

ЛЕКЦІЯ 3

МОДЕЛЮВАННЯ СТАТИЧНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ ПОЛІВ

3.1 Електростатичне поле системи нерухомих зарядів

Як відомо, електричне поле, створюване нерухомим точковим електричним зарядом q у вакуумі в даній точці простору, характеризується скалярним потенціалом

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{R} - \vec{r}|}, \quad (3.1)$$

де \vec{R} – радіус-вектор точки спостереження; \vec{r} – радіус-вектор точки, в якій перебуває електричний заряд, $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Векторною характеристикою цього поля є напруженість

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} (\vec{R} - \vec{r}). \quad (3.2)$$

Сила взаємодії \vec{F} двох точкових електричних зарядів q_1 та q_2 описується законом Кулона: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, де \vec{r}_1 , \vec{r}_2 – радіус-вектори відповідних зарядів.

Скалярний потенціал електричної системи, що складається з N електричних зарядів, q_1, q_2, \dots, q_N , та напруженість електричного поля задовольняє принципу суперпозиції:

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|}, \quad (3.3)$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|^3} (\vec{R} - \vec{r}_i), \quad (3.4)$$

де \vec{r}_i – координата i -го заряду.

При аналізі електростатичних полів системи вільно розташованих зарядів, що характеризуються скалярною функцією-потенціалом $\varphi(\vec{R})$ та векторною функцією-напруженістю $\vec{E}(\vec{R})$, виникає завдання наочного подання цих величин. Один з можливих способів подання потенціалу електростатичного поля $\varphi(\vec{R})$ реалізується за допомогою такого алгоритму:

- 1) задання функції, що повертає значення потенціалу, обчислювані згідно з (3.3) у вузлах заданої координатної сітки;
- 2) задання дискретної координатної сітки;
- 3) обчислення згідно з (3.3) значення $\varphi(\vec{R})$ у кожному вузлі координатної сітки;
- 4) побудова графіка поверхні та карти екіпотенціалей.

Створимо m-файл, що містить опис функції $\varphi(\vec{R})$:

```
function fi=potential(q,xq,yq,X,Y)
% Функція, що повертає значення потенціалу у вузлах координатної сітки
% q - вектор, що містить значення електричних зарядів
% xq, yq - вектори, що містять x-ві та y-ві координати електричних зарядів
% X, Y - вектори, що містять x-ві та y-ві координати вузлів сітки
e0=8.85*10^-14; % діелектрична проникність вакууму
Nq=length(q); % число зарядів у системі
Nx=length(X); % число вузлів по осі X
Ny=length(Y); % число вузлів по осі Y
% Прохід по кожному вузлу сітки
for i=1:Ny
    for j=1:Nx
        s=0;
        % Підсумовування по зарядах
        for k=1:Nq
            s=s+q(k)/sqrt((X(j)-xq(k))^2+(Y(i)-yq(k))^2);
        end
        M(i,j)=s/(4*pi*e0);
    end
end
fi=M;
end
```

Функція `potential` повертає матрицю розмірності $N_y \times N_x$, що містить значення потенціалу у відповідних вузлах координатної сітки.

Обчислимо потенціал, створений системою, що складається з $N=50$ електричних зарядів, розташованих у точках з координатами

$$-5R_0 + \frac{10R_0}{N}i,$$

$y_i=0, i=1, \dots, N$ (рис.3.1). Для проведення обчислень як одиницю вимірювання заряду використовуватимемо заряд електрона $e=1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, як одиницю вимірювання довжини $-R_0=10^{-6}$ м.

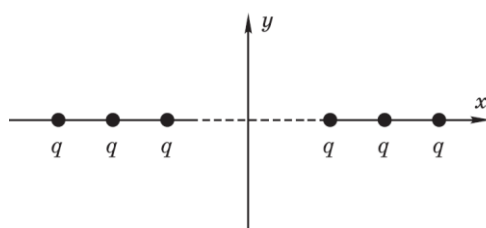
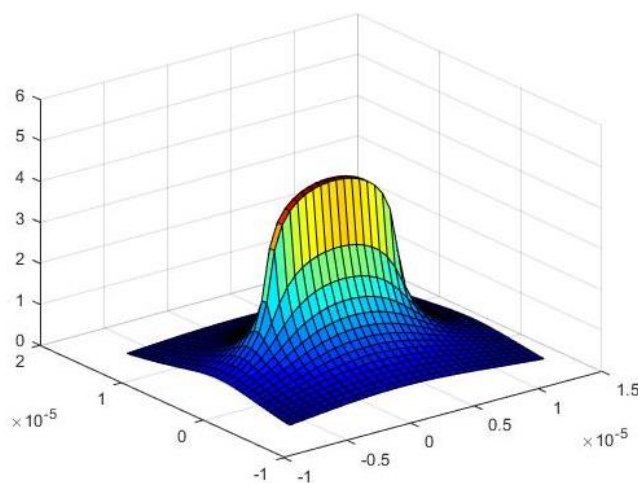


Рисунок 3.1

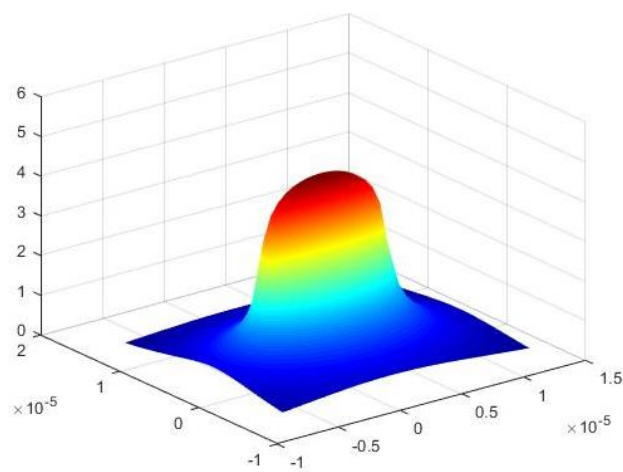
Розв'язання даної задачі в MatLab виконується за допомогою наступного коду, результат виконання якого наведений на рис.3.2а.

```
e=1.6*10^-19; % заряд електрону
R0=10^-6; % одиниця вимірювання відстані
N=50; % число зарядів
i=1:N;
q(i)=e; % заповнення вектору, що містить значення зарядів
x1=-5*R0; % x-ва координата лівого кінця системи зарядів
x2=5*R0; % x-ва координата правого кінця системи зарядів
xq(i)=x1+(x2-x1)/N*i; % обчислення x-х координат системи зарядів
yq(i)=0; % задання y-х координат системи зарядів
N1=33; % число вузлів прямокутної координатної сітки
Xmin=-10*R0; Ymin=-10*R0; % задання координат нижнього лівого кута сітки
Xmax=10*R0; Ymax=10*R0; % задання координат верхнього правого кута сітки
i=1:N1+1;
X(i)=Xmin+(Xmax-Xmin)/N1*(i+1); % обчислення x-х координат вузлів сітки
j=1:N1+1;
Y(j)=Ymin+(Ymax-Ymin)/N1*(j+1); % обчислення y-х координат вузлів сітки
M(i,j)=potential(q,xq,yq,X,Y); % обчислення значень потенціалу у вузлах сітки
[X1,Y1]=meshgrid(X,Y);
```

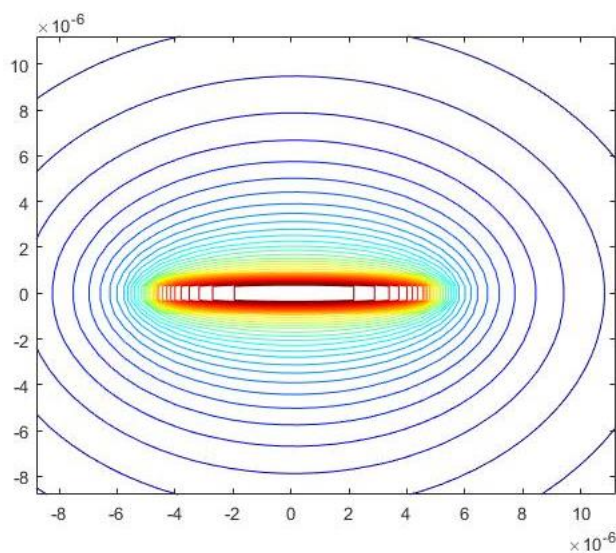
figure(1); surf(X1,Y1,M); colormap jet; % візуалізація поверхні fi



