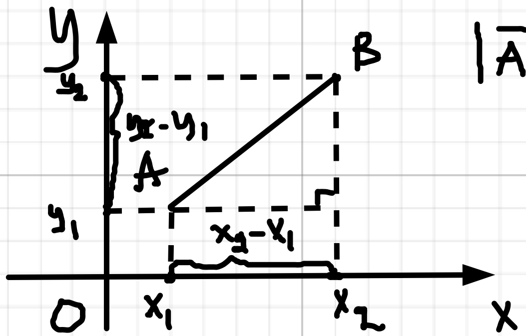
Расстояние между двумя точками

Требуется найти расстояние d между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ плоскости Oxy.

◐ Решение: Искомое расстояние d равно длине вектора $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, т. е.

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



$$|\vec{AB}|^2 = (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2$$

Деление отрезка в данном отношении

Требуется разделить отрезок AB, соединяющий точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в заданном отношении $\lambda > 0$, т. е. найти координаты точки $M(x; y)$ отрезка AB такой, что $\frac{AM}{MB} = \lambda$ (см. рис. 26).

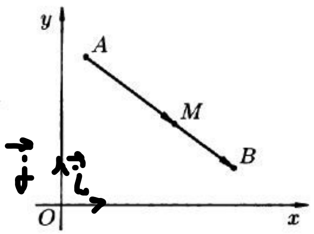


Рис. 26

◐ Решение: Введем в рассмотрение векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$. Точка M делит отрезок AB в отношении λ, если

$$\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}. \qquad (9.1)$$

Но $\overline{AM} = (x - x_1; y - y_1)$, т. е. $\overline{AM} = (x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j}$ и $\overline{MB} = (x_2 - x; y_2 - y)$, т. е. $\overline{MB} = (x_2 - x)\bar{i} + (y_2 - y)\bar{j}$. Уравнение (9.1) принимает вид

$$(x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j} = \lambda(x_2 - x)\bar{i} + \lambda(y_2 - y)\bar{j}.$$

Учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, получаем

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}} \qquad (9.2)$$

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2$$

$$(1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2$$

и

$$y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}}. \qquad (9.3)$$

Формулы (9.2) и (9.3) называются *формулами деления отрезка в данном отношении*. В частности, при $\lambda = 1$, т. е. если $AM = MB$, то они примут вид $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$. В этом случае точка $M(x;y)$ является *серединой отрезка* AB. ●

Площадь треугольника

Требуется найти площадь треугольника ABC с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$.

◐ Решение: Опустим из вершин A, B, C перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на ось Ox (см. рис. 27). Очевидно, что

$$S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}.$$

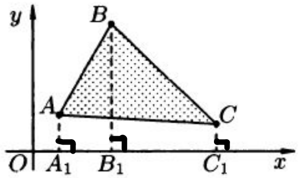
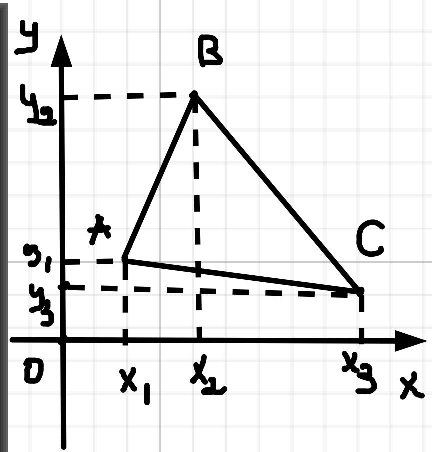


Рис. 27



Поэтому

$$S_{ABC} = \frac{y_1+y_2}{2}\cdot(x_2-x_1) + \frac{y_2+y_3}{2}\cdot(x_3-x_2) - \frac{y_1+y_3}{2}\cdot(x_3-x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_2 + x_3y_3 -$$

$$- x_2y_3 - x_3y_1 + x_1y_1 - x_3y_3 + x_1y_3) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_3(y_2-y_1) - x_1(y_2-y_1) - x_2(y_3-y_1) + x_1(y_3-y_1)) =$$

$$= \frac{1}{2}((y_2-y_1)(x_3-x_1) - (y_3-y_1)(x_2-x_1)) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3-x_1 & x_2-x_1 \\ y_3-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3-x_1 & x_2-x_1 \\ y_3-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}. \quad V$$ ●

Замечание: Если при вычислении площади треугольника получим $S=0$, то это означает, что точки A, B, C лежат на одной прямой, если же получим отрицательное число, то следует взять его модуль.

