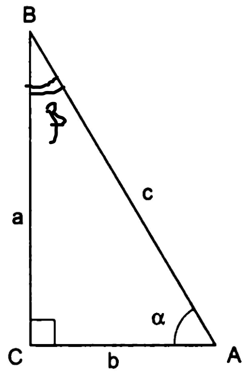
Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, здесь a, b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза.



Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$

здесь α – угол, противолежащий катету a.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Значения тригонометрических функций основных углов:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha \; \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1, \quad \boxed{\sin\beta = \frac{b}{c}} \text{ и } \cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$\hookrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \quad \hookrightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$

$\alpha = 90^\circ - \beta$

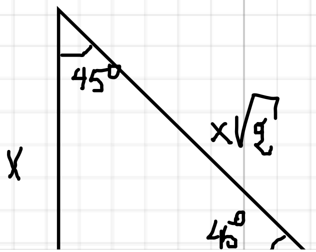
$$\sin\beta = \cos\alpha \iff \boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha}$$

$$\cos\beta = \sin\alpha \iff \boxed{\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha}$$

$\frac{\pi}{4} \leftrightarrow 45^\circ$

$\frac{\pi}{3} \leftrightarrow 60^\circ$

$\frac{\pi}{6} \leftrightarrow 30^\circ$



$x^2 + x^2 = 2x^2$

$$\sin 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{\pi}{2} \leftrightarrow 90$

x

$x\sqrt{2}$ 2

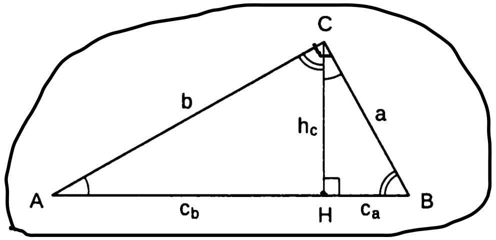
$\pi \leftrightarrow 180^\circ$

$2\pi \leftrightarrow 360^\circ$

Формула длины высоты, проведённой к гипотенузе:

$$h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{c_a c_b},$$

где c_a и c_b – проекции катетов a и b на гипотенузу c.



Для доказательства первого равенства достаточно записать площадь треугольника ABC двумя способами:

$$S_{\Delta ABC} = \boxed{\frac{1}{2}h_c c = \frac{1}{2}ab} \implies h_c = \frac{ab}{c}.$$

Справедливость второго равенства следует из подобия треугольников, на которые высота, проведённая из вершины прямого угла, разбивает исходный треугольник:

$$\Delta ACH \sim \Delta CBH \implies \frac{h_c}{c_b} = \frac{c_a}{h_c} \implies h_c = \sqrt{c_a c_b}.$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CH}{HB} = \frac{AH}{CH} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \boxed{\frac{h_c}{c_a} = \frac{c_b}{h_c}} \to h_c^2 = c_a c_b$$

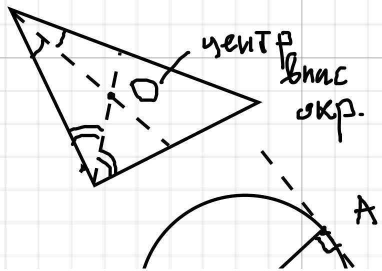
Заметим также, что оба треугольника подобны исходному треугольнику ABC по двум углам:

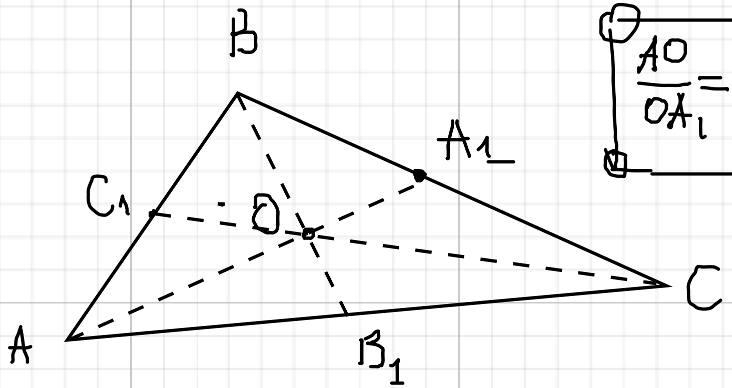
$$\Delta ACH \sim \Delta ABC \quad (\angle AHC = \angle ACB = 90^\circ,\ \text{угол } A \text{ общий}), \quad \to b = \sqrt{c_b c}$$

$$\Delta CBH \sim \Delta ABC \quad (\angle CHB = \angle ACB = 90^\circ,\ \text{угол } B \text{ общий}). \quad \to a = \sqrt{c_a c}$$