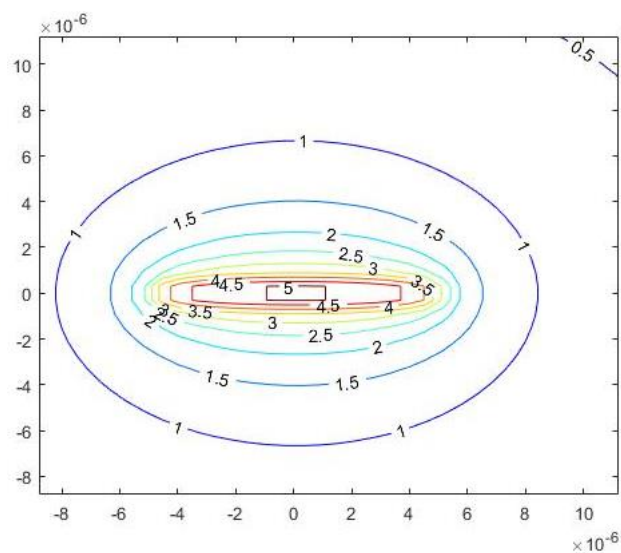
а)



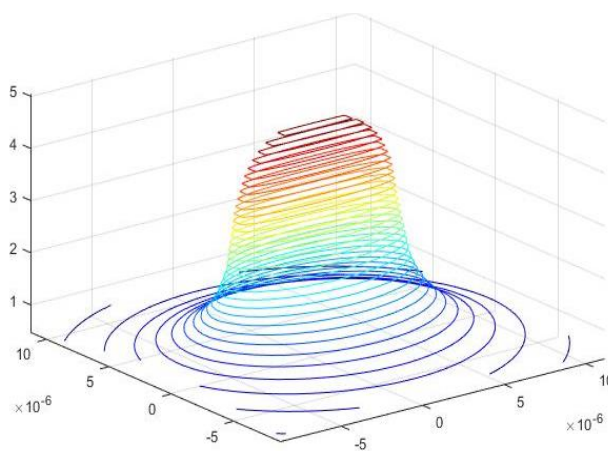
б)



в)



г)



д)

Рисунок 3.2

Для побудови відображення поверхні без зображення сітки та заповнення поверхні з використанням інтерполяції кольору додатково слід ввести такі команди (результат їх виконання наведений на рис.3.2б):

```
figure(2);
surf(X1,Y1,M);
shading interp;
```

Для побудови двовимірної карти ліній рівня (еквіпотенціалей) функції $\varphi = \varphi(x, y)$ слід ввести такі команди (результат їх виконання наведений на рис.3.2в):

```
figure(3);
contour(X1,Y1,M,33); % 33 – число ліній рівня
colormap jet;
```

Для виводу значень, що відповідають кожній еквіпотенціалі, необхідно виконати таку послідовність команд (результат їх виконання наведений на рис.3.2г):

```
figure(4);
[C,h] = contour(X1,Y1,M);
clabel(C,h);
colormapjet;
```

В MatLab команда `contour` повертає матрицю `C`, що містить координат вершин ломаних, що апроксимують відповідні еквіпотенціальні лінії, вектор-стовпець `h` дескрипторів для кожної лінії рівня, який використовується далі командою `clabel`, та будує карту ліній рівня. Далі команда `clabel`, використовуючи дані, що повертає функція `contour`, підписує значення функції на кожній лінії рівня. Команда `colormap` визначає колір фарбування карти ліній рівня (в нашому випадку використовується кольорова палітра `jet`).

Для побудови тривимірної карти ліній рівня (еквіпотенціалей) функції $\varphi = \varphi(x, y)$ слід ввести такі команди (результат їх виконання наведений на рис.3.2д):

```
figure(5);
contour3(X1,Y1,M,33);
```

На відміну від функції $\vec{\varphi} = \varphi(\vec{R})$, напруженість електростатичного поля $\vec{E}(\vec{R})$ є векторною функцією, яка в кожній точці простору характеризується величиною поля і напрямом. Для опису векторного поля використовуватимемо силові лінії – лінії, дотичні до яких в кожній точці паралельні вектору напруженості електричного поля. Через те, що силові лінії несуть інформацію лише про напрям вектора напруженості електричного поля, але не про його величину, для аналізу зміни величини напруженості електричного поля у просторі використовуватимемо функцію $|\vec{E}(\vec{R})|$.

Таким чином, для дослідження особливостей напруженості електричного поля, створеного довільною конфігурацією електричних зарядів, потрібно:

1) задати у просторі дискретну координатну сітку;
 2) обчислити у вузлах сітки координати напруженості електричного поля $\vec{E}(\vec{R}) = (E_x, E_y)$;

3) побудувати у кожному вузлі сітки одиничні вектори $\vec{n} = \left(\frac{E_x}{|\vec{E}|}, \frac{E_y}{|\vec{E}|} \right)$,

дотичні до силовій лінії електричного поля;

4) побудувати графік поверхні й карту ліній рівня функції $|\vec{E}(\vec{R})|$.

Даний алгоритм в MatLab може бути реалізований таким кодом:

```
e=1.6*10^-19; R0=10^-6; N=50; i=1:N;q(i)=e;
x1=-5*R0; x2=5*R0;
xq(i)=x1+(x2-x1)/N*i; yq(i)=0;
N1=23;
Xmin=-10*R0; Ymin=-10*R0; Xmax=10*R0; Ymax=10*R0;
i=1:N1+1; X(i)=Xmin+(Xmax-Xmin)/N1*(i+1);
j=1:N1+1; Y(j)=Ymin+(Ymax-Ymin)/N1*(j+1);
M(i,j)=potential(q,xq,yq,X,Y);
[X1,Y1]=meshgrid(X,Y);
[px,py]=gradient(-M,1,1); % обчислення градієнту функції fi
% Обчислення координат одиничних векторів, дотичних до силовій лінії
px1=px./((px.^2+py.^2).^0.5);
py1=py./((px.^2+py.^2).^0.5);
% Побудова векторного поля одиничних векторів, дотичних до силовій лінії у
```

% вузлах координатної сітки

figure(1);

quiver(X1,Y1,px1,py1,0.5) ;

mp=(px.^2+py.^2).^0.5; % обчислення абсолютних значень вектора

% напруженості у вузлах координатної сітки

% побудова ліній рівної напруженості

figure(2);

contour(X1,Y1,mp,17);

Результати наведені на рис.3.3 (а – векторне поле, б – лінії рівної напруженості).

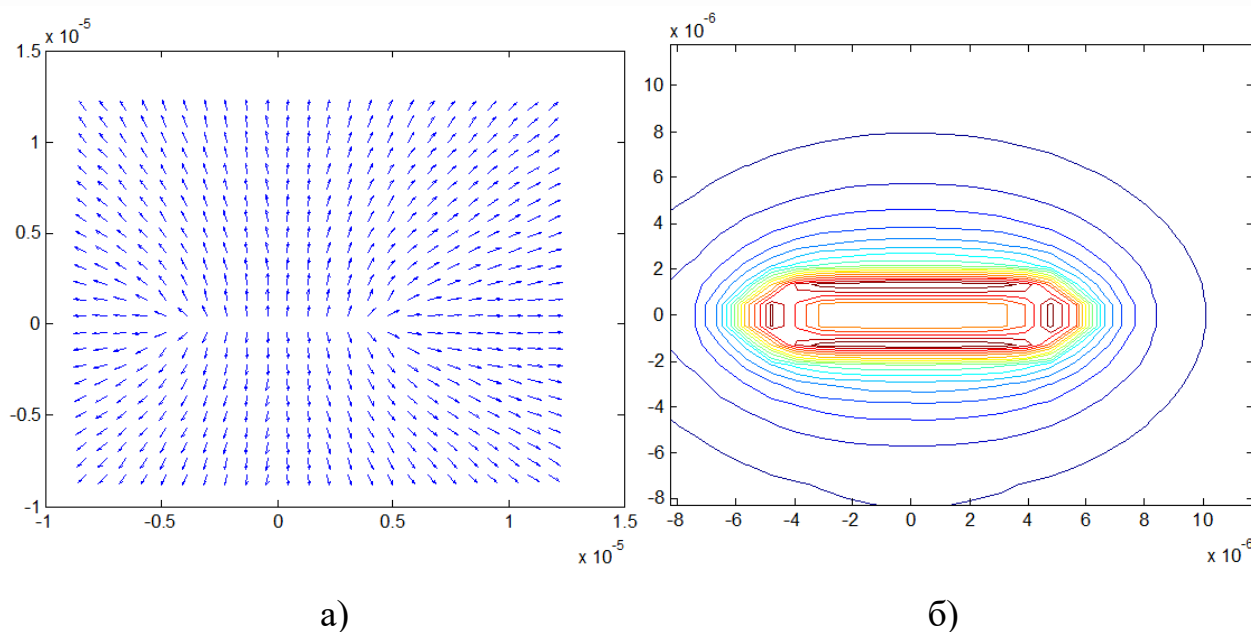


Рисунок 3.3

3.2 Магнітне поле витка з постійним струмом

Дослідження електричних полів систем нерухомих електричних зарядів (п.3.1) ґрунтоване на законі Кулона (3.2) та принципі суперпозиції (3.3), (3.4). Як відомо, аналогом закону Кулона в електростатиці є закон Біо-Савара-Лапласа в магнітостатиці, згідно з яким напруженість магнітного поля, створюваного елементом струму $I d\vec{l}$, має вигляд

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l} \times \vec{R}]}{|\vec{R}|^3}, \quad (3.5)$$

де I – величина струму (А); \vec{B} – напруженість магнітного поля (Тл); $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ – магнітна проникність вакууму (Гн/м).

