Комбинаторика
Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются способы выбора и размещения элементов некоторого конечного множества на основании определенных условий. Выбранные (или выбранные и размещенные) группы элементов называются *соединениями*. Если все элементы полученного множества разные — получаем соединения без повторений, а если в полученном множестве элементы повторяются, то получаем соединения с повторениями*.

Перестановки	
Перестановкой из n элементов **называется любое упорядоченное множество из** n **заданных элементов.** Иными словами, это такое *множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой — на втором, ..., какой — на n-м.*	
Формула числа перестановок (P_n)	Пример
$(P_n) = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (читается: «Эн факториал»)	Количество различных шестизначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторяя эти цифры в одном числе, равно $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Размещения
Размещением из n элементов по k **называется любое упорядоченное множество из** k **элементов, состоящее из элементов заданного** n**-элементного множества.**

Формула числа размещений (A_n^k)	Пример
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ V	Количество различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры не могут повторяться, равно $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$. V

Сочетания	
Сочетанием без повторений из n элементов по k **называется любое** k**-элементное подмножество заданного** n**-элементного множества.**	
Формула	

Формула числа сочетаний (C_n^k)	Пример
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (по определению считают, что $C_n^0 = 1$)	Из класса, состоящего из 25 учащихся, можно выделить 5 учащихся для дежурства по школе C_{25}^5 способами, то есть $C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{25!}{5!\cdot 20!} = \frac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 53\,130$ способами.

Некоторые свойства числа сочетаний без повторений	
$C_n^k = C_n^{n-k}$ (в частности, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$)	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Схема поиска плана решения простейших комбинаторных задач	
Выбор правила	
Правило суммы	Правило произведения
Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами (при этом выбор элемента A исключает одновременный выбор и элемента B), то A или B можно выбрать $m + n$ способами.	Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами.

■ **Понятие соединения. Правила суммы и произведения.** При решении многих практических задач приходится выбирать из определенной совокупности объектов элементы, имеющие те или иные свойства, размещать эти элементы в определенном порядке и т. д. Поскольку в этих задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, то такие задачи называют *комбинаторными*. Раздел математики, в котором рассматриваются методы решения комбинаторных задач, называется *комбинаторикой*. В комбинаторике рассматривается выбор и размещение элементов некоторого конечного множества на основании определенных условий.

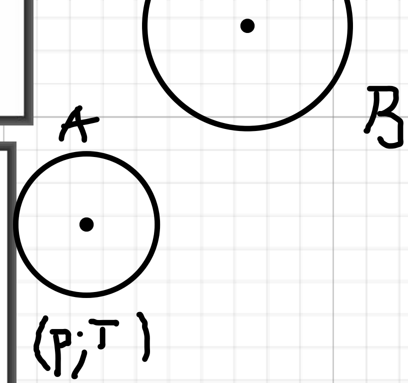
Выбранные (или выбранные и размещенные) группы элементов называют *соединениями*. Если все элементы полученного множества разные — получаем соединения без повторений, а если в полученном множестве элементы могут повторяться, то получаем соединения с повторениями. В этом па-

Решение многих комбинаторных задач базируется на двух основных правилах — правиле суммы и правиле произведения.

Правило суммы. Если на тарелке лежат 5 груш и 4 яблока, то выбрать один фрукт (то есть грушу или яблоко) можно 9 способами ($5 + 4 = 9$).

В общем виде имеет место такое утверждение:

если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами (при этом выбор элемента A исключает одновременный выбор и элемента B), то A *или* B можно выбрать $m + n$ способами.



Уточним содержание этого правила, используя понятие множеств и операций над ними.

Пусть множество A состоит из m элементов, а множество B — из n элементов. Если множества A и B не пересекаются (то есть $A \cap B = \varnothing$), то множество $A \cup B$ состоит из $m + n$ элементов.

Правило произведения. Если в киоске продают ручки 5 видов и тетради 4 видов, то выбрать набор из ручки и тетради (то есть пару — ручка и тетрадь) можно $5 \cdot 4 = 20$ способами (поскольку с каждой из 5 ручек можно взять любую из 4 тетрадей). В общем виде имеет место такое утверждение:

если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Это утверждение означает, что если для каждого из m элементов A можно взять в пару любой из n элементов B, то количество пар равно произведению $m \cdot n$.

В терминах множеств полученный результат можно сформулировать так.

