

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики  
Факультет информационных технологий и программирования

# Методы оптимизации

Отчёт по лабораторной работе №4

**Работу**  
**выполнили:**  
И. О. Шахов  
М. А. Гордиенко  
А. В. Андреев  
Группа: М3236  
**Преподаватель:**  
Михаил Свинцов

Санкт-Петербург  
2022

# Содержание

<b>1. Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2. Метод Ньютона</b>	<b>4</b>
2.1. Классический метод Ньютона . . . . .	4
2.2. Метод Ньютона с одномерным поиском . . . . .	5
2.3. Метод Ньютона с направлением спуска . . . . .	5
<b>3. Квазиньютоновские методы</b>	<b>5</b>
3.1. Метод Брайдена-Флетчера-Шено . . . . .	6
3.2. Метод Пауэлла . . . . .	6
3.3. <b>Бонус.</b> Метод Марквардта . . . . .	6
3.3.1. Число обусловленности . . . . .	6
3.3.2. Реализация 1 . . . . .	7
3.3.3. Реализация 2 . . . . .	7
3.3.4. Функция Розенброка . . . . .	7
<b>4. Результаты исследования</b>	<b>8</b>
<b>5. Демонстрация работы методов</b>	<b>8</b>
5.1. Функция $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ . . . . .	8
5.1.1. Классический метод Ньютона . . . . .	8
5.1.2. Метод Ньютона с одномерным поиском . . . . .	10
5.1.3. Метод Ньютона с направлением спуска . . . . .	11
5.2. Функция $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 5xy - 7x + 2y - 30$ . . . . .	12
5.2.1. Классический метод Ньютона . . . . .	12
5.2.2. Метод Ньютона с одномерным поиском и направлением спуска . . . . .	12
5.3. Влияние выбора начального приближения на результат . . . . .	12
<b>6. Исследование работы на заданных функциях</b>	<b>13</b>
6.1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1.2xy$ . . . . .	13
6.2. $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$ . . . . .	14
<b>7. Сравнение квазиньютоновских методов</b>	<b>17</b>
7.0.1. Функция $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$ . . . . .	17
7.0.2. Функция $f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$ . . . . .	19
7.0.3. Функция $f(x, y, z, w) = (x + 10y)^2 + 5(z - w)^2 + (y - 2z)^4 + 10(x - w)^4$ . . . . .	20
7.0.4. Функция $f(x, y) = 100 - \frac{1}{1 + \frac{(-2+x)^2}{4} + \frac{(-1+y)^2}{9}} - \frac{2}{1 + \frac{(-1+x)^2}{4} + \frac{(-1+y)^2}{9}}$ . . . . .	21
<b>8. Метод Марквардта</b>	<b>22</b>
8.1. Реализация 1 . . . . .	22
8.2. Реализация 2 . . . . .	24
8.3. Метод Ньютона . . . . .	26
<b>9. Выводы</b>	<b>26</b>

# 1. Постановка задачи

**Тема.** Изучение алгоритмов метода Ньютона и его модификаций, в том числе квазиньютоновских методов.

**Цель.** Разработать программы для безусловной минимизации функций многих переменных.

## Реализовать алгоритмы

1. Метод Ньютона: **а)** классический, **б)** с одномерным поиском (одномерный метод на выбор студентов), **в)** с направлением спуска. И продемонстрируйте работу методов на 2-3 функциях, в том числе на не квадратичных

- Для поиска ньютоновского направления спуска необходимо использовать прямой или итерационный метод решения СЛАУ
- Результаты иллюстрируйте траекториями спуска.
- Укажите количество итераций, необходимых для достижения заданной точности.
- Проведите исследование влияние выбора начального приближения на результат (не менее трех).

2. Исследуйте работу методов на двух функциях с заданным начальным приближением:

$$\begin{aligned}f(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 1.2x_1x_2, x^0 = (4, 1)^T \\f(x) &= 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, x^0 = (-1.2, 1)^T.\end{aligned}$$

- Для поиска ньютоновского направления спуска необходимо использовать прямой или итерационный метод решения СЛАУ
- Сравните результаты с минимизацией методом наискорейшего спуска.
- Постройте таблицу или график зависимости «метод : количество итераций».
- Для каждого метода приведите иллюстрации траекторий сходимости.

3. Реализовать методы Метод Брайдена-Флетчера-Шено и метод Пауэлла; Работу квазиньютоновских методов сравните с наилучшим методом Ньютона (по результатам 1.2) на функциях:

$$\begin{aligned}f(x) &= 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \\f(x) &= (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \\f(x) &= (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4 \\f(x) &= 100 - \frac{2}{1 + (\frac{x_1 - 1}{2})^2 + (\frac{x_2 - 1}{3})^2} - \frac{1}{1 + (\frac{x_1 - 2}{2})^2 + (\frac{x_2 - 1}{s})^2}\end{aligned}$$

- Для каждого метода приведите иллюстрации траекторий сходимости.
- Проведите исследование влияние выбора начального приближения на результат (не менее трех), оцените скорость сходимости.
- Постройте таблицу или график зависимости «метод : количество итераций».

## 2. Метод Ньютона

Градиентный спуск хорош по многим показателям. Он легко пишется и не требует большого кол-ва доп памяти. Единственное, что нас может не устроить - это его скорость сходимости. Из 2 ЛР мы узнали что у градиентного спуска в лучшем случае для выпуклых функций линейная скорость сходимости, а для произвольных функций сублинейная. Но существуют ли методы, сходящаяся быстрее? Оказывается, существует метод Ньютона, который иногда сходится быстрее чем линейно.

### 2.1. Классический метод Ньютона

Основная идея метода Ньютона заключается в итеративном использовании квадратичной аппроксимации целевой функции в текущей точке поиска и минимизации этой аппроксимации. Разложим дважды дифференцируемую целевую функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора в фиксированной точке  $x$  при произвольном приращении аргумента  $\Delta x$ , ограничиваясь слагаемыми второго порядка малости.

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + o(\|\Delta \mathbf{x}\|^2)$$

Пренебрегая слагаемыми выше второго порядка малости и обозначая приращение аргумента  $p = \Delta x$ , градиент  $\mathbf{g}(x) = \nabla f(x)$ , матрицу Гессе  $H(x) = \nabla^2 f(x)$ , получим квадратичную функцию:

$$q(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T H(\mathbf{x}) \mathbf{p}$$

Вычислим значение аргумента  $s$ , которое минимизирует эту функцию. Запишем градиент квадратичной функции.

$$\nabla q(\mathbf{p}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x})\mathbf{p}$$

Учитывая необходимое условие минимума  $\nabla q(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ , получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$H(\mathbf{x})\mathbf{p} = -\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Метод минимизации функции, основанный на данной формуле называется методом Ньютона.

**NOTE:** Метод Ньютона минимизирует положительно определенную квадратичную функцию за один шаг из любой начальной точки. Для остальных функций используется алгоритм.

Начальные условия  $x_0$  и  $\epsilon$

1. Найдем градиент  $gradf(x)$  и гессиан  $H(X)$
2. Решаем слау:  $Hp^k = -gradf(x)$
3.  $x^k = x^{k-1} + p^k$
4.  $\|x^k - x^{k-1}\| < \epsilon$ , то остановимся, иначе вернемся к шагу 1.

Можно заметить, что алгоритм **работает только в том случае, если матрица Гессе  $H(x)$  положительно определенная**. Ведь тогда и обратная к ней матрица  $H^{-1}(x)$  также положительно определенная. В этом случае  $\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{s} \leq 0$  и вектор  $s$  определяет направление спуска. Если же матрица  $H(x)$  отрицательно определенная, то вектор

$s$  определяет направление возрастания функции. В этом случае вектор  $s$  приводит в точку максимума квадратичной функции. Есть еще одна проблема. Условию  $\nabla q(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$  отвечает и седловая точка. Поэтому одним из недостатков метода Ньютона является возможное возрастание значений функции  $f(\mathbf{x}_{k+1}) \geq f(\mathbf{x}_k)$  и расходимость метода для функции общего вида. Другим недостатком является использование матрицы вторых частных производных, требующее дополнительных вычислений.

## 2.2. Метод Ньютона с одномерным поиском

При минимизации произвольной целевой функции  $f(x)$  формулы метода Ньютона, основанные на аппроксимации функции квадратичной функцией в малой окрестности текущей точки поиска, могут приводить к возрастанию значений функции. Для повышения надежности метода Ньютона и обеспечения убывания значений целевой функции применяется одномерная минимизация функции в направлении поиска. Модификация метода Ньютона в которой вводится параметр  $a = \min_a f(x^{k-1} + a * p^k)$ , с помощью которого находится  $x^k = x^{k-1} + a * p^k$ . Метод Ньютона с одномерным поиском надежнее исходного метода Ньютона. Однако его эффективность существенно зависит от того, является ли направление поиска направлением спуска.

## 2.3. Метод Ньютона с направлением спуска

Для повышения эффективности метода Ньютона необходимо обеспечить такое направление одномерного поиска, которое гарантированно приводит к убыванию функции, то есть является направлением спуска.

$$p^k = \begin{cases} p^k, & \text{если } \left( (p^k)^T, \operatorname{grad} f(x^{k-1}) \right) < 0 \\ -\operatorname{grad} f(x^{k-1}), & \text{иначе} \end{cases}$$

Метод Ньютона с одномерным поиском и заданием направления спуска надежнее предыдущих вариантов метода Ньютона.

# 3. Квазиньютоновские методы

Во время решения задачи минимизации нам требовалась градиент и матрица Гессе. И при этом мы никак не использовали информацию, полученную в процессе алгоритма. Квазиньютоновские методы решают эту проблему.

Квазиньютоновские методы также основаны на итерационной формуле Ньютона. Однако при вычислении направления одномерного поиска выполняется аппроксимация матрицы Гессе или обратной к ней матрицы с использованием значений градиента.

Квазиньютоновский алгоритм очень похож на алгоритм Ньютона:

1.  $\omega^k = -\operatorname{grad} f(x^{k-1})$ ;
2. Поиск положительно определенной матрицы  $G_k$  размерности  $n \times n$  - определяется реализацией метода.
3.  $p^k = G_k \omega^k$
4.  $x^k = x^{k-1} + \alpha_k p^k$ , где  $\alpha_k = \operatorname{argmin}_\alpha f(x^{k-1} + \alpha p^k)$
5. Если  $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$ , то итерационный процесс завершается, иначе переходим к шагу 1.

