[redacted] Квадратный трехчлен, квадратное уравнение. Вывод формулы корней квадратного уравнения. Условие существования (отсутствия) корней у квадратного уравнения. Теорема Виета и обратная к ней. Корень квадратного трехчлена. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители.

Квадратным трёхчленом называется выражение вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c – коэффициенты (постоянные числа), $\boxed{a \neq 0}$, x – переменная. Если $a = 1$, то квадратный трёхчлен называется приведённым.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *квадратным уравнением.*

Число $x_0 \in \mathbb{R}$ называется действительным *корнем квадратного трёхчлена*, если $f(x_0) = 0$. Соответственно, это же значение x_0 обращает квадратное уравнение в верное равенство, то есть является корнем квадратного уравнения.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

По значению дискриминанта можно определить количество корней: если

- $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет действительных корней;
- $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет единственный корень $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (иногда говорят о наличии двух совпадающих корней); $x_1 = x_2$
- $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня, вычисляемые по формулам: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. $x_1 \neq x_2$

З а м е ч а н и е. В случае $b = 2p$, $p \in \mathbb{R}$, формулы корней можно упростить, используя понятие чётного дискриминанта: $D_1 = p^2 - ac$. Тогда формулы для корней принимают вид

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D_1}}{a}, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D_1}}{a}.$$

$1 + 4i$

$b = 2(-2)$ $\quad x^2 - 4x + 4 = 0$ $\quad (x-2)^2 = 0 \to x - 2 = 0 \to x = 2$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{1} = 2$$

$a = 1$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$q = c, \quad b = p$$

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Разложение на линейные множители. Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то справедливо разложение

$$\underline{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}, \quad \checkmark$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

Замечание. В случае нулевого дискриминанта квадратный трёхчлен преобразуется к виду $a(x - x_0)^2$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ – его корень.

$$x_1 = x_2 = x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Используя формулы корней квадратного трёхчлена (в случае неотрицательного дискриминанта, то есть при их наличии), можно установить связь между корнями и коэффициентами, которая нередко позволяет избежать непосредственного вычисления самих корней.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 (может быть, совпадающих), то для них выполнены соотношения

$A \Rightarrow B$

$B \Rightarrow A$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases} \quad \checkmark \qquad (14)$$

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 являются решениями системы

$a = 1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q, \end{cases} \quad \checkmark \qquad (15)$$

то они же являются корнями приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$.

Применяя формулы сокращённого умножения и соотношения из теоремы Виета, можно получить полезные выражения для вычисления различных комбинаций корней квадратного уравнения без непосредственного вычисления самих корней. Например:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + \underline{2x_1x_2} + x_2^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{\ldots} - 2\frac{c}{\ldots} \qquad (16)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}; \qquad (16)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) = -\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a}\right); \qquad (17)$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2(x_1x_2)^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right)^2 - 2\frac{c^2}{a^2}. \qquad (18)$$

Подобным образом можно выразить и многие другие комбинации корней через коэффициенты квадратного уравнения.

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 \quad) \quad x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 =$$

$$= \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2(x_1x_2)^2$$

График квадратичной функции. Функция вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратичной функцией*. В силу представления

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a},$$

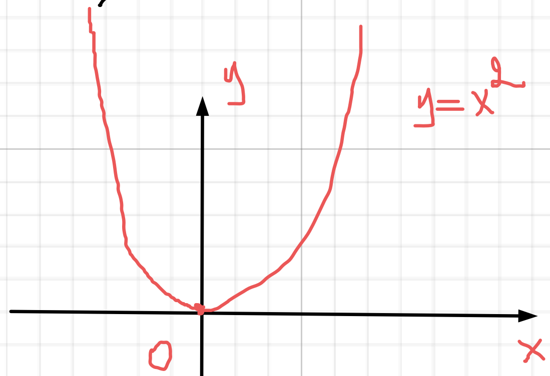
где $D = b^2 - 4ac$, можно говорить о том, что график квадратичной функции получается из графика степенной функции $y = x^2$ последовательными элементарными преобразованиями:

