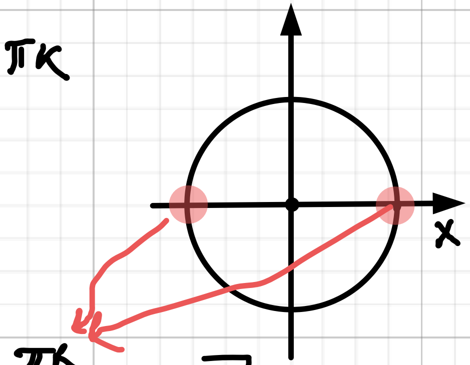
1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=0\\(x+y)^2-3=2xy\end{cases}$$

Решение: 1) $\sin t=0$, $t=\pi k$



$, k\in\mathbb{Z}$

$\frac{x+y}{2}=\pi n \rightarrow x+y=2\pi n$

$x^2+\cancel{2xy}+y^2-3=\cancel{2xy}$

$x^2+y^2=3$

$$\begin{cases}x+y=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\x^2+y^2=3\end{cases}$$

$y=2\pi n-x$

$x^2+(2\pi n-x)^2=3$

$x^2+4\pi^2n^2-4\pi n x+x^2-3=0$

$2x^2-4\pi n\,x+4\pi^2n^2-3=0$

a b

$D=b^2-4ac=16\pi^2n^2-8(4\pi^2n^2-3)=16\pi^2n^2-32\pi^2n^2+24\geqslant 0$

$D=24-16\pi^2n^2\geqslant 0 \rightarrow \underbrace{3-2\pi^2n^2\geqslant 0}$

$\boxed{n=0}$, $3-2\cdot 0>0$!

$n=1$, $3-2\pi^2<0$ (т.к. $\pi>3$, $\pi^2>9$, $2\pi^2>18$!)

При $n=0$ $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2=3 \end{cases} \to \underline{y=-x}$

$x^2+(-x)^2=3, \quad 2x^2=3, \quad x^2=\frac{3}{2} \to \left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=0$

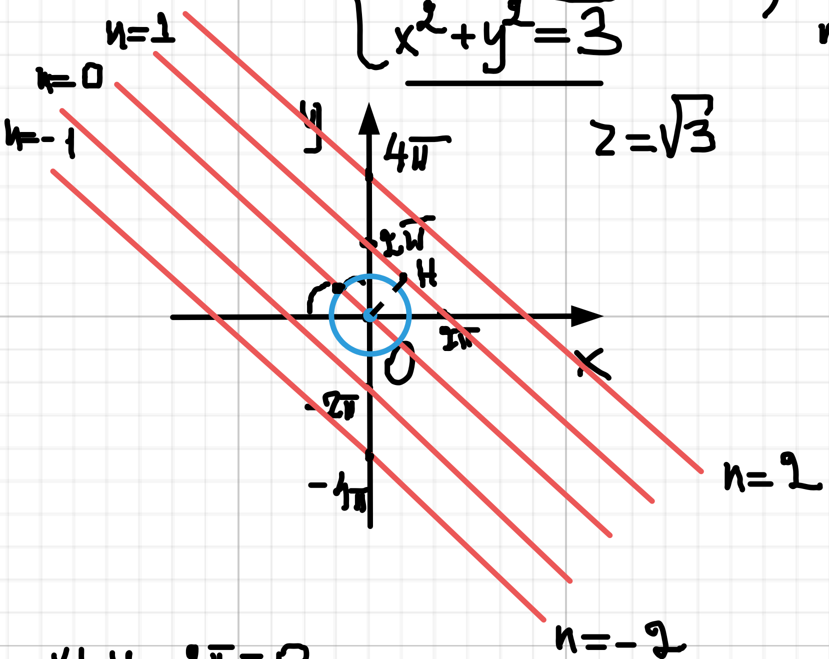
$\left[\begin{array}{l} x-\sqrt{\frac{3}{2}}=0 \\ x+\sqrt{\frac{3}{2}}=0 \end{array}\right. \Leftarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{\frac{3}{2}} \to y_1=-\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}} \to y_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \end{array}\right.$

