Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики
Факультет информационных технологий и программирования

Методы оптимизации

Отчёт по лабораторной работе №4

Работу выполнили:
И. О. Шахов
М. А. Гордиенко
А. В. Андреев
Группа: M3236
Преподаватель:
Михаил Свинцов

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Постановка задачи

Реализовать алгоритмы:

- метод градиентного спуска
- метод наискорейшего спуска;
- метод сопряженных градиентов.

Проанализировать их работу. Привести пример двух функций, на которых описанные методвы дадут разные результаты.

Цель работы

- Реализовать алгоритмы методов градиентного спуска
- Оценить скорости сходимости методов, при различных методах одномерного поиска величины шага
- Проанализировать траектории методов на различных функциях
- Исследовать зависимость числа итераций от различных параметров

1. Оценка скорости сходимости метод наискорейшего спуска при использовании различных методов одномерной оптимизации

Скорость сходимости - это скорость сходимости ряда невязок x_i

Значит, логично предположить, что скорость сходимости алгоритма совершенно не зависит от выбора метода одномерной оптимизации. Т.к все методы рассмотренные в 1 лабораторной работе дают очень точную оценку минимума функции. Однако, это не означает, что время работы и асимптотика алгоритма не будет меняться в зависимости от нашего выбора. Давайте докажем это эмпирическим путем на примере функции:

$$f(x) = 64x_1^2 + 64x_2^2 + 126x_1x_2 - 10x_1 + 30x_2 + 13x = (10;10)$$

Таблица 1.1

Анализ работы алгоритмов

Алгоритм	Число итераци
Дихотомия	13
Фибоначчи	10
Золотое сечение	12
Метод парабол	10
Метод Бренда	11

Эти данные согласуется с нашим предположением.