Конкретные реализации квазиньютоновских методов, отличаются поиском матрицы  $G_k$ , которая вычисляется с использованием  $\Delta x^k = x^k - x^{k-1}$ ,  $\Delta \omega^k = \omega^k - \omega^{k-1}$

### 3.1. Метод Бройдена-Флетчера-Шено

Матрица  $G_k$  определяется следующим образом:

- $G_1 = I$  – единичная матрица
- $G_{k+1} = G_k - \frac{\Delta x^k (\Delta x^k)^T}{(\Delta \omega^k, \Delta x^k)} - \frac{G_k \Delta \omega^k (\Delta \omega^k)^T * G_k^T}{\rho} + \rho r^k (r^k)^T$ , где  $\rho_k = (G_k \Delta w^k, \Delta w^k)$ , а  
 $r^k = \frac{G_k \Delta \omega^k}{\rho_k} - \frac{\Delta x^k}{(\Delta x^k, \Delta w^k)}$

### 3.2. Метод Пауэлла

- $G_1 = I$  – единичная матрица
- $G_{k+1} = G_k - \frac{y^k (y^k)^T}{(\Delta \omega^k, y^k)}$ , где  $y^k = \Delta x^k + G_k \Delta \omega^k$

### 3.3. Бонус. Метод Марквардта

Практика показывает, что движение в направление антиградиента из начальной точки поиска  $x_0$ , расположенной на значительном расстоянии от точки минимума  $x^*$ , обычно приводит к существенному уменьшению целевой функции. С другой стороны, направления эффективного поиска в окрестности точки минимума определяются по методу Ньютона. Идея объединения методов наискорейшего спуска и Ньютона представлена американским математиком Д. Марквардтом в 1963 г. Он вместо формулы метода Ньютона использовал формулу:  $[\mathbf{H}(\mathbf{x}) + \alpha \mathbf{E}] \mathbf{s} = -\mathbf{g}(\mathbf{x})$ . Где:

- $\alpha$  – скалярный параметр.
- $E$  – единичная матрица той же размерности, что и матрица Гессе.

При большом значении  $\alpha$  матрицей  $H(x)$  в левой части уравнения можно пренебречь, тогда получим уравнение  $\alpha E s = -g(x)$ . В этом случае направление вектора  $s = \frac{-g(x)}{\alpha}$  совпадает с антиградиентом, то есть направлением наискорейшего спуска. Если же  $\alpha \rightarrow 0$ , то в уравнении можно пренебречь слагаемым  $\alpha E$ . Тогда превращается в уравнение Ньютона и  $s$  становится шагом метода Ньютона. При промежуточном значении  $\alpha$  направление вектора  $s$ , удовлетворяющего формуле Марквардта, лежит между направлением антиградиента и направлением метода Ньютона. На этом свойстве уравнения основан метод Марквардта. Начальное значение выбирается достаточно большим,  $\alpha \gg 1$ , а затем в процессе поиска уменьшается. Таким образом, на начальных этапах выполняются шаги метода наискорейшего спуска, а на конечных этапах используется шаг метода Ньютона.

#### 3.3.1. Число обусловленности

Для плохо обусловленных матриц метод Марквардта лучше, чем метод Ньютона. Число обусловленности задается формулой:

$$\text{cond } \mathbf{H} = \|\mathbf{H}\| \cdot \|\mathbf{H}^{-1}\|.$$

Для единичной матрицы  $E$  число обусловленности  $\text{cond}(E) = 1$ , а для произвольной матрицы  $H$ :  $\text{cond}H > 1$ . В точках поиска, далёких от минимума, матрица Гессе  $H$  является, как правило, плохо обусловленной матрицей, но в этих точках для метода Марквардта  $a \gg 1$ , поэтому  $H + \alpha E \approx E$ , а, значит  $\text{cond}(H + \alpha E) \approx \alpha$ .

### 3.3.2. Реализация 1

В данной реализации выбирается  $\beta \in (0; 1)$ , а затем в процессе поиска  $\alpha_k$  уменьшается посредством умножения на коэффициент  $\beta$ . Если шаг слишком большой и  $f(\mathbf{x}_{k+1}) \geq f(\mathbf{x}_k)$ , то полагают  $\alpha_k = \alpha_k / \beta$  и опять применяют формулы уже с меньшим шагом. Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие:

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

### 3.3.3. Реализация 2

Теперь изменим алгоритм выбора  $\beta$ :

- $H(x) + \tau I > 0$  - Проверка матрицы на положительность с помощью метода Холецкого.
- Если матрица отрицательно определена, то пересчитываем  $\tau = \max(1, 2\tau)$ . Повторить шаг 1.

### 3.3.4. Функция Розенброка

Невыпуклая функция, используемая для оценки производительности алгоритмов оптимизации, предложенная Ховардом Розенброком в 1960 году. Считается, что поиск глобального минимума для данной функции является нетривиальной задачей. Минимаксное значение функции - 0. Достигается в точке  $(1, 1, \dots, 1)^T$ . Она является одной из основных тестовых функций для проверки эффективности многомерных методов безусловной минимизации, которые стартуют из начальной точки  $\mathbf{x}_0 = (-1, 2; 1)^T$ .

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2)$$

При  $n = 100$ .

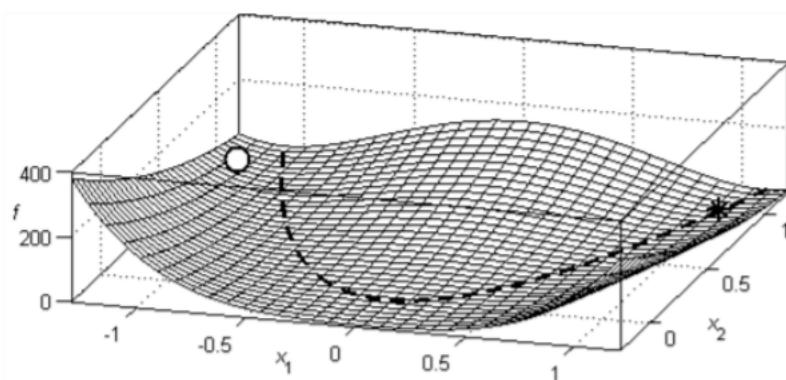


Рисунок 3.1. Функция Розенборга для трехмерного случая

## 4. Результаты исследования

### 5. Демонстрация работы методов

#### 5.1. Функция $f(x, y) = \arctg(x^2 + y^2)$

##### 5.1.1. Классический метод Ньютона

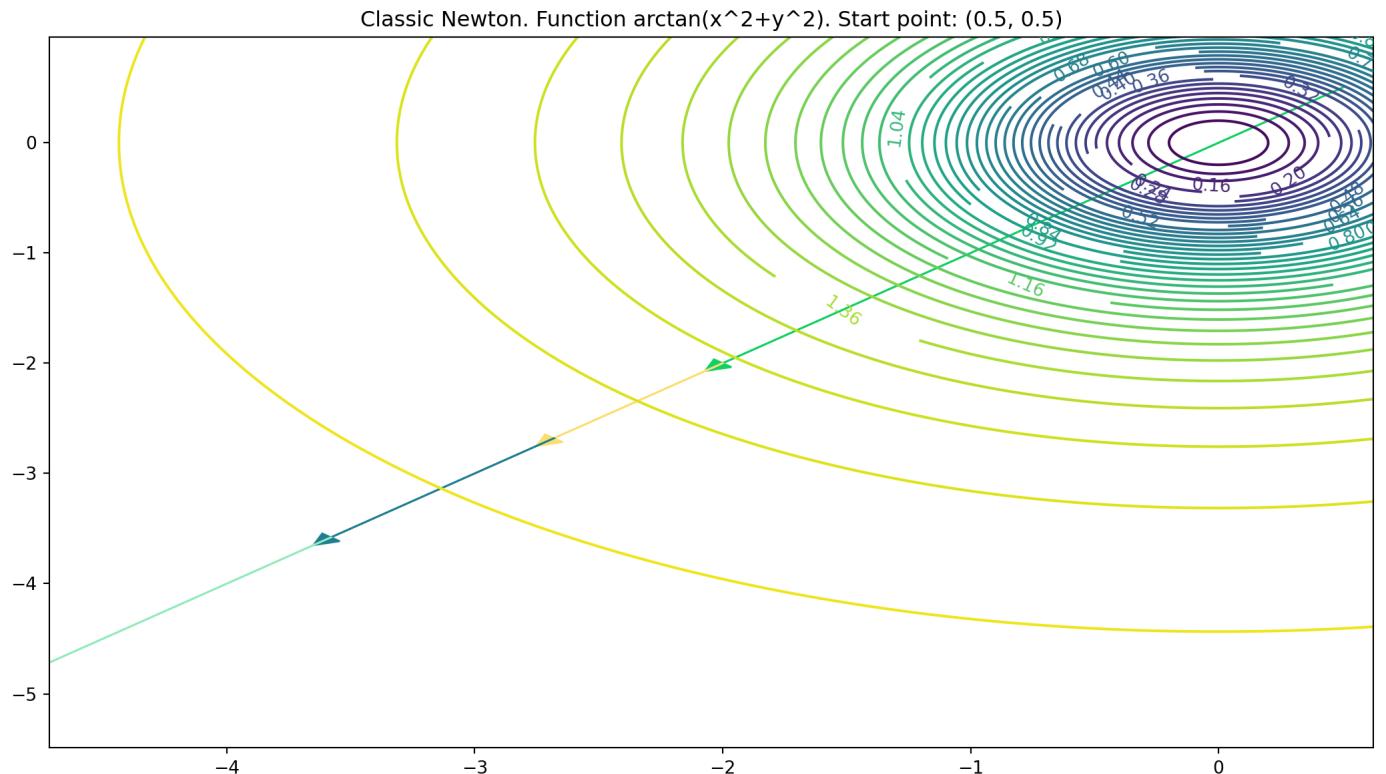


Рисунок 5.1. Траектория работы классического метода Ньютона из точки (0.5; 0.5)

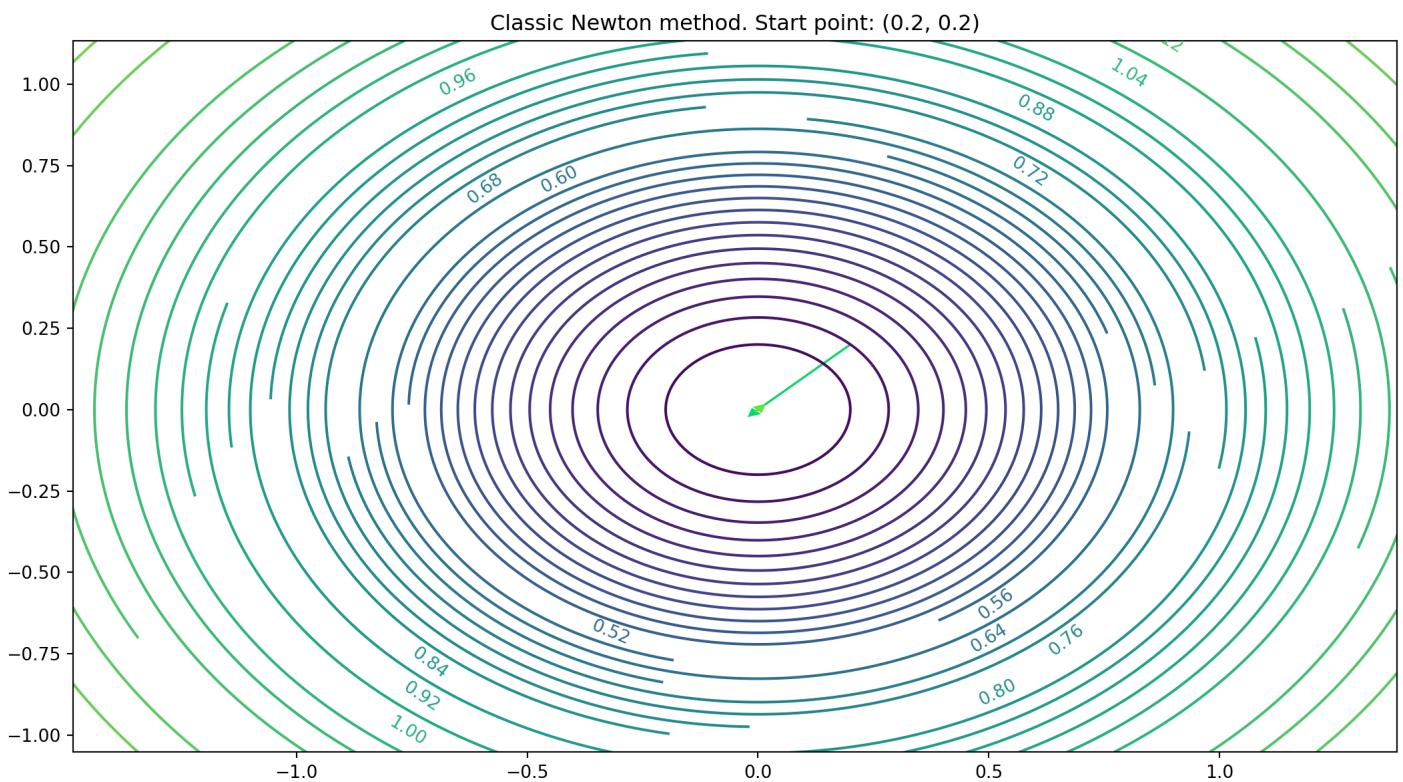


Рисунок 5.2. Траектория работы классического метода Ньютона из точки  $(0.2; 0.2)$

Метод был протестирован в двух различных начальных точках  $(0.5; 0.5)$  и  $(0.2; 0.2)$ . Заданная точность  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Во втором случае метод сошелся в точку минимума  $(0; 0)$  за две итерации. В первом же случае сходимости не было обнаружено. Заметим также, что при дальнейшем удалении от точки минимума сходимости обнаружено также не будет из-за овражного характера функции.