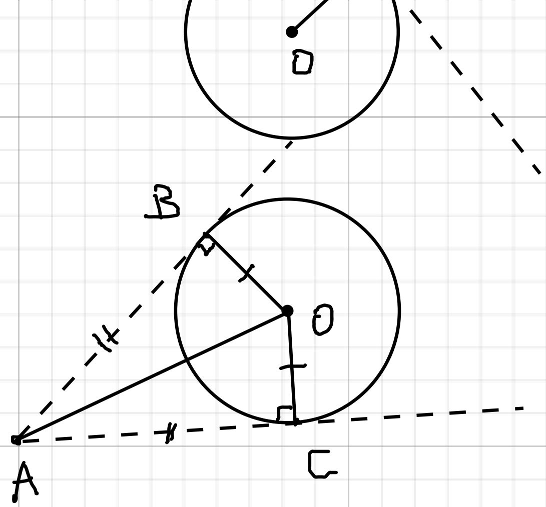
Напомним основные факты, связанные с произвольными треугольниками.

V
- Сумма углов треугольника равна 180°. ■
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины. ■
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке. ■
- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка есть центр вписанной окружности. При этом радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен соответствующей стороне треугольника, а отрезки касательных, проведённых из одной вершины – равны. ■
- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка есть центр описанной окружности. ■

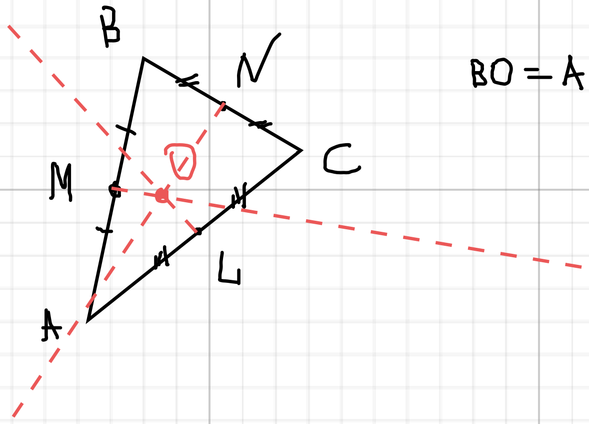




$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{BO}{OB_1}=\frac{OC}{OC_1}=\frac{2}{1}$$

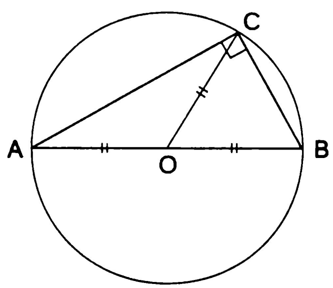


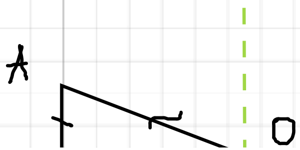
$AB=AC$



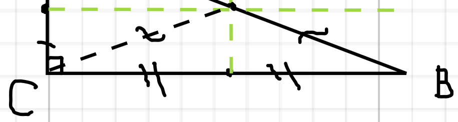
$BO=AO=CO=R$ – рад. опис окр

Замечание. Центр описанной окружности лежит внутри треугольника, если треугольник остроугольный, и вне треугольника, если он тупоугольный. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. В этом случае радиус описанной окружности равен медиане, проведённой к гипотенузе, и половине гипотенузы.





$$OA=OB=OC=m_c=\frac{c}{2}=R$$

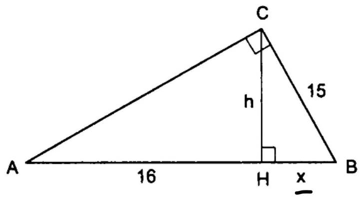


Примеры решения задач

Пример 1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Пусть катет $BC = 15$, а проекция катета AC на гипотенузу AB равна 16.

