

ЛЕКЦІЯ 2

МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ЯВИЩ

Оберемо за базову математичну модель лінійний ланцюжок зв'язаних гармонічних осциляторів. За допомогою даної моделі при досить великому числі частинок виявляється можливим вивчити основні особливості хвильових рухів (в першу чергу показати, що енергія передається вздовж ланцюжка, хоча кожен осцилятор коливається поблизу свого положення рівноваги), здійснити в межах неперервного ланцюжка перехід до лінійного хвильового рівняння.

2.1 Моделювання вільних коливань ланцюжка зв'язаних осциляторів

Моделі, які є лінійними ланцюжками (рис.2.1), що складаються з кінцевої або нескінченної кількості зв'язаних осциляторів, виявились досить ефективними і використовуються в різних областях фізики: фізиці твердого тіла, фізиці суцільних середовищ, хімічній фізиці, радіофізиці тощо. (Наприклад, для опису системи трьох зв'язаних електричних коливальних контурів використовується модель, що є системою кульок з масами m_0, m_1, m_2 , пов'язаних між собою пружинками однакової жорсткості k). Використовуючи моделі лінійних ланцюжків, можна здійснити природним шляхом перехід до хвильових процесів і ввести такі поняття як довжина хвилі, групова швидкість, фазова швидкість, дисперсія та ін.

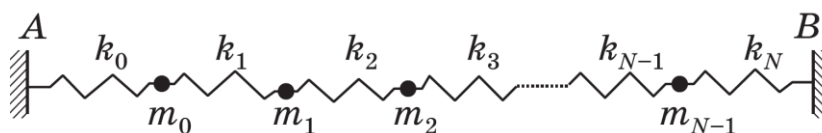


Рисунок 2.1 – Лінійний ланцюжок зв'язаних гармонічних осциляторів

При розгляді даних моделей необхідно зазначити наступне. По-перше, аналітичні розв'язки рівнянь руху довгих лінійних ланцюжків ($N > 3$) можуть бути отримані лише для відносно невеликої кількості випадків:

- 1) $k_0 = k_1 = \dots = k_{N-1}, m_0 = m_1 = \dots = m_{N-1};$
- 2) $k_0 = k_2 = k_4 = \dots, k_1 = k_3 = k_5 = \dots, m_0 = m_1 = \dots = m_{N-1};$
- 3) $k_0 = k_1 = \dots = k_{N-1}, m_0 = m_2 = m_4 = \dots, m_1 = m_3 = m_5 = \dots;$
- 4) $k_i = k \neq k_{N-1}, i = 0, 1, \dots, N-1, m_0 = m_1 = \dots = m_{N-1};$
- 5) $k_i = k, i = 0, 1, \dots, N, m_i = m \neq m_{N-1}, i = 0, 1, \dots, N-2.$

По-друге, більшість цих розв'язків виявляється досить громіздкими, і для їх подальшого аналізу доводиться використовувати комп'ютер.

2.1.1 Математична модель

Запишемо рівняння руху для кожної маси коливальної системи, наведеної на рис.2.1:

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x}_0 = -k_0 x_0 - k_1 (x_0 - x_1) \\ m_i \ddot{x}_i = -k_i (x_i - x_{i-1}) - k_{i+1} (x_i - x_{i+1}), i = 1, \dots, N-2. \\ m_{N-1} \ddot{x}_{N-1} = -k_{N-1} (x_{N-1} - x_{i-2}) - k_N x_{N-1} \end{cases} \quad (2.1)$$

Для зручності подальшого розв'язання запишемо рівняння (2.1), використовуючи позначення $\omega_{\alpha\beta}^2 = \frac{k_\alpha}{m_\beta}$, у такому вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = -\omega_{00}^2 x_0 - \omega_{10}^2 (x_0 - x_1) \\ \ddot{x}_i = -\omega_{ii}^2 (x_i - x_{i-1}) - \omega_{i+1i}^2 (x_i - x_{i+1}), i = 1, \dots, N-2. \\ \ddot{x}_{N-1} = -\omega_{N-1N-1}^2 (x_{N-1} - x_{i-2}) - \omega_{NN-1}^2 x_{N-1} \end{cases} \quad (2.2)$$

Виходячи із загального підходу до розв'язання задачі, що розглядається, в літературі, шукаємо розв'язок системи ДР (2.2) у вигляді:

$$x_i = A_i e^{j\omega t}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.3)$$

Тут $j = \sqrt{-1}$. Підставивши (2.3) у систему (2.2), згрупувавши члени, пропорційні A_i , та записавши систему в матричному вигляді, отримуємо:

$$B \cdot A = 0, \quad (2.4)$$

де $A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{pmatrix}$, B – тридіагональна матриця, елементи якої обчислюються за

таким правилами:

$$\begin{aligned} B_{00} &= -\omega^2 + \omega_{00}^2 + \omega_{10}^2, \quad B_{01} = -\omega_{10}^2, \\ B_{ii-1} &= -\omega_{ii}^2, \quad B_{ii} = -\omega^2 + \omega_{ii}^2 + \omega_{i+1i}^2, \quad B_{ii+1} = -\omega_{i+1i}^2, \quad i = 2, \dots, N-2, \\ B_{N-1N-2} &= -\omega_{N-1N-1}^2, \quad B_{N-1N-1} = -\omega^2 + \omega_{N-1N-1}^2 + \omega_{NN-1}^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Необхідною й достатньою умовою існування розв'язку системи рівнянь (2.4) є рівність нулю визначника матриці B :

$$|\omega_{ij}^2 - \omega^2| = 0. \quad (2.6)$$

Рівняння (2.6), яке називають характеристичним рівнянням, є рівнянням степені $N-1$ відносно ω^2 . Воно має у загальному випадку $N-1$ різних дійсних додатних коренів $\omega_\alpha^2, \alpha = 1, \dots, N-1$. Кожному власному числу ω_α^2 відповідає власний вектор Ξ_α , який є розв'язком рівняння

$$\Omega \cdot \Xi_\alpha = \omega_\alpha^2 \cdot \Xi_\alpha, \quad (2.7)$$

де Ω – тридіагональна матриця, елементи якої обчислюються за такими правилами:

$$\begin{aligned} \Omega_{00} &= \omega_{00}^2 + \omega_{10}^2, \quad \Omega_{01} = -\omega_{10}^2, \\ \Omega_{ii-1} &= -\omega_{ii}^2, \quad \Omega_{ii} = \omega_{ii}^2 + \omega_{i+1i}^2, \quad \Omega_{ii+1} = -\omega_{i+1i}^2, \quad i = 2, \dots, N-2, \\ \Omega_{N-1N-2} &= -\omega_{N-1N-1}^2, \quad \Omega_{N-1N-1} = \omega_{N-1N-1}^2 + \omega_{NN-1}^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Частоту $\omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, N-1$ називають частотою нормальних коливань, а вектор $\vec{\Xi}_\alpha$ – вектором нормального коливання, що відповідає α -тій частоті. Вектор нормального коливання \vec{r}_α змінюється у часі за законом

$$\vec{r}_\alpha = \vec{\Xi}_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha). \quad (2.9)$$

Загальний розв'язок системи ДР (2.2) $\vec{x}(t)$ є суперпозицією всіх векторів нормальних коливань \vec{r}_α :

$$\vec{x}(t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} C_{\alpha} \vec{\Xi}_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t + \varphi_{\alpha}), \quad (2.10)$$

де C_{α} , φ_{α} – довільні постійні, які визначаються з початкових умов.