Закон Біо-Савара-Лапласа має в магнітостатиці загальний характер і разом з принципом суперпозиції використовується для визначення напруженості магнітного поля, створюваного довільною системою постійних струмів у будь-якій точці простору. Дійсно, оскільки напруженість магнітного поля, створеного елементом струму $I d\vec{l}$, розміщеним у точці з радіус-вектором \vec{r} , в точці з радіус-вектором \vec{R} дорівнює

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l} \times (\vec{R} - \vec{r})]}{|\vec{R} - \vec{r}|^3}, \quad (3.6)$$

то для обчислення напруженості магнітного поля, створюваного довільною системою постійних струмів, слід задати орієнтацію кожного елемента струму $I d\vec{l}$, що входить до структури, та обчислити напруженості магнітних полів, створюваних кожним елементом струму i , згідно з принципом суперпозиції зробити підсумовування напруженостей магнітних полів:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum_{i=1}^N \frac{[d\vec{l}_i \times (\vec{R} - \vec{r}_i)]}{|\vec{R} - \vec{r}_i|^3}, \quad (3.7)$$

де N – кількість елементів; \vec{r}_i – радіус-вектор відповідного елемента.

Зазначимо, що обчислити магнітне поле аналітично, використовуючи (3.6), (3.7), виявляється можливим тільки для структур, що мають досить високу ступінь симетрії (прямий дріт, поле кільця на осі симетрії та т.ін.). Для більшості струмових конфігурацій розрахунок магнітного поля може бути проведений лише чисельно. Найважливішими геометричними конфігураціями струмових структур, для яких необхідно знати розподіли напруженості магнітного поля, є: прямий дріт, петля, соленоїд, тороїдальна обмотка.

Розглянемо обчислення магнітного поля петлі з постійним струмом і проведемо

аналіз відомих моделей, що використовуються при розрахунку магнітних полів соленоїду та тороїдальної обмотки з постійним струмом.

Для розрахунку напруженості магнітного поля петлі зі струмом виберемо систему координат, в якій площина XoY збігається з площиною петлі (рис.3.4).

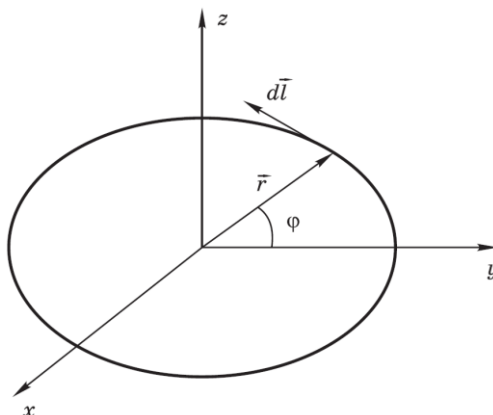


Рисунок 3.4

В обраній системі координат розташування i -го елемента струму $Id\vec{l}_i$

$$d\vec{l}_i = Ia \begin{bmatrix} \sin \varphi_i \\ -\cos \varphi_i \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi \quad (3.8)$$

(де $d\varphi = \frac{2\pi}{N}$, $\varphi_i = i d\varphi$, $i=0,1,\dots,N-1$, N – число елементів струму) описується радіус-вектором \vec{r}_i

$$\vec{r}_i = a \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Підставивши (3.6), (3.7) у (3.5), неважко отримати вирази для складових вектора напруженості магнітного поля B_x, B_y, B_z , однак для розрахунку напруженості й візуалізації магнітного поля в пакеті MatLab це не потрібно, оскільки в нього вбудовані функції для обчислення стандартних дій векторного аналізу: обчислення скалярного добутку, векторного добутку тощо.

На прикладі обчислення та візуалізації напруженості магнітного поля, створюваного витком зі струмом у площині $x=0$, опишемо послідовність дій, що

дозволяють розв'язати поставлену задачу. У площині, що розглядається, як очевидно з міркувань симетрії, складова напруженості магнітного поля уздовж осі X дорівнює нулю, тому далі ми проводимо обчислення лише складових напруженості уздовж осей Y та Z . Оскільки далі нас цікавитиме форма силових ліній, але не абсолютне значення напруженостей, множник $\frac{\mu_0}{4\pi} I$ вважатимемо рівним одиниці.

Спочатку створюємо файл `Ring.m`, що містить опис функції, яка повертає значення складових напруженості магнітного поля:

```
function [By,Bz]=Ring(a,Y,Z)
% Функція, що повертає значення проєкцій напруженості магнітного поля
% на осі Y, Z
Nstep=100; % кількість елементів, апроксимуючих кільце
X=0;
Ny=length(Y); % число вузлів координатної сітки по осі Y
Nz=length(Z); % число вузлів координатної сітки по осі Z
deltaphi=2*pi/Nstep; % крок по куту
n=1:Nstep+1;
fi(n)=deltaphi*(n-1); % обчислення вектора fi
% Обчислення складових напруженості магнітного поля
for i=1:Nz
    for j=1:Ny
        s=[0 0 0];
        for n=1:Nstep+1
            dL=[-a*sin(fi(n))*deltaphi a*cos(fi(n))*deltaphi 0];
            r=[a*cos(fi(n)) a*sin(fi(n)) 0];
            R=[X Y(j) Z(i)];
            s=s+cross(dL,(R-r))./((R-r)*(R-r)).^(3/2); % ' – операція транспонування
        end
        by(i,j)=s(2);    bz(i,j)=s(3);
    end
end
By=by;  Bz=bz;
end
```

Далі необхідно виконати наступну послідовність команд, результати якої наведені на рис.3.5а:

```

N1=21; % число вузлів сітки
i=1:N1+1;
Ymin=-5; Zmin=-5; % нижній лівий кут координатної сітки
Ymax=5; Zmax=5; % верхній правий кут координатної сітки
% Обчислення координат вузлів сітки
Y(i)=Ymin+(Ymax-Ymin)/N1*(i-1);
Z(i)=Zmin+(Zmax-Zmin)/N1*(i-1);
a=1; % радіус кільця
[ByBz]=Ring(a,Y,Z); % обчислення проєкцій напруженості магнітного поля
mp=(By.^2+Bz.^2).^0.5; % обчислення значень модуля напруженості магнітного
% поля у вузлах координатної сітки
% Обчислення координат одиничних векторів, дотичних до силової лінії
% магнітного поля у вузлах координатної сітки
by1=By./mp; bz1=Bz./mp;
quiver(Y,Z,by1,bz1); % візуалізація векторного поля

```

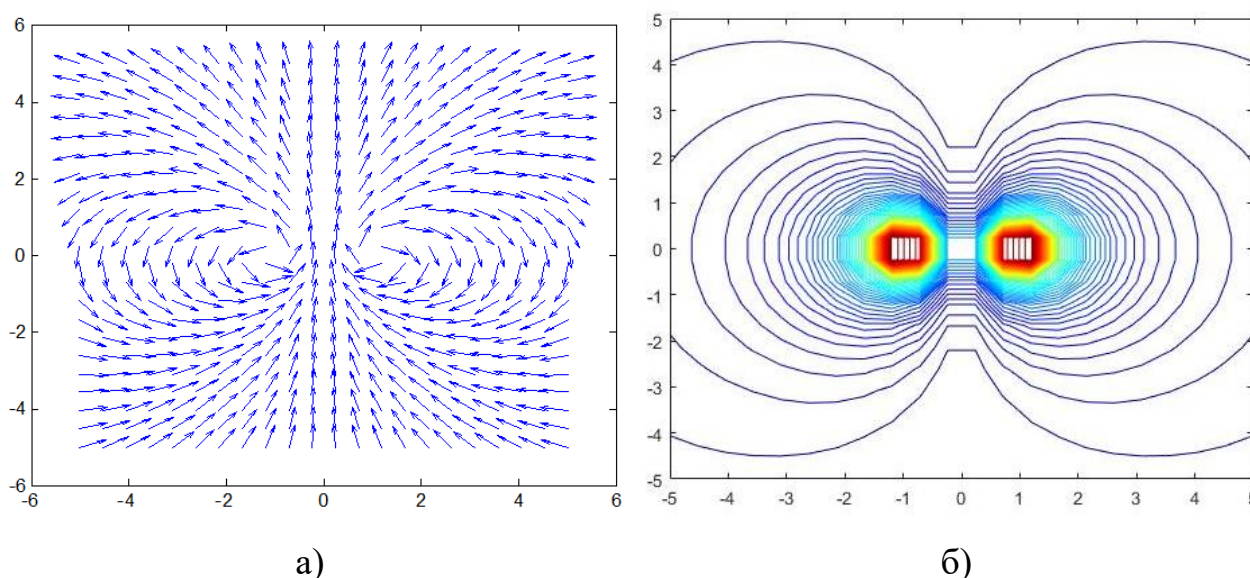


Рисунок 3.5

Аналіз рис.3.5а показує, що поле одиничних векторів дозволяє на якісному рівні отримувати інформацію про форму силових ліній і напрям напруженості магнітного поля в даній точці координатної сітки.