Поскольку диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен гипотенузе, нам надо найти проекцию катета BC на гипотенузу. Обозначим высоту CH через h, а проекцию катета BC на гипотенузу через x. По свойству высоты, проведённой к гипотенузе, и теореме Пифагора, применённой к ΔBCH, получим



$$\begin{cases} h^2 = 16x, \\ h^2 + x^2 = 15^2; \end{cases} \implies \boxed{x^2 + 16x - 15^2 = 0} \implies x = 9,$$

откуда диаметр $d = AB = 25$.

Ответ. 25.

$d = AB = AH + HB =$
$= 16 + 9$

$x^2 + px + q = 0$

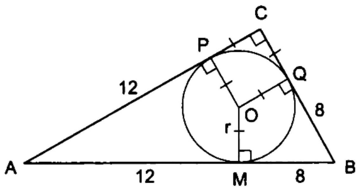
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$x_{1,2} = -8 \pm \sqrt{289} =$
$= -8 \pm 17$

Пример 2. Окружность с центром O вписана в прямоугольный треугольник ABC. Она касается гипотенузы AB в точке M, причём $AM = 12$ и $BM = 8$. Найдите площадь треугольника AOB.

Решение. Для того, чтобы найти площадь треугольника AOB, нам надо найти его высоту OM, которая равна радиусу вписанной окружности. Его и будем искать.

Пусть P и Q – точки касания вписанной окружности с катетами AC и BC. Четырёхугольник $PCQO$ является прямоугольником, поскольку у него $\angle C = 90°$ по условию, а $OP \perp PC$ и $OQ \perp QC$ как радиусы в точках касания. Кроме того, он является квадратом, так как $OP = OQ = r$, где r – радиус вписанной окружности.



По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AP = AM = 12$ и $BQ = BM = 8$.

Применив теорему Пифагора к треугольнику ABC, получим:

$$(12+8)^2 = (12+r)^2 + (8+r)^2 \implies r = 4 \implies S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot r = 40.$$ V

Ответ. 40.

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

$(R+r)^2 + (r+8)^2 = 20^2$

$144 + 24r + r^2 + r^2 + 16r + 64 = 400$

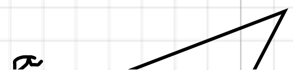
$2r^2 + 40r - 192 = 0$

$r^2 + 20r - 96 = 0$

$r_{1,2} = -10 \pm \sqrt{100 + 96} =$
$= -10 \pm 14$

$r = 4$

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$ V



Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma.$

Здесь и далее a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – противолежащие им углы; R – радиус описанной около треугольника окружности.

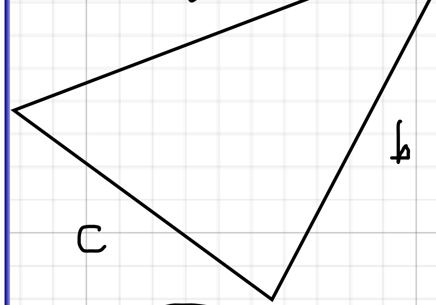
Напомним также и некоторые другие утверждения, справедливые для произвольных треугольников.

- В треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон (*неравенство треугольника*).
- В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол. ✓
- Площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{1}{2}ch_c, \quad \boxed{S = \frac{abc}{4R},} \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \boxed{S = pr,}$$

где r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



$a + b > c$

$a + c > b$

$b + c > a$

П р и м е р ■ В треугольник со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 4$ вписана окружность. Найти длину отрезка DE, где D и E – точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

Р е ш е н и е. Для того, чтобы вычислить DE, необходимо знать AE, AD и косинус угла между ними. Тогда по теореме косинусов можно будет найти DE.

Обозначим равные отрезки касательных

$$BD = BF = x, \; CF = CE = y, \; AE = AD = z.$$

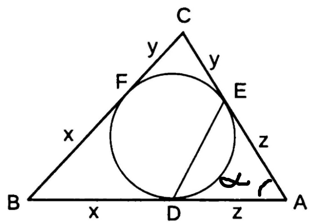
По условию

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ y + z = 4, \\ x + z = 8; \end{cases}$$

откуда $z = 3$.

Из теоремы косинусов, применённой к ΔABC, получим

$$6^2 = 8^2 + 4^2 - 2\cdot 8\cdot 4\cdot\cos\alpha \iff \cos\alpha = \frac{11}{16}.$$



Теперь применим теорему косинусов к ΔADE:

$$DE^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{11}{16} = \frac{45}{8},$$

откуда $DE = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

О т в е т. $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$. ✓