Швидкість руху мас можна визначити, продиференціювавши (2.10) по часу:

$$\dot{\vec{x}}(t) = - \sum_{\alpha=0}^{N-1} C_{\alpha} \vec{\Xi}_{\alpha} \omega_{\alpha} \sin(\omega_{\alpha} t + \varphi_{\alpha}). \quad (2.11)$$

Для розв'язання задачі Коші системи ДР (2.2) необхідно задати значення координат $\vec{x}(0)$ та швидкостей $\dot{\vec{x}}(0)$ кожного тіла системи в початковий момент часу та розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \vec{x}(0) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} C_{\alpha} \vec{\Xi}_{\alpha} \cos(\varphi_{\alpha}) \\ \dot{\vec{x}}(0) = - \sum_{\alpha=0}^{N-1} C_{\alpha} \vec{\Xi}_{\alpha} \omega_{\alpha} \sin(\varphi_{\alpha}) \end{cases} \quad (2.12)$$

відносно невідомих C_{α} , φ_{α} .

Запишемо (2.12) у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} \vec{x}(0) \\ \dot{\vec{x}}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta & Z \\ Z & \Theta_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{C} \\ \vec{C}_v \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

де

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Xi_0^{(0)} & \Xi_0^{(1)} & \dots & \Xi_0^{(N-1)} \\ \Xi_1^{(0)} & \Xi_1^{(1)} & \dots & \Xi_1^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Xi_{N-1}^{(0)} & \Xi_{N-1}^{(1)} & \dots & \Xi_{N-1}^{(N-1)} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\Theta_v = \begin{pmatrix} -\omega_0 \Xi_0^{(0)} & -\omega_1 \Xi_0^{(1)} & \dots & -\omega_{N-1} \Xi_0^{(N-1)} \\ -\omega_0 \Xi_1^{(0)} & -\omega_1 \Xi_1^{(1)} & \dots & -\omega_{N-1} \Xi_1^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\omega_0 \Xi_{N-1}^{(0)} & -\omega_1 \Xi_{N-1}^{(1)} & \dots & -\omega_{N-1} \Xi_{N-1}^{(N-1)} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} C_0 \cos(\varphi_0) \\ \vdots \\ C_{N-1} \cos(\varphi_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\vec{C}_v = \begin{pmatrix} C_0 \sin(\varphi_0) \\ \vdots \\ C_{N-1} \sin(\varphi_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

Z – нульова матриця розмірністю $(N-1) \times (N-9)$.

Система рівнянь (2.13) є нелінійною, однак блокова структура матриці дозволяє знайти розв’язок даної системи, не застосовуючи чисельні методи. Для цього спочатку, розв’язавши дві лінійні системи рівнянь

$$\Theta \cdot \vec{C}_1 = \vec{x}(0), \quad (2.18)$$

$$\Theta_v \cdot \vec{C}_2 = \dot{\vec{x}}(0), \quad (2.19)$$

знайдемо вектори \vec{C}_1 , \vec{C}_2 , далі – координати вектора \vec{C}

$$C_i = \sqrt{C_i^2 + C_{vi}^2}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.20)$$

і потім – значення початкових фаз кожного нормального коливання:

$$\varphi_i = \arctan\left(\frac{C_i}{C_{vi}}\right). \quad (2.21)$$

Зазначимо, що функція \arctan на інтервалі $[0; 2\pi]$ є двозначною (рис.2.2), тому для вибору вірних значень даної функції необхідно контролювати знаки чисельника і знаменника дробу у виразі (2.2).

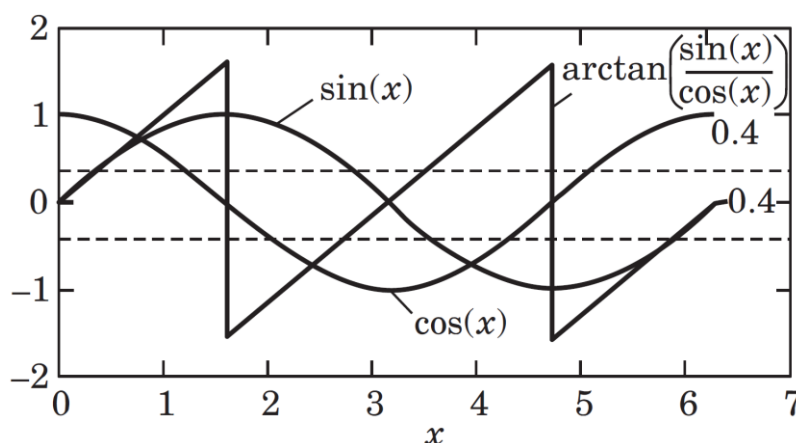


Рисунок 2.2 – Вибір вірного значення кута

З рис.2.2 очевидно, що вірне значення кута обирається за такими правилами:

$$\vartheta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) & \text{при } \sin(x) \geq 0, \cos(x) \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) & \text{при } \sin(x) < 0, \cos(x) > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) & \text{при } \sin(x) < 0, \cos(x) < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) & \text{при } \sin(x) > 0, \cos(x) < 0 \end{cases}. \quad (2.22)$$

2.1.2 Алгоритм розв'язання задачі про опис коливань ланцюжка зв'язаних осциляторів

Наведемо алгоритм розв'язання задачі про описання коливань ланцюжка зв'язаних осциляторів та приклад його програмної реалізації:

- 1) Задати кількість тіл, що утворюють ланцюжок N (нехай у прикладі $N=3$);
- 2) Задати маси тіл $m_i, i=0, 1, \dots, N-1$ (нехай $m=[1 \ 2 \ 1]$);
- 3) Задати значення коефіцієнтів жорсткості пружин $k_i, i=0, 1, \dots, N$. (Для описання руху ланцюжка з вільним кінцем достатньо припустити $k_0=0$ або $k_N=0$). (Нехай $k=[1 \ 1 \ 1 \ 1]$);
- 4) Обчислити елементи матриці Ω відповідно до (2.8);
- 5) Знайти власні числа ω_α^2 матриці Ω ;
- 6) Знайти власні вектори $\vec{\Xi}_\alpha$, що відповідають набору власних частот ω_α^2 ;
- 7) Задати початкові умови $\vec{x}(0), \dot{\vec{x}}(0)$ (нехай зміщення тіл в момент часу $t=0$ задаються вектором $R_0=[-0.2 \ 0 \ -0.3]$, а швидкості тіл в момент часу $t=0$ – вектором $v_0=[1 \ -3 \ 0]$);
- 8) Розв'язати систему лінійних рівнянь (2.18), (2.19) відносно векторів \vec{C}_1 та \vec{C}_2 , відповідно;
- 9) Обчислити координати вектору \vec{C} згідно з (2.20);

- 10) Обчислити значення початкових фаз φ_i нормальних коливань згідно з (2.21);
- 11) Визначити закони руху тіл, що утворюють коливальну систему згідно з (2.10) та (2.11);
- 12) Провести аналіз отриманих законів руху.