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)\cdot A_1B_1$$

$$= \frac{y_1+y_2}{2}$$

$AA_1 = y_1$

$BB_1 = y_2$

$A_1B_1 = x_2 - x_1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Площадь треугольника. Пусть требуется определить площадь треугольника ABC (см. рис. 22). Используя метод координат, можно предложить следующий алгоритм.

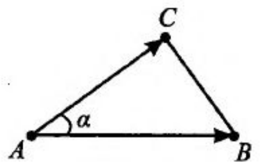


Рис. 22

1) Вводим систему координат и определяем в ней координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

2) Определяем $\cos\alpha$ по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|},$$

где α — угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

3) Определяем $\sin\alpha$ по формуле

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

4) Определяем искомую площадь по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin\alpha.$$

[redacted] **Площадь четырёхугольника.** Пусть требуется найти площадь произвольного выпуклого четырёхугольника $ABCD$ (см. рис. 27). Используя метод координат, можно предложить следующий алгоритм.

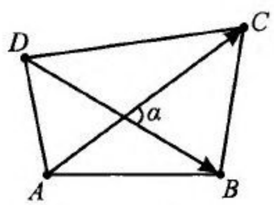


Рис. 27

1) Вводим систему координат и определяем в ней координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$.

2) Определяем $\cos\alpha$ по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{DB}|},$$

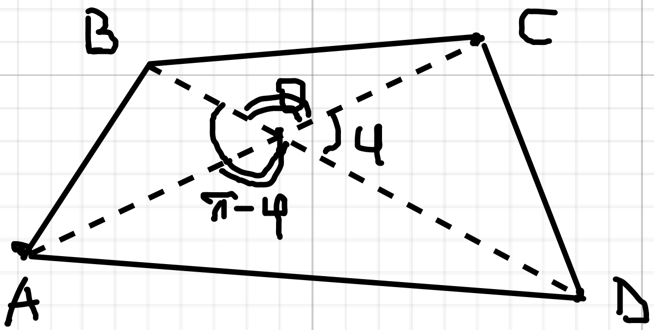
где α — угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$.

3) Определяем $\sin\alpha$ по формуле

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

4) Определяем искомую площадь по формуле

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot DB\cdot \sin\alpha,$$



$\sin(\pi-\varphi) = \sin\varphi$

$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} =$

$$=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\varphi+\frac{1}{2}BO\cdot CO\sin(\pi-\varphi)+\frac{1}{2}CO\cdot DO\cdot\sin\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}DO\cdot AO\cdot\sin(\pi-\varphi)=\frac{1}{2}AO\cdot BO\sin\varphi+\frac{1}{2}BO\cdot CO\cdot\sin\varphi+\frac{1}{2}CO\cdot DO\sin\varphi+\frac{1}{2}DO\cdot AO\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}BO\underbrace{(AO+OC)}_{AC}\sin\varphi+\frac{1}{2}DO\underbrace{(AO+OC)}_{AC}\sin\varphi=$$

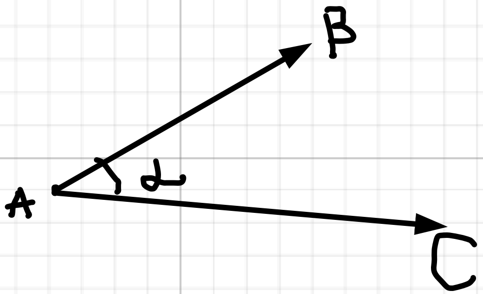
$$=\frac{1}{2}BO\cdot AC\cdot\sin\varphi+\frac{1}{2}DO\cdot AC\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}AC\underbrace{(BO+OD)}_{BD}\sin\varphi=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi$$

Ч.Т.Д.

