Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики
Факультет информационных технологий и программирования

Методы оптимизации

Отчёт по лабораторной работе №1

Работу выполнили:
И. О. Шахов
М. А. Гордиенко
А. В. Андреев
Группа: M3236
Преподаватель:
Михаил Свинцов

Санкт-Петербург
2022

Содержание

Постановка задачи

Реализовать алгоритмы одномерной минимизации функции:

- метод дихотомии
- метод золотого сечения
- метод Фиббоначи
- метод парабол
- комбинированный метод Брента.

Протестировать реализованные алгоритмы на следующей задачи на интервале $[6, 9.9]$:

$$f(x) = \lg^2(x-2) + \lg^2(10-x) - x^{0.2} -> min[6, 9.9]$$

Провести сравнительный анализ алгоритмов и сравнить полученные значения с результатом аналитического решения.

1. Аналитическое решение

$$f(x) = \lg^2(x-2) + \lg^2(10-x) - x^{0.2} -> min[6, 9.9]$$

1.1. График функциина отрезке

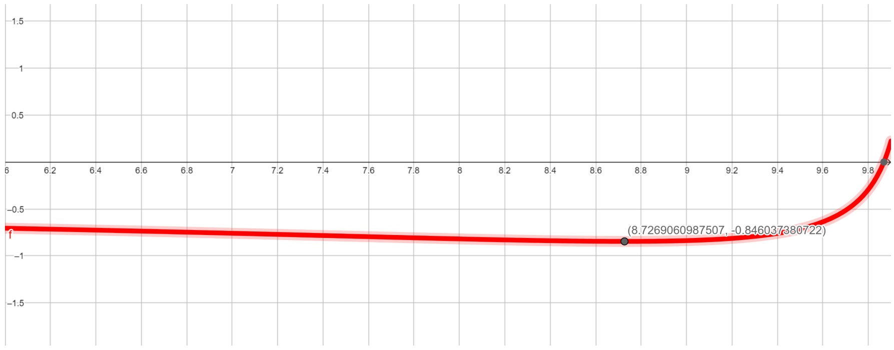

Рисунок 1.1. График функции

1.2. Поиск экстремума функции

1.2.1. Поиск производной

$$f(x)' = (\lg^2(x-2) + \lg^2(10-x) - x^{0.2})'$$
$$f(x)' = 2 * \frac{\log(x-2)}{(x-2)\log^2 10} - 2 * \frac{\log(10-x)}{(10-x)\log^2 10} - 0.2 * x^{-0.8}$$

1.2.2. Поиск точек экстремума на заданном отрезке

$$2 * \frac{\log(x-2)}{(x-2)\log^2 10} - 2 * \frac{\log(10-x)}{(10-x)\log^2 10} - 0.2 * x^{-0.8} = 0$$
$$\frac{-0.2}{x^{0.8}} - \frac{(2\log(10-x))}{((10-x)(\log(2)+\log(5))^2)} + \frac{(2\log(x-2))}{((x-2)(\log(2)+\log(5))^2)} = 0$$

Корнь уравнения.(см. решение [1])

- $x = 8.72691$ (см. рисунок 1.1)

2. Результаты исследования по каждому методу

Таблица 2.1

Анализ работы алгоритмов

Метод	Результат работы	Отличие от аналитического $\lvert\Delta\rvert$
метод дихотомии	8.726905	$4 * 10^{-6}$
метод золотого сечения	8.726850	$5 * 10^{-5}$
метод Фиббоначи	8.726906	$3 * 10^{-6}$
метод парабол	8.726906	$3 * 10^{-6}$
комбинированный метод Брента	8.726880	$2 * 10^{-6}$

2.1. метод дихотомии

Таблица 2.2

Анализ работы алгоритмов

№	Интервал	Длина	Коэффициент	x1	x2
0	[6,00000 : 9,90000]	3,90000	1,00000	(7,95000 : -0,81675)	(7,95000 : -0,81675)
1	[7,95000 : 9,90000]	1,95000	2,00000	(8,92500 : -0,84196)	(8,92500 : -0,84196)
2	[7,95000 : 8,92500]	0,97500	2,00000	(8,43750 : -0,84035)	(8,43750 : -0,84035)
3	[8,43750 : 8,92500]	0,48750	2,00000	(8,68125 : -0,84586)	(8,68125 : -0,84586)
4	[8,68125 : 8,92500]	0,24375	2,00000	(8,80312 : -0,84550)	(8,80313 : -0,84550)
5	[8,68125 : 8,80313]	0,12188	1,99999	(8,74219 : -0,84602)	(8,74219 : -0,84602)
6	[8,68125 : 8,74219]	0,06094	1,99998	(8,71172 : -0,84602)	(8,71172 : -0,84602)
7	[8,71172 : 8,74219]	0,03047	1,99997	(8,72695 : -0,84604)	(8,72695 : -0,84604)
8	[8,71172 : 8,72695]	0,01524	1,99993	(8,71934 : -0,84603)	(8,71934 : -0,84603)
9	[8,71934 : 8,72695]	0,00762	1,99987	(8,72314 : -0,84604)	(8,72314 : -0,84604)
10	[8,72314 : 8,72695]	0,00381	1,99974	(8,72505 : -0,84604)	(8,72505 : -0,84604)
11	[8,72505 : 8,72695]	0,00191	1,99948	(8,72600 : -0,84604)	(8,72600 : -0,84604)
12	[8,72600 : 8,72695]	0,00095	1,99895	(8,72648 : -0,84604)	(8,72648 : -0,84604)
13	[8,72648 : 8,72695]	0,00048	1,99790	(8,72671 : -0,84604)	(8,72672 : -0,84604)
14	[8,72671 : 8,72695]	0,00024	1,99582	(8,72683 : -0,84604)	(8,72683 : -0,84604)