Если множество A состоит из m элементов, а множество B — из n элементов, то множество всех упорядоченных пар* $(a; b)$, где первый элемент принадлежит множеству A (то есть $a \in A$), а второй — множеству B (то есть $b \in B$), состоит из $m \cdot n$ элементов.

Повторяя приведенные рассуждения несколько раз (или, более строго, используя метод математической индукции), получаем, что правила суммы и произведения можно применять при выборе произвольного конечного количества элементов.

Если множество A состоит из m элементов, а множество B — из n элементов, то множество всех упорядоченных пар* $(a; b)$, где первый элемент принадлежит множеству A (то есть $a \in A$), а второй — множеству B (то есть $b \in B$), состоит из $m \cdot n$ элементов.

Повторяя приведенные рассуждения несколько раз (или, более строго, используя метод математической индукции), получаем, что правила суммы и произведения можно применять при выборе произвольного конечного количества элементов.

2. Упорядоченные множества. При решении комбинаторных задач приходится рассматривать не только множества, в которых элементы можно записывать в любом порядке, но и так называемые *упорядоченные множества*. Для упорядоченных множеств существенным является порядок следования их элементов, то есть то, какой элемент записан на первом месте, какой на втором и т. д. В частности, если одни и те же элементы записать в разном порядке, то мы получим различные упорядоченные множества. Чтобы различить записи упорядоченного и неупорядоченного множеств, элементы упорядоченного множества часто записывают в круглых скобках, например $(1; 2; 3) \neq (1; 3; 2)$.

Рассматривая упорядоченные множества, следует учитывать, что одно и то же множество можно упорядочить по-разному. Например, множество из трех чисел $\{-5; 1; 3\}$ можно упорядочить по возрастанию: $(-5; 1; 3)$, по убыванию: $(3; 1; -5)$, по возрастанию абсолютной величины числа: $(1; 3; -5)$ и т. д.

[*] Множество всех упорядоченных пар $(a; b)$, где первый элемент принадлежит множеству A (то есть $a \in A$), а второй — множеству B (то есть $b \in B$), называют *декартовым произведением множеств* A и B и обозначают $A \times B$.

(Отметим, что декартово произведение $B \times A$ также состоит из $m \cdot n$ элементов).

Для того *чтобы задать конечное упорядоченное множество из n элементов, достаточно указать, какой элемент находится на первом месте, какой на втором, ..., какой на n-м.*

Размещения

Размещением из n элементов по k **называется любое упорядоченное множество из k элементов, состоящее из элементов заданного n-элементного множества.**

Например, из множества, содержащего три цифры $\{1; 5; 7\}$, можно составить следующие размещения из двух элементов без повторений:

$$(1; 5), (1; 7), (5; 7), (5; 1), (7; 1), (7; 5).$$

Количество размещений из n элементов по k обозначается A_n^k (читается: «A из n по k», A — первая буква французского слова *arrangement*, что означает «размещение, приведение в порядок»). Как видим, $A_3^2 = 6$.

$k \leq n$

- Выясним, сколько всего можно составить размещений из n элементов по k без повторений. Составление размещения представим себе как последовательное заполнение k мест, которые будем изображать в виде клеточек (рис. 119). На первое место мы можем выбрать один из n элементов заданного множества (то есть элемент для первой клеточки можно выбрать n способами).
Если элементы нельзя повторять, то на второе место можно выбрать только один элемент из оставшихся, то есть из $n - 1$ элементов. Теперь уже два элемента использованы и на третье место можно выбрать только один из $n - 2$ элементов и т. д. На k-е место можно выбрать только один из $n - (k - 1) = n - k + 1$ элементов (см. рис. 119).
Поскольку требуется выбрать элементы и на первое место, и на второе, ..., и на k-е, то, используя правило произведения, получим следующую **формулу числа размещений из n элементов по k:**

$A_3^1 = 3$, $\{1; 5; 7\} \to 1$ ... 5 ... 7

$A_3^3 = 6$ $\{1; 5; 7\}$

$(1; 5; 7)$, $(1; 7; 5)$, $(5; 1; 7)$, $(5; 7; 1)$
$(7; 1; 5)$, $(7; 5; 1)$

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ множителей}}. = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Например, $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ (что совпадает с соответствующим значением, полученным выше).