Ответ: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

<u>2 способ</u>

$\begin{cases} x+y-2\pi n=0 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}, \quad n\in\mathbb{Z}$

$n=0, \quad y=-x$



$r=\sqrt{3}$

$n=1, \quad x+y-2\pi=0$

$n=-1, \quad x+y+2\pi=0$

$\rho=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$x+y-2\pi=0$

$\vec{n}(1;1)$

$\rho(O,\ell)=OH=\frac{|0+0-2\pi|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}=\pi\sqrt{2}>\sqrt{3}$

$2\pi^{2} > 3$!

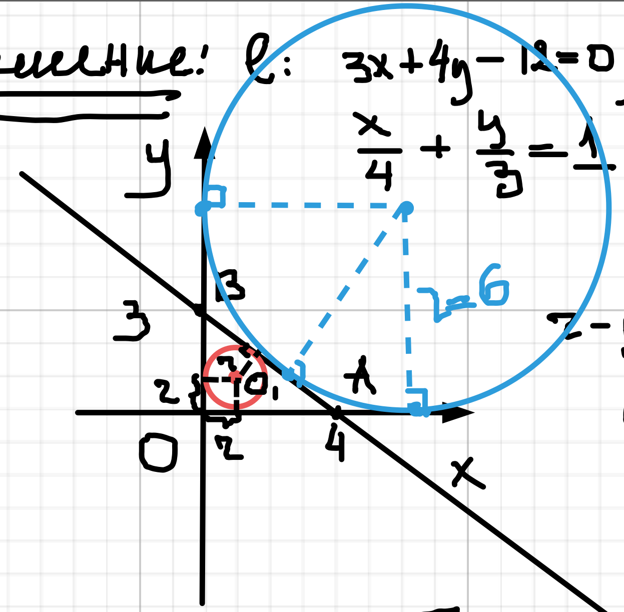
$\rho(O, \ell) > r = \sqrt{3}$ ↳ нет пересечения!

и далее так!

3. Составить уравнение окружности, вписанной в треугольник, стороны которого лежат на прямых $x = 0$, $y = 0$, $3x + 4y - 12 = 0$.

Решение: ℓ: $3x+4y-12=0$, $3x+4y=12 \;|:12$

$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$, $\vec{n} \perp \ell$ и $\vec{n}(3;4)$



r – рад. окр.

$O_1(r; r)$

1) способ. $AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} OB \cdot OA = \frac{12}{2} = 6$

$S_{\Delta ABC} = p \cdot r$ ↳ $r = \frac{S_\Delta}{p} = \frac{6}{\frac{3+4+5}{2}} = \frac{6}{6} = 1$

$O_1(1;1)$ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

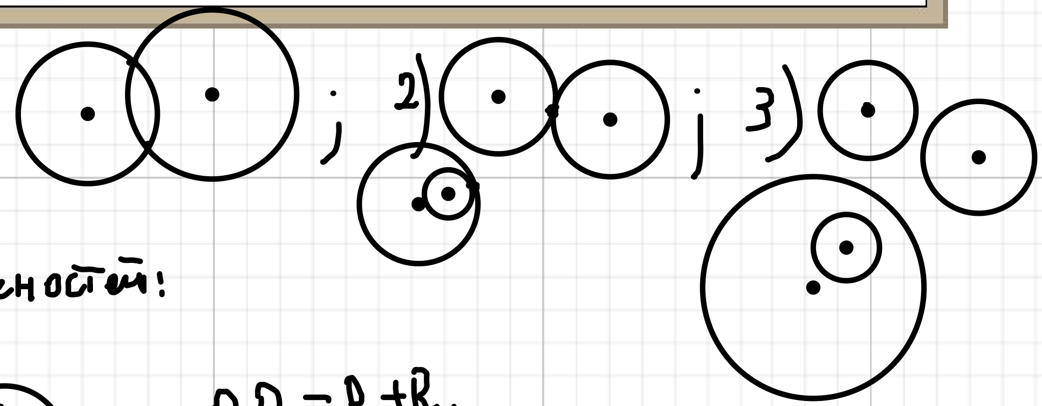
Ответ: ...

