Рациональные уравнения и неравенства, метод интервалов

$x-a$, $-$, $+$, a

$(-1)^{2k}=1$

$(-1)^{2k-1}=-1$

Теоретический материал

Неравенство называется *рациональным*, если левая и правая его части есть суммы отношений многочленов. При решении рациональных неравенств удобно применять метод интервалов. Для этого неравенство приводится к виду

$$\frac{(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\dots(x-x_k)^{p_k}}{(x-x_{k+1})^{p_{k+1}}(x-x_{k+2})^{p_{k+2}}\dots(x-x_n)^{p_n}}\geq 0,$$

$+$, x_1, $-$, x_2, $+$, x_3, $-$, $-$, $-$, $+$, $-$, x_n, $+$, x

где p_m – кратность корня x_m.

При этом полезно следовать следующему правилу: *при старшей степени в уравнениях и неравенствах должен быть знак плюс*, то есть каждая разность должна иметь вид $(x-x_m)$, а не (x_m-x). Затем рисуется числовая ось, на ней расставляются все корни x_k, при этом точки, стоящие в знаменателе, выкалываются, а точки, стоящие в числителе, выкалываются, если неравенство строгое. После этого находятся знаки левой части на получившихся интервалах: они чередуются с учётом кратности каждого корня. Для наглядности можно рисовать змейку: начинаем справа сверху, переходим через ось, если кратность корня нечётная, и остаёмся на той же стороне, если кратность корня чётная.

$$\frac{a}{b}=\frac{(-1)a}{(-1)b}$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-87.3) Решить неравенство $\dfrac{1}{1-x}\geq -3$.

Решение. Перенесём всё в одну сторону и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{1}{1-x}+\overset{1-x}{3}\geq 0 \iff \frac{1+3(1-x)}{1-x}\geq 0 \iff \frac{4-3x}{1-x}\geq 0 \iff \frac{3x-4}{x-1}\geq 0;$$

$$\frac{3(x-4/3)}{x-1}\geq 0 \quad \Big|\cdot 3$$

$$\frac{x-4/3}{x-1}\geq 0,$$

$$\frac{a}{b}\geq 0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-4/3\geq 0\\ x-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-4/3\leq 0\\ x-1<0\end{cases}\end{array}\right.$$

значит, $x<1$ или $x\geq\dfrac{4}{3}$.

Ответ. $(-\infty;1)\cup\left[\dfrac{4}{3};\infty\right)$.

Пример 2. (Биол-84.1) Решить неравенство $\dfrac{x}{1-x}<x-6$.

Решение. Перенесём всё в одну сторону и приведём к общему знаменателю:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\frac{x}{1-x}-x+6<0 \iff \frac{x+(6-x)(1-x)}{1-x}<0 \iff$$

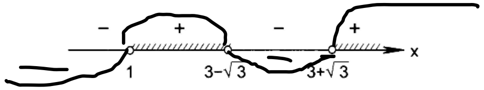
$$\iff \frac{x+6-x+x^2-6x}{1-x}<0 \iff \frac{x^2-6x+6}{x-1}>0.$$

$$\iff \frac{(x-(3-\sqrt{3}))(x-(3+\sqrt{3}))}{x-1}>0$$

Найдём нули числителя:

$$x^2-6x+6=0 \iff x_{1,2}=3\pm\sqrt{3}.$$

Проставим знаки дроби на числовой оси:



значит, $1<x<3-\sqrt{3}$ или $x>3+\sqrt{3}$.

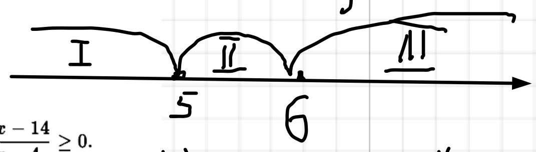
Ответ. $(1;3-\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{3};+\infty)$.

$$|x-5|=\left[\begin{array}{ll}x-5, & x\geq 5\\ -(x-5), & x<5\end{array}\right.$$

Пример 3. (ИСАА-92.3) Решить неравенство $\dfrac{|x-5|-1}{2|x-6|-4}\leq 1$.

Решение. Подмодульные выражения меняют знаки в точках $x = 5$ и $x = 6$.

$$|x-6| = \left[\begin{array}{l} x-6,\ x \geqslant 6 \\ -(x-6),\ x < 6 \end{array}\right.$$



1) При $x < 5$ исходное неравенство запишется в виде

$$\frac{5-x-1}{2(6-x)-4} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4-x}{2(4-x)} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \le 1, \\ x \ne 4. \end{cases}$$

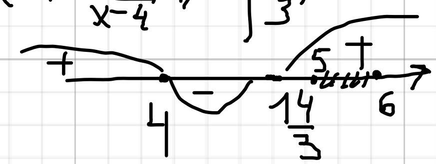
Следовательно, в этом случае $x \in (-\infty; 4) \cup (4; 5)$.

