ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1. Моделювання фізичних процесів, описуваних диференціальними рівняннями

Мета: Застосовування розв’язувачів систем диференціальних рівнянь (ДР) у пакетах MatLab та Octave для побудови моделей фізичних процесів.

Теоретичні відомості до лабораторної роботи наведені у лекції 1.

Поняття диференціального рівняння (ДР) є одним з основних математичних понять. До ДР звертаються в тому випадку, коли різні стани досліджуваного явища або процесу вдається описати аналітичною залежністю між певними параметрами та їх похідними або диференціалами. Такого роду залежності, зазвичай, називають *диференціальними моделями* процесу або явища.

Розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) із заданими початковими умовами (*задача Коші*) відіграє важливу роль у практиці інженерних обчислень. Задача Коші для ДР полягає у визначенні функції, що задовольняє ДР довільного порядку $y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ та початковим умовам при $t = t_0$: $y(t_0) = u_0$, $y'(t_0) = u_1$, …, $y^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$.

До MatLab, починаючи з версії 5.0, входять спеціальні функції-розв'язувачі ЗДР – солвери, які спрощують вибір методу розв'язання, задання початкових умов та встановлення спеціальних опцій для підвищення ефективності методів, що використовуються.

Схема розв'язання задачі Коші в MatLab складається з наступних етапів:

1. Зведення ДР до системи ДР 1-го порядку.
2. Написання спеціальної М-функції для системи рівнянь.
3. Виклик відповідного солверу.
4. Візуалізація результатату.

При *виборі солверу* для розв'язання задачі потрібно враховувати властивості системи ДР, інакше можна отримати неточний результат, або витратити надто багато часу на розв'язання. Дуже часто солвер ode45 дає досить хороші результати (їм доцільно скористатися у першу чергу). Це однокроковий розв'язувач, що реалізує явні формули Рунге-Кутта 4-го й 5-го порядків. Солвер ode23 також ґрунтується на формулах Рунге-Кутта, але вже нижчого порядку точності. Доцільно застосовувати ode23 у задачах, що містять невелику жорсткість, коли потрібно отримати розв'язок з невисокою точністю. Якщо ж потрібно отримати розв'язок нежорсткої задачі з високою точністю, найкращий результат дає ode113, ґрунтований на методі змінного порядку Адамса-Бешформа-Мілтона. Солвер ode113 є особливо ефективним для нежорстких систем ДР, праві частини яких обчислюються складними формулами. Якщо всі спроби застосування ode45, ode23, ode113 не ведуть до успіху, можливо, розв'язувана система є жорсткою. Для розв'язання жорстких систем підходить солвер ode15, ґрунтований на багатокроковому методі Гіра, що допускає зміну порядку. Якщо потрібно розв'язати жорстку задачу з невисокою точністю, хороший результат може дати солвер ode23s, що реалізує однокроковий метод Розенброка 2-го порядку.

У відповідній таблиці довідкової системи MatLab наведені основні солвери (операції, що застосовуються при розв'язанні систем ЗДР, функції, які їх підтримують, та їх призначення).

<u>Приклад 1.1</u>. Розв'язати ДР $y''+2y'+10y=\sin t$, яке описує коливання частинки під впливом зовнішньої сили у середовищі, що чинить опір коливанням, – рівняння *осцилятора*. Без зазначення розмірностей фізичних величин вважатимемо, що координата точки у початковий момент часу $y(0)=1$, а швидкість $y'(0)=0$. Це й є *початкові умови*. Зведемо задачу до системи ДР. Для цього введемо 2 допоміжні функції (оскільки порядок рівняння дорівнює 2), що визначаються формулами: $u_1=y$, $u_2=y'$. Тоді система ДР з початковими умовами матиме вигляд: $\begin{cases} u_1'=u_2 \\ u_2'=-2u_2-10u_1+\sin t \end{cases}$ $\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Другий етап – написання М-функції для системи ДР, яка повинна мати 2 вхідних аргументи:

змінну t, по якій ведеться диференціювання, та вектор, розмір якого дорівнює кількості невідомих функцій системи. Число та порядок аргументів фіксовані, навіть якщо t явно не входить до системи. Вихідний аргумент М-функції – вектор правої частини системи. М-функція матиме вигляд:

```
function f=oscil(t,u)
% Функція, що описує ДР
f=[u(2); -2*u(2)-10*u(1)+sin(t)];
end
```

