Числовая последовательность

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто последовательность)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Кратко последовательность обозначают символами $\{x_n\}$ или (x_n), при этом x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n — номером члена x_n.

Числовая последовательность — это функция, область определения которой есть множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел; множество значений этой функции, т. е. совокупность чисел x_n, $n \in \mathbb{N}$, называют *множеством значений этой последовательности.*

Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным. Например, множество значений последовательности $\{(-1)^n\}$ состоит из двух чисел 1 и -1, а множества значений последовательностей $\{n^2\}$ и $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ бесконечны.

Последовательность может быть задана с помощью формулы вида

$$x_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

$y = f(x)$

выражающей x_n через номер n, например

$$x_n = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad x_n = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

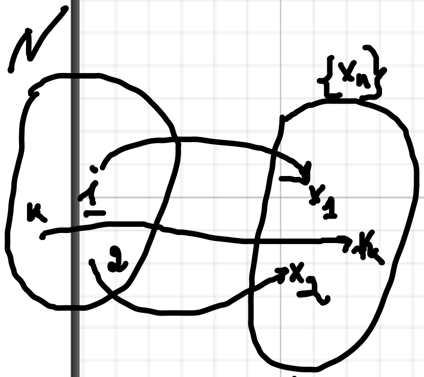
Такую формулу называют *формулой общего члена последовательности*.

Для задания последовательности используют и *рекуррентные формулы*, т. е. формулы, выражающие n-й член последовательности через члены с меньшими номерами (предшествующие члены). Так определяют арифметическую и геометрическую прогрессии. Другими примерами являются последовательности

1) $x_1 = a$, $x_n = bx_{n-1} + c$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$;

2) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$;

здесь a, b, c — заданные числа.



$x_n = (-1)^n =$

$= \left[\begin{array}{l} n = 2k, \ x_{2k} = 1 \\ n = 2k+1, \ x_{2k+1} = -1 \end{array}\right.$

$y_n = n^2$

$y_1 = 1, \ y_2 = 4, \ y_3 = 9, \ \ldots$

$a_n = \frac{1}{n}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots$

Выписать несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$, заданной рекуррентно: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}^2$, $n \geqslant 2$.

$x_3 = 2x_2 - x_1^2 = 5, \ x_4 = 2\cdot 5 - 3^2 = 1, \ x_5 = 2\cdot 1 - 5^2 = -23, \ \ldots$

$1, 3, 5, 1, -23, \ldots$

Последовательность $\{x_n\}$ *ограничена снизу*, если существует число C_1 такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n \geqslant C_1$. Например, последовательность, в которой $x_n = n^3$, ограничена снизу числом 1.

$n^3 \geqslant 1$

Последовательность $\{x_n\}$ *ограничена сверху*, если существует число C_2 такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n \leqslant C_2$. Например, последовательность $\{-n+3\}$ ограничена сверху числом 2.

$-n+3 \leqslant 2$

Последовательность $\{x_n\}$ *ограничена*, если существуют числа C_1 и C_2 такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верны неравенства $C_1 \leqslant x_n \leqslant C_2$. Например, последовательность $\{2^{-n}\}$ ограничена, так как при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $0 < 2^{-n} \leqslant \frac{1}{2}$.

$n \geqslant 1$

Это определение равносильно следующему: последовательность $\{x_n\}$ *ограничена*, если существует число $C > 0$ такое, что для всех

$x_n = 2^{-n}$ 1

$n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|x_n| \leqslant C$, или, короче,

$$\exists C > 0: \forall n \in \mathbb{N} \to |x_n| \leqslant C.$$

Последовательность $\{x_n\}$ является *неограниченной*, если для любого $C > 0$ найдется номер n_C такой, что $|x_{n_C}| > C$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют:

возрастающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_{n+1} > x_n$;

неубывающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_{n+1} \geqslant x_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют:

убывающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_{n+1} < x_n$;

невозрастающей, если для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Возрастающие (неубывающие), а также убывающие (невозрастающие) последовательности называют *строго монотонными* (*монотонными*). Так, последовательность $\{3n+2\}$ — возрастающая, а последовательность $\left\{\frac{1}{n^2+n}\right\}$ — убывающая.

