РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

***дисциплина*: Научное программирование**

Лабораторная работа №5

Выполнил: Маслов Александр

Группа: НФИмд-02-20

С/б: 1032202156

Москва

2020

Цель работы:

Рассмотреть с помощью Octave подгонку полиномиальной кривой, решить проблему подгонки полинома к множеству точек и рассмотреть такие матричные преобразования, как:

- вращение
- отражение
- дилатация

Ход работы:

Подгонка полиномиальной кривой

В статистике часто рассматривается проблема подгонки прямой линии к набору данных. Решим общую проблему подгонки полинома к множеству точек. Пусть нам нужно найти параболу по методу наименьших квадратов для набора точек, заданных матрицей:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 4 \\ 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

В матрице заданы значения x в столбце 1 и значения y в столбце 2. Введём матрицу данных и извлечём вектора x и y:

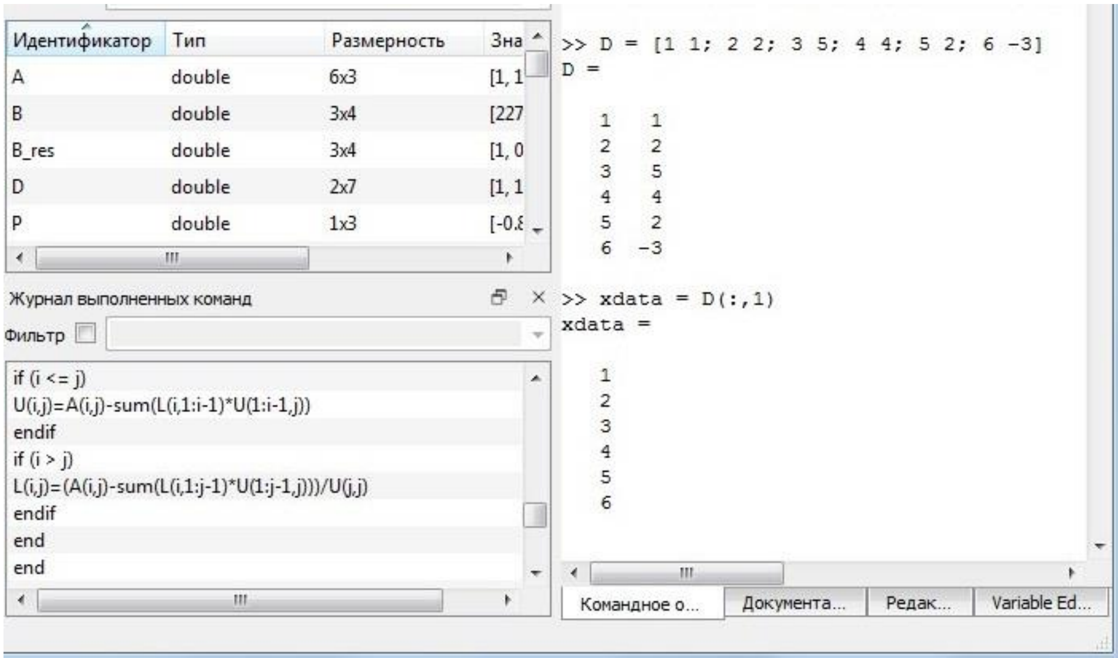

Рисунок 1. Матрица D и вектор x

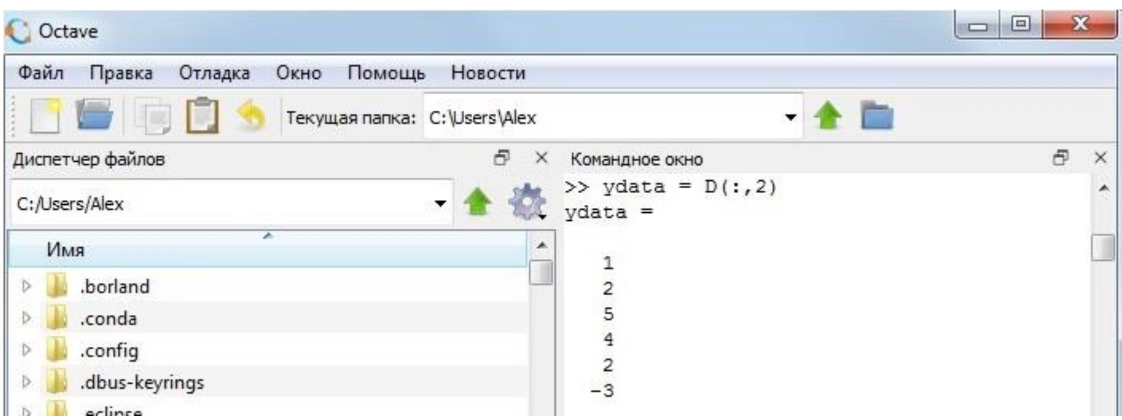

Рисунок 2. Вектор y

Нарисуем точки на графике:

Рисунок 3. Команда построения графика

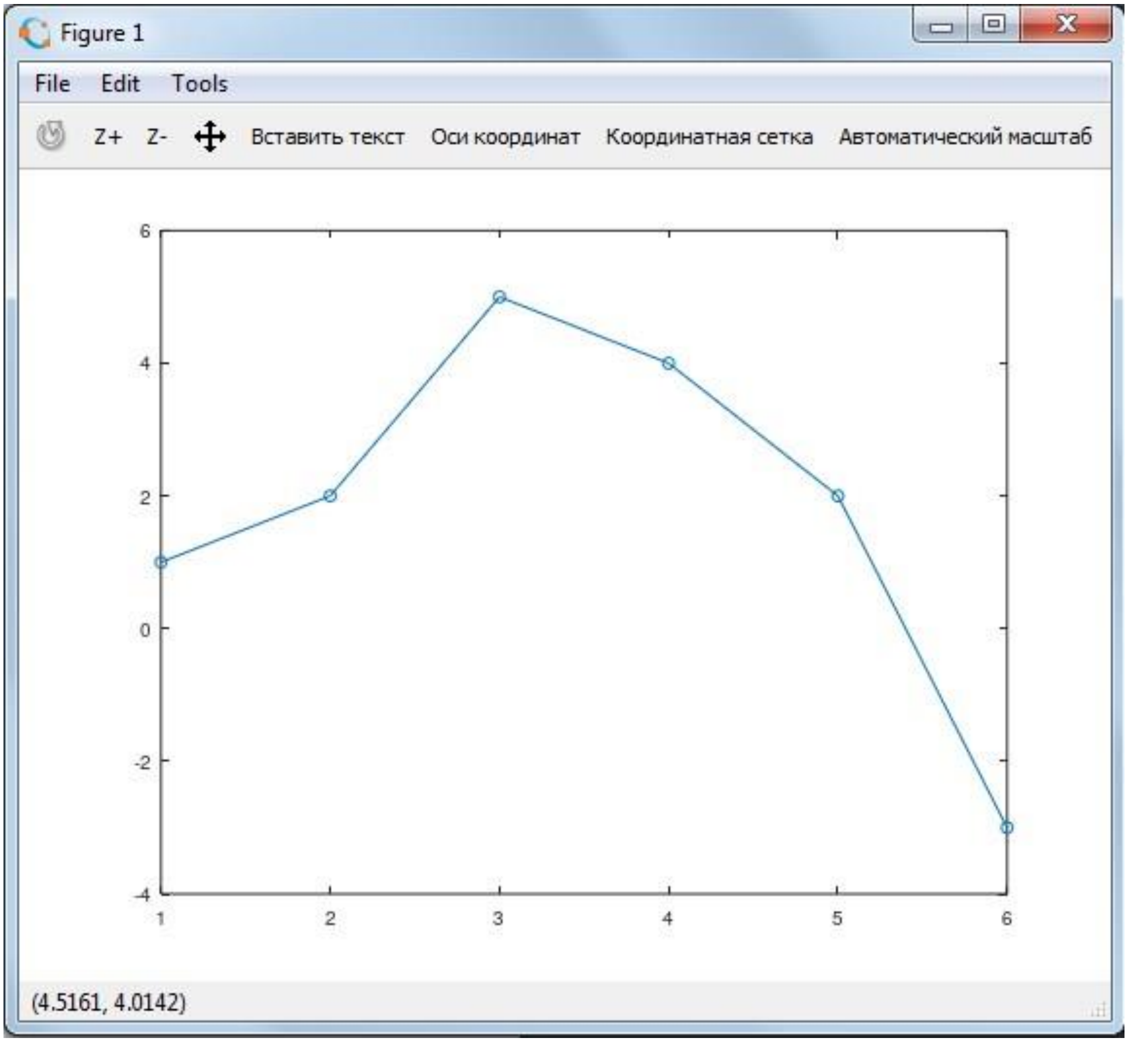

Рисунок 4. График 1

Построим уравнение вида $y = ax^2 + bx + c$. Подставляя данные, получаем следующую систему линейных уравнений.