2.2. метод золотого сечения

Таблица 2.3

Анализ работы алгоритмов

№	Интервал	Длина	Коэффициент	x1	x2
0	[6,00000 : 9,90000]	3,90000	1,00000	(7,48967 : -0,78915)	(8,41033 : -0,83938)
1	[7,48967 : 9,90000]	2,41033	1,61803	(8,41033 : -0,83938)	(8,97933 : -0,83903)
2	[7,48967 : 8,97933]	1,48967	1,61803	(8,05867 : -0,82282)	(8,41033 : -0,83938)
3	[8,05867 : 8,97933]	0,92067	1,61803	(8,41033 : -0,83938)	(8,62767 : -0,84526)
4	[8,41033 : 8,97933]	0,56900	1,61803	(8,62767 : -0,84526)	(8,76200 : -0,84593)
5	[8,62767 : 8,97933]	0,35166	1,61803	(8,76200 : -0,84593)	(8,84501 : -0,84470)
6	[8,62767 : 8,84501]	0,21734	1,61803	(8,71069 : -0,84602)	(8,76200 : -0,84593)
7	[8,62767 : 8,76200]	0,13432	1,61803	(8,67898 : -0,84585)	(8,71069 : -0,84602)
8	[8,67898 : 8,76200]	0,08302	1,61803	(8,71069 : -0,84602)	(8,73029 : -0,84604)
9	[8,71069 : 8,76200]	0,05131	1,61803	(8,73029 : -0,84604)	(8,74240 : -0,84602)
10	[8,71069 : 8,74240]	0,03171	1,61803	(8,72280 : -0,84604)	(8,73029 : -0,84604)
11	[8,72280 : 8,74240]	0,01960	1,61803	(8,73029 : -0,84604)	(8,73491 : -0,84603)
12	[8,72280 : 8,73491]	0,01211	1,61803	(8,72743 : -0,84604)	(8,73029 : -0,84604)
13	[8,72280 : 8,73029]	0,00749	1,61803	(8,72566 : -0,84604)	(8,72743 : -0,84604)
14	[8,72566 : 8,73029]	0,00463	1,61803	(8,72743 : -0,84604)	(8,72852 : -0,84604)
15	[8,72566 : 8,72852]	0,00286	1,61803	(8,72675 : -0,84604)	(8,72743 : -0,84604)
16	[8,72566 : 8,72743]	0,00177	1,61803	(8,72633 : -0,84604)	(8,72675 : -0,84604)
17	[8,72633 : 8,72743]	0,00109	1,61803	(8,72675 : -0,84604)	(8,72701 : -0,84604)
18	[8,72675 : 8,72743]	0,00067	1,61803	(8,72701 : -0,84604)	(8,72717 : -0,84604)
19	[8,72675 : 8,72717]	0,00042	1,61803	(8,72691 : -0,84604)	(8,72701 : -0,84604)
20	[8,72675 : 8,72701]	0,00026	1,61803	(8,72685 : -0,84604)	(8,72691 : -0,84604)
21	[8,72685 : 8,72701]	0,00016	1,61803	(8,72691 : -0,84604)	(8,72695 : -0,84604)
22	[8,72685 : 8,72695]	0,00010	1,61803	(8,72689 : -0,84604)	(8,72691 : -0,84604)

2.3. метод Фиббоначи

Таблица 2.4

Анализ работы алгоритмов

№	Интервал	Длина	Коэффициент	x1	x2
0	[6,00000 : 9,90000]	3,90000	1,00000	(7,48967 : -0,78915)	(8,41033 : -0,83938)
1	[7,48967 : 9,90000]	2,41033	1,61803	(8,41033 : -0,83938)	(8,97933 : -0,83903)
2	[7,48967 : 8,97933]	1,48967	1,61803	(8,05867 : -0,82282)	(8,41033 : -0,83938)
3	[8,05867 : 8,97933]	0,92067	1,61803	(8,41033 : -0,83938)	(8,62767 : -0,84526)
4	[8,41033 : 8,97933]	0,56900	1,61803	(8,62767 : -0,84526)	(8,76200 : -0,84593)
5	[8,62767 : 8,97933]	0,35166	1,61803	(8,76200 : -0,84593)	(8,84501 : -0,84470)
6	[8,62767 : 8,84501]	0,21734	1,61803	(8,71069 : -0,84602)	(8,76200 : -0,84593)
7	[8,62767 : 8,76200]	0,13432	1,61803	(8,67898 : -0,84585)	(8,71069 : -0,84602)
8	[8,67898 : 8,76200]	0,08302	1,61803	(8,71069 : -0,84602)	(8,73029 : -0,84604)
9	[8,71069 : 8,76200]	0,05131	1,61803	(8,73029 : -0,84604)	(8,74240 : -0,84602)
10	[8,71069 : 8,74240]	0,03171	1,61804	(8,72280 : -0,84604)	(8,73029 : -0,84604)
11	[8,72280 : 8,74240]	0,01960	1,61803	(8,73029 : -0,84604)	(8,73491 : -0,84603)
12	[8,72280 : 8,73491]	0,01211	1,61806	(8,72743 : -0,84604)	(8,73029 : -0,84604)
13	[8,72280 : 8,73029]	0,00749	1,61798	(8,72566 : -0,84604)	(8,72743 : -0,84604)
14	[8,72566 : 8,73029]	0,00463	1,61818	(8,72743 : -0,84604)	(8,72852 : -0,84604)
15	[8,72566 : 8,72852]	0,00286	1,61765	(8,72675 : -0,84604)	(8,72743 : -0,84604)
16	[8,72566 : 8,72743]	0,00177	1,61905	(8,72633 : -0,84604)	(8,72675 : -0,84604)
17	[8,72633 : 8,72743]	0,00109	1,61538	(8,72675 : -0,84604)	(8,72701 : -0,84604)
18	[8,72675 : 8,72743]	0,00067	1,62500	(8,72701 : -0,84604)	(8,72717 : -0,84604)
19	[8,72675 : 8,72717]	0,00042	1,60000	(8,72692 : -0,84604)	(8,72701 : -0,84604)
20	[8,72675 : 8,72701]	0,00025	1,66667	(8,72684 : -0,84604)	(8,72692 : -0,84604)
21	[8,72684 : 8,72701]	0,00017	1,50000	(8,72692 : -0,84604)	(8,72692 : -0,84604)
22	[8,72684 : 8,72692]	0,00008	2,00000	(8,72684 : -0,84604)	(8,72692 : -0,84604)