Використовуємо солвер ode45. Вхідними аргументами у найпростішому випадку є: ім'я М-функції, вектор з початковим і кінцевим значенням часу спостереження коливань та вектор початкових умов. Вихідних аргументів два: вектор, що містить значення часу, та матриця *u* значень невідомих функцій у відповідні моменти часу. Значення функції розміщені у стовпцях матриці: у 1-му стовпці – значення 1-ої функції, у 2-му – значення 2-ої функції тощо. Через зроблені заміни $u_1 = y$, $u_2 = y'$, *1-й стовпець матриці* містить значення невідомої функції $y(t)$, *що входить до початкового ДР*, а інші стовпці – значення її похідних різного порядку. Для прикладу 1.1 застосування солверу для визначення розв'язку при $t \le 15$ та візуалізація результату демонструються наступним кодом та графіками (рис.1.1):

```
u0=[1;0]; % формування вектора початкових умов
% виклик солверу ode45 від функції oscil, початкового і кінцевого моменту часу
% [0 15] та вектора початкових умовu0
[T,u]=ode45(@oscil,[0 15],u0);
plot(T,u(:,1),'r');   % виведення графіка розв’язку ДР - y(t)
grid on
hold on
plot(T,u(:,2),'b-'); % виведення графіка похідної від розв’язку ДР - y’(t)
% виведення пояснень на графік
title('Розв’язок {\ity}\prime\prime+2{\ity}\prime+10{\ity}=sin{\itt}');
xlabel('\itt');
ylabel('{\ity},{\ity}\prime');
```

Побудовані графіки зображують поведінку координати точки та її швидкості залежно від часу. З графіку видно, що наближений розв'язок та його похідна відповідають початковим умовам, коливання відбувається в усталеному режимі, починаючи з $t=5$.

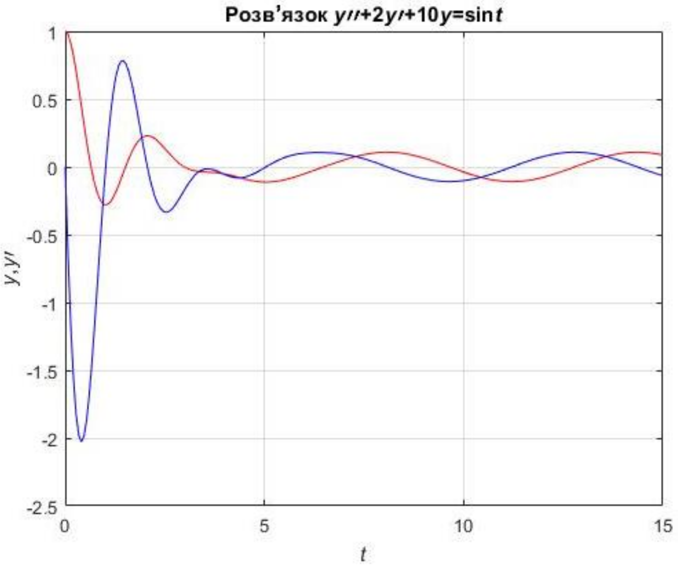


Рисунок 1.1

Точність обчислень суттєво впливає на якість отриманого наближеного розв'язку. Для задання точності, у функції, що відповідає обраному солверу, використовується додатковий параметр options, що формується функцією odeset. Використання odeset схоже із застосуванням optimset при керуванні процесом мінімізації: options=odeset(′ім'я_опції_1′, значення_1,…). Так, для задання відносної похибки служить опція ′RelTol′, для задання кроку інтегрування – опція ′MaxStep′, наприклад, options=odeset(′RelTol′, 1.0e-04, ′MaxStep′,0.001).

Для графічного подання розв'язку ДР у MatLab служать функції plot та odeplot, а також odephas2 та odephas3 (побудова двовимірного та тривимірного фазового портрету, відповідно). Друк розв'язків для системи ЗДР здійснюється функцією odeprint. Застосування функцій odeplot, odephas2, odephas3 та odeprint повинно бути вказане опцією ′OutputFcn′ функції odeset, наприклад, options=odeset(′OutputFcn′,′odephas2′).