### 5.1.2. Метод Ньютона с одномерным поиском

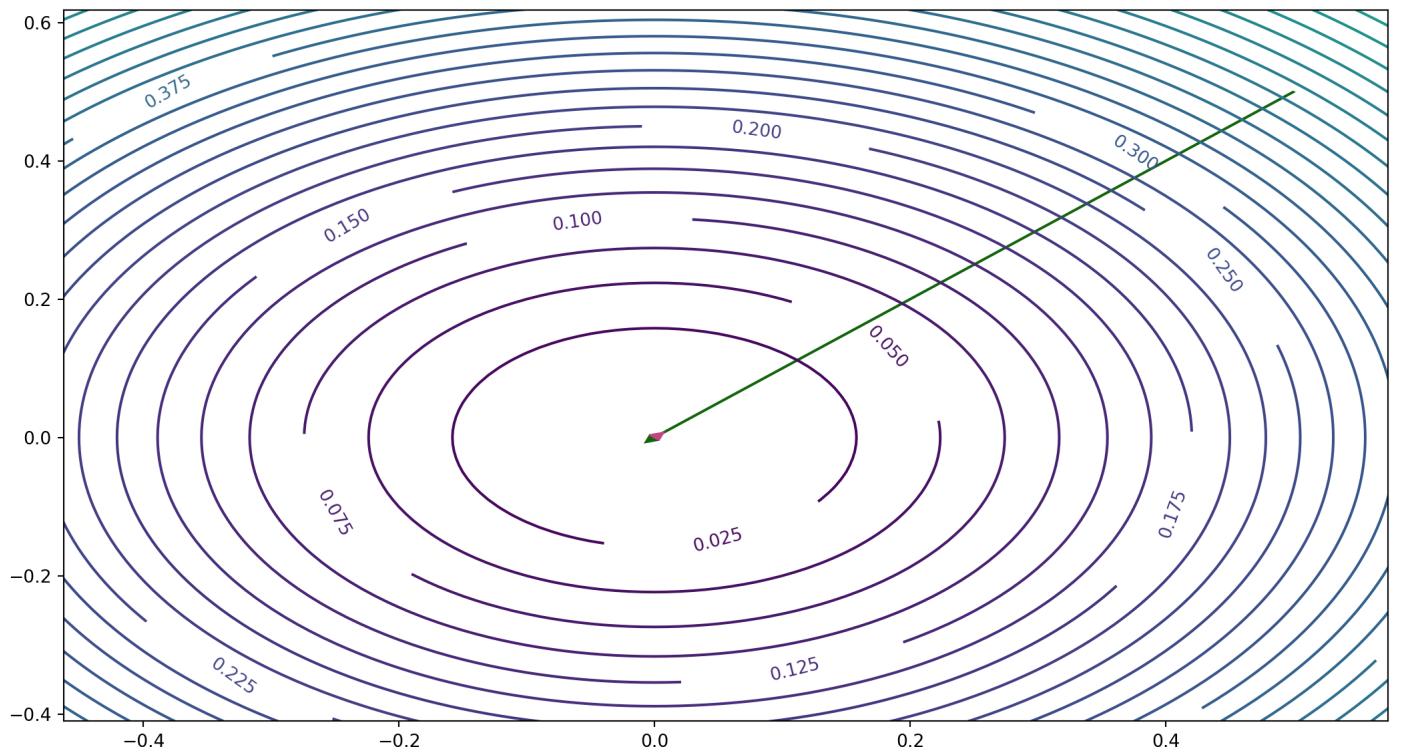


Рисунок 5.3. Траектория работы метода Ньютона с одномерным поиском из точки  $(0.5; 0.5)$

При запуске метода из точки  $(0.5; 0.5)$  он сойдется за 2 итерации до точности  $\varepsilon = 10^{-6}$  со значениями параметра одномерного спуска  $\alpha_1 = 0.2$  и  $\alpha_2 = 5$  соответственно. При запуске метода из точки  $(3; 3)$  метод не сходится.

### 5.1.3. Метод Ньютона с направлением спуска

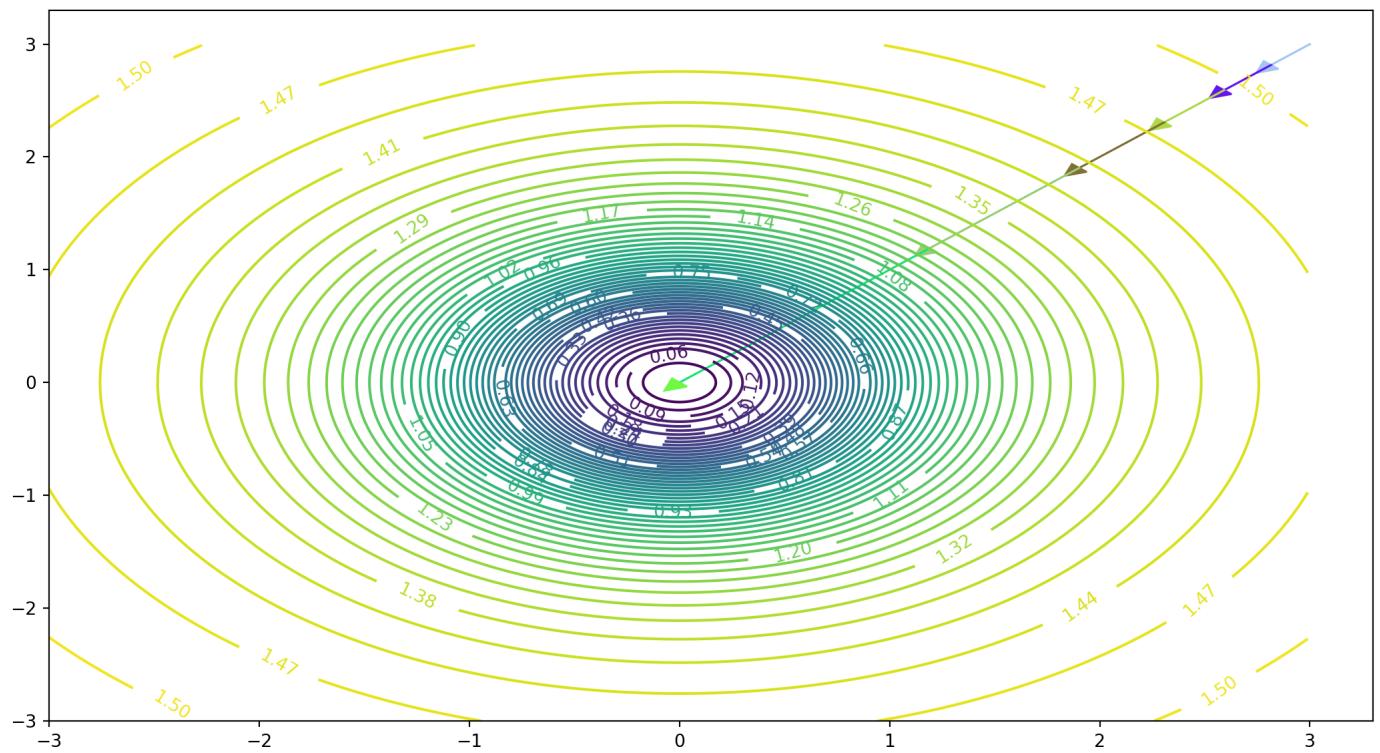


Рисунок 5.4. Траектория работы метода Ньютона с направлением спуска из точки (3; 3)

Если запустить метод Ньютона с направлением спуска из точки (3; 3), то он сойдется к точке минимума за 7 итераций с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Значение параметров спуска  $\alpha = [10, 10, 10, 10, 10, 4.5237, 5]$

## 5.2. Функция $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 5xy - 7x + 2y - 30$

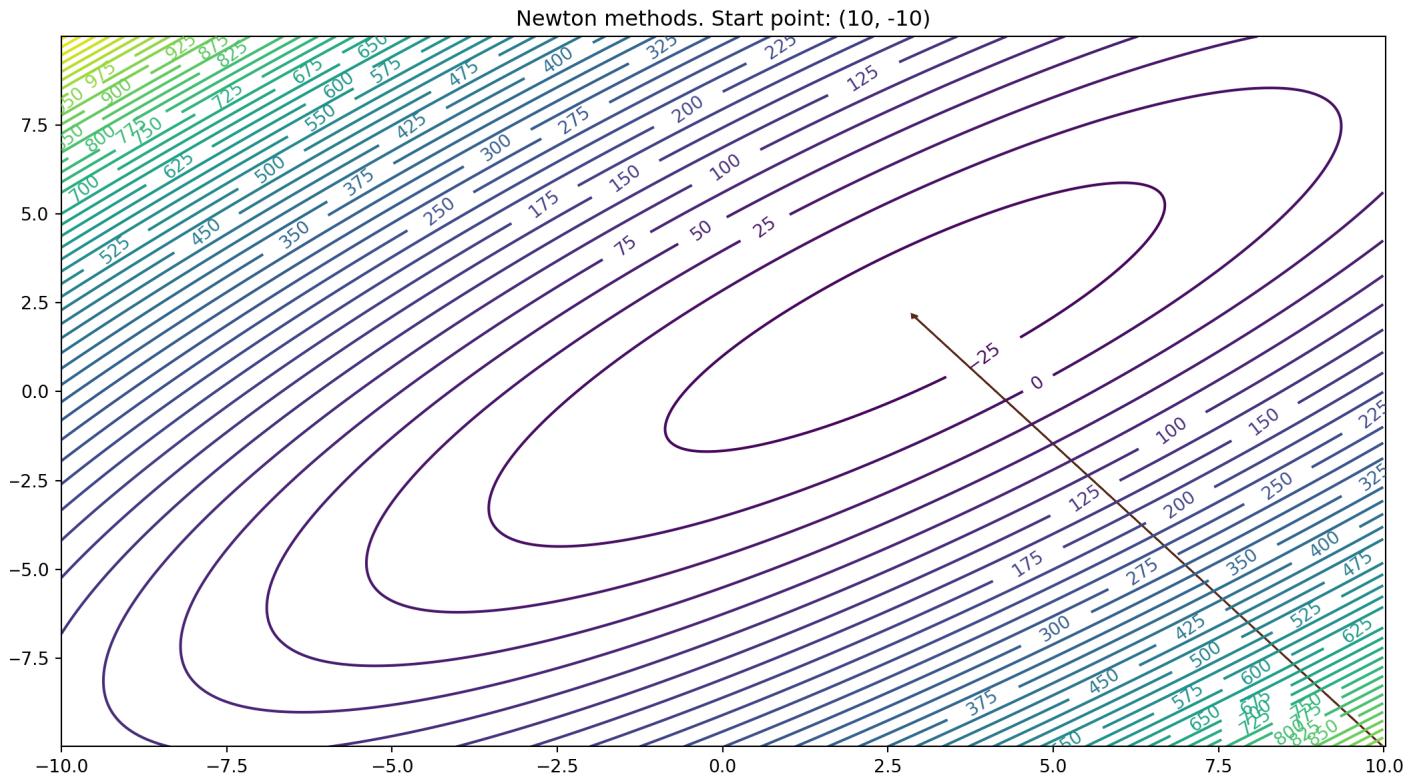


Рисунок 5.5. Траектория работы методов Ньютона с направлением спуска из точки  $(10; -10)$

