Indecidibilità di PCP

Alex Della Schiava

Università degli Studi di Udine - Logica per l'Informatica

1 Dicembre 2021

Overview

Idea della dimostrazione

- La dimostrazione avviene sfruttando il concetto di **riduzione**.
- Si assuma per assurdo che un problema A sia *decidibile*
- Riducendo un problema indecidibile B ad un problema A si dimostra l'indecidibilità di A per contraddizione.
- Più specificatamente: Soluzione per $A \Rightarrow$ Soluzione per B
- Per dimostrare l'indecidibilità di PCP, tale metodo viene utilizzato due volte:

$$Acceptance < MPCP < PCP$$

Reminder: Cos'era PCP (Post Correspondence Problem)?

Definition (PCP)

- Alfabeto Σ
- Un insieme **finito** di tessere T della forma: $\begin{pmatrix} \Sigma^* \\ \Sigma^* \end{pmatrix}$,

  e.g. $T = \left\{ \begin{pmatrix} a\ b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ d\ a \end{pmatrix} \right\}$
- È possibile trovare una **sequenza finita** di tessere tale che le due stringhe date dalla concatenazione delle stringhe in alto e in basso delle tessere coincidano?

  e.g. $\left\{ \begin{pmatrix} \color{cyan}{d} \\ \color{orange}{d\ a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \color{cyan}{a\ b} \\ \color{orange}{b} \end{pmatrix} \right\}$
- Tale risultato è chiamato **corrispondenza**.
- $PCP = \{\langle T \rangle : \text{esiste una corrispondenza in } T\}$

Perché utilizzare MPCP?

- Si prova in seguito a ridurre direttamente *Acc* a PCP (senza la transizione per MPCP).
- Per fare ciò è necessario mappare un input del problema *Acc* in un input di PCP.
- Più dettagliatamente: Trovare un insieme di tessere T tale che se esiste una **corrispondenza** in T allora M **accetta** w.
- **Idea:** Data la codifica $\langle M, w \rangle$ si costruisca un insieme $T_{M,w}$ di tessere in maniera tale che descrivano tutte le possibili configurazioni tramite cui M accetta w.

Perché utilizzare MPCP?

- Supponendo quindi che la computazione $M(w)$ passi per le seguenti configurazioni: $C_1, C_2, \ldots, C_k$.
- Sarà possibile definire l'insieme di tessere:

$$T_{M,w} = \left\{ \begin{pmatrix} \# & \\ \# & C_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_i & \# \\ \# & C_{i+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_k & \# \\ \# & \end{pmatrix} \right\}$$

- Si può notare che l'unica **corrispondenza** possibile è:

$$\begin{array}{ccccccccc} \# & C_1 & \# & C_2 & \# & \ldots & \# & C_k & \# \\ \# & C_1 & \# & C_2 & \# & \ldots & \# & C_k & \# \end{array}$$

- Dove C_1 è la configurazione iniziale di M e C_k la configurazione con stato di accettazione yes.

- Problema: $T_{M,w}$ è effettivamente un insieme finito?
- **No**, per descrivere tutte le possibili configurazioni (a priori) di una MdT dovremmo tenere in considerazione delle infinite posizioni presenti sul suo infinito nastro.

Idea

Si definiscano l'insieme di tessere T in maniera tale da rappresentare **frammenti di configurazione**. In particolare, si definiscano i seguenti 7 tipi di tessere differenti.

Tipo 1

- Le tessere Tipo 1 rappresentano completamente la configurazione iniziale di M su input w.

$$\left(\frac{\#}{\# q_0 w_1 w_2 \ldots w_n \#} \right)$$

- dove $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ e q_0 stato iniziale di M

Perché utilizzare MPCP?