$

$

Обратите внимание на форму матрицы коэффициентов A. Третий столбец – все единицы, второй столбец – значения x, а первый столбец – квадрат значений x. Правый вектор – это значения y. Есть несколько способов построить матрицу коэффициентов в Octave. Один из подходов состоит в том, чтобы использовать команду ones для создания матрицы единиц соответствующего размера, а затем перезаписать первый и второй столбцы необходимыми данными.

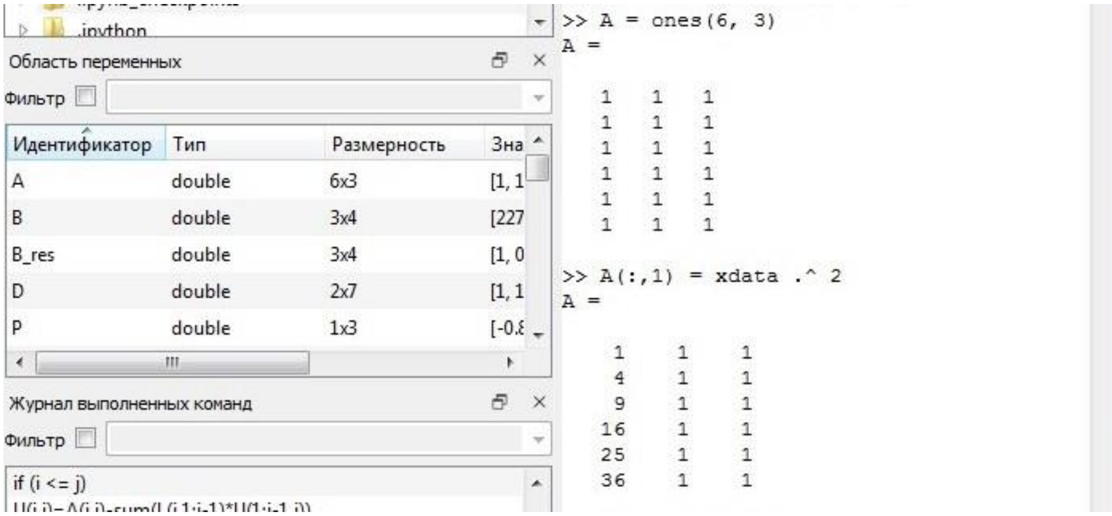

Рисунок 5. Формируем матрицу A

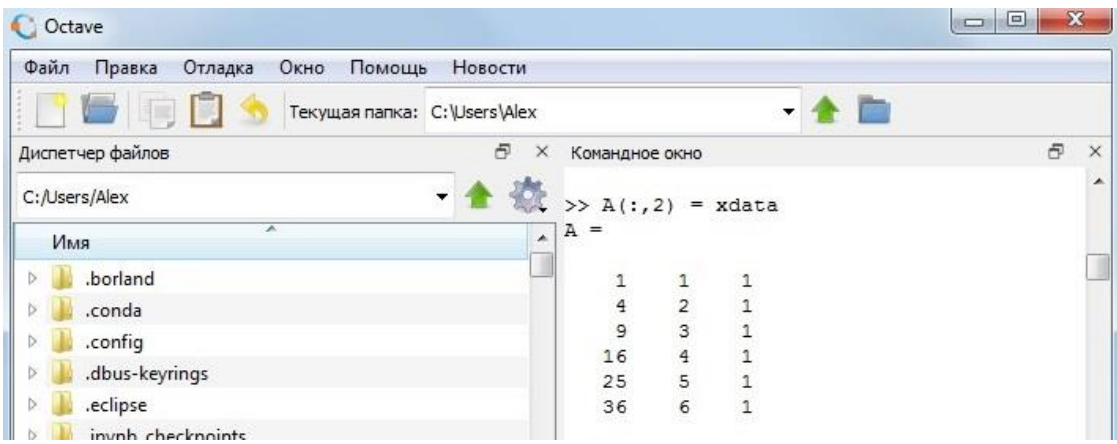

Рисунок 6. Полученная матрица A

Решение по методу наименьших квадратов получается из решения уравнения $ A^T Ab = A^T y$, где b - вектор коэффициентов полинома.

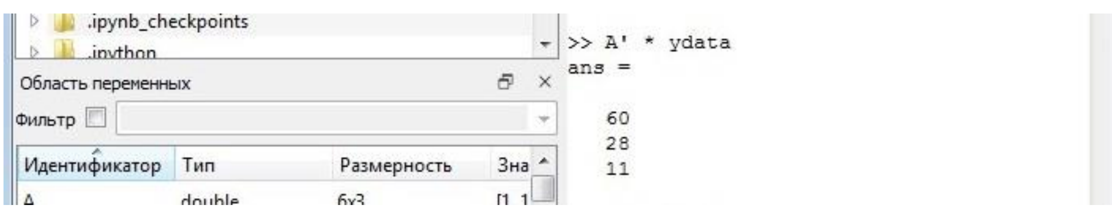

Рисунок 7. Транспонированная матрица A, умноженная на вектор y

Решим задачу методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} 2275 & 441 & 91 & 60 \\ 441 & 91 & 21 & 28 \\ 91 & 21 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

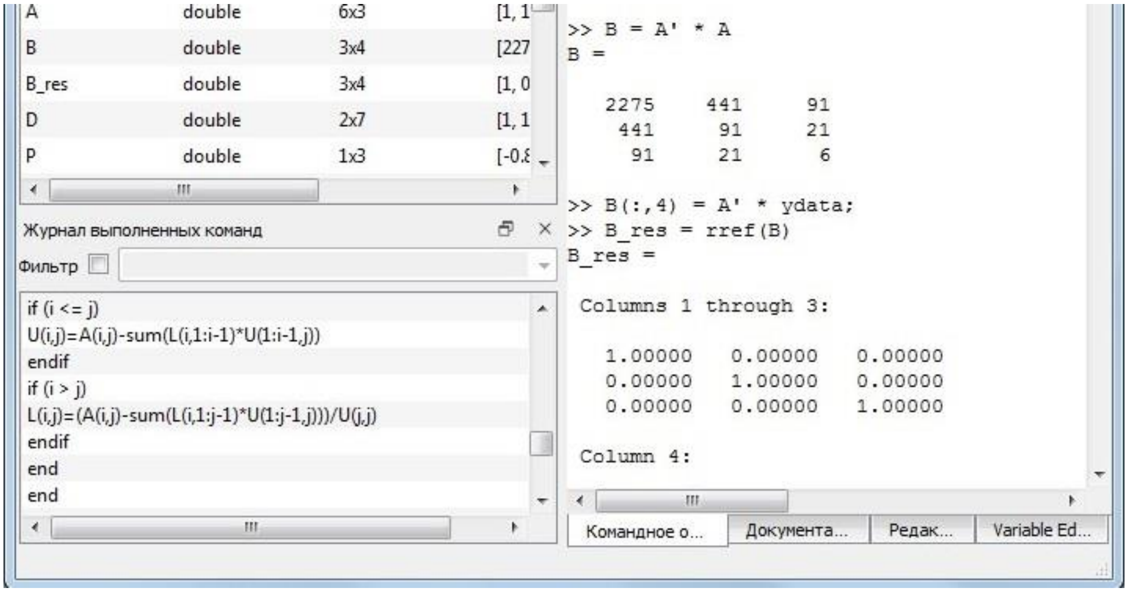

Рисунок 8. Полученная матрица B

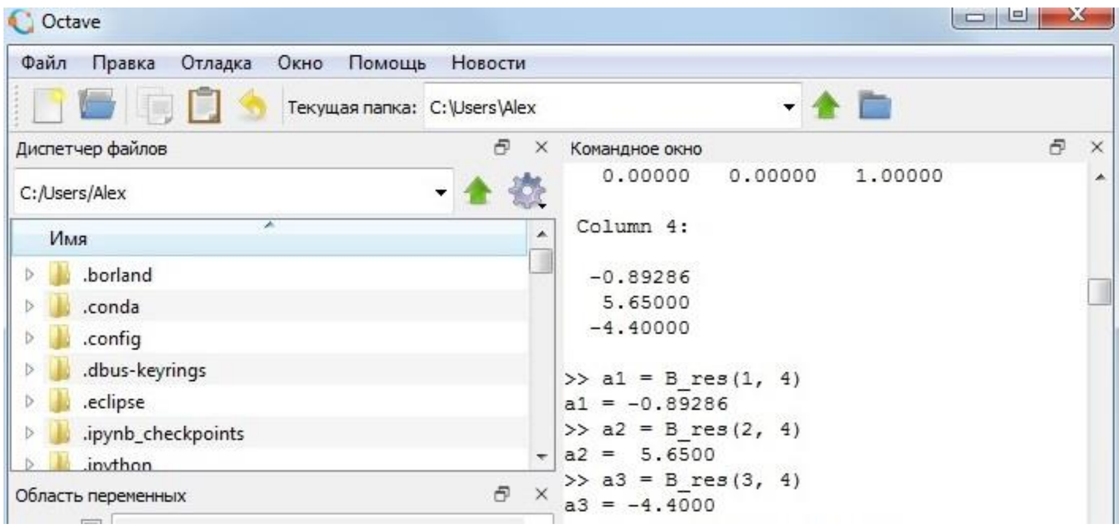

Рисунок 9. Коэффициенты уравнения

Таким образом, искомое квадратное уравнение имеет вид

$$y = -0.89286x^2 + 5.65x - 4.4$$

Построим соответствующий график параболы.

