Определение. *Арифметическим корнем степени* $n \in \mathbb{N}$ из положительного числа a называется положительное число b такое, что $b^n = a$.

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначают $\sqrt[n]{a}$ или $a^{\frac{1}{n}}$; число n называют *показателем корня*, а число a, стоящее под знаком корня, — *подкоренным выражением*. По определению корня $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Квадратный корень обозначают $\sqrt{a}$.

Для любых положительных чисел a и b, натуральных чисел n, m и k справедливы следующие свойства арифметического корня:

1°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. 2°. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$. 3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

4°. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$. 5°. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$. 6°. $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$.

7°. Если $0 < a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Корнем степени n из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

При четном n существуют два корня n-й степени из любого положительного числа a; корень n-й степени из числа 0 равен нулю; корней четной степени из отрицательных чисел не существует.

При нечетном n существует корень n-й степени из любого числа a и притом только один; справедливо равенство $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Корень второй степени из числа называют *квадратным корнем*, а показатель 2 корня при записи опускают. Корень третьей степени называют *кубическим корнем*.

Для любого действительного a справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{если } n = 2k, \\ a, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

К перечисленным выше свойствам 1°–7° арифметического корня добавим свойства корня четной степени.

8°. Если $ab \geqslant 0$, то $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|}$; если $a < 0$ и $b < 0$, то $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{-a} \cdot \sqrt[2n]{-b}$.

Пример ■ Упростить выражение $\sqrt{a^2 - 4a + 4}$.

△ $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2| = \begin{cases} a-2, & \text{если } a \geqslant 2, \\ 2-a, & \text{если } a < 2. \end{cases}$ ▲

$\sqrt[n]{a} = b$

$a \geqslant 0$

$b \geqslant 0$

$x^2 = 4 \to \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$

$\sqrt[2]{(-3)^2} = |-3|$

$\sqrt{a^2} = |a|$

Справедливы следующие формулы, которые называют *формулами сложных радикалов*:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \qquad (1)$$

и

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}. \qquad (2)$$

Решим пример ■ используя эти формулы.

△ Из формулы (1) получаем

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{9 + \sqrt{80}} = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{81 - 80}}{2}} + \sqrt{\frac{9 - \sqrt{81 - 80}}{2}} = \sqrt{5} + 2.$$

Аналогично, используя формулу (2), находим

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{9 - \sqrt{80}} = \sqrt{5} - 2.$$

Значит, $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 2 - (\sqrt{5} - 2) = 4.$ ▲

Иррациональность в знаменателе дроби. Рассмотрим приемы, используемые при освобождении знаменателей дроби от иррацио-

$a^2 - b =$ „точный" квадрат

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

нальности.

1) При преобразовании дробей вида $\frac{A}{a+c\sqrt{b}}$, $\frac{A}{\sqrt{a}+c\sqrt{b}}$ числитель и знаменатель дроби умножаются на $a-c\sqrt{b}$ или $\sqrt{a}-c\sqrt{b}$ соответственно, т. е. на *сопряженное иррациональное выражение.*

2) При преобразовании дробей вида $\frac{A}{a\pm c\sqrt[3]{b}}$, $\frac{A}{\sqrt[3]{a}\pm c\sqrt[3]{b}}$ числитель и знаменатель, рассматриваемый как сумма (разность), умножаются на неполный квадрат разности (суммы) для получения суммы (разности) кубов.

Пример ■ Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$A = \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}.$$

△ Обозначим $\sqrt[3]{2} = a$, тогда $a^3 = 2$, $A = \frac{1}{1+a+2a^2} = \frac{1}{a^2+(1+a+a^2)}$. Умножая числитель и знаменатель полученной дроби на $a-1$ и применяя формулу разности кубов, запишем A в следующем виде:

$$A = \frac{a-1}{a^2(a-1)+(a^3-1)} = \frac{a-1}{3-a^2} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{3-\sqrt[3]{4}}.$$

Снова применяя формулу разности кубов, получаем

$$A = \frac{(\sqrt[3]{2}-1)(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{(3-\sqrt[3]{4})(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})} = \frac{7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-3}{23}.$$ ▲