2.4. метод парабол

Таблица 2.5

Анализ работы алгоритмов

№	Интервал	Длина	Коэффициент	middle	minParabola
0	[6,00000 : 9,90000]	3,90000	1,00000	(8,4751:-0,8416)	(7,3706:-0,7819)
1	[7,37063 : 9,90000]	2,52937	1,54188	(8,4751:-0,8416)	(8,0081:-0,8200)
2	[8,00815 : 9,90000]	1,89185	1,33698	(8,4751:-0,8416)	(8,2966:-0,8347)
3	[8,29665 : 9,90000]	1,60335	1,17993	(8,4751:-0,8416)	(8,4252:-0,8399)
4	[8,42522 : 9,90000]	1,47478	1,08718	(8,4751:-0,8416)	(8,4821:-0,8418)
5	[8,47506 : 9,90000]	1,42494	1,03498	(8,4821:-0,8418)	(8,5072:-0,8426)
6	[8,48209 : 9,90000]	1,41791	1,00496	(8,5072:-0,8426)	(8,5213:-0,8430)
7	[8,50717 : 9,90000]	1,39283	1,01800	(8,5213:-0,8430)	(8,5386:-0,8434)
8	[8,52130 : 9,90000]	1,37870	1,01026	(8,5386:-0,8434)	(8,5525:-0,8438)
9	[8,53860 : 9,90000]	1,36140	1,01270	(8,5525:-0,8438)	(8,5662:-0,8441)
10	[8,55246 : 9,90000]	1,34754	1,01029	(8,5662:-0,8441)	(8,5784:-0,8444)
11	[8,56621 : 9,90000]	1,33379	1,01031	(8,5784:-0,8444)	(8,5899:-0,8446)
12	[8,57841 : 9,90000]	1,32159	1,00923	(8,5899:-0,8446)	(8,6003:-0,8448)
13	[8,58987 : 9,90000]	1,31013	1,00875	(8,6003:-0,8448)	(8,6100:-0,8450)
14	[8,60033 : 9,90000]	1,29967	1,00805	(8,6100:-0,8450)	(8,6189:-0,8451)
15	[8,61002 : 9,90000]	1,28998	1,00751	(8,6189:-0,8451)	(8,6272:-0,8453)
16	[8,61893 : 9,90000]	1,28107	1,00696	(8,6272:-0,8453)	(8,6348:-0,8454)
17	[8,62716 : 9,90000]	1,27284	1,00647	(8,6348:-0,8454)	(8,6418:-0,8455)
18	[8,63475 : 9,90000]	1,26525	1,00600	(8,6418:-0,8455)	(8,6482:-0,8455)
19	[8,64176 : 9,90000]	1,25824	1,00557	(8,6482:-0,8455)	(8,6542:-0,8456)
20	[8,64822 : 9,90000]	1,25178	1,00516	(8,6542:-0,8456)	(8,6597:-0,8457)
21	[8,65419 : 9,90000]	1,24581	1,00479	(8,6597:-0,8457)	(8,6648:-0,8457)
22	[8,65970 : 9,90000]	1,24030	1,00444	(8,6648:-0,8457)	(8,6695:-0,8458)
23	[8,66479 : 9,90000]	1,23521	1,00412	(8,6695:-0,8458)	(8,6738:-0,8458)
24	[8,66948 : 9,90000]	1,23052	1,00382	(8,6738:-0,8458)	(8,6778:-0,8458)
25	[8,67382 : 9,90000]	1,22618	1,00354	(8,6778:-0,8458)	(8,6815:-0,8459)
26	[8,67783 : 9,90000]	1,22217	1,00328	(8,6815:-0,8459)	(8,6850:-0,8459)
27	[8,68153 : 9,90000]	1,21847	1,00304	(8,6850:-0,8459)	(8,6881:-0,8459)
28	[8,68496 : 9,90000]	1,21504	1,00282	(8,6881:-0,8459)	(8,6910:-0,8459)
29	[8,68812 : 9,90000]	1,21188	1,00261	(8,6910:-0,8459)	(8,6937:-0,8459)
30	[8,69104 : 9,90000]	1,20896	1,00242	(8,6937:-0,8459)	(8,6962:-0,8460)
31	[8,69374 : 9,90000]	1,20626	1,00224	(8,6962:-0,8460)	(8,6985:-0,8460)
32	[8,69624 : 9,90000]	1,20376	1,00207	(8,6985:-0,8460)	(8,7007:-0,8460)
33	[8,69854 : 9,90000]	1,20146	1,00192	(8,7007:-0,8460)	(8,7026:-0,8460)
34	[8,70067 : 9,90000]	1,19933	1,00178	(8,7026:-0,8460)	(8,7045:-0,8460)
35	[8,70265 : 9,90000]	1,19735	1,00165	(8,7045:-0,8460)	(8,7062:-0,8460)
36	[8,70447 : 9,90000]	1,19553	1,00152	(8,7062:-0,8460)	(8,7077:-0,8460)
37	[8,70615 : 9,90000]	1,19385	1,00141	(8,7077:-0,8460)	(8,7092:-0,8460)
38	[8,70771 : 9,90000]	1,19229	1,00131	(8,7092:-0,8460)	(8,7105:-0,8460)
39	[8,70915 : 9,90000]	1,19085	1,00121	(8,7105:-0,8460)	(8,7117:-0,8460)
40	[8,71049 : 9,90000]	1,18951	1,00112	(8,7117:-0,8460)	(8,7129:-0,8460)