Програмною реалізацією даного алгоритму в системі MatLab є наведена нижче функція `free_osc`. При задаванні часових параметрів можна використовувати $N_I=2^{13}$ для кількості вузлів часової сітки, а для правої границі часового інтервалу $T_{max}=80$. При реалізації враховуємо, що індексація в MatLab починається з 1 (а не з 0).

```
function free_osc
% Коливання ланцюжка зв'язаних гармонічних осциляторів: вільні коливання
N=3;           % кількість тіл коливальної системи
m=[1 2 1];     % маси тіл коливальної системи
k=ones(1,N+1); % жорсткості пружин коливальної системи, тобто k=[1 1 1 1]
R0=[-0.2 0 -0.3]; % зміщення тіл в момент часу t=0
v0=[1 -3 0];    % швидкості тіл в момент часу t=0
% Обчислення елементів матриці
for alfa=1:N+1
    for beta=1:N
        omega(alfa,beta)=k(alfa)/m(beta);
    end
end
i=1:N; j=1:N;
% Обчислення елементів матриці OMEGA згідно з (2.8)
OMEGA(1:N,1:N)=0;
for i=1:N
    if i==1
        OMEGA(i,i)=omega(1,1)+omega(2,1);
        OMEGA(1,2)=-omega(2,1);
    end
    if i>1
        if i<N
            OMEGA(i,i-1)=-omega(i,i);
            OMEGA(i,i)=omega(i,i)+omega(i+1,i);
            OMEGA(i,i+1)=-omega(i+1,i);
        else
            OMEGA(i,i-1)=-omega(i,i);
```

```

        OMEGA(i,i)=omega(i,i)+omega(i+1,i);
    end
end
end
% обчислення власних значень і власних векторів матриці OMEGA
[Sigma,Teta]=eig(OMEGA);
% Обчислення власних частот
Teta=Teta^0.5;
for i=1:N
    for j=1:N
        SigmaV(j,i)=-Teta(i,i)*Sigma(j,i);
    end
end
C1=Sigma^-1*R0';      % розв'язання системи рівнянь (2.18)
C2=SigmaV^-1*v0';    % розв'язання системи рівнянь (2.19)
C=(C1.^2+C2.^2).^0.5; % обчислення координат вектору C
clear alfa
% Обчислення фази нормальних коливань згідно з (2.21), (2.22)
for i=1:N
    if C(i)==0
        alfa(i)=0;
    else
        alfa(i)=atan(C2(i)./C1(i));
        if C1(i)<0
            alfa(i)=pi+alfa(i);
        end
        if C1(i)>0
            if C2(i)<0
                alfa(i)=2*pi+alfa(i);
            end
        end
    end
end
end
N=length(OMEGA);
N1=2^13;          % кількість вузлів часової сітки
j=1:N1;
Tmax=80;          % права границя часового інтервалу
t(j)=(j-1)/(N1-1)*Tmax; % координати вузлів часової сітки
% Обчислення значень координат тіл у вузлах часової сітки
for j=1:N1
    s=zeros(N,1);
    for i=1:N

```



```

        s=s+C(i)*Sigma(:,i).*cos(Teta(i,i)*t(j)+alfa(i));
    end
    X(:,j)=s;
end
% Обчислення значень швидкостей тіл у вузлах часової сітки
for j=1:N1
    s=zeros(N,1);
    for i=1:N
        s=s+C(i)*Sigma(:,i).*Teta(i,i)*sin(Teta(i,i)*t(j)+alfa(i));
    end
    Xv(:,j)=-s;
end
% Візуалізація залежностей миттєвих значень зміщень X та швидкості Xv від часу
figure(1); plot(t,X(1,:),'-k',t,X(2,:), '--r',t,X(3,:), ':b','LineWidth',2);
figure(2); plot(t,Xv(1,:),'-k',t,Xv(2,:), '--r',t,Xv(3,:), ':b','LineWidth',2);
% Побудова траєкторії руху тіл на фазовій площині
figure(3); plot(X(1,:),Xv(1,:), 'k');
figure(4); plot(X(2,:),Xv(2,:), 'r');
figure(5); plot(X(3,:),Xv(3,:), 'b');
% Обчислення спектрів залежностей зміщень тіл системи від часу
c1=fft(X(1,:)); c2=fft(X(2,:)); c3=fft(X(3,:));
j=2:N1/2;
% Обчислення спектральної щільності зміщень тіл
Cm1(j-1)=abs(c1(j-1))/(N1/2);
Cm2(j-1)=abs(c2(j-1))/(N1/2);
Cm3(j-1)=abs(c3(j-1))/(N1/2);
Freq(j-1)=(j-1)/Tmax; %обчислення частот спектральних гармонік
% Візуалізація спектральних щільностей зміщень тіл
figure(6);
semilogy(Freq,Cm1,'-k',Freq,10*Cm2,'--r',Freq,500*Cm3,':b','LineWidth',2);
axis([0 2.5 10^-3 2000]);
end

```

Результати виконання функції free_osc наведені на рис.2.3–2.8.