### 5.2.1. Классический метод Ньютона

Известно, что метод Ньютона сходится за одну итерацию на квадратичных функциях. Для данной функции метод сходится к минимуму  $-38.09$  в точке  $(2.9; 2.09)$  за 2 итерации: на первой итерации перемещается в минимум, а на второй совершает очень маленький шаг --- так метод понимает, что шаг достаточно мал, чтобы завершить работу. Также было замечено, что выбор начального приближения не влияет на количество итераций (кроме случая, когда начальная точка в  $\varepsilon$ -окрестности минимума --- в этом случае метод совершает 1 итерацию).

### 5.2.2. Метод Ньютона с одномерным поиском и направлением спуска

Данные два метода ведут себя аналогично, ведь в их основе лежит классический метод Ньютона. Параметр одномерной оптимизации  $\alpha \approx 1$ , так как полученный в предыдущем методе вектор ведёт ровно в минимум.

## 5.3. Влияние выбора начального приближения на результат

Как было показано выше для квадратичных функций выбор начального приближения не влияет на результат, но для самой первой функции выбор начальной точки оказался критичным: если выбирать точки, координаты которых по модулю меньше 1, то все методы сойдутся. Однако если отойти достаточно далеко от начала отсчета, то сойдется к точке минимума только метод Ньютона с направлением спуска.

## 6. Исследование работы на заданных функциях

### 6.1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1.2xy$

Это квадратичная функция. Результаты, полученные в этом пункте аналогичны прежним результатам на квадратичных функциях. Для одномерного поиска  $\alpha_k \approx 1$ . Точность  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Методы сошлись за одну итерацию.

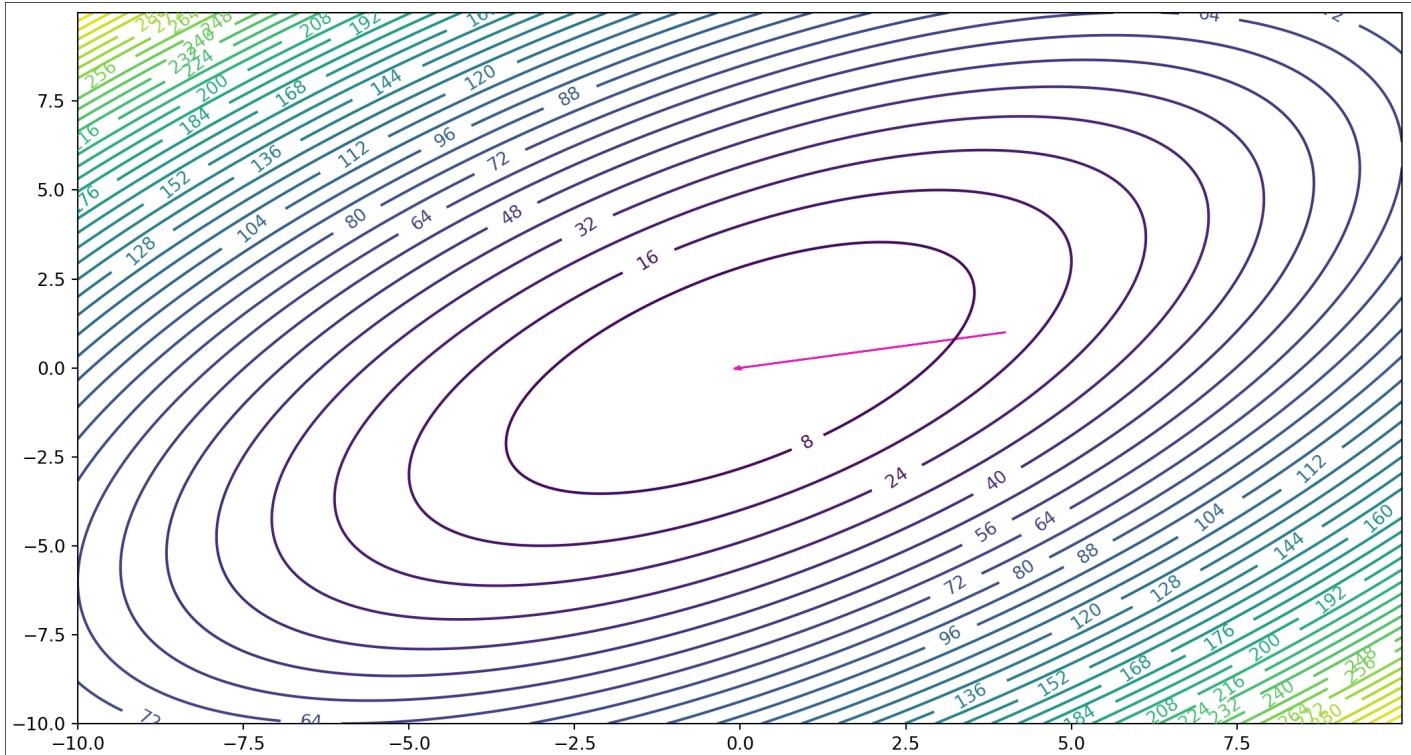


Рисунок 6.1. Траектория работы методов Ньютона из точки (4; 1)

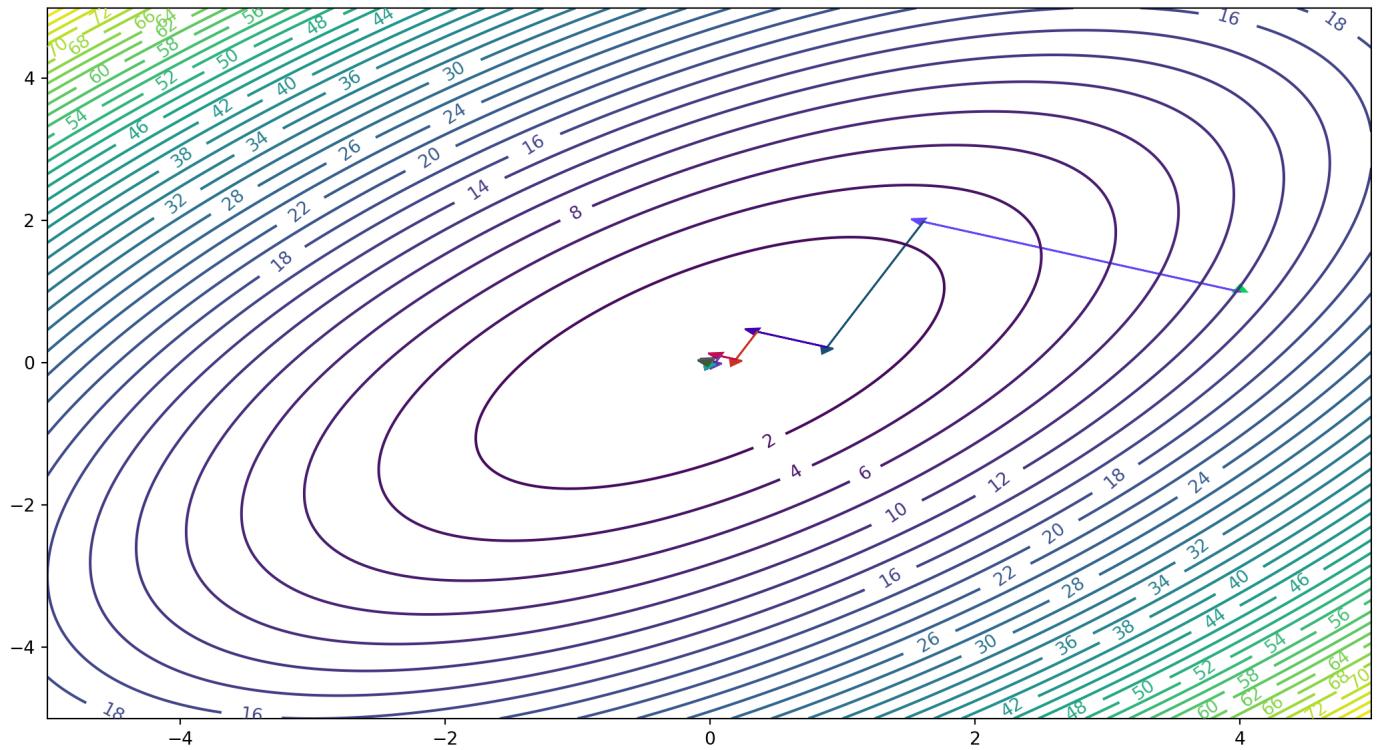


Рисунок 6.2. Траектория работы метода наискорейшего спуска из точки (4; 1)

