Иванов
Иван
107 а

Вариант 4

№ 1

7

Ответ $x > 1$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Для преобразования тригонометрических выражений используются **тригонометрические формулы**, **формулы сокращённого умножения**, **табличные значения тригонометрических функций**.

Практические задания

Найдите значения выражений.

а) $24\cos 120^\circ \cdot \sin 30^\circ = 24\cos(180^\circ - 60^\circ)\cdot\frac{1}{2} = 24\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos 60^\circ) =$

$= 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -6$; используется формула приведения: $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

б) $\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3} = \sqrt{4\cdot 3}\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot 2\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3} =$

$= \sqrt{3}\left(1+\cos\left(2\cdot\frac{5\pi}{12}\right)\right) - \sqrt{3} = \sqrt{3}\left(1+\cos\frac{5\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) -$

$-\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}=-1{,}5$; используются формулы: $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ и $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

в) $2\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{7\pi}{6}=2\sqrt{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=$

$=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$; используются формулы: $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ и $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

г) $6\,\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6}\cdot\mathrm{tg}\frac{13\pi}{3}\cdot\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{4}=6\,\mathrm{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{tg}\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)=6\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\times$

$\times\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\left(-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}\right)=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot(-1)=-6$; используются формулы: $\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{tg}(4\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}(3\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

д) $\frac{6\cos 53^\circ}{\sin(-37^\circ)}=\frac{6\cos(90^\circ-37^\circ)}{-\sin 37^\circ}=\frac{6\sin 37^\circ}{-\sin 37^\circ}=-6$; используются формулы: $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ и $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

е) $\frac{7\sin 94^\circ}{\sin 47^\circ\sin 43^\circ}=\frac{7\sin(2\cdot 47^\circ)}{\sin 47^\circ\sin(90^\circ-47^\circ)}=\frac{7\cdot 2\sin 47^\circ\cos 47^\circ}{\sin 47^\circ\cos 47^\circ}=14$;

используются формулы: $\sin 2x=2\sin x\cos x$ и $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$.

ж) $\frac{\sin^2 36^\circ+\sin^2 54^\circ}{4}=\frac{\sin^2 36^\circ+\sin^2(90^\circ-36^\circ)}{4}=\frac{\sin^2 36^\circ+\cos^2 36^\circ}{4}=\frac{1}{4}=$

$=0{,}25$; используются формулы: $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ и $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнение $\sin x = a,\ a \in [-1;\ 1]$

$$\sin x = a,\ a \in [-1;\ 1]$$

$$x = (-1)^n \arcsin \alpha + \pi n,\ \ n \in Z$$

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Частные случаи

$\sin x = 0$

$x = \pi n,\ n \in Z$

$\sin x = 1$

$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$\sin x = -1$

$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

При решении простейших тригонометрических уравнений можно использовать тригонометрическую окружность, в этом случае не надо запоминать формулы.

Уравнение $\cos x = a,\ a \in [-1;\ 1]$

$$\cos x = a,\ a \in [-1;\ 1]$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$

Частные случаи

$\cos x = 0$

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$\cos x = 1$

$x = 2\pi n,\ n \in Z$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a,\ a \in R$

При решении уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$ можно не использовать тригонометрическую окружность, а воспользоваться формулой: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, где $n \in Z$.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a,\ a \in R$

метрическую окружность, а воспользоваться формулой: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, где $n \in Z$.

Основная задача при решении тригонометрического уравнения — сведение его к одному или нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, При решении уравнения вида $\operatorname{ctg} x =$ $= a$ можно не использовать тригоно-

$\operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$

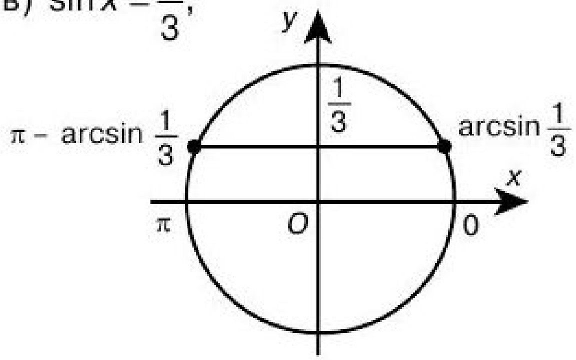
Практические задания

Решите уравнение: $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ \pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; \end{array}\right. \qquad x = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

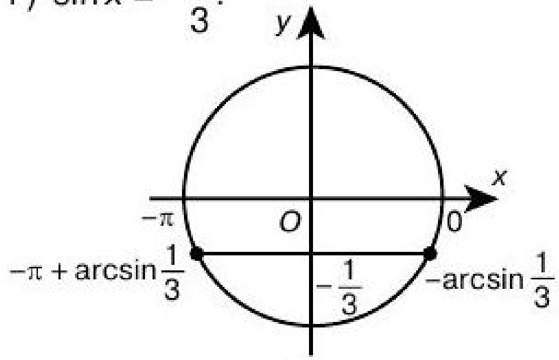
в) $\sin x = \dfrac{1}{3}$;



Ответ: $\arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi n;$

$\pi - \arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

г) $\sin x = -\dfrac{1}{3}$.