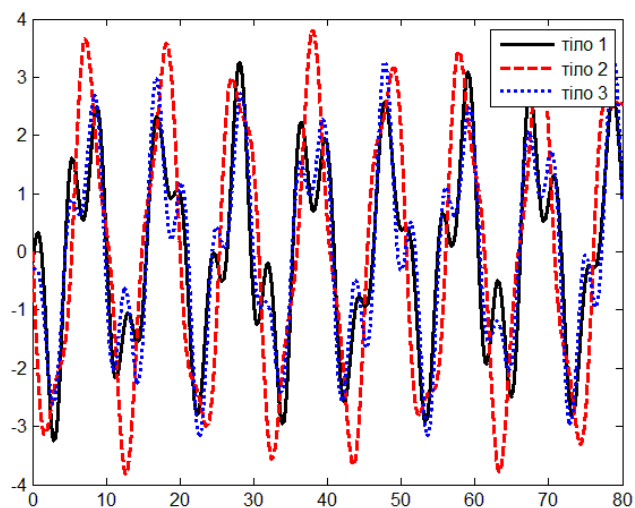


Рисунок 2.3 – Залежність миттєвих значень зміщень тіл від часу

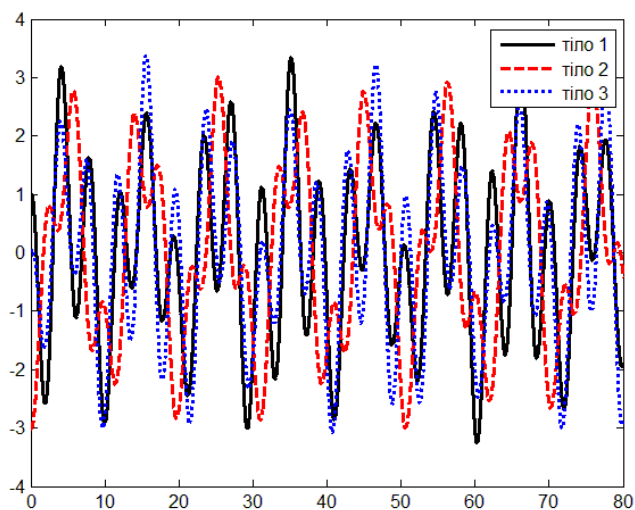


Рисунок 2.4 – Залежність миттєвих значень швидкості руху тіл від часу

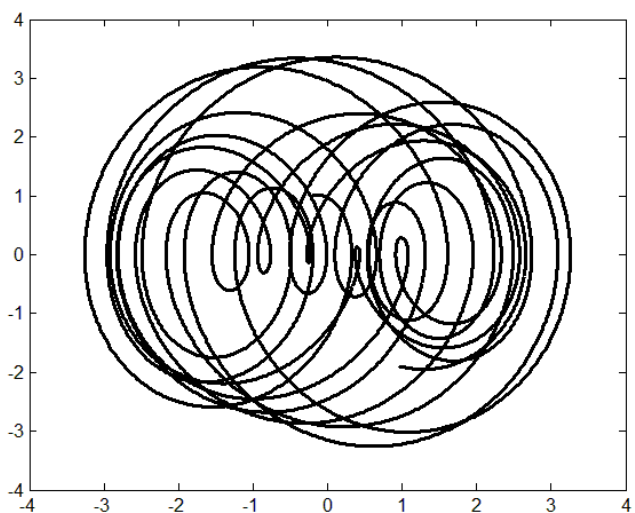


Рисунок 2.5 – Фазова траєкторія першого тіла

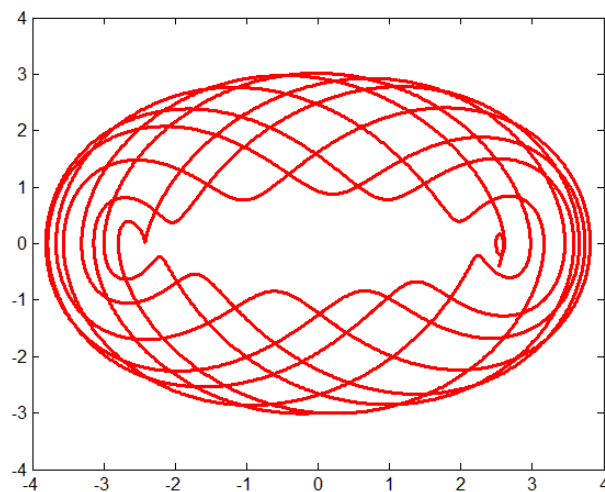


Рисунок 2.6 – Фазова траєкторія другого тіла

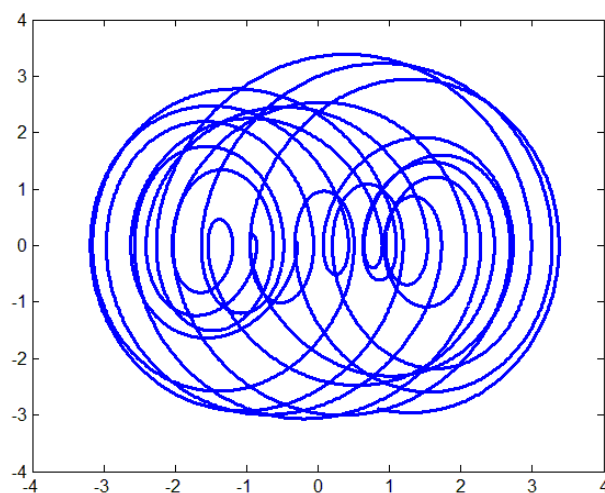


Рисунок 2.7 – Фазова траєкторія третього тіла

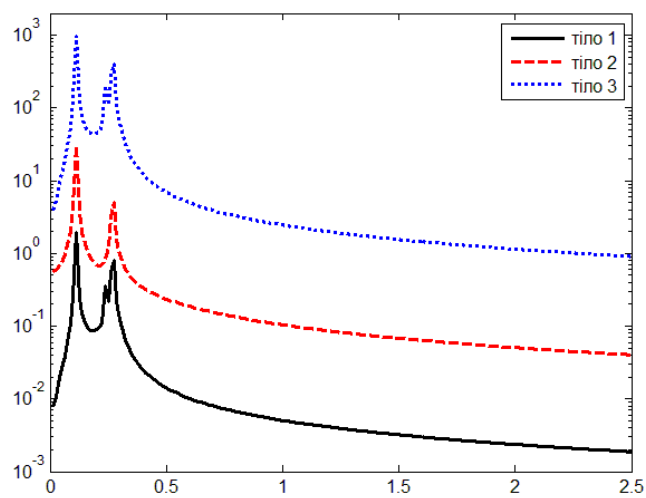


Рисунок 2.8 – Спектри функцій $x(t_i)$ (масштаб по осі Y – напівлогарифмічний, для більшої наочності графіки зсунуті відносно один одного)

2.1.3 Аналіз результатів. Зауваження до програмної реалізації

Описаний алгоритм дозволяє проводити аналіз руху лінійного ланцюжка з довільним числом мас. Однак вводити дані при великих значеннях N незручно. Тому для аналізу коливань довгих лінійних ланцюжків потрібно спочатку створити файли, що містять значення мас, коефіцієнтів жорсткості пружин, початкові зміщення і координати вектора початкової швидкості, використовуючи, наприклад, Excel або Origin. При цьому слід розмістити вихідні дані в одному стовпці та зберегти їх у текстовому форматі. Зчитування даних з файлів даного типу здійснюється командою `dlmread`.

Для визначення власних чисел та векторів матриці використана функція `eig`.

2.2 Моделювання змущених коливань ланцюжка зв'язаних гармонічних осциляторів

Розглянемо рух ланцюжка зв'язаних гармонічних осциляторів (рис.2.9) під дією змущуючої сили. Обмежимося випадком, коли сила прикладена до точки A коливальної системи, що для досить довгих ланцюжків не призводить до втрати загальності результатів.

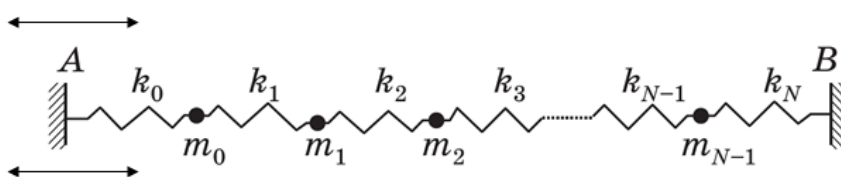


Рисунок 2.9 – Ланцюжок зв'язаних гармонічних осциляторів під дією змущуючої сили

2.2.1 Математична модель та алгоритм

Для опису руху ланцюжка зв'язаних гармонічних осциляторів від дією змущуючої сили слід додати у праву частину системи рівнянь руху (2.2)

відповідні вирази для зовнішньої сили. Подальший розгляд обмежимо випадком, коли сила докладена до точки A коливальної системи (рис.2.9), що для досить довгих ланцюжків не призводить до втрати загальності.

На відміну від випадку вільних коливань ланцюжка осциляторів, скористаємося алгоритмом розв'язання ДР (див. лабораторну роботу 1). Система ДР, які описують рух кожного тіла системи, має такий вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = -\omega_{00}^2 x_0 - \omega_{10}^2 (x_0 - x_1) + \frac{F(t)}{m_0} \\ \ddot{x}_i = -\omega_{ii}^2 (x_i - x_{i-1}) - \omega_{i+1i}^2 (x_i - x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N-2. \\ \ddot{x}_{N-1} = -\omega_{N-1N-1}^2 (x_{N-1} - x_{N-2}) - \omega_{NN-1}^2 x_{N-1} \end{cases} \quad (2.23)$$

Розв'язки системи (2.23) шукатимемо чисельно. Розв'язок системи ДР другого порядку у MatLab визначається за таким алгоритмом:

- 1) задати вектор-функцію, що повертає значення перших похідних системи ДР (розмірність функції $2N$); передбачити функцію, що описує зовнішню змушуючу силу; змінні k та A описати як `global`;
- 2) задати вектор, що містить початкові умови ($x(0)$, $\dot{x}(0)$, $i=1, 2, \dots, N-1$);
- 3) викликати одну з функцій (солвер), що повертає таблицю з чисельним розв'язком системи ДР, наприклад, `ode45`;
- 4) провести візуалізацію отриманих чисельних розв'язків.