Tipo 2

- Simula ogni possibile transizione verso destra definita dalla funzione di transizione δ di M.
- Quindi, $\forall q, q' \in Q$ e $\forall a, b \in \Gamma$ tali che $\delta(q, a) = (q', b, \rightarrow)$: $(u\ qa\ v \xrightarrow{\delta} u\ bq'\ v)$: $\begin{pmatrix} q & a \\ b & q' \end{pmatrix}$

Tipo 3

- Analogo a Tipo 2 ma per transizioni verso sinistra.
- Quindi, $\forall q, q' \in Q$ e $\forall a, b, c \in \Gamma$ tali che $\delta(q, a) = (q', b, \leftarrow)$: $(u\ cqa\ v \xrightarrow{\delta} u\ q'cb\ v)$: $\begin{pmatrix} c & q & a \\ q' & c & b \end{pmatrix}$

(Con Γ alfabeto del nastro di M)

Perché utilizzare MPCP?

Tipo 4

- Caratteri non variati dalla transizione.
- $\forall a \in \Gamma$: $\binom{a}{a}$
- Le tessere Tipo 4 serviranno a specificare tutti i caratteri che dopo una transizione rimarranno invariati.

Tipo 5

- Separatori di configurazione. $\binom{\#}{\#}$ $\binom{\#}{\sqcup\#}$
- La seconda matrice Tipo 5 permette di generalizzare al caso in cui una configurazione della MdT M si espanda lungo il nastro.

Perché utilizzare MPCP?

Tipo 6

- Riportare le due stringhe in pari.
- $\forall a \in \Gamma$: $\binom{a\ \text{yes}}{\text{yes}} \binom{\text{yes}\ \ a}{\text{yes}}$
- Si noti come la stringa in basso "perda" una lettera ogni volta che una tessera Tipo 6 viene utilizzata.
- Una volta terminata la computazione, la stringa in alto presenta almeno $n+2$ lettere in meno $n = |w|$.
- Le tessere Tipo 6 permettono di sistemare tale deficit.

Perché utilizzare MPCP?

Tipo 7

- Conclusione della corrispondenza:
  $\begin{pmatrix} \text{yes} \ \# \ \# \\ \# \end{pmatrix}$
- Tipo 7 verrà utilizzata esattamente una singola volta: quando la situazione delle due stringhe sarà del tipo:
  $\begin{pmatrix} \# & \color{red}{\text{yes}} & \color{red}{\#} & \color{red}{\#} \\ \# & \text{yes} & \# & \color{red}{\#} \end{pmatrix}$

Perché utilizzare MPCP?

- T è ora un insieme **finito**. Più precisamente la sua cardinalità dipende dall'alfabeto del nastro Γ e dalla funzione di transizione di M: δ.
- Problema: è possibile utilizzare sole tessere Tipo 4 per ottenere una corrispondenza.

Example

La seguente sequenza di tessere è a tutti gli effetti una **corrispondenza**.

$$\binom{a}{a}\binom{b}{b}\binom{c}{c}\binom{d}{d}$$

MPCP

Definition (Modified PCP)

- Il problema di MPCP contiene una sola piccola modifica: viene fissata la tessera iniziale t.
- $MPCP = \{\langle T, t\rangle$:
  esiste una corrispondenza in T dove la tessera iniziale è $t\}$

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

$$\# \quad q_0 \quad 1 \quad 1 \quad \# \quad 1 \quad q_0 \quad 1 \quad \# \quad 1$$

$$\# \quad q_0 \quad 1 \quad 1 \quad \# \quad 1 \quad q_0 \quad 1 \quad \# \quad 1 \quad 1 \quad q_0 \quad \sqcup \quad \# \quad 1$$

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1					
#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1	1	q_0	$\sqcup$	#	1

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\texttt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\texttt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1					
#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1	1	q_0	$\sqcup$	#	1

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1					
#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1	1	q_0	$\sqcup$	#	1

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\texttt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\texttt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \# & q_0 & 1 & 1 & \# & 1 & q_0 & 1 & \# & 1 \\ \# & q_0 & 1 & 1 & \# & 1 & q_0 & 1 & \# & 1 & 1 & q_0 & \sqcup & \# & 1 \end{array}$$

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1					
#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1	1	q_0	$\sqcup$	#	1

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1					
#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1	1	q_0	$\sqcup$	#	1