Ответ: $-\arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi n;$

$-\pi + \arcsin\dfrac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Решите уравнение: $\cos x = \sqrt{2}$

Решите уравнение: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

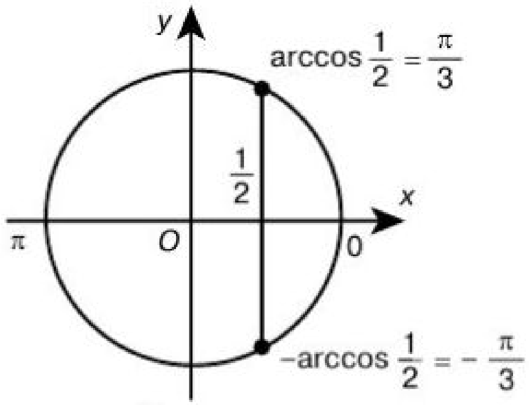
$$x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;\quad x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

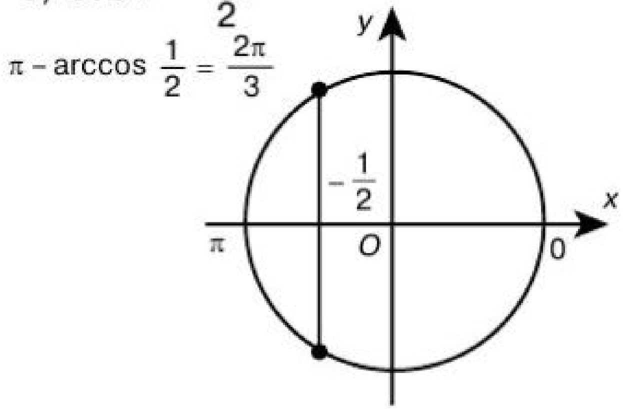
Решите уравнения.

а) $\cos x = \frac{1}{2}$;



Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

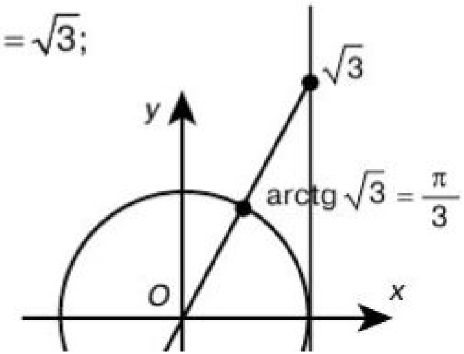
б) $\cos x = -\frac{1}{2}$.



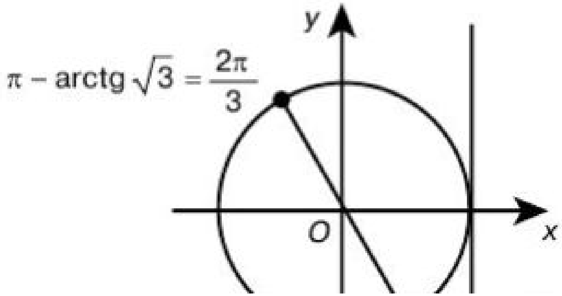
Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

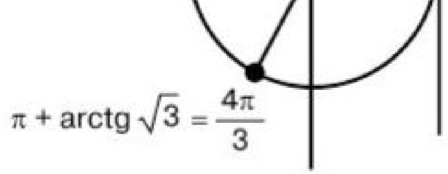
Решите уравнения.

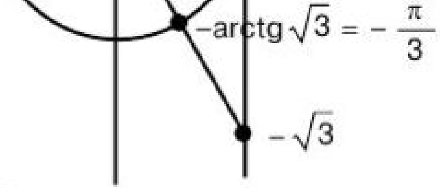
а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;



б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.





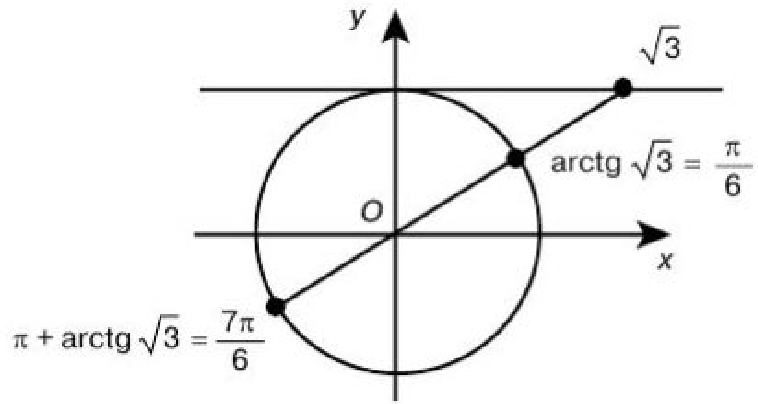


Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Решите уравнения.

а) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3};$



Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Методы решения тригонометрических уравнений

Основными методами решения тригонометрических уравнений являются: **замена переменной**, **разложение на множители**, **приведение к однородному уравнению**. Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = 0$ называют **однородным тригонометрическим уравнением первой степени**; уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ называют **однородным тригонометрическим уравнением второй степени**. Если в однородном тригонометрическом уравнении второй степени один из коэффициентов a или c равен нулю, то уравнение решается методом разложения на множители. В этом случае делить на $\cos^2 x$ или $\sin^2 x$ нельзя, т. к. **может произойти потеря корней**.

$6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$

Замена: $\sin x = t$, $t \in [-1;\ 1]$, тогда уравнение примет вид:

$6t^2 - t - 1 = 0$, $\quad D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25$,

$$t_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2 \cdot 6} = -\frac{1}{3},\ t_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2}.$$

Обратная замена: 1) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $\sin x = -\frac{1}{3}$, $x = -\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$ и $x = -\pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $-\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$; $-\pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

[redacted] Решите уравнение.

$\cos^2 x + \cos x = 0$; $\cos x(\cos x + 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x = -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.\end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

[redacted] Решите уравнения.

а) $2\sin x - 3\cos x = 0 \,|: \cos x$, $\cos x \neq 0$; $\qquad \frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$,

$2\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$,

$\mathrm{tg}\, x = 1{,}5$, $\quad x = \mathrm{arctg}\, 1{,}5 + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\mathrm{arctg}\, 1{,}5 + \pi n$, $n \in Z$.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) \geq 0}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$