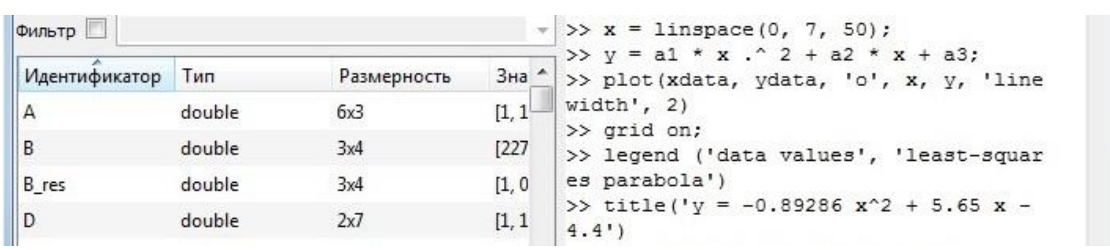

Рисунок 10. Построение графика параболы

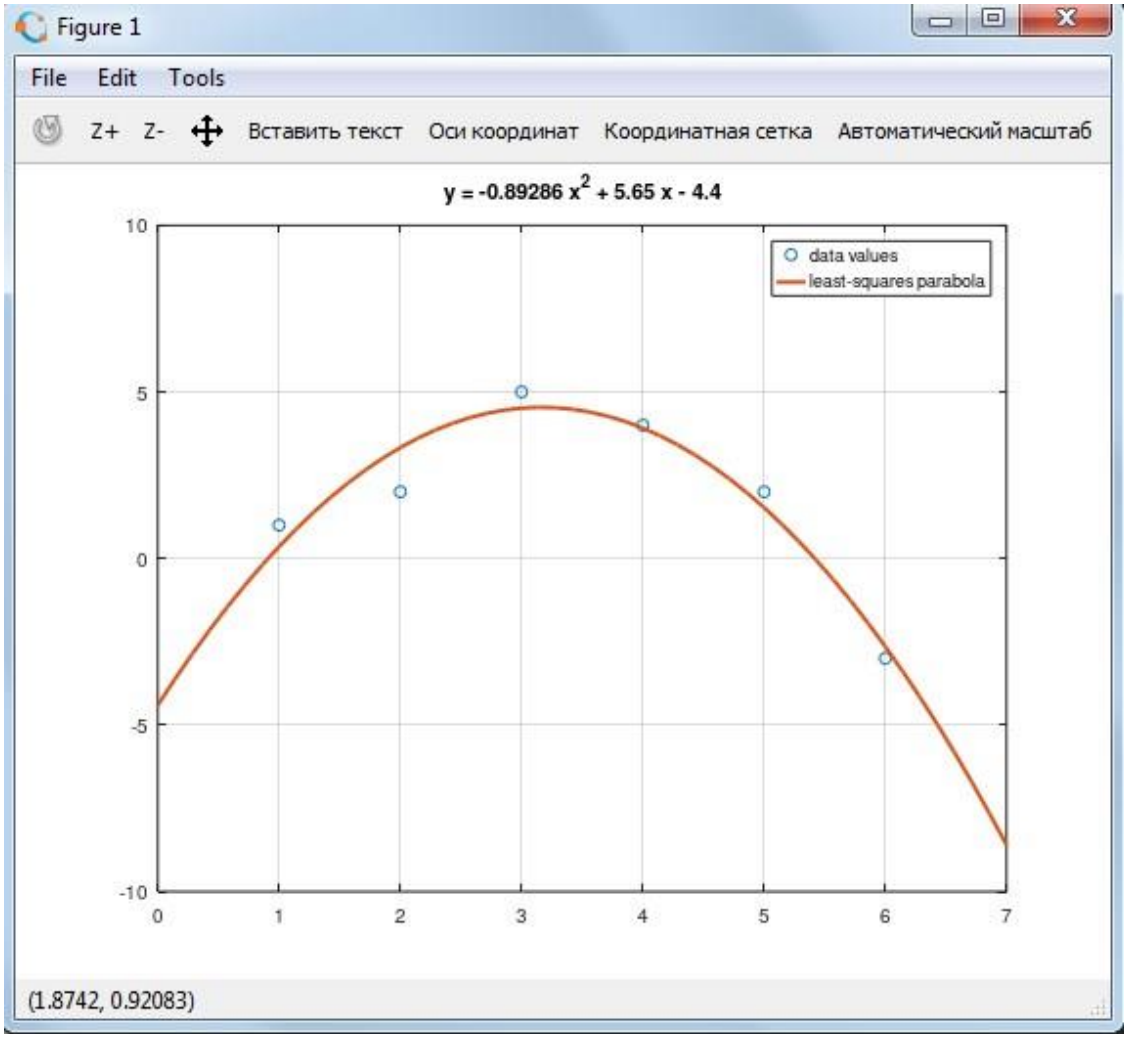

Рисунок 11. График параболы

Процесс подгонки может быть автоматизирован встроенными функциями Octave. Для этого мы можем использовать встроенную функцию для подгонки полинома polyfit. Синтаксис: polyfit (x, y, order), где order – это степень полинома. Значения полинома P в точках, задаваемых вектором-строкой x можно получить с помощью функции polyval. Синтаксиса: polyval (P, x). Получим подгоночный полином.

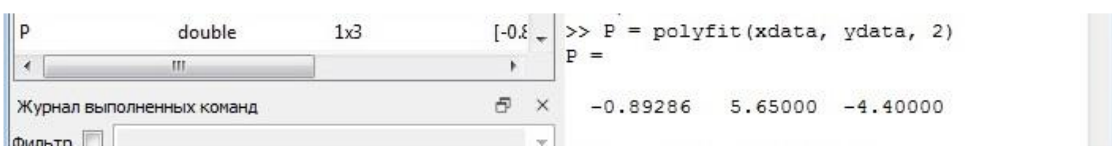

Рисунок 12. Подгоночный полином

Рассчитаем значения полинома в точках.

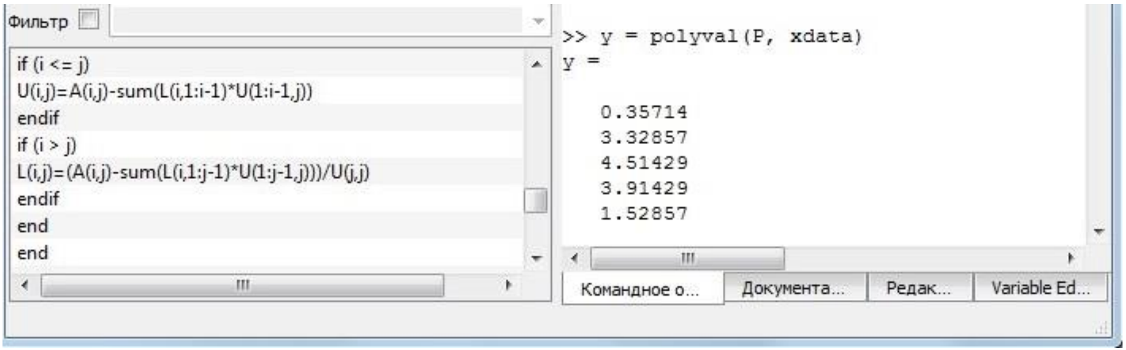

Рисунок 13. Значения полинома в точках

Построим исходные и подгоночные данные.

