## Координаты точек на тригонометрической окружности

Использование радианной меры при измерении углов позволяет для каждой точки $P_\alpha$ тригонометрической окружности указать длину дуги $P_0P_\alpha$. Это дает возможность определить отображение множества действительных чисел $\mathbb{R}$ на единичную окружность, т. е. поставить в соответствие каждой точке $P_\alpha$ действительное число. Это можно осуществить следующим образом.

Сначала множество действительных чисел $\mathbb{R}$ отображают на координатную прямую. За единицу длины на координатной прямой принимается радиус окружности. Затем, вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке $P_0$, «наматывают» ее на тригонометрическую окружность так, что начало координат на прямой переходит в начало отсчета углов на окружности. При этом луч, на котором отложены положительные числа, наматывается в положительном направлении, а луч, на котором отложены отрицательные числа, наматывается в отрицательном направлении (рис. 3). При этом точки координатной прямой переходят соответственно в точки окружности. Таким образом, *каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.*

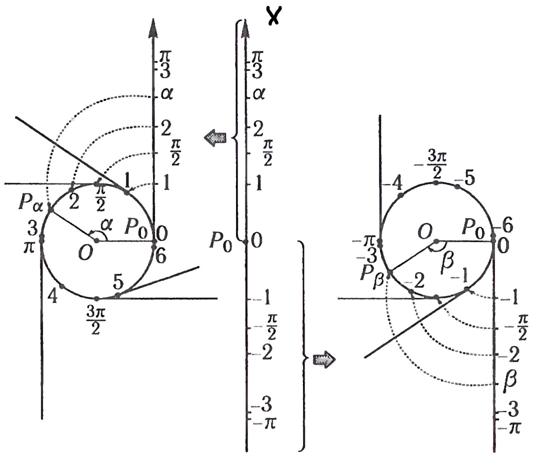



**Рис. 3**

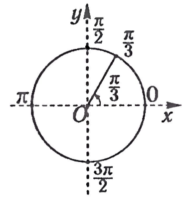



**Рис. 4**

$-\frac{3\pi}{2} = -\frac{9\pi}{6}$

$-\frac{5\pi}{3} = -\frac{10\pi}{6}$

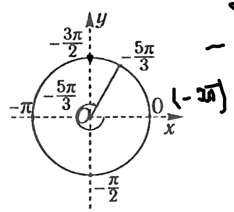



**Рис. 5**

Поскольку после полного оборота числам вида $\alpha$ и $\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, соответствует одна и та же точка тригонометрической окружности, считается, что все они изображаются на окружности одной точкой. [redacted]

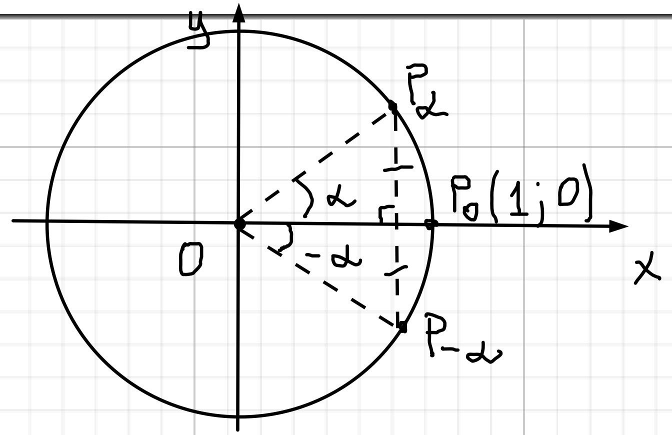
Отметим некоторые свойства приведенного отображения.

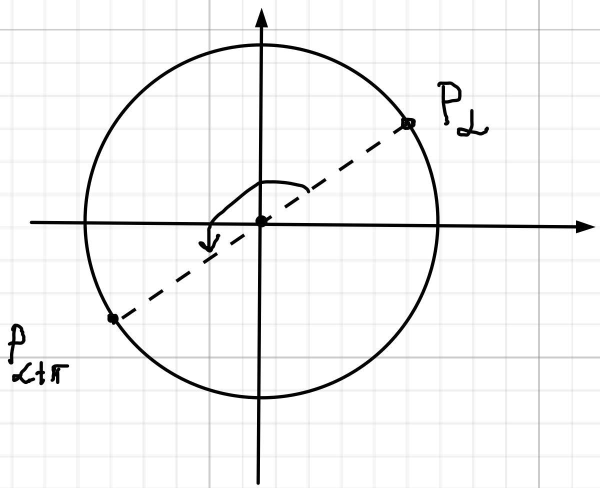
Отметим некоторые свойства приведенного отображения.

**1°.** Числам $\alpha$ и $\beta$ соответствует одна и та же точка тригонометрической окружности тогда и только тогда, когда разность $\alpha-\beta$ кратна $2\pi$, т. е. $\alpha-\beta=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

**2°.** Точки, соответствующие противоположным числам $\alpha$ и $-\alpha$, симметричны относительно прямой $OP_0$, где точка $P_0$ — начало отсчета углов на окружности, а $O$ — центр окружности.