2) При $5 \le x < 6$ получим

$$\frac{x-5-1}{2(6-x)-4} \le 1 \iff \frac{x-6}{8-2x} \le 1 \iff \frac{x-6-8+2x}{8-2x} \le 0 \iff \frac{3x-14}{x-4} \ge 0.$$

Это неравенство выполняется $\forall x \in [5, 6)$.

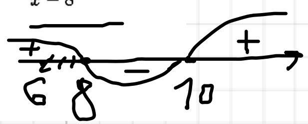
$$\frac{3x-14}{2x-8} \geqslant 0 \iff \frac{3\left(x-\frac{14}{3}\right)}{2(x-4)} \geqslant 0 \iff \frac{x-\frac{14}{3}}{x-4} \geqslant 0 \qquad \frac{14}{3} > 4$$



3) При $x \ge 6$ неравенство примет вид

$$\frac{x-5-1}{2(x-6)-4} \le 1 \iff \frac{x-6}{2x-16} \le 1 \iff \frac{x-6-2x+16}{x-8} \le 0 \iff \frac{x-10}{x-8} \ge 0,$$

откуда, с учётом условия $x \ge 6$, получим $x \in [6; 8) \cup [10; +\infty)$.



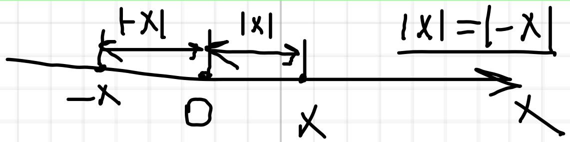
Объединив все результаты, получим ответ.

Ответ. $(-\infty; 4) \bigcup (4; 8) \bigcup [10; +\infty)$.

Определим *модуль* (абсолютную величину) вещественного числа x следующим образом:

$$|x| = \left[\begin{array}{lll} x, & \text{если} & x \ge 0, \\ -x, & \text{если} & x < 0. \end{array}\right.$$

$$|x| = |x-0|$$

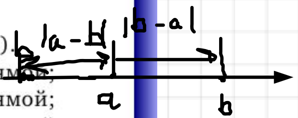


Уравнения, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (модуля)

Часто такие уравнения называют короче: уравнения с модулем. Уравнения, содержащие модуль, обычно относят к сравнительно трудным, хотя значительная часть таких уравнений с успехом решается с помощью стандартных равносильных преобразований или «раскрытия модуля» в соответствии с его определением. Приведем сначала основные факты, связанные с модулем и необходимые для решения уравнений.

1. $|a| = a$, если $a \geqslant 0$; $|a| = -a$, если $a < 0$ (определение модуля).

2. $|a-b|$ есть расстояние между точками a и b числовой прямой; $|a| = |a-0|$ — расстояние между точками a и 0 числовой прямой; $|a+b| = |a-(-b)|$ — расстояние между точками a и $(-b)$ числовой прямой (геометрический смысл модуля).



$$|a-b| = |b-a|$$

3. $|-a| = |a|$.

4. $|ab| = |a||b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

5. $|a|^2 = a^2$.

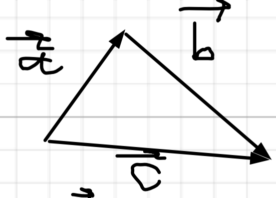
$$a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a-b)(a+b) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b=0 \end{array}\right.$$

6. $|a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b, \\ a = -b. \end{array}\right.$

$\Big\{\ b \geqslant 0,$

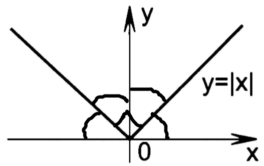
7. $|a|=b \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a=b,\\ a=-b.\end{array}\right.\end{array}\right.$

8. $|a|+|b| \geqslant |a+b|$, причем $|a|+|b|=|a+b| \Leftrightarrow ab \geqslant 0$.



$\vec a + \vec b = \vec c$

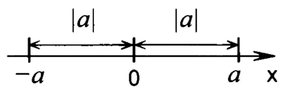
$f(-x) = f(x)$



Функция $y = |x|$ является чётной и неотрицательной на всей числовой оси.

Геометрическим смыслом модуля числа считается расстояние по числовой оси от начала отсчёта до рассматриваемого числа, причём одному и тому же значению $|a|$ соответствуют две симметричные относительно начала отсчёта точки: a и $-a$ соответственно.