Певний недолік технології візуалізації силових ліній магнітного поля полягає в тому, що лінія, яка є за своєю фізичною суттю неперервною, замінюється набором векторів, дотичних до даної лінії. Для отримання більш адекватного зображення силових ліній магнітного поля необхідно

використовувати векторний потенціал магнітного поля \vec{A} , пов'язаний з напруженістю магнітного поля наступним співвідношенням:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (3.10)$$

Використовуючи (3.10), можна показати, що силова лінія є лінія, на якій $|\vec{A}(x, y, z)| = \text{const}$. Отже, для побудови силової лінії магнітного поля необхідно обчислити модуль векторного потенціалу в вузлах координатної сітки і потім побудувати карту еквіпотенціалей.

Векторний потенціал магнітного поля, створеного елементом струму $Id\vec{l}$, дорівнює

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}}{|\vec{R} - \vec{r}|}, \quad (3.11)$$

де \vec{R} – радіус-вектор точки спостереження; \vec{r} – радіус-вектор елемента струму.

Векторний потенціал магнітного поля \vec{A} , створюваного довільною системою струмів $Id\vec{l}_i$, згідно з принципом суперпозиції дорівнює

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^N d\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{Id\vec{l}_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|}. \quad (3.12)$$

Оскільки далі нас цікавитиме форма силових ліній, а не абсолютне значення напруженостей, множник $\frac{\mu_0}{4\pi} I$ вважатимемо рівним одиниці.

Для практичної реалізації запропонованого алгоритму, як і раніше, спочатку необхідно створити m-файл, що містить опис функції, яка повертає значення складових напруженості магнітного поля, а потім побудувати карту еквіпотенціалей. Результат наведений на рис.3.5б.

3.3 Магнітне поле тороїдальної обмотки з постійним струмом

Для визначення магнітного поля тороїдальної обмотки з постійним струмом (рис.3.6) використовують рівняння Максвелла:

$$\text{rot} \vec{B} = \vec{j}, \quad (3.13)$$

яке в інтегральній формі має такий вигляд:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n (\pm I_k), \quad (3.14)$$

де L – контур, охоплюючий струм; I_k – сила струму, охоплюваного контуром.

Наступний крок у визначенні магнітного поля полягає в заміні обмотки тора з протікаючим по ній струмом поверхневим струмом з постійною лінійною щільністю i (рис.3.7). При використанні даної моделі лінії струму передбачаються розташованими в меридіональних площинах, що проходять через вісь симетрії тора, тобто набором кілець зі струмом. Циркуляція магнітного поля тору \vec{B} в (3.14), що залежить, з міркувань симетрії, лише від відстані до центру тора, дорівнює $2\pi R B$. Повний струм, що пронизує площу, обмежену цим колом, дорівнює NJ , де N – число витків тороїдальної обмотки.

Напруженість магнітного поля всередині тора дорівнює $B = \frac{\mu_0}{2\pi R} NJ$.

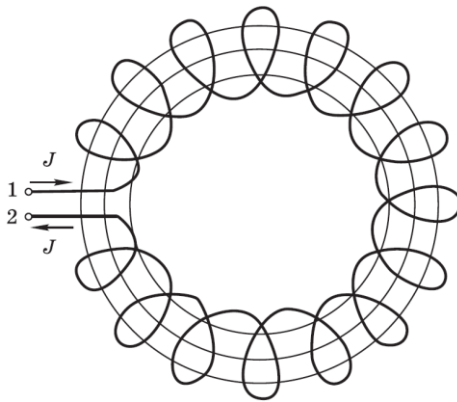


Рисунок 3.6

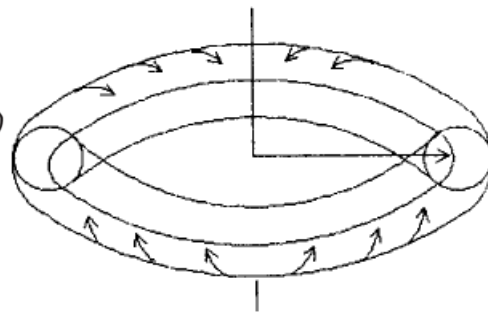


Рисунок 3.7

Проведемо прямі обчислення напруженості магнітного поля на основі закону Біо-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad (3.15)$$

де $Jd\vec{l}$ – елемент струму, \vec{r} – радіус-вектор від елементу струму в точку спостереження, та принципу суперпозиції інтегруванням (3.15) по всіх

елементах струму. Для однозначного опису положення елементів намотування введемо два радіус-вектори – \vec{R}_T , що описує положення центру даного перерізу тора меридіональною площиною з початком у точці 0, та \vec{a} , що описує положення елемента спіралі в меридіональній площині (рис.3.8).

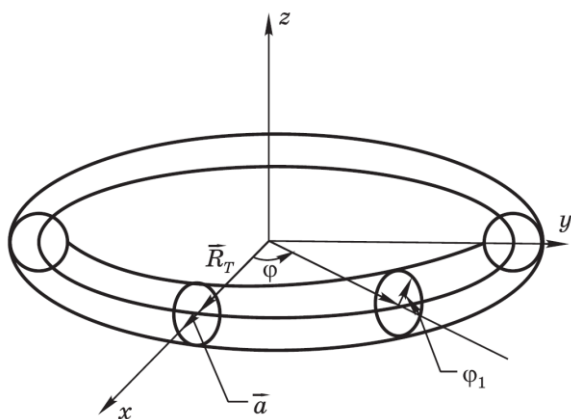


Рисунок 3.8

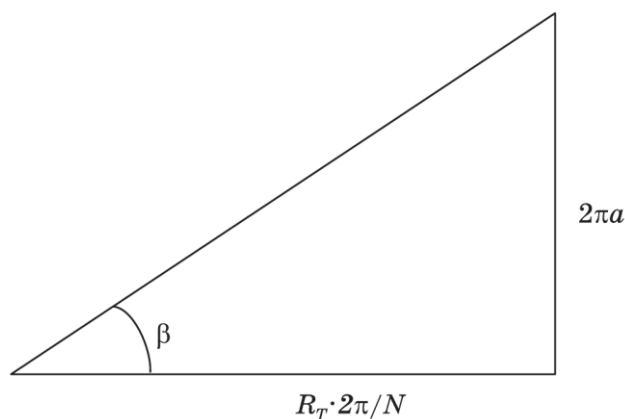


Рисунок 3.9

Оберемо систему координат XYZ таким чином, щоб при нульовому куті повороту вектор \vec{R}_T мав координати $(R_T, 0, 0)$, вектор $\vec{a} - (a, 0, 0)$. Позицію кожної точки тороїдальної обмотки в обраній системі координат описуватимемо радіус-вектором \vec{r} , який є сумою векторів \vec{R}_T та \vec{a} :

$$\vec{r} = \vec{R}_T + \vec{a}. \quad (3.16)$$

При постійному куті намотування положення будь-якої точки спіралі визначатиметься одним параметром – кутом повороту φ вектора \vec{R}_T у площині XOY . Знайдемо зв'язок кута повороту вектора \vec{a} в меридіональній площині φ_1 з кутом повороту φ вектора \vec{R}_T у площині XOY , для чого розглянемо площинну розгортку одного витка тороїдального намотування, що є прямокутним трикутником, довжини катетів якого дорівнюють довжинам дуг кола радіусу R у площині XOY та кола радіусу a в меридіональній площині (рис.3.9). При N -витковому намотуванні вони дорівнюють $R_T \cdot \frac{2\pi}{N}$ та $2\pi a$, відповідно, тому кут намотування β дорівнює

$$\beta = \arctg \frac{aN}{R_T}. \quad (3.17)$$

Розглянемо розгортку спіралі при довільному куті повороту φ , що є, як і для одного витка, прямокутним трикутником. У цьому випадку довжини відповідних катетів дорівнюють $R_T\varphi$ та $a\varphi_1$. Використовуючи відомі формули зв'язку катетів прямокутного трикутника через кут між катетом та гіпотенузою, отримаємо:

$$R_T\varphi \cdot \tg\beta = a\varphi_1. \quad (3.18)$$

Підставляючи вираз для кута β з (3.16) у (3.17), остаточно знайдемо

$$\varphi_1 = N\varphi. \quad (3.19)$$

Враховуючи (5.15), (5.18), запишемо залежність координат радіус-вектору \vec{r} від кута повороту φ в обраній системі координат

$$\vec{r} = ((R_T + a \cos(N\varphi))\cos\varphi, (R_T + a \cos(N\varphi))\sin\varphi, a \sin(N\varphi)). \quad (3.20)$$

