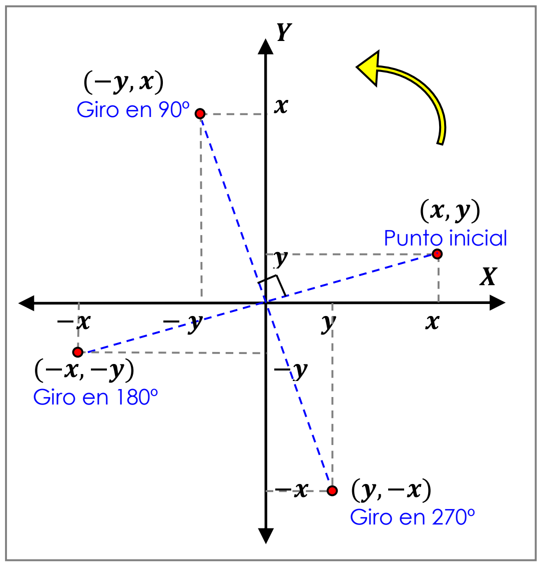


2.3. Rotación



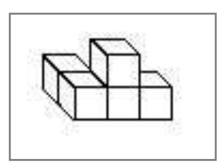
Entendemos por rotación, a una isometría en la que todos los puntos giran en torno a un punto fijo llamado **centro de rotación**. La cantidad de giro se denomina **ángulo de rotación.**

Por rotación positiva entendemos aquella que va en sentido **anti-horario**.

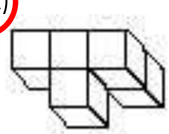


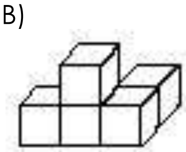
La figura de la derecha representa las rotaciones de un punto respecto del origen en 90°, 180° y 270° (anti-horario). Se podrá apreciar que cada vez que un punto (x, y) gira en **90°** en torno al **origen**, sus coordenadas finales serán $(-y, x)$. Además, una rotación en 180° equivale a una simetría central sobre el origen, en cuyo caso ambas coordenadas cambian de signo.

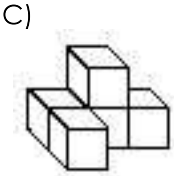
Ejemplo 3 ¿Cuál de las alternativas representa la rotación de la figura dada?

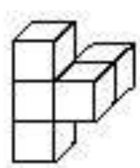


Solución:

A) 

B) 

C) 

D) 

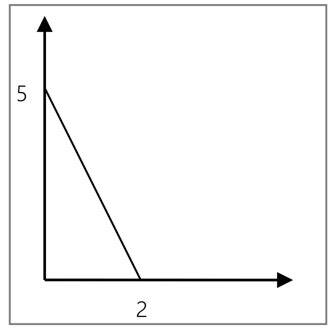
E) Ninguna de las anteriores

2.4. Composición de transformaciones

Se refiere a cuando se aplican dos o más transformaciones isométricas sucesivas. Si bien, existen muchos tipos de composiciones, es conveniente recordar algunas reglas básicas para los siguientes casos:

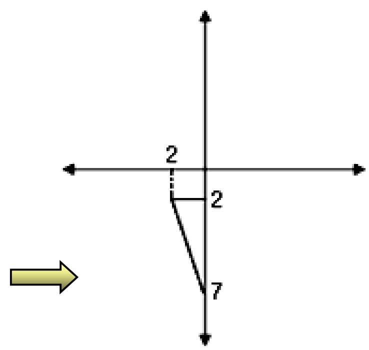
- **Traslaciones**: dado que están representadas por un vector, la composición de éstas estará dada por la suma de los respectivos vectores.
- **Rotaciones**: en caso de que dos o más rotaciones **presenten un mismo centro de rotación**, la composición de éstas estará dada por la suma de los ángulos respectivos.

Ejemplo 4 La recta de la figura corta a los ejes en los puntos (2, 0) y (0, 5). A la recta se le realiza primero una rotación en 180° en sentido antihorario con respecto al origen y después un desplazamiento de 2 unidades hacia abajo. ¿Cuál es la situación final?



Solución: Si a los puntos que representan los extremos del segmento: (2, 0) y (0, 5) les aplicamos una rotación en 180°, las nuevas coordenadas serán: (-2, 0) y (0, -5).

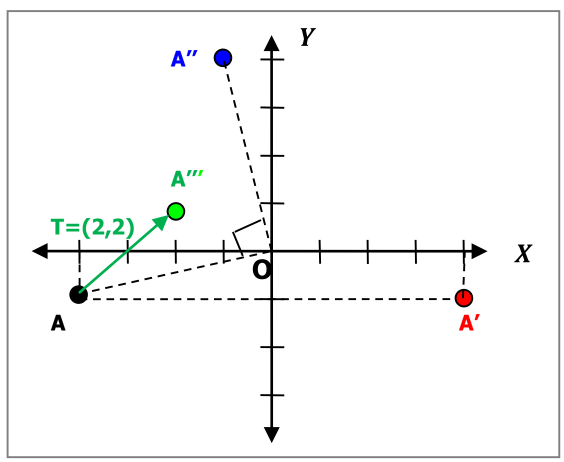
Y si ahora les aplicamos un desplazamiento de 2 unidades hacia abajo, es decir una traslación: (0, -2), las coordenadas finales de los extremos del segmento serán: $(\mathbf{-2,-2})$ y $(\mathbf{0,-7})$



Ejemplo 5 ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s) respecto del punto A(-4, -1)?

I) El punto simétrico de A respecto del eje $\boldsymbol{Y}$ es el (4, -1).
II) Al rotar el punto A en 90° en sentido **horario**, en torno al origen se obtiene el punto (-1, 4).
III) Al aplicarle al punto A una traslación dada por el vector (2, 2) se obtiene el punto (2, 1).

Solución: Nos apoyaremos de un gráfico para analizar el problema.



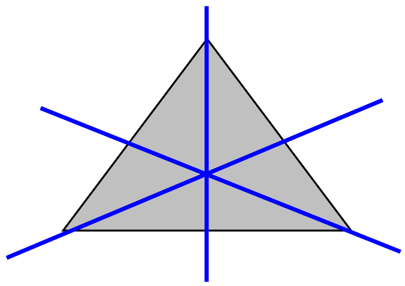
I) Al realizar una simetría sobre un punto, respecto del eje $\boldsymbol{Y}$, la coordenada $\boldsymbol{y}$ se mantiene, mientras que la coordenada $\boldsymbol{x}$ cambia de signo. Entonces, el punto simétrico de A(-4, -1), respecto del eje Y, es $\boldsymbol{A'(4,-1)}$. Por lo tanto, **I) es verdadera.**

II) Para rotar el punto A(-4, -1) en 90° en sentido horario (o negativo), recordamos la regla: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \rightarrow (\boldsymbol{-y},\boldsymbol{x})$ que funciona para sentido antihorario, por lo que en sentido horario: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \rightarrow (\boldsymbol{y},\boldsymbol{-x})$, entonces: $\boldsymbol{A''(-1,4)}$. Luego, **II) es correcta.**

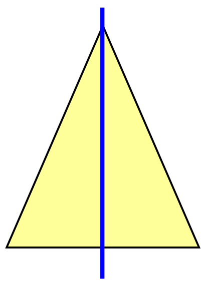
III) Al aplicarle al punto A(-4, -1) una traslación T(2, 2), se obtiene $A'''(-4+2,-1+2) = (\mathbf{-2,1})$, que difiere de lo expuesto en el enunciado. Entonces **III) es incorrecta.**

3.- Clasificación de los polígonos según sus ejes de simetría

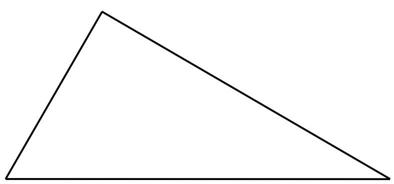
3.1. Triángulos



Triángulo equilátero: tiene **3** ejes de simetría.

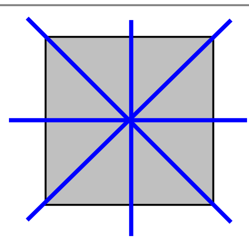


Triángulo isósceles: tiene **1** eje de simetría.

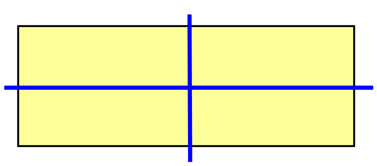


Triángulo escaleno: **no** tiene ejes de simetría.

3.2. Cuadriláteros

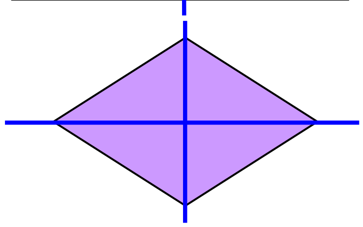


Cuadrado: tiene **4** ejes de simetría.

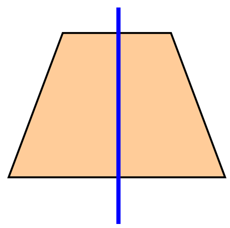


Rectángulo

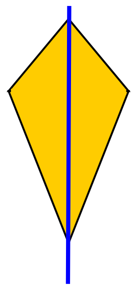
Tienen **2** ejes de simetría.



Rombo



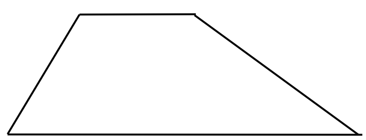
Trapecio isósceles



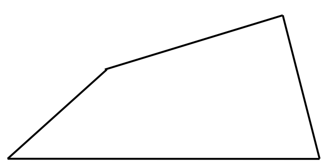
Trapezoide simétrico o deltoide

Tienen **1** eje de simetría.

Romboide



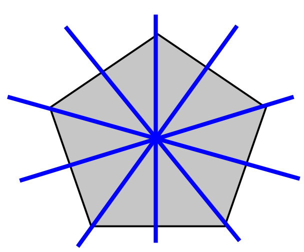
Trapecio escaleno



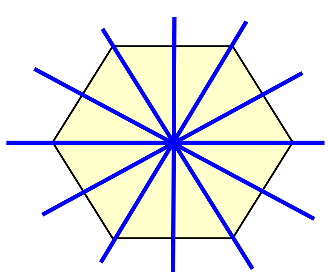
Trapezoide asimétrico

No tienen ejes de simetría.

3.3. Otros Polígonos regulares

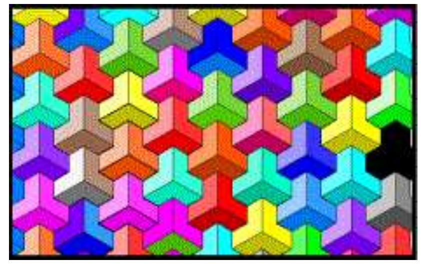


Pentágono regular: tiene **5** ejes de simetría.



Hexágono regular: tiene **6** ejes de simetría.

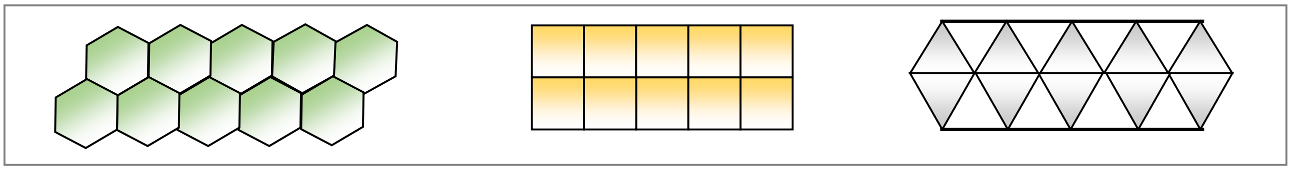
4.- Embaldosados o teselaciones



Embaldosar o teselar, significa recubrir el plano con figuras que se repiten, de modo que al unir las figuras se logre recubrir completamente el plano, siendo la intersección de dos figuras vacía (sin huecos).

4.1. Teselación regular

La **Teselación regular** es el cubrimiento del plano con polígonos **regulares y congruentes**. Son sólo tres los polígonos regulares que cubren el plano: el **triángulo equilátero**, el **cuadrado** y el **hexágono regular**. Este recubrimiento es del tipo monoédrico (usa sólo una figura).



Como criterio general, podemos decir que un polígono recubre un plano, a través de un teselación regular, cuando sus ángulos interiores son divisores de **360°**.

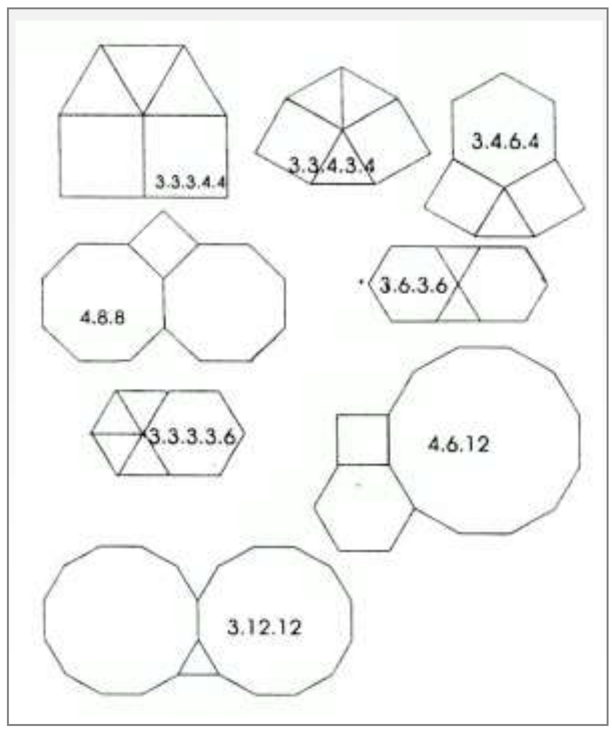
4.2. Teselación semirregular

Puede estar formada por una combinación de triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

Los números que se encuentran en cada una de las figuras indican cuántos polígonos regulares de qué tipo son necesarios en cada caso,

Por ejemplo: (3,3,3,3,6) significa que podemos crear una teselación semirregular tomando como patrón base cuatro triángulos y un hexágono.

Por otra parte, existen infinitas combinaciones de polígonos irregulares distintos que recubren el plano, los que forman las llamadas **teselaciones irregulares**.



Ejemplo 6 El piso de un baño se puede teselar con 360 cerámicas cuadradas de $10\ cm$ de lado cada una. Si se pudiera teselar con cerámicas cuadradas de $30\ cm$ de lado, entonces, ¿cuál sería el número de cerámicas que se ocuparían?

Solución: Si aumentamos el área de las cerámicas, desde $10\ x\ 10\ = 100\ cm^2$ hasta $30\ x\ 30 = 900\ cm^2$, es decir en 9 veces, la cantidad de cerámicas a colocar disminuirá en 9 veces.

Por lo tanto, el total de cerámicas de $30\ x\ 30$, que se ocuparían será igual a $360/9\ = \mathbf{40}$ **cerámicas**

IV.- PERÍMETROS Y ÁREAS

1.- Conceptos y unidades

1.1 Definiciones

- **El perímetro (P):** de una figura plana corresponde a la medida total de su contorno, o bien a la longitud de su frontera. El perímetro se mide a través de una unidad de longitud (mm, cm, m, etc.).

- **El área (A)**: representa la medida de la superficie interna de una figura, lo que equivale a la medida interior que se forma con la frontera de la figura. El área se cuantifica por una unidad de longitud al cuadrado (mm², cm², m², etc.).

- **El volumen (V)**: de un cuerpo nos indica la magnitud del espacio que éste ocupa. El volumen se cuantifica por una unidad de longitud al cubo (mm³, cm³, m³).

1.2. Conversión de unidades

La siguiente tabla nos indica la equivalencia entre la unidad básica: el metro ($\boldsymbol{m}$), y las demás unidades.

Unidad	Longitud $(\boldsymbol{m})$	Longitud² $(\boldsymbol{m^2})$	Longitud³ $(\boldsymbol{m^3})$
$\boldsymbol{km}$ (kilómetro)	1.000	1.000.000	1.000.000.000
$\boldsymbol{hm}$ (hectómetro)	100	10.000	1.000.000
$\boldsymbol{dam}$ (decámetro)	10	100	1.000
$\boldsymbol{m}$ (metro)	**1**	**1**	**1**
$\boldsymbol{dm}$ (decímetro)	0,1	0,01	0,001
$\boldsymbol{cm}$ (centímetro)	0,01	0,0001	0,000001
$\boldsymbol{mm}$ (milímetro)	0,001	0,000001	0,000000001

Amplificamos por potencias de 10, cuanto transformamos a una unidad menor.

Ejemplo 1

- Expresar: $1\ km$ en mm $\rightarrow$ a partir de la tabla, debemos bajar 6 espacios desde km a mm, por lo que la unidad km es 10^6 veces mayor que la unidad mm $\rightarrow$ $\boldsymbol{1\ km = 10^6\ mm}$.

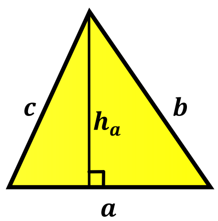
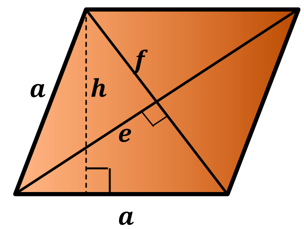
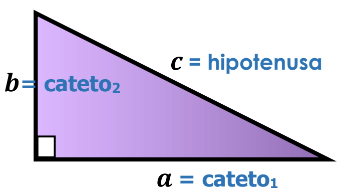
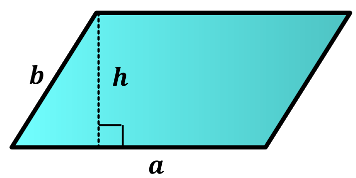
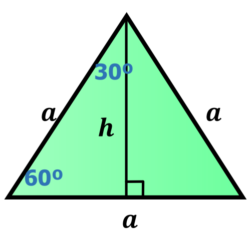
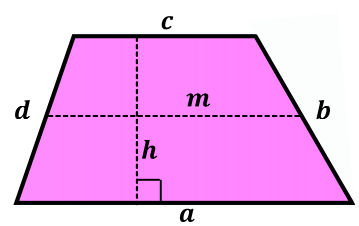
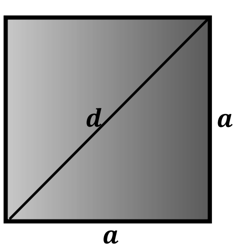
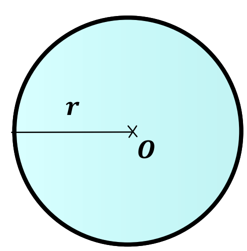
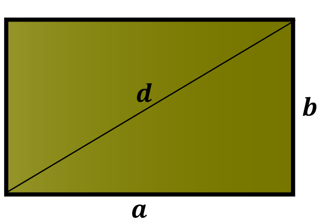
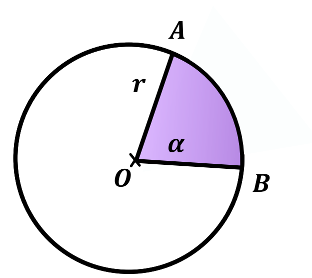
- Expresar: $15\ cm$ en hm $\rightarrow$ a partir de la tabla, debemos subir 4 espacios desde cm a hm, por lo que contrariamente al caso anterior, la unidad cm es 10^{-4} veces la unidad hm, entonces:
  $\rightarrow$ $\boldsymbol{15\ cm = 15 \cdot 10^{-4}\ hm = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ hm}$.

- Expresar: $25\ km^2$ en m^2 $\rightarrow$ Debemos bajar 3 espacios desde km a m, por lo que $km = 10^3\ m$, pero dado que estamos trabajando con unidades al cuadrado: $(km)^2 = (10^3 m)^2$ $\rightarrow$ $km^2 = 10^6\ m^2$, entonces:
  $\rightarrow$ $\boldsymbol{25\ km^2 = 25 \cdot 10^6\ m^2 = 2{,}5 \cdot 10^7\ m^2}$.

- Expresar: $8\ cm^3$ en km^3 $\rightarrow$ Debemos subir 5 espacios desde cm a km, por lo que $km = 10^5\ cm$, pero dado que estamos trabajando con unidades al cubo: $(km)^3 = (10^5\ cm)^3$ $\rightarrow$ $km^3 = 10^{15}\ cm^3$ $\rightarrow$ $cm^3 = 10^{-15} km^3$, entonces: $\boldsymbol{8\ cm^3 = 8 \cdot 10^{-15}\ km^3}$.

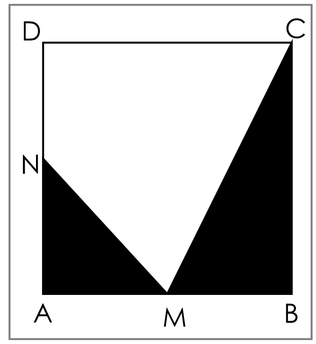
2.- Principales fórmulas

A continuación se presentan las principales fórmulas de los perímetros (P) y áreas (A) de las figuras geométricas más utilizadas en geometría:

Figura Geométrica	Perímetro y Área	Figura Geométrica	Perímetro y Área
Triángulo Cualquiera 	$P = a + b + c$ $A = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$	Rombo 	$P = 4a$ $A = base \cdot altura = a \cdot h$ $A = \frac{diag_1 \cdot diag_2}{2} = \frac{e \cdot f}{2}$
Triángulo Rectángulo 	$P = a + b + c$ $A = \frac{cateto_1 \cdot cateto_2}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$ $A = \frac{base \cdot altura}{2}$	Romboide 	$P = 2a + 2b$ $A = base \cdot altura = a \cdot h$
Triángulo Equilátero 	$P = 3a$ $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $Altura: h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	Trapecio 	$P = a + b + c + d$ $A = \frac{(a + c) \cdot h}{2} = m \cdot h$ $mediana: m = \frac{a + c}{2}$
Cuadrado 	$P = 4a$ $A = a^2 = \frac{d^2}{2}$ $Diagonal: d = a\sqrt{2}$	Circunferencia y Círculo 	$P = 2\pi \cdot r$ $A = \pi \cdot r^2$
Rectángulo 	$P = 2a + 2b$ $A = a \cdot b$	Sector Circular 	$P = 2r + \widehat{AB}$ $A = \pi \cdot r^2 \left(\frac{\alpha}{360°}\right)$ $Arco: \widehat{AB} = 2\pi \cdot r \left(\frac{\alpha}{360°}\right)$

3.- Problemas de aplicación

Ejemplo 2 En el cuadrado $ABCD$ M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. ¿En qué razón se encuentran el área de la superficie sombreada y el área del cuadrado?

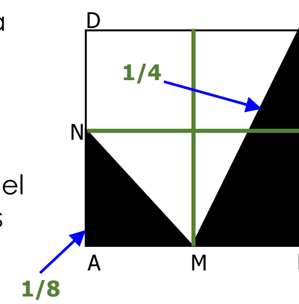


Solución: Si designamos por x al lado del cuadrado, entonces:

$$\overline{AN} = \overline{AM} = \overline{MB} = x/2 \text{ y } \overline{BC} = x$$

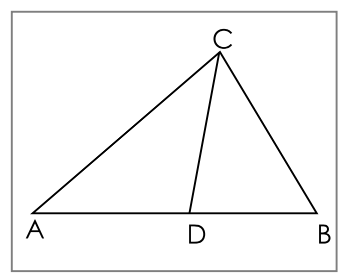
- Luego, el área achurada es: $\text{área}(\Delta AMN + \Delta MBC) = \dfrac{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{2} + \dfrac{\frac{x}{2}\cdot x}{2} = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^2}{4} = \boldsymbol{\dfrac{3x^2}{8}}$
- Mientras que el área total es el área del cuadrado $ABCD = \boldsymbol{x^2}$
- Por lo tanto, la razón entre el área achurada y la del cuadrado es: $\dfrac{\frac{3x^2}{8}}{x^2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$ (no depende de x)

- Otro método más rápido para dar solución al problema, consiste en dividir la figura en áreas en las que se conozca con facilidad la fracción del total que representan. En este caso, podemos dividir el cuadrado $ABCD$ en 4 "cuadraditos", representando cada uno de éstos la cuarta parte $(1/4)$ del cuadrado total. Entonces:



El área del ΔAMN corresponde a la mitad del área de un "cuadradito", o sea a $1/8$ del total. Mientras que el área del ΔMBC corresponde a la mitad de 2 ''cuadraditos'', es decir a un "cuadradito", que equivale a $1/4$ del total. Por lo tanto, ambas zonas representan: $1/8 + 1/4 = \boldsymbol{3/8}$ del total.

Ejemplo 3 En el triángulo ABC, $\overline{AB} = 10$ y $\overline{DB} = 4$, ¿en qué razón están las áreas de los triángulos ADC y ABC?



Solución: Ambos triángulos (ADC y ABC), presentan la misma altura (desconocida), a la cual llamaremos $\boldsymbol{h}$. Además: $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{DB} = 6$, entonces las áreas de los triángulos son:

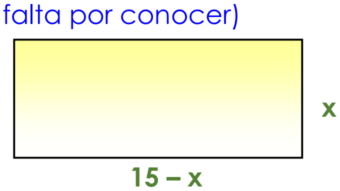
- Área $(\Delta ADC) = \dfrac{6\cdot h}{2} = \boldsymbol{3h}$ y área $(\Delta ABC) = \dfrac{10\cdot h}{2} = \boldsymbol{5h}$
- Luego, la razón entre las áreas de los triángulos ADC y ABC es: $\dfrac{3h}{5h} = \boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$ (no depende de h)

Ejemplo 4 Un trozo de alambre de 30 cm. de largo se dobla de tal manera, que se forma un rectángulo. Si una de sus dimensiones es x cm, ¿cuál es su área, en términos de x?

Solución: El perímetro de un rectángulo está dado por $P = 2a + 2b$, donde a y b son los lados del rectángulo.
- Reemplazamos los valores conocidos: $30 = 2x + 2b$ (donde b es el lado que nos falta por conocer)
- Despejamos b en términos de x:

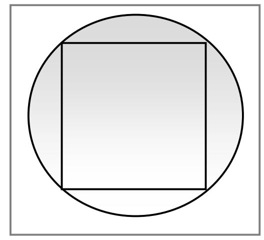
$$b = (30 - 2x)/2 \;\rightarrow\; b = 15 - x$$

- Por lo tanto, el rectángulo es tal como se indica en la figura derecha:



- Finalmente, el área es: $\boldsymbol{A} = a \cdot b = \boldsymbol{x \cdot (15 - x)}$

Ejemplo 5 El cuadrado inscrito en la circunferencia tiene área $= 18$. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?



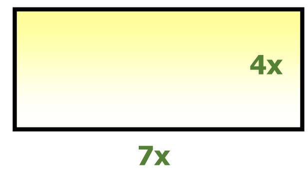
Solución: El diámetro de la circunferencia corresponde a la diagonal del cuadrado(d).

- Además, el área de un cuadrado se puede escribir en términos de su diagonal como: $A = d^2/2 \;\rightarrow$ reemplazando: $18 = d^2/2 \;\rightarrow\; 36 = d^2 \;\rightarrow\; \boldsymbol{d = 6}$, luego la diagonal mide 6, así como el diámetro de la circunferencia.

- Entonces, el perímetro (o longitud) de la circunferencia viene dado por $P = 2\pi \cdot r \; = \pi \cdot d \; = \boldsymbol{6\pi}$

Ejemplo 6 Los lados de un rectángulo están en la razón de $4 : 7$. Si su área es $252cm^2$, ¿cuál es su perímetro?

Solución: Si los lados del rectángulo están en la razón $4{:}7$, entonces podemos designarlos como $4x$ y $7x$, tal como se presenta en la siguiente figura:



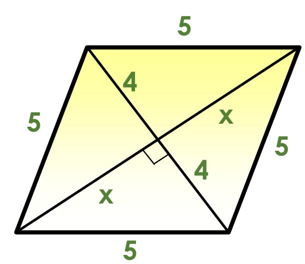
- Ahora, aplicamos la fórmula del área de esta figura para encontrar el valor de x:
$A = 4x \cdot 7x \;\rightarrow A \;=\; 28x^2 =\; 252\ cm^2 \;\rightarrow\; x^2 = 9\ cm^2 \;\rightarrow\; x \;=\; 3\ cm.$
- Por lo tanto, los lados del rectángulo miden: $4 \cdot 3\ cm = \mathbf{12\ cm}$ y $7 \cdot 3\ cm = \mathbf{21\ cm}$.

- Finalmente, el perímetro del rectángulo es: $P = 2 \cdot 12\ cm + 2 \cdot 21\ cm \;\rightarrow\; \boldsymbol{P = 66\ cm}$

Ejemplo 7 Si el perímetro de un rombo es de $20\ cm$ y una de sus diagonales mide $8\ cm$, ¿cuál es su área?

Solución: Si el perímetro del rombo es $20\ cm$, entonces cada lado mide $20/4 \;=\; 5\ cm$.

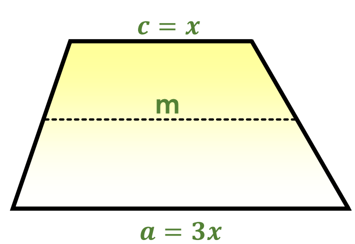
- Además, las diagonales de un rombo se intersectan perpendicularmente en sus puntos medios, por lo que es factible aplicar el teorema de Pitágoras en uno de los cuatro triángulos formados por sus diagonales, tal como se observa en la figura:
- Entonces: $x^2 + 4^2 \;=\; 5^2 \;\rightarrow\; x^2 \;=\; 9 \;\rightarrow\; x \;=\; 3 \;\rightarrow$ la otra diagonal mide: $2x = 6\ cm$



Finalmente, el área del rombo se puede calcular de dos formas:
- 4 veces el área de cada triángulo: $A = 4 \cdot (3 \cdot 4)/2 = \mathbf{24\ cm^2}$
- el semi-producto de sus diagonales: $A = (8 \cdot 6)/2 = \mathbf{24\ cm^2}$

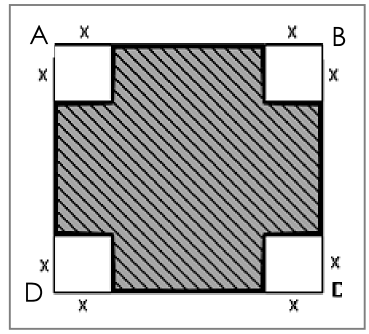
Ejemplo 8 La mediana de un trapecio mide $20\ cm$. Si una de las bases es el triple de la otra, ¿cuánto mide la base mayor?

Solución: Si una base es el triple de la otra, entonces podemos designarlas como x y $3x$. Además, la mediana de un trapecio corresponde siempre al promedio entre las bases. Es decir, según la figura:

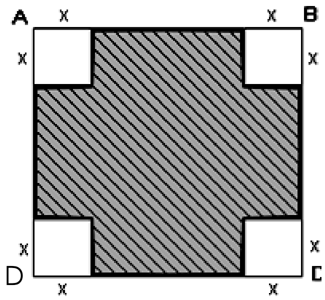


$m = \frac{a+c}{2} \;\rightarrow$ reemplazando valores: $20\ cm = \frac{3x+x}{2} \;\rightarrow\; x = 10\ cm$
$\rightarrow$ la base mayor mide $\mathbf{3x = 30\ cm}$

Ejemplo 9 El cuadrado $ABCD$, de lado 8, tiene en sus esquinas cuatro cuadrados de lado x cada uno. ¿Cuál es el área achurada? ¿Cuál es el perímetro de la zona achurada?



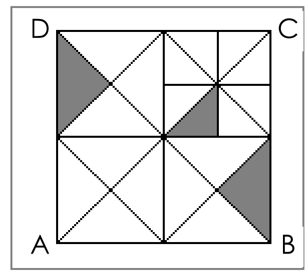
Solución: Área total $= Area\ cuadrado\ ABCD - 4 \cdot Area\ \text{“}Cuadraditos\text{”}\ lado\ x$



Área total $= 8^2 - 4 \cdot x^2 \rightarrow Area\ total = \mathbf{64 - 4x^2}$

- Perímetro: notar que si bien el área buscada es menor que el área del cuadrado $ABCD$, el perímetro es exactamente igual, ya que la porción que se le descuenta al cuadrado $ABCD$ es la misma que se gana con los cuadraditos de lado x. Entonces: $\boldsymbol{P} = 8 \cdot 4 = \mathbf{32}$

Ejemplo 10 El cuadrado ABCD de la figura, tiene un perímetro de $32\ cm$ y está formado por 4 cuadrados congruentes subdividos a su vez en triángulos semejantes. ¿Cuál es el área de la superficie sombreada?