1 Найдите площадь треугольника ABC, если известны координаты точек $A(1;3;$[redacted]$)$, $B(0;-2;$[redacted]$)$ и $C(1;4;$[redacted]$)$.

Решение:



$\vec{AB}(-1;-5)$

$\vec{AC}(0;1)$

$$\cos\alpha=\frac{-1\cdot 0+(-5)\cdot 1}{\sqrt{0^2+1}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-5)^2}}=\frac{-5}{\sqrt{26}}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{25}{\ldots}}=\frac{1}{\ldots}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{26}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{26}}} =$$

$$= \frac{1}{2};$$

Линия на плоскости часто задается как *множество точек*, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние R от некоторой фиксированной точки O (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел — ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е. равенства, связывающего координаты точек линии).

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x;y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Так, для того чтобы установить лежит ли точка $A(x_0; y_0)$ на данной линии, достаточно проверить (не прибегая к геометрическим построениям), удовлетворяют ли координаты точки A уравнению этой линии в выбранной системе координат.

Пример 10.1. Лежат ли точки $K(-2;1)$ и $L(1;1)$ на линии $2x + y + 3 = 0$?

◯ Решение: Подставив в уравнение вместо x и y координаты точки K, получим $2 \cdot (-2) + 1 + 3 = 0$. Следовательно, точка K лежит на данной линии. Точка L не лежит на данной линии, т. к. $2 \cdot 1 + 1 + 3 \neq 0$. ●

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости Oxy задана произвольная прямая, не параллельная оси Oy. Ее положение вполне определяется ординатой b точки $N(0;b)$ пересечения с осью Oy и углом α между осью Ox и прямой (см. рис. 41).

Под углом α $(0 \leqslant \alpha < \pi)$ наклона прямой понимается наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг

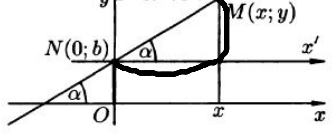


Рис. 41

точки пересечения прямой и оси Ox против часовой стрелки ось Ox до ее совпадения с прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x;y)$ (см. рис. 41). Проведем через точку N ось Nx', параллельную оси Ox и одинаково с ней направленную. Угол между осью Nx' и прямой равен α. В системе $Nx'y$ точка M имеет координаты x и $y-b$. Из определения тангенса угла следует равенство $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-b}{x}$, т. е. $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$. Введем обозначение $\operatorname{tg}\alpha = k$, получаем уравнение

$$\boxed{y = kx + b,} \quad \checkmark \qquad (10.2)$$

которому удовлетворяют координаты любой точки $M(x;y)$ прямой. Можно убедиться, что координаты любой точки $P(x;y)$, лежащей вне данной прямой, уравнению (10.2) не удовлетворяют.

Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ называется ***угловым коэффициентом*** прямой, а уравнение (10.2) — ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***.

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и, следовательно, уравнение этой прямой будет иметь вид $y = kx$.

1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha > 0$

$k > 0$

2) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\operatorname{tg}\alpha < 0$

$k < 0$

Если прямая параллельна оси Ox, то $\alpha = 0$, следовательно, $k = \operatorname{tg}\alpha = 0$ и уравнение (10.2) примет вид $y = b$.

Если прямая параллельна оси Oy, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, уравнение (10.2) теряет смысл, т. к. для нее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид

$$x = a, \qquad (10.3)$$

где a — абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox. Отметим, что уравнения (10.2) и (10.3) есть уравнения первой степени.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\overline{n} = (A;B)$.