Для преобразований выражений с модулями, а также для решения уравнений и неравенств, содержащих функции неизвестных величин под знаком модуля, рассматривают варианты раскрытия модулей в зависимости от знака подмодульного выражения. Например:



$|f(x)| = \left[\begin{array}{ll} f(x), & f(x)\geq 0\\ -f(x), & f(x)<0\end{array}\right.$

$$|f(x)| = g(x) \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x),\\ f(x) \geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases} -f(x) = g(x),\\ f(x) < 0;\end{cases}\end{array}\right. \tag{8}$$

ответ

$$|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) > g(x),\\ f(x) \geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases} -f(x) > g(x),\\ f(x) < 0;\end{cases}\end{array}\right. \tag{9}$$

$$|f(x)| < g(x) \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) < g(x),\\ f(x) \geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases} -f(x) < g(x),\\ f(x) < 0.\end{cases}\end{array}\right. \tag{10}$$

$f(x) = x$

а) $|x| < 1 \iff -1 < x < 1 \iff \begin{cases} x < 1\\ x > -1\end{cases}$

$|x-0| < 1$

В случае нестрогих неравенств с модулем неравенства равносильных систем также становятся нестрогими. Кроме того, принципиальной разницы в приписывании случая $f(x) = 0$ к любой из получаемых систем (или даже к обеим сразу) нет.

Иногда бывает удобно раскрывать модули через геометрический смысл. Например, при положительном a

$$|f(x)| = a \iff f(x) = \pm a; \tag{11}$$

$$|f(x)| < a \iff -a < f(x) < a; \tag{12}$$

$$|f(x)| > a \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > a;\\ f(x) < -a.\end{array}\right. \tag{13}$$

б) $|x| > 1 \iff \left[\begin{array}{l} x < -1\\ x > 1\end{array}\right. \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Пример 1. (Физ-95.3) Решить уравнение $2|x+1| = 2 - x$.

$f(x) = x+1$, $g(x) = 2 - x$

Решение. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x = -1$. Рассмотрим два случая.

$x+1=0$, $x=-1$

$x+1>0$

1) При $x \geq -1$ исходное уравнение примет вид $2x+2=2-x$, $3x=0$

$$2(x+1) = 2 - x \iff x = 0.$$

$x+1<0$

Так как найденный корень удовлетворяет условию $x \geq -1$, то $x = 0$ является решением исходного уравнения.

-1

2) При $x < -1$ уравнение запишется в виде

$-2x - 2 = 2 - x, \quad -x = 4$

$$-2(x+1) = 2 - x \iff x = -4.$$

Найденный корень удовлетворяет условию $x < -1$, следовательно, также является решением исходного уравнения.

Ответ. -4; 0.

Пример 2. (Экон-84.3) Решить неравенство $2|x-4| + |3x+5| \geq 16$.

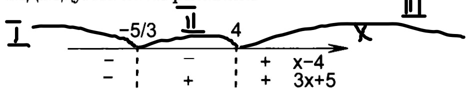
$x - 4 = 0, \quad x = 4$

$3x + 5 = 0, \quad x = -\frac{5}{3}$

$|x-4| = \left[\begin{array}{l} x-4, \; x \geq 4 \\ -(x-4), \; x < 4 \end{array}\right.$

Решение. Отметим нули подмодульных выражений на числовой прямой и проанализируем знаки подмодульных выражений.

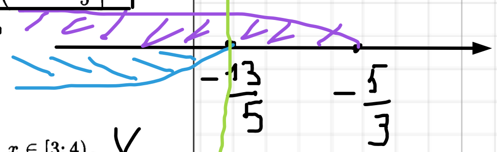
$|3x+5| = 3\left|x + \frac{5}{3}\right| = 3\left|x - \left(-\frac{5}{3}\right)\right| = \left[\begin{array}{l} 3x+5, \; x \geq -\frac{5}{3} \\ -(3x+5), \; x < -\frac{5}{3} \end{array}\right.$



1) При $x < -\frac{5}{3}$ оба подмодульных выражения отрицательны, следовательно,

$$\begin{cases} x < -\frac{5}{3}, \\ -2(x-4) - (3x+5) \geq 16; \end{cases} \iff \begin{cases} x < -\frac{5}{3}, \\ x \leq -\frac{13}{5}; \end{cases} \iff \boxed{x \in \left(-\infty; -\frac{13}{5}\right].}$$