$\approx 0{,}7$

$$\frac{A}{a+c\sqrt{b}} = \frac{A(a-c\sqrt{b})}{(a+c\sqrt{b})(a-c\sqrt{b})} = \boxed{\frac{A(a-c\sqrt{b})}{a^2-bc^2}}$$

$$a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$$

$$1+a+2a^2=(1+a+a^2)+a^2$$

$$a^2(a-1)+(a^3-1)=$$

$$=a^3-a^2+a^3-1=$$

$$=2-a^2+2-1$$

$$\sqrt[3]{2}=a,\quad a^2=(\sqrt[3]{2})^2=$$

$$=\sqrt[3]{4}$$

$$3^3-(\sqrt[3]{4})^3=27-4=23$$

$$\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$$

Уравнения и неравенства с радикалами. Общей идеей при решении уравнений и неравенств с радикалами (корнями различной степени) является избавление от соответствующих корней, для чего применяется возведение в степень, соответствующую показателю корня. Однако в ряде случаев подобное действие приводит к приобретению посторонних решений, вследствие чего рекомендуется использовать равносильные преобразования на всех этапах решения задачи с учётом возникающих дополнительных условий. Кроме того, иногда полезно перед возведением в степень преобразовать решаемое соотношение к виду, наиболее близкому к простейшему.

Простейшие уравнения и неравенства с квадратным корнем. Методы решения простейших уравнений и неравенств с квадратным корнем хорошо алгоритмизированы и основаны на следующих равносильных переходах:

$$\overset{\geq 0}{\sqrt{f(x)}} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \tag{19}$$

следует заметить, что неравенство $\boxed{f(x) \geq 0}$, задающее область существования радикала, в приведённой системе выполняется автоматически (подобное касается и других типов задач);

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \tag{20}$$

$$g(x) < 0;$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (21)$$

≥ 0

заметим, что в последнем равносильном переходе вместо условия $g(x) \geq 0$ можно использовать условие $g(x) > 0$, поскольку исходное неравенство не имеет решений при $g(x) = 0$. Однако, нет необходимости над этим задумываться, так как при возведении неравенства в квадрат, главное, чтобы обе части неравенства были неотрицательными.

В случае нестрогих неравенств соответствующие знаки неравенств в равносильных системах становятся нестрогими:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \qquad (22)$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \qquad (23)$$

При отличном от простейшего типе задания, уравнение или неравенство решается последовательным приведением к простейшему виду. Для этого нередко приходится группировать радикалы, возводить обе части в соответствующие степени, при этом также нужно использовать только равносильные переходы.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геогр-93.3) Найти область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2}}$.

Решение. Область определения задается условием:

$$\boxed{\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2} \geq 0} \iff \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ (x+2)(x-1) < 0; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ -2 < x < 1. \end{array} \right.$$

Ответ. $(-2; 1) \cup \{2\}$.

$+ \quad -2 \quad - \quad 1 \quad + \quad 2 \quad +$

Пример 2. (Соц-97.3) Решить уравнение $\sqrt{-3x + 3} = x - 1$.

$f(x) = -3x + 3$

$g(x) = x - 1$

Решение. Согласно (19) $\sqrt{-3x + 3} = x - 1 \iff$

$$\iff \begin{cases} -3x + 3 = (x-1)^2, \\ x - 1 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \geq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = -2; \end{array} \right. \\ x \geq 1. \end{cases}$$

v

пост.

Значит, $x = 1$.

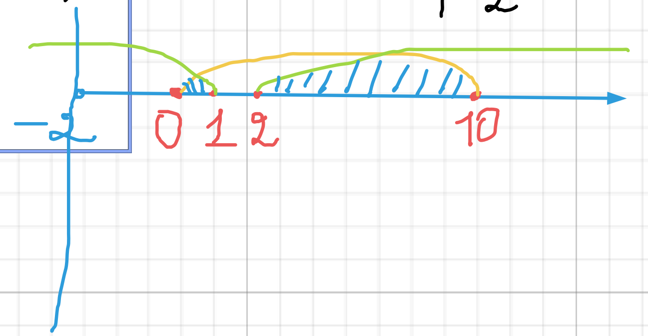
Ответ. $\boxed{1.}$

Пример 3. (Геол-84.2) Решить неравенство $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} \leq x + 2$.