2. Анализ траектории методов

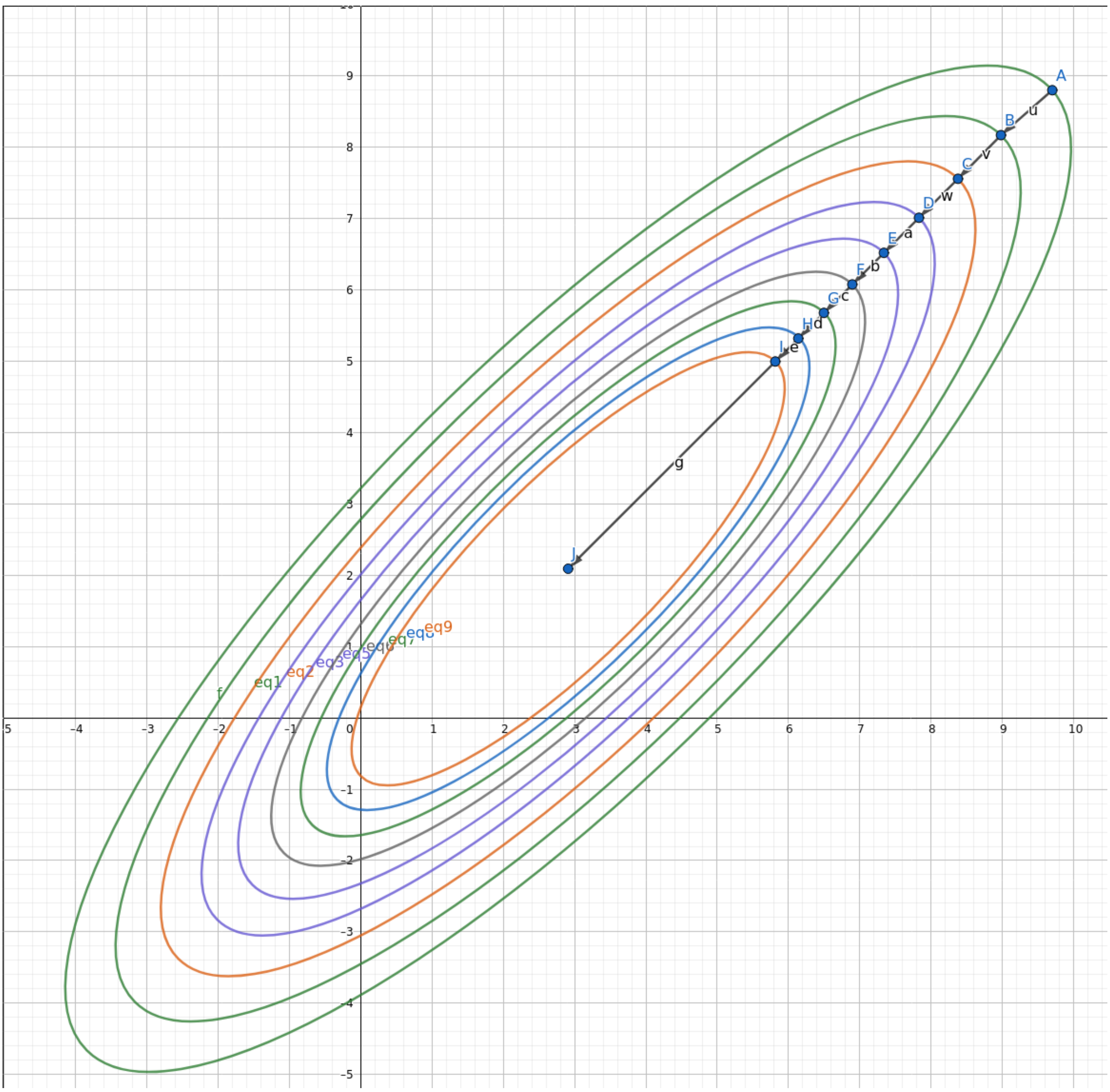
2.1. Плохо обусловленная задача

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2 - 7x_1 + 2x_2 - 30$$

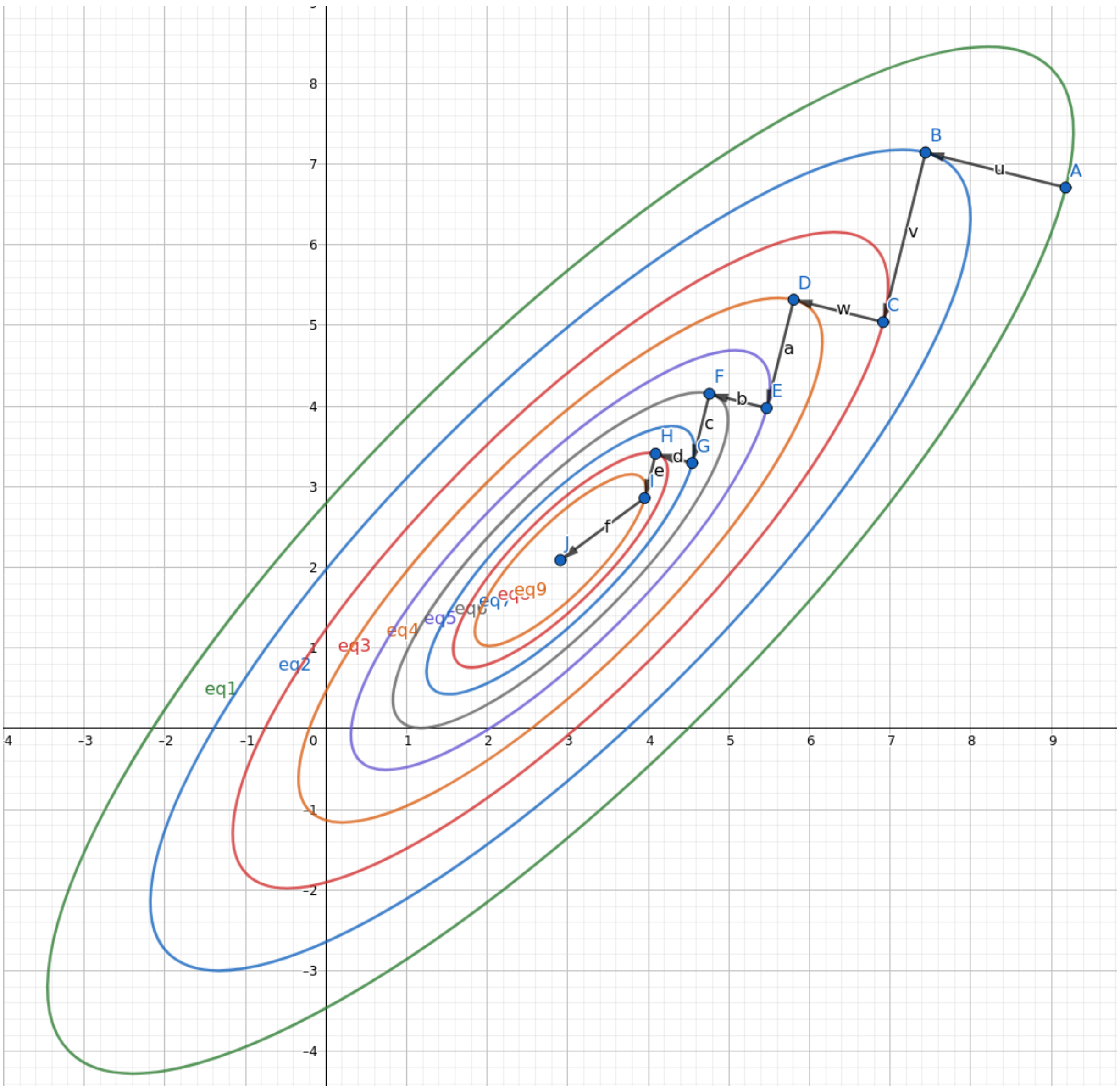
Ей соотвествует матрица $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ с собственными числами $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 11$ и числом обусловленности $\mu = \frac{11}{1} = 11$. Вектор $B = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ и константа $C = -30$. При таких условиях методы будут сходится медленно. Покажем это.