Опис функції, що повертає значення перших похідних системи ДР (2.23), наведене у файлі `euler2.m`:

```
function z=euler2(t,x)
% Опис функції, що повертає значення перших похідних
global k m A Omega
N=length(m); % кількість тіл коливальної системи
z=zeros(2*N,1);
z(1)=x(2);          z(2)=-(k(1)/m(1))*x(1)-(k(2)/m(1))*(x(1)-x(3))+F(t,A,Omega);
K=3;
for i=2:N-1
    z(K)=x(K+1);      z(K+1)=-(k(i)/m(i))*(x(K)-x(K-2))-(k(i+1)/m(i))*(x(K)-x(K+2));
    K=K+2;
end
```

```

z(2*N-1)=x(2*N);  z(2*N)=-(k(N)/m(N))*(x(2*N-1)-x(2*N-3))-k(N+1)/m(N)*x(2*N-1);
end

```

```

function f=F(t,A,Omega)
% Функція, що описує зовнішню змушуючу силу
f=A*sin(Omega*t);
end

```

Далі для визначення й візуалізації чисельного розв'язку системи ДР (2.23), які описують систему, що здійснює вільні коливання, для визначеності, задамо кількість тіл коливальної системи $N=16$. Результат наведений на рис.2.10.

```

function forced_osc
clear all
global k m A Omega
N=16; % кількість тіл коливальної системи
n=1:N;
m(n)=1; % задавання мас тіл
i=1:N+1;
k(i)=1; % задавання жорсткостей пружин коливальної системи
n=1:2*N;
% Початкові умови
R0(n)=0;  R0(1)=0.5;
A=0;      % амплітуда зовнішньої змушуючої сили
Omega=0.0; % частота зовнішньої змушуючої сили
Tfin=50*pi; % права границя часової сітки
Np=2^13-1; % кількість вузлів часової сітки
[T,M]=ode45('euler2',[0:Tfin/Np:Tfin],R0);
subplot(4,4,1); plot(T,M(:,1)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=1');
subplot(4,4,5); plot(T,M(:,3)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=2');
subplot(4,4,9); plot(T,M(:,5)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=3');
subplot(4,4,13); plot(T,M(:,7)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=4');
subplot(4,4,2); plot(T,M(:,9)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=5');
subplot(4,4,6); plot(T,M(:,11)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=6');
subplot(4,4,10); plot(T,M(:,13)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=7');
subplot(4,4,14); plot(T,M(:,15)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=8');
subplot(4,4,3); plot(T,M(:,17)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=9');
subplot(4,4,7); plot(T,M(:,19)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=10');
subplot(4,4,11); plot(T,M(:,21)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=11');
subplot(4,4,15); plot(T,M(:,23)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=12');
subplot(4,4,4); plot(T,M(:,25)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=13');

```

```
subplot(4,4,8); plot(T,M(:,27)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=14');
subplot(4,4,12); plot(T,M(:,29)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=15');
subplot(4,4,16); plot(T,M(:,31)); axis([0 40 -0.5 0.5]); title('n=16');
end
```

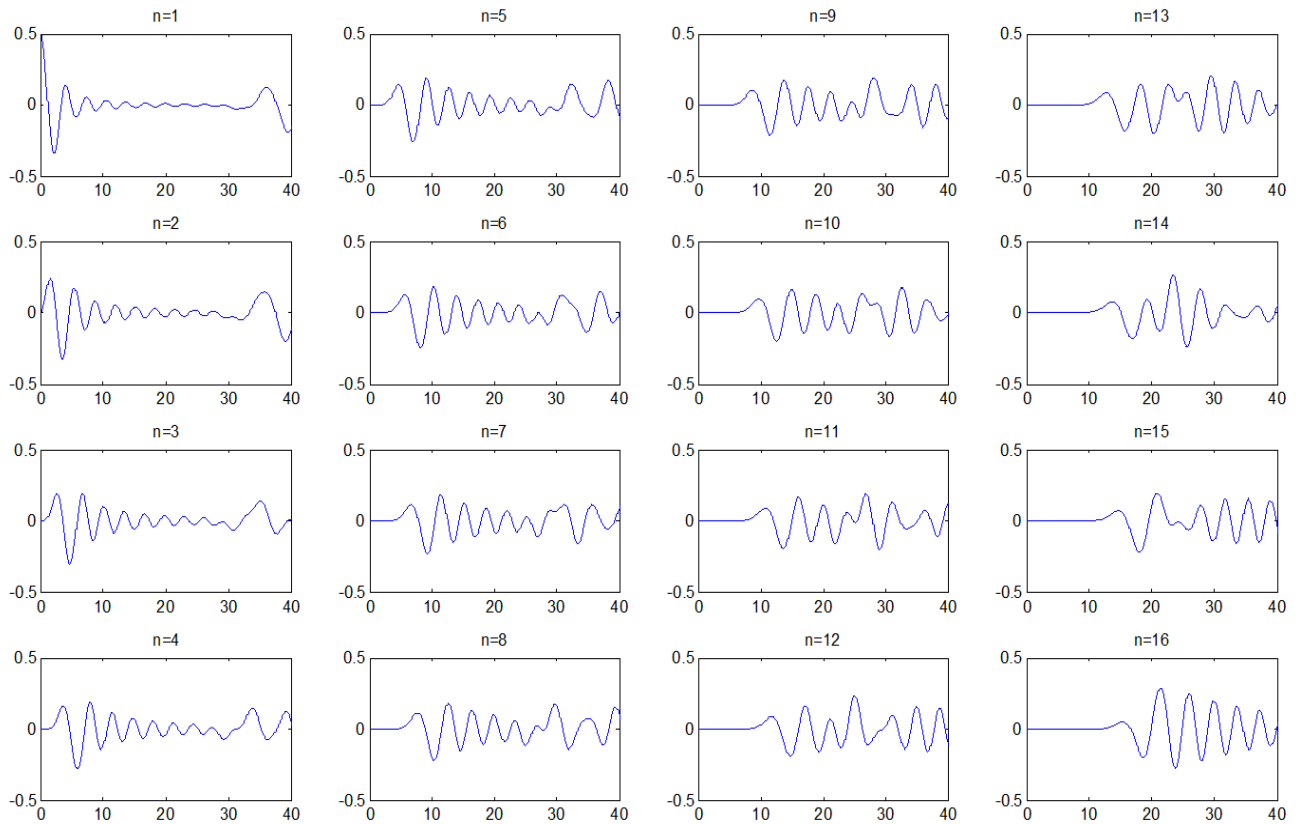


Рисунок 2.10 – Залежність миттєвих значень зміщень тіл ($N=16$) коливальної системи від часу для вільних коливань

Потім, змінивши два рядки в програмі `forced_osc.m`, побачимо, як впливає «вмикання» змушуючої сили:

```
A=0.1      % амплітуда зовнішньої змушуючої сили
Omega=1.0; % частота зовнішньої змушуючої сили
```

Результат зі змушеними коливаннями наведений на рис.2.11.

2.2.2 Стійкість методу

Одною з проблем чисельного розв'язання ДР та систем ДР є проблема вибору кроку інтегрування Δt , оскільки за досить великого кроку інтегрування

виникають нестійкі розв'язки, тобто розв'язки, похибка яких починає збільшуватися у часі експоненційно швидко.