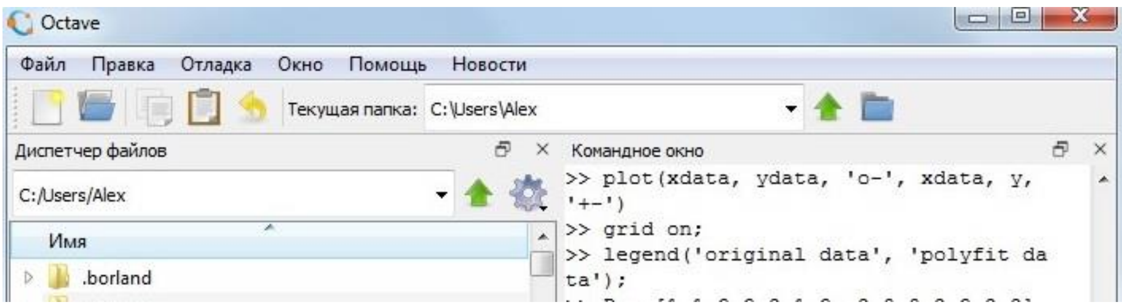

Рисунок 14. Исходные и подгоночные данные

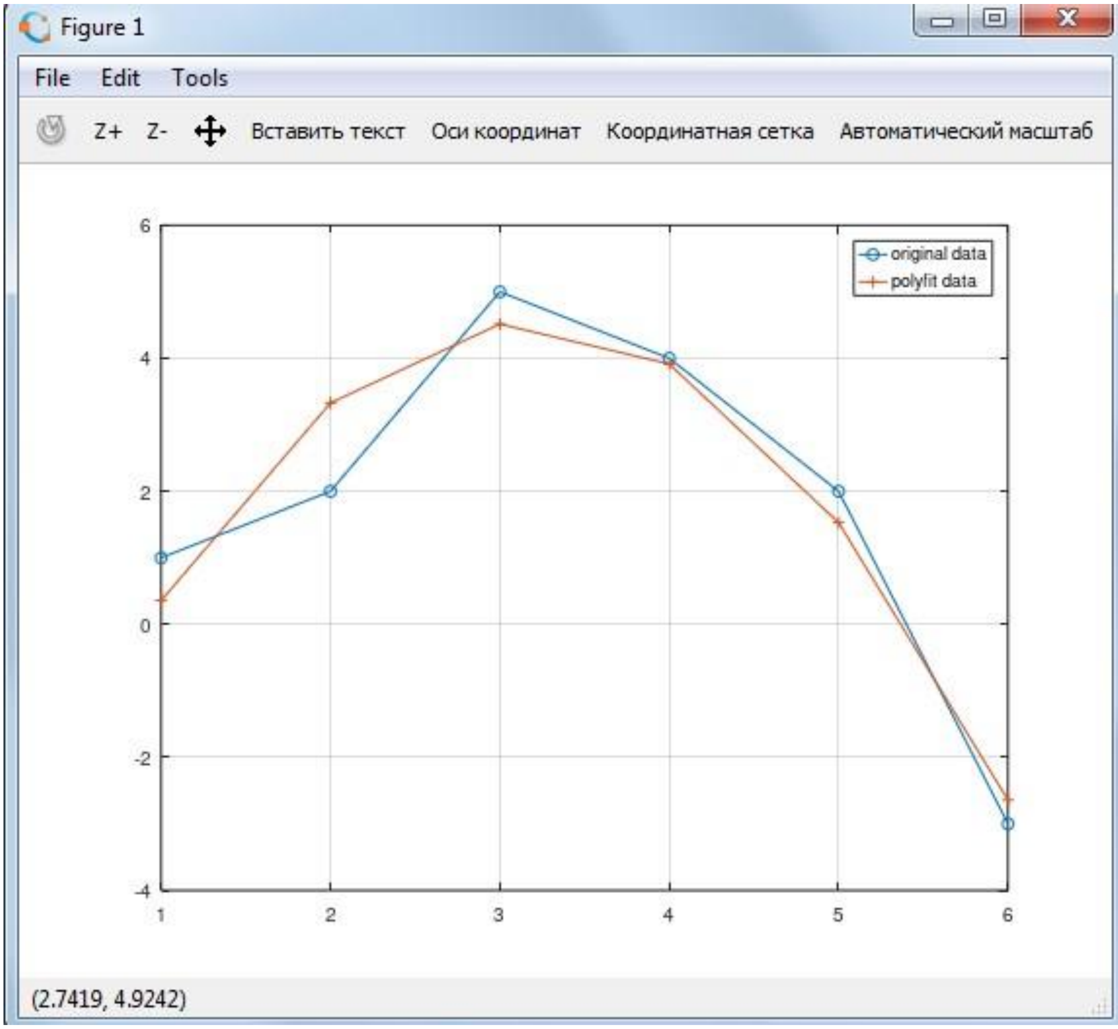

Рисунок 15. График исходных и подгоночных данных

Матричные преобразования

Матрицы и матричные преобразования играют ключевую роль в компьютерной графике. Существует несколько способов представления изображения в виде матрицы. Подход, который мы здесь используем, состоит в том, чтобы перечислить ряд вершин, которые соединены последовательно, чтобы получить ребра простого графа. Мы записываем это как матрицу $ 2 n$, где каждый столбец представляет точку на рисунке. В качестве простого примера, давайте попробуем закодировать граф-домик. Есть много способов закодировать это как матрицу. Эффективный метод состоит в том, чтобы выбрать путь, который проходит по каждому ребру ровно один раз (цикл Эйлера).