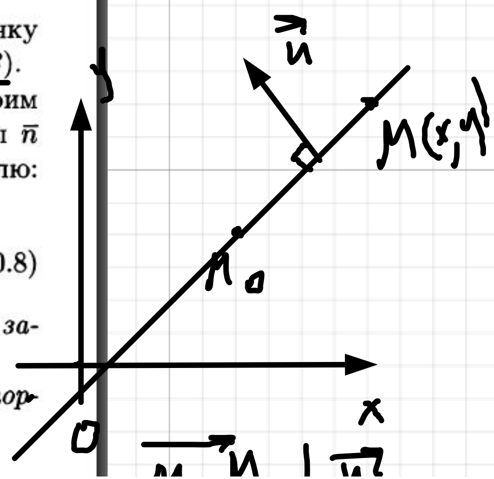
Возьмем на прямой произвольную точку $M(x;y)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ (см. рис. 43). Поскольку векторы $\overline{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, то есть

$$\checkmark \quad \boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \qquad (10.8)$$

Уравнение (10.8) называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору*.

Вектор $\overline{n} = (A;B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой*.

Уравнение (10.8) можно переписать в виде



$M_0M \perp n$

$$\boxed{Ax + By + C = 0,} \tag{10.9}$$

где A и B — координаты нормального вектора, $C = -Ax_0 - By_0$ — свободный член. Уравнение (10.9) есть общее уравнение прямой

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0$$

$$Ax + B\cdot y + \underbrace{(-A\cdot x_0 - B\cdot y_0)}_{= C} = 0$$

Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение первой степени относительно x и y в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{10.4}$$

где A, B, C — произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Покажем, что уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии. Возможны два случая.

Если $B = 0$, то уравнение (10.4) имеет вид $Ax + C = 0$, причем $A \neq 0$, т. е. $x = -\frac{C}{A}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

Если $B \neq 0$, то из уравнения (10.4) получаем $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$.

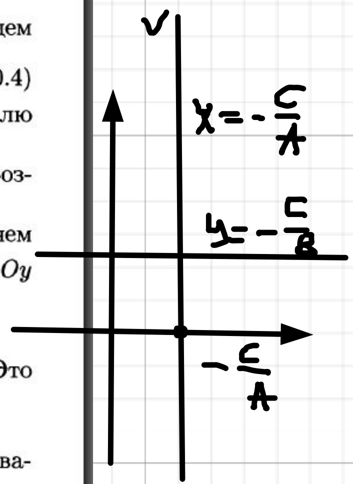
Итак, уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии, оно называется *общим уравнением прямой.*

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A = 0$, то уравнение приводится к виду $y = -\frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox;

2) если $B = 0$, то прямая параллельна оси Oy;

3) если $C = 0$, то получаем $Ax + By = 0$. Уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0;0)$, прямая проходит через начало координат.



$x = -\frac{B}{A} y$

k

$x = ky$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k. Уравнение этой прямой можно записать в виде $y = kx + b$, где b — пока неизвестная величина. Так как прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $y_0 = kx_0 + b$. Отсюда $b = y_0 - kx_0$.

Подставляя значение b в уравнение $y = kx + b$, получим искомое уравнение прямой $y = kx + y_0 - kx_0$, т. е.

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0).} \qquad (10.5)$$

Уравнение (10.5) с различными значениями k называют также ***уравнениями пучка прямых*** с центром в точке $M(x_0; y_0)$. Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad (10.6)$$

где k — пока неизвестный коэффициент.

Так как прямая проходит через точку $M_2(x_2; y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (10.6): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда находим $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя найденное значение k в уравнение (10.6), получим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.} \qquad (10.7)$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Если $x_2 = x_1$, то прямая, проходящая через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y = y_1$, прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a; 0)$, а ось Oy — в точке $M_2(0; b)$ (см. рис. 42). В этом случае уравнение (10.7) примет вид

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.}$$

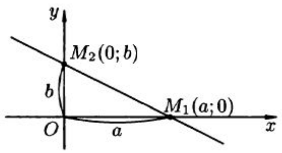


Рис. 42

Это уравнение называется ***уравнением прямой в отрезках***, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

Пример 1. Написать уравнение прямой l, которая параллельна прямой $y = 2x - 3$ и проходит через точку $A(3; 9)$.

Пример 2. Написать уравнение прямой l, проходящей через точки $A\left(-1; -\frac{9}{2}\right)$ и $B(4; 3)$.