Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой по абсолютной величине меньше 1, называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*. В этом случае (т. е. при условии $|q| < 1$) существует *сумма всех членов прогрессии* $S = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$. Она определяется как *число, к которому стремится сумма* $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ *первых ее* n *членов при бесконечном возрастании* n. Формула суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеет вид

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q} \quad (|q| < 1).}$$

$n \to$

$b_1, b_1q, b_1q^2, \ldots, b_1q^{n-1}, \ldots \quad (b_1 \neq 0,\ q \neq 0)$

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \underbrace{q^n \cdot \frac{b_1}{1-q}}_{?} \xrightarrow{n=\infty} 0$$

q^n, $|q| < 1 \hookrightarrow q^n \to 0$, если $n \to \infty$!

$q = 0{,}1 < 1$, $q^2 = 0{,}01$, $q^3 = 0{,}001$, ... $q^k = \underbrace{0{,}00\ldots0}_{k\text{-нулей}}1$, ..., $q^n \to 0$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \underbrace{b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} + \ldots}_{\text{ряд сходится!}}, \quad |q| < 1$$

1) $q = 1$, $S = \underbrace{b_1 + b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n} + \ldots = nb_1 + \ldots \to +\infty$

2) $|q| > 1$, $q^n \to \infty \hookrightarrow q^n \frac{b_1}{1-q} \to \infty \hookrightarrow S \to \infty$

3) $q = -1$, $S_1 = b_1$, $S_2 = 0$, $S_3 = b_1$, $S_4 = 0$, ..., $S_k = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ b_1, & k = 2n+1 \end{cases}$ ...

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} S$$

Пример. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

$b_1 = \frac{1}{2} = q$

Пример ■ Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 2, а сумма их квадратов равна 1. Найти сумму кубов всех членов прогрессии.

Решение $b_1, q \; (|q| < 1)$

$$\left.\begin{aligned} &b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots + = 2 = \frac{b_1}{1-q} \\ &b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \ldots + = 1 = \frac{b_1^2}{1-q^2} \end{aligned}\right\} \quad 2 = \frac{\cancel{b_1}}{\cancel{1-q}} \cdot \frac{(\cancel{1-q})(1+q)}{b_1^{\cancel{2}}}$$

$2 = \frac{1+q}{b_1} \to 2b_1 - 1 = q$, $\quad 2 = \frac{b_1}{1-2b_1+1}$, $\quad 2(2-2b_1) = b_1$

$4 - 4b_1 = b_1$, $\quad 5b_1 = 4$, $\quad b_1 = \frac{4}{5}$, $\quad 2\frac{4}{5} - 1 = q$

$q = \frac{3}{5}$

$$b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots + = \frac{b_1^3}{1-q^3} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^3}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{\frac{4^3}{5^3}}{\frac{5^3-3^3}{5^3}} =$$

$4^3 \quad \cancel{5^3} \quad 4^3 \quad 5^3 \; 2$

$$= \frac{1}{5^3} \quad \frac{\ldots}{(5-3)(5^2+5\cdot 3+3^2)} = \frac{4}{(25+15+9)\cdot 2} = \frac{2\cdot 4}{49} = \boxed{\frac{32}{49}}$$

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — заданные числа, то их сумма обозначается $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

где k называют *индексом суммирования*.

Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, а операция суммирования обладает свойством линейности, т. е. для любых чисел α и β справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k. \qquad \checkmark$$

Пример 1. Вычислить сумму $S = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)$.

△
$$S = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) =$$
$$= a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \ldots + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_1. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить сумму $S = \sum\limits_{k=1}^{49} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$.

△ Так как $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$, то

$$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} = \frac{2k+3-2k-1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{49}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{101}\right) = \frac{98}{2\cdot 3\cdot 101} = \frac{49}{303}. \quad \checkmark \blacktriangle$$

Определение предела последовательности

Предваряя определение предела последовательности, рассмотрим две числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad y_n = \frac{1}{2^n}.$$

Выпишем несколько первых членов каждой последовательности:

$$\{x_n\}: 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \frac{9}{8}, \frac{8}{9}, \ldots;$$
$$\{y_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots .$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на числовой прямой (рис. 9, 10).

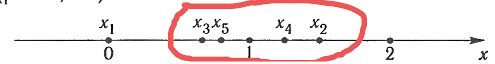

Рис. 9

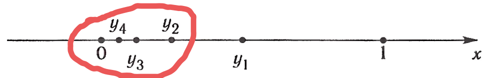

Рис. 10

Заметим, что члены последовательности $\{x_n\}$ как бы «сгущаются» около точки 1 (рис. 9), располагаясь правее точки 1 при четных n и левее точки 1 при нечетных n. С увеличением n расстояние от точки x_n до точки 1 уменьшается (стремится к нулю). Поэтому число 1 называют пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ и пишут:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 1.}$$

Аналогично, члены последовательности $\{y_n\}$ с ростом n «приближаются» к точке 0 (рис. 10), и поэтому

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} y_n = 0.}$$

Сформулируем определение предела последовательности.

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если a — предел последовательности, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Замечание. Запись N_ε указывает на то, что номер, начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют условию $|x_n - a| < \varepsilon$, зависит, вообще говоря, от ε.

Если $x_n = a$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (такую последовательность называют *стационарной*), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Последовательность, у которой существует предел, называют *сходящейся*. Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют *расходящейся*; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Обратимся еще раз к определению предела. Согласно определению, число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если при всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, которое можно записать в виде

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Другими словами, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε, начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежит интервалу $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Этот интервал называют *ε-окрестностью* точки a (рис. 11) и обозначают $U_\varepsilon(a)$.

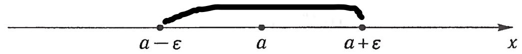

Рис. 11

Итак, число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если для каждой ε-окрестности точки a найдется номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат ε-окрестности точки a, так что вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо содержится лишь конечное число членов.

$x_n = (-1)^n$

$-1, 1, -1, 1, \dots$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $1 < n\varepsilon$, $n > \frac{1}{\ldots}$

$N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, тогда $n > N_\varepsilon$, $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$[2{,}1] = 2$

$\{2{,}1\} = 2{,}1 - [2{,}1] = 0{,}1$