2 способ: $\rho(O_1, l) = \dfrac{|3r+4r-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = r$ — ур-ие!

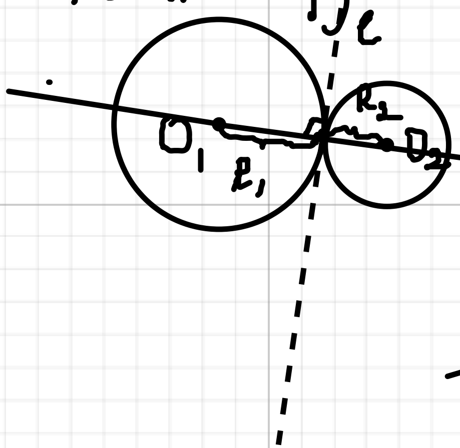
$$|7r-12| = 5r \iff \left[\begin{aligned} &7r-12=-5r \\ &7r-12=5r \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &12r=12 \\ &2r=12 \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &r=1 \text{ — ответ} \\ &r=6 \text{ — не удовл. геом. смыслу} \end{aligned}\right.$$

8. Найдите все такие пары действительных чисел $(a; b)$, для которых система
$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ (x-a)^2+y^2=b^2 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

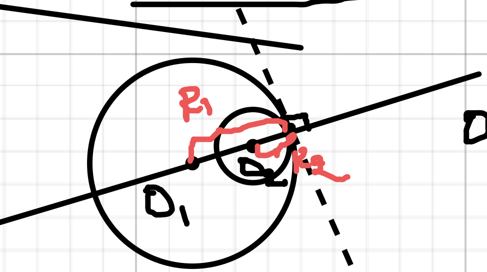
Решение: 1) ; 2) ; 3)



касание окружностей:

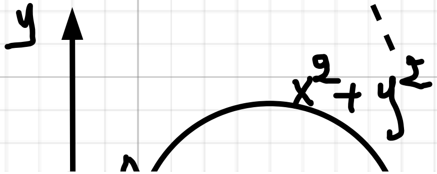


$O_1O_2 = R_1 + R_2$

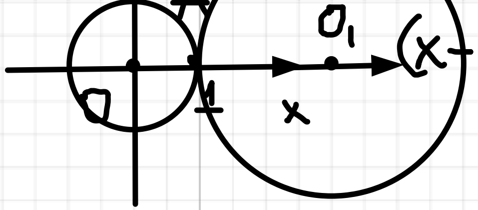


$O_1O_2 = R_1 - R_2$

1 случай: $a > 0$



$x^2+y^2=1$, $O(0;0)$
$R=1$



$(x-a)^2 + y^2 = b^2$

$O_1(a;0)$

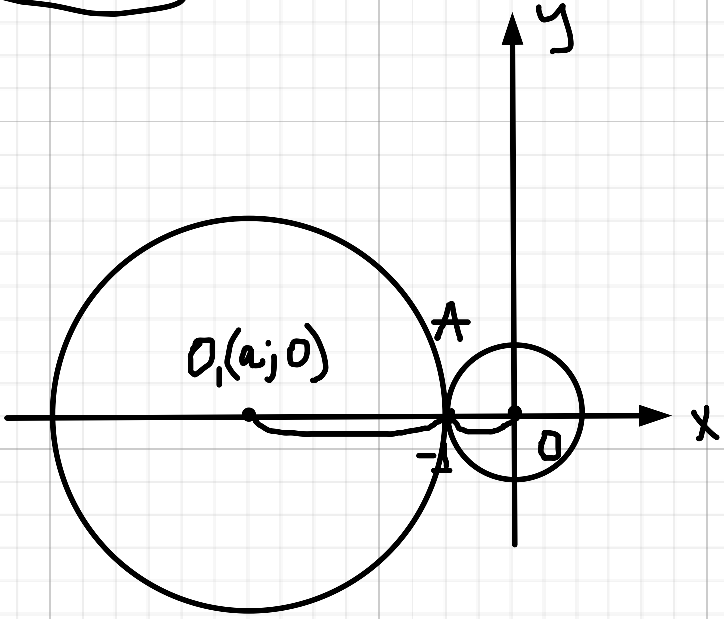
$R_1 = b > 0$

$OO_1 = R + R_1$

$OO_1 = a > 0$

$a = 1 + b$, $b = a - 1$

2 случай: $a < 0$



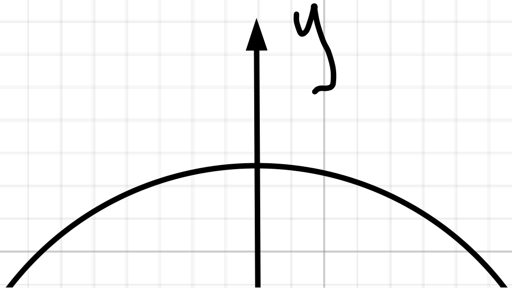
$O_1O = R_1 + R$

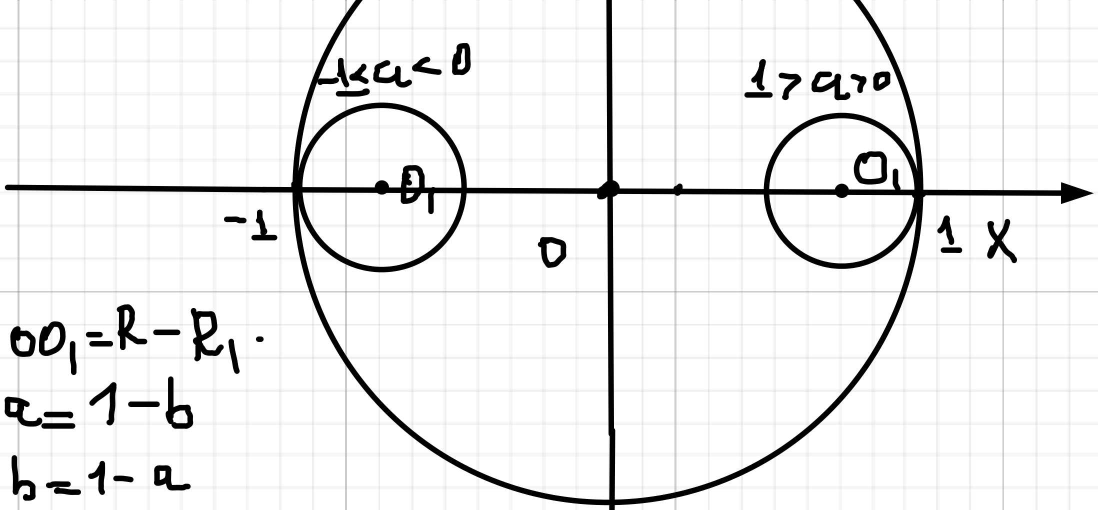
$a = b - 1$, $b = a - 1$

$(a: a-1)$

$(a; a-1)$

3, 4 случаи:





$0<a<1$: $OO_1 = R - R_1$.

$a = 1 - b$

$b = 1 - a$

$-1<a<0$: $OO_1 = R - R_1$

$a = -1 + b$

$b \overset{+}{=} a + 1$

$(a; 1-a)$

$(a; a-1)$

Ответ: $(a; a-1)$, $(a; -a-1)$, $(a; -a+1)$, $(a; a+1)$ $\Rightarrow$ $(a; \pm a+1)$, $(a; \pm a-1)$

Ответ: $(a; \pm a \pm 1)$