**3°.** Точки, соответствующие числам $\alpha$ и $\alpha+\pi(2k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$, диаметрально противоположны, т. е. симметричны относительно центра окружности.




**Пример** ■ Описать взаимное расположение на тригонометрической окружности точек, соответствующих числам:

1) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{9\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{9\pi}{4}$.

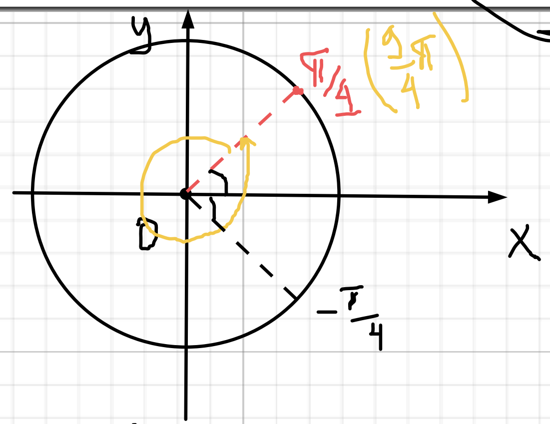
△ 1) Так как $\frac{9\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{4}$, т. е. $\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=2\pi$, то этим числам соответствует одна точка.

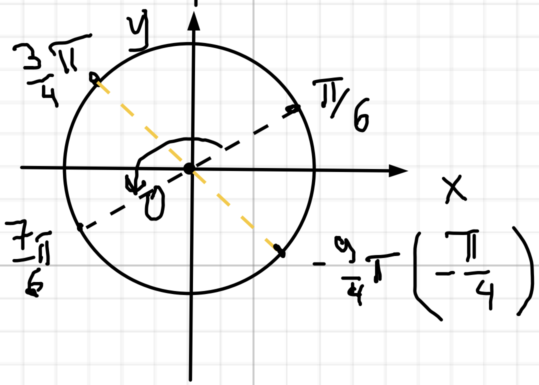
2) Числа $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$ противоположны, поэтому соответствующие им точки симметричны относительно оси $Ox$.

3) Так как $\frac{7\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$, то соответствующие им точки диаметрально противоположны.

4) Так как $-\frac{9\pi}{4} = -3\pi + \frac{3\pi}{4}$, то точки, соответствующие числам $-\frac{9\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$, диаметрально противоположны. ▲

$= -2\pi - \pi + \frac{3\pi}{4}$




### Координаты точек единичной окружности в декартовой системе координат

Определим в декартовой системе координат $Oxy$ координаты некоторых точек окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

**Пример** Рассмотрим случаи, когда луч $OP_\alpha$ составляет с положительным направлением оси $Ox$ углы:

1) $0$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{2}$.

△ 1) Если $\alpha = 0$, то точка $P_\alpha$ совпадает с точкой $P_0 = (1; 0)$.

2) Пусть $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Найдем координаты точки $P_\alpha$. Для этого опустим перпендикуляр $P_\alpha P$ из этой точки на ось $Ox$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $OP_\alpha P$ (рис. 6). Поскольку координаты точки $P_\alpha$ численно равны длинам катетов этого треугольника, то остается найти длины $P_\alpha P$ и $OP$. Гипотенуза $OP_\alpha$ равна радиусу окружности, т. е. равна 1. Катет $P_\alpha P$ лежит против угла $\frac{\pi}{6}$, поэтому $P_\alpha P = \frac{1}{2}$. По теореме Пифагора для треугольника $OP_\alpha P$ получим $OP = \sqrt{OP_\alpha^2 - P_\alpha P^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $P_\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. ✓

3) Пусть $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Как и в предыдущем случае, опустим перпендикуляр $P_\alpha P$ из точки $P_\alpha$ на ось $Ox$. Соответственно, катеты прямоугольного равнобедренного треугольника $OP_\alpha P$ (рис. 7)

$OP^2 + PP_\alpha^2 = 1$

$OP^2 = \frac{1}{\ }$

с гипотенузой 1 равны $P_\alpha P = OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $P_\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$OP = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = PP_\alpha$

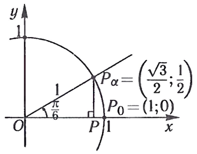



**Рис. 6**

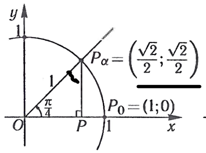



**Рис. 7**

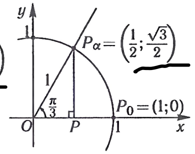



**Рис. 8**

4) Пусть $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Аналогично предыдущим случаям получаем $P_\alpha = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (рис. 8).

5) Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то точка $P_\alpha = (0; 1)$. ▲