[redacted] Векторы на плоскости и операции над ними: сложение, вычитание, умножение вектора на число. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.

## [redacted] Векторы

**1. *Основные понятия и определения***

1) *Определение, изображение и обозначение вектора*

*Вектором* (*направленным отрезком*) называют отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом.

Вектор изображается отрезком со стрелкой (рис. 57). Вектор обозначается двумя заглавными буквами латинского алфавита со стрелкой над ними: первая буква обозначает начало вектора, вторая — его конец (на рис. 57 изображены векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BK}$, для которых точки $A$ и $B$ — начала, точки $C$ и $K$ — концы), а также малыми буквами латинского алфавита со стрелкой наверху: $\vec{a}$.

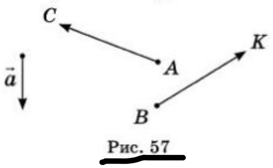


Рис. 57

$\vec{a}$

$\overrightarrow{AC}$

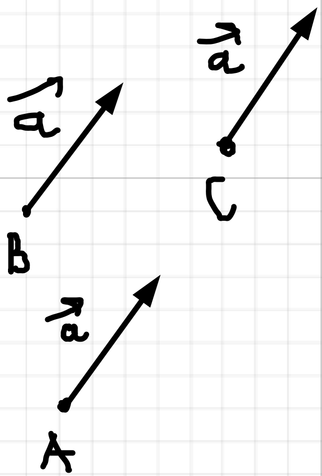
$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$..

2) *Определение и обозначение нулевого вектора*

*Нулевым* называют вектор, начало и конец которого совпадают. Нулевой вектор изображают точкой. Если точка обозначена буквой $F$, то вектор обозначается $\overrightarrow{FF}$. Нулевой вектор обозначается также $\vec{0}$.

3) *Определение и обозначение длины* (*модуля*) *вектора*

*Длиной* или *модулем* ненулевого вектора $\overrightarrow{AC}$ называется длина отрезка $AC$. Обозначают длину вектора $\overrightarrow{AC}$ так: $|\overrightarrow{AC}|$. Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.




4) *Определение коллинеарных векторов, сонаправленные и противоположно направленные векторы*

*Коллинеарными* называют ненулевые векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Если два ненулевых вектора коллинеарны, то они направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы называются *сонаправленными*, во втором — *противоположно направленными*.

На рис. 58 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — противоположно направленные. Обозначают эти факты так:

$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$

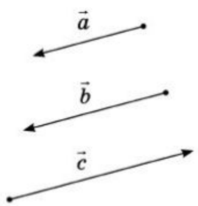


Рис. 58

5) *Определение равных векторов*

*Равными* называют сонаправленные векторы, имеющие равные длины. На рис. 59 $\vec{a} = \vec{b}$, т. к. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

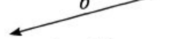


Рис. 59

6) *Откладывание вектора от точки*

Если точка $C$ — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что *вектор* $\vec{a}$ *отложен от точки* $C$. От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и только один. Равные векторы, отложенные от разных точек, обычно обозначают одной и той же буквой.

**2. *Действия над векторами***

1) *Сложение*

Если от одной точки отложить вектор $\vec{a}$, а от его конца отложить вектор $\vec{b}$, то вектор с началом в начале вектора $\vec{a}$ и с концом в конце вектора $\vec{b}$ называют *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Сумму векторов обозначают, как и сумму чисел: $\vec{a} + \vec{b}$. Правило нахождения суммы векторов, вытекающее из этого определения, называется *правилом треугольника* (рис. 60).

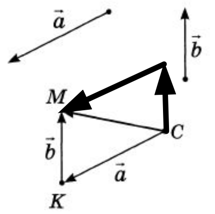



Рис. 60

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{CM}$$

Часто (особенно в физике) для нахождения суммы векторов используют *правило параллелограмма:* чтобы найти сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, надо отложить их от одной точки, построить на них параллелограмм; вектор с началом в их общем начале и с концом в противоположной вершине параллелограмма и есть сумма $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 61).