Solución: Lo primero es notar que si el perímetro del cuadrado $ABCD$ es $32cm$, sus lados miden $32/4 = 8\ cm$, por lo que su área es $A = (8\ cm)^2 = 64\ cm^2$

- El cuadrado $ABCD$, está dividido en 4 partes y a su vez cada una de estas 4 partes se divide en 4 partes más, dando lugar a los triángulos achurados de vértice D y vértice B. Entonces, cada uno de estos triángulos representan: $1/4$ de $1/4$ del cuadrado $ABCD = 1/4 \cdot 1/4 \cdot 64\ cm^2 = 4\ cm^2$ cada triángulo.

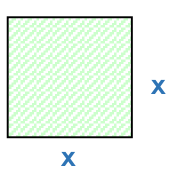
- Si uno de estos triángulos se divide en dos partes da lugar al triángulo achurado menor, por lo que este último triángulo tiene un área de $4\ cm^2/2 = \mathbf{2\ cm^2}$

- Entonces, el área achurada total es: $4\ cm^2 + 4\ cm^2 + 2\ cm^2 \rightarrow \boldsymbol{A} = \mathbf{10\ cm^2}$

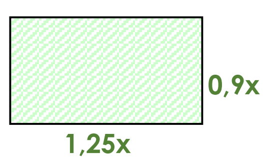
Ejemplo 11 En un cuadrado, un lado aumenta en 25% y el otro disminuye en un 10%, formándose un rectángulo. ¿Cómo varía su área? ¿Cómo varía su perímetro?

Solución: En este tipo de problemas, es conveniente realizar los cálculos para la situación inicial y luego para la situación modificada, pudiendo así visualizar de mejor manera los cambios. Partamos designando por x al lado del cuadrado inicial.

Caso inicial

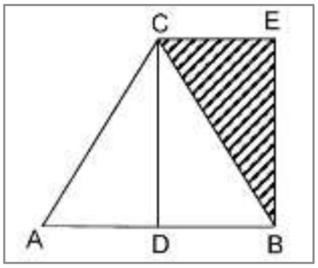


Caso final



Observaciones:
- Si x aumenta en un 25%, resulta el 125% de x que equivale a **1,25x.**
- Si x disminuye en un 10%, resulta el 90% de x que equivale a **0,9x.**
- Para obtener qué porcentaje representa **4,3** de **4**, dividimos: **4,3/4** y el resultado lo multiplicamos por 100.

	Caso Inicial	Caso Final	Variación
Área	x^2	$1{,}25x \cdot 0{,}9x = \mathbf{1,125\ x^2}$	Aumento de **12,5%**
Perímetro	$4x$	$2 \cdot 1{,}25x + 2 \cdot 0{,}9x = \mathbf{4,3\ x}$	Aumento de **7,5%**



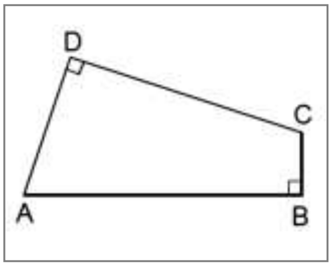
Ejemplo 12 ABC es un triángulo equilátero de $18\ cm$ de perímetro y $DBEC$ es un rectángulo. ¿Cuál es el valor del área achurada?

<u>Solución</u>: Si ABC es un triángulo equilátero de $18\ cm$, entonces:

- Sus lados miden $a = 6\ cm$
- Su altura mide $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ cm$

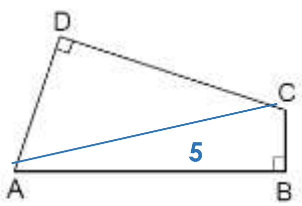
La superficie achurada corresponde a un triángulo rectángulo de catetos: $3\ cm$ y $3\sqrt{3}\ cm$, por lo que su área es:

$$A = \frac{3\ cm\ \cdot 3\sqrt{3}\ cm}{2} \rightarrow \boldsymbol{A = 4,5\sqrt{3}\ cm^2}$$



Ejemplo 13 $\overline{AD} = 3$, $\overline{DC} = 4$ y $\overline{CB} = 1$. ¿Cuánto vale el área del cuadrilátero $ABCD$?

<u>Solución</u>: El primer paso es colocar los datos en la figura.



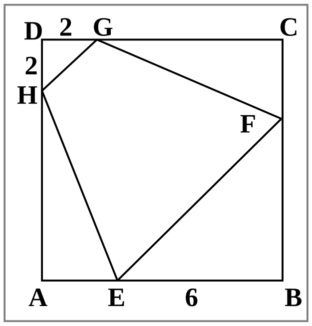
- El área total se puede obtener a partir de la suma de las áreas de los triángulos rectángulos ACD y ABC. El dato que falta es el cateto $\overline{AB}$. Previo a obtener su valor, es preciso calcular $\overline{AC}$, usando el teorema de Pitágoras en el triángulo ACD:

$$3^2 + 4^2 = \overline{AC}^2 \rightarrow \overline{AC} = 5$$

- Ahora calculamos $\overline{AB}$ usando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC:

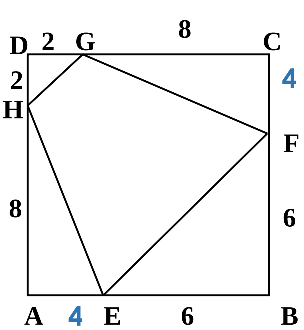
$$\overline{AB}^2 + 1^2 = 5^2 \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Finalmente: área buscada = área ΔACD + área $\Delta ABC = \frac{3\cdot 4}{2} + \frac{2\sqrt{6}\cdot 1}{2} = \boldsymbol{6 + \sqrt{6}}$



Ejemplo 14 $ABCD$ es cuadrado de lado 10 y $EFGH$ es trapecio isósceles. Entonces, ¿cuál es el área del trapecio?

<u>Solución</u>: El área buscada corresponde al área del cuadrado ABCD, menos el área de los 4 triángulos rectángulos:



Área= $A(cuad) - A(\Delta DGH) - A(\Delta AEH) - A(\Delta CFG) - A(\Delta BEF)$

Área= $100 - \frac{2\cdot 2}{2} - \frac{8\cdot 4}{2} - \frac{8\cdot 4}{2} - \frac{6\cdot 6}{2}$

Área= $100 - 2 - 16 - 16 - 18$

Área $= \boldsymbol{48}$

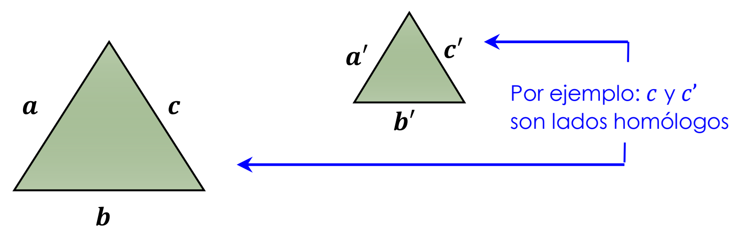
V.- SEMEJANZA

1.- Conceptos básicos

1.1. Definición: Dos polígonos del mismo número de lados son semejantes si y sólo si tienen la **"misma forma"**, es decir, si sus **ángulos son iguales** y sus **lados son proporcionales**.

1.2. Semejanza de triángulos

El concepto anterior puede aplicarse a dos triángulos semejantes ($\boldsymbol{\Delta abc \sim \Delta a'b'c'}$), cuando la razón entre sus lados homólogos (o correspondientes) es constante y los ángulos homólogos son iguales.

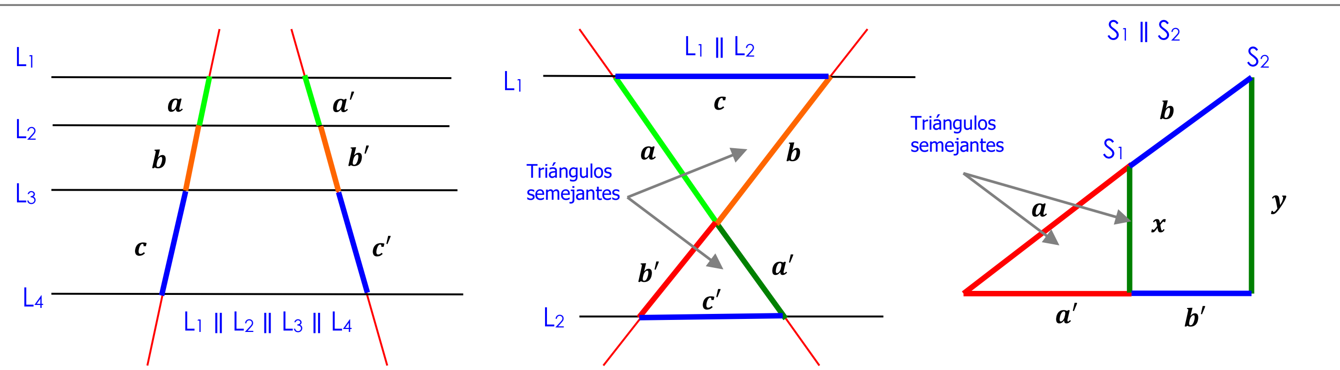


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K = \textbf{Razón de semejanza}$$

- **Primer criterio de semejanza: ángulo-ángulo (AA):** dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos respectivamente iguales.
- **Segundo criterio de semejanza: lado-ángulo-lado (LAL):** dos triángulos son semejantes si dos de sus lados son proporcionales respectivamente y congruente el ángulo que forman.
- **Tercer criterio de semejanza: lado-lado-lado (LLL):** dos triángulos son semejantes si sus tres lados son respectivamente proporcionales.

2.- Teorema de Thales

Cuando dos rectas secantes son cortadas por una serie de rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra recta.

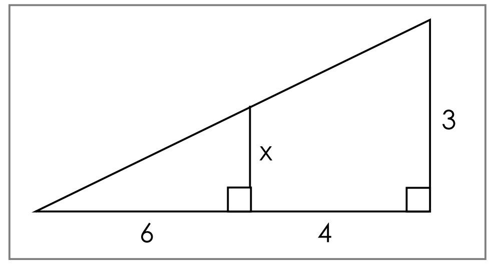


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{a'}{a'+b'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{a+b}{y} \qquad \frac{a'}{x} = \frac{a'+b'}{y}$$

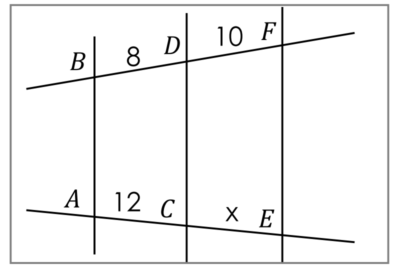
Ejemplo 1 ¿Cuál es el valor de x en la siguiente figura?



Solución: Aplicamos el caso 3 del teorema anterior:

$$\frac{6}{x}=\frac{6+4}{3} \rightarrow x=\frac{6\cdot 3}{10} \rightarrow \boldsymbol{x=1,8}$$

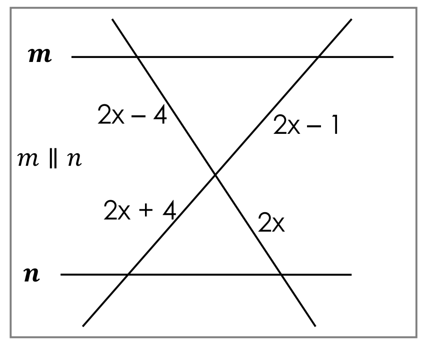
Ejemplo 2 En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$. ¿Cuál es el valor de x?



Solución: Aplicamos el punto 1 del teorema de Thales:

$$\frac{12}{8}=\frac{x}{10} \rightarrow x=\frac{12\cdot 10}{8} \rightarrow \boldsymbol{x=15}$$

Ejemplo 3 Calcular el valor de cada segmento en la siguiente figura:



Solución: Aplicamos el punto 2 del teorema de Thales:

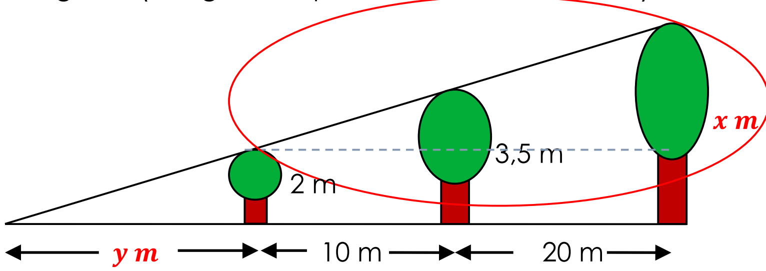
$$\frac{2x-4}{2x}=\frac{2x-1}{2x+4} \rightarrow (2x+4)(2x-4)=2x(2x-1)$$

$$\rightarrow 4x^2-16=4x^2-2x \rightarrow \boldsymbol{x=8}$$

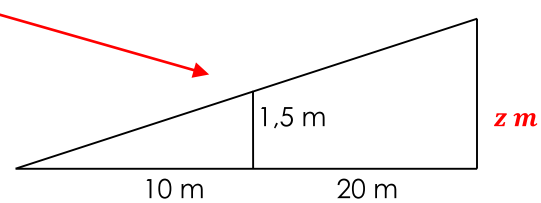
Entonces los lados miden: $2x-4=\mathbf{12}$; $2x=\mathbf{16}$; $2x-1=\mathbf{15}$; $2x+4=\mathbf{20}$

Ejemplo 4 Tres árboles se encuentran alineados y a la vez son colineales sus puntos más altos. El más pequeño mide 2 metros, el mediano mide 3,5 metros. Si la distancia entre los dos primeros árboles es de 10 metros y entre el mediano y el más alto es 20 metros, ¿cuánto mide el árbol más alto?

Solución: El primer paso es realizar un esquema de la situación, para luego ubicar los datos y asignar las incógnitas (designamos por x a la altura buscada).

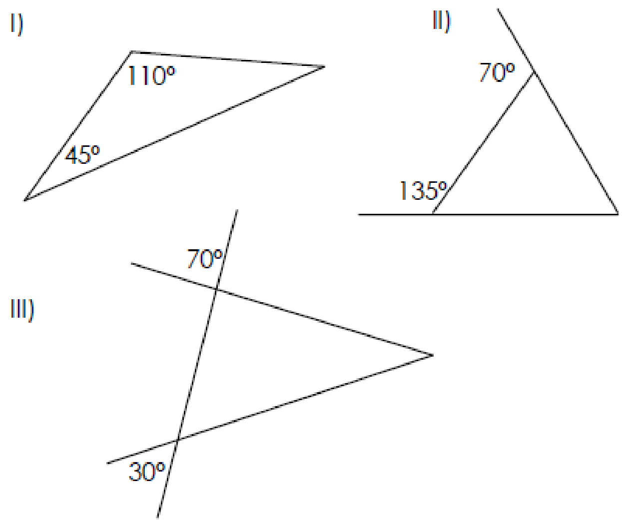


Podemos abordar este problema de diferentes formas; la más sencilla es fijarse en el cambio de altura entre los árboles, respecto de la distancia entre ellos:



Podemos obtener $\boldsymbol{z}$ aplicando: $\frac{10}{1,5}=\frac{10+20}{z} \rightarrow z=\frac{30\cdot 1,5}{10} \rightarrow \boldsymbol{z=4,5\,m}$, pero: $x=2+z \rightarrow \boldsymbol{x=6,5\,m}$

Ejemplo 5 Cuáles de los siguientes triángulos son semejantes:



Solución: en base a los datos que se entregan, el único criterio de semejanza que podemos usar, es el A-A:

- Triángulo I: sus ángulos interiores miden 110º, 45º y 25º.

- Triángulo II: sus ángulos interiores miden 110º, 45º y 25º.

- Triángulo III: sus ángulos interiores miden 70º, 30º y 80º.

En base a lo anterior, es claro que **son semejantes los triángulos I) y II)**.

3.- Relación entre razón de semejanza, perímetro y área

- La razón entre los perímetros (y elementos secundarios) de dos polígonos semejantes está dado por $\boldsymbol{K}$.
- Mientras que La razón entre las áreas de 2 polígonos semejantes está dado por $\boldsymbol{K}^2$.
- Por ejemplo, si en un triángulo los **lados aumentan al triple**, su **perímetro** y **elementos secundarios** (alturas, transversales, etc.) también aumentarán al **triple**. Mientras que el **área** aumenta 3^2 = **9 veces**.

Ejemplo 6 El área de un triángulo equilátero es el doble del área de otro triángulo equilátero. Si el lado del triángulo menor mide 15, ¿cuál es el lado del triángulo mayor?

Solución: Para resolver este problema, tenemos que encontrar primero $\boldsymbol{K}$ (razón de semejanza entre los lados de ambos triángulos), usando como dato el hecho de que la razón entre las áreas es 2 : 1 (área triángulo mayor : área triángulo menor).
Si $\boldsymbol{K}$ es la razón de semejanza, entonces las áreas están en la razón $\boldsymbol{K^2}$. Por lo tanto:

$$K^2 = \frac{2}{1} \rightarrow K = \frac{\sqrt{2}}{1} \quad \text{pero } K = \frac{lado\ mayor}{lado\ menor} = \frac{x}{15} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{x}{15} \rightarrow \boldsymbol{x = 15\sqrt{2}} \quad \text{(lado triángulo mayor)}$$

Ejemplo 7 Las áreas de dos círculos son entre sí como 48 : 75. ¿Cuál es la razón entre sus radios?

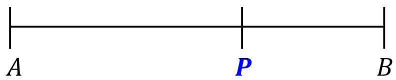
Solución: Se procede de similar manera que en el ejercicio anterior, sólo que en este caso $\boldsymbol{K}$ representa la razón entre los radios (en este caso $\boldsymbol{K}$ indica radio circunferencia menor : radio circunferencia mayor). Entonces:

$$K^2 = \frac{48}{75} \text{ simplificamos} \rightarrow K^2 = \frac{16}{25} \rightarrow K = \frac{4}{5} \text{ entonces los radios están en la razón: } \boldsymbol{\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{5}}$$

4.- División de un segmento

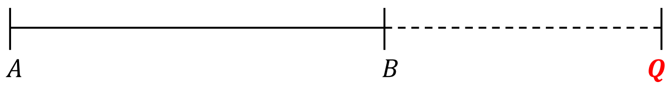
4.1. En una razón determinada $(m : n)$

- División **interior:**



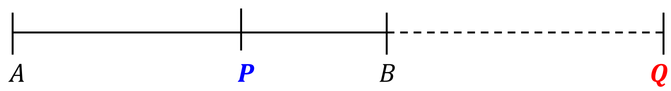
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n}$$

- División **exterior:**



$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = \frac{m}{n}$$

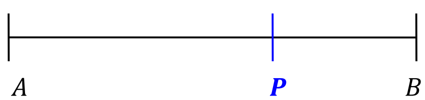
- División **armónica:**



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = \frac{m}{n}$$

4.2. Razón áurea o divina

Dividir un segmento en razón áurea o divina, es encontrar un punto $\boldsymbol{P}$ en su interior, tal que la razón entre el segmento total y el segmento mayor es similar a la razón entre el segmento mayor y el segmento menor.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

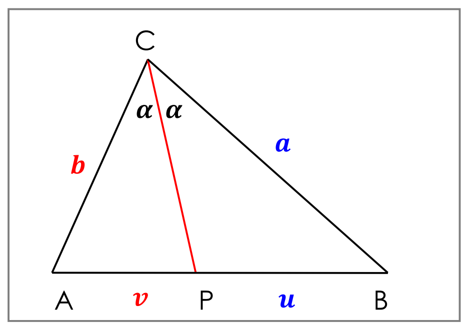
A la razón $\overline{AB} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PB}$ se le conoce como **número áureo** o **número de oro** y se representa por la letra griega "phi".

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618 \ldots}$$

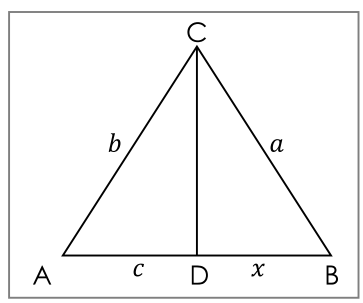
5.- Teorema de la bisectriz interior

En un triángulo, la bisectriz interior divide interiormente al lado opuesto en dos segmentos que están en la misma razón que están los lados que forman el ángulo.

$$\boldsymbol{\frac{a}{u} = \frac{b}{v}}$$



Ejemplo 8 ¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{x}$, si $a = 5,\ b = 10,\ c = 12$ y $\overline{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB?



Solución: A partir del teorema de la bisectriz interior: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{x} \ \rightarrow \ x = \dfrac{ac}{b}$

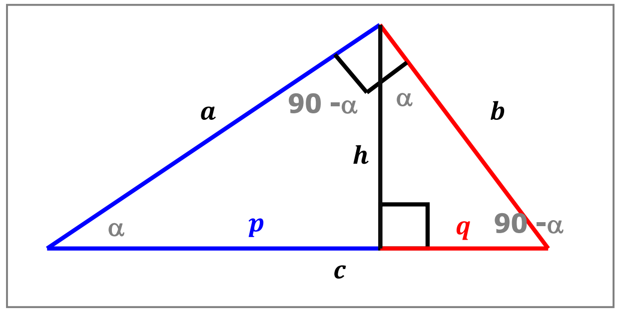
$$\rightarrow \ x = \frac{5 \cdot 12}{10} \ \rightarrow \ \boldsymbol{x = 6}$$

6.- Teorema de Euclides

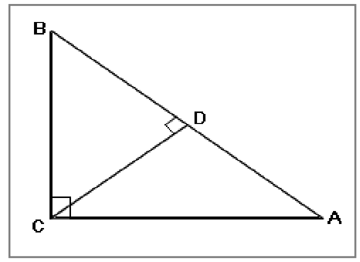
Al trazar la altura desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se forman dos nuevos triángulos que son semejantes entre sí, y a la vez son semejantes al triángulo rectángulo original.

En la práctica, el teorema de Euclides se reduce básicamente a la aplicación de cuatro fórmulas:

$\boxed{h^2 = p \cdot q}$ $\boxed{a^2 = c \cdot p}$ $\boxed{b^2 = c \cdot q}$ $\boxed{h = \frac{a \cdot b}{c}}$



Ejemplo 9 El triángulo ABC es rectángulo en C. $\overline{AD} = 9$ y $\overline{DB} = 4$ ¿Cuánto miden $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$?

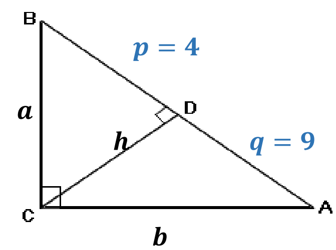


<u>Solución</u>: Aplicamos el teorema de Euclides, para lo cual asignamos las variables según la nomenclatura conocida y luego aplicamos las fórmulas.

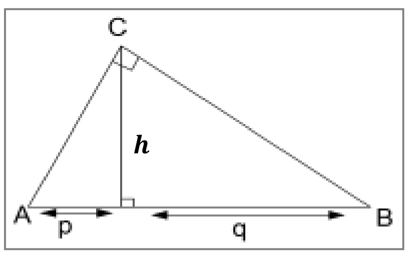
- $\overline{CD} = \boldsymbol{h}$ se calcula en forma inmediata a partir de: $h^2 = p \cdot q$
  $\rightarrow\ CD^2 = 4 \cdot 9 = 36\ \rightarrow \boldsymbol{\overline{CD} = 6}$

- $\overline{AC} = \boldsymbol{b}$ se calcular a partir de: $b^2 = c \cdot q \rightarrow \overline{AC}^2 = 13 \cdot 9\ \rightarrow \boldsymbol{\overline{AC} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}}$

- $\overline{BC} = \boldsymbol{a}$ se calcular a partir de: $a^2 = c \cdot p \rightarrow \overline{BC}^2 = 13 \cdot 4\ \rightarrow \boldsymbol{\overline{BC} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}}$



Ejemplo 10 El triángulo ABC rectángulo en C. ¿Cuánto miden p y q, respectivamente, si $\overline{AB} = 10$ y $h = 2\sqrt{2}$, con $p < q$?



<u>Solución</u>: Dado que: $c = 10\ \rightarrow\ p + q = 10\ \rightarrow\ q = 10 - p$ (ec. 1)

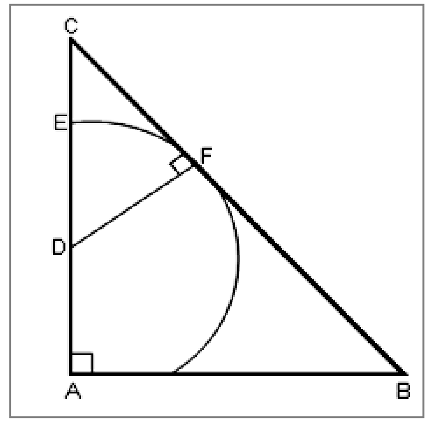
Por otra parte: $h^2 = p \cdot q\ \rightarrow$ reemplazando la (ec. 1) $\rightarrow\ h^2 = p\,(10 - p)\ \rightarrow (2\sqrt{2})^2 = 10p - p^2$
$\rightarrow\ \boldsymbol{p^2 - 10p + 8 = 0}\ \rightarrow$ obtenemos una ecuación de 2° grado que resolvemos con la fórmula general:

$$\left\{\begin{array}{l} \rightarrow\ p_1 = \dfrac{10+\sqrt{100-32}}{2} = 5 + \dfrac{\sqrt{68}}{2} = \boldsymbol{5+\sqrt{17}} \\[2ex] \rightarrow\ p_2 = \dfrac{10-\sqrt{100-32}}{2} = 5 - \dfrac{\sqrt{68}}{2} = \boldsymbol{5-\sqrt{17}} \end{array}\right. \rightarrow$$

Ambos valores de **p** son válidos, no obstante **p_1 + p_2 =10**, por lo tanto, si tomamos **p=p_1**, → **q=p_2**. Pero dado que en el enunciado se indica que **p<q**, los valores que debemos considerar son:

$$\boldsymbol{p = p_2 = 5 - \sqrt{17}} \qquad \boldsymbol{q = p_1 = 5 + \sqrt{17}}$$

Ejemplo 11 Se tiene el triángulo ABC isósceles rectángulo en A. Sus catetos miden **1**. $\overline{AD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ son radios de la semicircunferencia y $\overline{DF}$ es perpendicular a $\overline{BC}$. ¿Cuánto vale el radio de la semicircunferencia inscrita?



Solución: Para obtener el radio de la semicircunferencia, es preciso calcular o bien $\overline{DE}$ o $\overline{DF}$ o $\overline{AD}$. Dado que el triángulo ABC es isósceles de lado 1, se tiene que: $\overline{AC} = \overline{AB} = 1$ y $\overline{BC} = \sqrt{2}$

Además, podemos aplicar semejanza de triángulos para determinar lo solicitado, ya que $\Delta ABC \sim \Delta CDF$ (ambos tienen los mismos ángulos). Junto con lo anterior, ambos triángulos son rectángulos isósceles.

Por lo tanto, podemos plantear la siguiente proporción: $\dfrac{\overline{DF}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \rightarrow \dfrac{\overline{DF}}{1} = \dfrac{\overline{DC}}{\sqrt{2}}$

Notar que **DF** y **AB** se oponen al ángulo ABC, por lo que son homólogos. Lo mismo ocurre con **DC** y **BC** (se oponen al de 90º).

Pero $\overline{DF} = AD = r$, por lo que $\overline{DC} = 1 - r$, entonces: $\dfrac{r}{1} = \dfrac{1-r}{\sqrt{2}}$ $\rightarrow$ resolviendo: $\sqrt{2}r = 1 - r \rightarrow \sqrt{2}r + r = 1$

r = radio

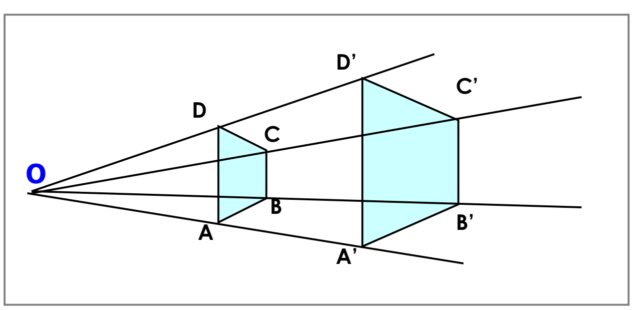
$\rightarrow r(\sqrt{2}+1) = 1 \rightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \rightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \rightarrow \boldsymbol{r = \sqrt{2} - 1}$ (notar que se racionaliza el resultado)

7.- Homotecia

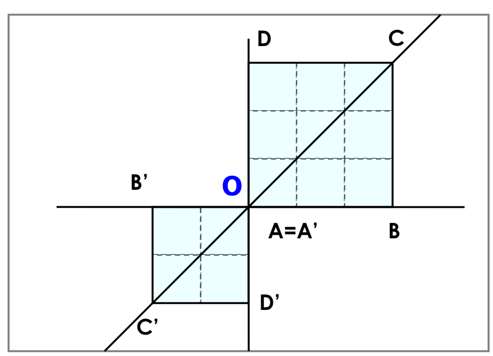
Dado un punto $\boldsymbol{O}$ del plano y un número real $\boldsymbol{k}$ distinto de cero, se llama **homotecia** de centro $\boldsymbol{O}$ y razón $\boldsymbol{k}$, y se designa por $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{k})$ a una transformación geométrica del plano que cumple con:

- La imagen de todo punto $\boldsymbol{P}$ del plano distinto de $\boldsymbol{O}$, es otro punto $\boldsymbol{P'}$ que pertenece a la recta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{OP}}$.
- $\boldsymbol{P'}$ es tal que: $\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \boldsymbol{k}$
- Si $\boldsymbol{k}$ es positivo, $\boldsymbol{P'}$ está sobre la semirrecta $\overline{OP}$; mientras que si $\boldsymbol{k}$ es negativo, $\boldsymbol{P'}$ estará sobre la semirrecta opuesta.

Ejemplo 12 Homotecia sobre ABCD: $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{2})$

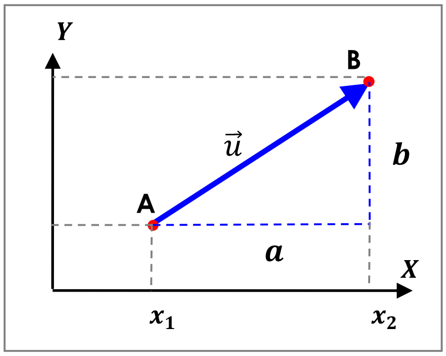


Homotecia sobre ABCD: $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{-2/3})$



VI.- VECTORES

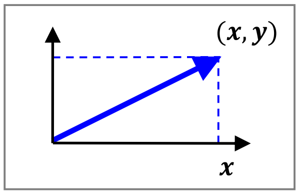
1.- Definición: Un vector es un ente matemático que tiene asociada una magnitud, una dirección y sentido:



- La **magnitud** (o módulo) del vector $\vec{u}$ corresponde a su longitud.
- La **dirección** del vector $\vec{u}$ es la recta que pasa por A y B.
- El **sentido** del vector $\vec{u}$ se define sobre la recta determinada por A y B cuando nos trasladamos de A a B.

Un vector se representa geométricamente por una flecha, y presenta un origen o también llamado punto de aplicación. Analíticamente, el vector $\vec{u}$ se puede escribir como:

$$\boxed{\vec{u} = (a, b) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$



En este caso, a es la componente horizontal y b la componente vertical. Cuando el origen del vector coincide con el origen del sistema de coordenadas, su extremo coincidirá con un punto en el plano (x, y). En ese caso, las componentes horizontal y vertical del vector son x e y directamente.