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

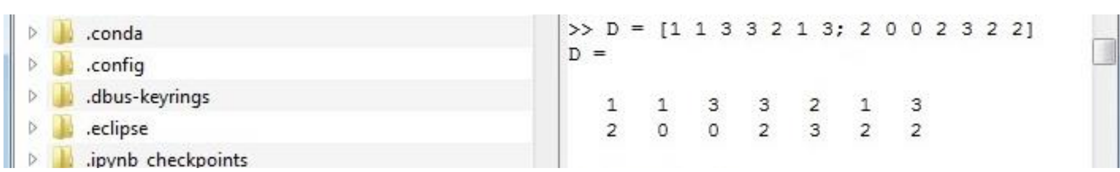

Рисунок 16. Матрица D

Нарисуем этот граф

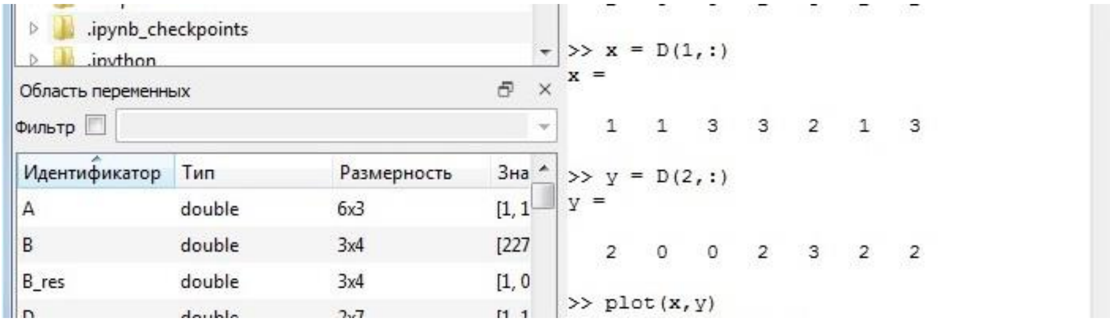

Рисунок 17. Построение графа

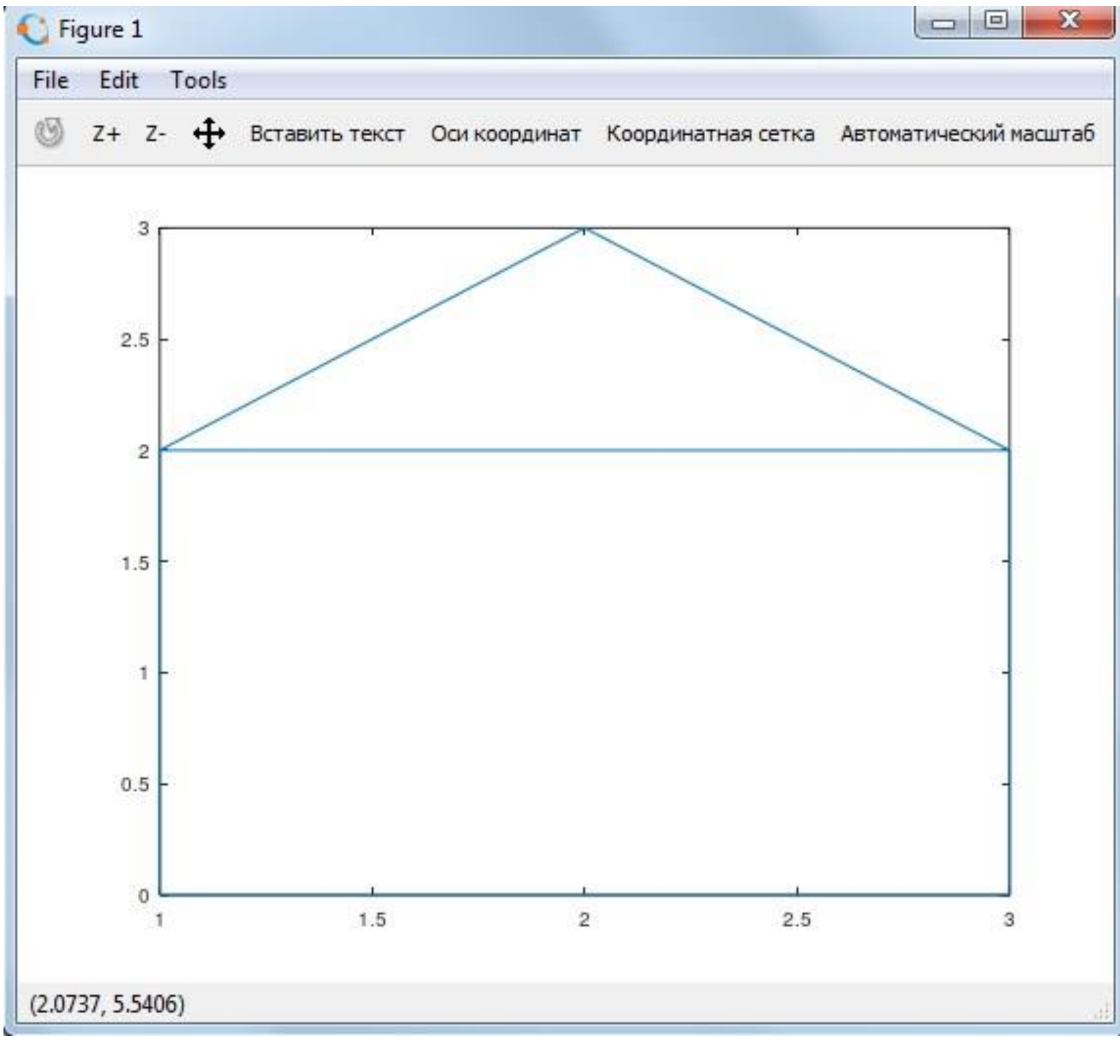

Рисунок 18. Граф

Вращение

Рассмотрим различные способы преобразования изображения. Вращения могут быть получены с использованием умножения на специальную матрицу. Вращение точки (x, y) относительно начала координат определяется как

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

θ - угол поворота (измеренный против часовой стрелки). Теперь, чтобы произвести повороты матрицы данных D, нам нужно вычислить произведение матриц RD. Повернём граф дома на 90° и 225° . Вначале переведём угол в радианы.