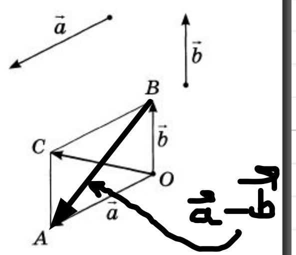
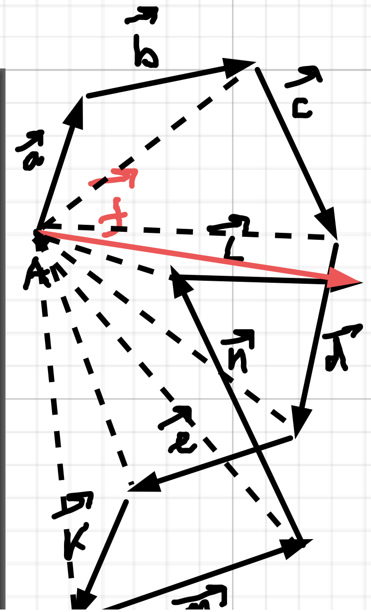



Рис. 61

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

Для сложения нескольких векторов используют *правило многоугольника:* от произвольной точки откладывают один вектор, от его конца — другой, от конца этого — следующий и т. д. Сумма — это вектор с началом в начале первого вектора, с концом в конце последнего.



*Законы сложения векторов*

1. Переместительный закон:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

2. Сочетательный закон:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

3. Закон поглощения нулевого вектора:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

2) *Вычитание*

*Разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Разность векторов обозначают, как и разность чисел: $\vec{a} - \vec{b}$.

*Правило построения вектора-разности* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{k}+\vec{m}+\vec{n}+\vec{l}=\vec{f}$

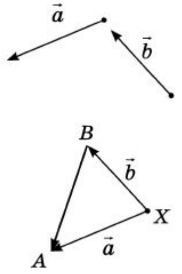
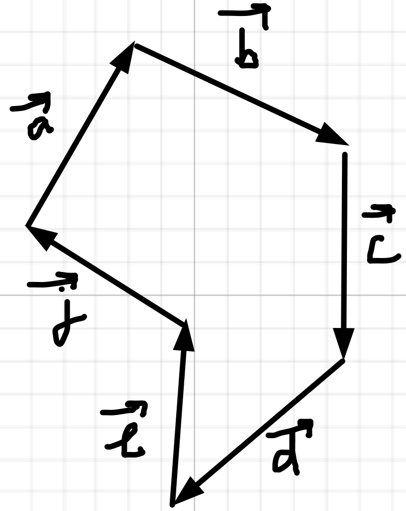


Рис. 62

Для построения разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нужно от произвольной точки $X$ отложить оба вектора; вектор-разность имеет начало в конце «вычитаемого» вектора, а конец — в конце «уменьшаемого» (рис. 62):

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{BA}$$

Вектор называют *противоположным* данному вектору, если он имеет такую же длину, как данный, но направлен противоположно данному. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают $-\vec{a}$. Для нулевого вектора противоположным считается нулевой вектор. ✓




$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{y}=\vec{0}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=0$$

*Свойства вычитания векторов*

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$ ✓

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$ ✓

**3)** ***Умножение*** *вектора на число (определение и обозначение произведения вектора на число, построение произведения вектора на число, законы умножения вектора на число)*

*Произведением ненулевого вектора $\vec{c}$ и произвольного числа $k$* называют вектор:

— длина которого равна произведению длины $\vec{c}$ и модуля $k$ ($|\vec{c}|\cdot|k|$);

— направление совпадает с направлением вектора $\vec{c}$, если $k \geq 0$ и противоположно направлению $\vec{c}$, если $k < 0$.

*Произведением нулевого вектора на любое число является нулевой вектор.*

Произведение вектора $\vec{c}$ на число $k$ обозначают так: $k\vec{c}$.

*Построение произведения вектора на число*

Для построения произведения вектора $\vec{c}$ на положительное число $k$ нужно от произвольной точки $X$ отложить луч $XA$, сонаправленный вектору $\vec{c}$, а на нём отрезок $XC$, длина которого равна $|\vec{c}|\cdot k$ (рис. 63, 1).

Для построения произведения вектора $\vec{c}$ на отрицательное число $k$ нужно от произвольной точки $X$ отложить луч $XA$, противоположно направленный вектору $\vec{c}$, а на нём отрезок $XC$, длина которого равна $|\vec{c}|\cdot|k|$ (рис. 63, 2).