№	Интервал	Длина	Коэффициент	middle	minParabola
41	[8,71172 : 9,90000]	1,18828	1,00104	(8,7129:-0,8460)	(8,7139:-0,8460)
42	[8,71286 : 9,90000]	1,18714	1,00096	(8,7139:-0,8460)	(8,7149:-0,8460)
43	[8,71391 : 9,90000]	1,18609	1,00089	(8,7149:-0,8460)	(8,7158:-0,8460)
44	[8,71488 : 9,90000]	1,18512	1,00082	(8,7158:-0,8460)	(8,7166:-0,8460)
45	[8,71579 : 9,90000]	1,18421	1,00076	(8,7166:-0,8460)	(8,7174:-0,8460)
46	[8,71662 : 9,90000]	1,18338	1,00070	(8,7174:-0,8460)	(8,7181:-0,8460)
47	[8,71739 : 9,90000]	1,18261	1,00065	(8,7181:-0,8460)	(8,7188:-0,8460)
48	[8,71810 : 9,90000]	1,18190	1,00060	(8,7188:-0,8460)	(8,7194:-0,8460)
49	[8,71876 : 9,90000]	1,18124	1,00056	(8,7194:-0,8460)	(8,7199:-0,8460)
50	[8,71937 : 9,90000]	1,18063	1,00052	(8,7199:-0,8460)	(8,7205:-0,8460)
51	[8,71994 : 9,90000]	1,18006	1,00048	(8,7205:-0,8460)	(8,7209:-0,8460)
52	[8,72046 : 9,90000]	1,17954	1,00044	(8,7209:-0,8460)	(8,7214:-0,8460)
53	[8,72094 : 9,90000]	1,17906	1,00041	(8,7214:-0,8460)	(8,7218:-0,8460)
54	[8,72139 : 9,90000]	1,17861	1,00038	(8,7218:-0,8460)	(8,7222:-0,8460)
55	[8,72180 : 9,90000]	1,17820	1,00035	(8,7222:-0,8460)	(8,7225:-0,8460)
56	[8,72218 : 9,90000]	1,17782	1,00032	(8,7225:-0,8460)	(8,7229:-0,8460)
57	[8,72254 : 9,90000]	1,17746	1,00030	(8,7229:-0,8460)	(8,7232:-0,8460)
58	[8,72286 : 9,90000]	1,17714	1,00028	(8,7232:-0,8460)	(8,7234:-0,8460)
59	[8,72317 : 9,90000]	1,17683	1,00026	(8,7234:-0,8460)	(8,7237:-0,8460)
60	[8,72345 : 9,90000]	1,17655	1,00024	(8,7237:-0,8460)	(8,7239:-0,8460)
61	[8,72371 : 9,90000]	1,17629	1,00022	(8,7239:-0,8460)	(8,7242:-0,8460)
62	[8,72395 : 9,90000]	1,17605	1,00020	(8,7242:-0,8460)	(8,7244:-0,8460)
63	[8,72417 : 9,90000]	1,17583	1,00019	(8,7244:-0,8460)	(8,7246:-0,8460)
64	[8,72437 : 9,90000]	1,17563	1,00017	(8,7246:-0,8460)	(8,7247:-0,8460)
65	[8,72456 : 9,90000]	1,17544	1,00016	(8,7247:-0,8460)	(8,7249:-0,8460)
66	[8,72474 : 9,90000]	1,17526	1,00015	(8,7249:-0,8460)	(8,7250:-0,8460)
67	[8,72490 : 9,90000]	1,17510	1,00014	(8,7250:-0,8460)	(8,7252:-0,8460)
68	[8,72505 : 9,90000]	1,17495	1,00013	(8,7252:-0,8460)	(8,7253:-0,8460)
69	[8,72519 : 9,90000]	1,17481	1,00012	(8,7253:-0,8460)	(8,7254:-0,8460)
70	[8,72532 : 9,90000]	1,17468	1,00011	(8,7254:-0,8460)	(8,7255:-0,8460)
71	[8,72544 : 9,90000]	1,17456	1,00010	(8,7255:-0,8460)	(8,7256:-0,8460)
72	[8,72555 : 9,90000]	1,17445	1,00009	(8,7256:-0,8460)	(8,7257:-0,8460)
73	[8,72565 : 9,90000]	1,17435	1,00009	(8,7257:-0,8460)	(8,7258:-0,8460)
74	[8,72574 : 9,90000]	1,17426	1,00008	(8,7258:-0,8460)	(8,7259:-0,8460)
75	[8,72583 : 9,90000]	1,17417	1,00007	(8,7259:-0,8460)	(8,7260:-0,8460)
76	[8,72591 : 9,90000]	1,17409	1,00007	(8,7260:-0,8460)	(8,7261:-0,8460)
77	[8,72598 : 9,90000]	1,17402	1,00006	(8,7261:-0,8460)	(8,7261:-0,8460)
78	[8,72605 : 9,90000]	1,17395	1,00006	(8,7261:-0,8460)	(8,7262:-0,8460)
79	[8,72612 : 9,90000]	1,17388	1,00005	(8,7262:-0,8460)	(8,7262:-0,8460)
80	[8,72618 : 9,90000]	1,17382	1,00005	(8,7262:-0,8460)	(8,7263:-0,8460)
81	[8,72623 : 9,90000]	1,17377	1,00005	(8,7263:-0,8460)	(8,7263:-0,8460)
82	[8,72628 : 9,90000]	1,17372	1,00004	(8,7263:-0,8460)	(8,7264:-0,8460)
83	[8,72633 : 9,90000]	1,17367	1,00004	(8,7264:-0,8460)	(8,7264:-0,8460)
84	[8,72637 : 9,90000]	1,17363	1,00004	(8,7264:-0,8460)	(8,7264:-0,8460)
85	[8,72641 : 9,90000]	1,17359	1,00003	(8,7264:-0,8460)	(8,7265:-0,8460)