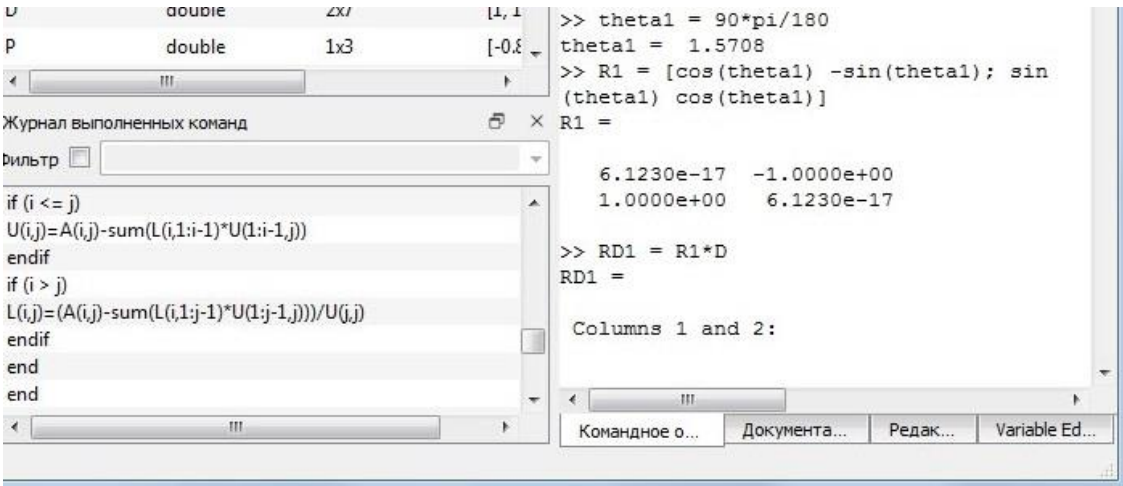

Рисунок 19. Перевод градусов в радианы и начало алгоритма поворота графа на 90°

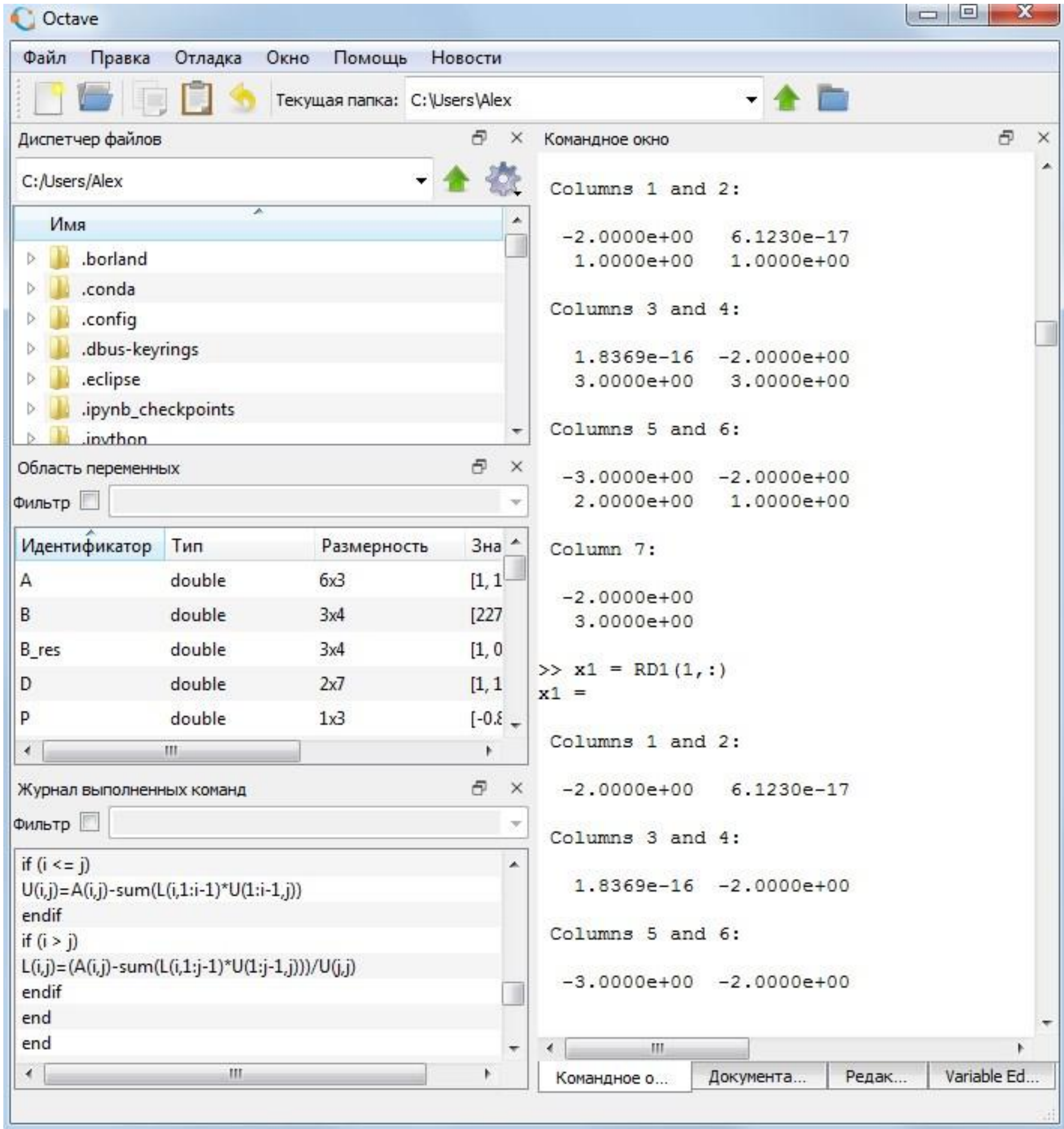

Рисунок 20. Алгоритм поворота графа на 90°

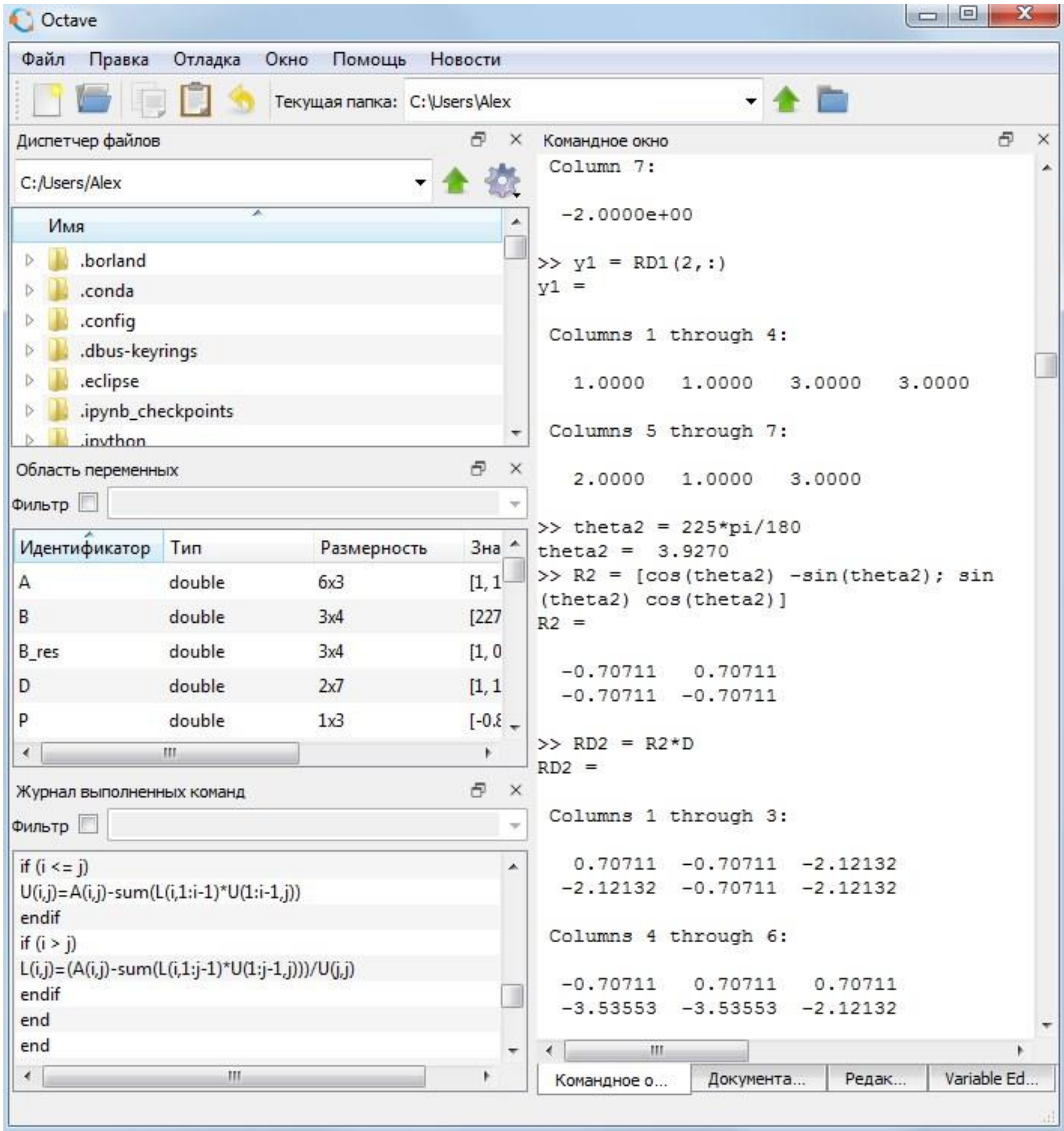

Рисунок 21. Перевод градусов в радианы и начало алгоритма поворота графа на 225°

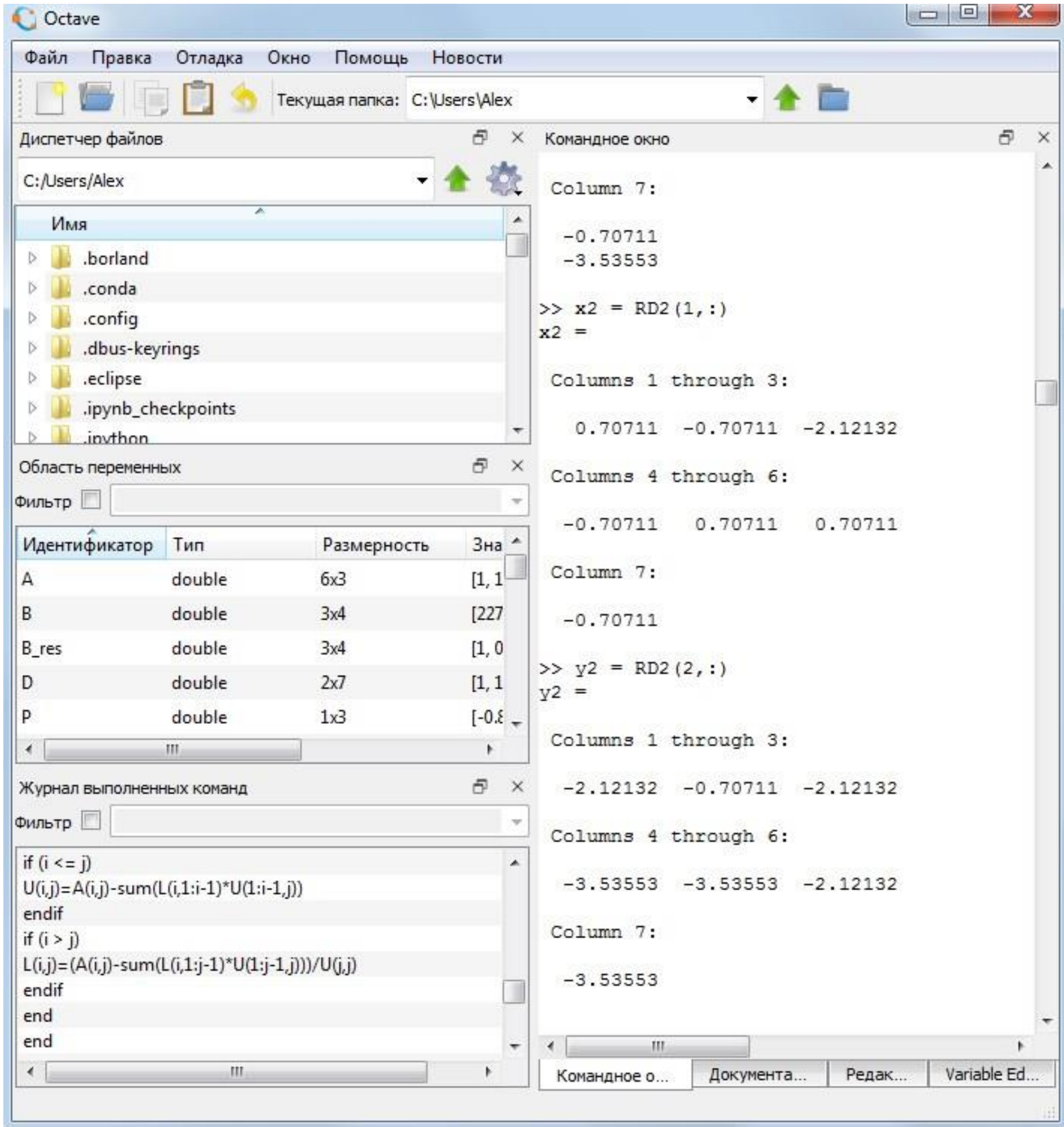

Рисунок 22. Алгоритм поворота графа на 225°

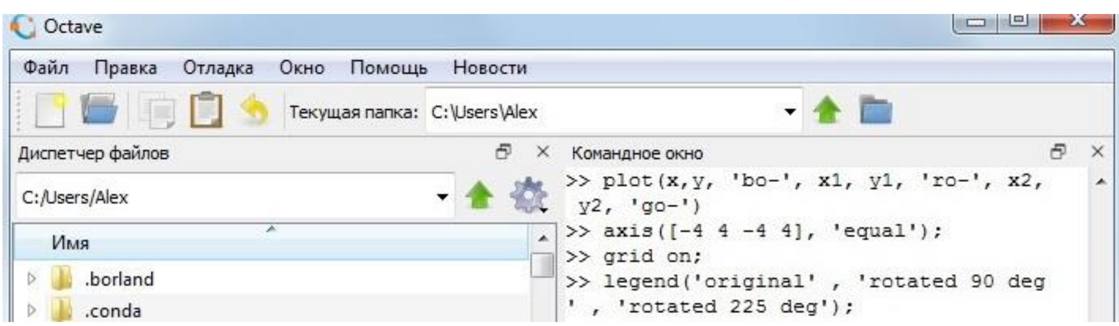

Рисунок 23. Построение графа

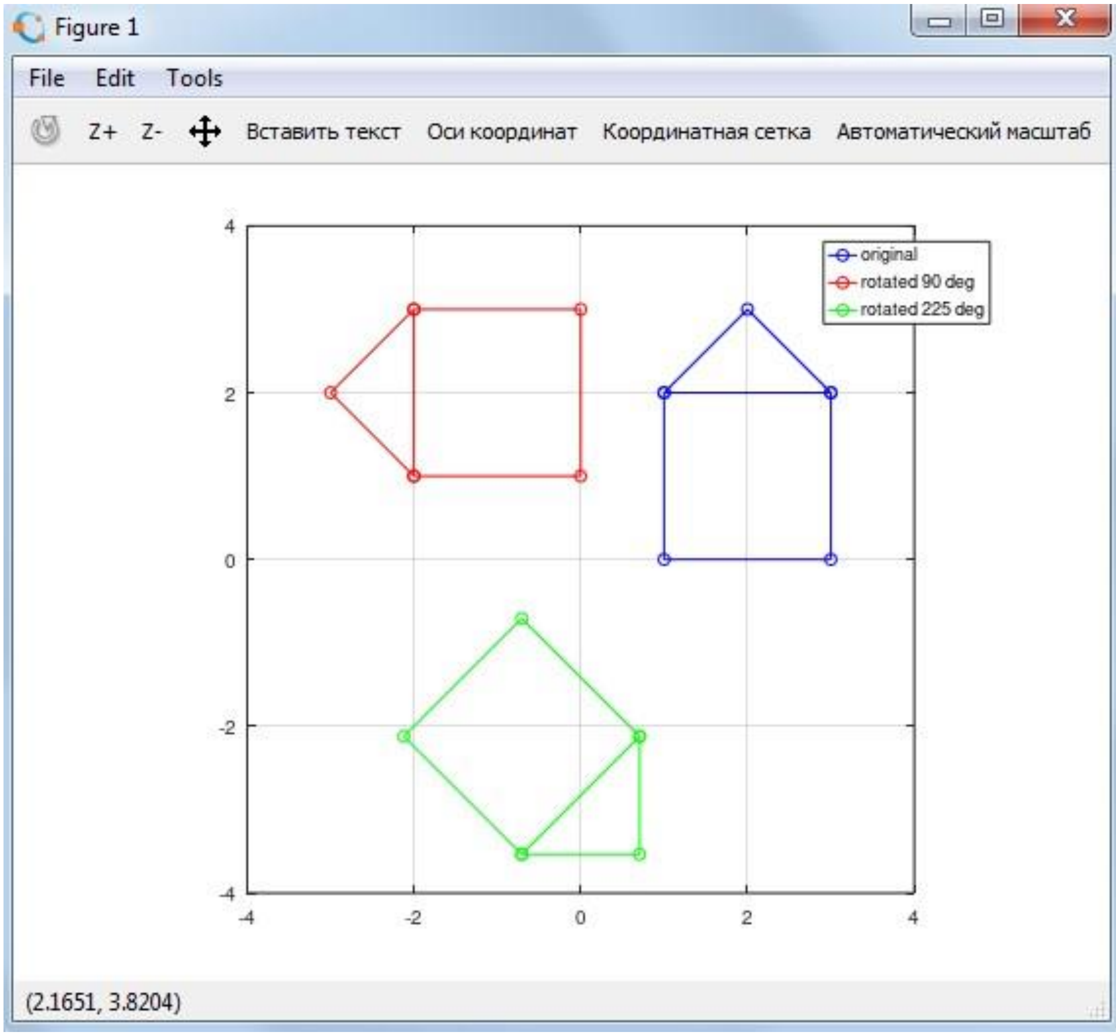

Рисунок 24. Граф

Отражение

Если l – прямая, проходящая через начало координат, то отражение точки (x, y) относительно прямой l определяется как