Елемент довжини тороїдальної обмотки $d\vec{l}$ виражається через вектор \vec{t} , дотичний до обмотки в даній точці, та кут повороту $d\varphi$

$$d\vec{l} = \vec{t} d\varphi, \quad (3.21)$$

де вектор \vec{t} , за визначенням, дорівнює

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi}. \quad (3.22)$$

З (3.20) та (3.22) визначимо

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} -(R_T \sin\varphi + a \sin\varphi \cos(N\varphi) + Na \sin(N\varphi) \cos\varphi) \\ R_T \cos\varphi - aN \sin(N\varphi) \sin\varphi + a \cos(N\varphi) \cos\varphi \\ aN \cos(N\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Вираз для напруженості магнітного поля, створюваного елементом тороїдальної обмотки в точці простору, позиція якої описується радіус-вектором $\vec{R}_0(x_0, y_0, z_0)$, враховуючи (3.15), (3.21), можна записати у вигляді:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \frac{[\vec{t} \times (\vec{R}_0 - \vec{r})]}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|^3} d\varphi, \quad (3.24)$$

де

$$\vec{R}_0 - \vec{r} = (x_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi, y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \sin \varphi, z_0 - a \sin(N\varphi)), (3.25)$$

$$|\vec{R}_0 - \vec{r}| = (3.26)$$

$$= \sqrt{(x_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi)^2 + (y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \sin \varphi)^2 + (z_0 - a \sin(N\varphi))^2}.$$

Складові магнітного поля, створюваного тороїдальною обмоткою з постійним струмом в точці з радіус-вектором \vec{R}_0 , уздовж координатних осей визначаються безпосереднім інтегруванням (3.24). Остаточні вирази компонентів напруженості магнітного поля через інтеграли визначаються підстановкою виразів (3.25), (3.26), (3.23) у (3.24)

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(R_T \cos \varphi - aN \sin(N\varphi) \cos \varphi + a \cos(N\varphi) \cos \varphi)(z_0 - a \sin(N\varphi)) + \dots}{\sqrt{(x_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi)^2 + (y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \sin \varphi)^2 + \dots}} \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \frac{-aN \cos(N\varphi)(y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi)}{\sqrt{(x_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi)^2 + (y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \sin \varphi)^2 + \dots}} d\varphi, \quad (3.27)$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(R_T \sin \varphi + a \sin \varphi \cos(N\varphi) + Na \sin(N\varphi) \cos \varphi)(z_0 - a \sin(N\varphi)) + \dots}{\sqrt{(x_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi)^2 + (y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \sin \varphi)^2 + \dots}} \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \frac{+aN \cos(N\varphi)(x_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi)}{\sqrt{(x_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi)^2 + (y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \sin \varphi)^2 + \dots}} d\varphi, \quad (3.28)$$

$$B_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(R_T \sin \varphi + a \sin \varphi \cos(N\varphi) + Na \sin(N\varphi) \cos \varphi) \times \dots}{\sqrt{(x_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi)^2 + (y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \sin \varphi)^2 + \dots}} \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \frac{\times (y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \sin \varphi)}{\sqrt{(x_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi)^2 + (y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \sin \varphi)^2 + \dots}} d\varphi - \right. \\ \left. \rightarrow \frac{aN \cos(N\varphi) \times \dots}{\sqrt{(x_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \cos \varphi)^2 + (y_0 - (R_T + a \cos(N\varphi)) \sin \varphi)^2 + \dots}} d\varphi. \quad (3.29)$$

Як видно з виразів (3.27) – (3.29), складові магнітного поля тороїдальної обмотки з постійним струмом не виражаються через елементарні функції, тому можливе лише чисельне дослідження особливостей цього поля.

Незважаючи на громіздкість виразів (3.27) – (3.29), обчислювальні засоби пакету *MatLab* дозволяють записати розв’язок даної задачі в компактній формі. Нижче наведений лістинг файлу *A_Tor.m*, що містить опис функції, яка повертає значення складових напруженостей уздовж відповідних координатних осей.

```
function [Ax,Ay,Az]=A_Tor(x0,y0,z0,Rt,a,N)
% Функція значень складових напруженості магнітного поля уздовж осей
% координат
dphi=pi/(5*N); % крок інтегрування
phi=0:dphi:2*pi; % вектор, що містить значення вузлів інтегрування
[rx, ry, rz]=r_Tor(Rt,a,N,phi); % обчислення координат вектора R згідно з (3.20)
% у вузлах інтегрування
[tx, ty, tz]=t_Tor(Rt,a,N,phi); % обчислення координат вектора t, згідно з (3.23)
N2=length(rx); % довжина вектора
% обчислення складових напруженості магнітного поля
X0(1:N2)=x0;Y0(1:N2)=y0;Z0(1:N2)=z0;
Rx=X0-rx;Ry=Y0-ry;Rz=Z0-rz;
Z=(Rx.^2+Ry.^2+Rz.^2).^(1/2);
f1=tx./Z;f2=ty./Z;t3=tz./Z;
Ax=trapz(phi,f1);Ay=trapz(phi,f2);Az=trapz(phi,t3);
end
```

```
function [rx,ry,rz]=r_Tor(Rt,a,N,phi)
% Функція, що повертає координати вектора R відповідно до (3.20)
rx=(Rt+a*cos(N*phi)).*cos(phi);
ry=(Rt+a*cos(N*phi)).*sin(phi);
rz=a*sin(N*phi);
end
```

```
function [tx,ty,tz]=t_Tor(Rt,a,N,phi)
% Функція, що повертає координати вектора t відповідно до (3.23)
tx=-(Rt*sin(phi)+a*sin(phi).*cos(N*phi)+a*N*sin(N*phi).*cos(phi));
ty=Rt*cos(phi)-N*a*sin(phi).*sin(N*phi)+a*cos(N*phi).*cos(phi);
tz=a*N*cos(N*phi);
end
```

Далі для обчислення та візуалізації напруженості магнітного поля у площині *YoZ* необхідно виконати наступний код:

```

N1=21; % число вузлів
i=1:N1+1;
Ymin=-100; Zmin=-100; % лівий нижній кут координатної сітки
Ymax=100; Zmax=100; % правий верхній кут координатної сітки
% Обчислення координат вузлів сітки
Y(i)=Ymin+(Ymax-Ymin)/N1*(i-1); Z(i)=Zmin+(Zmax-Zmin)/N1*(i-1);
Rt=1; % радіус великого кільця тору
a=0.5; % радіус малого кільця тору
N=100; % число витків
% Обчислення складових напруженості магнітного поля у вузлах координатної
% сітки
for i=1:N1+1
    for j=1:N1+1
        [bx, by, bz]=A_Tor(0,Y(i),Z(j),Rt,a,N);
        Bx(i,j)=bx;By(i,j)=by;Bz(i,j)=bz;
    end
end
% Нормування векторів
mp=(By.^2+Bz.^2).^0.5;
by1=By./mp;bz1=Bz./mp;
quiver(Y,Z,by1,bz1,0.5); % візуалізація векторного поля
title('Напруженість магнітного поля у площині YoZ');

```

Результати виконання описаної послідовності команд наведені на рис.3.10.