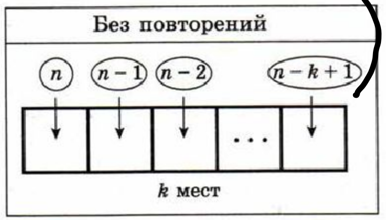


Рис. 119

Аналогично можно обосновать формулу для нахождения числа размещений с повторениями [redacted]

При решении простейших комбинаторных задач важно правильно выбрать формулу, по которой будут проводиться вычисления. Для этого можно выяснить следующее:

— *Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?*

[redacted]*Все ли заданные элементы входят в полученное соединение?*

Если, например, порядок следования элементов учитывается и из n заданных элементов в соединении используется только k элементов, то по определению — это размещение из n элементов по k.

Заметим, что после определения вида соединения следует также выяснить, *могут ли элементы в соединении повторяться*, то есть выяснить, какую формулу необходимо использовать — для количества соединений без повторений или с повторениями [redacted]

Задача 1 На соревнования по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменок. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4 × 100 м на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

Решение

▶ Количество способов выбрать из 12 спортсменок четырех для участия в эстафете равно количеству размещений из 12 элементов по 4 (без повторений), то есть

$A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880.$ ◁

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 =$$

Комментарий

Для выбора формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку для спортсменок важно, в каком порядке они будут бежать, то порядок при выборе элементов учитывается. В полученное соединение входят не все 12 заданных элементов. Следовательно, соответствующее соединение — размещение из 12 элементов по 4 (без повторений, поскольку каждая спортсменка может бежать только на одном этапе эстафеты).

Задача 2 Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе не повторяются.

Решение

▶ Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, равно числу размещений из 7 элементов по 3, то есть

$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$ ◁

Комментарий

Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок следования цифр учитывается и не все элементы выбираются (только 3 из заданных семи). Следовательно, соответствующее

щее соединение — размещение из 7 элементов по 3 (без повторений).

$$A_7^3=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=\frac{4!\cdot5\cdot6\cdot7}{4!}=5\cdot6\cdot7=210$$

Задача 3* Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, если цифры в числе не повторяются.

Комментарий

Выбор формулы проводится таким же образом, как и в задаче 2. Следует учесть, что если число, составленное из трех цифр, начинается цифрой 0, то оно не считается трехзначным. Следовательно, для ответа на вопрос задачи можно сначала из заданных 7 цифр записать все числа, состоящие из 3 цифр (см. пример 2), а затем из количества полученных чисел вычесть количество чисел, составленных из трех цифр, но начинающихся цифрой 0. В последнем случае мы фактически будем из всех цифр без нуля (их 6) составлять двузначные числа. Тогда их количество равно числу размещений из 6 элементов по 2 (см. решение).

Также можно выполнить непосредственное вычисление, последовательно заполняя три места в трехзначном числе и используя правило произведения. В этом случае удобно сделать рассуждения наглядными, изображая соответствующие разряды в трехзначном числе в виде клеточек, например так:

6 возможностей	6 возможностей	5 возможностей

Решение

▶ Количество трехзначных чисел, которые можно составить из семи цифр (среди которых нет цифры 0), если цифры в числе не повторяются, равно числу размещений из 7 элементов по 3, то есть A_7^3.

Но среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из размещений из 7 элементов по 3 необходимо исключить те размещения, в которых первым элементом является цифра 0. Их количество равно числу размещений из 6 элементов по 2, то есть A_6^2. Следовательно, искомое количество трехзначных чисел равно

$$A_7^3-A_6^2=7\cdot6\cdot5-6\cdot5=180.$$ ◁

$$\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}=$$
$$=a_1\cdot10^{n}+a_2\cdot10^{n-1}+a\cdot10^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot10+a_n$$
$$\overline{a_1a_2a_3}=a_1\cdot10^2+a_2\cdot10+a_1$$
$$a_1\neq0$$
$$(\cancel{0};1;2)$$

Задача 4 Решите уравнение $\frac{A_x^4}{A_x^2}=6.$

Решение

▶ ОДЗ: $x\in N$, $x\geqslant4$. Тогда получаем:

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)}=6.$$

На ОДЗ это уравнение равносильно уравнениям:

$$(x-2)(x-3)=6,\ \checkmark$$
$$x^2-5x=0,$$
$$x(x-5)=0.$$

Тогда $x=0$ или $x=5$.
В ОДЗ входит только $x=5$.
Ответ: 5. ◁

Комментарий

Уравнения, в запись которых входят выражения, обозначающие количество соответствующих соединений из x элементов, считаются определенными только при натуральных значениях переменной x. В данном случае, чтобы выражение A_x^4 имело смысл, необходимо выбирать натуральные значения $x\geqslant4$ (в этом случае A_x^2 также существует и, конечно, $A_x^2\neq0$). Для преобразования уравнения используем соответствующие формулы:

$$A_x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$A_x^2 = x(x-1).$$

$$A_x^4 = \frac{x!}{(x-4)!} = \frac{(x-4)!(x-3)(x-2)(x-1)x}{(x-4)!} = (x-3)(x-2)(x-1)x$$

$$A_x^2 = \frac{x!}{(x-2)!} = \frac{(x-2)!(x-1)x}{(x-2)!} = (x-1)x$$

[redacted] Перестановки

Объяснение и обоснование

***Перестановкой из n элементов* называется любое упорядоченное множество из n заданных элементов.**

Напомним, что упорядоченное множество — это *такое множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой на втором, ..., какой на n-м.*

Например, переставляя цифры в числе 236 (там множество цифр {2; 3; 6} уже упорядоченное), можно составить такие *перестановки без повторений*: (2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2) — всего 6 перестановок*.

Количество перестановок без повторений из n элементов обозначается P_n (P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка). Как видим, $P_3 = 6$.

● Фактически перестановки без повторений из n элементов являются размещениями из n элементов по n без повторений, поэтому $P_n = A_n^n = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{n \text{ множителей}}$. Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ обозначается $n!$. Поэтому полученная **формула числа перестановок без повторений из n элементов** может быть записана так:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \ \circ$$

* Отметим, что каждая такая перестановка определяет трехзначное число, составленное из цифр 2, 3, 6 так, что цифры в числе не повторяются. [redacted]

Например, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (что совпадает с соответствующим значением, полученным выше).

С помощью факториалов формулу для числа размещений без повторений

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ множителей}} \qquad (1)$$

можно записать в другом виде. Для этого умножим и разделим выражение в формуле (1) на произведение $(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = (n-k)!$. Получаем $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) =$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Следовательно, **формула числа размещений без повторений из n элемен-**

тов по k может быть записана так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2)$$

Для того чтобы этой формулой можно было пользоваться при всех значениях k, в частности при $k = n - 1$ и при $k = n$, договорились считать, что $1! = 1$ и $0! = 1$.

Например, по формуле (2) $A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Обратим внимание, что в тех случаях, когда значение $n!$ оказывается очень большим, ответы оставляют записанными с помощью факториалов. Например, $A_{30}^{25} = \frac{30!}{(30-25)!} = \frac{30!}{5!}$.

Примеры решения задач

Напомним, что для выбора формулы при решении простейших комбинаторных задач достаточно выяснить следующее:

— *Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?*

— *Все ли заданные элементы входят в полученное соединение?*

Если, например, порядок следования элементов учитывается и все n заданных элементов используются в соединении, то по определению это перестановки из n элементов.

Задача 1 Найдите, сколькими способами можно восемь учащихся построить в колонну по одному.

Решение

▶Количество способов равно числу перестановок из 8 элементов, то есть

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320. \triangleleft$$

Комментарий

Для выбора соответствующей формулы выясняем ответы на вопросы, приведенные выше. Поскольку порядок следования элементов учитывается и все 8 заданных элементов выбираются, то соответствующие соединения — это перестановки из 8 элементов без повторений. Их количество можно вычислить по формуле $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Задача 2 Найдите количество разных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 3, 7, 9 (цифры в числе не повторяются).

Решение

▶Из четырех цифр 0, 3, 7, 9, не повторяя заданные цифры, можно получить P_4 перестановок. Перестановки, начинающиеся с цифры 0, не являются записью четырехзначного числа — их количество P_3. Тогда искомое количество четырехзначных чисел равно

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18. \triangleleft$$

Комментарий

Поскольку порядок следования элементов учитывается и для получения четырехзначного числа надо использовать все элементы, то искомые соединения — это перестановки из 4 элементов. Их количество — P_4. При этом необходимо учесть, что в четырехзначном числе на первом месте не может стоять цифра 0. Таких чисел будет столько, сколько раз мы сможем выполнить перестановки из 3 оставшихся цифр, то есть P_3.

Задача 3* Есть десять книг, из которых четыре — учебники. Скольки-