№	Интервал	Длина	Коэффициент	middle	minParabola
86	[8,72645 : 9,90000]	1,17355	1,00003	(8,7265:-0,8460)	(8,7265:-0,8460)
87	[8,72648 : 9,90000]	1,17352	1,00003	(8,7265:-0,8460)	(8,7265:-0,8460)
88	[8,72651 : 9,90000]	1,17349	1,00003	(8,7265:-0,8460)	(8,7266:-0,8460)
89	[8,72654 : 9,90000]	1,17346	1,00002	(8,7266:-0,8460)	(8,7266:-0,8460)
90	[8,72657 : 9,90000]	1,17343	1,00002	(8,7266:-0,8460)	(8,7266:-0,8460)
91	[8,72660 : 9,90000]	1,17340	1,00002	(8,7266:-0,8460)	(8,7266:-0,8460)
92	[8,72662 : 9,90000]	1,17338	1,00002	(8,7266:-0,8460)	(8,7267:-0,8460)
93	[8,72664 : 9,90000]	1,17336	1,00002	(8,7267:-0,8460)	(8,7267:-0,8460)
94	[8,72666 : 9,90000]	1,17334	1,00002	(8,7267:-0,8460)	(8,7267:-0,8460)
95	[8,72668 : 9,90000]	1,17332	1,00002	(8,7267:-0,8460)	(8,7267:-0,8460)
96	[8,72670 : 9,90000]	1,17330	1,00001	(8,7267:-0,8460)	(8,7267:-0,8460)
97	[8,72671 : 9,90000]	1,17329	1,00001	(8,7267:-0,8460)	(8,7267:-0,8460)
98	[8,72673 : 9,90000]	1,17327	1,00001	(8,7267:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
99	[8,72674 : 9,90000]	1,17326	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
100	[8,72675 : 9,90000]	1,17325	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
101	[8,72676 : 9,90000]	1,17324	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
102	[8,72677 : 9,90000]	1,17323	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
103	[8,72678 : 9,90000]	1,17322	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
104	[8,72679 : 9,90000]	1,17321	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
105	[8,72680 : 9,90000]	1,17320	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
106	[8,72681 : 9,90000]	1,17319	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
107	[8,72682 : 9,90000]	1,17318	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
108	[8,72682 : 9,90000]	1,17318	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
109	[8,72683 : 9,90000]	1,17317	1,00001	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
110	[8,72684 : 9,90000]	1,17316	1,00000	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
111	[8,72684 : 9,90000]	1,17316	1,00000	(8,7268:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)
112	[8,72685 : 9,90000]	1,17315	1,00000	(8,7268:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
113	[8,72685 : 9,90000]	1,17315	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
114	[8,72685 : 9,90000]	1,17315	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
115	[8,72686 : 9,90000]	1,17314	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
116	[8,72686 : 9,90000]	1,17314	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
117	[8,72686 : 9,90000]	1,17314	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
118	[8,72687 : 9,90000]	1,17313	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
119	[8,72687 : 9,90000]	1,17313	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
120	[8,72687 : 9,90000]	1,17313	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
121	[8,72688 : 9,90000]	1,17312	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
122	[8,72688 : 9,90000]	1,17312	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
123	[8,72688 : 9,90000]	1,17312	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
124	[8,72688 : 9,90000]	1,17312	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
125	[8,72688 : 9,90000]	1,17312	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
126	[8,72689 : 9,90000]	1,17311	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
127	[8,72689 : 9,90000]	1,17311	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
128	[8,72689 : 9,90000]	1,17311	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
129	[8,72689 : 9,90000]	1,17311	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
130	[8,72689 : 9,90000]	1,17311	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)
131	[8,72689 : 9,90000]	1,17311	1,00000	(8,7269:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)