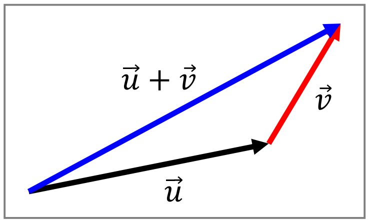
- La **magnitud** de un vector está dada por: $\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$ (teorema de Pitágoras)

Ejemplo 1 Expresar analíticamente y obtener el módulo del vector cuyo origen es $(5, -2)$ y cuyo extremo es $(7, 6)$:

Solución: - Expresión analítica: $\vec{u} = (7 - 5, 6 - -2) \rightarrow \vec{u} = (2, 8)$ - Magnitud: $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 8^2} \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{68}$

2.- Suma de vectores

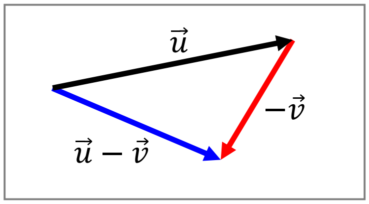
En términos gráficos, para sumar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se debe dibujar primero $\vec{u}$ y luego $\vec{v}$ con su origen en el extremo de $\vec{u}$. El vector resultante tendrá como origen el origen de $\vec{u}$ y como extremo el extremo de $\vec{v}$. Para realizar la suma en forma analítica entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se deben sumar sus componentes respectivas.



$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)}$$

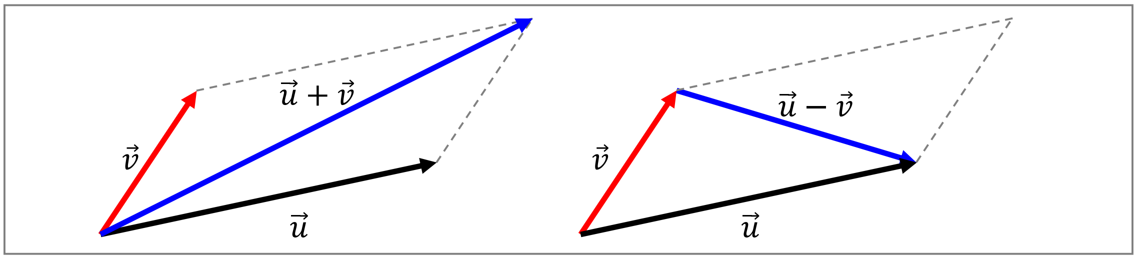
3.- Resta de vectores

Dado que la resta es la operación inversa de la suma, para restar $\vec{u}$ con $\vec{v}$, podemos sumar $\vec{u}$ con $-\vec{v}$. Donde $-\vec{v}$ es un vector con igual magnitud y dirección que $\vec{v}$, pero con sentido opuesto. Analíticamente, se deben restar las componentes.



$$\boxed{\vec{u} - \vec{v} = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)}$$

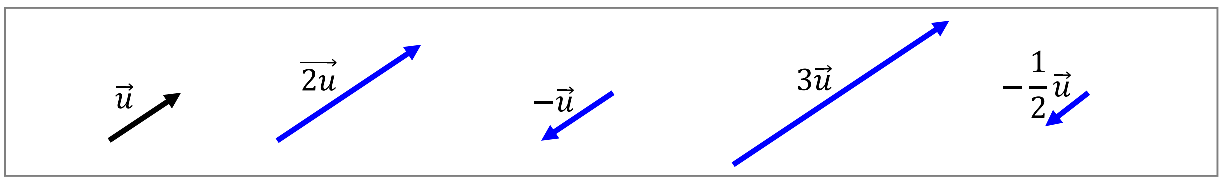
Tanto la adición como la sustracción pueden realizarse en términos gráficos con la regla del paralelogramo.



4.- Multiplicación de un vector por un escalar

Se define al producto de un número real k por un vector $\vec{u}$, y se representa como $k\vec{u}$, al vector que tiene:

- Similar dirección que $\vec{u}$.
- Módulo: $|k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$ (el módulo de un número real corresponde a su valor absoluto)
- Mismo sentido que $\vec{u}$ si k es positivo o sentido contrario que $\vec{u}$ si k es negativo.



En términos analíticos, se tiene lo siguiente: $\boxed{\boldsymbol{k\vec{u} = (ka, kb)}}$

La suma de vectores y el producto de un escalar por un vector cumplen prácticamente con las mismas propiedades que la suma y el producto en $\mathbb{R}$, es decir:

- Asociatividad, conmutatividad y distributividad.
- Elemento neutro aditivo: $\vec{0} = (0,0)$; elemento neutro multiplicativo: 1
- Elemento inverso aditivo: $-\vec{u} = (-a, -b)$

Ejemplo 2 El vector $\vec{v}$ tiene punto inicial (13, -1) y punto final (1, 4). ¿Cuál(es) de las siguientes proposiciones es (son) VERDADERAS(S)?

I) $\vec{v}$ tiene magnitud 13.
II) Su opuesto $-\vec{v}$ tiene magnitud -13.
III) El vector $\vec{u}$ tiene punto inicial (-2, 7) y punto final (3, -5), por lo tanto $\vec{u} = \vec{v}$

Solución: Revisemos cada una de las aseveraciones

I) Su magnitud se calcula a partir del teorema de Pitágoras, y para eso primero obtengamos el Vector: $\vec{v} = (1-13,\ 4--1) = (-12, 5)$, entonces:
$|\vec{u}| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$ **Luego I) es verdadera**

II) El vector opuesto tiene la misma magnitud, pero diferente sentido, **Luego II) es falsa.** Importante mencionar que las magnitudes son siempre mayores o iguales a cero (nunca negativas).

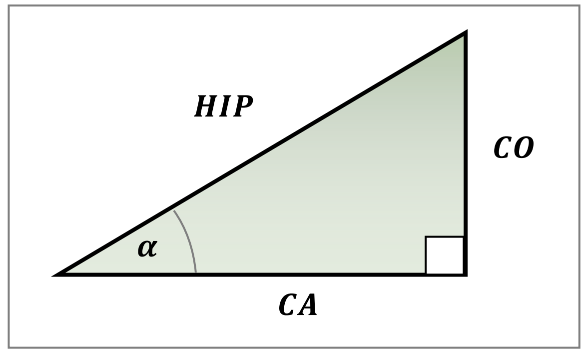
III)El vector $\vec{u} = (3--2, -5-7) = (5, -12)$, distinto de (-12, 5), **luego III) es Falsa.**

VII.- TRIGONOMETRÍA

1.- Razones trigonométricas

En un triángulo rectángulo se definen las siguientes seis razones, denominadas razones trigonométricas:

Razón Principal	Razón Recíproca
$\boldsymbol{sen(\alpha)} = \frac{CO}{HIP}$	$\boldsymbol{cosec(\alpha)} = \frac{HIP}{CO}$
$\boldsymbol{cos(\alpha)} = \frac{CA}{HIP}$	$\boldsymbol{sec(\alpha)} = \frac{HIP}{CA}$
$\boldsymbol{tan(\alpha)} = \frac{CO}{CA}$	$\boldsymbol{cot(\alpha)} = \frac{CA}{CO}$



Donde: CO = cateto opuesto; CA = cateto adyacente; HIP = hipotenusa

Observaciones:

- razón recíproca = 1/ razón principal
- $-1 \leq sen(\alpha) \leq 1$; $\ -1 \leq cos(\alpha) \leq 1$
- $sen = seno$; $cos = coseno$; $tan = tangente$; $cosec = cosecante$; $sec = secante$; $cot = cotangente$

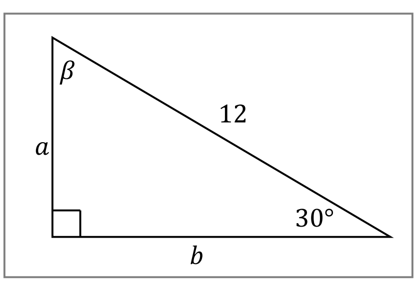
2.- Identidades trigonométricas básicas

Si bien, existen muchas identidades trigonométricas, las dos más utilizadas son las siguientes:

$$\boldsymbol{tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}}$$

$$\boldsymbol{sen(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2 = 1}$$

Ejemplo 1 Resolver el siguiente triángulo y calcular todas las razones trigonométricas para el ángulo β:



Usamos trigonometría para calcular los lados que faltan:

- $sen(30°) = a/12 \ \rightarrow \ a = 12\ \boldsymbol{sen(30°)} = 12 \cdot \boldsymbol{0,5} \ \rightarrow \ \boldsymbol{a = 6}$
- $cos(30°) = b/12 \ \rightarrow \ b = 12\ \boldsymbol{cos(30°)} = 12 \cdot \boldsymbol{\sqrt{3}/2} \ \rightarrow \ \boldsymbol{b = 6\sqrt{3}}$
- $\beta = 180° - 90° - 30° \ \rightarrow \ \boldsymbol{\beta = 60°}$

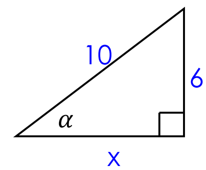
Los valores de sen(30°) y cos(30°) se obtienen a partir de la tabla, del punto 3 de la siguiente página.

Las razones trigonométricas respecto de $\boldsymbol{\beta}$ son:

- $\boldsymbol{sen(\beta)} = b/12 = 6\sqrt{3}/12 = \boldsymbol{\sqrt{3}/2} \ \rightarrow \ \boldsymbol{cosec(\beta)} = 1/sen(\beta) = \boldsymbol{2/\sqrt{3}}$
- $\boldsymbol{cos(\beta)} = a/12 = 6/12 = \boldsymbol{1/2} \ \rightarrow \ \boldsymbol{sec(\beta)} = 1/cos(\beta) = \boldsymbol{2}$
- $\boldsymbol{tan(\beta)} = b/a = 6\sqrt{3}/6 = \boldsymbol{\sqrt{3}} \ \rightarrow \ \boldsymbol{cot(\beta)} = 1/tan(\beta) = \boldsymbol{1/\sqrt{3}}$

Ejemplo 2 Si $sen(\alpha) = 0{,}6$; ¿cuánto vale $tan(\alpha)$?

Dado que la condición anterior es la única que debe cumplir el triángulo, podemos darnos arbitrariamente: $CO = 6$; $HIP = 10$. El cateto adyacente lo podemos obtener a partir del teorema de Pitágoras: $6^2 + x^2 = 10^2$. De donde se desprende que: $CA = 8$.



Entonces: $tan(\alpha) = \frac{CO}{CA} = \frac{6}{8} = \mathbf{0{,}75}$

<u>Observación</u>: cuando solo se entrega una razón trigonométrica y ningún otro dato más, no es posible encontrar exactamente el valor de los lados de un triángulo, pero sí es factible encontrar las demás razones trigonométricas y los ángulos del triángulo.

En general, cada vez que se requiera simplificar una expresión trigonométrica, es conveniente transformar todas las cantidades a **sen** y **cos**.

Ejemplo 3 Simplificar: $$\frac{\boldsymbol{cosec(\beta)cot(\gamma)}}{\boldsymbol{tan(\gamma)sec(\beta)}} = \frac{\frac{1}{sen(\beta)}\cdot\frac{cos(\gamma)}{sen(\gamma)}}{\frac{sen(\gamma)}{cos(\gamma)}\cdot\frac{1}{cos(\beta)}} = \frac{cos(\beta)}{sen(\beta)}\cdot\frac{cos^2(\gamma)}{sen^2(\gamma)} = \boldsymbol{cot(\beta)\cdot cot^2(\gamma)}$$

3.- Seno, coseno y tangente de ángulos notables

Si bien, a partir de una razón trigonométrica es posible calcular las demás razones, se recomienda manejar el seno, el coseno y la tangente de los ángulos más utilizados, a través de la siguiente regla nemotécnica:

Angulo	0°	30°	45°	60°	90°
$\boldsymbol{sen(\alpha)}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\boldsymbol{cos(\alpha)}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\boldsymbol{tan(\alpha)}$	$\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}}$	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{0}}$

4.- Cofunciones

Se denomina cofunción de una función trigonométrica a aquella que lleva el prefijo $\boldsymbol{co}$ delante de la función. Por ejemplo el $coseno$ es cofunción del $seno$. La principal propiedad asociada a las cofunciones es:

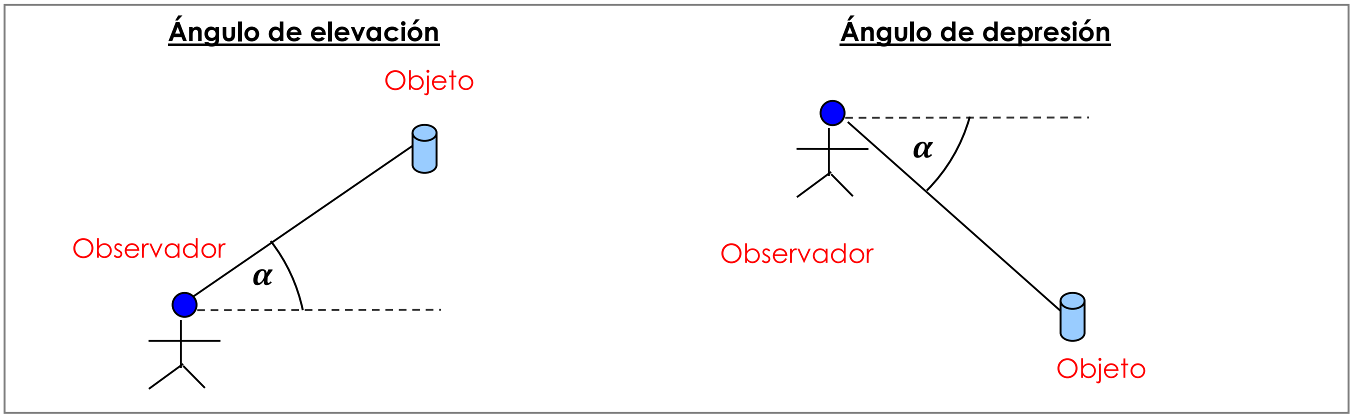
$$\textbf{función}(\alpha) = \textbf{cofunción}(90° - \alpha)$$

Entonces, una función trigonométrica evaluada en un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ tiene un valor similar que su cofunción evaluada en el complemento de $\boldsymbol{\alpha}$. Por ejemplo: $sen(30°) = cos(60°)$; $tan(10°) = cot(80°)$, etc.

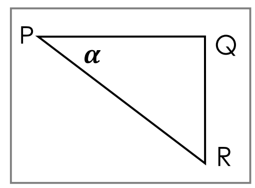
Función	Cofunción
seno	coseno
tangente	cotangente
secante	cosecante

5.- Problemas de aplicación

5.1. Angulos de un objeto respecto de un observador

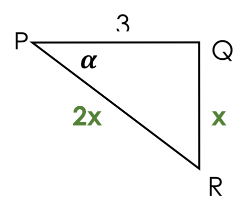


Ejemplo 4 El triángulo de la figura es rectángulo en Q, $\overline{PQ} = 3cm$ y $sen(\alpha) = 1/2$. ¿Cuánto mide $\overline{PR}$?



Solución:

- Si $sen(\alpha) = \frac{1}{2}$, entonces $\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{1}{2} \rightarrow \overline{PR} = 2\overline{QR} \rightarrow$ podemos asignar: $\overline{PR} = 2x$ y $\overline{QR} = x$.



- Usando el teorema de Pitágoras:

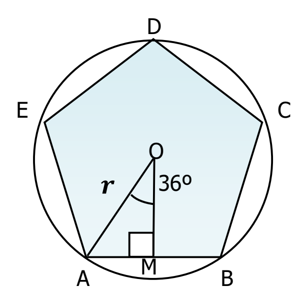
$$\overline{QR}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3^2 = (2x)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 9 = 4x^2 \quad \rightarrow \quad 9 = 3x^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{3}$$

Por lo tanto: $\boldsymbol{\overline{PR} = 2x = 2\sqrt{3}}$

Observación: Cuando se entrega una razón trigonométrica junto con otro dato, por ejemplo un lado del triángulo, es posible encontrar los demás lados del triángulo y sus ángulos.

Ejemplo 5 Calcular el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio r. Expresar el resultado en términos de $sen(36°)$ y el radio (r) de la circunferencia.

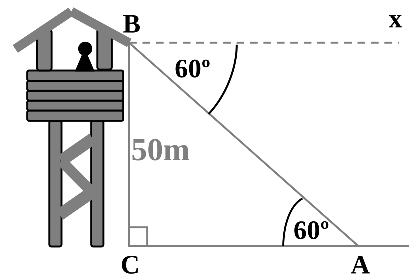
Solución:



- $\overline{AO} = r$, es hipotenusa del triángulo AMO
- $sen(36°) = AM/r$ (son 10 triángulos iguales al ΔAMO, por eso $\measuredangle = 36°$)
- Despejando: $AM = r \cdot sen(36°)$
- Luego el perímetro es: $5 \cdot 2 \cdot AM = 10r \cdot sen(36°)$

5 lados 2 mitades por lado

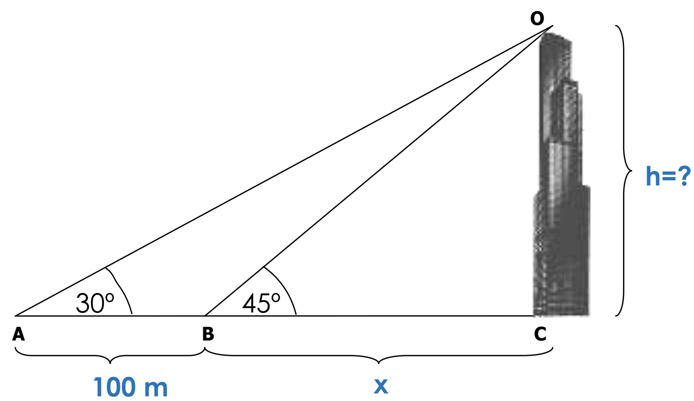
Ejemplo 6 Desde la parte superior de una torre vigía, un guardabosques localiza una fogata ilegal. El ángulo de depresión que forma la línea de visión hacia el campamento y la horizontal, es 60°. Si la torre tiene $50\ m$ de altura, ¿a qué distancia de la base de la torre se encuentra el fuego?



Solución: De la figura, el dato buscado es $\overline{AC}$. Considerando que los ángulos $\measuredangle xBA$ y $\measuredangle CAB$ son congruentes, podemos visualizar para el triángulo rectángulo ABC la siguiente relación trigonométrica:

$$tan(60°) = \frac{50m}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{50m}{tan(60°)} = \frac{\mathbf{50}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \sim \mathbf{29\ m}$$ (distancia al fuego)

Ejemplo 7 Se desea obtener la altura de un edificio. Para realizarlo, nos situamos en un punto A y observamos el punto más alto del edificio con un ángulo de 30° (ángulo de elevación). Posteriormente avanzamos $100\ m$ al punto B y vemos el punto más alto del edificio con un ángulo de 45°. ¿Cuál es la altura del edificio?



Solución: Aplicamos razones trigonométricas sobre los triángulos BCO y ACO, para obtener 2 ecuaciones:

- Triángulo BCO: $tan(45°) = \frac{h}{x} \rightarrow 1 = \frac{h}{x} \rightarrow \boldsymbol{x = h}$
- Triángulo ACO: $tan(30°) = \frac{h}{100+x} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{100+x}$ pero $x = h \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{100+h} \rightarrow 100 + h = \sqrt{3}h$

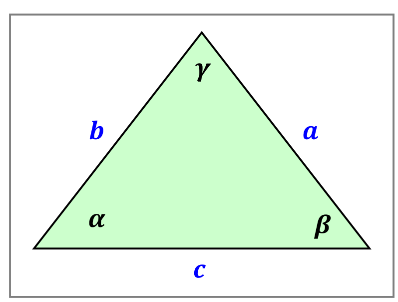
$$\rightarrow 100 = \sqrt{3}h - h \rightarrow 100 = h(\sqrt{3} - 1) \rightarrow h = \frac{100}{\sqrt{3}-1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}}_{\text{racionalizamos}} = \frac{100(\sqrt{3}+1)}{2} = \mathbf{50(\sqrt{3} + 1)\ m} \sim \mathbf{135\ m}$$

Dado lo anterior, el edificio tiene aproximadamente **135 metros de altura**.

6.- Tópicos adicionales

Teorema del Seno: para todo triángulo se tiene que cada lado es proporcional al seno del ángulo opuesto:

$$\boxed{\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}}$$



Teorema del Coseno: corresponde a una extensión del teorema de Pitágoras, aplicable a cualquier triángulo:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha)} \quad \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos(\beta)} \quad \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos(\gamma)}$$

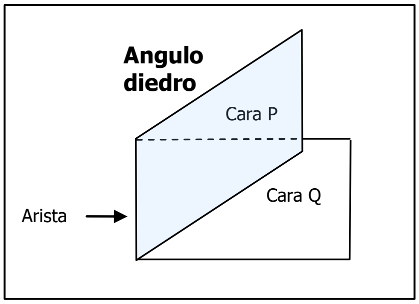
VIII.- GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

1.- Definiciones y conceptos básicos

1.1. Definición: La geometría espacial o geometría del espacio es la rama de la geometría que se ocupa de las propiedades y medidas de las figuras geométricas en el espacio tridimensional o espacio euclídeo. Entre estas figuras, también llamadas sólidos, se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera, el prisma, los poliedros regulares, entre otros.

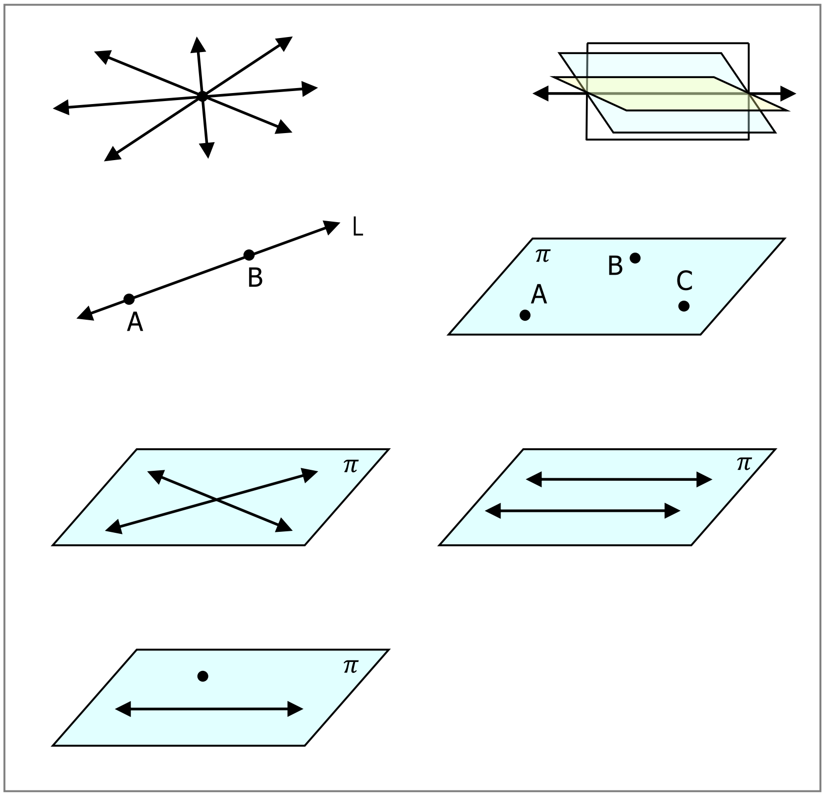
1.2. Conceptos básicos

- **Angulo diedro:** es el que forman dos planos que se cortan.
- **Caras:** son los planos que forman el diedro.
- **Arista:** es la recta que determinan los planos al cortarse.
- **Angulo poliedro:** está formado por varios planos que tienen un mismo vértice (ángulo sólido).



1.3. Postulados de la geometría en el espacio

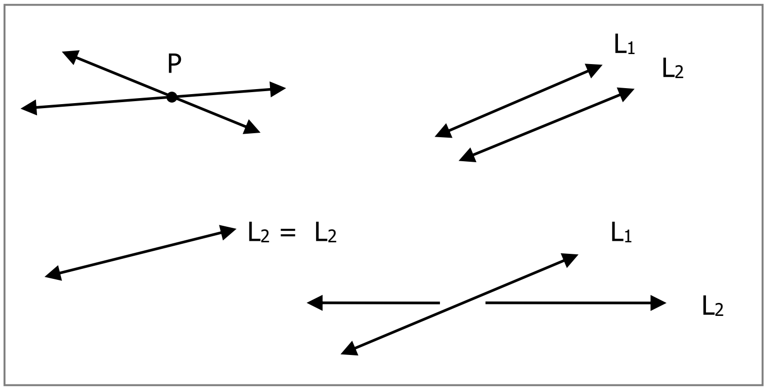
- Postulado de la existencia: existen infinitos puntos, infinitas rectas (L) e infinitos planos (π).
- Por un punto pasan infinitas rectas.
- Por una recta pasan infinitos planos.
- Dos puntos distintos determinan una única recta.
- Tres puntos no colineales determinan un único plano.
- Dos rectas que se cortan en un punto determinan un plano
- Dos rectas paralelas determinan un plano.
- Una recta y un punto exterior a ella, también determinan un plano.



1.4. Posiciones relativas de rectas y planos

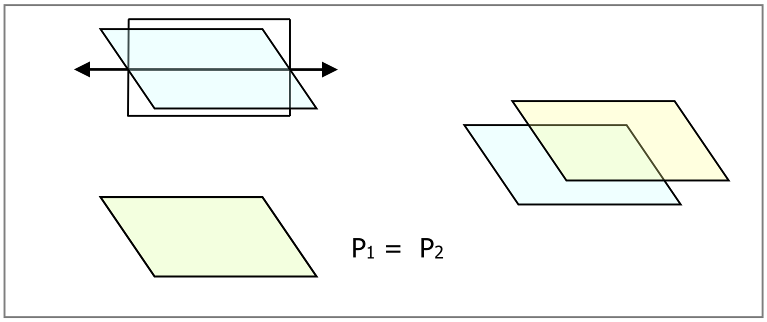
➢ Entre dos rectas en el espacio

- Secantes: se cortan en un punto.
- Paralelas no coincidentes.
- Paralelas coincidentes.
- Alabeadas: no se cortan, ni son paralelas.



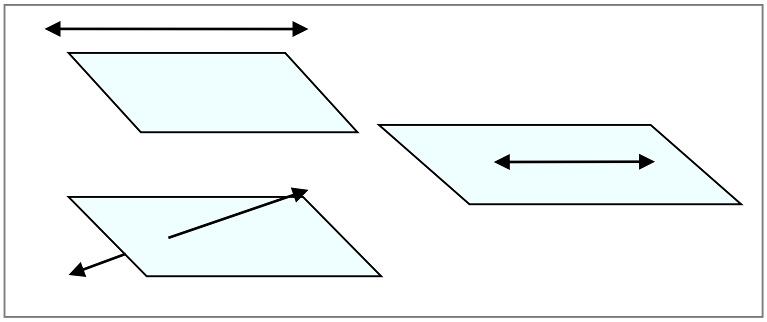
➢ Entre dos planos en el espacio

- Secantes: se cortan en una recta.
- Paralelos no coincidentes.
- Paralelos coincidentes.



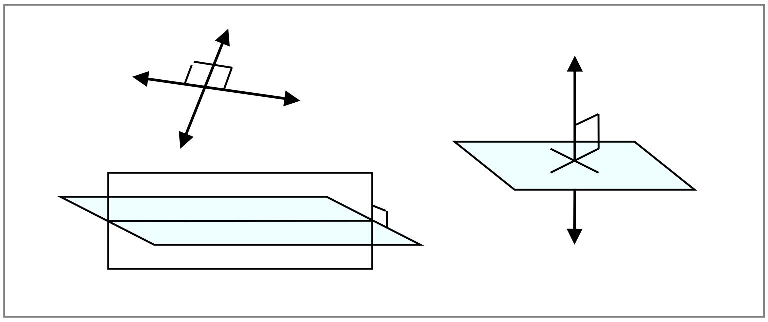
➢ Entre una recta y un plano

- Recta paralela al plano, no contenida en él.
- Recta paralela al plano contenida en él.
- Recta secante al plano.



1.5. Perpendicularidad entre rectas y planos

- Perpendicularidad entre dos rectas.
- Perpendicularidad entre una recta y un plano.
- Perpendicularidad entre dos planos.



2.- Cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos son objetos tridimensionales limitados por una o por varias superficies.

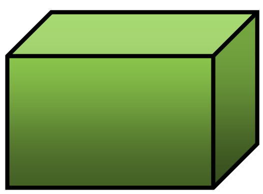
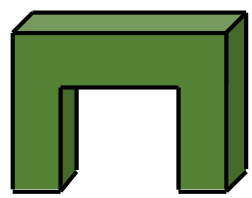
2.1. Tipos de cuerpos geométricos

Dentro de los cuerpos geométricos podemos distinguir 2 grandes grupos: los cuerpos poliedros y los cuerpos redondos.

- **Cuerpos poliedros**: son aquellos que están limitados por superficies planas de contorno poligonal.

  - Los poliedros se dividen en regulares (sus caras son polígonos regulares congruentes entre sí y los ángulos poliedros son iguales) e irregulares.
  - Los poliedros irregulares se clasifican en prismas y pirámides.
  - Los ángulos de los poliedros pueden ser diedros o poliedros. Las diagonales son las rectas que unen dos vértices no situados en una misma cara.
  - En los cuerpos poliedros convexos, se cumple el teorema de Euler:

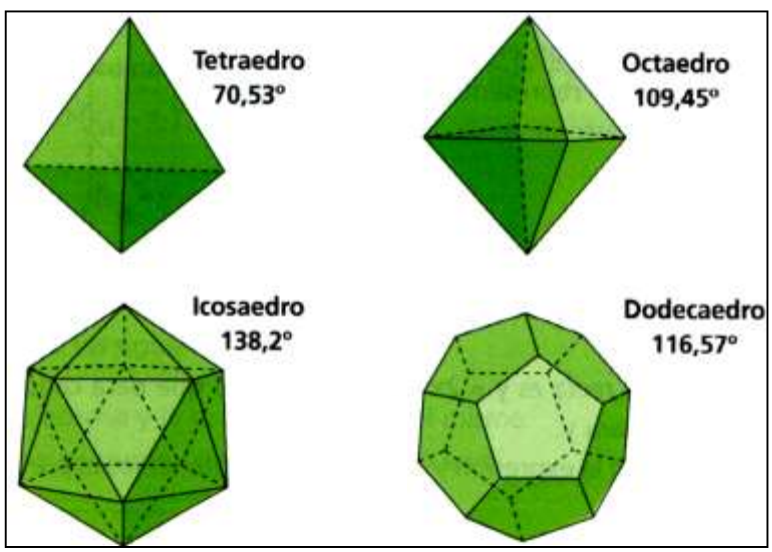
nº de caras + nº de vértices = nº de aristas + 2

Polígono convexo	Polígono cóncavo
	
Todas sus caras se pueden apoyar en el plano	No todas sus caras se pueden apoyar en el plano

En forma más precisa, los poliedros regulares son poliedros convexos con todas sus caras conformadas por polígonos regulares idénticos y con todos sus vértices recibiendo el mismo número de aristas.

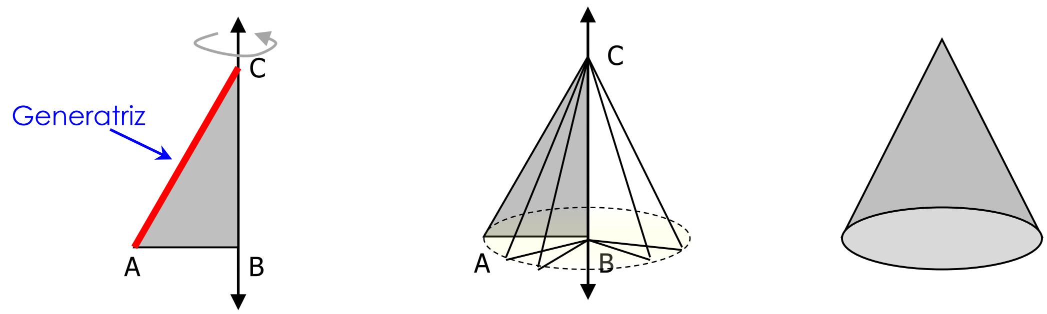
Solo existen 5 tipos de poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro. Esto porque en un vértice pueden coincidir solo 3, 4 o 5 triángulos equiláteros, 3 cuadrados y 3 pentágonos.

La figura de la izquierda presenta los ángulos diedros de 4 poliedros regulares. Sólo falta el cubo u hexaedro regular, cuyo ángulo diedro mide 90°.

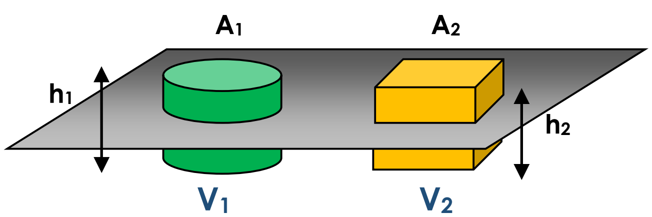


➢ **Cuerpos redondos:** Son aquellos que están limitados por superficies curvas y/o planas.