**6.2.**  $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$

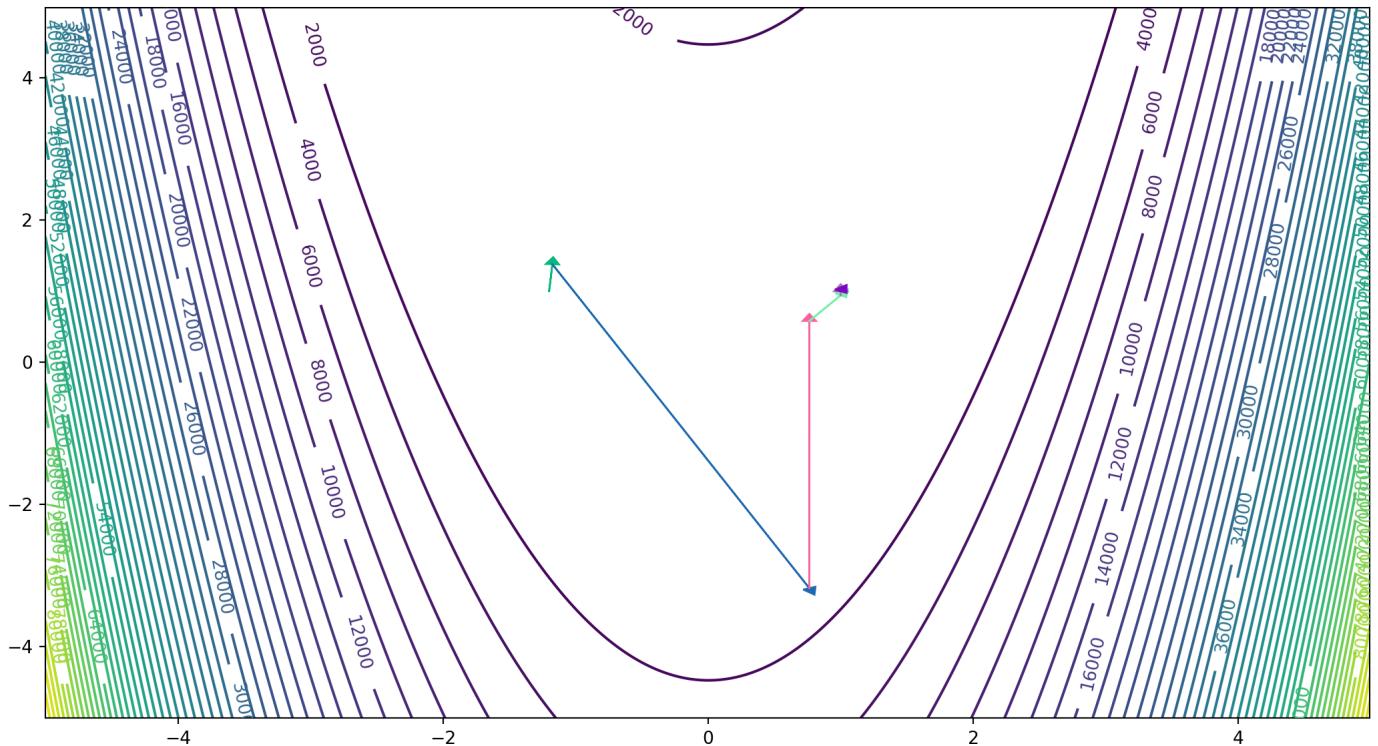


Рисунок 6.3. Траектория работы классического метода Ньютона из точки (-1.2; 1)

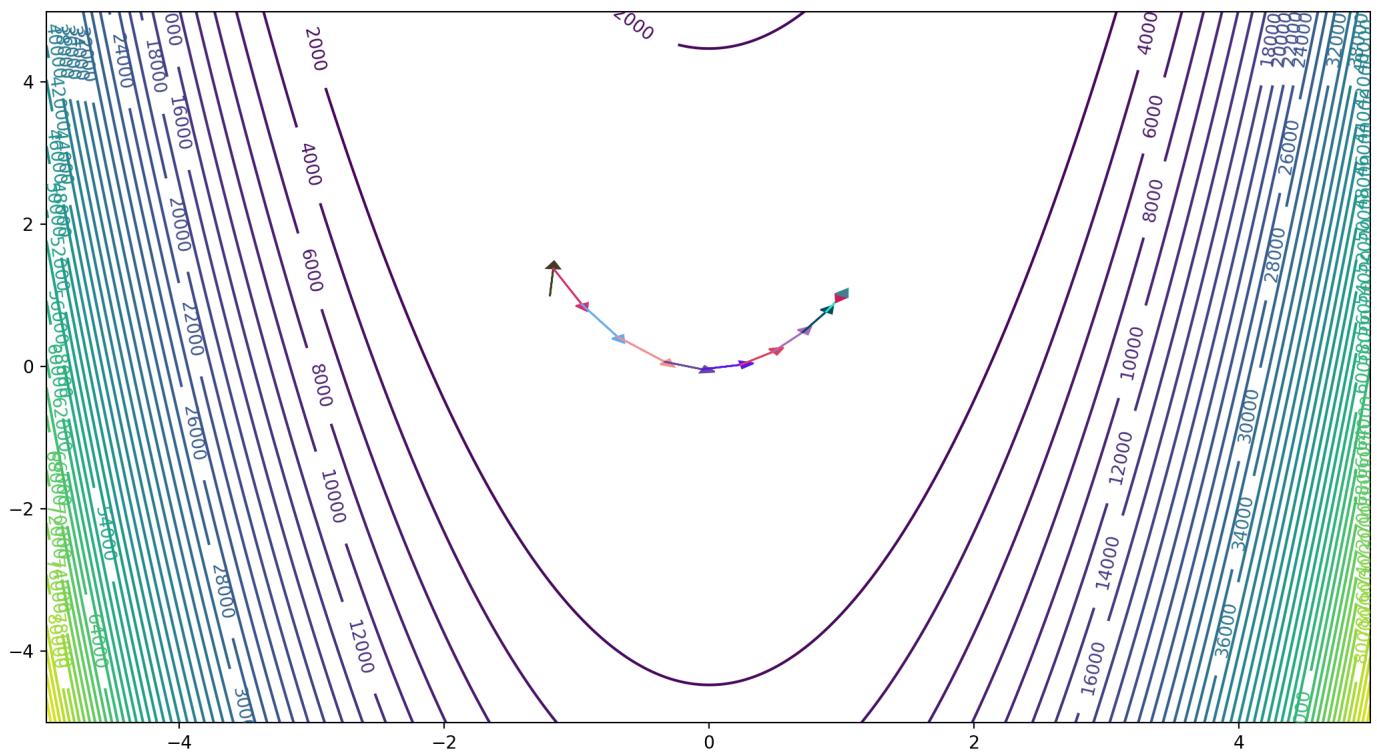


Рисунок 6.4. Траектория работы метода Ньютона с одномерным поиском из точки  $(-1.2; 1)$

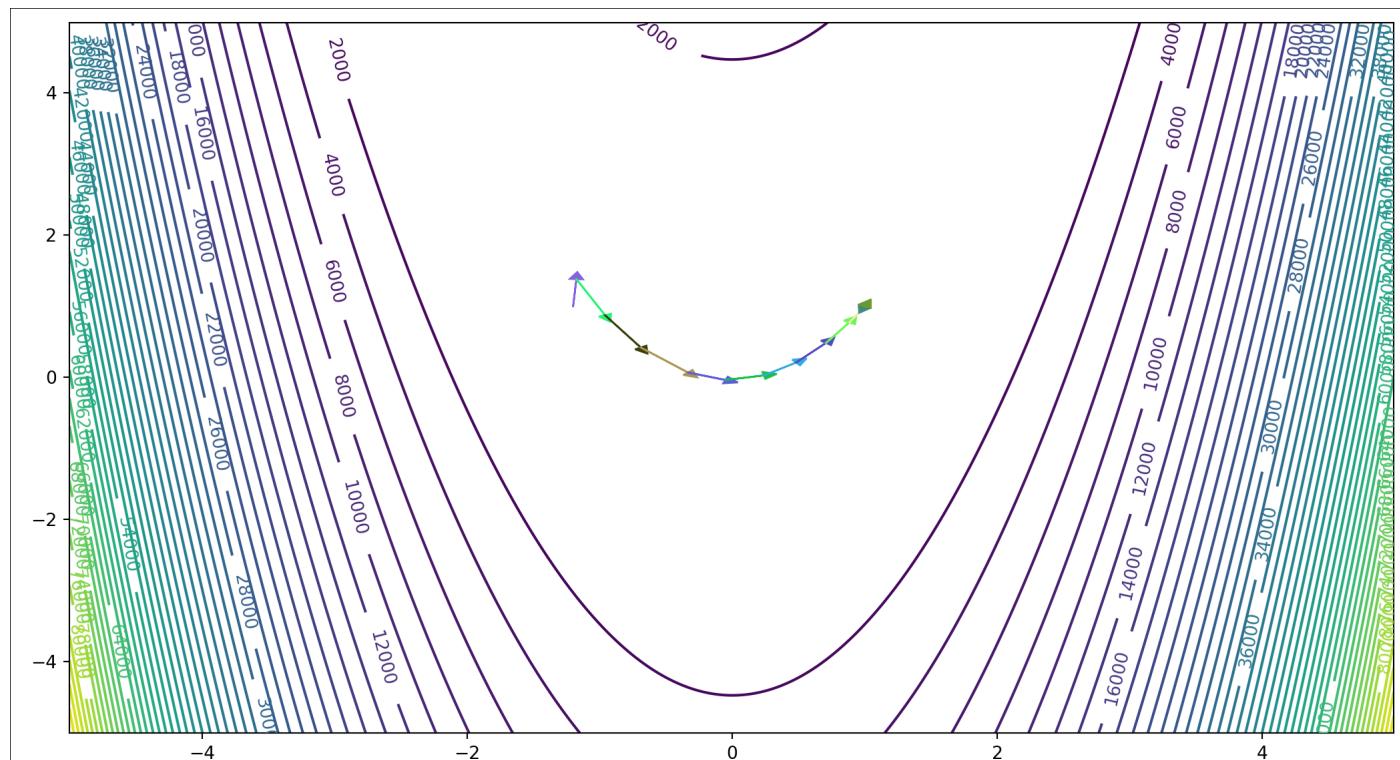
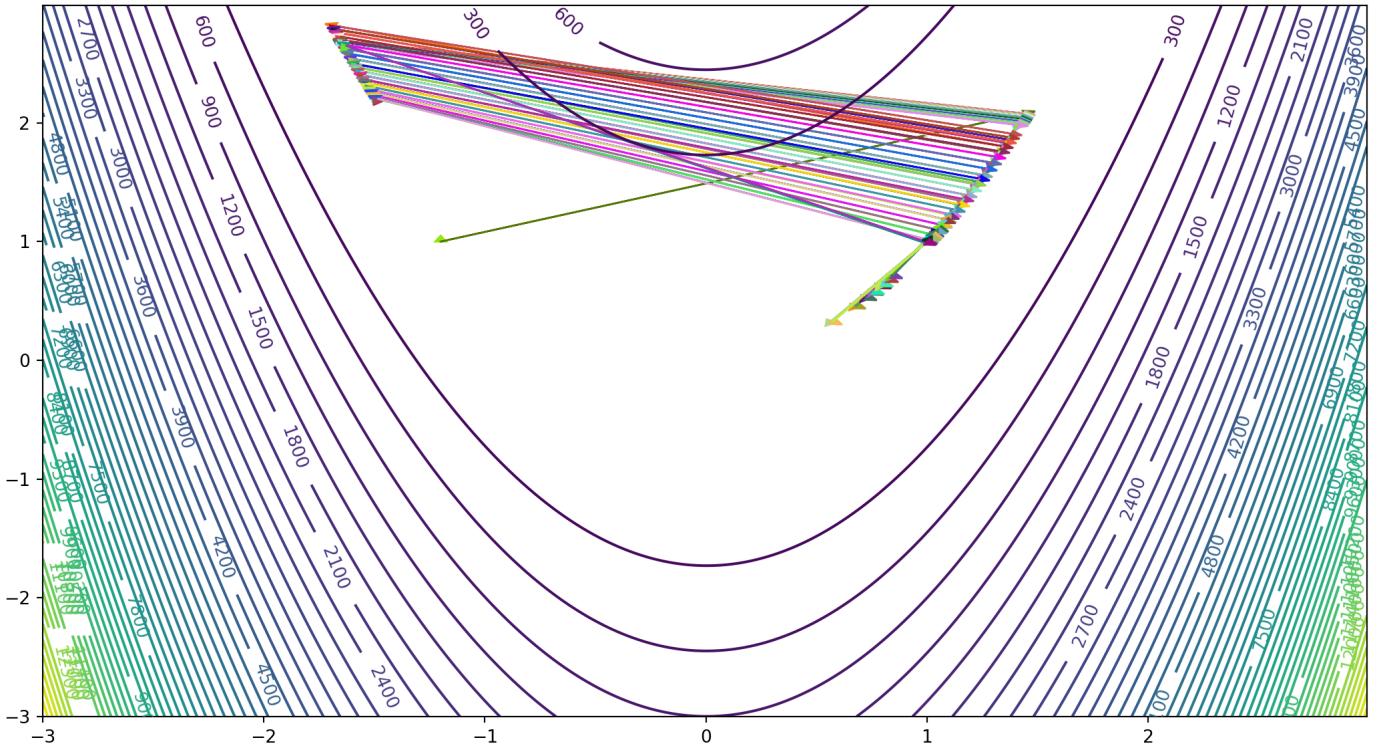
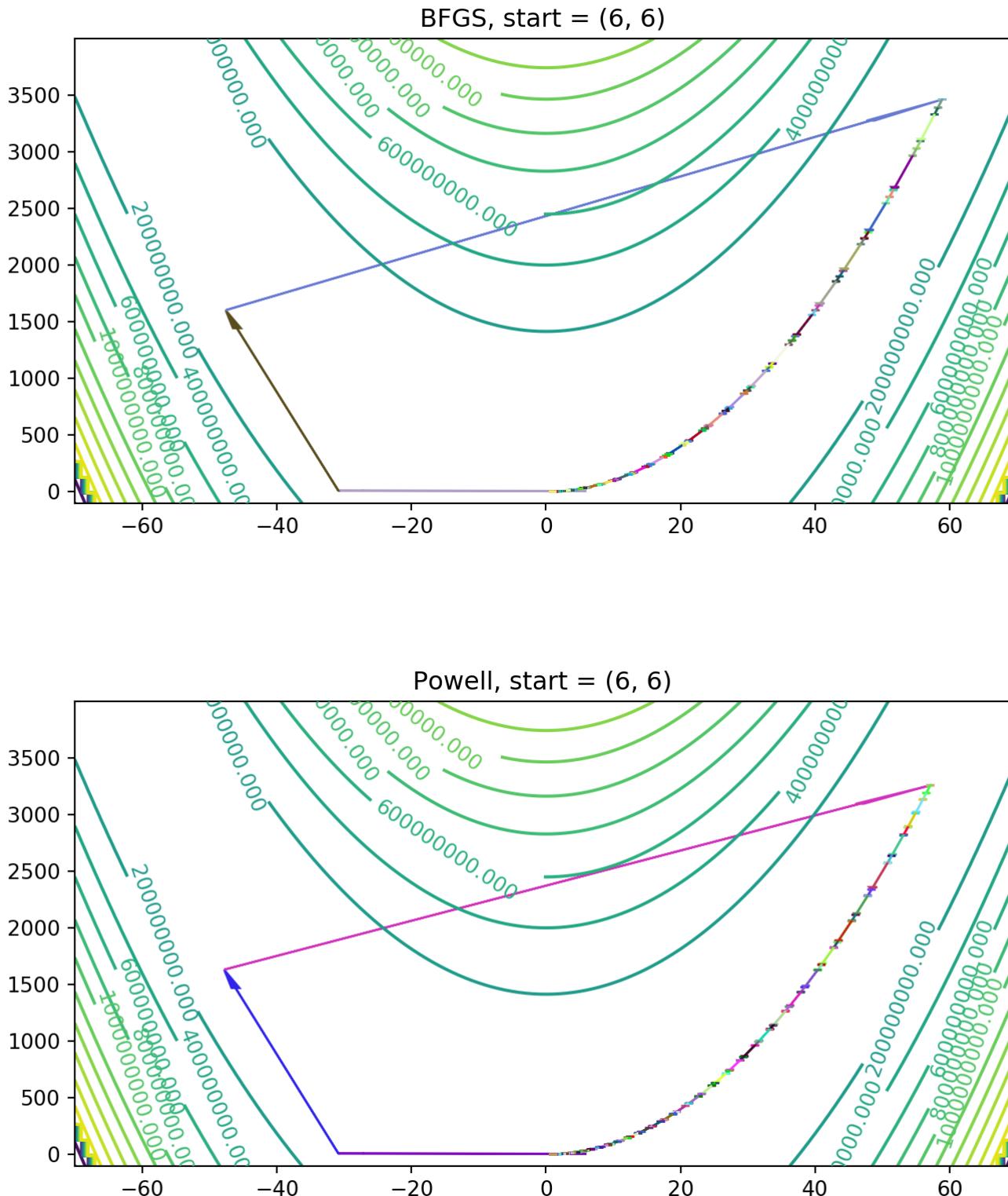


