

Задание 2

Александр Андреев

Май 2021

1 Условие

Половину дней в году по утрам идет дождь и, уходя на работу, я беру с собой зонт, если он дома. Вечером, возвращаясь домой, я так же беру зонт с собой, если не забуду, что бывает в 20% случаев.

Сегодня утром идет дождь. С какой вероятностью мой зонт дома и я смогу его взять?

2 Решение

Вероятность того, что зонт дома сильно зависит от дня. Например, в первый день вероятность наличия зонтика дома $p_0 = 1$. Попробуем получить рекурсивную формулу для дня $n + 1$. Всего есть 4 случая.

1. Дождь идет, и зонт дома.
2. Дождь идет, и зонт не дома
3. Дождь не идет, и зонт дома
4. Дождь не идет, и зонт не дома.

С помощью формулы полной вероятности получаем: $p_{n+1} = p_n * 0.5 * 0.8 + (1 - p_n) * 0.5 * 0.8 + p_n * 0.5 + (1 - p_n) * 0.5 * 0.8 = 0.8 + p_n * 0.1$

Предположим, что есть предел, тогда $p = \frac{8}{9}$

Докажем существование предела. Для начала докажем ограниченность предела. **Утв.** $0.8 + p_n * 0.1 < \frac{8}{9}$

1. $n = 0$, $0.81 < \frac{8}{9}$
2. Пусть верно. $0.8 + p_n * 0.1 < \frac{8}{9}$
3. Докажем для $n+1$. $0.8 + p_{n+1} * 0.1 < 0.8 + \frac{8}{9} * 0.1 < \frac{8}{9}$ - Доказано.

Докажем, что возрастает. $p_{n+1} - p_n = 0.8 - 0.9 * p_n > 0.8 - 0.9 * \frac{8}{9} > 0$ - Доказано. Значит последовательность возрастает и ограничена, значит предел есть. Ответ $\frac{8}{9}$