- Los principales son el cilindro, el cono y la esfera. También se denominan cuerpos en revolución generados por una línea (generatriz) que gira en tono a un eje de revolución.



- Tanto en los cuerpos poliedros, como en algunos redondos, se cumple el principio de Cavalieri, que indica lo siguiente: Si dos cuerpos tienen la misma altura, bases de igual área, y si al cortarlos por cualquier plano paralelo a las bases el área de las secciones es la misma, entonces ambos deben tener igual volumen:



Si $h_1 = h_2$ y $A_1 = A_2$
Entonces:
$\mathbf{V_1 = V_2}$

2.2. Concepto de área y volumen en un cuerpo geométrico

➢ Entendemos por superficie a aquellas formas que caracterizan un cuerpo. Una superficie puede ser plana (prismas, pirámides, etc.) o curva (conos, esferas, etc.). Mientras que el área (A) corresponde a la medida asociada a una superficie. En un cuerpo geométrico, su área corresponde al área de todas las caras.

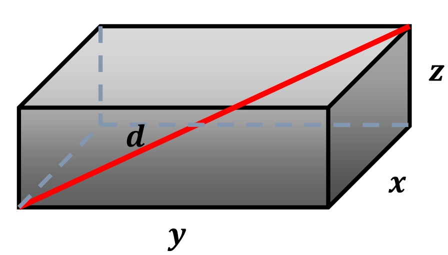
➢ El volumen (V) corresponde al espacio ocupado por un cuerpo y se mide en unidades de longitud al cubo.

2.3. Teorema de Pitágoras en el espacio

El teorema de Pitágoras en el plano puede extrapolarse al espacio, donde la hipotenusa "equivale" a la diagonal del ortoedro formada por sus 3 dimensiones: x, y, z

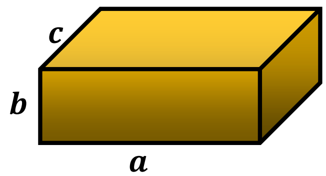
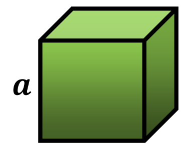
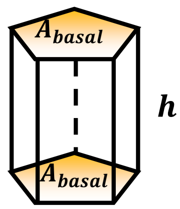
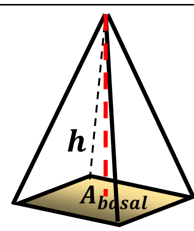
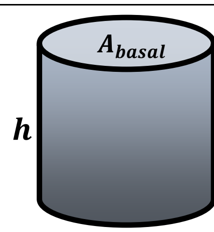
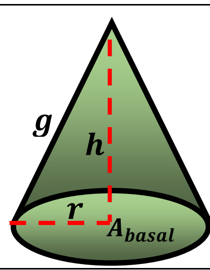
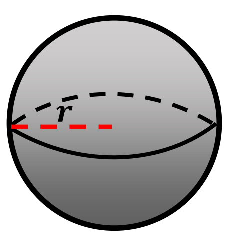
Los catetos del plano "equivalen" a estas 3 dimensiones del ortoedro en el espacio:

$$\boxed{d^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

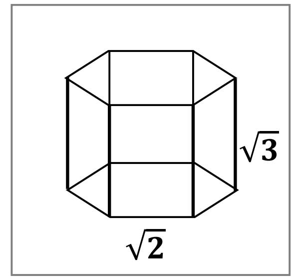


Observación: entendemos por ortoedro a todo poliedro cuyos ángulos diedros son de 90°.

2.4. Volúmenes y áreas de los cuerpos geométricos

Nombre	Figura	Área	Volumen
Paralelepípedo: Ortoedro cuyas bases son Rectángulos.		$A = 2ab + 2ac + 2bc$	$V = abc$
Cubo o Hexaedro: Ortoedro que presenta las tres dimensiones iguales		$A = 6a^2$ diagonal: $d = a\sqrt{3}$	$V = a^3$
Prisma: Cuerpo geométrico limitado por varios paralelogramos en sus caras laterales y 2 polígonos congruentes llamados bases.		$A = 2 \times A_{basal} + A_{lateral}$	$V = A_{basal} \times h$
Pirámide: Cuerpo geométrico cuya base es un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos.		$A = A_{basal} + A_{lateral}$	$V = \frac{A_{basal} \times h}{3}$
Cilindro: Cuerpo geométrico generado por la revolución de un rectángulo alrededor de sus lados.		$A = 2 \times A_{basal} + A_{lateral}$ $A = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r \times h$ generatriz: $g = h$	$V = A_{basal} \times h$ $V = \pi r^2 \times h$
Cono: Cuerpo geométrico generado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de sus catetos.		$A = A_{basal} + A_{lateral}$ $A = \pi r^2 + \pi r g$ generatriz: $g = \sqrt{r^2 + h^2}$	$V = \frac{A_{basal} \times h}{3}$ $V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$
Esfera: Cuerpo geométrico generado por la revolución de un semicírculo alrededor de su diámetro.		$A = 4\pi r^2$ generatriz: $g = \pi r$	$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Ejemplo 1 Se tiene un prisma cuya base es un hexágono regular de lado $\sqrt{2}$. La altura del prisma es $\sqrt{3}$. ¿Cuál es el volumen del prisma?

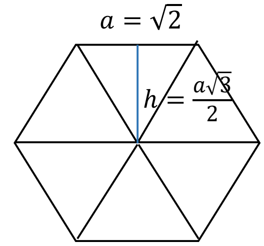


Solución: En el caso de un prisma, el volumen está dado por:

$V = A_{basal} \times H$ (tenemos la altura, pero debemos encontrar el área basal)

- La base del prisma, que corresponde a un hexágono regular, está formada por 6 triángulos equiláteros de lado $\sqrt{2}$, por lo que: $V = 6 \cdot A_{triángulo} \times H$;

- Además: $A_{triángulo} = \frac{b \cdot h}{2}$, pero en un triángulo equilátero $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ y $b = a$



- Entonces: $A_{triángulo} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Finalmente, el volumen buscado es: $V = 6 \cdot A_{triángulo} \times H = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} \rightarrow \boldsymbol{V = 9}$

Ejemplo 2 Un depósito cilíndrico de $4\ m$ de radio y $5\ m$ de altura está lleno de agua. Se echa dentro una bola de $6\ m$ de diámetro.

- ¿Qué cantidad de agua se desbordará?

  La cantidad de agua que desbordará es igual al volumen de la bola: $V_{bola} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi(3\ m)^3}{3} = \boldsymbol{36\pi\ m^3}$

- ¿Cuánta agua quedará en el depósito?

  Debemos obtener el volumen total del depósito y restar el volumen de la bola:
  $V_{depósito} = A_{basal} \times h = \pi r^2 \times h = \pi(4m)^2 \times 5m = 80\pi\ m^3 \rightarrow$ el volumen que queda en el depósito es:
  $V_{sobrante} = 80\pi\ m^3 - 36\pi\ m^3 = \boldsymbol{44\pi\ m^3}$

- Si se arroja otra bola, quedando en el depósito $20\pi\ m^3$ de agua, ¿cuál es el radio de esta bola?

  La nueva bola tiene un volumen de: $44\pi\ m^3 - 20\pi\ m^3 = 24\pi\ m^3$, entonces su radio se obtiene a partir de la fórmula del volumen:

$$V = 24\pi\ m^3 = \frac{4\pi r^3}{3} \rightarrow r^3 = 18m^3 \rightarrow \boldsymbol{r = \sqrt[3]{18}\ m}$$

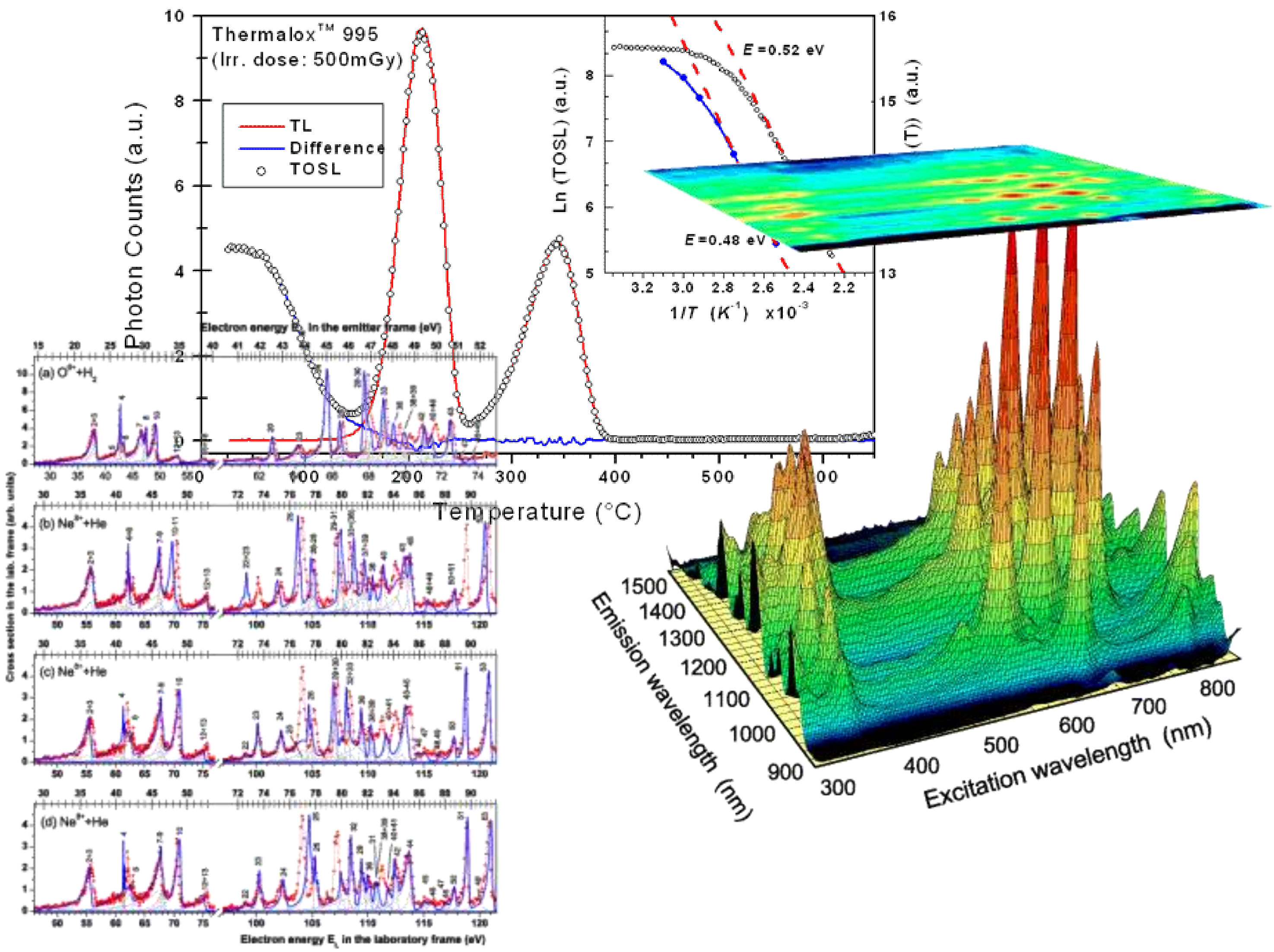
Ejemplo 3 El volumen de un cubo de lado "a" aumenta al doble. ¿Cuánto vale su nueva arista?

Solución:

- El volumen inicial es $V_i = a^3$, mientras que el volumen final es $V_f = 2a^3$ (ya que es el doble del original)
- Por otra parte, el volumen final debe ser igual al cubo de la arista final (que llamaremos x). Es decir:

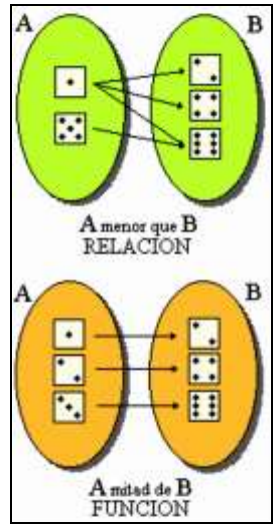
$$V_f = 2a^3 = x^3 \rightarrow \boldsymbol{x = a\sqrt[3]{2}} \text{ (nueva arista)}$$

CAPÍTULO VI
FUNCIONES



I.- CONCEPTO DE FUNCIÓN

1.- Definición y conceptos básicos



Entendemos por **función**, a una regla que asigna a cada elemento $\boldsymbol{x}$ de un conjunto $\boldsymbol{A}$ (conjunto de partida), exactamente un elemento $\boldsymbol{y}$ de un conjunto $\boldsymbol{B}$ (conjunto de llegada).

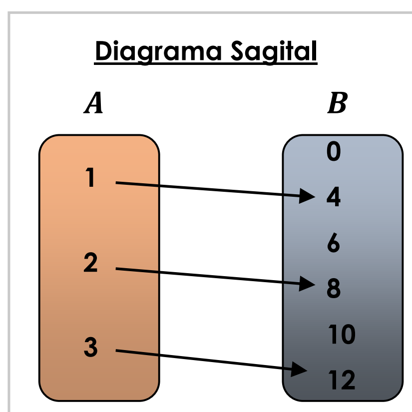
El conjunto $\boldsymbol{A}$ se conoce como **dominio** de la función ($\boldsymbol{Dom}$) y el conjunto $\boldsymbol{B}$ recibe el nombre de **codominio** de la función ($\boldsymbol{Cod}$). Además, se entiende por **recorrido** de la función ($\boldsymbol{Rec}$) a aquel subconjunto del codominio que incluye solo a los elementos que participan en la función.

Si a cada elemento del conjunto $\boldsymbol{A}$, **no** le corresponde exactamente **un** elemento del conjunto $\boldsymbol{B}$, se habla solo de una **relación** entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, y **no** de una función.

1.1. Conceptos y nomenclatura básica

- Una función $\boldsymbol{f}$ definida de un conjunto $\boldsymbol{A}$ en un conjunto $\boldsymbol{B}$, se designa por: $\boldsymbol{f}\colon\ \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$
- Cuando una variable $\boldsymbol{y}$ depende de otra variable $\boldsymbol{x}$, a través de una función $\boldsymbol{f}$, escribimos: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.
- A los elementos $\boldsymbol{x}$ del conjunto $\boldsymbol{A}$ se le denomina **preimágenes** de los elementos $\boldsymbol{y}$ del conjunto $\boldsymbol{B}$. Mientras que a los elementos $\boldsymbol{y}$ del conjunto $\boldsymbol{B}$, se les denomina **imágenes** de los elementos $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{A}$.
- Como norma general, $\boldsymbol{x}$ es la variable **independiente**, ya que puede tomar cualquier valor dentro del dominio de la función, mientras que $\boldsymbol{y}$ es la variable **dependiente**, ya que su valor está determinado por el valor que tome **x**.
- La variable **independiente** se conoce como **argumento** de la función, y la **dependiente** como **valor** de la función.

Ejemplo 1 Consideremos los siguientes conjuntos: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ y $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}, \mathbf{12}\}$ y la relación entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dada por: "asignar a cada elemento su cuádruplo". Determinar si esta relación es función, junto con su dominio y recorrido. Realizar un diagrama sagital.



Solución: A los elementos $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}$ del conjunto $\boldsymbol{A}$, les corresponden respectivamente los elementos $\mathbf{4}$, $\mathbf{8}$ y $\mathbf{12}$ del conjunto $\boldsymbol{B}$. Dado que a cada elemento del conjunto $\boldsymbol{A}$ le corresponde un único elemento del conjunto $\boldsymbol{B}$, la relación de dependencia **es función**.

$\boldsymbol{Dom}(\boldsymbol{f}) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$; $\boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{f}) = \{\mathbf{4}, \mathbf{8}, \mathbf{12}\}$; $\boldsymbol{Cod}(\boldsymbol{f}) = \{\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}, \mathbf{12}\}$.

Respecto de las imágenes (Im) y preimágenes ($Preim$), tenemos:

$\boldsymbol{Im}(\mathbf{1}) = \mathbf{4}$, $\boldsymbol{Im}(\mathbf{2}) = \mathbf{8}$, $\boldsymbol{Im}(\mathbf{3}) = \mathbf{12}$
$\boldsymbol{Preim}(\mathbf{4}) = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{Preim}(\mathbf{8}) = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{Preim}(\mathbf{12}) = \mathbf{3}$

2.- Expresiones analíticas de funciones

2.1. Imágenes y preimágenes

Muchas veces una función se puede expresar mediante una fórmula que permite calcular las imágenes de cada elemento del dominio. Para realizar este cálculo, se debe reemplazar el valor de la variable independiente $\boldsymbol{x}$ en la fórmula de la función y así obtener $\boldsymbol{f(x)}$. A su vez, para obtener una preimagen, se debe reemplazar el valor de la imagen en $\boldsymbol{f(x)}$, para luego despejar o obtener $\boldsymbol{x}$.

Ejemplo 2 Sea la función $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada número real $\boldsymbol{x}$ el triple de su cuadrado disminuido en 3. Obtener la expresión analítica de la función, calcular la imagen de $\boldsymbol{-2}$ y la preimagen de $\boldsymbol{0}$.

Solución: Del enunciado, la función se representa por: $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 3}$

- Para obtener la imagen de $\boldsymbol{-2}$, se reemplaza $\boldsymbol{x = -2}$ en la expresión analítica:
  $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 = \boldsymbol{9} \quad \to$ La imagen de -2 es $\boldsymbol{9}$
- Para obtener la preimagen de $\boldsymbol{0}$: se reemplaza $\boldsymbol{f(x)}$ por $\boldsymbol{0}$:
  $\boldsymbol{0 = 3x^2 - 3 \ \to \ x^2 = 1 \ \to x_1 = 1; \ \ x_2 = -1} \ \to$ El cero tiene dos preimágenes: $\boldsymbol{1}$ y $\boldsymbol{-1}$

Ejemplo 3 Si $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - (x-4)^2}$, ¿cuál es el valor de $\boldsymbol{f(x+5)}$?

Solución: Se reemplaza $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{x+5}$ en la expresión analítica: $f(x+5) = 2(x+5)^2 - ((x+5)-4)^2$

$$= 2(x^2 + 10x + 25) - (x+1)^2 = 2x^2 + 20x + 50 - x^2 - 2x - 1 = \boldsymbol{x^2 + 18x + 49}$$

Ejemplo 4 Si $\boldsymbol{f(2x+1) = 2x^2 - 1}$, ¿cuánto vale $\boldsymbol{f(7)}$?

Solución: Dado que la función se define con un argumento igual a $\boldsymbol{2x+1}$, y se pide la función evaluada en $\boldsymbol{7}$, necesariamente ambas expresiones deben ser iguales: $2x + 1 = 7 \ \to \ \boldsymbol{x = 3.}$ Luego: $\boldsymbol{f(7)} = 2 \cdot 3^2 - 1 = \boldsymbol{17}$

2.2. Dominio de una función

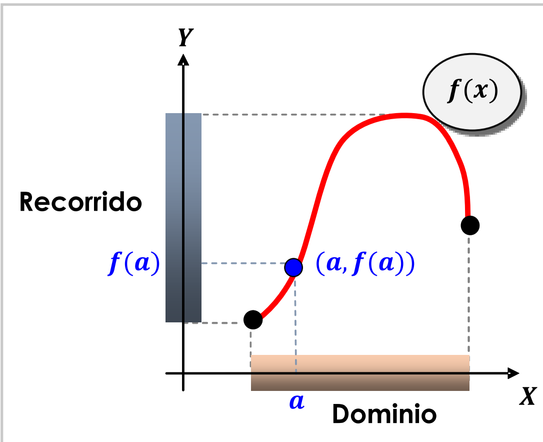
Generalmente el dominio de una función corresponde a todos los reales menos las restricciones que ésta pudiese presentar. Veamos algunos ejemplos con las funciones más conocidas, y estudiemos sus dominios.

- **Función polinómica**: sea $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x - 3}$, su dominio corresponde a **todos los reales**, no existiendo ninguna restricción, ya que $\boldsymbol{x}$ puede tomar cualquier valor y la función nunca se indefine $\to \boldsymbol{Dom\, f} = \mathbb{R}$.
- **Función racional:** Consideremos $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{\frac{2x+2}{x-1}}$, su dominio corresponde a todos los reales, menos los valores que hagan cero el denominador. En este caso: $Dom\, f = \mathbb{R} - \{x - 1 = 0\} \ \to \ \boldsymbol{Dom\, f} = \mathbb{R} - \{\boldsymbol{1}\}$.
- **Función Raíz cuadrada**: Sea $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x-2}}$. En este caso el dominio de $\boldsymbol{f}$ corresponde a todos los reales que nos entregan un argumento **no-negativo** dentro de la raíz cuadrada, entonces: $x - 2 \geq 0 \to x \geq 2$, lo que implica que $\boldsymbol{Dom\, f} = [\boldsymbol{2}, \infty[$.

3.- Aspectos de interés en una función

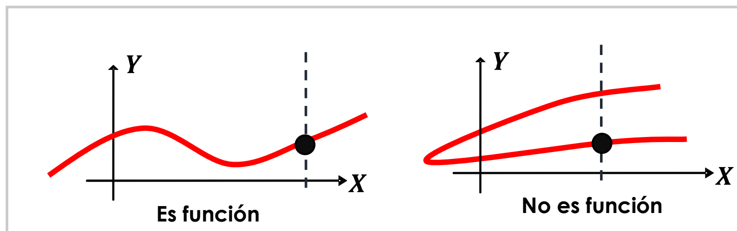
3.1. Gráfico de una función

Puesto que muchas veces las funciones presentan infinitos pares de puntos $(x, f(x))$, éstas se grafican en el plano cartesiano en base a unos cuantos puntos significativos y luego se dibuja el resto del grafico de acuerdo a las características de la función.



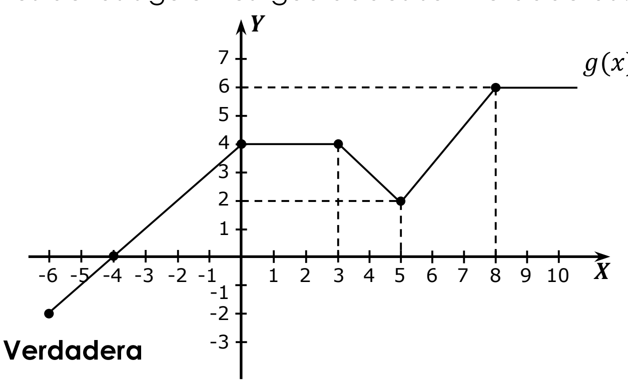
➢ **Prueba de la recta vertical**

Una curva en el plano cartesiano representa una función, si toda recta vertical corta el gráfico en **un** punto, dentro del dominio de la misma. Por ejemplo:



Ejemplo 5 De acuerdo con el gráfico de la figura, ¿cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas?

I) $g(-6) - 4 = g(3) - g(10)$
II) $g(-2{,}3) < g(7{,}1)$
III) $2g(0) + g(8) - g(-4) = 3g(3) + g(5)$



Solución:

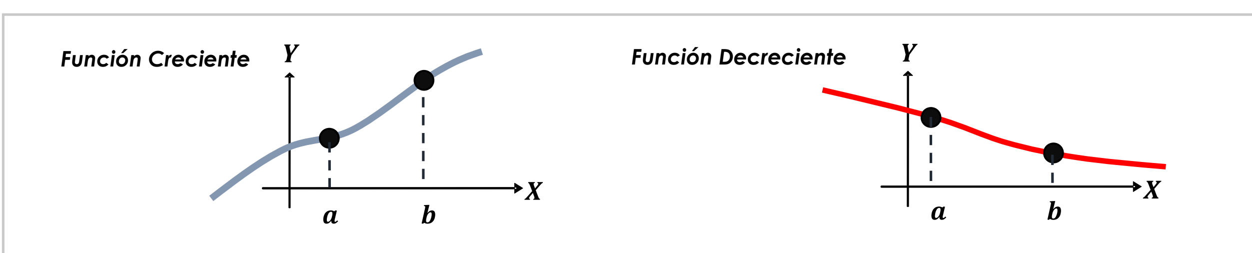
I) $g(-6) - 4 = g(3) - g(10)$
$-2 - 4 = 4 - 6 \rightarrow -6 = -2 \rightarrow$ **I) es Falsa**

II) $g(-2{,}3) < g(7{,}1) \rightarrow aprox\ 1{,}8 < aprox\ 4{,}5 \rightarrow$ **II) es Verdadera**

III) $2g(0) + g(8) - g(-4) = 3g(3) + g(5) \rightarrow 2 \cdot 4 + 6 - 0 = 3 \cdot 4 + 2 \rightarrow 14 = 14 \rightarrow$ **III) es Verdadera**

3.2. Crecimiento o decrecimiento

- Una función es **creciente** en un intervalo L de su dominio si: $\forall\, a, b \in L \rightarrow (b > a \rightarrow f(b) > f(a))$
- Una función es **decreciente** en un intervalo L de su dominio si: $\forall\, a, b \in L \rightarrow (b > a \rightarrow f(b) < f(a))$



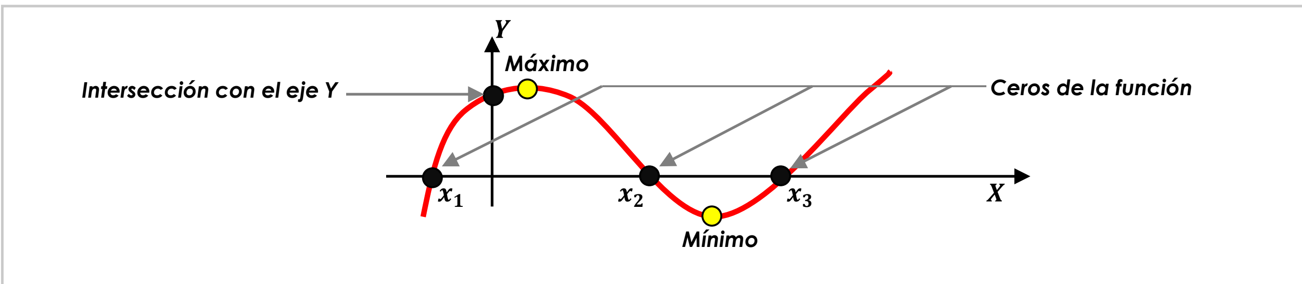
3.3. Intersecciones con los ejes

- **Intersecciones con el eje X:** las intersecciones con el eje X se encuentran haciendo $y = 0$ en la expresión analítica de la función. A estos puntos se les denomina **ceros de la función**, ya que la función vale $\mathbf{0}$ en esos puntos.

➢ **Intersección con el eje Y:** en este caso reemplazamos $x = 0$ en la expresión analítica.

3.4. Valores extremos: máximos y mínimos

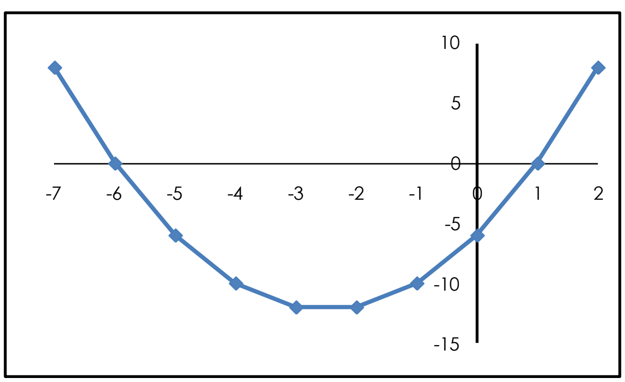
Se denomina **máximo**, al **mayor valor** de una función en algún intervalo de su dominio, mientras que se conoce por **mínimo**, al **menor valor** de una función en un cierto intervalo.



Ejemplo 6 Consideremos la siguiente función: $f(x) = x^2 + 5x - 6$. Se pide graficarla en el intervalo $[-7, 2]$, determinar el intervalo creciente y el intervalo decreciente, obtener las intersecciones con los ejes y los valores extremos.

- **Gráfico:** utilizamos una tabla de valores:

x	$f(x)$
-7	8
-6	0
-5	-6
-4	-10
-3	-12
-2	-12
-1	-10
0	-6
1	0
2	8



- **Intervalo decreciente:** $]-\infty; \mathbf{2,5}[$
- **Intervalo creciente:** $]\mathbf{2,5};\ \infty[$
- **Valor mínimo:** visualmente se encuentra en $x = -2,5$ (promedio entre -2 y -3), por lo tanto:

  $f(-2,5) = (-2,5)^2 + 5 \cdot -2,5 - 6 = \mathbf{-12,25}$
  → el mínimo de la función es $\mathbf{-12,25}$

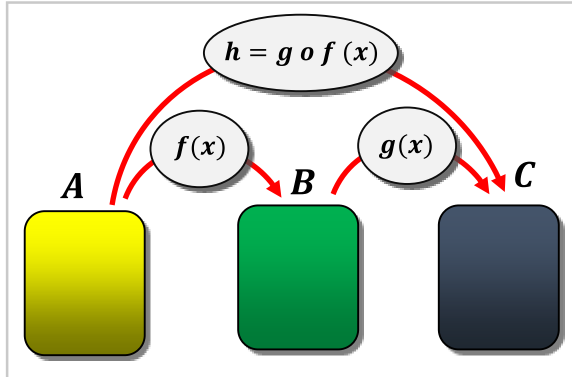
- **Valor máximo:** no tiene, dentro de su todo dominio (la función se va a infinito). Sin embargo, en el intervalo considerado, el mayor valor de la función es: $f(x) = 8$.

- **Intersección con el eje Y:** $(x = 0) \rightarrow f(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 - 6 = \mathbf{-6}$ → el punto de intersección es $(\mathbf{0}, \mathbf{-6})$

- **Intersecciones con el eje X:** $(y = 0) \rightarrow 0 = x^2 + 5x - 6 \rightarrow 0 = (x + 6)(x - 1) \rightarrow x_1 = -6; \quad x_2 = 1$
  → existen dos puntos de intersección con el eje x: $(-6, 0)$ y $(1, 0)$

Notar que estas intersecciones ya fueron obtenidas en la tabla de valores, lo que nos permite corroborar los resultados.

4.- Composición de funciones



Sean: $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$, funciones tales que: $\boldsymbol{f: A \to B}$ y $\boldsymbol{g: B \to C}$.

Entendemos por función compuesta $\boldsymbol{h(x)}$ a una nueva función que toma un elemento del conjunto $\boldsymbol{A}$ y lo lleva directamente al conjunto $\boldsymbol{C}$, es decir: $\boldsymbol{h: A \to C}$

La nomenclatura usada es: $\boldsymbol{h(x) = (g \; o \; f)(x) = g(f(x))}$ y se lee: "$\boldsymbol{g}$ **compuesta con** $\boldsymbol{f}$".

La expresión $\boldsymbol{(g \; o \; f)(x) = g(f(x))}$ equivale a decir "$\boldsymbol{g}$ evaluada en $\boldsymbol{f(x)}$", mientras que $\boldsymbol{(f \; o \; g)(x) = f(g(x))}$ equivale a "$\boldsymbol{f}$ evaluada en $\boldsymbol{g(x)}$ ".

Ejemplo 7 Sean $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ funciones reales definidas por: $\boldsymbol{f(x) = 2x - 3}$ y $\boldsymbol{g(x) = 4 - 5x}$, Hallar:

- $\boldsymbol{(f \; o \; g)(3)} \to f(g(3)) = f(4 - 5 \cdot 3) = f(-11) = \boldsymbol{-25}$
- $\boldsymbol{(g \; o \; f)(-1)} \to g\big(f(-1)\big) = g(2 \cdot -1 - 3) = g(-5) = \boldsymbol{29}$
- $\boldsymbol{(f \; o \; g)(x)} \to f\big(g(x)\big) = f(4 - 5x) = 2(4 - 5x) - 3 = \boldsymbol{5 - 10x}$
- $\boldsymbol{(g \; o \; f)(x)} \to g\big(f(x)\big) = g(2x - 3) = 4 - 5(2x - 3) = \boldsymbol{19 - 10x}$

Ejemplo 8 Supongamos que el gasto mensual (G) en alimentación depende del sueldo (S) del jefe de familia, correspondiendo al **25%** de éste, es decir: $\boldsymbol{G(S) = \tfrac{1}{4}S}$

Por otra parte, el sueldo (S) de este trabajador depende de las horas trabajadas (h), percibiendo **$20.000** por hora, es decir: $\boldsymbol{S(h) = 20.000\,h}$

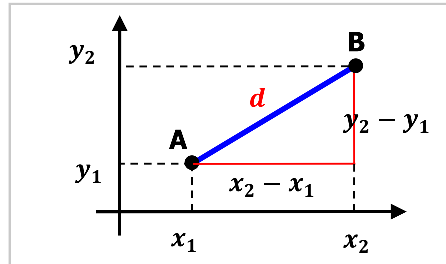
Entonces, si queremos expresar en una sola función el gasto mensual destinado a alimentación (G), en función de las horas trabajadas, tendremos: $\boldsymbol{G(S) = G(S(h)) = \tfrac{1}{4}(20.000\,h) = 5.000\,h}$ (función compuesta).