Рис. 63

*Законы умножения вектора на число*

1. Сочетательный закон:

$$(km)\vec{c} = k(m\vec{c})$$

2. Первый распределительный закон:

$$(k+m)\vec{c} = k\vec{c} + m\vec{c}$$

3. Второй распределительный закон:

$$k(\vec{c} + \vec{b}) = k\vec{c} + k\vec{b}$$

4. Закон поглощения нулём:

$$0\vec{c} = \vec{0}$$

5. Векторы $\vec{c}$ и $k\vec{c}$ коллинеарные.

$\vec{m} = t\vec{n}$, $t$ - число!

4) *Скалярное произведение векторов*

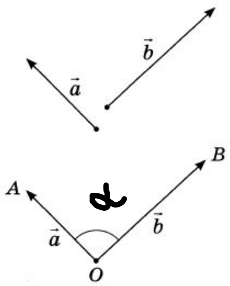


Рис. 64

*Угол между ненулевыми векторами*

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложить от одной точки $O$ (рис. 64), то образовавшийся угол $AOB$ называют *углом между векторами*. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

$$\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \angle AOB$$

$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \alpha$

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то угол между ними считают равным нулю. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен $90^\circ$. Обозначают так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

*Скалярным произведением* двух векторов называют произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$. По определению:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$$

**Теорема (О разложении вектора по двум неколлинеарным векторам).** Любой вектор можно единственным образом разложить по двум произвольным неколлинеарным векторам.

Рассмотрим прямоугольную систему координат. От начала координат отложим векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ такие, что их длины равны единице, а направления совпадают соответственно с направлением осей $Ox$ и $Oy$. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ называются *координатными векторами* или *ортами*.

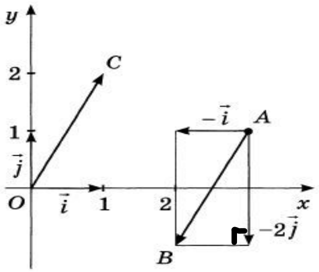


Рис. 65

Любой вектор $\vec{c}$ можно единственным образом разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде: $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Числа $x$ и $y$ называются *координатами вектора* $\vec{c}$.

Пишут: $\vec{c}\{x; y\}$.

На рис. 65 $\overrightarrow{OC}\{1; 2\}$; $\boxed{\overrightarrow{AB}\{-1; -2\}}$.

$\overrightarrow{AB} = -1 \cdot \vec{i} + (-2)\vec{j}$

$\overrightarrow{OC} = \vec{i} + 2\vec{j}$

**Теорема.** Если векторы равны, то их координаты соответственно равны.

*Выражение координат вектора через координаты его начала и конца*

Если $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, то $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$. ✓

*Выражение длины вектора через его координаты*

Если $\overrightarrow{AB}\{x;\ y\}$, то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

*Правила нахождения координат результатов действий с векторами*

— Каждая координата ***суммы*** нескольких векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых векторов, т. е. если $\vec{c}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{d}\{x_2;\ y_2\}$, то $\vec{c} + \vec{d}\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2\}$.

— Каждая координата ***разности*** двух векторов равна разности их соответствующих координат, т. е. если $\vec{c}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{d}\{x_2;\ y_2\}$, то $\vec{c} - \vec{d}\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2\}$.

— Каждая координата ***произведения** вектора на число* равна произведению его соответствующей координаты на это число, т. е. если $\vec{c}\{x;\ y\}$, то $k\vec{c}\{kx;\ ky\}$.

*Скалярное произведение в координатах*

Если $\vec{c}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{d}\{x_2;\ y_2\}$, то $\vec{c}\,\vec{d} = x_1x_2 + y_1y_2$. ✓

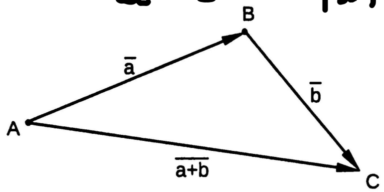
***Задача 1.***

Докажите, что для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется неравенство $|\overline{a} + \overline{b}| \le |\overline{a}| + |\overline{b}|$. ✓

$\vec{a} = 0$ $\quad |\vec{a}| = 0$

$|\vec{b}| \le |\vec{b}| \iff \left[\begin{array}{l}\vec{b} < \vec{b}\\ \vec{b} = \vec{b}\end{array}\right.$

Р е ш е н и е. Если хотя бы один из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен нулю, то неравенство $|\overline{a} + \overline{b}| \le |\overline{a}| + |\overline{b}|$ выполняется. Докажем справедливость неравенства при $\overline{a} \ne \overline{0}$ и $\overline{b} \ne \overline{0}$.