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix},$$

θ - угол между прямой l и осью абсцисс (измеренный против часовой стрелки). Отразим граф дома относительно прямой $y = x$. Зададим матрицу отражения.

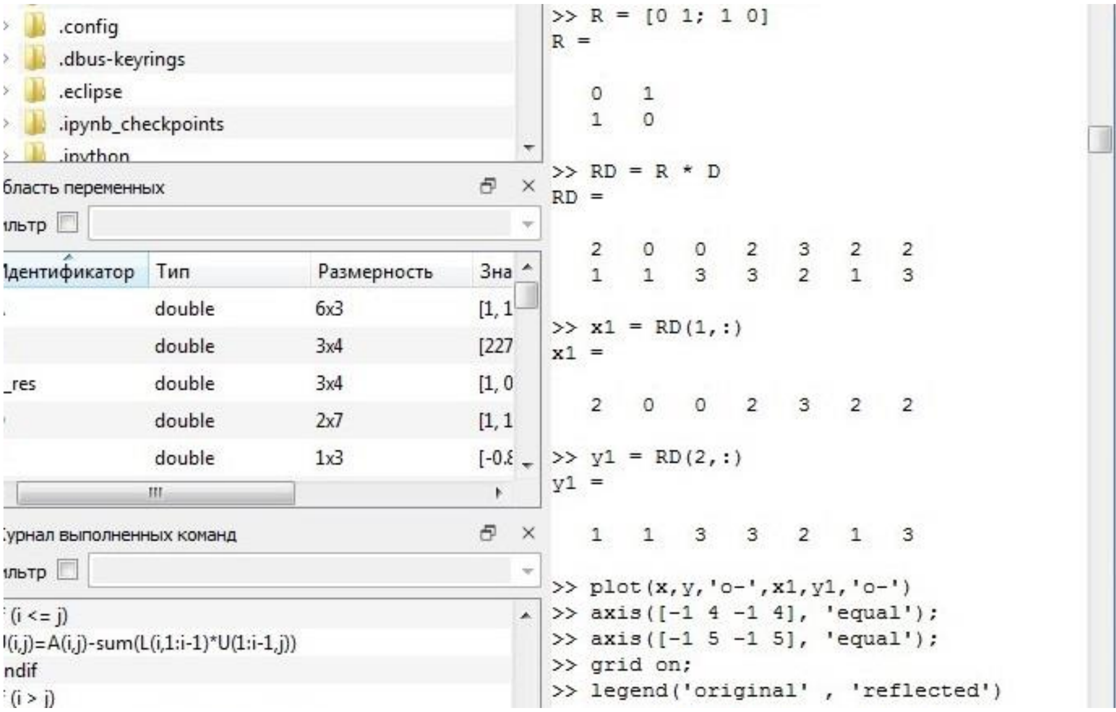

Рисунок 25. Алгоритм отражения и построение графа

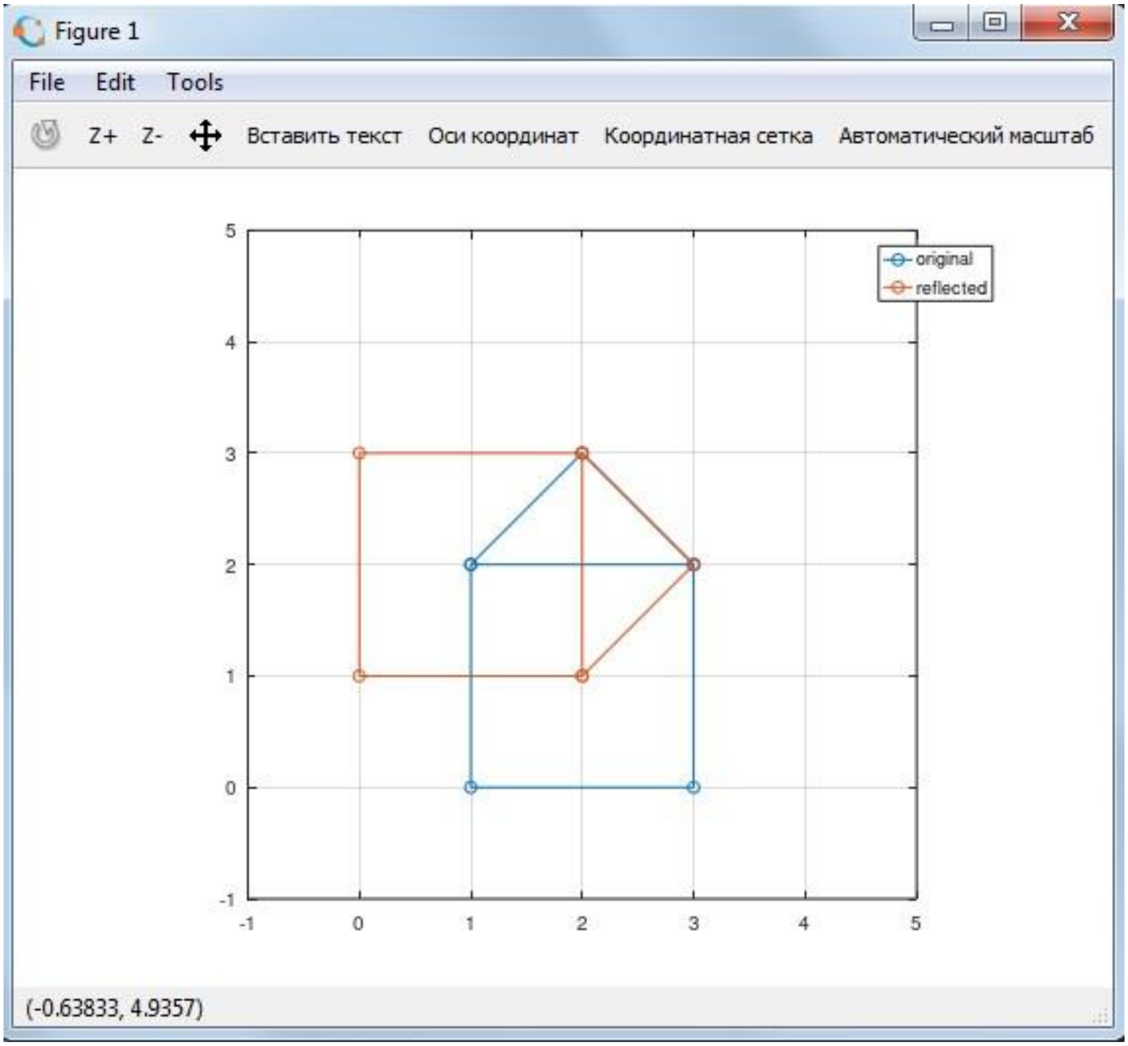

Рисунок 26. Граф

Дилатация

Дилатация (то есть расширение или сжатие) также может быть выполнено путём умножения матриц. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

Тогда матричное произведение TD будет преобразованием дилатации D с коэффициентом k. Увеличим граф дома в 2 раза.