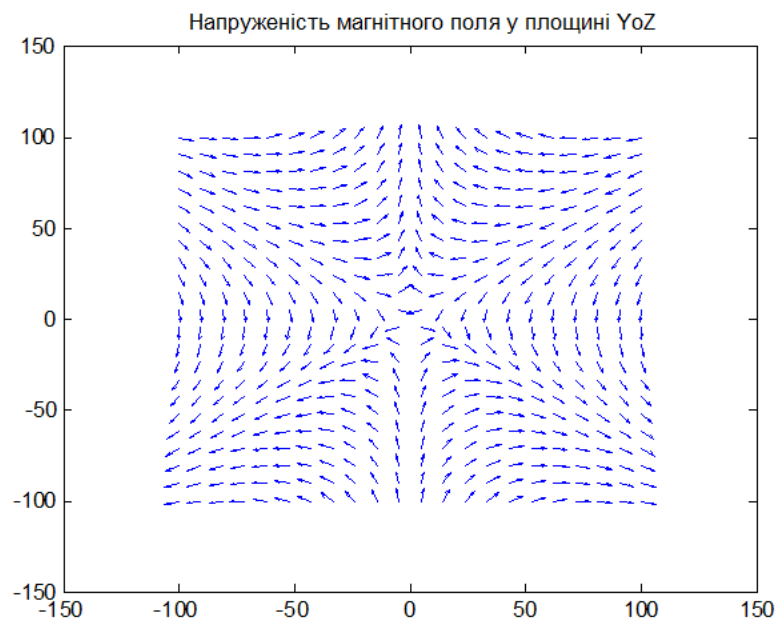


Рисунок 3.10

Слід зазначити, що використання багатошарової тороїдальної обмотки з числом шарів n , намотаної в одному напрямку, призведе до пропорційного збільшення (в n разів) кількості електрики, що переміщується в одиницю часу уздовж кола тора радіусу R , порівняно з одношаровою обмоткою.

Отже, напруженість магнітного поля багатошарової тороїдальної обмотки B буде в n разів більша поля одношарової обмотки B_1 : $B_1 = nB$.

При використанні багатошарової тороїдальної обмотки, в якій напрям намотування в кожному наступному шарі протилежний попередньому, при парній кількості шарів сумарна кількість електрики, що переміщується в одиницю часу уздовж кола тора радіусу R , дорівнює нулю; при непарній кількості шарів – дорівнює кількості електрики, що переміщується в одиницю часу уздовж осі радіусу R , в одношаровій тороїдальній обмотці. Отже, тороїдальна обмотка з парною кількістю шарів обмотки не має зовнішнього магнітного поля, а тороїдальна обмотка з непарним числом шарів має зовнішнє магнітне поле, рівне полю одношарової тороїдальної обмотки.

3.4 Чисельне розв'язання рівнянь Лапласа та Пуассона

Вище ми визначали потенціал і напруженість електричних полів, обумовлених стаціонарним розподілом електричних зарядів, використовуючи принцип суперпозиції. У багатьох випадках доводиться розв'язувати складніші задачі, з яких найбільш типовими є такі:

1. Визначення потенціалу електричного поля при невідомому розташуванні вихідних зарядів, але заданому електричному потенціалі на границях області. (Наприклад, задача про розподіл потенціалу електричного поля, створюваного системою нерухомих провідників, розміщених у вакуумі та підключених до батарей. Тут можна виміряти потенціал кожного провідника, але задати розподіл електричних зарядів на провідниках, залежний від їх форми, досить складно.)

2. Визначення потенціалу електричного поля, створюваного заданим розподілом електричних зарядів $\rho(x,y,z)$ у просторі.

Добре відомо, що прямий метод обчислення потенціалу електричного поля $\varphi(x,y,z)$ у цих задачах полягає у розв'язанні рівняння Лапласа

$$\Delta\varphi(x,y,z) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.30)$$

та рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi(x,y,z) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\rho(x,y,z), \quad (3.31)$$

відповідно. Рівняння (3.30) та (3.31) відносяться до класу диференціальних рівнянь в частинних похідних еліптичного типу.

Далі розглядатимемо лише окремий випадок еліптичних рівнянь для потенціалу φ , залежного від двох просторових змінних. Цілком очевидно, що для повного розв'язання задачі рівняння (3.30) та (3.31) необхідно доповнити граничними умовами. Як відомо, розрізняють три типи граничних умов:

1) граничні умови Дирихле (значення φ задаються на деякій замкнутій кривій в площині (x,y) і, можливо, на деяких додаткових кривих, розташованих всередині області (рис.3.11));

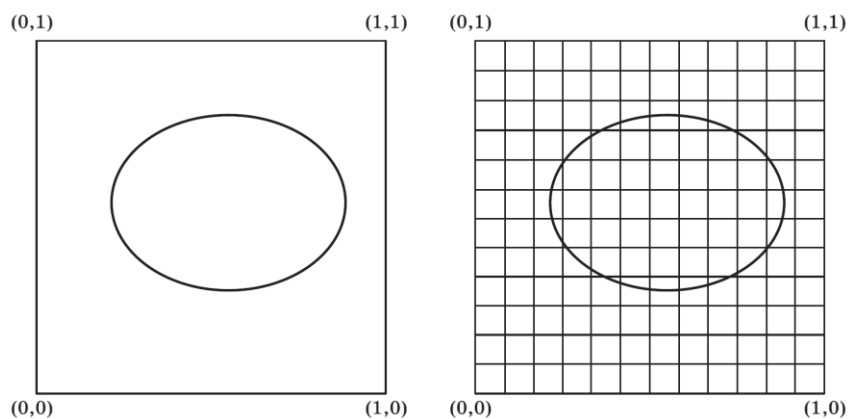


Рисунок 3.11

2) граничні умови Неймана (на границі задається нормальна похідна потенціалу φ);

3) змішана крайова задача (на границі задається лінійна комбінація потенціалу φ та його нормальної похідної).

Розглянемо методи чисельного розв'язання більш загального рівняння (3.31), припускаючи, що розв'язок шукається в одиничному квадраті.

Як перший крок отримання чисельного розв'язку перетворимо рівняння (3.31) до виду, зручного для чисельного розв'язання. Для цього в площині (x, y) задаємо сітку з $(N+1) \times (N+1)$ вузлів, яка покриває область, що розглядається. (Для простоти обираємо крок сітки h по кожній координатній осі рівномірним і однаковим.) Вузли сітки позначатимемо парою індексів (i, j) , що приймають значення від 0 до N . В обраних позначеннях координати точки (i, j) дорівнюють $(x_i = ih, y_i = jh)$. Позначивши значення функцій $\varphi(x, y)$ і $\rho(x, y)$ у вузлових точках як $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j)$ і $\rho_{ij} = \rho(x_i, y_j)$, відповідно, та використовуючи для апроксимації похідної 3-точкову формулу, отримуємо різницеву апроксимацію рівняння (3.31)

$$\frac{\varphi_{i+1j} + \varphi_{i-1j} - 2\varphi_{ij}}{h^2} + \frac{\varphi_{ij+1} + \varphi_{ij-1} - 2\varphi_{ij}}{h^2} = -\rho_{ij}. \quad (3.32)$$

Рівняння (3.32) може бути отримане іншим способом, ґрунтованим на варіаційному принципі. Розглянемо функціонал E поля $\varphi(x, y)$ такого вигляду:

$$E = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 - \rho \varphi \right]. \quad (3.33)$$

Оскільки величина $(\vec{\nabla} \varphi)$ є електричним полем, а ρ – щільність заряду, то величина E дорівнює повній енергії системи. Визначимо варіацію функціоналу E .

$$\delta E = \int_0^1 dx \int_0^1 dy [\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \delta \varphi - \rho \delta \varphi]. \quad (3.34)$$

Інтегруючи по частинах перший член (3.34), отримуємо

$$\delta E = \int_C dl \delta \vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla} \varphi + \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta \varphi [-\nabla^2 \varphi - \rho], \quad (3.35)$$

де криволінійний інтеграл береться по границі розглядуваної області (C), а \vec{n} – одинична нормаль до границі. Для варіацій, які задовольняють граничні умови на границі (C) $\delta\varphi \equiv 0$, тому криволінійний інтеграл (3.35) також дорівнює 0. Вимога рівності δE нулю для всіх таких варіацій означає, що $\varphi(x, y)$ задовольняє рівнянню (3.31).

Для виводу дискретної апроксимації рівняння в частинних похідних на основі варіаційного принципу апроксимуємо E через значення поля у вузлах сітки, використовуючи двоточкову різницеву формулу для похідної та правило трапецій для обчислення інтегралу:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[(\varphi_{ij} - \varphi_{i-1j})^2 + (\varphi_{ij} - \varphi_{ij-1})^2 \right] - h^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} \varphi_{ij}. \quad (3.36)$$

Застосовуючи умову

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_{ij}} = 0, \quad (3.37)$$

для всіх i, j , отримуємо різницеве рівняння (3.32).