Рисунок 6.5. Траектория работы метода Ньютона с направлением спуска из точки  $(-1.2; 1)$



## 7. Сравнение квазиньютоновских методов

7.0.1. Функция  $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$



Directional Newton, start = (6, 6)

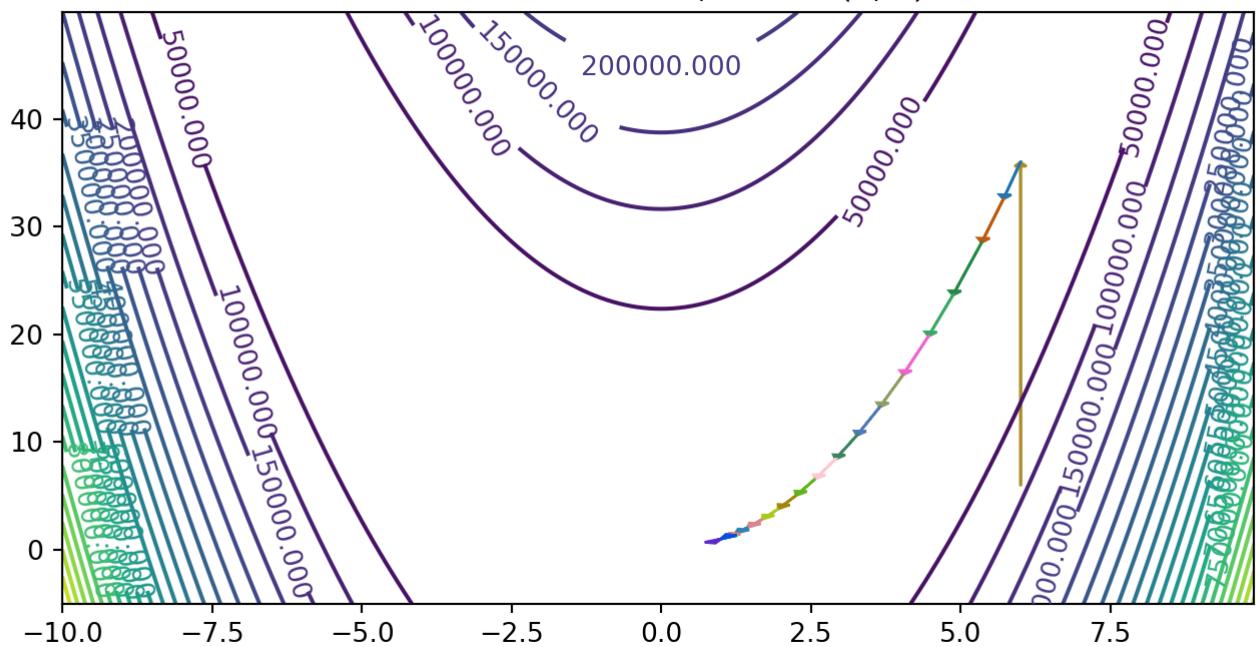


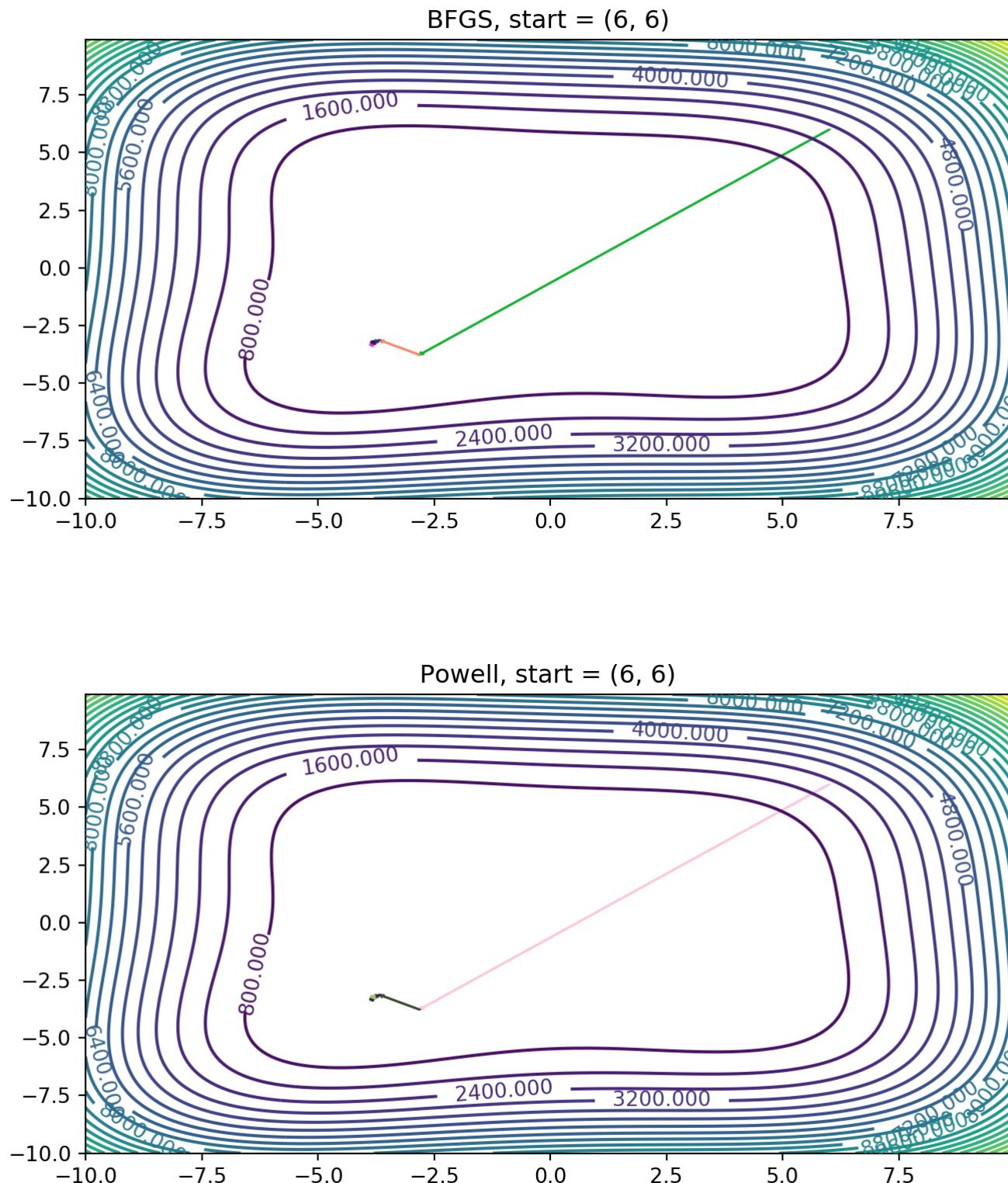
Таблица 7.1

**Кол-во итераций**

Точка \ Метод	BFGS	Powell	Newton
(6, 6)	95	138	20
(3, 2)	37	37	13
(10, 9)	258	369	27

На этой функции лучше всего у нас отработал метод Ньютона, он сошелся к правильному ответу быстрее всего. Квазиньютоновские методы отработали похожим образом, но лучше себя показал *BFGS* по скорости сходимости.

