[redacted] Более сложные иррациональные неравенства

Равносильные преобразования иррациональных неравенств обычно связаны с возведением (иногда неоднократным) обеих частей неравенства в ту или иную степень, для того чтобы избавиться от знака радикала, т. е. рационализировать неравенство.

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-1} \geqslant \sqrt[3]{x^2+5x+3}$. $\uparrow^3$

Решение. Выполнив возведение обеих частей неравенства в куб, получим равносильное неравенство $x-1 \geqslant x^2+5x+3$, откуда $x^2 + 4x+4 \leqslant 0$, или $(x+2)^2 \leqslant 0$. Последнее неравенство выполняется только при $x=-2$.

Ответ: $\{-2\}$.

Перейдём теперь к базовым неравенствам, содержащим переменную под знаком корня чётной степени. Возведение обеих частей таких неравенств в чётную степень является равносильным преобразованием при условии неотрицательности обеих частей неравенства и условии принадлежности переменной области допустимых значений

$$\sqrt[2n]{f(x)} \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < (g(x))^{2n}, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} f(x) \geqslant (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases}\right.$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ldots \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0,\\ g(x) < 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq (g(x))^{2n},\\ g(x) \geqslant 0,\end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0,\\ g(x) < 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\underbrace{\sqrt[2n]{f(x)}}_{\geqslant 0} \leqslant \underbrace{\sqrt[2n]{g(x)}}_{\geqslant 0} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x),\\ f(x) \geqslant 0;\end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x),\\ f(x) \geqslant 0.\end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x)\\ g(x) \geqslant 0\end{cases}$$

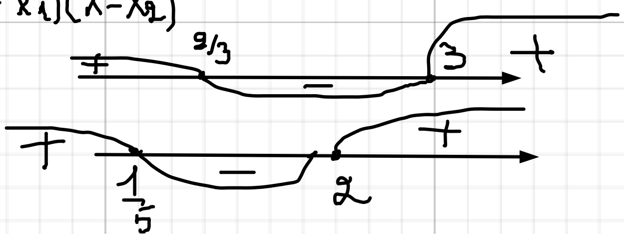
Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{2x^2 - x - 1} \geqslant \sqrt{5x^2 - 11x + 2}$.

Решение: $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geqslant 5x^2 - 11x + 2 \\ 5x^2 - 11x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 \leq 0 \\ 5x^2 - 11x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$

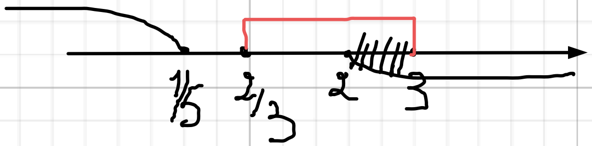
$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 4}{3} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ 2/3 \end{array}\right.$ и $x_{3,4} = \dfrac{11 \pm 9}{10} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{5} \end{array}\right.$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$\begin{cases} 3(x-3)(x-\frac{2}{3}) \leq 0 \\ 5(x-2)(x-\frac{1}{5}) \geqslant 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} x \in [\frac{2}{3}; 3] \\ x \in (-\infty; \frac{1}{5}] \cup [2; +\infty) \end{cases}$$



Ответ: $x \in [2;3]$.

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{h(x)} - \sqrt{g(x)} \qquad \left(\underline{h(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \sqrt{h(x)} \geq \sqrt{g(x)}} \; ! \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}_{\geq 0} > \underbrace{\sqrt{h(x)}}_{\geq 0} \quad \uparrow^2 \iff \begin{cases} f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} > h(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \underline{2\sqrt{f(x)g(x)} > h(x) - f(x) - g(x)} \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$$

Пример 3. Решите неравенство $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}<\sqrt{2x-1}$.

Решение: $\sqrt{x+3} < \sqrt{x} + \sqrt{2x-1} \quad \uparrow^2$

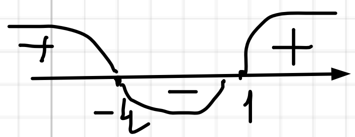
$$\begin{cases} x+3 < x+2x-1 + 2\sqrt{x(2x-1)} \\ x+3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2\sqrt{x(2x-1)} > 4-2x \\ x \geq -3 \\ \ldots \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x(2x-1)} > 2-x \\ x \geq \frac{1}{4} \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-x \geqslant 0 \\ 2x^2 - x > (2-x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2-x < 0 \\ x \geqslant 1/2 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 2 \\ 2x^2 - x > 4 - 4x + x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2 \\ x \geqslant 1/2 \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases} \\ x > 2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 2 \\ (x-1)(x+4) > 0 \end{cases} \\ x > 2 \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty) \end{cases} \\ x > 2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -4) \cup (1; 2] \\ x > 2 \end{array}\right. \iff$$

$$x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$$ с учетом ОДЗ $x \geqslant 1/2$

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $\sqrt{2x^2+9x+4} - 1 \geqslant \sqrt{2x^2-3x+1}$.