Далі розглянемо методи розв'язання одновимірної крайової задачі, яка може бути описана рівнянням другого порядку

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\rho(x) \quad (3.38)$$

із заданими значеннями $\varphi(0)$ та $\varphi(1)$. Відповідний функціонал E для даного рівняння має вигляд

$$E = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \rho\varphi \right], \quad (3.39)$$

а його дискретний аналог на рівномірній сітці з кроком $h = \frac{1}{N}$

$$E = \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^N (\varphi_i - \varphi_{i-1})^2 - h \sum_{i=1}^{N-1} \rho_i \varphi_i. \quad (3.40)$$

Варіюючи (3.40) за всіма φ_i (до виразу для енергії φ_i входить двічі: у членах $(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2$ та $(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2$), отримуємо різницеве рівняння

$$\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i = -h^2 \rho_i, \quad (3.41)$$

де $\varphi_0 = \varphi(0)$, $\varphi_N = \varphi(1)$.

Рівняння (3.41) задає систему лінійних рівнянь відносно невідомих змінних φ_i ($i = 1, N-1$), причому матриця системи рівнянь є тридіагональною (тобто в матриці відмінними від нуля є лише елементи, розташовані на головній діагоналі та двох діагоналях вище і нижче головної діагоналі). Для невеликого числа точок (наприклад, $N \leq 100$) дану систему рівнянь можна розв'язати прямими методами або використати спеціальний прямий метод, розроблений для розв'язання «тридіагональних» систем. Однак на практиці при чисельному розв'язанні еліптичних рівнянь доводиться використовувати сітки, які мають значно більшу кількість вузлів, тому обмежимося розглядом лише ітераційних методів (наприкладі методу релаксації), що застосовуються у випадку великих розріджених матриць.

Перепишемо рівняння (3.41), розв'язавши його відносно змінної φ_i :

$$\varphi_i = \frac{1}{2} [\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} + h^2 \rho_i], \quad (3.42)$$

Незважаючи на те, що значення φ_{i-1} , φ_{i+1} , що входять до правої частини рівняння (3.42), нам невідомі, його можна інтерпретувати як «уточнення» значень φ_i через значення в сусідніх точках.

Отже, метод розв'язання рівняння (3.42) (метод Гаусса-Зейделя) полягає в наступному:

- 1) вибрати деяке початкове наближення для розв'язання рівняння (5.41);
- 2) просуваючись по сітці (наприклад, зліва направо), уточнити розв'язки рівняння згідно з (3.42).

При багаторазовому повторенні описаного процесу початкове наближення може зійтися («зреласувати») до точного розв'язку.

На практиці замість рівняння (3.42) використовують узагальнене рівняння, в якому на кожному кроці релаксації φ_i замінюється лінійною комбінацією зі свого старого значення і «поліпшеного» за формулою (3.42):

$$\varphi_i \rightarrow \varphi'_i = (1 - \omega)\varphi_i + \frac{\omega}{2}(\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} + h^2 \rho_i). \quad (3.43)$$

Для дослідження збіжності описаної процедури обчислимо зміну функціоналу енергії E . Підставляючи (2.43) у (3.40), після ряду перетворень знайдемо

$$E' - E = -\frac{\omega(2 - \omega)}{h} \left[\frac{1}{2}(\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - h^2 \rho_i) - \varphi_i \right]^2. \quad (3.44)$$

З (3.44) видно, що при $\omega \in]0, 2[$ енергія E не збільшується і, отже, ітераційний процес збігатиметься до мінімального значення, яке вимагається. Існування сторонніх мінімумів енергії свідчить про погану обумовленість лінійної системи. Параметр ω визначає швидкість збіжності ітераційного процесу – швидкість релаксації. Прийнято розрізнявати два випадки: при $\omega < 1$ говорять, що використовується метод «нижньої релаксації», при $\omega > 1$ – метод «верхньої релаксації».

Як приклад релаксаційного методу розглянемо одновимірну крайову задачу для рівняння (3.38) з $\rho(x) = 12x^2$, $\varphi_0 = \varphi(1) = 0$, що має точний розв'язок $\varphi(x) = x(1 - x^3)$ з енергією $E = -\frac{9}{14} = -0.64286$.

Для розв'язання поставленої задачі необхідно створити m-файл, що містить опис функції, яка повертає матрицю, в n -ому стовпці якої розміщені розв'язки, отримані на n -ому ітераційному кроці:

```
function z=ltera(N, Omega, Numberit)
% Функція, що реалізує ітераційний процес
h=1/N; % крок сітки
i=1:N+1;
% початкові значення
x(i)=(i-1)*h;    f=ro(x);    phi(i)=0;
% ітераційний цикл
for k=1:Numberit
    for i=1:N-1 % проходження по вузлах сітки
        phi(i+1)=(1-Omega)*phi(i+1)+Omega/2*(phi(i)+phi(i+2)-h.^2*f(i+1));
    end
    if k==1
```



```

        q=phi'; % збереження розв'язку на першому кроці ітерації
    else
        % збереження кожного наступного розв'язку в новому стовпці матриці q
        q=cat(2,q,phi');
    end
end
z=q;
end

function z=ro(x)
z=-12*x.^2;
end

```

Тут для збереження розв'язків рівняння, одержаних на кожному ітераційному кроці, у відповідному стовпці матриці q ми використовуємо функцію `cat`. Перший аргумент функції визначає спосіб розміщення вектору, який додається. Якщо значення першого елементу дорівнює 1, то вектор буде додано до існуючого вектору знизу, якщо 2, – новий вектор розміщується праворуч від існуючого, тобто формується матриця.

Для визначення чисельних розв'язків, а також графічного виводу точного розв'язку та розв'язків, отриманих на обраних ітераційних кроках, слід виконати наступний код:

```

N=21; % число вузлів сітки, у вузлах якої шукається розв'язок рівняння
i=1:N+1;
x(i)=(i-1)/N;
Omega=1; % параметр ітераційного процесу
Nit=200; % число ітерацій
y=ltera(N,Omega,Nit);
N1=200; % число точок для побудови графіка функції
j=1:N1+1;
% координати вузлів сітки для обчислення значень точного розв'язку
x1(j)=(j-1)/N1;
y1(j)=x1(j).*(1-x1(j).^3); % точний розв'язок
plot(x1,y1,x,y(:,10),'--',x,y(:,50),'-',x,y(:,180),'-');

```

Результати виконання цього коду наведені на рис.3.12.

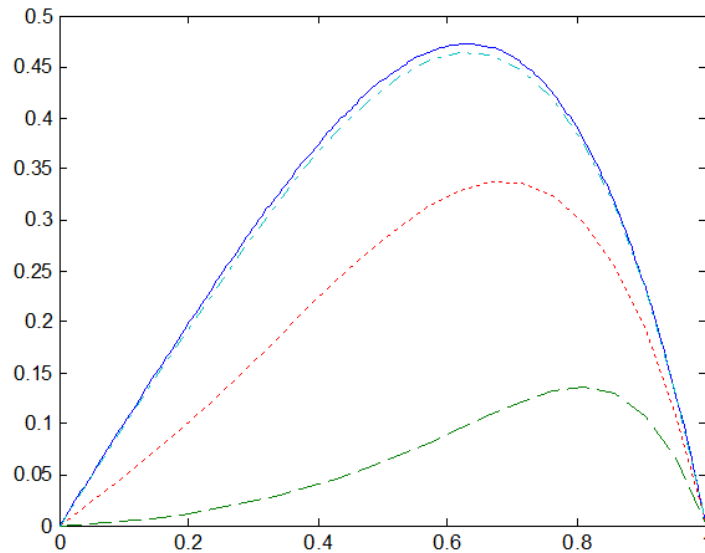


Рисунок 3.12

Покажемо збіжність ітераційного розв'язку, побудувавши залежність функціоналу енергії як функцію числа ітерацій. Для розв'язання поставленої задачі необхідно створити m-файл, що містить опис функції `ltera_Energy`, яка повертає значення функціоналу енергії на n-ому ітераційному кроці.

```
function z=ltera_Energy(N,Omega,Numberit)
% Функція, що повертає значення енергії на кожному кроці ітераційного
процесу
h=1/N; % крок сітки
i=1:N+1;
% початкові значення
x(i)=(i-1)*h;    f=ro(x);    phi(i)=0;
% ітераційний цикл
for k=1:Numberit
    for i=1:N-1 % проходження по вузлах сітки для обчислення розв'язку
        phi(i+1)=(1-Omega)*phi(i+1)+Omega/2*(phi(i)+phi(i+2)-h.^2*f(i+1));
    end
    e=0;
    for i=2:N+1 % проходження по вузлах сітки для обчислення енергії
        e=e+(phi(i)-phi(i-1)).^2/(2*h)+h*phi(i)*f(i);
    end
    En(k)=e;
end
z=En;
end
```