2.1.1. Градиентный спуск с постоянным шагом



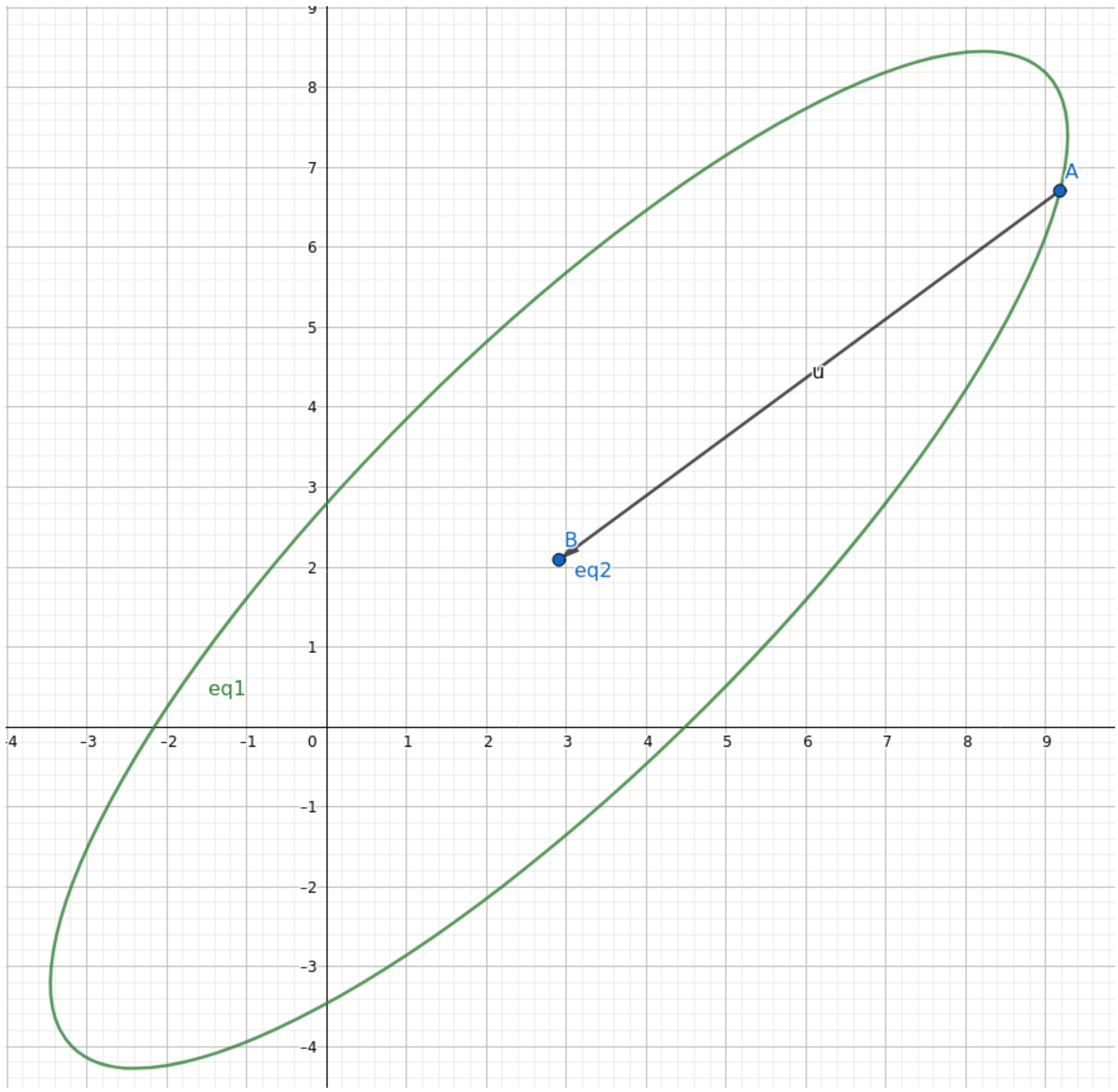
Работа метода градиентного спуска с постоянным коэффициентом $a = 0.1$ на функции $f(x)$ из точки $A(9.7, 8.8)$. Линии уровня обозначены цветом. Часть линий уровня промжуточных итераций в центре пропущена для чистоты рисунка. Минимум найден за 154 итерации в точке $J(2.909091, 2.090909)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$