$AC \le AB + BC$ !

1) Геометрическое решение. Так как векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{a} + \overline{b}$ являются сторонами треугольника, то справедливость неравенства $|\overline{a} + \overline{b}| \le |\overline{a}| + |\overline{b}|$ следует из справедливости "неравенства треугольника".

2) Алгебраическое решение. Преобразуем исходное неравенство с помощью эквивалентных преобразований к очевидному неравенству:

$$|\overline{a} + \overline{b}|^2 \le (|\overline{a}| + |\overline{b}|)^2 \iff (\overline{a} + \overline{b})(\overline{a} + \overline{b}) \le |\overline{a}|^2 + 2|\overline{a}||\overline{b}| + |\overline{b}|^2 \iff$$

$$\iff \cancel{\overline{a}\cdot\overline{a}} + 2\overline{a}\cdot\overline{b} + \cancel{\overline{b}\cdot\overline{b}} \le \cancel{\overline{a}\cdot\overline{a}} + 2|\overline{a}||\overline{b}| + \cancel{\overline{b}\cdot\overline{b}} \iff \overline{a}\cdot\overline{b} \le |\overline{a}||\overline{b}| \iff$$

$$\iff |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi \le |\overline{a}||\overline{b}| \iff \cos\varphi \le 1.$$

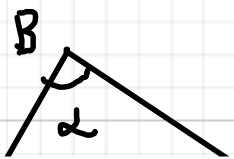
$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ =$

$= |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$

***Задача 2.***

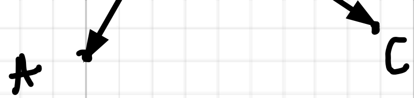
Даны вершины треугольника $A(1;2)$, $B(5;1)$, $C(6;5)$. Найдите угол $\angle ABC$. $= \alpha$

Решение:




$\overrightarrow{BC}(6-5;\ 5-1)$

$\overrightarrow{BC}(1;\ 4)$




$\overrightarrow{BA}(-4;1)$

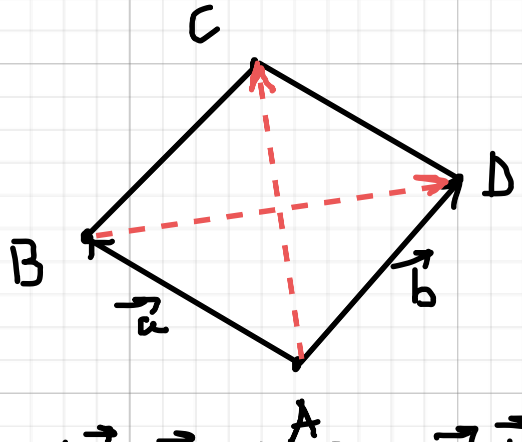
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-4\cdot 1+1\cdot 4}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = 0 \hookrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}\,!$$

*Задача 3.*

Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

Док-во:




$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = \vec{b}-\vec{a}$

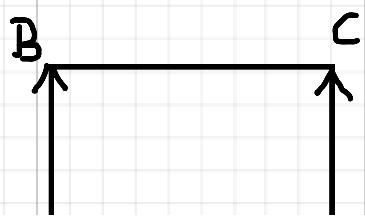
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (\vec{b}+\vec{a})(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 =$$

$$= 0 \hookrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$$

*Задача 4.*

Даны четыре точки: $A(0;1)$, $B(1;2)$, $C(2;1)$, $D(1;0)$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – квадрат.

Док-во:




$\overrightarrow{AB}(1;1)$

$\overrightarrow{DC}(1;1)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD}(1;-1)$

↳ ABCD - параллелограмм

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ↳ $AB = AD$ ↳ ромб

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$ ↳ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ ↳ квадрат

ч.т.д.

***Задача 5.***

Даны три точки: $A(3;1)$, $B(-1;2)$, $C(0;3)$. Найдите такую точку $D(x;y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны. ✓