Для визначення залежності енергії від номеру ітерації, а також побудови графіку відповідної залежності слід виконати таку послідовність команд:

```
Ni = 200;i=1:Ni;
z=ltera_Energy(21,1,Ni);
z1(i)=-9/14; % значення енергії
plot(i,z,i,z1,'--'); grid
```

Результат виконання зазначених команд наведений на рис.3.13:

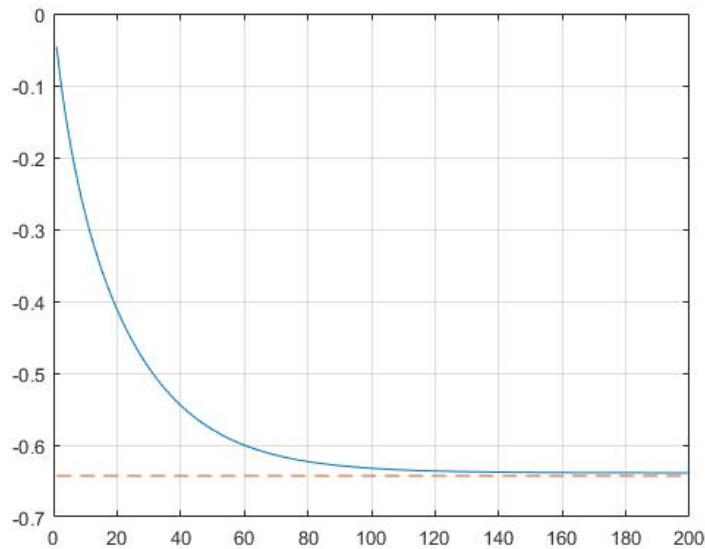


Рисунок 3.13

У практичних розрахунках можуть стати в нагоді кілька таких порад:

1. Вдалий вибір початкового наближення зменшує необхідне число ітерацій.
2. Необхідно використовувати оптимальне значення параметру релаксації, яке можна оцінити аналітично або отримати емпіричним шляхом.
3. Підвищити ефективність процесу можна, якщо кілька ітерацій провести по деякій сітчастій підобласті, в якій сітчастий розв'язок відомо найменше, що дозволяє зекономити витрати на релаксацію вже відрелаксованих частин розв'язку.
4. Доцільно провести розрахунок на відносно грубій сітці, для якої кількість обчислень є невеликим, а потім екстраполювати отриманий розв'язок на дрібнішу сітку та використовувати ці значення як початкове наближення для подальших ітерацій.

Для розв'язання дво- та тривимірних задач також може бути використана описана вище ітераційна процедура. У двовимірному випадку аналог формули (3.44) виходить розв'язанням рівняння (3.32) відносно φ_{ij} та заміною $\varphi_i \rightarrow \varphi_{ij}$ в (3.44):

$$\varphi_{ij} \rightarrow \varphi'_{ij} = (1 - \omega)\varphi_{ij} + \frac{\omega}{4}(\varphi_{i+1j} + \varphi_{i-1j} + \varphi_{ij+1} + \varphi_{ij-1} + h^2 \rho_{ij}). \quad (3.45)$$

Якщо даний алгоритм застосовується послідовно до кожного вузла сітки (наприклад, всі вузли проходяться послідовно зліва направо та зверху донизу), тоді можна показати, що функціонал енергії (3.36), за умови, що ω перебуває у відповідних границях, завжди зменшується, і процес збігається до шуканого розв'язку.

Як ще один приклад розв'яжемо таку крайову задачу для рівняння Лапласа. Визначити розв'язок рівняння (3.30) у квадратній області ($0 \leq x \leq 1$ см, $0 \leq y \leq 1$ см) при заданих значеннях потенціалів на границях: $u(x,0) = u(x,1) = 10$ В, $u(0,y) = u(1,y) = -10$ В на сітці 15×15 вузлів. Для розв'язання поставленої задачі необхідно створити м-файл, що містить опис функції, яка повертає значення потенціалу на кожному кроці ітераційного процесу:

```
function z=lteraL(N,Omega,Numberit,phi)
% Функція, що повертає значення потенціалу на кожному кроці ітераційного
% процесу
h=1/N; % крок сітки
% обчислення координат вузлів сітки
i=1:N+1; x(i)=(i-1)*h; j=1:N+1; y(j)=(j-1)*h;
f=roL(N,x,y); % функція, що описує щільність розподілу заряду
for k=1:Numberit % ітераційний цикл
    for j=2:N % проходження по вузлах сітки
        for i=2:N % релаксація
            phi(i,j)=(1-Omega)*phi(i,j)+Omega/4*(phi(i+1,j)+phi(i-1,j)+phi(i,j+1)+phi(i,j-1)-...
            h.^2*f(i+1,j+1));
        end
    end
end
if k==1
    q=phi; % зберігання розв'язку на першому кроці ітерації
```

```

else
    % зберігання кожного наступного розв'язку у новому стовпці матриці q
    q=cat(2,q,phi);
end
end
z=q;
end

function z=roL(N,x,y) % Функція, що описує щільність розподілу заряду
for j=1:N+1
    for i=1:N+1
        if (x(i)>=0)&&(x(i)<=1)&&(y(j)>=0)&&(y(j)<=1)
            z(i,j)=800;
        else z(i,j)=0;
        end
    end
end
end
end

```

Далі необхідно виконати такий код:

```

N=15;    i=1:N+1;    j=1:N+1;
mu(i,1)=-10; % потенціал на лівій границі
mu(i,N+1)=-10; % потенціал на правій границі
mu(1,j)=10; % потенціал на нижній границі
mu(N+1,j)=10; % потенціал на верхній границі
% Задання початкового наближення
kx=2:N; ky=2:N;
mu(kx,ky)=12; % параметр релаксації
Omega=1; Niter=200;
z=lteraL(N,Omega,Niter,mu); % розв'язання рівняння Лапласа
% Обчислення векторів і матриць для побудови карти ліній рівня
x(i)=(i-1)/N;    y(i)=(j-1)/N;
[x1, y1]=meshgrid(x,y);
K=100;
N1=(N+1)*K+1; N2=(N+1)*(K+1);
A=z(1:N+1,N1:N2); % виділення K-го розв'язку із загальної матриці розв'язків
contour(x1,y1,A,17);
title('Карта екіпотенціалей розв'язку рівняння Лапласа на 100-му кроці ітерації');

```

Результат виконання наведеної послідовності команд демонструє рис.3.14.

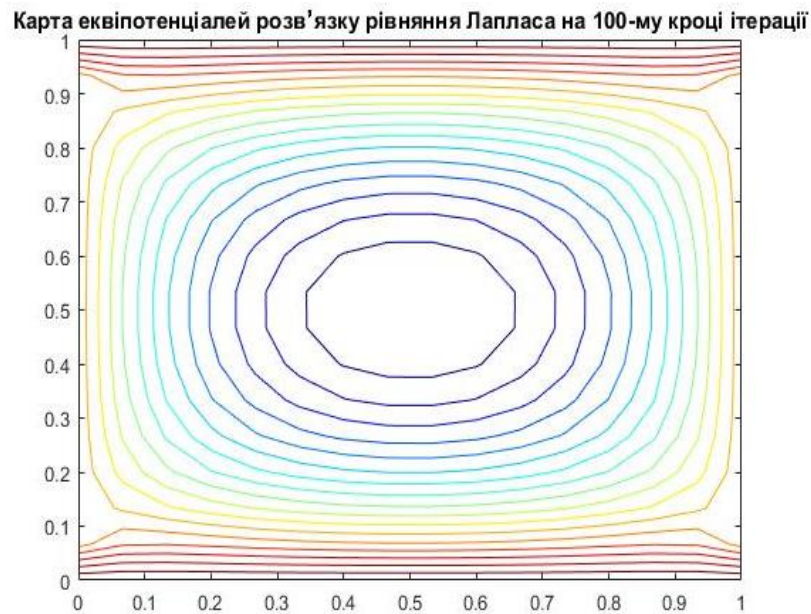


Рисунок 3.14

Контрольні питання

1. Наведіть алгоритм визначення напруженості електричного поля, створюваного довільною конфігурацією електричних зарядів.
2. Наведіть алгоритм визначення напруженості магнітного поля, створюваного витком зі струмом.
3. Наведіть алгоритм визначення напруженості магнітного поля тороїдальної обмотки з постійним струмом.
4. Як розв'язується одновимірна крайова задача, описана рівнянням другого порядку?