2.1.2. Наискорейший спуск



Работа метода наискорейшего спуска на функции $f(x)$ из точки $A(9.7, 8.8)$. Линии уровня обозначены цветом. Задача одномерной оптимизации на каждой итерации решалась методом золотого сечения. Часть линий уровня промжуточных итераций в центре пропущена для чистоты рисунка. Минимум найден за 48 итераций в точке $J(2.909091, 2.090909)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$

2.1.3. Метод сопряженных градиентов



Работа метода сопряженных градиентов на функции $f(x)$ из точки $A(9.7, 8.8)$. Линии уровня обозначены цветом. Число различных собственных значений не превосходит двух для данной матрицы функции, значит метод теоретически не сделает больше 2 итераций. Минимум найден за 2 итерации в точке $B(2.909091, 2.090909)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$

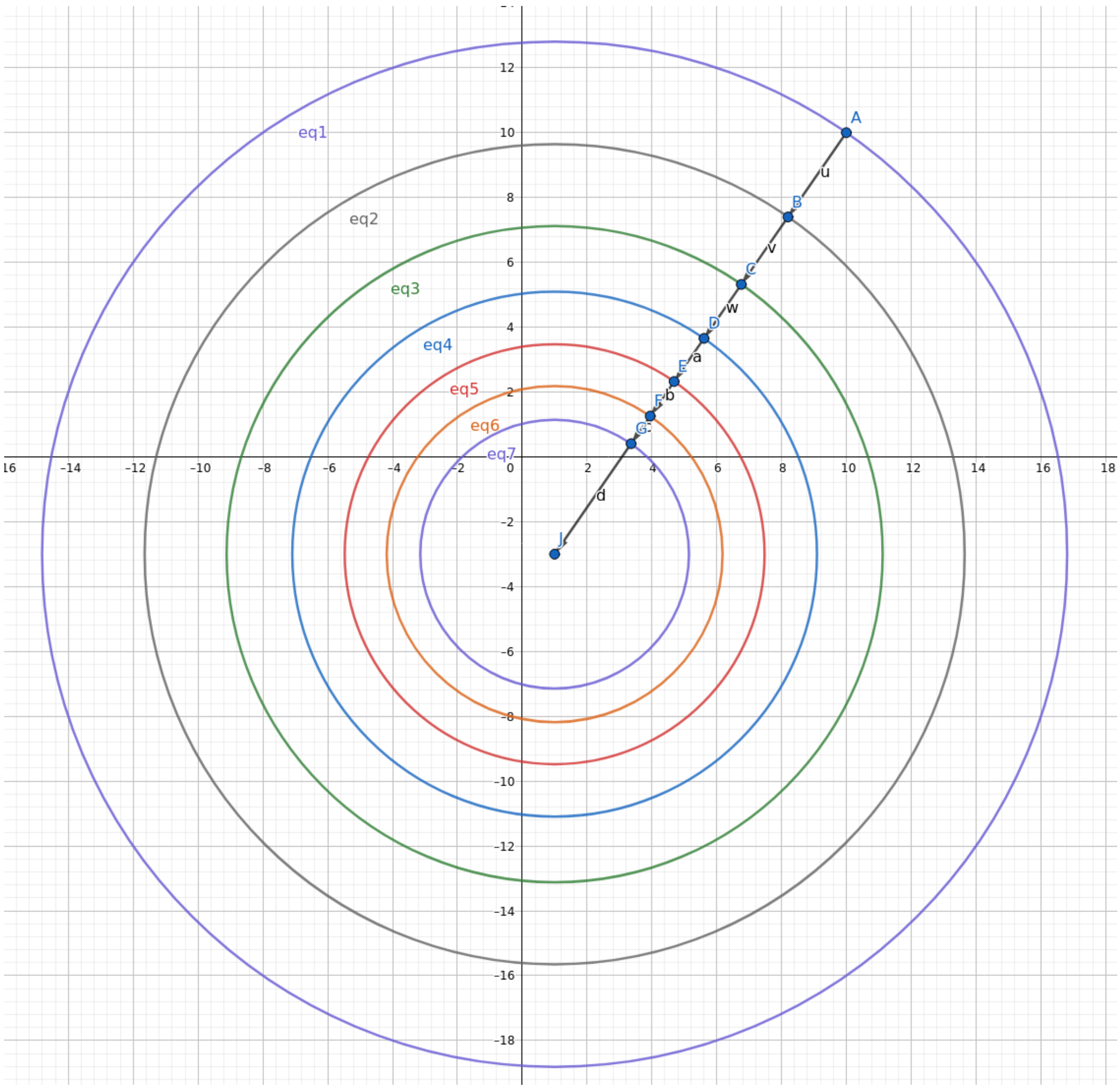
2.2. Хорошо обусловленная задача

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 6x_2 + 10$$

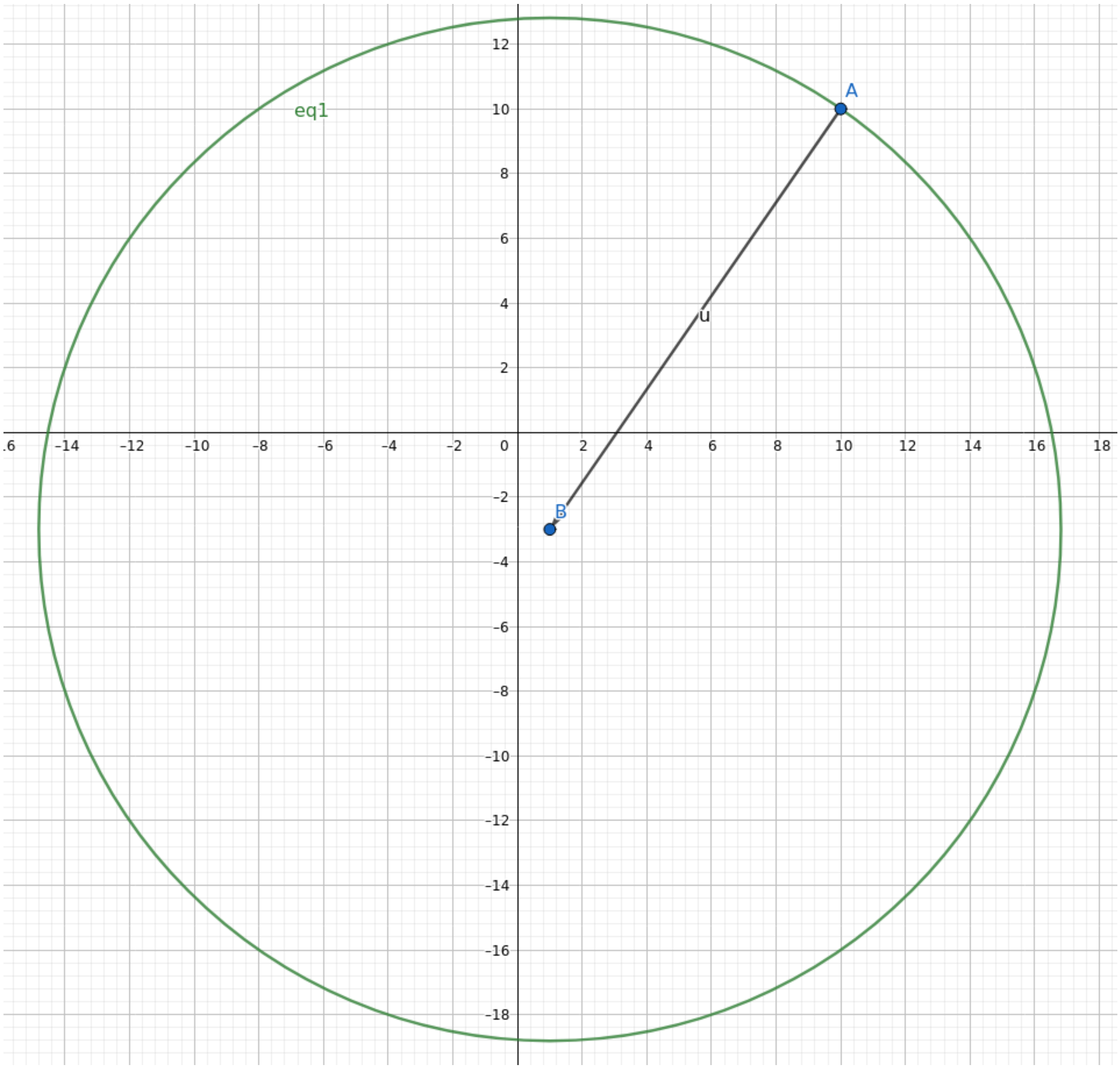
Ей соотвествует матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ с собственным числом $\lambda = 2$ и числом обусловленности $\mu = 1$. Вектор $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ и константа $C = 10$. Маленькое число обусловленности для данной матрицы обеспечивает очень быструю сходимость методов.