.

II.- ECUACIÓN DE LA RECTA - FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN

1.- Conceptos básicos de geometría analítica

1.1. Distancia entre 2 puntos

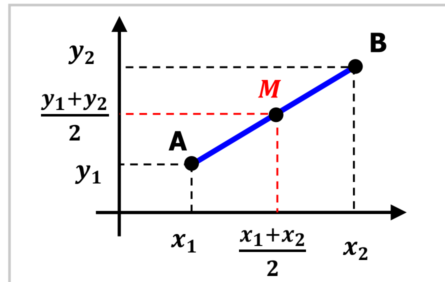


La distancia $(\boldsymbol{d})$ entre 2 puntos $\boldsymbol{A(x_1, y_1)}$ y $\boldsymbol{B(x_2, y_2)}$ está dada por:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

(Esta fórmula proviene de un teorema de Pitágoras, donde $\boldsymbol{d}$ es la hipotenusa)

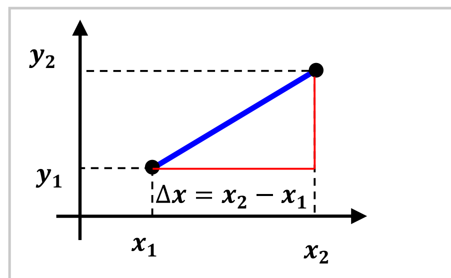
1.2. Punto medio



El punto medio $(\boldsymbol{M})$ entre 2 puntos $\boldsymbol{A(x_1, y_1)}$ y $\boldsymbol{B(x_2, y_2)}$ se calcula como el promedio de las coordenadas entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)}$$

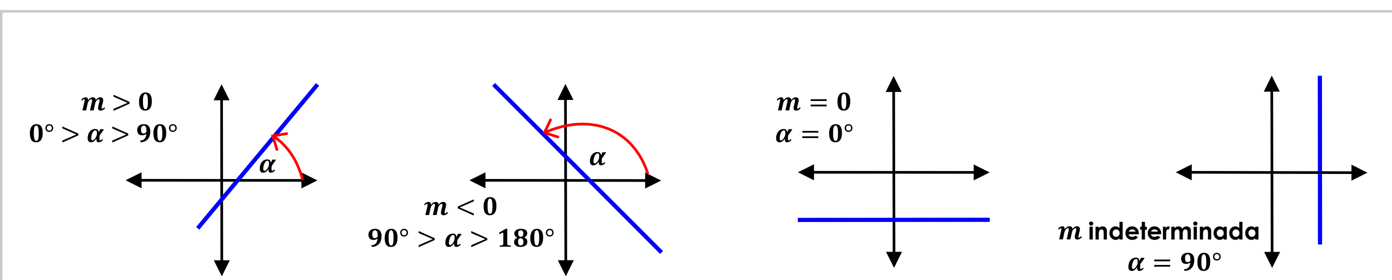
1.3. Pendiente de un segmento



Entendemos pendiente $(\boldsymbol{m})$ a la inclinación que presenta un segmento respecto del eje $\boldsymbol{Y}$.

$$\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$\boldsymbol{\Delta y}$ = cambio en el eje $\boldsymbol{Y}$
$\boldsymbol{\Delta x}$ = cambio en el eje $\boldsymbol{X}$



Ejemplo 1 Calcular la distancia, el punto medio y la pendiente entre: $(\mathbf{1}, \mathbf{-2})$ y $(\mathbf{-2}, \mathbf{7})$.

- Distancia: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (7 - -2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (9)^2} = \sqrt{9 + 81} \rightarrow \boldsymbol{d = \sqrt{90}}$
- Punto medio: $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{1+-2}{2}, \frac{-2+7}{2}\right) \rightarrow \boldsymbol{M = \left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)}$
- Pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - -2}{-2 - 1} = \frac{9}{-3} \rightarrow \boldsymbol{m = -3}$

Observación: para facilitar el reemplazo, se recomienda anotar lo siguiente:

x_1, y_1	x_2, y_2
(1, -2)	(-2, 7)

2.- Ecuación de la recta

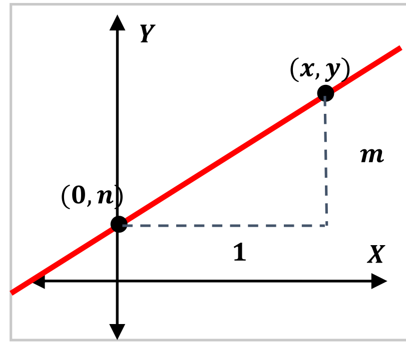
2.1. Forma principal

La función más sencilla corresponde gráficamente a la línea recta y se representa por un polinomio de primer grado, siendo su forma principal:

$$\boxed{y = mx + n}$$

Donde m y n son constantes reales, que representan:

- m: pendiente
- n: coeficiente de posición o intercepto con el eje Y



2.2. Forma general

También podemos formular la ecuación de la recta a través de la siguiente expresión, llamada **ecuación general**:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$ Donde idealmente A, B y C son números enteros.

Ejemplo 2 Transformar la ecuación de la recta: $y = \frac{1}{2}x - 5$ a la forma general.

Pendiente: $\frac{1}{2}$
Coef. de posición: -5

- Pasamos todos los términos al lado izquierdo de la ecuación: $y - \frac{1}{2}x + 5 = 0$
- Amplificamos por 2 y ordenamos: $2y - x + 10 = 0 \rightarrow -x + 2y + 10 = 0 \leftrightarrow x - 2y - 10 = 0$ (*ec. general*)

Ejemplo 3 Transformar la ecuación de la recta: $2x + 3y - 1 = 0$ a la forma principal.

- Pasamos todos los términos sin y al lado derecho de la ecuación: $3y = -2x + 1$
- Dividimos por 3 para eliminar el factor que acompaña a y: $y = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$ (*ec. principal*)

Pendiente: $\frac{-2}{3}$
Coef. de posición: $\frac{1}{3}$

Como conclusión, cada vez que se requiera obtener la pendiente de una recta, dada su expresión analítica, necesariamente la ecuación debe presentarse en su forma principal.

2.3. Pertenencia de un punto a una recta

Un punto pertenece a una recta si sus coordenadas satisfacen la ecuación de dicha recta. En caso contrario no pertenece a la recta.

Ejemplo 4

- El punto $(3, 2)$ **pertenece** a la recta $y = 2x - 4$ ya que: $2 = 2 \cdot 3 - 4$
- El punto $(4, 3)$ **no pertenece** a la recta $y = 2x - 4$, ya que: $3 \neq 2 \cdot 4 - 4$

3.- Graficar una recta

3.1. Usando una tabla de valores

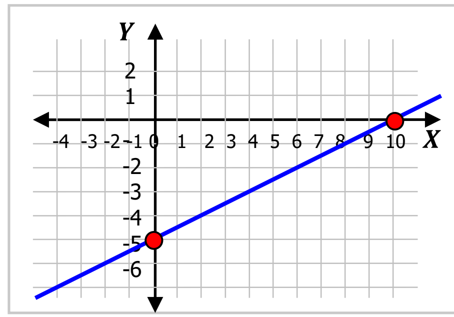
Basta con identificar 2 puntos y unirlos con una línea para determinar la gráfica de una recta.

Ejemplo 5 Graficar: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - 5}$

Se recomienda obtener los puntos asociados a las intersecciones con los ejes:

- Si $\boldsymbol{y = 0}$ entonces $\boldsymbol{x = 10}$
- Si $\boldsymbol{x = 0}$ entonces $\boldsymbol{y = -5}$

La recta pasa por los puntos $(\mathbf{10}, \mathbf{0})$ y $(\mathbf{0}, \mathbf{-5})$



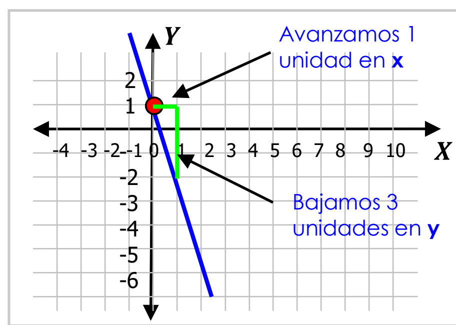
3.2. Usando los parámetros de la ecuación principal de la recta

El coeficiente de posición $\boldsymbol{n}$ es la coordenada $\boldsymbol{y}$ del punto donde la recta corta al eje de las ordenadas, por lo tanto tenemos un punto de partida de la recta: $(\mathbf{0}, \boldsymbol{n})$. Además $\boldsymbol{m}$ representa la pendiente de la recta o razón de cambio de $\boldsymbol{Y}$ respecto de $\boldsymbol{X}$, es decir, lo que "sube" en $\boldsymbol{y}$ por cada unidad que "avanza" en $\boldsymbol{x}$.

Ejemplo 6 Graficar $\boldsymbol{y = -3x + 1}$

- $n = 1$
- $m = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

- La recta pasa por el punto $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.
- Por cada unidad que avanzamos en $\boldsymbol{x}$, la recta baja 3 unidades en $\boldsymbol{y}$ (ya que la pendiente es negativa).



Ejemplo 7 Graficar las siguientes rectas:

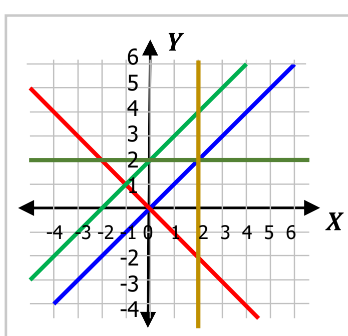
$\boldsymbol{y = x}$

$\boldsymbol{y = -x}$

$\boldsymbol{y = x + 2}$

$\boldsymbol{y = 2}$

$\boldsymbol{x = 2}$



Observaciones:

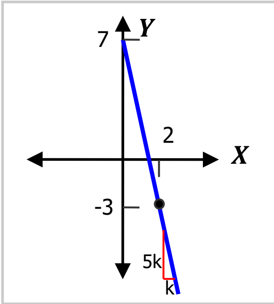
- La recta $\boldsymbol{y = x}$, es aquella que forma un ángulo de $\mathbf{45°}$ con el eje $\boldsymbol{X}$.
- Las rectas de la forma $\boldsymbol{y = n}$, son siempre horizontales y su pendiente es cero.
- Las rectas de la forma $\boldsymbol{x = k}$, son siempre verticales y no tienen pendiente.

4.- Formas de determinar la ecuación de una recta

Dado que la ecuación de la recta posee dos parámetros $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$, para determinarla se necesitan **2 datos**, los que pueden ser:

- **Un punto y la pendiente:** $\boldsymbol{A(x_1, y_1);\ m}$ $\quad \boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$ **Fórmula: punto – pendiente**
- **Dos puntos de ella:** $\boldsymbol{A(x_1, y_1)}$ y $\boldsymbol{B(x_2, y_2)}$ $\quad \boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$ **Fórmula: punto – punto**

Ejemplo 8 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(\mathbf{2}, -\mathbf{3})$ y tiene pendiente $-\mathbf{5}$.

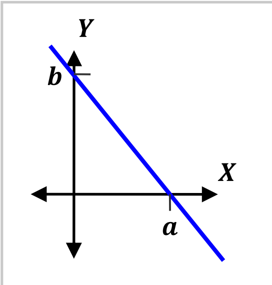


Solución: Aplicamos la fórmula punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \ \rightarrow\ y - -3 = -5(x - 2) \ \rightarrow\ y + 3 = -5x + 10$$ Entonces:

Ecuación principal: $\boldsymbol{y = -5x + 7}$ ***Ecuación general:*** $\boldsymbol{5x + y - 7 = 0}$

Ejemplo 9 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(\mathbf{0}, \boldsymbol{b})$ y $(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$.



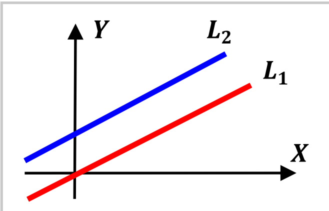
Solución: Aplicamos la fórmula punto-punto:

Ecuación principal: ***Ecuación general:***

$$y - b = \frac{0 - b}{a - 0}(x - 0) \ \rightarrow\ y - b = \frac{-b}{a}x \ \rightarrow\ \boldsymbol{y = \frac{-b}{a}x + b} \ \rightarrow\ \boldsymbol{bx + ay - ab = 0}$$

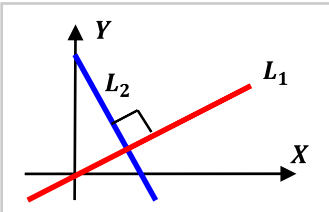
Otra forma de presentar esta ecuación es: $\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

5.- Rectas paralelas y perpendiculares



- **Rectas paralelas**: dos o más rectas son paralelas, si sus pendientes son iguales.

$$\boxed{\boldsymbol{m_1 = m_2}}$$



- **Rectas perpendiculares:** dos rectas son perpendiculares, si el producto de sus pendientes es igual a $-\mathbf{1}$.

$$\boxed{\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 = -1}}$$

Ejemplo 10 Consideremos las siguientes rectas: $\boldsymbol{L_1: 3x + ky - 2 = 0}$ y $\boldsymbol{L_2: 5x - 3y + 8 = 0.}$ Se pide:

a) Determinar un valor de $\boldsymbol{k}$, denominado $\boldsymbol{k_a}$, para que las rectas sean paralelas
b) Determinar otro valor de $\boldsymbol{k}$, denominado $\boldsymbol{k_b}$, para que las rectas sean perpendiculares

<u>Solución</u>: Se obtienen las pendientes de cada recta a partir de sus ecuaciones principales:

$$\boldsymbol{L_1}: 3x + ky - 2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad ky = -3x + 2 \quad \leftrightarrow \quad y = \frac{-3x}{k} + \frac{2}{k} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m_1} = \frac{\boldsymbol{-3}}{\boldsymbol{k}}$$

$$\boldsymbol{L_1}: 5x - 3y + 8 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 3y = 5x + 8 \quad \leftrightarrow \quad y = \frac{5x}{3} + \frac{8}{3} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m_2} = \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{3}}$$

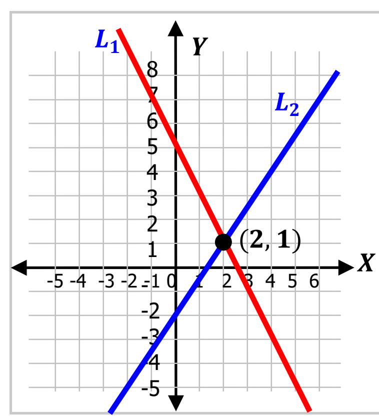
a) Por lo tanto, para que L_1 y L_2 sean paralelas: $\boldsymbol{m_1} = \boldsymbol{m_2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{-3}{k_a} = \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k_a} = \frac{\boldsymbol{-9}}{\boldsymbol{5}}$

b) Y para que L_1 y L_2 sean perpendiculares: $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 = -1} \quad \leftrightarrow \quad \frac{-3}{k_b} \cdot \frac{5}{3} = -1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k_b = 5}$

<u>6.- Intersección entre rectas</u>

Dos rectas no paralelas presentan un único punto de intersección. Para encontrar este punto, existen dos metodologías: gráficamente o algebraicamente.

Ejemplo 11 Hallar la intersección entre: $\boldsymbol{L_1: y = -2x + 5}$ y $\boldsymbol{L_2: y = \frac{3}{2}x - 2}$



- **Método gráfico:** dibujamos con exactitud cada recta y analizamos el punto de intersección, que en este caso es claramente $(\boldsymbol{2, 1})$.

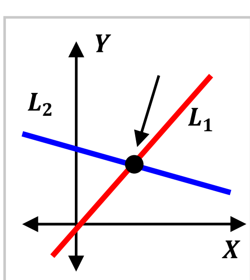
- **Método algebraico**: se resuelve el sistema de ecuaciones formado por ambas rectas. Si las ecuaciones están en la forma principal, el método más conveniente es el de igualación:

$$L_1: y = -2x + 5 \quad \text{y} \quad L_2: y = \tfrac{3}{2}x - 2 \quad \rightarrow \quad -2x + 5 = \tfrac{3}{2}x - 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 2}$$

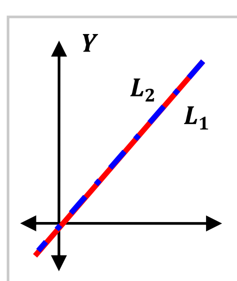
Si $x = 2 \rightarrow y = -2 \cdot 2 + 5 \rightarrow \boldsymbol{y = 1} \rightarrow$ el punto de intersección es el $(\boldsymbol{2, 1})$.

<u>**6.1. Tipos de intersecciones**</u>: Podemos encontrarnos con 3 posibilidades:

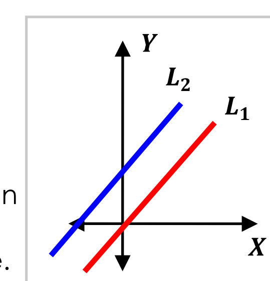
Rectas no paralelas: hay una única intersección. Representa un sistema compatible determinado.



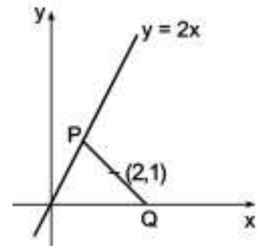
Rectas paralelas iguales: hay infinitas intersecciones. Representa un sistema compatible indeterminado.



Rectas paralelas distintas no hay intersección. Representa un sistema incompatible.



Ejemplo 12 Dada la recta de ecuación $\boldsymbol{y = 2x}$ y el punto $(\mathbf{2, 1})$, que corresponde al punto medio del segmento que corta la recta en P y al eje X en Q. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P?



Solución: Si el punto P pertenece a la recta $\boldsymbol{y = 2x}$, entonces sus coordenadas son de la forma $(\boldsymbol{x, 2x})$, mientras que si Q está en el eje $\boldsymbol{X}$, sus coordenadas son de la forma $(\boldsymbol{a, 0})$. Dado que (2,1) es punto medio, podemos plantear lo siguiente:

$$(2,1) = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{2x+0}{2}\right) \rightarrow 2 = \frac{x+a}{2} \text{ y } 1 = \frac{2x+0}{2} \rightarrow \boldsymbol{x = 1} \rightarrow \boldsymbol{a = 3}$$ Luego: $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x, 2x}) = (\mathbf{1, 2})$

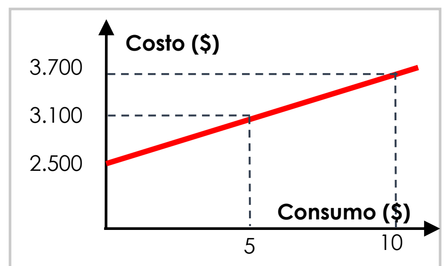
7.- Problemas de aplicación

Muchos problemas cotidianos pueden ser modelados a través de la función lineal. Estos en general presentan un valor inicial o fijo, más un valor variable que aumenta (o disminuye) proporcionalmente.

Ejemplo 13 La cuenta de la electricidad incluye un monto fijo de $2.500, que se cobra haya o no consumo, y una cantidad variable de $ 120, por cada KW, consumido.

Consumo (KW)	Costo ($)
0	2.500
1	2.500+120
2	2.500+2·120
3	2.500+3·120
4	2.500+4·120

En este caso, el **consumo** es la variable independiente y el **costo** la dependiente. Para obtener la función lineal que modela esta situación, analizamos primero el cargo fijo o valor inicial de la función (asociado a consumo 0), que representará el coeficiente de posición: $\boldsymbol{n} = \$\mathbf{2.500}$.



La pendiente representa la razón de cambio del costo respecto del consumo: el cobro mensual aumenta en $120 pesos por cada KW consumido → $\boldsymbol{m = 120}$.

Entonces, la ecuación de la recta asociada es: $\boldsymbol{y = 120x + 2.500}$
O bien: $\boldsymbol{Cobro\ mensual}(\$) = \$\mathbf{120}/\boldsymbol{KW} \cdot \boldsymbol{Consumo}(\boldsymbol{KW}) + \$\mathbf{2.500}$

Ejemplo 14 Se realizará una fiesta en el colegio, estimándose que, si asisten 100 personas, se tendría una pérdida de $50.000, mientras que si asisten 600 personas la ganancia sería de $950.000. Si la función anterior se puede representar linealmente, ¿cuál sería la ganancia si asistiesen 450 personas?

Solución: se considera que los puntos de la función poseen una forma: $(x, y) = (personas, ganancia)$, donde: $(x_1, y_1) = (100, -50.000)$, $(x_2, y_2) = (600, 950.000)$. Usando la fórmula punto-punto:

$$y - -50.0000 = \frac{950.000 - -50.000}{600 - 100}(x - 100) \rightarrow y + 50.000 = \frac{1.000.000}{500}(x - 100) \rightarrow \boldsymbol{y = 2.000x - 250.000}$$

Entonces, si asisten 450 personas: $y = 2.000 \cdot 450 - 250.000 = \mathbf{650.000}$ **de ganancia.**
Además, observando la fórmula, es claro que el costo fijo es de $250.000 (si no asiste nadie se pierden 250 mil pesos), mientras que por cada persona que va asistiendo, se ganan $2.000. Por lo tanto, la cantidad mínima de asistentes requeridos para no se tener pérdidas es: $\mathbf{250.000/2.000 = 125}$ **personas.**

III.- FUNCIÓN CUADRÁTICA

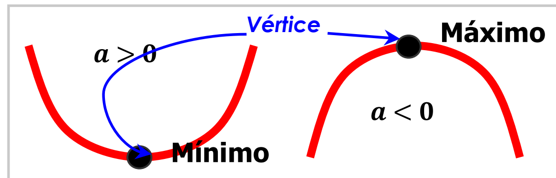
1.- Expresión general

1.1. Definición: Entendemos por función cuadrática a aquella cuya estructura corresponde a un polinomio de segundo grado, siendo su forma general la siguiente:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

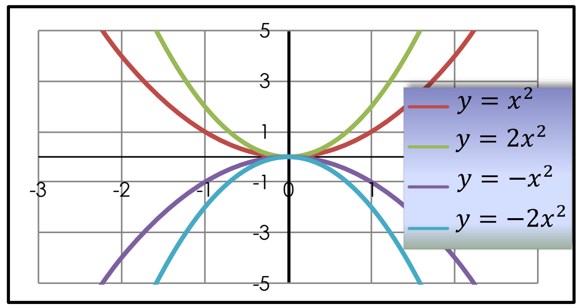
Donde a, b y c son constantes reales y $a \neq 0$.

1.2. Concavidad y el parámetro "a"



Gráficamente la función cuadrática corresponde a una parábola, siendo su concavidad determinada por el parámetro a:

- Si $a > 0$ el gráfico abre hacia arriba y el vértice corresponde al punto **mínimo** de la función. Mientras que si $a < 0$ el gráfico abre hacia abajo y el vértice corresponde al punto **máximo** de la función.
- Mientras más **grande** es el valor de a (en valor absoluto), más **angosta** es la parábola (ver gráfico ejemplo de la derecha).



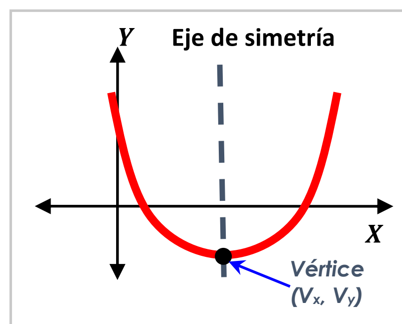
1.3. Coordenadas del vértice de la parábola y eje de simetría

- **Vértice:** las coordenadas del vértice de la función cuadrática están dadas por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$\boxed{V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)}$$

- **Eje de simetría**: es una recta vertical que coincide con la coordenada x del vértice de la parábola. Por lo tanto, su ecuación es:

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

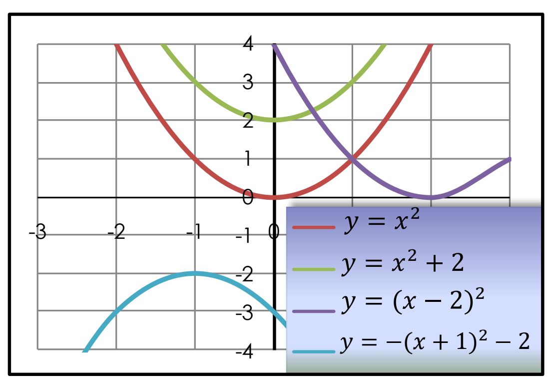


2.- Forma canónica y traslación de la parábola

Otra forma de expresar la función cuadrática, denominada **canónica**, es la siguiente:

$$\boxed{f(x) = a(x-h)^2 + k}$$

Donde (h, k) representan las coordenadas del vértice de la parábola. Esto implica que $y = a(x-h)^2 + k$, corresponde a la parábola $y = ax^2$ pero trasladada h unidades a la **derecha** y k unidades hacia **arriba** (ver gráfico ejemplo de la derecha).
Notar que el parámetro a de la forma canónica corresponde al mismo que el de la forma general.



Ejemplo 1 Determinar el menor valor de la función, junto con el recorrido de: $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x - 32}$

<u>Solución</u>: En este caso el parámetro $\boldsymbol{a}$ es positivo, por lo tanto la parábola abre hacia arriba y tiene un **mínimo**. Sabemos que el mínimo de la función corresponde a la coordenada "y" del vértice (V_y). Para obtener esta coordenada tenemos 2 posibilidades:

Obtenemos el mismo valor para la coordenada ''y'' del vértice

- Fórmula: $V_y = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot1\cdot-32-(-4)^2}{4\cdot1} = \frac{-144}{4} = \boldsymbol{-36}$

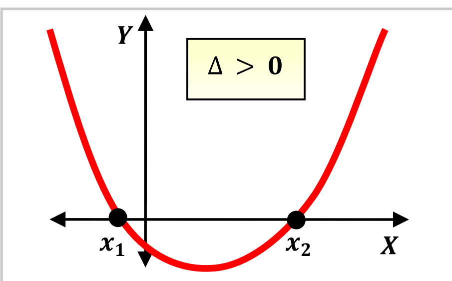
  Expresar en la forma canónica: $y = x^2 - 4x - 32 \;\rightarrow\; y = (x^2 - 4x + 4) - 32 - 4 \;\rightarrow\; y = (x-2)^2 - \boldsymbol{36}$

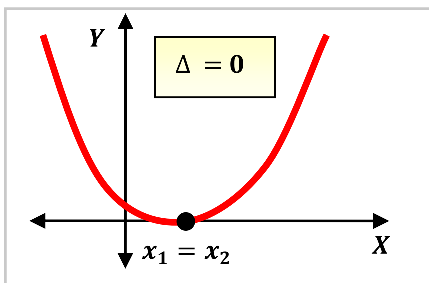
  Se agrega un 4 para completar el cuadrado de binomio, pero luego se resta para mantener la igualdad.

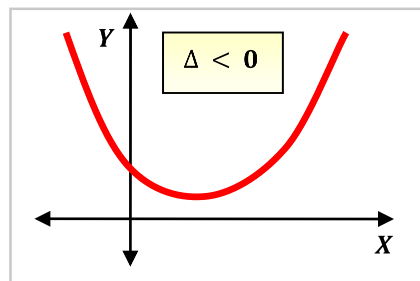
De lo anterior, la coordenada "y" del vértice es $-\boldsymbol{36}$, por lo tanto: **mínimo** $= -\boldsymbol{36}$**, recorrido** $= [-\boldsymbol{36}, \infty[$

3.- Discriminante

Así como en una ecuación de segundo grado, el discriminante determina el número de soluciones reales que ésta posee, en el caso de la función cuadrática, el discriminante nos permite determinar el número de intersecciones con el eje $\boldsymbol{X}$ que presenta su gráfico.







Si $\Delta > 0$, la función presenta dos raíces reales, por lo que la parábola intersecta al eje $\boldsymbol{X}$ en 2 puntos, cuyas abscisas corresponden a las raíces.

Si $\Delta = 0$, la función presenta una raíz real, por lo que la parábola intersecta al eje $\boldsymbol{X}$ en 1 punto, cuya abscisa corresponde a la raíz.

Si $\Delta < 0$, la función no presenta raíces reales, lo que significa que la parábola no intersecta al eje $\boldsymbol{X}$.

Ejemplo 2 Según la ecuación $\boldsymbol{y = x^2 - 2x + a}$, es correcto afirmar que:

I) Si $a > 1$, existen dos intersecciones con el eje X.
II) Si $a = 1$, existe una intersección con el eje X.
III) Si $a < 1$, no hay intersección con el eje X.

<u>Solución</u>: Dado que se solicita la relación entre la expresión analítica de la función y sus intersecciones con el eje X, analizaremos el discriminante de la misma:

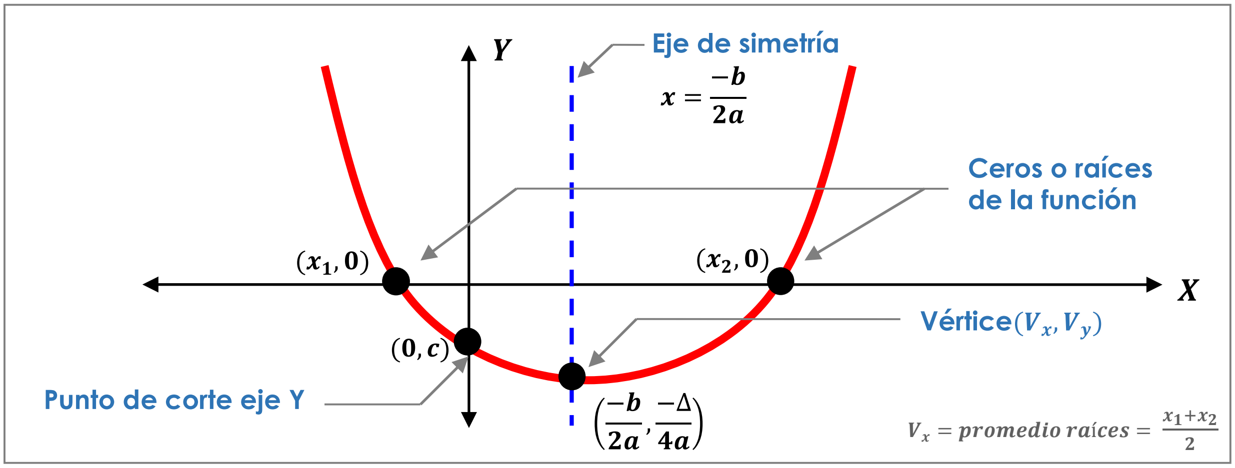
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(a) = \boldsymbol{4 - 4a}$, por lo tanto:

- Para tener dos intersecciones: $\Delta > 0 \;\rightarrow\; 4 - 4a > 0 \;\rightarrow\; 4 > 4a \;\rightarrow\; \boldsymbol{1 > a}$ luego **I) es falsa.**
- Para tener una intersección: $\Delta = 0 \;\rightarrow\; 4 - 4a = 0 \;\rightarrow\; 4 = 4a \;\rightarrow\; \boldsymbol{1 = a}$ luego **II) es correcta.**
- Para no tener intersecciones: $\Delta < 0 \;\rightarrow\; 4 - 4a < 0 \;\rightarrow\; 4 < 4a \rightarrow \boldsymbol{1 < a}$ luego **III) es falsa.**

4.- Puntos notables de la gráfica de la función cuadrática

4.1. Gráfico de la función

En la relación a los conceptos estudiados, podemos resumir los puntos notables de la función cuadrática en el siguiente esquema:

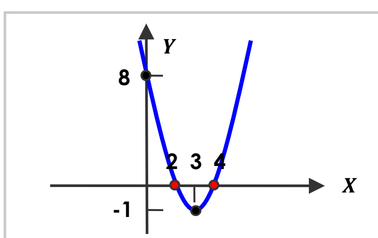


Ejemplo 3 Graficar la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x + 8}$

Solución: La idea es realizar el gráfico a partir de los parámetros generales de esta función cuadrática:

- $a = 1 \;\rightarrow\; a > 0 \;\rightarrow$ parábola abre hacia **arriba**.
- $c = 8 \;\rightarrow$ intersección con el eje $\boldsymbol{Y}$ en la coordenada $(\mathbf{0}, \mathbf{8})$
- Raíces: $0 = x^2 - 6x + 8 \;\rightarrow\; 0 = (x-2)(x-4) \;\rightarrow\; x_1 = 2;\ x_2 = 4 \;\rightarrow$ la curva pasa por: $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$ y $(\mathbf{4}, \mathbf{0})$.
- Vértice = $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-(-6)}{2\cdot 1}, \frac{4\cdot 1\cdot 8-(-6)^2}{4\cdot 1}\right) = (\mathbf{3}, \mathbf{-1})$. Otra forma: $\boldsymbol{V_x} = \frac{2+4}{2} = \mathbf{3} \rightarrow \boldsymbol{V_y} = f(3) = \mathbf{-1}$
  (promedio raíces) (reemplazar V_x en la función)

Ahora podemos graficar:



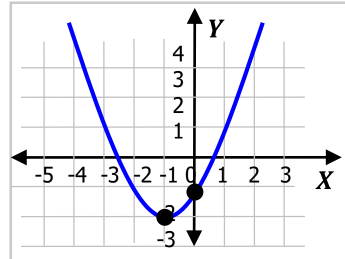
Observación: para graficar una función cuadrática, se puede recurrir a una tabla de valores, no obstante, es más lento el uso de este procedimiento que en el caso de una función lineal, así como la obtención de sus puntos notables. Sin embargo cuando se pida esbozar rápidamente un gráfico, es perfectamente válido usar una tabla de valores y unir puntos.