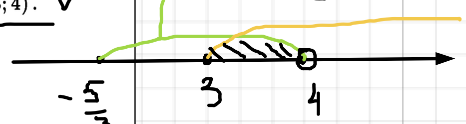
$-2x + 8 - 3x - 5 \geq 16, \quad -5x + 3 \geq 16, \quad -5x \geq 13$



2) При $-\frac{5}{3} \leq x < 4$ исходное неравенство примет вид

$$\begin{cases} -\frac{5}{3} \leq x < 4, \\ -2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{5}{3} \leq x < 4, \\ x \geq 3; \end{cases} \iff x \in [3; 4).$$

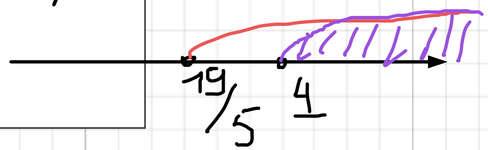
$-2x + 8 + 3x + 5 \geq 16, \quad x \geq 3$



3) При $x \geq 4$ получим

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ 2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 4, \\ x \geq \frac{19}{5}; \end{cases} \iff x \in [4; +\infty).$$

$2x - 8 + 3x + 5 \geq 16, \quad 5x \geq 19$

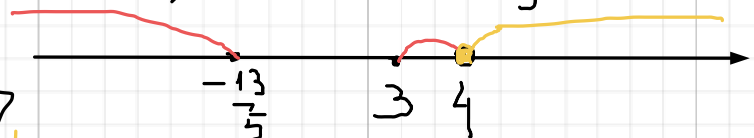


Объединив все три полученных промежутка, получим ответ.

Ответ. $\left(-\infty; -\frac{13}{5}\right] \cup [3; +\infty)$.

$2 \cdot 4 + 5 = 13 \not\geq 16$

$\left[\begin{array}{l} x \in \left(-\infty, -\frac{13}{5}\right] \\ x \in [3, 4) \\ x \in [4; +\infty) \end{array}\right. \iff$



$x \in \left(-\infty; -\frac{13}{5}\right] \cup [3, +\infty)$

$|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[f(x) = g(x) \right. \end{cases}$

$$\left[\; f(x) = -g(x) \right.$$

Пример 3. (Экон-89.3) Решить уравнение $\big||3-x|-x+1\big|+x=6$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\big||x-3|-x+1\big| = 6-x$ и будем раскрывать модули, начиная с внутреннего.

$$|x-3| = \left[\begin{array}{l} x-3, \; x \geq 3 \\ -(x-3), \; x<3 \end{array}\right.$$

Первый случай:

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ |x-3-x+1| = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 3, \\ 2 = 6-x; \end{cases} \iff x = 4.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x < 3, \\ |3-x-x+1| = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ |2x-4| = 6-x. \end{cases}$$

Так как при $x<3$ всегда $6-x>0$, то дальше удобнее раскрывать модуль через геометрический смысл:

$$\begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-4 = 6-x; \\ 2x-4 = x-6; \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3}; \text{ — пост. корень!} \\ x = -2; \end{array}\right. \end{cases} \iff x = -2.$$

Ответ. -2; 4.

$$\iff \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x-3|-x+1 = 6-x \\ |x-3|-x+1 = x-6 \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 6 \\ \left[\begin{array}{l} |x-3| = 5 \\ |x-3| = 2x-7 \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x-3 = -5 \\ x-3 = 5 \\ \begin{cases} 2x-7 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-3 = 2x-7 \\ x-3 = 7-2x \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 8 \text{ — пост. корень!} \\ \begin{cases} x \geq 3{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{10}{3} \text{ — пост. корень!} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: -2 и 4

$$|f(x)| = |g(x)| \iff f^2(x) = g^2(x) \iff f^2(x) - g^2(x) = 0 \iff \big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

$$\underbrace{\big||3-2x|-1\big|}_{\geq 0} = 2\underbrace{|x|}_{\geq 0} \iff (|3-2x|-1)^2 = 4x^2 \iff \left[\begin{array}{l} |3-2x|-1 = 2x \\ |3-2x|-1 = -2x \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 1)\; |3-2x| = 2x+1 \\ 2)\; |3-2x| = 1-2x \end{array}\right.$$

1) $|3-2x| = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3-2x = 2x+1 \\ 3-2x = -2x-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ 3 = -1 \text{ – неверно, реш. нет} \end{array}\right. \end{cases}$

2) $|3-2x| = 1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3-2x = 1-2x \\ 3-2x = 2x-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} 3 = 1 \text{ – неверно!} \\ \cancel{x = 1} \text{ – пост. корень!} \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ $x = \frac{1}{2}$