2.2.1. Градиентный спуск с постоянным шагом



Работа метода градиентного спуска с постоянным коэффициентом $a = 0.1$ на функции $f(x)$ из точки $A(10, 10)$. Линии уровня обозначены цветом. Часть линий уровня промжуточных итераций в центре пропущена для чистоты рисунка. Минимум найден за 77 итераций в точке $J(1, -3)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

2.2.2. Наискорейший спуск и метод сопряженных градиентов



Работа методов наискорейшего спуска и сопряженных градиентов на функции $f(x)$ из точки $A(10, 10)$ схожа. Линии уровня обозначены цветом. Задача одномерной оптимизации на каждой итерации метода наискорейшего спуска решалась методом золотого сечения. Минимум найден за 2 итерации в точке $B(-1, 3)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ при наискорейшем спуске и за 1 итерацию при методе сопряженных градиентов. Такое поведение объясняется единственным собственным числом матрицы условия.

В итоге траектория вышеописанных методов и соответственно число итераций, выполенных методами существенно зависят от числа обусловленности матрицы рассматриваемой функции.

3. Анализ числа итераций от числа обусловенности K и размерности пространства N

Для анализа мы генерировали случайные квадратичные задачи размера N с числом обусловенности K и запускали на них наши алгоритмы с точностью 10^{-4} в точке $(10, 10, 10, ...10)$. В результате мы увидели следующую картину.

Таблица 3.1

Метод градиентного спуска

N\K	100	500	900	1300	1700
10	916	3679	7363	14728	14731
100	915	3679	7363	14721	14730
1000	915	3679	7363	14716	14731
10000	915	3679	7363	14714	14730

У метода градиентного спуска при одном фиксированном числе обусловленности количество итераций практически не меняется на разных размерностях пространства.

Таблица 3.2

Метод наискорейшего спуска

N\K	100	500	900	1300	1700
10	398	1513	2573	3423	4135
100	395	1567	2559	3469	4267
1000	397	1567	2567	3469	4299
10000	397	1571	2563	3461	4301

У метода наискорейшего спуска также практически не меняется число итераций при фиксированном K, при этом метод наискорейшего спуска показал число итераций меньше, чем метод градиентного спуска.

Таблица 3.3

Метод сопряженных градиентов

N\K	100	500	900	1300	1700
10	10	10	10	10	10
100	42	62	69	55	70
1000	47	106	135	134	131
10000	53	116	156	180	206

Метод сопряженных градиентов совершил меньшего всего итераций на каждой паре N и K.

4. Выводы

В процессе исследования мы выяснили, что число обусловленности серьезно влияет на количество итераций методов, при этом у двух из трех методов для фиксированного числа обусловленности число итераций почти не меняется для всех размерностей пространства. Лучше всего в наших испытаниях показал себя метод сопряженных градиентов, правда он требовал больше всего математических выкладок и преобразований. Метод наискорейшего спуска ожидаемо показал себя лучше, чем метод градиентного спуска.