4.2. Determinación de la expresión analítica de la función

Dado que la función cuadrática presenta 3 parámetros (a, b, c), serán necesarios 3 datos de ella para determinar su expresión analítica. Estos datos pueden ser:

- 3 puntos cualesquiera de ella.
- La suma y el producto de las raíces más otro punto cualquiera.
- 2 puntos no simétricos y el eje de simetría. O el vértice y otro punto, etc.

Ejemplo 4 Encontrar la función cuadrática representada por la siguiente parábola.



Solución: El problema se traduce en encontrar los coeficientes a, b y c de la función, para lo cual empleamos los puntos que nos entregan:

- Punto $(\mathbf{0}, \mathbf{-1})$: corresponde a la intersección con el eje Y $\rightarrow$ $\boldsymbol{c = -1}$
  Por lo tanto, la función tiene la forma: $\boldsymbol{y = ax^2 + bx - 1}$

- $\boldsymbol{x = -1}$: corresponde al eje de simetría de la parábola, entonces: $\dfrac{-b}{2a} = -1 \rightarrow \boldsymbol{b = 2a}$
  Por lo tanto, la función tiene la forma: $\boldsymbol{y = ax^2 + 2ax - 1}$

- Finalmente, el punto $(\mathbf{-1}, \mathbf{-2})$ pertenece a la curva, por lo que podemos reemplazarlo en la expresión analítica, para así obtener una ecuación que nos permita calcular $\boldsymbol{a}$:
  $\boldsymbol{-2 = a(-1)^2 + 2a(-1) - 1} \rightarrow -2 = a - 2a - 1 \rightarrow \boldsymbol{a = 1} \rightarrow \boldsymbol{b = 2a} \rightarrow \boldsymbol{b = 2}$

  Entonces, la función buscada es: $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x - 1}$

Otra forma de obtener la función, que es algo más lenta, pero siempre funciona, es realizar un sistema de ecuaciones de 3x3, reemplazando 3 puntos de la curva, tal como se muestra a continuación:

Fórmula: $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

- Punto $(0, -1)$: $-1 = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow \boldsymbol{-1 = c}$ (reemplazamos el valor de **c** en las demás ecuaciones).
- Punto $(-1, -2)$: $-2 = a(-1)^2 + b(-1) - 1 \rightarrow -2 = a - b - 1 \rightarrow \boldsymbol{a - b = -1}$
- Punto $(-2, -1)$: $-1 = a(-2)^2 + b(-2) - 1 \rightarrow -1 = 4a - 2b - 1 \rightarrow \boldsymbol{4a - 2b = 0}$
  (Este último punto es el simétrico de (0, -1) respecto del eje de simetría de la parábola).

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene: $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{b = 2}$ $\rightarrow$ la fórmula buscada es: $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x - 1}$

5.- Problemas de aplicación

Ejemplo 5 La concentración de CO_2 en la atmósfera a partir de 1960 puede ser modelada por la función $\boldsymbol{C(t) = 315 + 0{,}8t + 0{,}02t^2}$, en donde $\boldsymbol{C(t)}$ es la concentración de CO_2 en ppm (partes por millón) y $\boldsymbol{t}$ son los años transcurridos a partir de 1960 (año cero). Sobre la base de esta propuesta:

- **¿Cuál era la concentración en 1960 de CO_2 en la atmósfera?**
  La concentración en el año 1960 la encontramos haciendo $\boldsymbol{t = 0}$ en la función (año cero). Entonces:
  $\boldsymbol{C(0)} = 315 + 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}02(0)^2 = \boldsymbol{315ppm}$

- **¿Cuál fue la variación de la concentración de CO_2 en la atmósfera entre 1970 y 1980?**
  Primero calculamos la concentración en 1970 $(\boldsymbol{t = 10})$
  $\boldsymbol{C(10)} = 315 + 0{,}8 \cdot 10 + 0{,}02(10)^2 = \boldsymbol{325ppm}$

  Ahora calculamos la concentración en 1980 $(\boldsymbol{t = 20})$
  $\boldsymbol{C(20)} = 315 + 0{,}8 \cdot 20 + 0{,}02(20)^2 = \boldsymbol{339ppm}$

  La variación de la concentración se calcula a partir de la diferencia entre 339ppm y 325ppm

Por lo tanto, entre 1970 y 1980 la concentración de CO_2 en la atmósfera **aumentó en $\boldsymbol{14\ ppm}$.**

Ejemplo 6 Entre todos los pares de números cuya suma es 100, determinar el par cuyo producto es máximo.

<u>Solución</u>: Si designamos por $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{s}$ a los números buscados, tendremos que $\boldsymbol{r+s=100} \;\rightarrow\; \boldsymbol{s=100-r}$. Entonces, el producto ($\boldsymbol{P}$) entre los dos números se puede representar por:

$$P = r \cdot s = r(100-r) = 100r - r^2 \;\rightarrow\; \boldsymbol{P(r) = -r^2 + 100r}$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{P}$ depende de $\boldsymbol{r}$ a través de una función cuadrática con: $a=-1;\ b=100;\ c=0$.
Dado que $a<0$, la función tiene un máximo, el que se encuentra en el vértice de la parábola. Entonces:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-100}{2\cdot -1}, \frac{4\cdot -1\cdot 0 - 100^2}{4\cdot -1}\right) = (\mathbf{50, 2.500})$$

Notar que **r** hace el papel de **x**, mientras que **P** hace el papel de **y**.

El resultado anterior significa que la función tiene un máximo cuando $\boldsymbol{x=50} \rightarrow \boldsymbol{r=50}$, y el valor de la función en ese punto es $\boldsymbol{y=2.500} \rightarrow \boldsymbol{P=2.500}$. Por lo tanto, los números buscados son $\boldsymbol{r=s=50}$ (ya que $s=100-r$) y su producto es $\mathbf{2.500}$.

Ejemplo 7 La siguiente fórmula relaciona el tiempo transcurrido (t) con la altura $A(t)$ que alcanza una pelota al ser lanzada desde el suelo hacia arriba: $\boldsymbol{A(t) = 10t - 5t^2}$

Donde la altura se mide en metros y el tiempo en segundos. Se pide obtener:

- **La máxima altura que alcanza la pelota.**

  Dado que se trata de una función cuadrática con $a<0$, ésta tiene un máximo $(a=-5,\ b=20,\ c=0)$.
  La altura máxima corresponde a: $V_y = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{0-10^2}{4\cdot -5} = \mathbf{5\ m}$

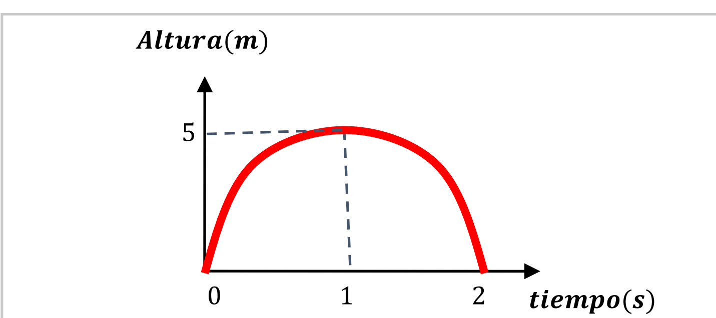
  En este caso **t** hace el papel de **x**, mientras que **A** hace el papel de **y**.

- **Tiempo que la pelota asciende y tiempo total de viaje de la pelota.**

  El eje de simetría se relaciona con el tiempo donde la pelota termina de ascender y comienza a descender, el cual se obtiene a partir de: $V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2\cdot -5} = \mathbf{1s}$

  Entonces, la pelota asciende durante 1 segundo y, por simetría, demora en descender la misma cantidad de tiempo, por lo que el tiempo total de viaje es de 2 segundos.

- **Gráfico.**



CAPÍTULO VI

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

I.- PROBABILIDAD

1.- Conceptos básicos y frecuencia de un suceso

1.1. Definición: La teoría matemática de la probabilidad es aquella que modela los fenómenos aleatorios.

- **Fenómeno aleatorio:** entendemos a aquel que está regido por el azar, conociéndose todos los resultados posibles, pero sin tener certeza del resultado particular que se tendrá. Por ejemplo: lanzar una moneda o un dado, extraer un naipe de una baraja, etc.

- **Fenómeno determinístico**: corresponde a aquel, que bajo condiciones determinadas, produce un resultado único o previsible. Por ejemplo, el agua calentada a 100 grados Celsius, a nivel del mar, se transforma en vapor.

- **Espacio muestral (E):** corresponde al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, al lanzar una moneda: E = {cara, sello} = {c, s}, al lanzar un dado: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, al lanzar 2 monedas: E = {cc, cs, sc, ss}.

- **Evento o suceso:** es todo subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, si al lanzar un dado, el suceso A se define como obtener un número par, entonces A = {2, 4, 6}.

1.2. Frecuencia de un suceso

- **Frecuencia absoluta de un suceso**: número de veces que se repite un suceso.

- **Frecuencia relativa de un suceso**: cuociente entre frecuencia absoluta del suceso y el total de experimentos realizados. La suma de las frecuencias relativas debe ser siempre 1.

Ejemplo 1 Supongamos que se lanza 20 veces un dado, obteniéndose los siguientes resultados:

Cara 1: 4 veces; *Cara 2*: 3 veces; *Cara 3*: 2 veces; *Cara 4*: 5 veces; *Cara 5*: 4 veces; *Cara 6*: 2 veces

Ordenemos los datos en una tabla de frecuencias y luego interpretemos algunos ítems de la tabla.

Cara	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	4	$4/20 = 0{,}2 = 20\%$
2	3	$3/20 = 0{,}15 = 15\%$
3	2	$2/20 = 0{,}1 = 10\%$
4	5	$5/20 = 0{,}25 = 25\%$
5	4	$4/20 = 0{,}2 = 20\%$
6	2	$2/20 = 0{,}1 = 10\%$
Total	**20**	$\mathbf{20/20 = 1 = 100\%}$

- Los números pares {2, 4, 6} correspondieron a 3 + 5 + 2 = **10 lanzamientos**, equivalentes a un 15% + 25% + 10% = **50% de los casos**.
- El porcentaje de números primos obtenidos {2, 3, 5} corresponde a 15% + 10% + 20% = **45%** del total de casos.
- El porcentaje de números comprendidos entre 1 y 5 (todos menos el 6) se puede obtener como 100% - 10% = **90%**

2.- Conceptos básicos de combinatoria

2.1. Principio multiplicativo

Si un cierto acto se puede efectuar de $\boldsymbol{m}$ formas diferentes y si, para cada una de esas formas, un segundo acto se puede efectuar de $\boldsymbol{n}$ formas diferentes, entonces los dos actos se pueden efectuar de $\boldsymbol{m \cdot n}$ formas diferentes. Si por cada una de las $\boldsymbol{m \cdot n}$ formas de efectuar estos 2 actos, existen $\boldsymbol{p}$ formas de efectuar un tercer acto, entonces hay $\boldsymbol{m \cdot n \cdot p}$ formas de efectuar los 3 actos. De igual manera podríamos considerar un cuarto acto y así sucesivamente.

Ejemplo 2 Si 5 compañías de aviación cubren la ruta Chicago-Nueva York y 3 compañías vuelan de Nueva York a París, entonces hay 3 · 5 = **15 formas** de viajar de Chicago a París, pasando por Nueva York.

Ejemplo 3 ¿Cuántos números de 3 cifras pueden formarse usando los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6? Considerar los casos con repetición y sin repetición de cifras.

Solución: Dado que elegiremos 3 cifras, el procedimiento consistirá en colocar 3 casilleros con las posibilidades asociadas y luego aplicar el principio multiplicativo:

- Con repetición: 6 • 7 • 7 = **294 posibilidades**

  Para el primer casillero hay 6 posibilidades, ya que, al ser un número de 3 cifras, éste no puede comenzar con 0. Para el segundo y el tercer casillero son 7 posibilidades, ya que se pueden repetir los números y no hay restricciones.

- Sin repetición: 6 • 6 • 5 = **180 posibilidades**

  Para el primer casillero sigue habiendo 6 posibilidades, pero para el segundo ya no hay 7 opciones, sino 6. Esto, porque si elegimos un número en el primer casillero, éste ya no puede ser elegido en el segundo. De similar forma, en el tercer casillero hay 5 opciones, dado que no es posible elegir los números que se seleccionaron en los 2 casilleros anteriores.

2.2. Factorial de un número

Dado un número natural $\boldsymbol{n > 1}$, se denomina "$\boldsymbol{n}$ **factorial**" y se simboliza por $\boldsymbol{n!}$ al producto:

$$\boxed{\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}}$$

Además, se define: $\boldsymbol{0! = 1! = 1}$

2.3. Permutaciones

Son las diferentes formas de ordenar $\boldsymbol{n}$ elementos distintos, lo que se calcula como: $\boxed{\boldsymbol{P_n = n!}}$

Ejemplo 4 Consideremos las letras a, b, c, ¿Cuántas formas de ordenarlas (permutaciones) existen?

Solución: Si usamos la fórmula anterior: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = \boldsymbol{6}$ **formas**: {abc, acb, bac, bca, cab, cba}.

Otra forma de ver este problema es a través de analizar el número de opciones en cada selección, aplicando el mismo concepto que en el ejercicio 3, considerando el caso sin repetición:

3 • 2 • 1 = **6** formas de ordenar o 6 permutaciones.

2.4. Variaciones

Una variación corresponde a una selección de $\boldsymbol{k}$ objetos (sin repetirlos) de un total de $\boldsymbol{n}$ elementos disponibles, tomando en cuenta que **influye** el orden de los componentes, de manera que dos grupos con los mismos elementos pueden diferenciarse por el orden que estos tengan (cada permutación distinta aporta una variación distinta). El número de variaciones que pueden efectuarse seleccionando $\boldsymbol{k}$ objetos de un total de $\boldsymbol{n}$, está dado por:

$$\boxed{V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Ejemplo 5 ¿Cuántas variaciones diferentes de dos elementos se pueden formar con las 5 vocales?

Solución: En este caso debemos elegir 2 elementos ($k = 2$) de un total de 5 elementos disponibles ($n = 5$)

- Si usamos la fórmula anterior: $V_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}} = 4\cdot 5 =$ **20 variaciones**

En efecto, las variaciones posibles son: ae, ai, ao, au, ea, ei, eo, eu, ia, ie, io, iu, oa, oe, oi, ou, ua, ue, ui, uo

- Notar que este problema se podía haber resuelto usando el procedimiento del ejemplo 3, caso sin repetición. → Total de variaciones: $\underline{5}$ • $\underline{4}$ = **20 posibilidades** = **20 variaciones**

2.5. Combinaciones

El concepto es el mismo que para las variaciones, pero con la diferencia de que **no influye** el orden de los componentes. El número de combinaciones que pueden efectuarse seleccionando $\boldsymbol{k}$ objetos de un total de $\boldsymbol{n}$, está dado por:

$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Esta última expresión recibe el nombre **número combinatorio** y se lee **"n sobre k"**: $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

Ejemplo 6 ¿Cuántas combinaciones diferentes de dos elementos se pueden formar con las 5 vocales?

Solución: Usando directamente la fórmula $C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot \cancel{1\cdot 2\cdot 3}} = 2\cdot 5 =$ **10 combinaciones**

En efecto, las combinaciones posibles son: ae, ai, ao, au, ei, eo, eu, io, iu, ou.

Notar que las variaciones siempre serán $\boldsymbol{k}!$ veces las combinaciones, factor que corresponde al total de permutaciones o formas de ordenar los elementos.

Ejemplo 7 Calcular el total de opciones posibles al jugar al loto.

Solución: En este juego se eligen 6 números (sin repetirlos) de un total de 36 (no importando el orden).

(Usando calculadora)

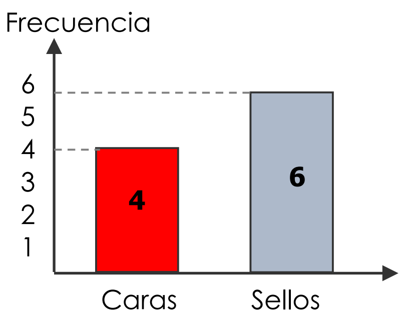
Entonces, el total de opciones viene dado por: $C_6^{36} = \frac{36!}{6!\cdot 30!} = \frac{31\cdot 32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ = $\mathbf{1.947.792}$ **posibilidades**

3.- Cálculo de probabilidades

3.1. Probabilidad experimental: Ley de los grandes números

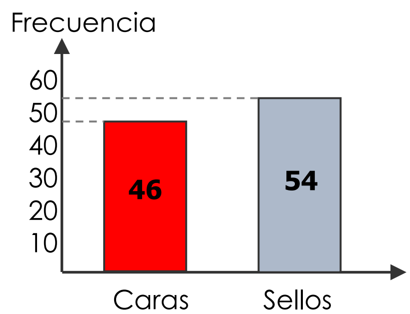
Si analizamos el experimento consistente en lanzar una moneda no cargada 10 veces, sería razonable esperar obtener 5 caras y 5 sellos. A pesar de la anterior, es difícil obtener justamente la misma cantidad de caras que de sellos, por lo que las frecuencias relativas respectivas difieren. Sin embargo, a medida que el número de lanzamientos aumenta, las frecuencias relativas de ambos sucesos (cara y sello) comienzan a igualarse.
A continuación, se presentan los resultados de 3 experimentos, consistentes en lanzar 10, 100 y 1.000 veces una moneda, junto con una tabla que entrega las frecuencias relativas de cada uno.

Caso 1: 10 lanzamientos



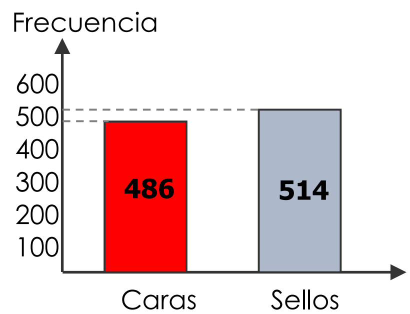
Cara	Sello
0,400	**0,600**

Caso 2: 100 lanzamientos



Cara	Sello
0,460	**0,540**

Caso 3: 1.000 lanzamientos



Cara	Sello
0,486	**0,514**

Se observa que cuando el número de lanzamientos crece, las frecuencias relativas, tanto de caras como de sellos, se aproximan a **0,5**. A partir de lo anterior, podemos dar una definición básica al concepto de probabilidad:

- **Probabilidad experimental:** corresponde al valor al cual tiende la frecuencia relativa de un suceso, cuando el número de repeticiones es lo suficientemente grande.

Ejemplo 8 Estimar el número de peces de un lago, sabiendo que se realizó la siguiente prueba:

- Se capturaron al azar 1.000 peces, se marcaron y luego se devolvieron al agua.
- Un tiempo después, se capturó una muestra de 600 peces, de los cuales 15 estaban marcados.

Solución: Si las muestras fueron efectivamente aleatorias, se espera que la frecuencia relativa de los peces marcados en la muestra, sea parecida a la frecuencia relativa de peces marcados sobre en todo el lago.

A partir del concepto anterior podemos estimar la cantidad de peces igualando las frecuencias relativas:

fr. muestra fr. lago

Marcados $\longrightarrow$
Total $\longrightarrow$

$$\frac{15}{600} \approx \frac{1.000}{x} \rightarrow x \approx \mathbf{40.000\ peces}\ \text{(estimación)}$$

3.2. Probabilidad en eventos equiprobables: regla de Laplace

- **Definición:** en forma más precisa, entendemos por probabilidad de ocurrencia de un evento, a un número entre **0 y 1**, que representa el nivel de certeza del evento dentro de una totalidad de eventos posibles en un experimento aleatorio. La probabilidad de un evento **imposible es** $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$ y la probabilidad de un evento seguro (equivalente al espacio muestral) es $\boldsymbol{P(E) = 1 = 100\%}$.

- **Eventos equiprobables:** son aquellos que presentan igual probabilidad. Por ejemplo, es equiprobable que salga una cara o un sello en el lanzamiento de una moneda no cargada. También es equiprobable que salga un 1 o un 6 en el lanzamiento de un dado no cargado.

- **Eventos independientes:** se refiere a cuando la ocurrencia de un evento no afecta la ocurrencia del otro. Por ejemplo, si sale cara en el lanzamiento de una moneda, no influye sobre la posibilidad que salga cara en otro lanzamiento.

- **Probabilidad clásica o regla de Laplace:** si en un experimento aleatorio todos los eventos son **equiprobables** la probabilidad de un evento A está dada por:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ totales}}$$

- **Suceso complementario (A^c):** es aquel que, junto con el suceso original, totalizan el espacio muestral. Por ejemplo, el complemento de sacar número un par en el lanzamiento de un dado, es sacar un número impar. A partir de lo anterior, se tiene que: $\boldsymbol{P(A) + P(A^c) = 1}$, o bien: $\boldsymbol{P(A^c) = 1 - P(A)}$.

Ejemplo 9 Ejercicios misceláneos: **lanzamientos de monedas, dados y eventos complementarios.**

- **Obtener la probabilidad de obtener cara en el lanzamiento de una moneda no cargada.**

  Se enumeran los casos favorables (C.F.) y los casos totales (C.T.) y usamos la regla de Laplace:
  C.F. = {cara} → 1 caso; C.T. = {cara, sello} → 2 casos; entonces: $P(cara) = \frac{C.F.}{C.T.} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

- **Obtener la probabilidad de obtener un número múltiplo de 3 en el lanzamiento de un dado no cargado.**

  C.F. = {3, 6} → 2 casos; C.T. = {1,2,3,4,5,6} → 6 casos; entonces: $P(múltiplo\ de\ 3) = \frac{C.F.}{C.T.} = \frac{2}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

- **Se lanzan 2 dados,**

- ***¿Cuál es la suma con mayor probabilidad?***
  Una forma de dar respuesta a esto, es enumerando todos los casos a través de una tabla con los posibles resultados:
  Se observa que existen 6 combinaciones (1-6, 2-5, 3-4, 4-3, 5-2, 6-1), de un total de 36, que nos entregan suma 7, convirtiéndose en la alternativa más probable. Por lo tanto, la suma más probable corresponde a **7** y su probabilidad de ocurrencia es $6/36 = \boldsymbol{1/6}$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	**7**
2	3	4	5	6	**7**	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

- ***¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma mayor o igual a 8?***
  $15/36 = \boldsymbol{5/12}$

- ***¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma entre 5 y 8 (incluyéndolos)?***
  $20/36 = \boldsymbol{5/9}$

- **Si ha sido lanzada una moneda no cargada 5 veces, obteniéndose 5 caras, ¿cuál es la probabilidad de que en el siguiente lanzamiento salga cara?**

  Dado que cada lanzamiento es independiente del anterior, la probabilidad de cara en el sexto lanzamiento sigue siendo $\mathbf{1/2}$.

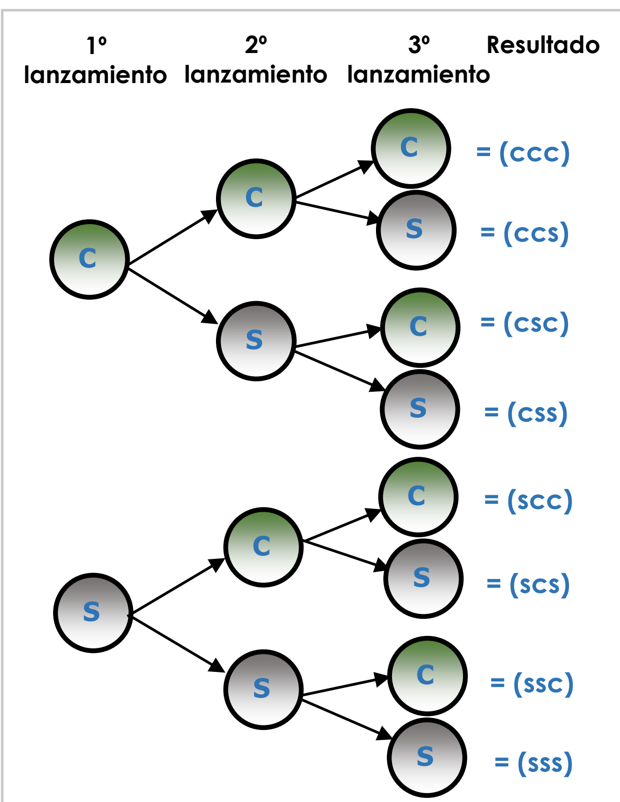
- **Si la probabilidad de que un alumno apruebe un ramo es del 90%, ¿cuál es la probabilidad de que repruebe esa asignatura?**
  Dado que ambos eventos son complementarios: $P(repruebe) = 1 - P(apruebe) = \ 1 - 0{,}9 \ = \ \mathbf{0,1}$

- **Obtener la probabilidad de no sacar una bola azul, en una tómbola que tiene 4 bolas azules, 3 rojas y 2 negras.**
  $P(no\ azul) = P(negra\ o\ roja) = \mathbf{5/9}$; o bien: $P(no\ azul) = \ 1 - P(azul) = 1 - 4/9 = \mathbf{5/9}$

4.- Diagrama Árbol

Frecuentemente, cuando se realiza un experimento varias veces seguidas, es conveniente seguir un procedimiento denominado diagrama Árbol, el que nos permite enumerar los diferentes casos y así estimar las probabilidades asociadas. Para comprender este concepto, estudiemos un ejemplo.

Ejemplo 10 Por medio de un diagrama árbol modelemos el lanzamiento de 3 monedas, y luego contestemos algunas preguntas.



¿Cuál es la probabilidad de que:

Resultado

•Salgan 3 caras
Del diagrama árbol observamos que el único caso favorable es: {ccc}. Dado que los eventos son equiprobables, y el total de casos son 8, la probabilidad de {ccc} es: $\mathbf{1/8}$.

•Salga exactamente una cara
C.F. = {css, scs, ssc} = 3 → $\boldsymbol{P = 3/8}$

•No salgan sellos
C.F. = {ccc} = 1 → $\boldsymbol{P = 1/8}$

•Salga al menos un sello
C.F. = {ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss} = 7 → $\boldsymbol{P = 7/8}$

•Salga máximo una cara
C.F. = {css, scs, ssc, sss} → $\boldsymbol{P = 4/8 = 1/2}$

<u>Observación</u>: Al lanzar un dado $\boldsymbol{n}$ veces, el total de casos posibles es: $\mathbf{2^n}$, lo que puede deducirse a partir del principio multiplicativo: 2 • 2 • 2 • .... • 2 (n veces)

5.- Combinación de sucesos

Generalmente es interesante describir fenómenos aleatorios donde intervienen varios sucesos. Revisemos algunas definiciones básicas y luego estudiemos los conceptos claves para abordar estos problemas.

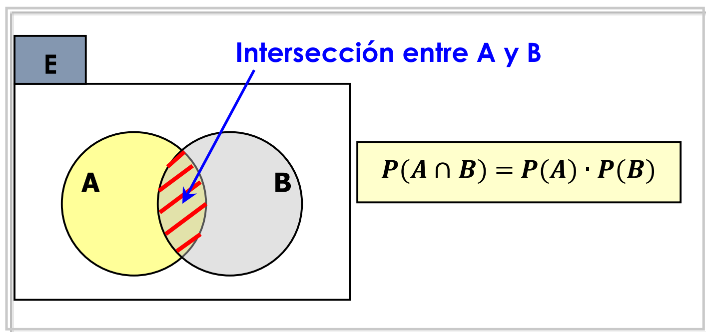
- **Intersección de dos sucesos A y B:** se refiere a la posibilidad de que ocurran A y B simultáneamente.

- **Unión de dos sucesos A y B:** se refiere a la ocurrencia de al menos uno de los dos sucesos.
  Por ejemplo, al lanzar un dado, sea: A = sale nº par → $A = \{2,4,6\}$ y B = sale nº mayor que 3 → $B = \{4,5,6\}$
  Entonces: $A \cup B = \{2,4,5,6\}$ (sale par o mayor que 3) y $A \cap B = \{4,6\}$ (sale par y mayor que 3).

- **Sucesos A y B mutuamente excluyentes:** son aquellos que no tienen probabilidad de ocurrir simultáneamente.
  Por ejemplo, al lanzar un dado, sea: A = sale nº impar → $A = \{1,3,5\}$ y B = sale nº múltiplo de 4 → $B = \{4\}$.
  En este caso: $P(A \cap B) = 0$, por lo que son eventos mutuamente excluyentes (no puede salir un número par y múltiplo de 4 al mismo tiempo).

5.1. Intersección de eventos Independientes

Nos referimos a eventos independientes, cuando la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. Por ejemplo, si sale cara en el lanzamiento de una moneda, esto no afecta el lanzamiento de la siguiente moneda (independientes). Pero si sacamos una bola verde, sin reponerla, de una tómbola con 3 bolas verdes y 3 bolas rojas, esto afectará la probabilidad de volver a sacar una bola verde en la segunda extracción. El cálculo de la probabilidad de ocurrencia simultánea de dos o más eventos independientes se puede realizar **multiplicando** las **probabilidades** respectivas.