Нце:

$$\sqrt{2x^2+9x+4} \geq 1+\sqrt{2x^2-3x+1}$$

$$\underbrace{\sqrt{2x^2-3x+1}+1}_{>0} \leq \underbrace{\sqrt{2x^2+9x+4}}_{\geq 0} \quad \uparrow^2$$

$$\begin{cases} \cancel{2x^2}-3x+1+1+2\sqrt{2x^2-3x+1} \leq \cancel{2x^2}+9x+4 \\ 2x^2-3x+1\geq 0 \\ 2x^2+9x+4\geq 0 \end{cases} \iff$$

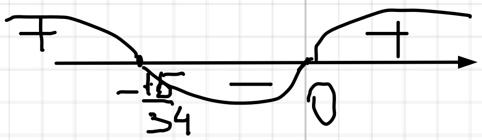
$$\begin{cases} 2\sqrt{2x^2-3x+1} \leq 12x+2 \\ 2x^2-3x+1\geq 0 \\ 2x^2+9x+4\geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{2x^2-3x+1} \leq 6x+1 \\ 2x^2-3x+1\geq 0 \\ 2x^2+9x+4\geq 0 \end{cases}$$

$a>b$

$b<a$

(1) $\begin{cases} 6x+1\geq 0 \\ 2x^2-3x+1 \leq 36x^2+12x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq -1/6 \\ 34x^2+15x\geq 0 \end{cases} \iff$

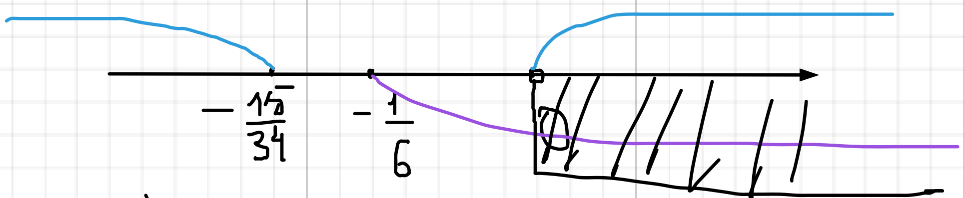
$$\iff \begin{cases} 34x\left(x+\frac{15}{34}\right)\geq 0 \\ x\geq -1/6 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x\in\left(-\infty; -\frac{15}{34}\right]\cup[0;+\infty) \\ x\in\left[-\frac{1}{6};+\infty\right) \end{cases}$$

$$-\frac{15}{34}-\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2\cdot 3}-\frac{15}{2\cdot 17} = \frac{17-45}{2\cdot 3\cdot 17}<0$$

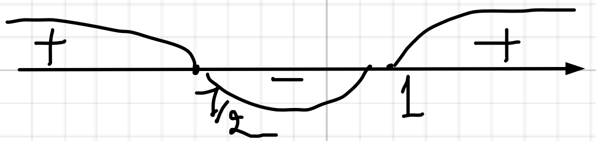
$$-\frac{1}{6} > -\frac{15}{34}$$



$\hookrightarrow x\in[0;+\infty)$

(2) $2x^2-3x+1\geq 0$ $\qquad x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{4}=\left[\begin{array}{l}1\\ \frac{1}{2}\end{array}\right.$

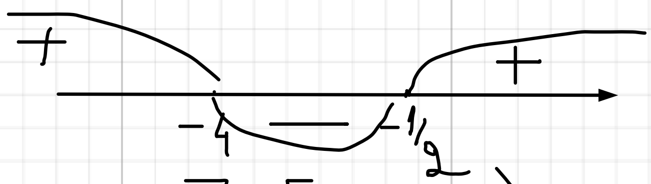
$2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq 0$



$x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$

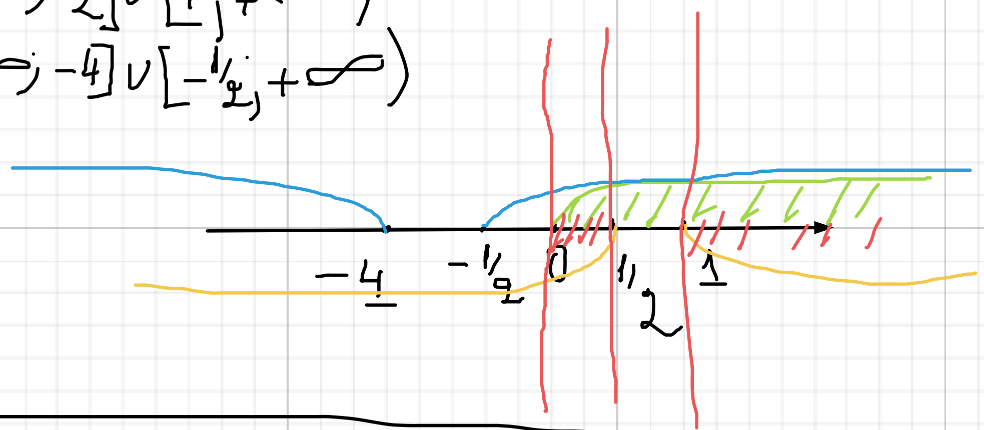
(3) $2x^2+9x+4\geq 0$, $\qquad x_{3,4}=\frac{-9\pm 7}{4}=\left[\begin{array}{l}-4\\ -\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$2(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)\geq 0$



$x\in(-\infty;-4]\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$

$$\begin{cases} x\in[0;+\infty)\\ x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)\\ x\in(-\infty;-4]\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)\end{cases}$$



$\boxed{\text{Ответ: } x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty).}$

Обратим внимание на то, что для решения неравенств вида $f(x)\sqrt{g(x)} \geqslant 0$ указанным способом всегда нужно рассматривать два случая:

$$1)\ g(x) = 0; \qquad 2)\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

(для неравенств вида $f(x)\sqrt{g(x)} \leqslant 0$ знак второго неравенства системы надо изменить на противоположный). При этом недостаточно заменить первое неравенство системы нестрогим и рассмотреть только этот случай, ведь нули подкоренного выражения вовсе не обязательно являются решениями второго неравенства системы. Поэтому, опустив первый случай, можно потерять решения данного неравенства.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) = 0 \\ x \in D(f(x)) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$