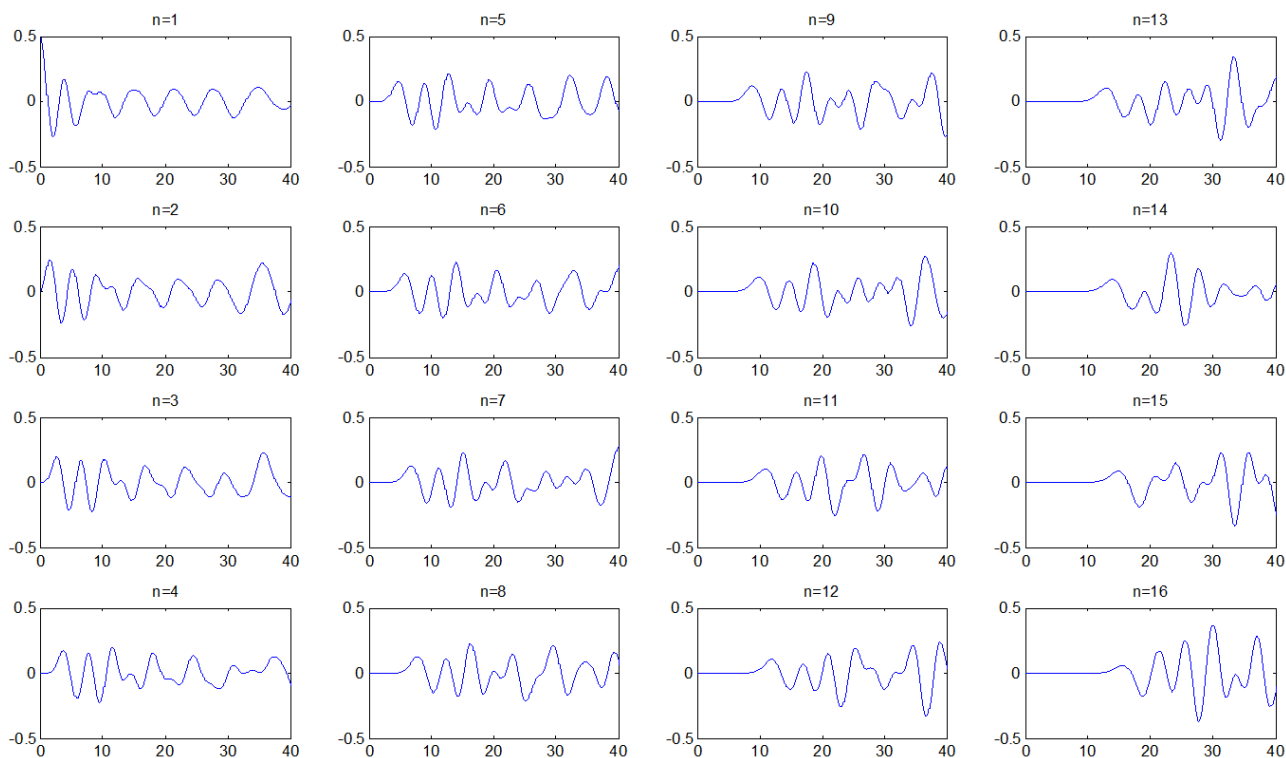


Рисунок 2.11 – Залежність миттєвих значень зміщень тіл ($N=16$) коливальної системи від часу для змушених коливань

Один зі способів перевірки стійкості методу полягає у контролі величини повної енергії, яка у випадку вільних коливань повинна зберігатися, тому для перевірки вірності вибору кроку інтегрування можна використовувати такий алгоритм:

- 1) задати початкові зміщення та швидкості тіл ланцюжка зв'язаних осциляторів;
- 2) задати часовий інтервал, на якому шукається розв'язок системи ДР;
- 3) задати кількість точок, в яких шукається чисельний розв'язок системи ДР;
- 4) знайти розв'язок системи ДР;
- 5) обчислити значення енергії системи зв'язаних осциляторів у кожний момент часу;
- 6) проаналізувати зміну енергії системи у часі на заданому часовому інтервалі й оцінити точність виконання закону збереження енергії;
- 7) за незадовільної точності розв'язку повторити пп.3–6;

8) при задовільній точності розв'язку перейти до аналізу змушених коливань.

Очевидно, що для реалізації наведеного вище алгоритму необхідно вміти обчислювати енергії кожного з тіл системи у задані моменти часу. Для розв'язання цієї задачі можна використати функцію En:

```
function E=En(N,m,k,M)
K=length(M); % кількість рядків матриці розв'язків
K1=1;
for j=1:N
    for i=1:K
        if j>1
            if j<N
                e(i)=0.5*m(j)*M(i,2*j).^2+0.25*k(j)*(M(i,2*j-1)-M(i,2*j-3)).^2+...
                    0.25*k(j+1)*(M(i,2*j-1)-M(i,2*j+1)).^2;
            end
        end
        if j==1
            e(i)=0.5*m(1)*M(i,2)^2+0.5*k(1)*M(i,1)^2+0.25*k(2)*(M(i,1)-M(i,3))^2;
        end
        if j==N
            e(i)=0.5*m(N)*M(i,2*N)^2+0.5*k(N+1)*M(i,2*N-1)^2+0.25*k(N)*(M(i,2*N-1)-...
                M(i,2*N-3))^2;
        end
    end
    en(:,K1)=e';
    K1=K1+1;
end
E=en;
end
```

Для обчислення миттєвих значень енергії тіл коливальної системи та її повної енергії необхідно виконати таку функцію:

```
function E_full
clear all
global k m A Omega
N=16; % кількість тіл коливальної системи
n=1:N;
m(n)=1; % створення вектора, що містить значення мас тіл коливальної системи
i=1:N+1;
% створення вектора, що містить жорсткості пружин коливальної системи
k(i)=1;
```

```

% Початкові умови
n=1:2*N; R0(n)=0; R0(1)=0.5;
% Параметри зовнішньої змушуючої сили
A=0; % амплітуда
Omega=0.0;
% Розв'язання системи ДР
Tfin=50*pi; Np=2^13-1;
[T,M]=ode45('euler2',[0:Tfin/Np:Tfin],R0);
% Обчислення миттєвих значень енергії тіл коливальної системи
E=En(N,m,k,M);
% Візуалізація залежності миттєвих значень енергії від часу 1-го, 4-го, 8-го, 10-го,
% 12-го тіл коливальної системи
figure(1); plot(T,E(:,1),'-r',T,E(:,4),'--g',T,E(:,8),':b',T,E(:,12),'-k','LineWidth',2);
axis([0 30 0 0.25]); legend('1','4','8','12'); grid
% Обчислення та візуалізація миттєвих значень повної енергії системи від часу
for i=1:Np+1
    s=E(i,:); Efull(i)=sum(s);
end
figure(2); plot(T,Efull); grid
end

```

Результати виконання E_full.m наведені на рис.2.12 та 2.13.

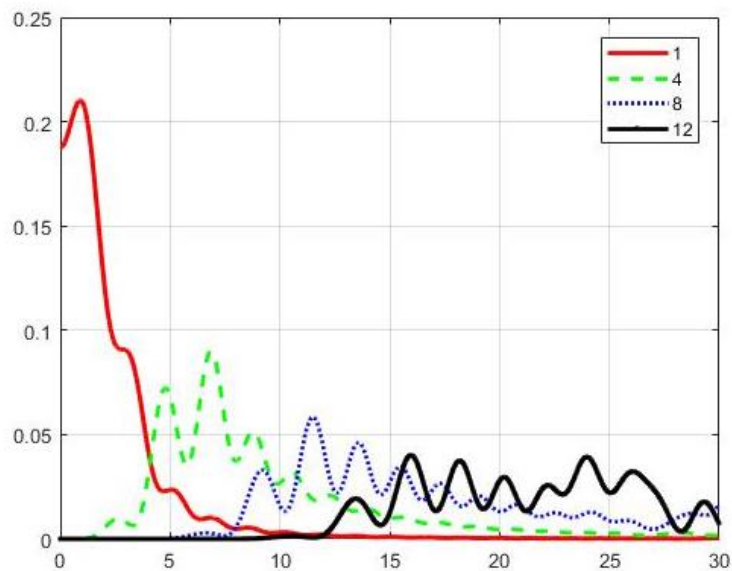


Рисунок 2.12 – Миттєві значення енергій обраних тіл (1-го, 4-го, 8-го та 12-го) коливальної системи