Ejemplo 11 **Lanzamiento de monedas:** se lanza una moneda no cargada, ¿cuál es la probabilidad de:

- **Lanzar la moneda 2 veces y obtener 2 caras seguidas?**
  En este caso es necesario que ocurran dos eventos independientes en forma simultánea, por lo tanto se deben multiplicar sus probabilidades respectivas: $P(cc) = P(c) \cdot P(c) = 1/2 \cdot 1/2 = \mathbf{1/4}$

- **Lanzar la moneda 4 veces y obtener 4 caras seguidas?**
  $P(cccc) = P(c) \cdot P(c) \cdot P(c) \cdot P(c) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = \mathbf{1/16}$

- **Lanzar la moneda 3 veces seguidas y no obtener 3 sellos?**

  Dentro de las estrategias de solución, muchas veces resulta más sencillo obtener la probabilidad del complemento de un suceso determinado, principalmente cuando el suceso original involucra a varios eventos a la vez, mientras que el complemento está conformado por sólo un evento particular. Volviendo a la pregunta, tenemos:

  - Usando el complemento: $P(no\ 3\ sellos) = 1 - p(3\ sellos) = 1 - P(sss) = 1 - [1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2] = \mathbf{7/8}$
  - Usando el suceso original: $P(no\ 3\ sellos) = P(0\ sellos) + p(1\ sello) + p(2\ sellos)$
  $= P(ccc) + p(scc, csc, ccs) + p(ssc, scs, css) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = \mathbf{7/8}$

Ejemplo 12 **Lanzamiento de dados:** Se tiene un dado de 6 caras. ¿Cuál es la probabilidad de:

- **Lanzar el dado 2 veces y que salga al menos un 5?**
  En este caso es más fácil obtener el complemento del suceso: $P(al\ menos\ un\ 5) = 1 - P(ningún\ 5)$
  $= 1 - [\,P(no\ 5\ en\ 1º\ lanzamiento) \cdot P(no\ 5\ en\ 2º\ lanzamiento)] = 1 - [5/6 \cdot 5/6] = 1 - 25/36 = \mathbf{11/36}$

- **Lanzar el dado 2 veces y que primero salga un número par y que luego salga un número primo?**
  $P = P(número\ par\ en\ 1º\ lanzamiento) \cdot P(número\ primo\ en\ 2º\ lanzamiento) = 1/2 \cdot 1/2 = \mathbf{1/4}$

Ejemplo 13 **Extracción de bolas de una tómbola CON reposición:** se tiene una tómbola con 1 bola roja, 1 bola azul, 1 bola verde y 2 bolas amarillas. Se sacan 2 bolas con reposición, ¿cuál es la probabilidad de:

- **Sacar la bola roja?**
  Nuevamente es más conveniente obtener el complemento del suceso: $P(roja) = 1 - P(no\ roja)$
  $= 1 - [P(no\ roja\ en\ 1º\ extracción) \cdot P(no\ roja\ en\ 2º\ extracción)] = 1 - [4/5 \cdot 4/5] = 1 - 16/25 = \mathbf{9/25}$

- **Sacar 2 bolas amarillas?**
  $P(2\ amarillas) = P(amarilla\ en\ 1º\ extracción) \cdot P(amarilla\ en\ 2º\ extracción) = 2/5 \cdot 2/5 = \mathbf{4/25}$

- **Sacar 1 bola café o 2 bolas rojas?**
  Sacar una bola café es imposible. Pero si es factible sacar una bola roja en la primera extracción y volver a sacarla en la segunda, lo que está dado por la siguiente expresión: $P(2\ rojas) = 1/5 \cdot 1/5 = \mathbf{1/25}$

Ejemplo 14 Las muestras de ciertas pinturas son de uno de estos tres colores: rojo, verde o azul, y con una de estas dos terminaciones: opaca o brillante. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una muestra de pintura al azar, ésta sea de color verde opaco?

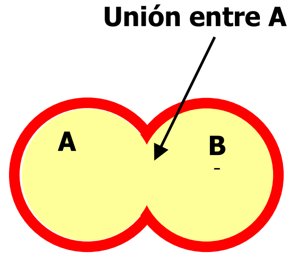
<u>Solución</u>: Podemos abordar el problema estudiando el espacio muestral: $E = \{RO, RV, VO, VB, AO, AB\}$.
Teniendo presente que el único caso favorable es verde opaco: VO, la probabilidad buscada es: $\mathbf{1/6}$

La otra forma es realizar el producto directo entre la probabilidad de elegir una pintura color verde y una terminación color opaco (se consideran independientes), entonces: $P(VO) = P(V) \cdot P(O) = 1/3 \cdot 1/2 = \mathbf{1/6}$

5.2. Unión de sucesos

Hablamos de probabilidad de la unión de entre dos sucesos A y B, cuando nos referimos a la posibilidad de ocurrencia de al menos uno de los dos eventos (A o B).
De las fórmulas observadas, es claro que se pueden sumar directamente las probabilidades de A y B (sin considerar la intersección), siempre y cuando ambos eventos sean mutuamente excluyentes. En caso contrario, se debe restar la intersección.

Unión entre A y B



$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Para eventos mutuamente excluyentes:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Ejemplo 15 **Extracción de una carta al azar de una baraja inglesa:** ¿cuál es la probabilidad de que La carta extraída sea de corazones o sea un mono?

<u>Solución</u>: Sabemos que son en total 52 cartas, de las cuales 13 son corazones y 12 son monos. Pero también existen 3 monos que a la vez son corazones, luego:

$$P\ (corazón \cup Mono) = P(corazón) + P(mono) - P(corazón \cap Mono) = 13/52 + 12/52 - 3/52 = 22/52 = \mathbf{11/26}$$

Ejemplo 16 **Trabajando juntos:** se sabe que Juanito puede resolver un problema con una probabilidad del 80%, mientras que Pedrito con una probabilidad del 50%. ¿Cuál es la probabilidad de que se resuelva el problema si ambos intentan resolverlo?

<u>Solución</u>: Lo más eficiente es analizar la probabilidad de que no resuelvan el problema.

$$P(Juanito\ no\ resuelve) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 \qquad P(Pedrito\ no\ resuelve) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

- $P(resuelve\ Juanito\ o\ Pedrito) = 1 - [\underbrace{P(Juanito\ no\ resuelve) \cdot P(Pedrito\ no\ resuelve)}_{\text{Se consideran eventos independientes}}] = 1 - [0{,}2 \cdot 0{,}5] = \mathbf{0{,}9}$

- Otra forma de resolver este problema, es con la fórmula de la unión: $P(resuelve\ Juanito\ o\ Pedrito)$ $= P\ (resuelve\ Juanito) + P(resuelve\ Pedrito) - P(resuelve\ pedrito\ y\ Juanito) = 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 = \mathbf{0{,}9}$

<u>5.3. Probabilidad Condicional</u>

Se refiere a la probabilidad de que ocurra un evento A, sabiendo que ocurrió un evento B, y se escribe $\boldsymbol{P(A/B)}$.

- **Si los eventos son independientes**, la ocurrencia de B **no afecta** a la ocurrencia de A. Entonces, la probabilidad de A dado B es: $\boldsymbol{P(A/B) = P(A)}$

- **Si los eventos son dependientes**, la ocurrencia de B **afecta** a la ocurrencia de A. Entonces, la probabilidad de A dado B se calcula a partir de la siguiente fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}}$$

- **Intersección entre eventos dependientes** se calcula a partir de: $\boxed{\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}}$

Ejemplo 17 ¿Cuál es la probabilidad de extraer un 10 de una baraja, sabiendo que la carta es número par (la reina cuenta como 12)?

<u>Solución</u>: Definamos los eventos:
A = sacar un 10 de la baraja completa, entonces P(A) = 1/13
B = sacar número par de la baraja completa, entonces P(B) = 6/13

La probabilidad de sacar número par y 10 es la misma que de sacar un 10: P=1/3

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/13}{6/13} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

Otra forma de analizar este problema, consiste en reconocer que si nos quedamos sólo con los números pares: (2, 4, 6, 8, 10 ,12) x 4 pintas, existen 24 posibilidades de sacar una carta. Y como el 10 se repite 4 veces dentro de esas 24 cartas, su probabilidad de extracción es $\mathbf{4/24} = \mathbf{1/6}$.

Ejemplo 18 En una caja hay 50 fichas de igual forma y peso: 12 son rojas, 20 son cafés y 18 son amarillas.

- **¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja, una café, una amarilla y nuevamente una roja, en ese orden y sin reposición?**

  $P(RCAR) = P(R) \cdot P(C/R) \cdot P(A/RC) \cdot P(R/RCA) = \mathbf{\frac{12}{50} \cdot \frac{20}{49} \cdot \frac{18}{48} \cdot \frac{11}{47}}$

  Al ser un experimento sin reposición, las probabilidades de una extracción determinada dependen de la extracción anterior. Por esta razón disminuye el denominador (y también en ocasiones el numerador), ya que se van sacando bolas que no se reponen, cambiando así la probabilidad de un suceso específico.

- **¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja, una café, una amarilla y nuevamente una roja, en ese orden y con reposición?**

  $P(RCAR) = P(R) \cdot P(C) \cdot P(A) \cdot P(R) = \mathbf{\frac{12}{50} \cdot \frac{20}{50} \cdot \frac{18}{50} \cdot \frac{12}{50}}$ En este caso no varían las probabilidades.

- **¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja, una café y una amarilla (en cualquier orden), sin reposición?**

  Dado que no importa el orden de extracción, existen varias opciones dadas por todas las permutaciones de los elementos $(RCA) \rightarrow RCA, RAC, CRA, CAR, ARC, ACR = \mathbf{6}$ **permutaciones**, valor que se puede obtener directamente con la fórmula de las permutaciones: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{6.}$ Entonces:

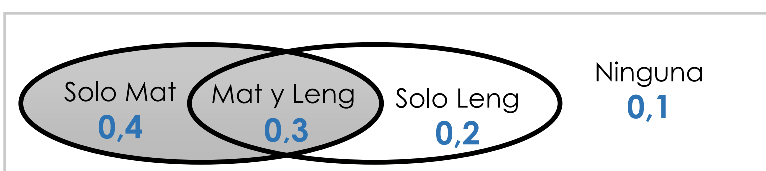
  $$P(RCA\ en\ cualquier\ orden\ y\ sin\ reposición) = 3! \cdot \frac{12}{50} \cdot \frac{20}{49} \cdot \frac{18}{48} = \mathbf{6 \cdot \frac{12}{50} \cdot \frac{20}{49} \cdot \frac{18}{48}}$$

En ciertos casos, se recomienda realizar un diagrama con los sucesos, permitiéndonos dar una solución sencilla al problema, sin el uso de fórmulas complicadas, tal como se aprecia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 19 La probabilidad de que un alumno apruebe Matemáticas es 0,7, la de que apruebe Lenguaje es 0,5 y la de que apruebe las dos asignaturas es 0,3.

- Se comienza reconociendo que la probabilidad de aprobar ambos ramos es $\mathbf{0,3}$ (intersección)
- Si $P(aprobar\ matemáticas) = 0{,}7$, entonces: $P(aprobar\ matemáticas\ y\ no\ lenguaje) = 0{,}7 - 0{,}3 = \mathbf{0,4}$
- Si $P(aprobar\ lenguaje) = 0{,}5$, entonces: $P(aprobar\ lenguaje\ y\ no\ matemáticas) = 0{,}5 - 0{,}3 = \mathbf{0,2}$
- Sumamos las probabilidades de cada zona de aprobación: $P(Sólo\ Mat) + P(Mat\ y\ Leng) + P(Sólo\ Leng)$ $= 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 = \mathbf{0,9}$ $\rightarrow$ lo que significa que $P(no\ aprobar\ nada) = 1 - 0{,}9 = \mathbf{0,1}$

Pasamos los datos a un diagrama:



- **¿Cuál es la probabilidad de que el alumno apruebe al menos una de las dos asignaturas?**

  Del diagrama se observa que la probabilidad buscada es: $0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 = \mathbf{0,9}$

- **¿Cuál es la probabilidad de que el alumno apruebe matemáticas sabiendo que aprobó lenguaje?**

  Usamos probabilidad condicional: $P(Mat/Leng) = \frac{P(Mat \cap Leng)}{P(leng)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \mathbf{0,6}$

- **¿Cuál es la probabilidad de que no apruebe lenguaje sabiendo que no aprobó matemáticas?**

  $$P(no\ Leng/no\ Mat) = \frac{P(no\ Leng \cap no\ Mat)}{P(no\ Mat)} = \frac{P(ninguna)}{P(no\ Mat)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \mathbf{\frac{1}{3}} = \mathbf{0,\overline{3}}$$

II.- ESTADÍSTICA

1.- Conceptos básicos de estadística descriptiva

La Estadística descriptiva es una rama de la matemática que se utiliza para describir y analizar ciertas características de un conjunto de individuos o cosas llamados población, a través del comportamiento de distintas variables.

- **Población o universo:** conjunto de personas o cosas, con características determinadas, observables y medibles, de las que se desea investigar.

- **Muestra:** subconjunto de la población obtenido para ser analizado estadísticamente. Se parte del supuesto que presenta características similares que la población.

- **Individuos:** cada uno de los integrantes de la población.

- **Variable (x):** característica que se asocia a los elementos de una muestra o población. Pueden ser medidas u observadas.

    - **Variables cualitativas**: se expresan por medio del nombre del atributo en estudio (sexo, color, etc.).
    - **Variables cuantitativas**: se expresan por un número (estatura, edad, etc.). Estas últimas pueden ser:
      - Continuas: admiten cualquier número real (ej: peso, tiempo, etc).
      - Discretas: solo admiten números enteros (ej: número de hermanos, autos, etc).

  Entendemos por **recorrido** de una variable a todos los valores posibles que ésta puede tomar.

- **Datos:** conjunto de valores recolectados de una variable para cada uno de los elementos pertenecientes a la muestra.

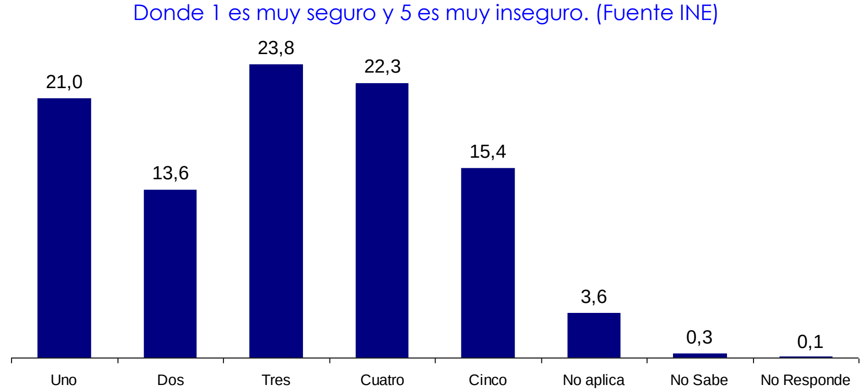
2.- Gráficos básicos

2.1. Gráfico de Barras

Se usa fundamentalmente para representar frecuencias de una variable cualitativa o cuantitativa discreta. El eje Y se utiliza para inscribir las frecuencias y el eje X para la escala de clasificación utilizada.

Lo anterior, se ilustra en el gráfico ejemplo, donde la mayoría de los casos se concentra en las categorías tres y cuatro, indicando que en general el chileno se siente inseguro, frente a la posibilidad de sufrir un delito caminando de noche en su barrio.

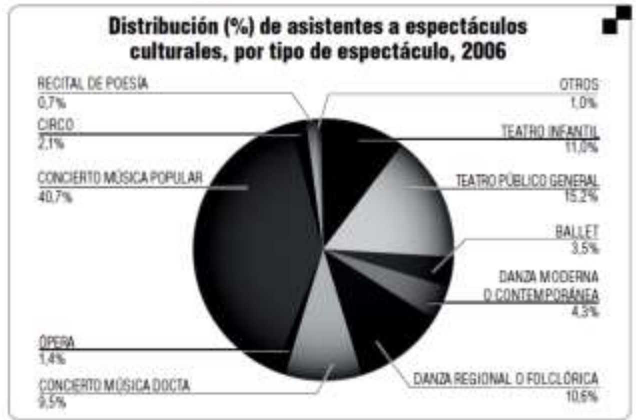
Gráfico: percepción de vulnerabilidad frente a un delito 2007 (%)
¿Qué tan seguro(a) se siente caminando solo(a) en su barrio, cuando ya está oscuro? Donde 1 es muy seguro y 5 es muy inseguro. (Fuente INE)



2.2. Gráfico circular o de torta

Se utiliza preferentemente para representar distribuciones de frecuencias relativas de una variable cualitativa o cuantitativa discreta, en términos porcentuales. Si el 100% de los datos equivalen a los 360° del círculo, entonces un a% de los datos equivaldrán a x°, calculables a través de la siguiente proporción:

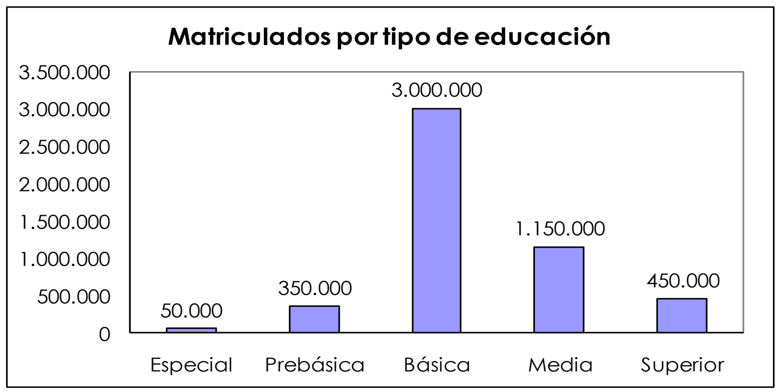
$$\boxed{\frac{100\%}{a\%} = \frac{360°}{x°}}$$



(Fuente INE)

El gráfico ejemplo nos presenta las preferencias de la población chilena, en lo que a actividades culturales se refiere. Se observa que los conciertos de música popular son por lejos, la actividad cultural más demandada.

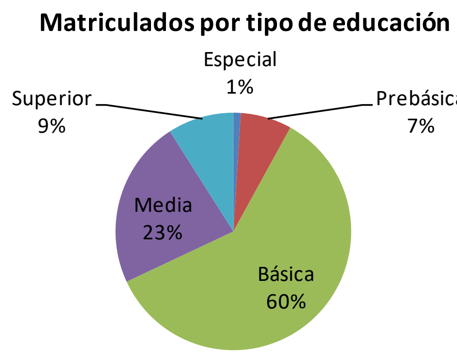
Ejemplo 1 En el siguiente gráfico de barras, se muestra la distribución aproximada de los estudiantes de Chile (aproximación), según el tipo de educación. Se pide determinar el porcentaje y el ángulo central correspondiente a cada categoría y realizar un gráfico circular con los porcentajes obtenidos.



<u>Solución</u>: Para presentar la información ordenada, realizamos una tabla, donde por ejemplo:

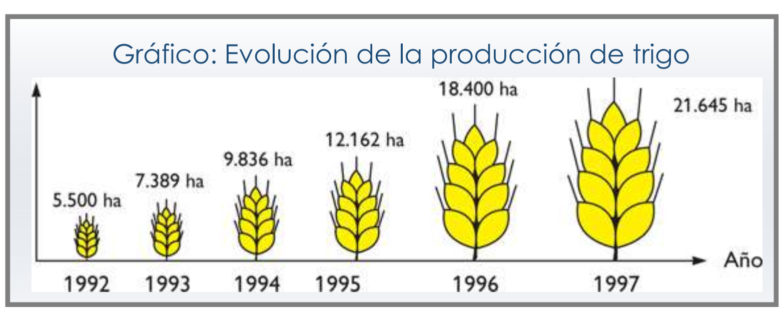
- Para conocer el porcentaje de alumnos de educación prebásica, dividimos 350.000 por el total que es 5.000.000 y el resultado se multiplica por 100% → $(350.000/5.000.000) \cdot 100\% \ = \mathbf{7\%}$
- Para calcular el ángulo asociado a la categoría mencionada anteriormente, multiplicamos el porcentaje por 3,6 → $7\% \cdot 3{,}6 = \mathbf{25{,}2°}$
- Repitiendo lo anterior, para todos los casos, se obtiene la siguiente tabla y el gráfico circular.

Educación	Matriculados	Porcentaje	Angulo (°)
Especial	50.000	1%	3,6°
Prebásica	350.000	7%	25,2°
Básica	3.000.000	60%	216°
Media	1.150.000	23%	82,8°
Superior	450.000	9%	32,4°
Total	**5.000.000**	**100%**	**360°**



2.3. Pictograma

Se utiliza un dibujo relacionado con el tema, para representar un cierto tipo de variables. Este tipo de gráfico atrae la atención por los dibujos, pero su desventaja es que presenta poca precisión.



3.- Organización de datos

Dado que en la práctica se trabaja con una gran cantidad de datos, es especialmente útil agruparlos de forma apropiada para su visualización y análisis. Dentro de estas formas encontramos las llamadas tablas de frecuencias, existiendo 2 tipos: con datos no agrupados y con datos agrupados.

3.1. Tablas de frecuencias con datos no agrupados

Este tipo de tablas se utilizan, en general, para variables con recorrido pequeño. Veamos algunas definiciones.

- **Frecuencia relativa** (h_i)**:** cuociente entre frecuencia absoluta de un cierto dato, y el tamaño de la muestra.
- **Frecuencia acumulada:** corresponde a la suma entre la frecuencia del dato en estudio y las frecuencias de los datos inferiores. Se puede aplicar tanto para las frecuencias relativas (H_i), como para las frecuencias absolutas (F_i).

Ejemplo 2 A continuación se presentan las notas obtenidas por los alumnos de un curso de 20 alumnos:

$$\boldsymbol{Notas} = \{\mathbf{4 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 2 \quad 5 \quad 6 \quad 4 \quad 3 \quad 6 \quad 1 \quad 2 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 7 \quad 3}\}$$

Ordenemos estos datos por medio de una tabla de frecuencias con datos no agrupados:

Nota (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia acumulada (F_i)	Frecuencia relativa (h_i)	Frecuencia relativa acumulada (H_i)	Frecuencia relativa porcentual	Frecuencia relativa porcentual acumulada
1	1	1	1/20	1/20	5%	5%
2	3	4	3/20	4/20	15%	20%
3	3	7	3/20	7/20	15%	35%
4	4	11	4/20	11/20	20%	55%
5	3	14	3/20	14/20	15%	70%
6	4	18	4/20	18/20	20%	90%
7	2	20	2/20	20/20	10%	100%
Total	**20**		**20/20 = 1**		**100%**	

Con la ayuda de la tabla anterior, respondamos algunas preguntas sencillas:

- ¿Cuántos alumnos obtuvieron nota 6 o 7? R: 4 + 2 = 6 alumnos ($f_6 + f_7$)
- ¿Cuántos alumnos obtuvieron nota insuficiente? R: 7 alumnos ($F_3 = f_1 + f_2 + f_3$)
- ¿Qué porcentaje del curso obtuvo nota 5: R: 15% (h_5)
- ¿Qué porcentaje del curso obtuvo una nota inferior a 6? R: 70% ($H_5 = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5$)
- ¿Qué fracción del curso obtuvo nota mayor o igual a 5? R: 3/20 + 4/20 + 2/20 = 9/20 ($h_5 + h_6 + h_7$)
- ¿Qué porcentaje del curso obtuvo nota azul? R: 100% – 35% = 65% ($1 - H_3$)

Notar que, por ejemplo, 15% = 3/20, por lo que los valores de las columnas 4 y 5 equivalen a los de las columnas 6 y 7 respectivamente.

Observación: siempre se debe verificar que la suma de las frecuencias absolutas sea igual al total de observaciones, y que la suma de las frecuencias relativas sea igual a 1 o bien 100%.

3.2. Tablas de Frecuencias con datos agrupados

Este tipo de tablas se utilizan, en general, para variables con recorrido grande, o bien para variables cuantitativas continuas. Veamos más definiciones:

- **Marca de clase** (X_{MC})**:** corresponde al valor medio de un intervalo.
- **Rango** (R)**:** diferencia entre el mayor y el menor valor de una variable.
- **Amplitud**: tamaño de cada intervalo o diferencia entre los límites de un intervalo.

Ejemplo 3 Realicemos un ejercicio parecido anterior, pero consideremos ahora las notas con un decimal, de un curso de 30 alumnos.

Notas					
6,0	3,8	6,6	4,0	6,1	4,3
6,9	6,8	5,3	6,8	6,1	3,8
3,6	3,8	1,9	5,8	6,7	2,0
5,9	2,5	6,0	5,8	5,6	6,8
6,4	4,8	5,4	3,8	4,6	6,5

Organicemos las notas en intervalos de amplitud **1,0**:

Intervalo de Notas (x_i)	**Marca de clase (X_{mc})**	**Frecuencia absoluta (f_i)**	**Frecuencia acumulada (F_i)**	**Frecuencia relativa (h_i)**	**Frecuencia relativa acumulada (H_i)**	**Frecuencia relativa porcentual**	**Frecuencia relativa porcentual acumulada**
[1,0; 2,0[	1,5	1	1	1/30	1/30	3%	3%
[2,0; 3,0[	2,5	2	3	2/30	3/30	7%	10%
[3,0; 4,0[	3,5	5	8	5/30	8/30	17%	27%
[4,0; 5,0[	4,5	4	12	4/30	12/30	13%	40%
[5,0; 6,0[	5,5	6	18	6/30	18/30	20%	60%
[6,0; 7,0[	6,5	12	30	12/30	30/30	40%	100%
Total		**30**		**30/30 = 1**		**100%**	

Observación: cada intervalo de la tabla es de la forma [abierto, cerrado[.

Respondamos ahora algunas interrogantes:

- ¿Cuál es el intervalo con mayor frecuencia de notas? R: [6,0; 7,0[(x_6)
- ¿Cuántos alumnos obtuvieron nota igual o superior a 4,0? R: 30 – 8 = 22 $(30 - F_3)$
- ¿Qué porcentaje de alumnos obtuvo un rojo? R: 27% (H_3)
- ¿En qué intervalo se encuentran los datos centrales? R: [5,0; 6,0[(x_5)
- ¿Qué fracción del curso obtuvo una nota mayor o igual a 2,0, pero bajo 4,0?
  R: 2/30 + 5/30 = 7/30 $(h_2 + h_3)$
- ¿Qué porcentaje de los alumnos obtuvieron nota mayor o igual a 3,0 pero inferior a 6,0?
  R: 17% + 13% + 20% = 50% $(h_3 + h_4 + h_5)$

4.- Indicadores estadísticos de tendencia central

Las medidas de tenencia central se utilizan para entregar información resumida de un conjunto de datos. Los estadígrafos utilizados son la media, la mediana y la moda.

4.1. Media aritmética ($\overline{X}$)

Corresponde al promedio aritmético de los datos. La expresión básica es: $\overline{X} = \dfrac{\textbf{suma de los datos}}{\textbf{número de datos}}$

4.1.1. Media aritmética para datos sin tabular

La media aritmética de N datos $x_1, x_2, x_3, \dots x_N$ se calcula como: $\overline{\boldsymbol{X}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i)}{N}$

$\boldsymbol{x_i}$ = dato número $\boldsymbol{i}$.
$\boldsymbol{N}$ = número de datos.

Donde: $\sum_{i=1}^{N} x_i$ se lee como "la suma desde $i = 1$ hasta N de los x_i" (es decir, la suma de todos los datos, desde el primero hasta el último).

➢ **Propiedades de la Media**

- Si a cada dato se le suma o resta un mismo valor, la media será aumentada o disminuida en ese mismo valor. Por ejemplo, si el promedio de 10 notas es 5,5 y le sumamos 8 décimas a cada una, entonces el nuevo promedio será 6,3.

- Si cada dato es multiplicado o dividido por un mismo valor, la media es multiplicada o dividida en el mismo valor.

- La **suma** de un conjunto de datos equivale al **número** de datos **multiplicado** por la **media** de éstos.

Ejemplo 4 El promedio de notas de los 40 alumnos del 4°A es un 5,0, mientras que el promedio de los 20 alumnos del 4°B es un 6,5. ¿Cuál es el promedio de nota entre todos los alumnos de estos dos cursos?

Solución: Dado que **no** tenemos la misma cantidad de alumnos por curso, el promedio de nota combinado de ambos cursos **no es igual** al promedio directo entre 5,0 y 6,5.

Si el promedio del curso A es 5,0 y cuenta con 40 alumnos, significa que la suma de las notas dividido por 40 es igual a 5,0. Por lo tanto la suma de todas las notas del curso A es: 40 · 5,0 = 200. Repitiendo el mismo razonamiento para el curso B, tendremos:

- Suma de notas = $\overbrace{40 \cdot 5{,}0}^{\text{suma curso A}} + \overbrace{20 \cdot 6{,}5}^{\text{suma curso B}} = 330$
- Número de notas = $40 + 20 = 60$
- Promedio de los notas = $330/60 = \mathbf{5{,}5} \rightarrow \overline{\boldsymbol{X}} = \mathbf{5{,}5}$

Otra forma de calcular la media es ponderando la nota promedio de cada curso por el peso o porcentaje de los datos que representa. Considerando que el curso A representa 2/3 del alumnado total y el curso B solo 1/3, tenemos:

- Promedio de las notas = $(2/3) \cdot 5{,}0 + (1/3) \cdot 6{,}5 = \mathbf{5{,}5}$

Ejemplo 5 De 10 controles, un alumno lleva un promedio 5,3. Si le dan la posibilidad de borrar las 3 peores notas que son: 2,3; 3,5 y 3,8; ¿cuál es su nuevo promedio?

Solución: Si el promedio es 5,3, entonces la suma de todas las notas dividido por 10 es 5,3. Por lo tanto, la suma de todas las notas es $5{,}3 \cdot 10 = \mathbf{53}$.
Dado que se eliminarán 3 notas, la nueva suma total es: $53 - (2{,}3 + 3{,}5 + 3{,}8) = \mathbf{43{,}4}$.
Entonces, el nuevo promedio es equivalente a esta suma divida por el nuevo número de datos (7):

- Promedio = $\frac{43{,}4}{7} = \mathbf{6{,}2}$

4.1.2. Media aritmética para datos tabulados

- Para tablas con datos **no agrupados**:

$$\boldsymbol{\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot f_i)}{N}}$$

$\boldsymbol{f_i}$ = frecuencia del dato $\boldsymbol{i}$.
$\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{n}(f_i) = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ = número de datos.
$\boldsymbol{n}$ = número de categorías o intervalos.

- Para tablas con datos **agrupados**: se puede obtener una media aproximada a través de la suma de los productos entre cada marca de clase y su frecuencia absoluta, resultado que se divide por el total de datos.

$$\boldsymbol{\bar{X} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{MCi} \cdot f_i)}{n}}$$

$\boldsymbol{X_{MCi}}$ = marca de clase del dato $\boldsymbol{i}$.

Ejemplo 6 Retomemos el ejemplo 2, donde tabulamos las notas de un curso de 20 alumnos, y calculemos la media aritmética de las notas.

Nota (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)
1	1
2	3
3	3
4	4
5	3
6	4
7	2
Total	**20**

Solución:

Calculamos la media usando la fómula básica para tablas con datos no agrupados.

$$\bar{X} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot f_i)}{N} = \frac{1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3+4\cdot4+5\cdot3+6\cdot4+7\cdot2}{20} = \frac{85}{20} \rightarrow \boldsymbol{\bar{X} = 4{,}25}$$

4.1.3. Media aritmética ponderada o promedio ponderado

Es muy habitual, por ejemplo, a la hora de postular a una carrera universitaria, necesitar obtener el promedio ponderado de una serie de pruebas, donde cada una de estas evaluaciones posee una importancia diferente, aspecto que se materializa en su ponderación.

El procedimiento de cálculo para la media aritmética es muy sencillo, sólo se deben sumar los productos entre cada nota y su ponderación:

$$\boldsymbol{\bar{X} = \sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot ponderación_i)}$$

Ejemplo 7 Un alumno desea postular a Ingeniería en una conocida universidad, y necesita saber si con sus puntajes obtenidos en la PSU, junto con sus notas de enseñanza media, tiene posibilidades de quedar seleccionado. Para lo anterior considera que el puntaje ponderado de corte el año pasado fue de 740 puntos.

Los puntajes obtenidos y las ponderaciones respectivas se muestran en la siguiente tabla:

	Matemática	**Lenguaje**	**Ciencias**	**Historia**	**NEM**
Puntaje	790	730	720	680	702
Ponderación	50%	10%	15%	0%	25%

El NEM, corresponde al puntaje asociado a las notas de enseñanza media de este alumno, cuyo promedio fue de $\mathbf{6,4}$.

<u>Solución</u>: Usamos la fórmula: $\bar{X} = \sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot ponderación_i) = 790 \cdot 50\% + 730 \cdot 10\% + 720 \cdot 15\% + 702 \cdot 25\%$
$= 790 \cdot 0{,}5 + 730 \cdot 0{,}1 + 720 \cdot 0{,}15 + 702 \cdot 0{,}25 = 395 + 73 + 108 + 175{,}5 \ \rightarrow \ \bar{\boldsymbol{X}} = \mathbf{751,5}$

Entonces, dado que el alumno pondera $\mathbf{751,5}$ puntos, cifra que está $\mathbf{11,5}$ puntos por encima del corte del año anterior, existen altas probabilidades de que el alumno logre entrar a estudiar ingeniería en la universidad que desea.

<u>4.2. Mediana (Me)</u>

La mediana corresponde al valor central de una distribución una vez ordenados los datos de manera creciente o decreciente. Se tienen 2 casos: N par y N impar:

- $\boldsymbol{N}$ **par:** la mediana corresponde al promedio entre los datos centrales.
- $\boldsymbol{N}$ **impar:** corresponde al término central.