Нижче наведений код з двома способами виводу розв’язку ДЗ з прикладу 1.1 у вигляді параметричної кривої (залежність *y'*(*y*)) – фазового портрету (рис.1.2).

```
% Побудова фазового портрету різними способами
figure
% спосіб 1
options=odeset('OutputFcn', @odephas2,'MaxStep',0.1);
[T,u]=ode45(@oscil, [0 15], u0, options);
hold on
grid on
% спосіб 2
plot(u(:,1),u(:,2),'k');
xlabel('\ity');
ylabel('{\ity}\prime');
title('Розв’язок у вигляді параметричної  кривої (фазовий портрет)');
legend('odephas2','plot');
```

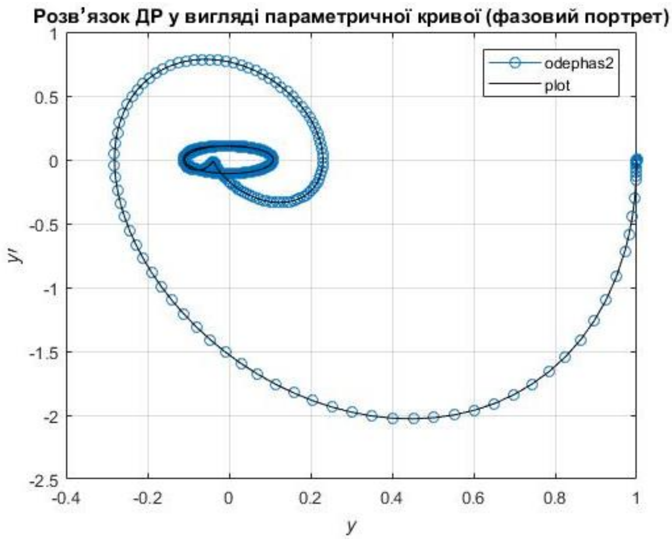


Рисунок 1.2

В MatLab також існує можливість отримувати розв'язок рівнянь та систем в аналітичному вигляді за допомогою ToolBox Symbolic Math. Для цього використовується функція dsolve, вхідними аргументами якої є задане ДР та початкові умови. Позначимо першу та другу похідні у рядках як dy, d2y, відповідно. Функція syms – функція створення символьного об'єкту. Перевірити отриманий аналітичний розв'язок можна за допомогою застосування функцій diff (обчислення похідної) та simplify (перетворення та спрощення результату).

Для прикладу 1.1 код для розв’язання задачі, отриманий аналітичний розв'язок в та його перевірка наведені на рис.1.3:

```
clearvars
% виклик функції dsolve та виведення результату в аналітичному вигляді
syms y(x)
dy = diff(y,x);
d2y = diff(y,x,2) == -2*dy-10*y+sin(x);
cond = [y(0) == 1, dy(0) == 0];
disp('Аналітичний розв`язок:')
```

Аналітичний розв`язок:

```
y(x)=dsolve(d2y,cond)
```

y(x) =

$$\sin(3\,x)\,\left(\frac{\cos(2\,x)}{15}-\frac{2\cos(4\,x)}{51}-\frac{\sin(2\,x)}{30}+\frac{\sin(4\,x)}{102}\right)+\frac{87\cos(3\,x)\,e^{-x}}{85}+\frac{26\sin(3\,x)\,e^{-x}}{85}-\cos(3\,x)\,e^{-x}\,\left(\frac{\cos(2\,x)\,e^{x}}{30}-\frac{\cos(4\,x)\,e^{x}}{102}+\frac{\sin(2\,x)\,e^{x}}{15}-\frac{2\sin(4\,x)\,e^{x}}{51}\right)$$

```
% перевірка аналітичного розв'язку підстановкою знайденої символічної функції у ДР
u=simplify(diff(diff(y,x),x)+2*diff(y,x)+10*y-sin(x))
```

u(x) = 0

Рисунок 1.3

<u>Приклад 1.2.</u> Розв'язати чисельно та аналітично систему ДР $\begin{cases} x' = y - 4x \\ y' = x + y \end{cases}$ з початковими умовами $x(0)=1$ і $y(0)=1$ на інтервалі $0 \le t \le 1.2$, використовуючи крок 0.05. Порівняти графіки отриманих розв'язків.