**7.0.2. Функция**  $f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$



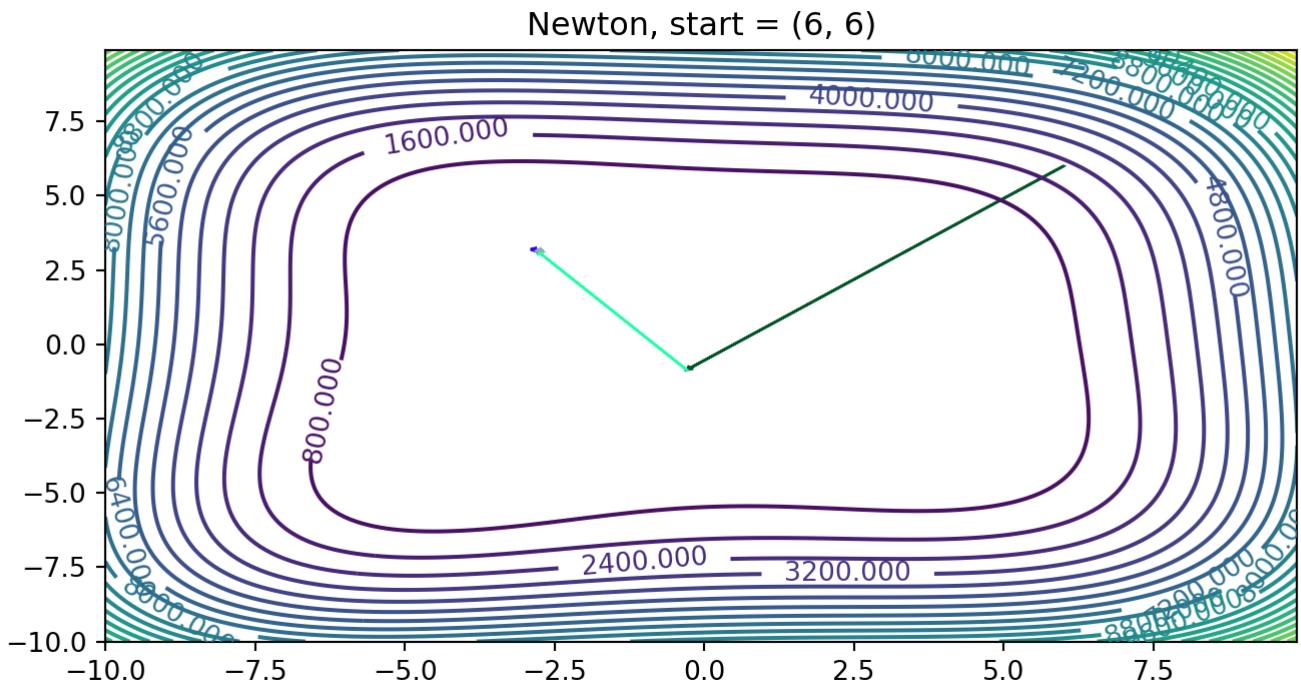


Таблица 7.2

**Кол-во итераций**

Точка\Метод	BFGS	Powell	Newton
(6, 6)	6	6	5
(0, 0)	8	8	11
(10, 9)	6	6	5

У этой функции есть несколько точек глобального минимума, и можно видеть, что Ньютона сходится к отличной от квазиньютоновских методов точке. По количеству итераций все методы отработали примерно одинаково, также все методы нашли минимум.

### 7.0.3. Функция $f(x, y, z, w) = (x + 10y)^2 + 5(z - w)^2 + (y - 2z)^4 + 10(x - w)^4$

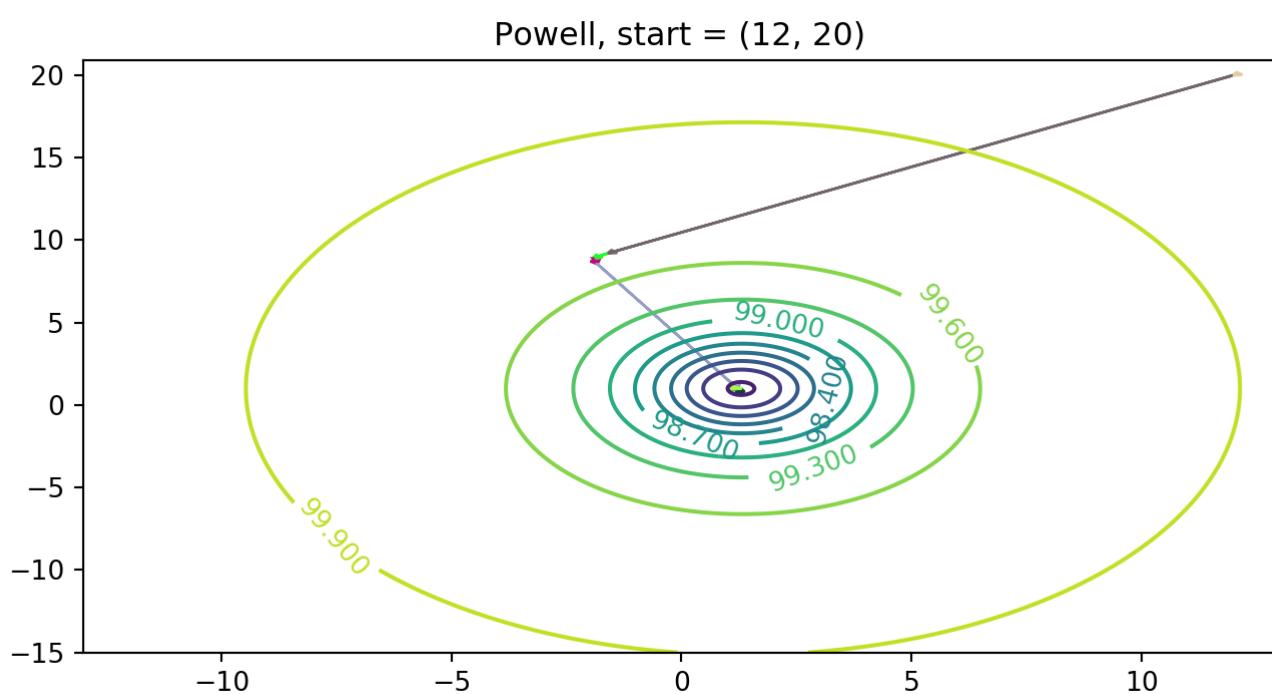
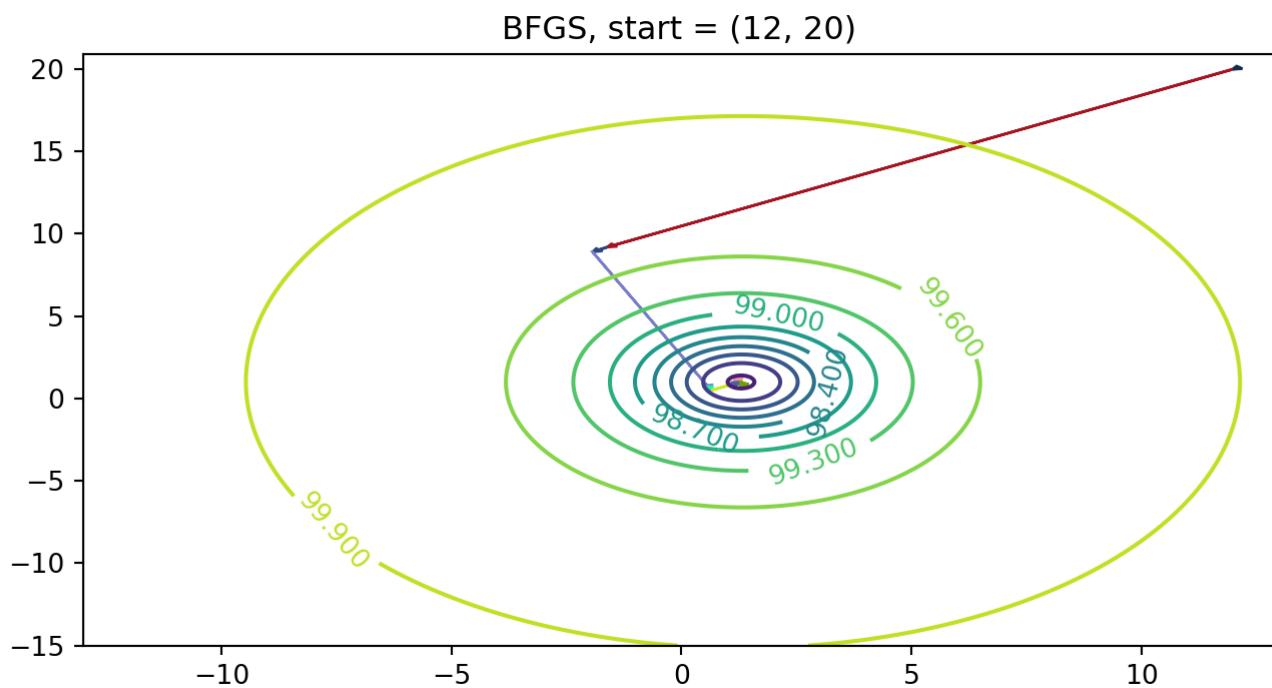
Таблица 7.3

**Кол-во итераций**

Точка\Метод	BFGS	Powell	Newton
(6, 6, 6, 6)	21	13	19
(3, 2, 3, 0)	20	28	20
(10, 9, 8, 7)	24	22	20

К сожалению, к этой функции тяжело нарисовать траектории сходимости. Но из полученных нами результатов следует, что методы отработали примерно одинаково. Они все смогли найти точку минимума.