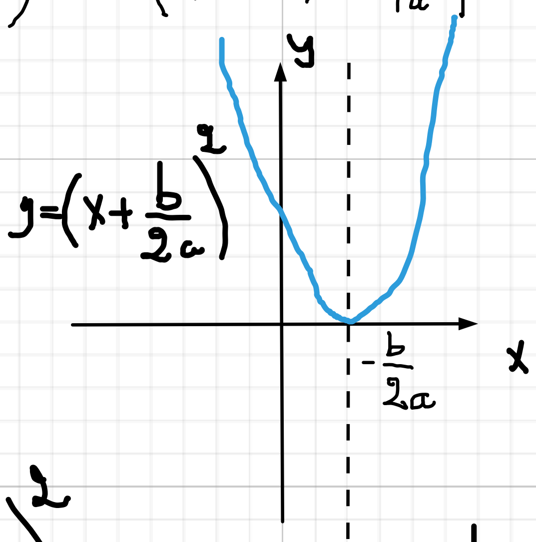
$$y = x^2 \to \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \to a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \to a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = f(x);$$

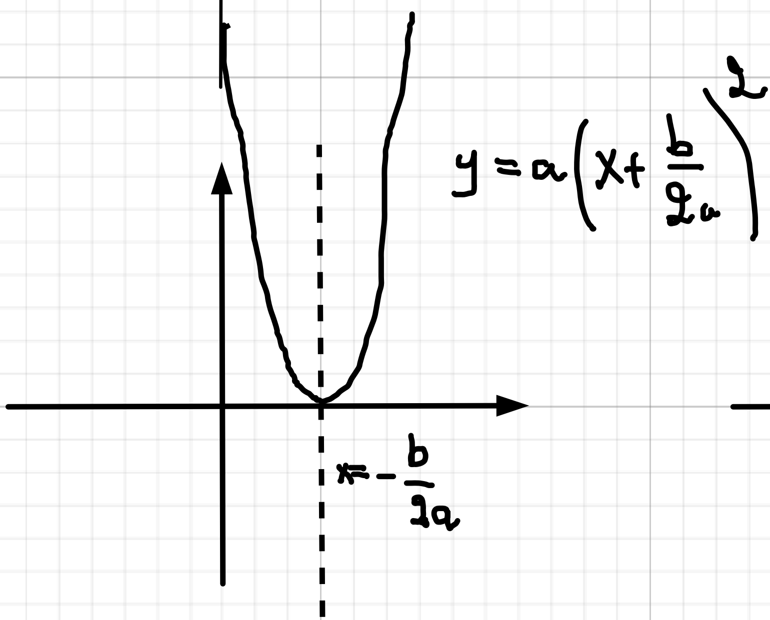
то есть графиком квадратичной функции $f(x)$ является парабола с вершиной $(x_в; y_в)$, где $x_в = -\frac{b}{2a}$, $y_в = -\frac{D}{4a}$. Вертикальная прямая $x = -\frac{b}{2a}$ задаёт её ось симметрии.

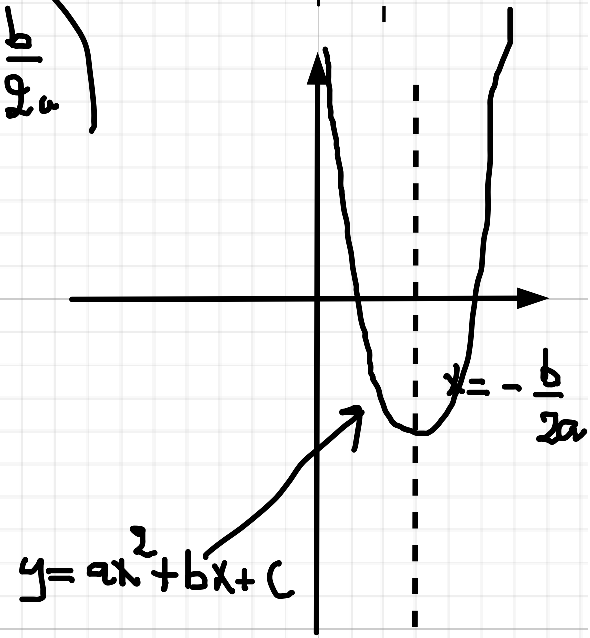
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)$$


y
$y=x^2$
O
x


y
$y=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
$-\frac{b}{2a}$
x


$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
$x=-\frac{b}{2a}$


$x=-\frac{b}{2a}$
$y=ax^2+bx+c$