Ejemplo 8

- Obtener $Me(1,3,5,7)$ $\rightarrow$ el número de datos es par, entonces $Me(1,\mathbf{3},\mathbf{5},7) = (3+5)/2 = \mathbf{4}$
- Obtener $Me(1,2,5,6,7)$ $\rightarrow$ el número de datos es impar, luego $Me(1,2,\mathbf{5},6,7) = \mathbf{5}$

<u>4.3. Moda (Mo)</u>

La moda corresponde al valor con mayor frecuencia. Puede haber más de una moda (distribución bimodal, polimodal, etc.). Si todos los datos tienen igual frecuencia, entonces no hay moda.

Ejemplo 9

- $Mo(1,5,5,5,7,8,8) = \mathbf{5}$
- $Mo(1,3,3,4,4) = \mathbf{3}$ y $\mathbf{4}$ (bimodal)
- $Mo(2,2,3,3,4,4) =$ **No hay moda**

Ejemplo 10 En una muestra de trabajadores de una empresa, se tiene la siguiente distribución de cargas familiares:

Cargas familiares	Trabajadores
0	6
1	9
2	12
3	7
4	4
5	2

Se pide obtener la media, la mediana y la moda.

Solución: Las cargas familiares representan la variable en estudio, mientras que el número de trabajadores corresponde a su frecuencia. Entonces:

- **Media:** $\bar{X} = \dfrac{0\cdot6+1\cdot9+2\cdot12+3\cdot7+4\cdot4+5\cdot2}{6+9+12+7+4+2} = \dfrac{80}{40} \rightarrow \boldsymbol{\bar{X} = 2}$

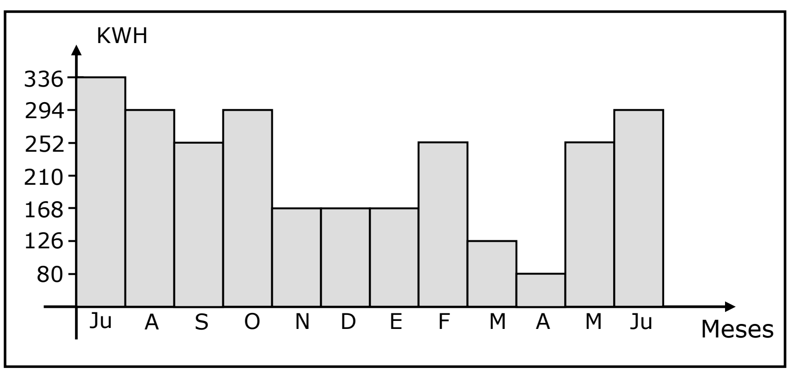
- **Mediana**: Se obtiene a partir de la **primera categoría** cuya frecuencia acumulada supere a la mitad de los datos. En este caso hay 40 datos, por lo tanto buscamos aquella categoría donde la Fac. supere el valor 20. Para esto agregamos a la tabla una columna con las frecuencias acumuladas. Se observa que para la categoría asociada a 2 cargas, se tiene Fac = 27 > 20, por lo que **la mediana es 2** (en esa categoría está el dato central).

Cargas familiares	Trabajadores	Fac.
0	6	6
1	9	15
2	**12**	**27**
3	7	34
4	4	38
5	2	40

- **Moda**: Corresponde a la categoría con mayor frecuencia, que en este caso es el **2**, cuya frecuencia es 12. Entonces, la **moda es 2**.

Observación: Para datos agrupados en intervalos, se realiza el mismo procedimiento anterior, pero con la marca de clase de cada intervalo, obteniendo así medidas de tendencia central aproximadas.

Ejemplo 11 El gráfico de la figura señala el consumo de KWH de los últimos 12 meses en una casa. ¿Cuál es la mediana de los datos?

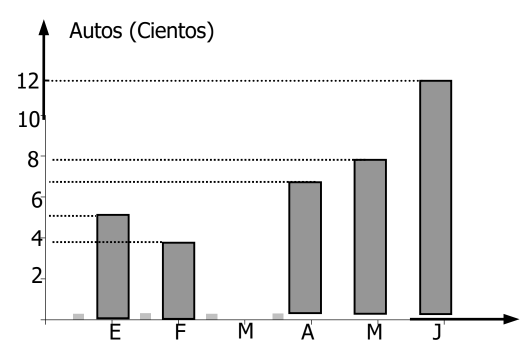


Solución: Ordenamos los valores del consumo de menor a mayor:

80 – 126 – 168 – 168 – 168 – **252 – 252** – 252 – 294 – 294 – 294 – 336.

Dado que tenemos 12 datos, la mediana es el promedio entre el dato 6 y el dato 7, igual a $(252 + 252)/2 = 252 \rightarrow$ **la mediana es 252 KWH**

Ejemplo 12 El gráfico de la figura muestra la cantidad de automóviles vendidos por una automotora durante los seis primeros meses del año. De acuerdo con esta información, ¿cuál fue el promedio de autos vendidos durante el primer semestre?



Solución: $\bar{X} = \dfrac{5+4+0+7+8+12}{6} = \dfrac{36}{6} \rightarrow \boldsymbol{\bar{X} = 6}$

Observación: En los gráficos anteriores, donde se presentaba la evolución de una variable en el tiempo, es importante no confundirse con el significado estadístico de cada parámetro. Los meses, ubicados en el eje $\boldsymbol{X}$, representan una información adicional referente al momento donde se da un cierto dato, mientras que el valor del dato se inscribe en el eje $\boldsymbol{Y}$. Esto difiere de los típicos gráficos de barras, donde el valor del dato se inscribe en el eje $\boldsymbol{X}$, mientras que en el eje $\boldsymbol{Y}$ se colocan las frecuencias

---

Ejemplo 13 En cierta comunidad, se investiga la población de estudiantes, según nivel educacional y sexo, construyéndose la siguiente tabla:

Sexo	Nivel educacional		
	Básico	Medio	Superior
Hombres	26	10	4
Mujeres	24	20	16

De acuerdo a esta tabla, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?:

A) El 30% de los encuestados cursan educación media.
B) El 20% de la muestra son mujeres que cursan educación media.
C) De los que cursan educación básica, el 48% son mujeres.
D) De los hombres, el 10% cursa educación superior.
E) El 26% de los hombres están en educación básica.

Solución: Primero calculemos los totales asociados a cada categoría, agregando una fila y una columna a la tabla.

Sexo	Nivel educacional			
	Básico	Medio	Superior	**Total**
Hombres	26	10	4	40
Mujeres	24	20	16	60
Total	50	30	20	**100**

Ahora revisemos las alternativas:

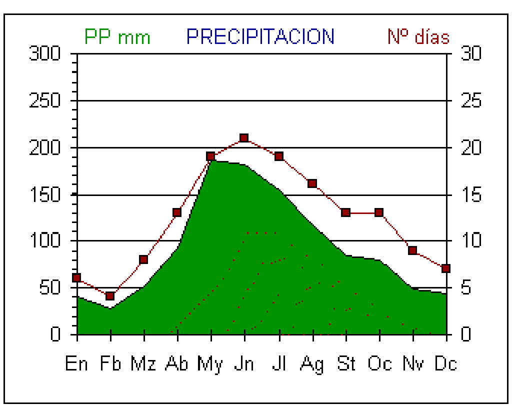
A) El porcentaje que cursa Ed. Media es: $30/100 = \mathbf{30\%}$ → A) es verdadero
B) El porcentaje de encuestados mujeres que cursa Ed. Media es: $20/100 = \mathbf{20\%}$ → B) es verdadero
C) Dentro de los que cursan Ed. Básica, el porcentaje de mujeres es: $24/50 = \mathbf{48\%}$ → C) es verdadero
D) Dentro de los hombres, el porcentaje que cursa Ed. Superior es: $4/40 = \mathbf{10\%}$ → D) es verdadero
E) Dentro de los hombres, el porcentaje que cursa Ed. Básica es: $26/40 = \mathbf{65\%}$ → **E) es Falso**

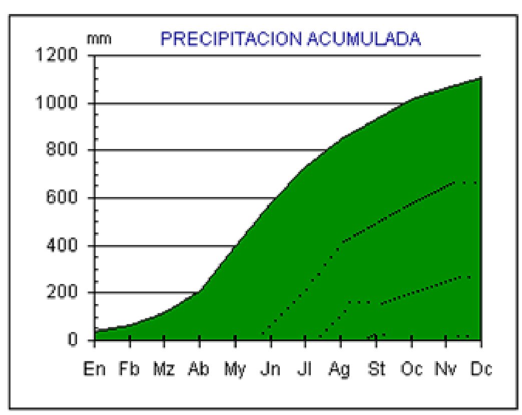
5.- Otros gráficos

5.1. Ojiva

Su objetivo es representar distribuciones de frecuencias de variables cuantitativas, pero sólo para frecuencias acumuladas. Por ejemplo, los gráficos adjuntos representan la precipitación de un cierto año en la localidad de Temuco.

El primer gráfico es de líneas (similar al de barras), que entrega la pluviometría mensual, mientras que el segundo es una ojiva, que presenta la precipitación acumulada. Se observa que, en los meses de mayor precipitación, la pendiente de la ojiva es también mayor.



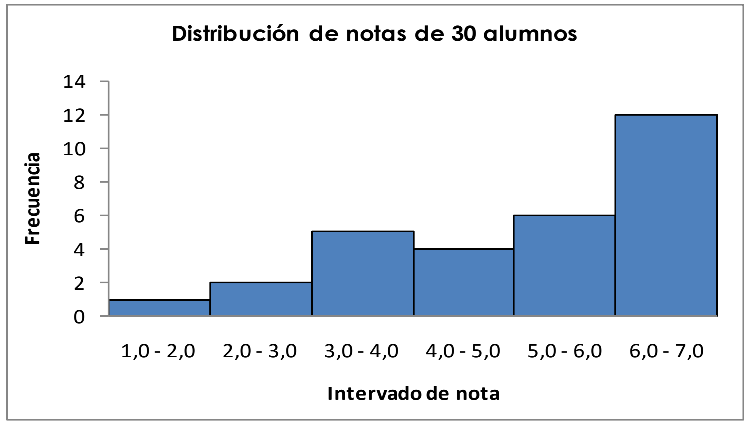


5.2. Histograma

Este gráfico se usa para representar una distribución de frecuencias de una variable cuantitativa continua, o bien para graficar frecuencias con datos agrupados. El histograma se forma por rectángulos de base igual a la amplitud de cada intervalo.

A continuación, se presenta una tabla de frecuencias y el respectivo histograma con las notas de los 30 alumnos del ejemplo 3.

Intervalo de Notas (x_i)	Marca de clase (X_{mc})	Frecuencia absoluta (f_i)
[1,0; 2,0[	1,5	1
[2,0; 3,0[	2,5	2
[3,0; 4,0[	3,5	5
[4,0; 5,0[	4,5	4
[5,0; 6,0[	5,5	6
[6,0; 7,0[	6,5	12
Total		**30**



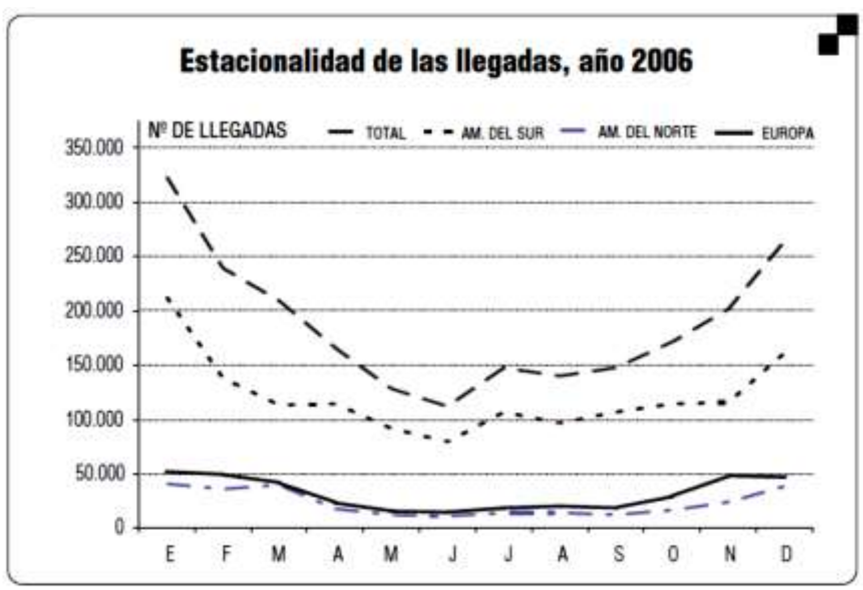
En este caso, la media aproximada se puede calcular a partir de las marcas de clases:

$$\bar{X} \approx \frac{1{,}5\cdot 1+2{,}5\cdot 2+3{,}5\cdot 5+4{,}5\cdot 4+5{,}5\cdot 6+6{,}5\cdot 12}{30} = \frac{153}{30} \rightarrow \bar{\boldsymbol{X}} \approx \mathbf{5{,}1}$$

La mediana se encuentra en el intervalo [5,0; 6,0[, por lo que se puede aproximar por 5,5. Mientras que la moda se ubica en el intervalo [6,0; 7,0[, por lo que se puede aproximar por 6,5.

5.3. Polígono de frecuencias

Se utiliza para representar distribuciones de variables cuantitativas continuas o para presentar datos agrupados. La ventaja de este gráfico respecto del histograma, radica en la factibilidad de presentar simultáneamente más de una distribución. Se obtiene de unir las marcas de clases de cada frecuencia.



El gráfico ejemplo de la derecha, indica la cantidad de turistas que ingresaron al país en el año 2006, presentando distintas curvas según su lugar de procedencia. Se observa que la gran mayoría proviene de América del Sur, mientras que Europa y América del Norte contribuyen con prácticamente similar número de turistas (fuente INE).
Como es de esperar, la mayoría de los turistas viene a Chile en período estival.

6.- Indicadores estadísticos de posición

Además de los estadígrafos de dispersión y de tendencia central, a veces es conveniente conocer el lugar que ocupa un dato respecto de los demás. Por ejemplo, un alumno con una nota 6,0 en una prueba, puede estar en la medianía del curso (si la prueba estuvo relativamente fácil), o bien puede ser de los mejores del curso (si la prueba estuvo difícil). Para representar lo anterior, se utilizan los llamados indicadores estadísticos de posición, cuya función es dividir un conjunto de datos en una cierta cantidad de partes iguales, denominadas cuartiles, deciles y percentiles.

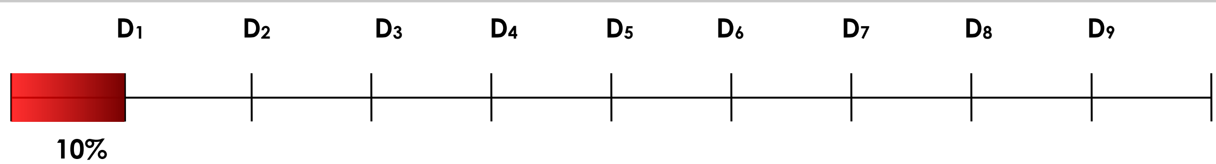
6.1. Cuartiles (Q)

Los cuartiles de una distribución de datos numéricos, corresponden a los 3 valores que dividen la distribución en 4 partes iguales.

Primer cuartil (Q_1)	Segundo cuartil (Q_2) = Mediana	Tercer cuartil (Q_3)
25% | 75%	50% | 50%	75% | 25%
Valor de la variable que deja a la izquierda el 25% de los datos.	Valor de la variable que deja a la izquierda el 50% de los datos.	Valor de la variable que deja a la izquierda el 75% de los datos.

6.2. Deciles (D)

Los deciles de una distribución de datos numéricos, corresponden a los 9 valores que dividen la distribución en 10 partes iguales.



6.3. Percentiles (P)

Corresponden a los 99 valores que dividen la distribución en 100 partes iguales.
Para calcular el n-ésimo percentil de un conjunto de datos presentados en una tabla de frecuencias, se utiliza la siguiente expresión:

$$P_n = I_i + (I_{i+1} - I_i)\left(\frac{F_n - F_i}{F_{i+1} - F_i}\right)$$

I_i : extremo izquierdo del intervalo donde se ubica el percentil.
I_{i+1} : extremo derecho del intervalo donde se ubica el percentil.
F_i : frecuencia acumulada hasta I_i.
F_{i+1} : frecuencia acumulada hasta I_{i+1}.
F_n : frecuencia acumulada hasta el percentil buscado P_n. Se calcula como el producto entre el percentil y el total de datos.

De lo anterior es claro que:

$Q_1 = P_{25}$; $Q_2 = P_{50}$; $Q_3 = P_{75}$; $D_1 = P_{10}$; $D_2 = P_{20}$; etc.

Ejemplo 14 A continuación se presentan los 3 cuartiles y los 9 deciles del conjunto de notas de un curso de 20 alumnos.

Q_1 Q_2 Q_3

2,0 2,5 2,8 3,0 3,3 3,7 4,0 4,3 4,5 4,9 5,1 5,3 5,7 5,9 6,1 6,3 6,5 6,7 7,0 7,0

D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6 D_7 D_8 D_9

En este caso, un cierto decil (o un cuartil) corresponde al promedio de los datos en que se ubica. Si por ejemplo, un alumno obtuvo un 6,3, podemos decir que se encuentra sobre el tercer cuartil, o bien entre el séptimo y el octavo decil, y aproximadamente entre los percentiles 77 y 78. Lo anterior indica que la nota obtenida por este alumno es bastante positiva en relación a su curso.

Ejemplo 15 Calculemos el percentil 45, considerando la distribución de frecuencias de 212 puntajes obtenidos en la PSU.

Puntaje	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Acumulada
[400, 449]	10	10
[450, 499]	9	19
[500, 549]	20	39
[550, 599]	31	70
[600, 649]	80	150
[650, 699]	42	192
[700, 749]	10	202
[750, 799]	10	212

El 45% de los datos es 95,4 → $F_n = 95{,}4$, valor que se encuentra en el intervalo [600, 649]. Por lo tanto:

$$I_i = 600; \ \ I_{i+1} = 649; \ F_i = 70; \ \ F_{i+1} = 150;$$

Ahora reemplazamos los valores en la fórmula:

$$P_n = I_i + (\ I_{i+1} - I_i)\left(\frac{F_n - F_i}{F_{i+1} - F_i}\right)$$

$$\rightarrow P_{45} = 600 + (649 - 600)\left(\frac{95{,}4 - 70}{150 - 70}\right) \rightarrow \boldsymbol{P_{45} = 615{,}6}$$

Este resultado nos indica que el 45% de los alumnos obtuvo puntajes menores o iguales a **615,6**.

Ejemplo 16 Supongamos que en una prueba se obtuvieron las siguientes 25 calificaciones:

40 40 42 45 46 48 48 49 50 50 51 52 53 54 55 55 56 58 60 65 68 70 72 75 78

➢ **Calculemos P_{16}**
- Primero calculamos el 16% de los datos → 16% de 25 = 4.
- Dado que el valor obtenido es un entero, diremos que la "profundidad" del percentil es 4 + 0,5 = 4,5.
- Por lo tanto, el percentil buscado está en el promedio entre los datos 4 y 5, es decir $(45 + 46)/2 \ = \ \mathbf{45{,}5}$.

➢ **Calculemos el tercer cuartil**
- Notamos que calcular Q_3 equivale a obtener P_{75}.
- Calculamos el 75% de los datos → 75% de 25 = 18,75.
- Dado que el valor obtenido no es un número entero, diremos que la "profundidad" del percentil es el siguiente entero, es decir 19.
- Por lo tanto, el percentil buscado está en el dato 19, es decir: $\boldsymbol{Q_3} = \boldsymbol{P_{75}} = \mathbf{60}$.

6.4. Diagrama de Cajas

El diagrama de cajas consiste en un gráfico que presenta simultáneamente diferentes elementos de la distribución de una o más muestras, por ejemplo: mediana, rango, cuartiles, deciles, etc. Su principal aplicación es la comparación de distribuciones de diferentes grupos.

Estudiemos este concepto con un ejemplo.

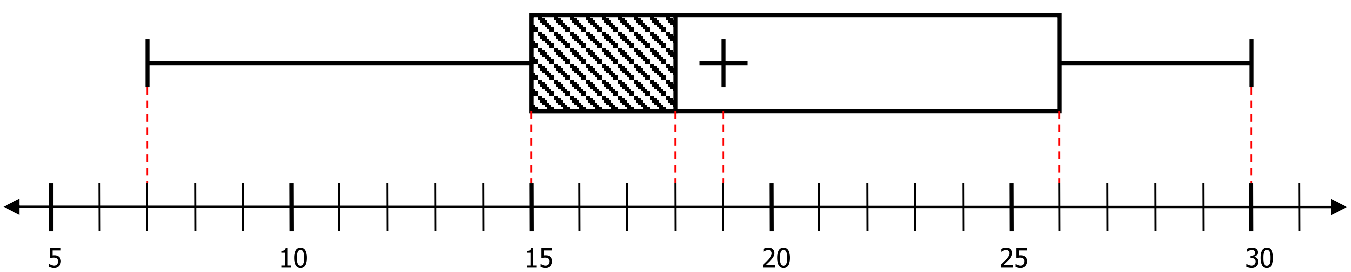
Ejemplo 17 A 16 personas se les hizo observar 40 fotografías de objetos y después se les pidió escribir el nombre de aquellos que recordaban. La siguiente lista muestra el número de nombres correctos después de ser ordenados de menor a mayor.

7, 8, 9, 14, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 23, 25, 27, 28, 29, 30

El análisis de estos datos indica que:

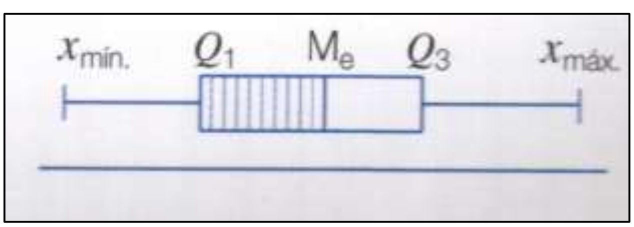
Media = 19
Rango = 23. Intervalo [7, 30]
Mediana = 50%. El 50% de los datos anotó correctamente como máximo 18 objetos
Primer cuartil = 15. El 25% de los datos anotó correctamente como máximo 15 objetos
Tercer cuartil = 26. El 75% de los datos anotó correctamente como máximo 26 objetos

Ahora realicemos el diagrama de cajas:



A grandes rasgos se observa que la media se simboliza por la cruz, el primer y tercer cuartil por los extremos izquierdo y derecho de la caja, mientras que el rango total (valor mínimo hasta valor máximo) es simbolizado por las dos líneas más exteriores. Por último, la mediana corresponde al punto donde cambia de color la caja.

En resumen:



$\boldsymbol{Q_1}$ **=** Primer Cuartil, $\boldsymbol{M_e}$ = Mediana, $\boldsymbol{Q_3}$ = tercer Cuartil, $\boldsymbol{X_{min}}$ = Dato mínimo, $\boldsymbol{X_{máx}}$ = dato máximo.

7.- Indicadores estadísticos de dispersión

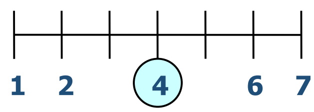
Las medidas de dispersión indican cuan cercanos o alejados están los datos de un valor central, el que por lo general corresponde a la media aritmética. Los estadígrafos utilizados son el rango, la desviación media, la varianza y la desviación estándar.

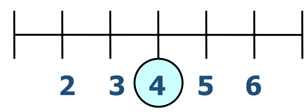
7.1. Rango (R)

Corresponde a la diferencia entre el mayor y el menor dato de la distribución.

Ejemplo 18 Dos alumnos de un mismo curso presentan las siguientes calificaciones:

Cristóbal: 1, 2, 4, 6, 7 **Daniela:** 2, 3, 4, 5, 6





Si bien, ambos alumnos presentan similar promedio $(\mathbf{4})$, las notas de Cristóbal presentan mayor dispersión que las de Daniela, lo que se refleja en el rango. En efecto:

$$R(Cristóbal) = 7 - 1 = \mathbf{6}; \qquad R(Daniela) = 6 - 2 = \mathbf{4}$$

A partir de este simple indicador, podemos concluir que Daniela ha presentado mayor regularidad en sus calificaciones que Cristóbal.

7.2. Desviación Media (DM)

Corresponde al promedio de las distancias entre cada dato y la media aritmética. Si consideramos que la distancia de un dato $\boldsymbol{x_i}$ a la media aritmética se puede escribir como $|\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{X}}|$, entonces la desviación media, que corresponde al promedio de todas estas distancias, se calcula como:

$$\boldsymbol{D_m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \overline{X}|}{N}$$

$\boldsymbol{x_i}$ = dato $\boldsymbol{i}$.
$\boldsymbol{N}$ = número de datos.
$\overline{\boldsymbol{X}}$ = media aritmética.

Para datos agrupados o tabulados se puede usar la marca de clase como dato representativo:

$$\boldsymbol{D_m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_{MCi} - \overline{X}| \cdot f_i}{N}$$

$\boldsymbol{n}$ = número de categorías o intervalos.
$\boldsymbol{X_{MCi}}$ = marca de clase del dato $\boldsymbol{i}$.
$\boldsymbol{f_i}$ = frecuencia del dato $\boldsymbol{i}$.

Ejemplo 19 Respecto del ejemplo anterior, se pide calcular la desviación media asociada a las notas de cada alumno:

Solución: Partamos recordando que: $\bar{X} = 4{,}0$, entonces:

Cristóbal

Nota (x_i)	$\lvert x_i - \bar{X}\rvert$
1	3
2	2
4	0
6	2
7	3
Suma: $\sum_{i=1}^{N}\lvert x_i - \bar{X}\rvert$	10
D. Media: $\frac{\sum_{i=1}^{N}\lvert x_i - \bar{X}\rvert}{N}$	$\frac{10}{5} = 2$

Daniela

Nota (x_i)	$\lvert x_i - \bar{X}\rvert$
2	2
3	1
4	0
5	1
6	2
Suma: $\sum_{i=1}^{N}\lvert x_i - \bar{X}\rvert$	6
D. Media: $\frac{\sum_{i=1}^{N}\lvert x_i - \bar{X}\rvert}{N}$	$\frac{6}{5} = 1{,}2$

En base a este indicador, también se visualiza que las notas de Cristóbal presentan mayor dispersión que las de Daniela. Las notas de Cristóbal están a una distancia promedio de 2 puntos respecto de la media, mientras que las notas de Daniela están a una distancia promedio de 1,2 puntos.

7.3. Varianza (S^2) y desviación estándar (S)

Si bien, la desviación media nos podría parecer un adecuado indicador de dispersión, no es fácil de manipular matemáticamente (función valor absoluto), razón por la cual este parámetro no es de mucha utilidad en estadística.

Los indicadores estadísticos de dispersión mayormente utilizados son la varianza y la desviación estándar, los que presentan la ventaja de estar compuestos por funciones con mejores propiedades matemáticas.

- **La varianza** (S^2): corresponde al promedio de los cuadrados de las desviaciones:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2}{N}$$

Para datos agrupados

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2 \cdot f_i}{N}$$

de utiliza:

- **La desviación estándar** (S^2): corresponde algebraicamente a la raíz cuadrada de la varianza. La ventaja de este parámetro sobre la varianza, es que presenta las mismas unidades que la variable, convirtiéndolo en el indicador de dispersión más utilizado:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2}{N}}$$

Para datos agrupados de utiliza:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2 \cdot f_i}{N}}$$

Ejemplo 20 Realicemos el cálculo de la varianza y la desviación estándar para el ejemplo anterior.

Cristóbal

Nota (x_i)	$(x_i - \bar{X})^2$
1	9
2	4
4	0
6	4
7	9
Suma: $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2$	26
Varianza: $\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}$	$\frac{26}{5} = 5,2$
Desv. est.: $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}}$	**2,28**

Daniela

Nota (x_i)	$(x_i - \bar{X})^2$
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4
Suma: $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2$	10
Varianza: $\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}$	$\frac{10}{5} = 2$
Desv. est.: $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}}$	**1,41**

Se concluye lo mismo que en los casos anteriores.

Ejemplo 21 Se tiene un grupo de 30 personas, cuyas edades se presentan en la siguiente tabla.

10	20	10	15	5	33	45	46	16	20
40	24	30	30	13	20	14	52	50	27
14	32	31	21	15	55	55	40	18	21

Se pide organizar estos datos en una tabla de frecuencias y obtener todos los indicadores estadísticos de tendencia central y de dispersión. Como ayuda, se separaron los datos en intervalos de amplitud 5, utilizando un color característico para cada uno de estos intervalos.

<u>Solución</u>:

Edades (x_i)	Marca de clase (X_{MCi})	Frec. Abs. (f_i)	Frec. Abs. Acum. (F_i)	Frec. Rel. (h_i)	Frec. Rel. Acum. (H_i)	$X_{MCi} \cdot f_i$	$\lvert X_{MCi} - \bar{X}\rvert$	$\lvert X_{MCi} - \bar{X}\rvert \cdot f_i$	$\lvert X_{MCi} - \bar{X}\rvert^2 \cdot f_i$
5-10	7,5	1	1	0,03	0,03	7,5	21,3	21,3	455,1
10-15	12,5	5	6	0,17	0,20	62,5	16,3	81,7	1333,9
15-20	17,5	4	10	0,13	0,33	70	11,3	45,3	513,8
20-25	22,5	6	16	0,20	0,53	135	6,3	38,0	240,7
25-30	27,5	1	17	0,03	0,57	27,5	1,3	1,3	1,8
30-35	32,5	5	22	0,17	0,73	162,5	3,7	18,3	67,2
35-40	37,5	0	22	0,00	0,73	0	8,7	0,0	0,0
40-45	42,5	2	24	0,07	0,80	85	13,7	27,3	373,6
45-50	47,5	2	26	0,07	0,87	95	18,7	37,3	696,9
50-55	52,5	2	28	0,07	0,93	105	23,7	47,3	1120,2
55-60	57,5	2	30	0,07	1,00	115	28,7	57,3	1643,6
Suma		**30**		**1**		**865**		**375**	**6.447**
						Media ($\bar{X}$)		**Desv. Media (D_m)**	**Varianza (S^2)**
					Suma/30	**28,8**		**12,5**	**214,9**
									Desv. Estándar (S)
									14,7

Mediana:	Intervalo [20, 25[
Moda:	Intervalo [20, 25[
Rango:	50

BIBLIOGRAFÍA

Baeza P. Ángela y otros, **Educación Matemática 2**, Editorial Santillana, Chile, 2005.

Baldor J. Aurelio, **Algebra**, Cultural Venezolana S.A., Venezuela, 1990.

Becerra A. Rigoberto y otros, **Matemática 4° Medio,** Editorial Arrayán, Chile, 2004.

Carreño Ximena y Cruz Ximena, **Algebra**, Editorial Arrayán, Chile, 2002.

Cid F. Eduardo, **Autopreparación PSU Matemática**, Editorial Cid, Chile, 2005.

Cid F. Eduardo, **Texto de Nivelación Matemática**, Editorial Cid, Chile, 2007.

Dirección Académica Cepech, **Matemática 2006**, Preuniversitario Cepech, Chile, 2006

Dolciani P. Mary y otros, **Introducción al Análisis Moderno**, Publicaciones Cultural S.A., Primera Edición, México, 1969.

Escuela de Contadores Auditores de Santiago, **Matemática 2001 con Software Amigable**, Chile, 1992.

Guerra N. Marcela y otros, **Educación Matemática 3**, Editorial Santillana, Chile, 2005.

Jarne J. Gloria y otros, **Matemáticas para la Economía**, Universidad de Zaragoza, Editorial McGraw-Hill, España, 1997.

Martínez V. María Victoria, **Matemática 2° Medio**, Editorial S.M., Chile, 2005.

Pedreros M. Alejandro y otros, **Educación Matemática 4**, Editorial Santillana, Chile, 2005.

Stewart James, **Cálculo**, McMaster University, Editorial Iberoamérica, Segunda Edición, México, 1997.

Tapia R. Oscar, **Manual de Preparación Matemática**, Editorial Universidad Católica de Chile, Sexta Edición, Chile, 2006.

Vergara B. Cristián y otros, **Matemática Educación Media I**, Editorial Santillana, Chile, 1999.

Otras fuentes:

www.sectormatematica.cl

www.preunab.cl

www.universia.cl

www.math-online.cl

www.guiapsu.cl

Problemas Preuniversitario Cepech

Problemas Preuniversitario Pedro de Valdivia