Після відповідних замін ($u_1 = x$, $y = u_2$) система матиме вигляд: $\begin{cases} u_1' = u_2 - 4u_1 \\ u_2' = u_1 + u_2 \end{cases}$, початкові умови: $\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Функція визначення правих частин системи ДР виглядатиме таким чином:

```
function f=du(t,u)
% Функція, що описує систему ДР
f=[u(2)-4*u(1); u(1)+u(2)];
end
```

Застосовуємо солвер ode45, будуємо графік визначеного наближеного розв'язку, розв’язуємо задачу в аналітичному вигляді та будуємо графік отриманого точного розв'язку, порівнюємо обидва графіки, а також перевіряємо аналітичний розв’язок (рис.1.4).

```
clearvars
% наближений розв'язок
u0=[1;1]; % формування вектора початкових умов
options=odeset('MaxStep',0.05);
[T,u]=ode45(@du,[0 1.2],u0,options);
plot(u(:,1),u(:,2),'b');  % графік наближеного розв’язку
grid on
hold on

% точний (аналітичний розв'язок)
syms x(t) y(t)
eqns=[diff(x,t) == y-4*x, diff(y,t) == x+y];
cond = [x(0)== 1, y(0) == 1];
disp('Аналітичний розв`язок:')
S=dsolve(eqns,cond);
xSol(t) = S.x
ySol(t) = S.y
% підстановка T в аналітичний розв'язок для побудови графіка
xx=subs(xSol(t),T);
yy=subs(ySol(t),T);
plot(xx,yy,'ro');  % графік точного розв’язку
xlabel('\itx');
ylabel('{\ity}');
title('x\prime=y-4x, y\prime=x+y');
legend('наближений розв’язок', 'точний розв’язок');
% перевірка аналітичного розв'язку
syms t
r1=simplify(diff(xSol(t),t)-ySol(t)+4*xSol(t))
r2=simplify(diff(ySol(t),t)-xSol(t)-ySol(t))

function f=du(~,u)
% Функція, що описує систему ДР
f=[u(2)-4*u(1); u(1)+u(2)];
end
```

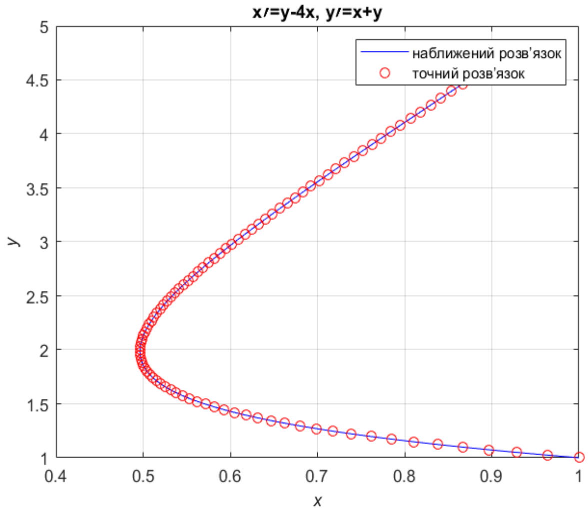
Аналітичний розв`язок:

xSol(t) =

$$e^{\frac{t\,(\sqrt{29}-3)}{2}}\left(\frac{\sqrt{29}}{2}-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7\sqrt{29}}{58}+\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{29}\,e^{-\frac{t\,(\sqrt{29}+3)}{2}}\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{5}{2}\right)(\sqrt{29}-7)}{58}$$

ySol(t) =

$$e^{\frac{t\,(\sqrt{29}-3)}{2}}\left(\frac{7\sqrt{29}}{58}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{29}\,e^{-\frac{t\,(\sqrt{29}+3)}{2}}(\sqrt{29}-7)}{58}$$



r1 = 0

r2 = 0

Рисунок 1.4

Задачі з наведених вище прикладів 1.1 та 1.2 аналогічно розв’язуються і в пакеті Octave (виноситься на самостійне вивчення).

Порядок виконання роботи

Виконати наступне завдання згідно з номером свого варіанту.