$\exists!$

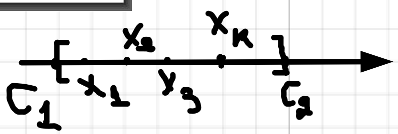
$x_n = \frac{1}{2^n}$

$0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$

$|x_n| \leq C$

$-C \leq x_n \leq C$

$-C = C_1$, C_2



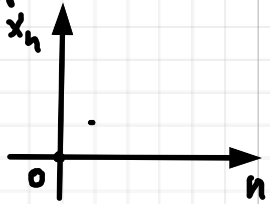
$x_k = 3k+2$

$x_{k+1} = 3k+5$

$x_{k+1} - x_k = 3k+5-3k-2 = 3 > 0$

$x_{k+1} > x_k \longrightarrow x_n = 3n+2$ — возрастающая!

(n, x_n)



$a_n = f(n)$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \quad + a$

Арифметическая прогрессия

1) *Арифметическая прогрессия* — числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для данной последовательности числом d, т. е.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Число d называется *разностью* арифметической прогрессии, число a_1 — *первым ее членом*, а число a_n — *общим ее членом*.

Иногда рассматривается не вся последовательность, являющаяся арифметической прогрессией, а лишь ее первые несколько членов. В этом случае говорят о *конечной арифметической прогрессии*.

2) Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

3) Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов, т. е. при $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

4) Пусть S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии, т. е. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Тогда S_n выражается формулой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Пример 1. Разность арифметической прогрессии равна 4, сумма первых ее семи членов равна 105. Найти первый и десятый члены этой прогрессии.

Решение: $d = 4$, $S_7 = a_1 + a_2 + \quad + a_7 = 105$

$$S_7 = \frac{2a_1 + 4(7-1)}{2} 7 = \frac{\cancel{2}(a_1 + 12)}{\cancel{2}} \cdot 7 = 105$$

$\to a_1 + 12 = 15$, $a_1 = \quad$, $a_{10} = a_1 + 4 \cdot 9 = 39$

Ответ $a_1 = 3$ и $a_{10} = 39$.

Геометрическая прогрессия

1) *Геометрическая прогрессия* — числовая последовательность $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ненулевых чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же ненулевое число:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии, число b_1 — *первым ее членом*, а число b_n — *общим ее членом*.

2) Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

3) Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению его соседних членов, т. е. при $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$\boxed{b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}.}$$

Если $b_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, т. е. $b_1 > 0$ и $q > 0$, то

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}},$$

т. е. каждый член такой геометрической прогрессии равен среднему геометрическому его соседних членов.

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

4) Пусть S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии, т. е. $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Тогда S_n выражается формулой

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ если } q \neq 1, \text{ и } S_n = nb_1 \text{ при } q = 1.$$

Пример 5. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 30, а сумма следующих четырех членов равна 480. Найти первый член прогрессии.

Решение: $\begin{cases} S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 30 \\ S_* = b_5 + b_6 + b_7 + b_8 = 480 \end{cases}$

$b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2$, $b_4 = b_1 q^3$, $b_5 = b_1 q^4 \ldots$

$\{ b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 = 30$ $\quad A = B)$

$$\begin{cases} b_1q^4+b_1q^5+b_1q^6+b_1q^7=480 \end{cases}$$

$$C=D$$

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$$

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2+q^3)=30 \\ b_1q^4(1+q+q^2+q^3)=480 \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{b_1}\cancel{(1+q+q^2+q^3)}}{\cancel{b_1}q^4\cancel{(1+q+q^2+q^3)}}=\frac{30}{480}$$

$$\frac{1}{q^4}=\frac{1}{16} \hookrightarrow q^4=16 \hookrightarrow (q^2-4)\underbrace{(q^2+4)}_{>0}=0$$

$$(q-2)(q+2)=0 \hookrightarrow \left[\begin{array}{l} q_1=-2 \\ q_2=2 \end{array}\right.$$

1) $q=-2$, $b_1=\dfrac{30}{1-2+4-8}=\dfrac{30}{-5}=-6$

2) $q=2$, $b_1=\dfrac{30}{1+2+4+8}=\dfrac{30}{15}=2$

Ответ. $\boxed{b_1=-6 \text{ и } b_1=2}$

2 способ.

$$S_4=b_1\frac{1-q^4}{1-q}=30$$

$$S_4=b_1q^4\frac{1-q^4}{1-q}=480 \hookrightarrow q^4=16$$

Пример 2. Сумма первых n членов арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, равна половине суммы следующих n членов. Найти отношение суммы первых $3n$ членов этой прогрессии к сумме ее первых n членов.