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\texttt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\texttt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1					
#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1	1	q_0	$\sqcup$	#	1

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1					
#	q_0	1	1	#	1	q_0	1	#	1	1	q_0	$\sqcup$	#	1

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\texttt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\texttt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#1	1	q_0	$\sqcup$	#	1	yes	1	$\sqcup$	#				
#1	1	q_0	$\sqcup$	#	1	yes	1	$\sqcup$	#	1	yes	$\sqcup$	#

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#1	1	q_0	⊔	#	1	yes	1	⊔	#				
#1	1	q_0	⊔	#	1	yes	1	⊔	#	1	yes	⊔	#

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_0, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_0, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#1 1 q_0 ⊔ # 1 yes 1 ⊔ #

#1 1 q_0 ⊔ # 1 yes 1 ⊔ # 1 yes ⊔ #

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#1	1	q_0	$\sqcup$	#	1	yes	1	$\sqcup$	#					
#1	1	q_0	$\sqcup$	#	1	yes	1	$\sqcup$	#	1	yes	$\sqcup$	#	

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

$\#1 \quad 1 \quad q_0 \quad \sqcup \quad \# \quad 1 \quad \mathtt{yes} \quad 1 \quad \sqcup \quad \#$

$\#1 \quad 1 \quad q_0 \quad \sqcup \quad \# \quad 1 \quad \mathtt{yes} \quad 1 \quad \sqcup \quad \# \quad 1 \quad \mathtt{yes} \quad \sqcup \quad \#$

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\texttt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\texttt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#1	1	q_0	$\sqcup$	#	1	yes	1	$\sqcup$	#					
#1	1	q_0	$\sqcup$	#	1	yes	1	$\sqcup$	#	1	yes	$\sqcup$	#	

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

$\#1 \quad 1 \quad q_0 \quad \sqcup \quad \# \quad 1 \quad \mathtt{yes} \quad 1 \quad \sqcup \quad \#$

$\#1 \quad 1 \quad q_0 \quad \sqcup \quad \# \quad 1 \quad \mathtt{yes} \quad 1 \quad \sqcup \quad \# \quad 1 \quad \mathtt{yes} \quad \sqcup \quad \#$

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_0, 0) = (\texttt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_0, \sqcup) = (\texttt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

$\#1 \quad 1 \quad q_0 \quad \sqcup \quad \# \quad 1 \quad \texttt{yes} \quad 1 \quad \sqcup \quad \#$

$\#1 \quad 1 \quad q_0 \quad \sqcup \quad \# \quad 1 \quad \texttt{yes} \quad 1 \quad \sqcup \quad \# \quad 1 \quad \texttt{yes} \quad \sqcup \quad \#$

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_0, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_0, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	1	yes	⊔	#	1	yes	#	yes	#	#
#	1	yes	⊔	#	1	yes	#	yes	#	#

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\texttt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\texttt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	1	yes	$\sqcup$	#	1	yes	#	yes	#	#
#	1	yes	$\sqcup$	#	1	yes	#	yes	#	#

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_0, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_0, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	1	yes	⊔	#	1	yes	#	yes	#	#
#	1	yes	⊔	#	1	yes	#	yes	#	#

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_0, 0) = (\texttt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_0, \sqcup) = (\texttt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	1	yes	$\sqcup$	#	1	yes	#	yes	#	#
#	1	yes	$\sqcup$	#	1	yes	#	yes	#	#

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_0, 0) = (\texttt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_0, \sqcup) = (\texttt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	1	yes	⊔	#	1	yes	#	yes	#	#
#	1	yes	⊔	#	1	yes	#	yes	#	#

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_0, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_0, 1) = (q_0, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_0, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	1	yes	$\sqcup$	#	1	yes	#	yes	#	#
#	1	yes	$\sqcup$	#	1	yes	#	yes	#	#

Indecidibilità di MPCP

Example

- Si consideri M MdT che accetta tutte e sole le stringhe con soli simboli 1 su input $w = 11$.

$$\text{Dove } \delta = \begin{cases} \delta(q_o, 0) = (\mathtt{no}, 0, \rightarrow) \\ \delta(q_o, 1) = (q_o, 1, \rightarrow) \\ \delta(q_o, \sqcup) = (\mathtt{yes}, \sqcup, \leftarrow) \end{cases}$$

#	1	yes	$\sqcup$	#	1	yes	#	yes	#	#
#	1	yes	$\sqcup$	#	1	yes	#	yes	#	#

Indecidibilità di MPCP

Proof.