**7.0.4. Функция**  $f(x, y) = 100 - \frac{1}{1 + \frac{(-2+x)^2}{4} + \frac{(-1+y)^2}{9}} - \frac{2}{1 + \frac{(-1+x)^2}{4} + \frac{(-1+y)^2}{9}}$



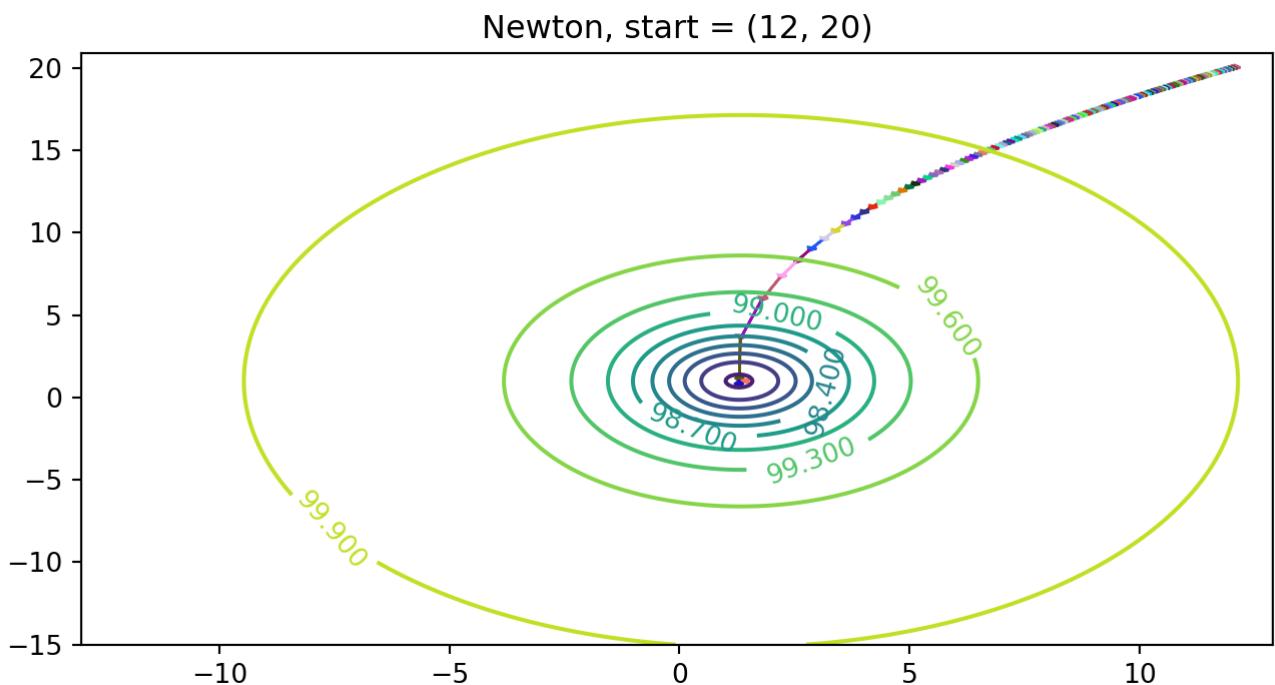


Таблица 7.4

**Кол-во итераций**

Точка \ Метод	BFGS	Powell	Newton
(12, 20)	9	8	140
(4, 3)	6	6	4
(-8, 4)	7	7	13

Квазиньютоновские методы опять отработали похожим образом, при этом для одной из точек квазиньютоновские методы сошлись гораздо быстрее, чем метод Ньютона.

## 8. Метод Марквардта

Мы считаем, что метод Ньютона с направленным спуском - самый эффективный из всех реализаций метода ньютона.

### 8.1. Реализация 1

Начальные значения  $\alpha = 1000$ , а  $\tau = 0.5$ .

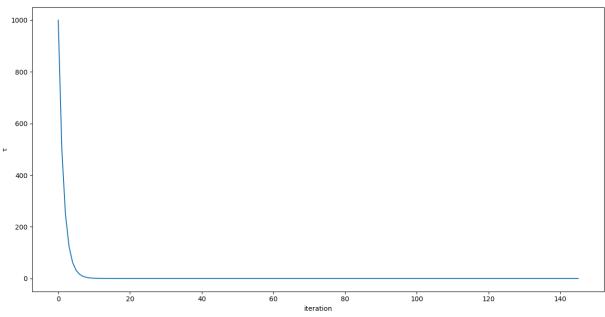


Рисунок 8.1. Зависимость итераций  $\tau$

Таблица 8.1

x	Кол-во итер
$(0, 0, 0, \dots)^T$	146
$(1, 1, 1, \dots)^T$	1
$(2, 2, 2, \dots)^T$	20
$(3, 3, 3, \dots)^T$	22
$(4, 4, 4, \dots)^T$	23
$(5, 5, 5, \dots)^T$	24
$(6, 6, 6, \dots)^T$	25
$(7, 7, 7, \dots)^T$	25
$(8, 8, 8, \dots)^T$	32
$(9, 9, 9, \dots)^T$	27

## 8.2. Реализация 2

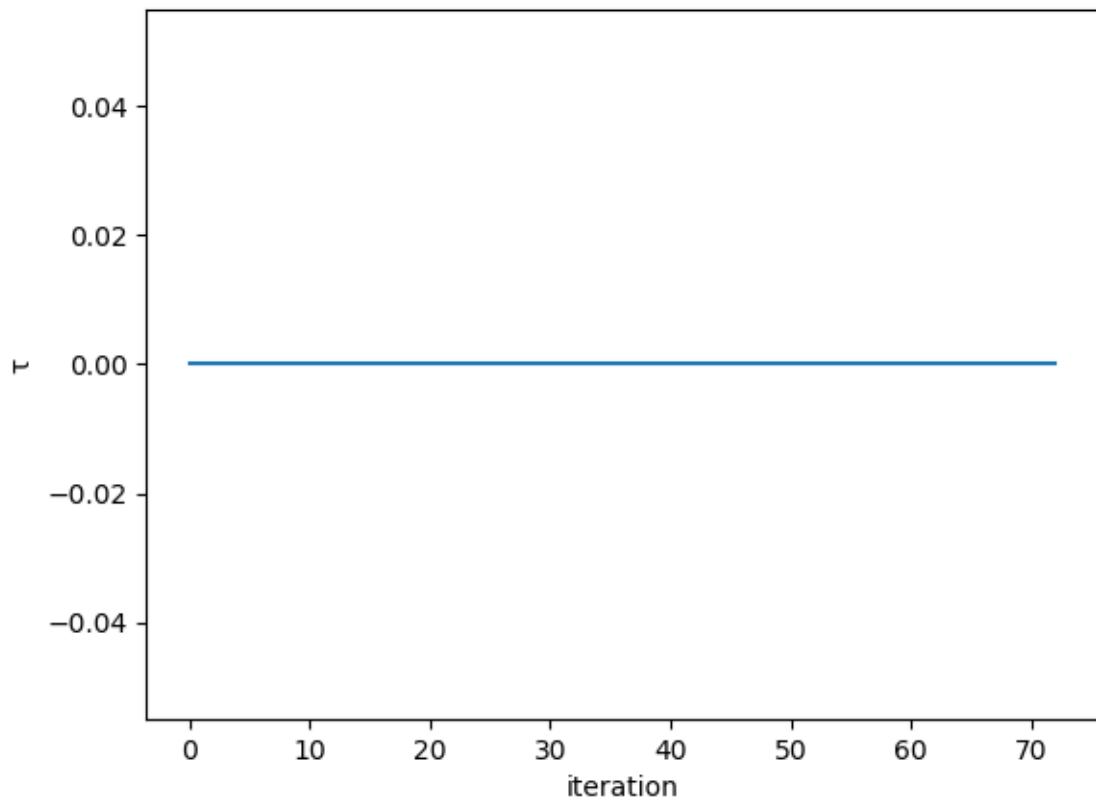


Рисунок 8.2. Зависимость итераций  $\tau$

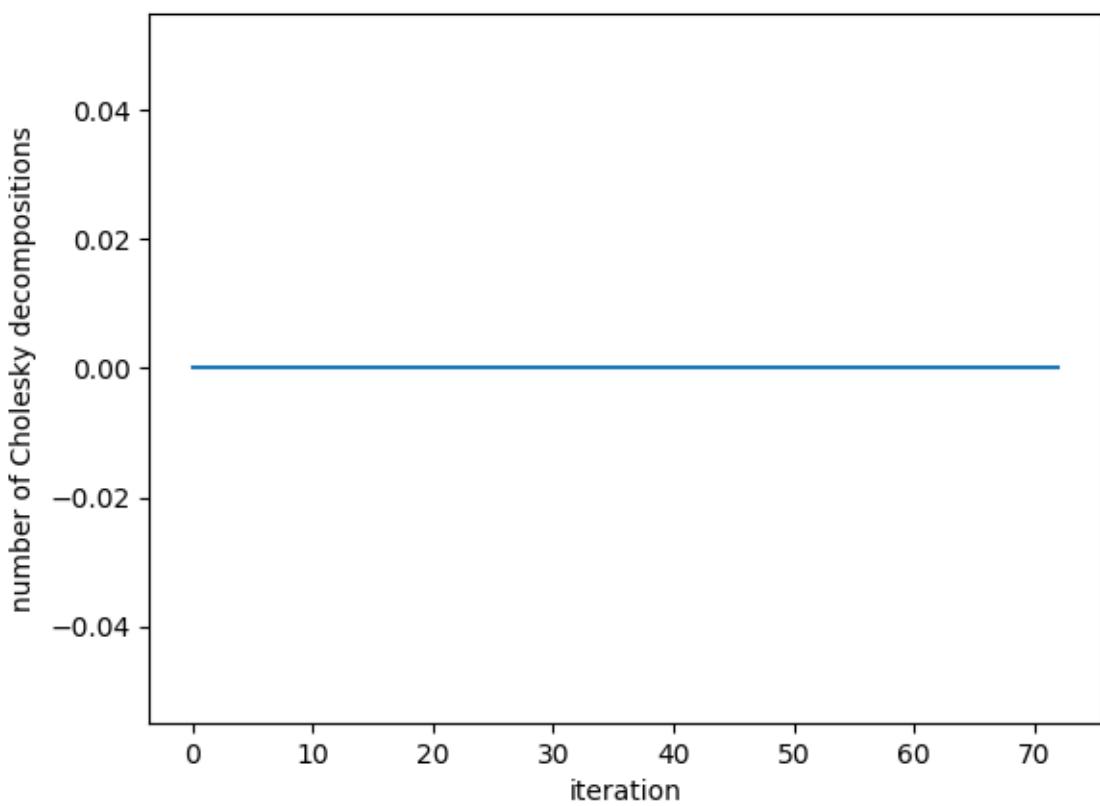


Рисунок 8.3. Зависимость и разложений Холецкого

Таблица 8.2

x	Кол-во итер
$(0, 0, 0, \dots)^T$	73
$(1, 1, 1, \dots)^T$	1
$(2, 2, 2, \dots)^T$	11
$(3, 3, 3, \dots)^T$	13
$(4, 4, 4, \dots)^T$	14
$(5, 5, 5, \dots)^T$	16
$(6, 6, 6, \dots)^T$	17
$(7, 7, 7, \dots)^T$	17
$(8, 8, 8, \dots)^T$	17
$(9, 9, 9, \dots)^T$	18

### 8.3. Метод Ньютона

Таблица 8.3

x	Кол-во итер
$(0, 0, 0, \dots)^T$	128
$(1, 1, 1, \dots)^T$	1
$(2, 2, 2, \dots)^T$	12
$(3, 3, 3, \dots)^T$	7203
$(4, 4, 4, \dots)^T$	20
$(5, 5, 5, \dots)^T$	23
$(6, 6, 6, \dots)^T$	25
$(7, 7, 7, \dots)^T$	27
$(8, 8, 8, \dots)^T$	29
$(9, 9, 9, \dots)^T$	3248

Можно заметить, что метод Маркварда, более устойчивый. И не сильно зависит от начального приближения.

## 9. Выводы

Методы Ньютона неплохо подходят для минимизации функций, если у нас есть возможность работать с матрицей Гессе, самым надежным из них оказался Метод Ньютона с направлением спуска. Если нам не доступна информация о матрице Гессе или мы не хотим её обращать, мы можем воспользоваться квазиньютоновскими методами, которые стремятся как раз таки аппроксимировать обращенный Гессиан, в исследованиях мы заметили, что это может сыграть нам на руку, но также может направить не в совсем правильном направлении, и нам потребуется больше итераций для сходимости, чем в методе Ньютона с направлением спуска. Если выбирать из двух квазиньютоновских методов, представленных в исследовании, то мы остановим свой выбор на *BFGS*, так как он показал себя лучше с точки зрения скорости сходимости.