2.5. комбинированный метод Брента

Таблица 2.6

Анализ работы алгоритмов

№	Интервал	Длина	Коэф.	x	w	u	M
0	[6,0000:9,9000]	3,9000	1,0000	(7,9500:-0,8168)	(7,9500:-0,8168)	(8,6948:-0,8460)	G
1	[7,9500:9,9000]	1,9500	2,0000	(8,6948:-0,8460)	(7,9500:-0,8168)	(9,1552:-0,8214)	G
2	[7,9500:9,1552]	1,2052	1,6180	(9,1552:-0,8214)	(8,6948:-0,8460)	(8,5778:-0,8444)	P
3	[7,9500:9,1552]	1,2052	1,0000	(8,5778:-0,8444)	(9,1552:-0,8214)	(8,6953:-0,8460)	P
4	[8,5778:9,1552]	0,5773	2,0875	(8,6953:-0,8460)	(8,5778:-0,8444)	(8,6953:-0,8460)	P
5	[8,6953:9,1552]	0,4599	1,2553	(8,6953:-0,8460)	(8,6953:-0,8460)	(8,7318:-0,8460)	P
6	[8,6953:9,1552]	0,4599	1,0001	(8,7318:-0,8460)	(8,6953:-0,8460)	(8,7272:-0,8460)	P
7	[8,6953:8,7318]	0,0364	12,6193	(8,7272:-0,8460)	(8,7318:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)	P
8	[8,6953:8,7272]	0,0319	1,1423	(8,7268:-0,8460)	(8,7272:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)	P
9	[8,7268:8,7272]	0,0004	83,4753	(8,7269:-0,8460)	(8,7268:-0,8460)	(8,7269:-0,8460)	P

3. Сравнение алгоритмов

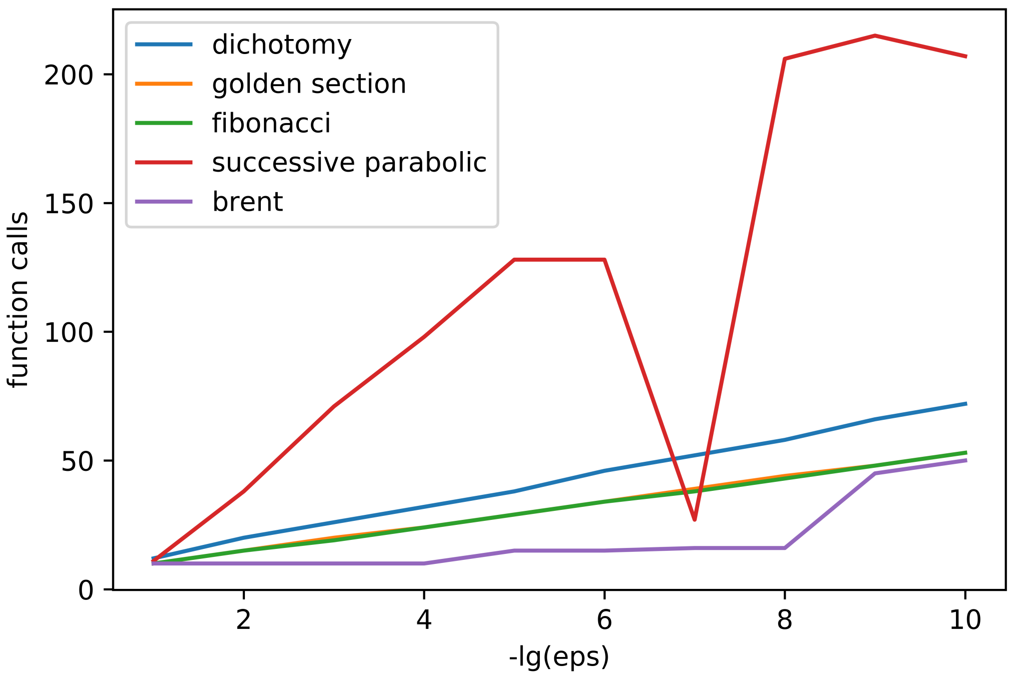

Рисунок 3.1. График зависимости количества вычислений минимизируемой функции от $-\lg(\epsilon)$

Из полученных нами результатов видно, что все алгоритмы смогли найти минимум функции, но в их работе присутствовали отличия. На каждой итерации алгоритм золотого сечения сжимал отрезок на фиксированный коэффицент, в отличии от метода дихотомии и Фибоначчи. При этом метод дихотомии совершил больше вызовов функций, чем методы золотого сечения и Фибоначчи. Алгоритм Фибоначчи показал себя немного лучше алгоритма золотого сечения, но он требует дополнительную память. Хуже всего себя показал метод парабол, а самый лучший результат по всем параментрам продемонстрировал метод Брента. В итоге мы получаем, что если вам требуется минимизировать одномерную функцию на отрезке без использования производных, то метод Брента - это ваш выбор.