Пример 3. (Геол-84.2) Решить неравенство $\sqrt{2x^2-6x+4}<x+2$.

Решение. Согласно (21) $\sqrt{2x^2-6x+4}<x+2 \iff$

$$\iff \begin{cases} 2x^2-6x+4<(x+2)^2, \\ 2x^2-6x+4\geq 0, \\ x+2\geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-10x<0, \\ x^2-3x+2\geq 0, \\ x\geq -2; \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-10)<0 \\ (x-1)(x-2)\geqslant 0 \\ x\geqslant -2 \end{cases}$$



$$\iff \begin{cases} x\in(0;10), \\ x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty), \\ x\geq -2; \end{cases} \iff x\in(0;1]\cup[2;10).$$

Ответ. $(0;1]\cup[2;10)$.

$\{ = \cap$

$[= \cup$

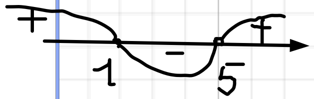
Пример 4. (Биол-80.3) Решить неравенство $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$.

Решение. Согласно (20)

$$\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x^2+6x-5>(8-2x)^2, \\ 8-2x\geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -x^2+6x-5\geq 0, \\ 8-2x<0; \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$x^2-6x+5\leq 0$

$(x-1)(x-5)\leq 0$



$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x^2-38x+69<0, \\ x\leq 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[1;5], \\ x>4; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(3;23/5), \\ x\leq 4; \end{cases} \\ x\in(4;5]; \end{array}\right. \iff x\in(3;5].$$

$5x^2-38x+69=0$

$x_{1,2}=\dfrac{19\pm\sqrt{361-345}}{5}=$

$=\dfrac{19\pm 4}{5}=\left[\begin{array}{l} \frac{23}{5} \\ 3 \end{array}\right.$

Ответ. $(3;5]$.

Пример 5. (Почв-98.1) Решить уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}=1$. ✓

Решение. Перенесём второй радикал в правую часть:

$$\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\geq 0}=\underbrace{\sqrt{2x-1}+1}_{\geq 0}. \quad ()^2$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то можно возводить уравнение в квадрат. При этом условие $x+1\geq 0$ писать нет необходимости, так как в получающемся уравнении $(x+1)$ равно квадрату положительной величины:

$$x+1=(\sqrt{2x-1}+1)^2 \iff x+1=2x-\cancel{1}+\cancel{1}+2\sqrt{2x-1} \iff \boxed{2\sqrt{2x-1}=1-x.}$$

Полученное уравнение решаем стандартным способом: $a=b,\ b=a$

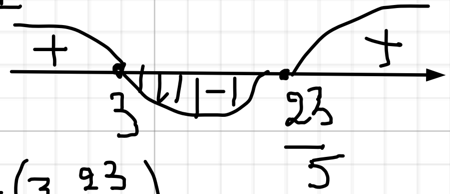
$$\begin{cases}4(2x-1)=1+x^2-2x,\\ 1-x\ge 0;\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-10x+5=0,\\ x\le 1.\end{cases}$$

Корень $x=5-\sqrt{20}$ – подходит, а корень $x=5+\sqrt{20}$ – нет.

Ответ. $5-\sqrt{20}$.

$5+\sqrt{20}>$
$>5+4=9>1$

$5(x-3)\left(x-\frac{23}{5}\right)$



$5-\sqrt{20}-1=4-\sqrt{20}$

4 и $\sqrt{20}$

$16<20 \hookrightarrow 4<\sqrt{20} \hookrightarrow 4-\sqrt{20}<0$

$\hookrightarrow 5-\sqrt{20}<1$

$\begin{cases}x\in\left(3;\frac{23}{5}\right)\\ x\le 4\end{cases} \longrightarrow x\in(3;4]$

$\left[\begin{array}{l}x\in(3;4]\\ x\in(4;5]\end{array}\right. \Longleftrightarrow x\in(3;5]$