У завданнях 1–10 на заданому відрізку розв’язати ДР спочатку аналітично, а потім чисельно. Побудувати графіки обох розв'язків в одному графічному вікні, вивести легенду та порівняти розв’язки:

1. $y''' = 2x,\ x \in [0{,}20],\ y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1.$

2. $y^{(IV)} = 2y''',\ x \in [0{,}20],\ y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1,\ y'''(0)=1.$

3. $y^{(VI)} + 2y^{(IV)} + y'' = 0,\ \ x \in [0{,}5],\ \ y(0)=-1,\ \ y'(0)=1,\ \ y''(0)=0,\ \ y'''(0)=-5,$ $y^{(VI)}(0)=0,\ y^{(V)}(0)=10.$

4. $y''' + y = x^4,\ x \in [-5{,}3],\ y(-5)=-1,\ y'(-5)=-1,\ y''(-5)=-1.$

5. $y^{(VIII)}+2y^{(VI)}-2y''-y=0$, $x\in[0{,}10]$, $y(0)=-10$, $y'(0)=10$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=-0.5$, $y^{(IV)}(0)=0$, $y^{(V)}(0)=10$, $y^{(VI)}(0)=4.1$, $y^{(VII)}(0)=-0.00004$.

6. $y'''-2y''-y'+2y=0$, $x\in[0{,}20]$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=1$.

7. $y^{(IV)}-4y'''-8y''-8y'+4y=0$, $x\in[0{,}10]$, $y(0)=-1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=-5$.

8. $y^{(IV)}+4y=x^2$, $x\in[0{,}10]$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=0$.

9. $y'''-3y''+3y'-y=2e^x$, $x\in[-3{,}3]$, $y(-3)=0$, $y'(-3)=-1$, $y''(-3)=1$.

10. $y^{(IV)}-16y=0$, $x\in[0{,}1]$, $y(0)=5$, $y'(0)=0.33$, $y''(0)=7$, $y'''(0)=-5$.

11. За допомогою моделі точкових зарядів визначити траєкторію, якщо Q_2=*-0.2, +0.2, -1.5* (для останнього випадку взяти *T1*=8000).

12. Використовуючи модель точкових зарядів, показати, як зміниться траєкторія зарядженої частинки в полі нерухомого заряду при послідовному збільшенні заряду Q_1 на 1 від -50 до -46.

13. Порівняти (в одному графічному вікні для кожного випадку) результати роботи двох солверів `ode45` та `ode113` для визначення траєкторії кулі під дією сили тяжіння й опору повітря, розв'язуючи систему ДР (1.5) відносно компонент швидкості руху кулі.

14. Порівняти (в одному графічному вікні для кожного випадку) результати роботи двох солверів `ode45` та `ode113` для визначення траєкторії кулі під дією сили тяжіння й опору повітря, розв'язуючи систему ДР (1.5) відносно координат (для цього випадку *S*=1 см^2, T=4.8 с).

15. Дослідити дальність кулі від її маси. Взяти *m*=9 г та 15 г.

16. Розв'язати рівняння Ван дер Поля за допомогою солверів `ode45` та `ode15s` при різних значеннях μ (μ=175; 1000). Початкові умови $x_0=0.5$, $\dot{x}_0=0$. Часовий інтервал [0, 2000]. Оцінити час роботи кожного з солверів.

17. Дослідити рух осцилятора Ван дер Поля залежно від значення різних параметрів. Нехай початкові умови $[x_0;\dot{x}_0]=[0.5;0]$; $[-1;2]$ та $[2;0]$ для часових інтервалів $[0{,}20]$ та $[0{,}100]$.

18. Порівняти час роботи двох солверів ode45 та ode15s при різних значеннях μ (μ=0; 0.1; 1; 10) для розв'язання рівняння Ван дер Поля, використовуючи функцію odedemo. Початкові умови $x_0 = 0.5$, $\dot{x}_0 = 0$. Часовий інтервал [0, 100].

19. Математична модель деякого електричного ланцюга описується рівнянням $Q''(t) + 20Q'(t) + 125Q = 9\sin(5t)$ з $Q(0) = 0$ і $Q'(0) = 0$, де $I(t) = Q'(t)$ – струм у момент t. Використовуйте метод Рунге-Кутта для розв'язання ДР на інтервалі $[0,2]$ з кроком 0.05. Побудуйте графіки наближеного розв'язку ДР та його похідної.

Контрольні питання

1. За допомогою яких процедур розв'язуються ЗДР у системі MatLab? Наведіть алгоритм розв'язання.

2. Які солвери використовуються для розв'язання жорстких систем ДР?

3. Які особливості програмної реалізації наведених вище моделей у MatLab?