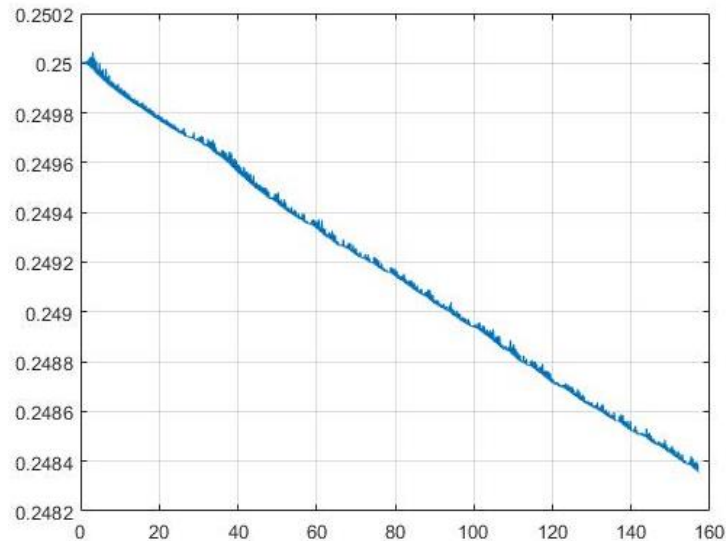


Рисунок 2.13 – Залежність миттєвих значень повної енергії системи від часу

Аналіз залежності миттєвої енергії коливальної системи від часу, наведеної на рис.2.13, показує, що повна енергія відхиляється від свого початкового значення за лінійним законом. При цьому максимальна величина відхилення, яка характеризує точність чисельного розв'язку, на обраному часовому інтервалі не перевищує 0.24%.

2.3 Моделювання хвильових рухів

Як було сказано вище, в системі з N зв'язаних осциляторів коливання окремих тіл призводять до поширення енергії уздовж ланцюжка на довільні відстані. Даний факт вказує на аналогію між коливанням ланцюжка зв'язаних осциляторів та хвилями, що поширюються у неперервних середовищах. Для того, щоб здійснити перехід від коливань дискретного ланцюжка осциляторів масою m , зв'язаних пружинами однакової жорсткості k , довжина яких у рівноважному стані дорівнює a , до хвильового руху неперервного середовища, розглянемо рівняння руху i -го тіла:

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = -\frac{k}{m}(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}), \quad i=2,3,\dots,N-2, \quad (2.24)$$

де u_i – зміщення i -го тіла відносно положення рівноваги.

При $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ та постійній довжині ланцюжка можна замінити у (2.24) $u_i(t)$, де i – дискретна змінна, на функцію $u(x, t)$, де x – неперервна змінна. Дана заміна дозволяє записати (2.24) в такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m} \cdot \frac{1}{a^2} [u(x+a, t) - 2u(x, t) + u(x-a, t)]. \quad (2.25)$$

Розклавши функцію $u(x, t)$ в ряд Тейлора в точках $x \pm a$ $\left(u(x \pm a, t) = u(x, t) \pm a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \right)$ та підставивши у (2.25), отримаємо

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.26)$$

Ввівши позначення $\mu = \frac{m}{a}$, $T = \frac{k}{a}$ (T – натяг, m – лінійна щільність маси), $v^2 = \frac{T}{\mu}$, запишемо (2.26) у такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.27)$$

Рівняння (2.27) називається хвильовим рівнянням. Безпосередньою підстановкою у (2.27) легко переконатися в тому, що будь-які функції вигляду $f(x - vt)$, $f(x + vt)$ є його розв'язками. При цьому на прямих, що визначаються рівняннями $x \pm vt = \text{const}$, розв'язки рівняння залишаються постійними. Оскільки хвильове рівняння (2.27) є лінійним, розв'язки хвильового рівняння задовольняють принципу суперпозиції, тобто будь-яка функція вигляду

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^N [f_i(x - vt) + f_i(x + vt)] \quad (2.28)$$

також є розв'язком хвильового рівняння (2.27).

Отже, поведінку хвилі довільної форми можна описати, подаючи її у вигляді набору синусоїдальних хвиль (ряду Фур'є).

Аналіз особливостей розв'язків хвильового рівняння проводитимемо чисельно. Для опису еволюції розв'язків хвильового рівняння в MatLab спочатку необхідно створити три файли:

- 1) `wave0.m`, що містить функцію, яка описує розв'язання хвильового рівняння в момент часу $t = 0$;
- 2) `waveplus.m`, що містить функцію, яка описує хвилю, що розповсюджується у додатному напрямі осі OX ;
- 3) `waveminus.m`, що містить функцію, яка описує хвилю, що розповсюджується у від'ємному напрямі осі OX .

Нижче наведені вказані вище функції.

```
function z=wave0(A,x)
% Розв'язання хвильового рівняння в момент часу t=0
% A - амплітуда
z=A*exp(-x.^2/4);
end
```

```
function z=waveplus(A,x,v,t)
% Функція, що описує хвилю, яка розповсюджується у додатному напрямі осі
% OX
% A – амплітуда, v – швидкість, t - час
z=wave0(A,x-v*t);
end
```

```
function z=waveminus(A,x,v,t)
% Функція, що описує хвилю, яка розповсюджується у від'ємному напрямі осі
% OX
% A – амплітуда, v – швидкість, t - час
z=wave0(A,x+v*t);
end
```

Далі для обчислення значень відповідних функцій та візуалізації розв'язків хвильового рівняння необхідно виконати такий код:

```
clear all
% задання просторової сітки
xmin=-2*pi; xmax=2*pi; Nx=101;
i=1:Nx; x(i)=xmin+(xmax-xmin)/(Nx-1)*(i-1);
% задання часової сітки
tmin=0; tmax=50;
v=0.05; Nt=101;
j=1:Nt; t(j)=tmin+(tmax-tmin)/(Nt-1)*(j-1);
```

```

% обчислення значень функцій, що описують розв'язок хвильового рівняння
for i=1:Nt
    for j=1:Nx
        M1(i,j)=waveplus(1,x(j),v,t(i));    M2(i,j)=waveminus(1,x(j),v,t(i));
    end
end
% візуалізація розв'язків хвильового рівняння
figure(1); plot(x,M1(1,:),x,M1(40,:), '--', x,M1(80,:), ':', 'LineWidth',2);
figure(2); plot(x,M2(1,:),x,M2(40,:), '--', x,M2(80,:), ':', 'LineWidth',2);
% задання двовимірних матриць для візуалізації функцій двох змінних
[X,Y]=meshgrid(x,t);
figure(3); surf(X,Y,M1);
figure(4); surf(X,Y,M2);
figure(5); contourf(M1,15);
figure(6); contourf(M2,15);

```

Результати виконання наведеної вище послідовності команд наведені на рис.2.14–2.19. Як видно з цих рисунків, функції $u_p(x,t)$, $u_m(x,t)$ описують хвилі, що розповсюджується, відповідно, у додатному та від'ємному напрямках осі OX . (Такі хвилі називаються біжучими. Форма даних хвиль у часі залишається незмінною).