4. Тестирование алгоритмов для задач минимизации многомодальных функций

4.1. Функция, на которой большинство алгоритмов выдают корректный результат

Рассмотрим многомодальную функцию $f(x) = x\sin(x)$ на отрезке $[-2; 6]$. На ней метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод парабол и метод Брента найдут глобальный минимум.

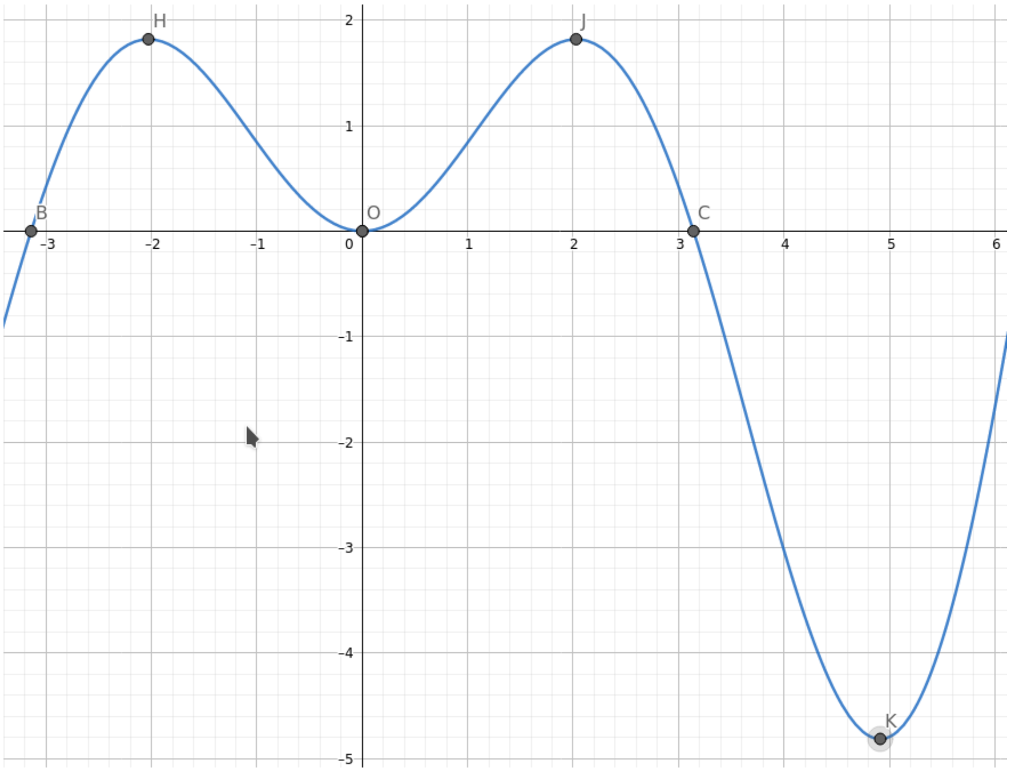

Рисунок 4.1. График функции $f(x) = x\sin(x)$

Метод дихотомии для данной функции на первой итерации переходит к отрезку $[-2; 2]$ на котором $f(x)$ унимодальна. Значит он найдет локальный минимум в точке O. Интервал $(2; 6]$, в котором лежит глобальный минимум K будет исключен из рассмотрения этим методом. Таким образом, из-за отсутствия унимодальности на всем отрезке, глобальный минимум найден не будет.

Метод золотого сечения и Фиббоначи на первой итерации рассматривает точки $x_1 = 1.055$, $f(x_1) = 0.918$ и $x_2 = 2.944$, $f(x_2) = 0.577$ и переходит к отрезку $[1.055; 6]$ где все еще нет унимодальности. На следующем шаге рассматривается отрезок $[2.944; 6]$, где выполнено свойство унимодальности, а значит локальный минимум будет найден корректно. В этом тестовом случае он совпадает с глобальным из-за выполнения неравенства

$f(x_i) > f(x_{i+1})$ на первых двух итерациях. В общем случае данным методам необходимы свойства унимодальности на каждом промежутке.

В методе парабол изначально выбираются три точки $x_1 = -2, f(x_1) = 1.818, x_2 = 4.787, f(x_2) = -4.4774, x_3 = 6, f(x_3) = -1.676$. Далее находится минимум параболы в точке $x_m = 2.495, f(x_m) = 1.502$ и происходит сужение интервала до $[x_m; x_3]$, на котором $f(x)$ - унимодальна. В этом тестовом случае исходя из условий всегда будет выбрана точка, значение в которой строго меньше второго конца промежутка. Поэтому при сужении на новый интервал $f(x)$ будет унимодальной и минимум найдется корректно. Однако в общих случаях это может быть неверно из-за многомодальности функции на некоторых интервалах.

Комбинированный метод Брента на первой итерации произведет перерасчет точки x -- наименьшего значения $f(x)$ и u -- минимум аппроксимирующей параболы с помощью метода золотого сечения(парабола не была принята). Теперь $x = u = 4.472$ и на следующих итерациях мы попадаем в промежуток $[2.029; 6]$ унимодальности функции $f(x)$. Значит локальный минимум там будет найден. В данной тестовой ситуации он совпадает с глобальным, но это в общем случае неверно, так как возможен переход на другие промежутки, где унимодальности не наблюдается.