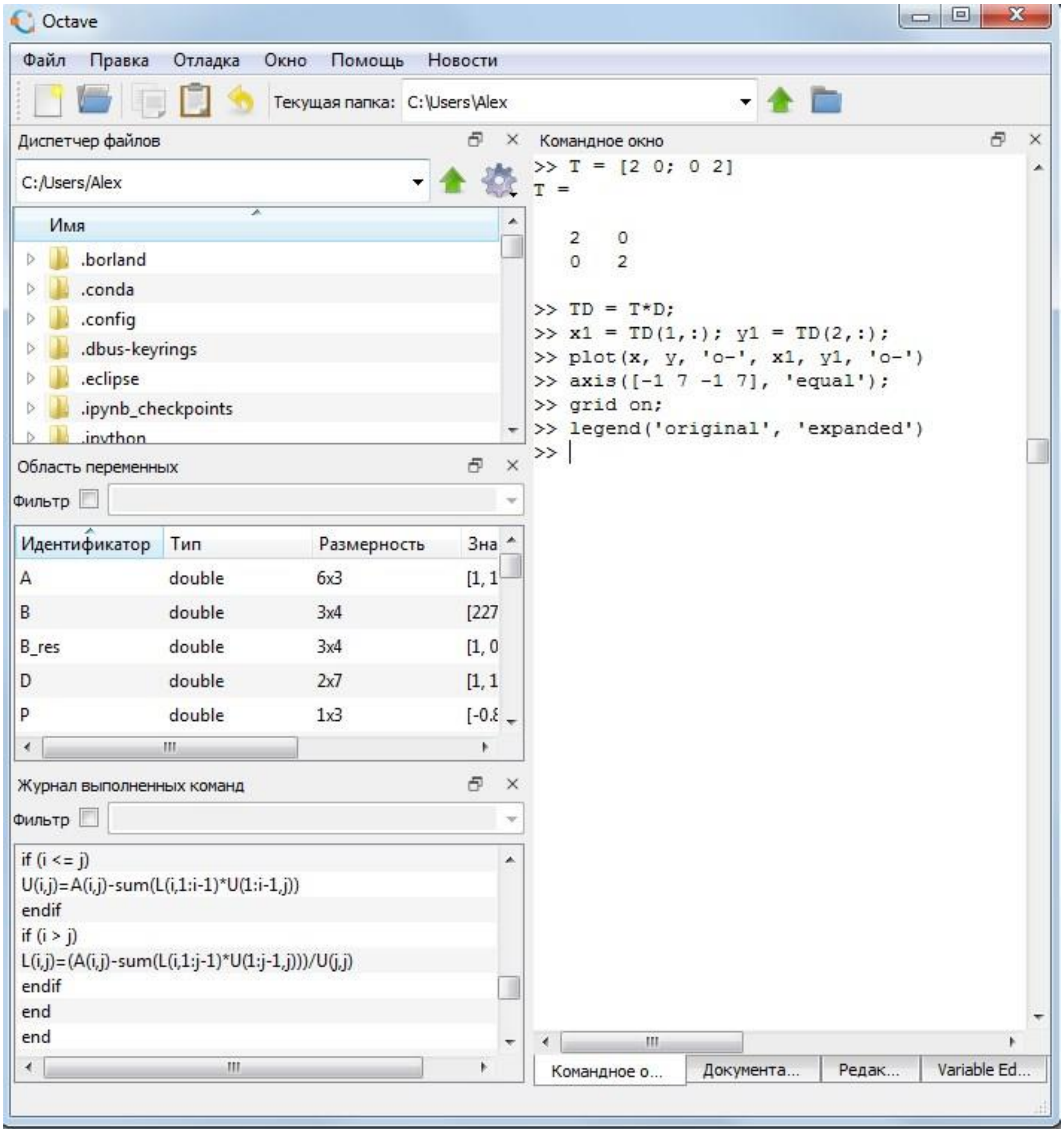

Рисунок 27. Алгоритм дилатации и построение графа

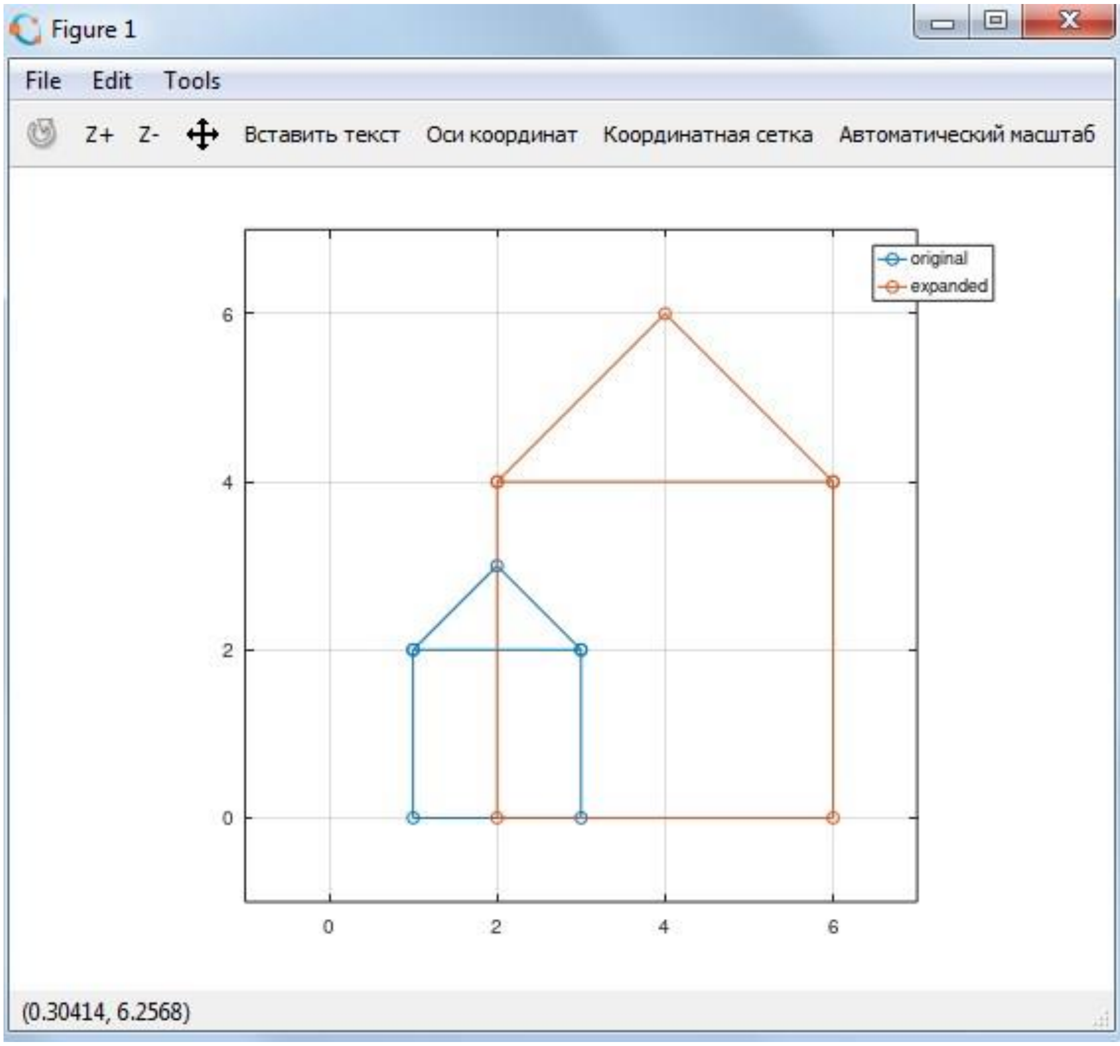

Рисунок 28. Граф

Вывод: в процессе выполнения лабораторной работы с помощью Octave мы решили общую проблему подгонки полинома к множеству точек, а также рассмотрели такие матричные преобразования, как:

- вращение
- отражение
- дилатация