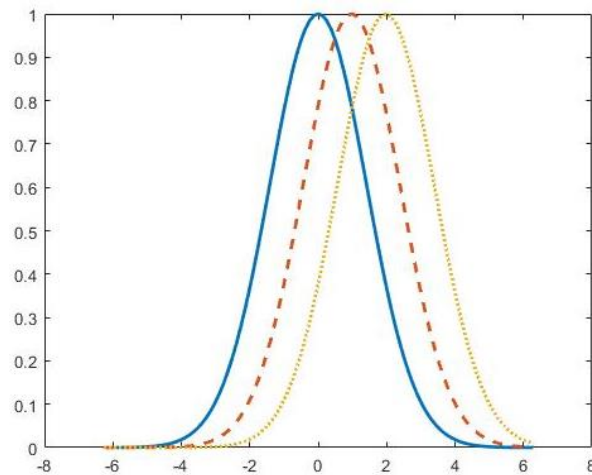


Рисунок 2.14 – Функція $u_p(x,t)$ у фіксовані моменти часу $t = 0, 40, 80$

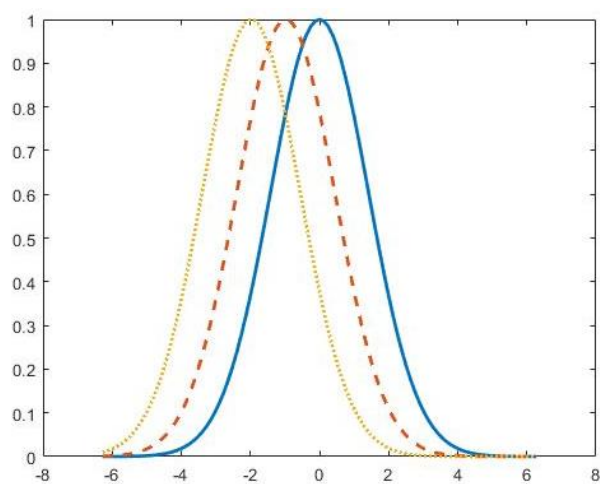


Рисунок 2.15 – Функція $u_m(x, t)$ у фіксовані моменти часу $t = 0, 40, 80$

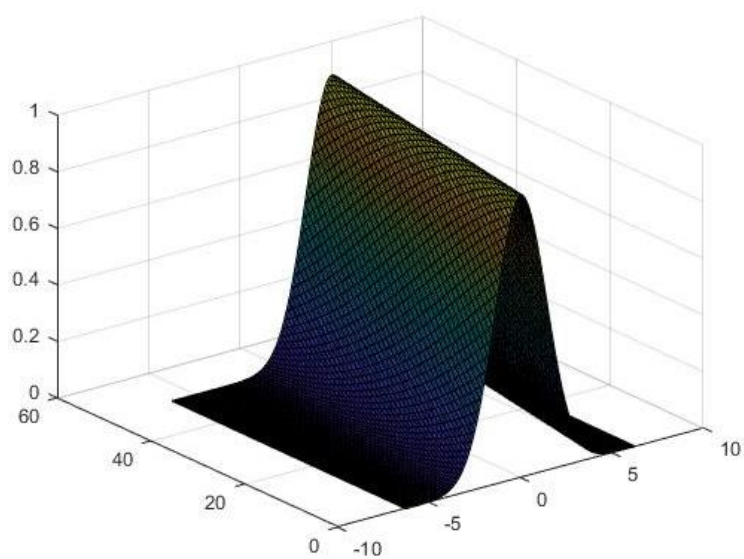


Рисунок 2.16 – Поверхня, що описується функцією $u_p(x, t)$

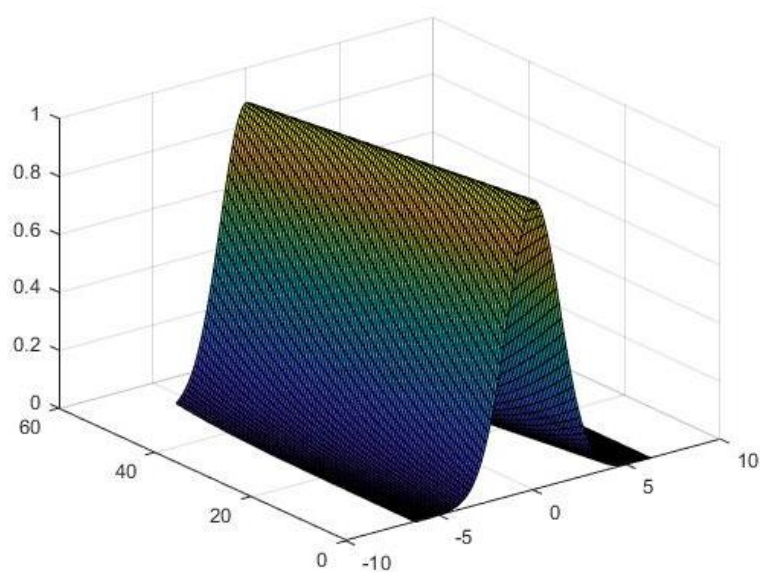


Рисунок 2.17 – Поверхня, що описується функцією $u_m(x, t)$

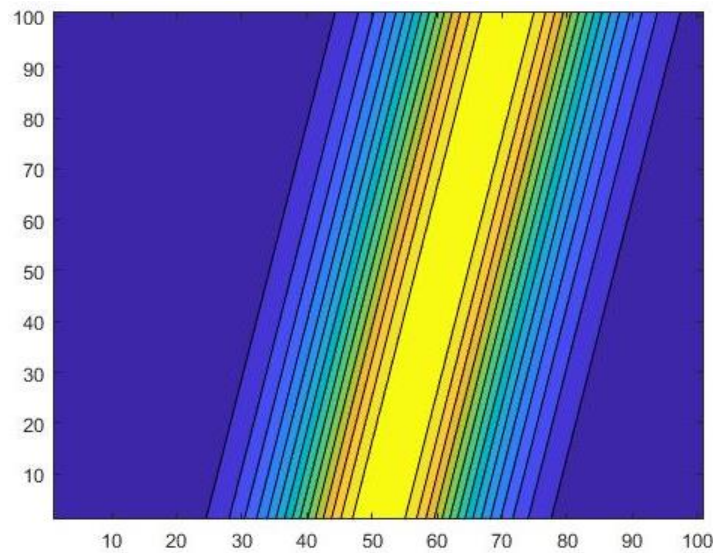


Рисунок 2.18 – Карта ліній рівня функції $u_p(x, t)$

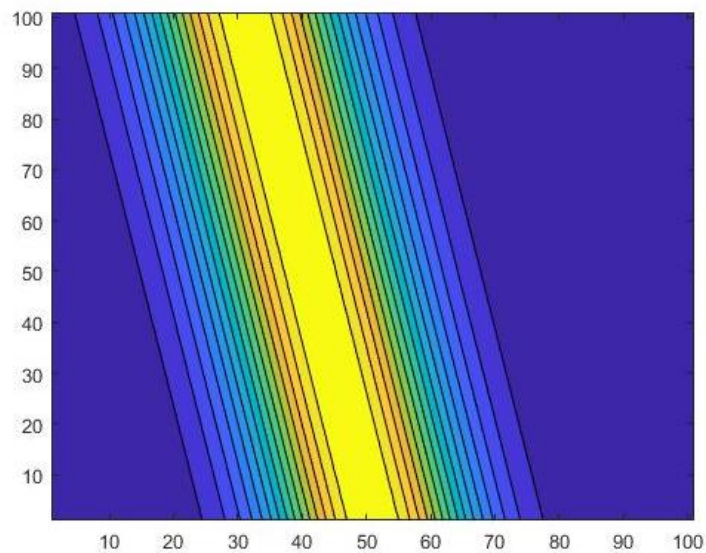


Рисунок 2.18 – Карта ліній рівня функції $u_m(x, t)$

Контрольні питання

1. Наведіть алгоритм розв'язку задачі про вільні коливання ланцюжка зв'язаних осциляторів. Які особливості його програмної реалізації в MatLab?
2. Наведіть алгоритм розв'язку задачі про змушені коливання ланцюжка зв'язаних осциляторів та особливості його програмної реалізації в MatLab.
3. Де застосовуються моделі ланцюжків зв'язаних гармонічних осциляторів?