4.2. Функция, на которой все алгоритмы работают некорректно

Посмотрим на функцию $f(x) = 12x + 2x^2 - 5x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6$, являющейся многомодальной на отрезке $[-3.4; 2.2]$. В этом случае глобальный минимум в точке C корректно найден не будет.

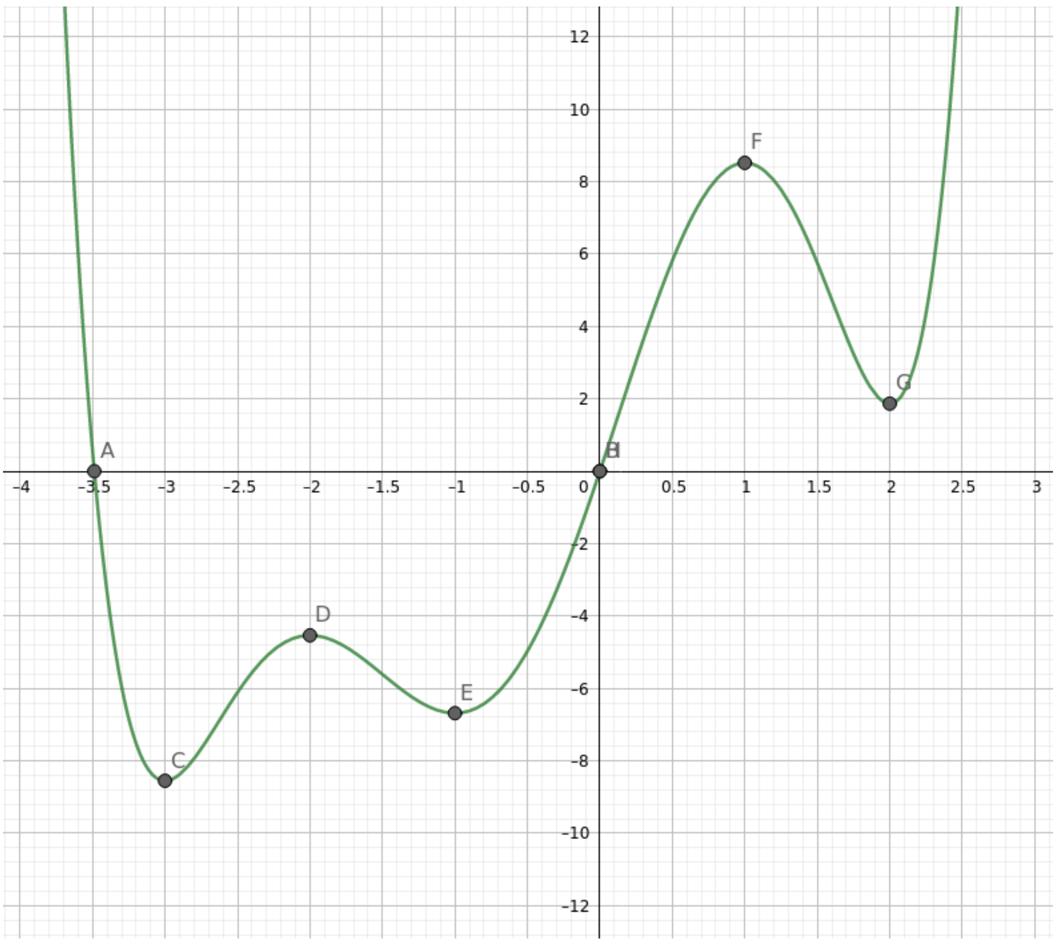

Рисунок 4.2. График функции $f(x) = 12x + 2x^2 - 5x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6$

Метод дихотомии на первой итерации сократит интервал поиска до $[-3.4; -0.6]$, где унимодальность не наблюдается. Далее будет рассмотрен промежуток $[-2; -0.6]$, на котором функция $f(x)$ унимодальна. В итоге метод дихотомии найдет локальный минимум в точке E, отличный от глобального в точке C.

Метод золотого сечения и метод Фибоначчи на первом шаге сузит промежуток до $[-3.4; 0.06]$. На нем также отсуствует унимодальность $f(x)$. Потом мы переходим к интервалу $[-2.078; 0.06]$, где функция становится почти унимодальной (начиная с -2). На третьей итерации рассматривается отрезок $[-2.077; -0.756]$, унимодальности нет. В конце концов перейдя к промежутку унимодальности $f(x)$ $[-1.573; -0.756]$ будет найден локальный минимум в E.

В методе парабол после первого шага в качестве средней точки будет выбрана $x_m = -0.9391$, с левой и правой границей $x_l = -1.3399, x_r = 2.2$. На следующей итерации мы достигаем промежутка унимодальности $x_l = -1.3399, x_r = -0.6119$, где находится локальный минимум E.

Метод Брента найдет минимум аппроксимирующей параболы через две итерации в точке $u = -1.0085$ с помощью метода золотого сечения. Интервал поиска сужается до $[-1.0571; 0.4695]$, где функция унимодальна и в конечном счете найдется локальный минимум в точке E как и в предыдущих случаях.

Перечень использованных источников

1. wolfram. find extremum function. — URL: https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28lg%5E2%28x-2%29+%2B+lg%5E2%2810+-+x%29+-+x%5E%280.2%29%29%27+%3D+0.