- ($\Rightarrow$) Se M accetta w allora è stato appena dimostrato che esiste una corrispondenza in $\langle T_{M,w}, t_{M,w} \rangle$.
- ($\Leftarrow$) Se $\langle T_{M,w}, t_{M,w} \rangle \in$ *MPCP* allora M accetta w.
  - Per costruzione, le uniche corrispondenze possibili in $\langle T_{M,w}, t_{M,w} \rangle$ corrispondono alla simulazione della computazione di M su w.
  - Fissare $t_{M,w}$ come prima tessera e definire le tessere di Tipo 2,3 in base a δ rende vera tale proposizione.
- Concludendo, se MPCP è decibibile allora *Acc* è decibibile.
- Contraddizione: **MPCP è indecidibile**.

□

Indecidibilità PCP

Theorem

PCP è indecidibile.

Proof (Riduzione da MPCP).

- **Idea:** Data un'istanza $\langle T, t \rangle$ si cerchi di decidere la sua appartenenza in MPCP decidendo $\langle T' \rangle$ in PCP.
- **Problema:** È necessario vincolare la tessera iniziale della corrispondenza in T'.

Indecidibilità PCP

Proof.

- Siano T e t della forma:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \right\}; t = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

Si noti che $(s, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots)$ sono parole, non simboli.
Si costruisca un'istanza T' con alfabeto $\Sigma \cup \{\heartsuit, \diamondsuit\}$ definendo le seguenti tessere:

- **Tipo 1:** Unica possibile tessera **iniziale**:

$$\begin{pmatrix} \heartsuit & s & \\ \heartsuit & t & \heartsuit \end{pmatrix}$$

Indecidibilità PCP

Proof.

- **Tipo 2:** Per ogni $i \in \{1, ..., n\}$:

$$\begin{pmatrix} \heartsuit & u_i \\ v_i & \heartsuit \end{pmatrix} \text{ con anche } \begin{pmatrix} \heartsuit & s \\ t & \heartsuit \end{pmatrix}$$

  Dove $\heartsuit u_i = \heartsuit u_{i_1} \heartsuit u_{i_2} \dots \heartsuit u_{i_m}$.

- **Tipo 3:** Unica possibile tessera **finale**:

$$\begin{pmatrix} \heartsuit & \diamondsuit \\ & \diamondsuit \end{pmatrix}$$

Proof.

($\Rightarrow$) Data una corrispondenza $\begin{pmatrix} s & u_i & \dots & u_k \\ t & v_i & \dots & v_k \end{pmatrix}$ per $\langle T, t \rangle$

È possibile costruire una corrispondenza per $\langle T' \rangle$

$$\begin{pmatrix} \heartsuit & s & \heartsuit & u_i & \heartsuit & \dots & \heartsuit & u_k & \heartsuit & \diamondsuit \\ \heartsuit & t & \heartsuit & v_i & \heartsuit & \dots & \heartsuit & v_k & \heartsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}$$

($\Leftarrow$) Data una corrispondenza per $\langle T' \rangle$ è possibile ottenere una corrispondenza per $\langle T, t \rangle$.

- Si rimuovano i simboli speciali $\heartsuit$ e $\diamondsuit$.

Concludendo, se PCP è decidibile allora MPCP è decidibile. MPCP è stato provato essere indecidibile, pertanto **PCP è indecidibile**. $\square$

References

Nancy Lynch (2010)
Automata, Computability, and Complexity Or, Great Ideas in Theoretical Computer Science
Class 8.

Michael Sipser (1997)
Introduction To The Theory Of Computation
Capitoli 4,5.

Fine

Grazie dell'attenzione