Для некоторых функций предел при x, стремящемся к a, равен значению функции в точке a (см. примеры 1 и 4). Однако это не всегда так, например для функции

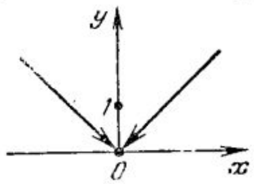


Рис. 44.

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0, \end{cases}$$

$$\frac{|x|^2}{|x|} = |x|$$

график которой представлен на рис. 44, предел при $x \to 0$ равен нулю, а $f(0) = 1$.

Если предел функции $f(x)$ в точке a равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

то функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a.

Из теоремы о пределах следует, что линейная функция непрерывна в любой точке, т. е. для любой точки x_0 имеет место

$$\lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x) = a_0 + a_1 x_0.$$

Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ также является непрерывной функцией в любой точке:

$$\lim_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0).$$

Это следует из того, что многочлен есть конечная сумма слагаемых вида $a_k x^k$, $k \geqslant 0$, для каждого из которых

$$\lim_{x \to x_0} a_k x^k = a_k (x_0)^k$$

(последнее устанавливается методом математической индукции).

Из непрерывности многочлена и теоремы о пределе частного следует, что рациональная функция непрерывна в любой точке области определения, так как

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}, \quad \text{если} \quad Q_m(x_0) \neq 0.$$

Все элементарные функции, например

$$x^k, \ a^x \ (a > 0), \ \sin x, \ \operatorname{tg} x, \log_a x \ (a > 0, \ a \neq 1),$$

непрерывны в каждой точке, в окрестности которой эти функции определены.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого интервала, она называется *непрерывной на этом интервале*. График непрерывной на интервале функции может быть нарисован одним движением карандаша без отрыва от бумаги.

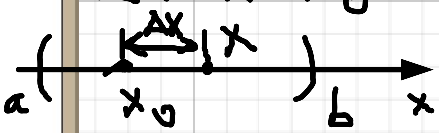
Каждая элементарная функция непрерывна на любом интервале, на котором она определена. V

$]a; b[= (a; b)$

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $]a; b[$, содержащем точку x_0. Для любой другой точки x интервала $]a; b[$ разность $x - x_0$ обозначается Δx и называется *приращением аргумента*; соответствующая разность значений функции $f(x) - f(x_0)$ обозначается $\Delta f(x_0)$ (или $\Delta y(x_0)$) и называется *приращением функции*. Из равенства $\Delta x = x - x_0$ следует $x = x_0 + \Delta x$ и

$x \in (a; b)$

$\Delta x = x - x_0$



$$\Delta y(x_0) = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

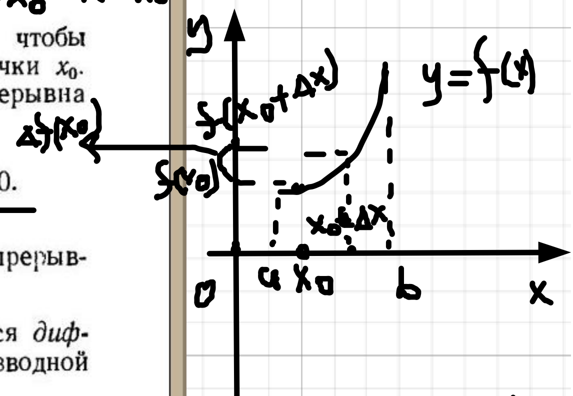
Если $x \to x_0$, то, очевидно, $\Delta x \to 0$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$. Таким образом, по определению

$\Delta x > 0 \hookrightarrow x > x_0$

$\Delta x < 0 \hookrightarrow x < x_0$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Для существования производной $f'(x_0)$ необходимо, чтобы функция $f(x)$ была определена в некоторой окрестности точки x_0. Покажем, что также необходимо, чтобы функция была непрерывна в точке x_0. Пусть существует $f'(x_0)$, тогда

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

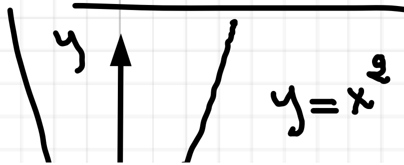
Отсюда следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, это и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

Функция, имеющая производную в точке x_0, называется *дифференцируемой в этой точке*; операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого интервала, называется *дифференцируемой на этом интервале*. Производная дифференцируемой на интервале функции $y = f(x)$ сама является функцией аргумента x, ее обозначают $f'(x)$ или $y'(x)$ и называют *производной функцией*.

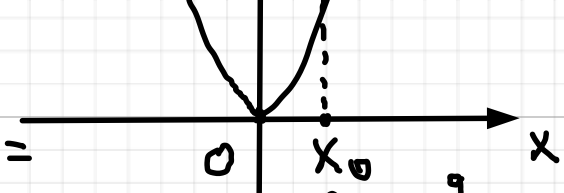
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x_0) = 0 \hookrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$y = x^2, \quad D(x^2) = R$



1) $\Delta x = x - x_0$

2) $\Delta y(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) =$



$= (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = \Delta x\cdot(\Delta x + 2x_0)$

3) $\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(\Delta x + 2x_0)}{\Delta x} = \Delta x + 2x_0$

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x + 2x_0) = \underbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x}_{0} + 2x_0 = 2x_0$

$\forall x \in D(x^2) \longrightarrow (x^2)' = 2x$

V

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Производные элементарных функций

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $(\sin x)' = \cos x$.
3. $(\cos x)' = -\sin x$.
4. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
5. $(e^x)' = e^x$.
6. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$.
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Правила дифференцирования.

Пусть c — постоянная, $u(x)$, $v(x)$ и $u_i(x)$ — дифференцируемые на некотором интервале $]a; b[$ функции, на этом же интервале справедливы приводимые формулы:

$i = 1, .., n$

$$c' = 0.$$

$$(cu)' = cu'.$$

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'.$$

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

V

Приведем примеры нахождения производных.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

$\triangle$ $y' = (x^2)' + (x^{-1})' = 2x - 1 \cdot x^{-2} = 2x - \dfrac{1}{x^2}$. Формула $(x^{-n})' =$

$= -nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, следует из правила дифференцирования частного, если положить $u = 1$, $v = x^n$. ▲

Пример 3. Найти производную функции $y = x^4 - 2x^3 + 3x - 7$.

△ $y' = (x^4)' - 2(x^3)' + 3(x)' - (7)' = 4x^3 - 6x^2 + 3$. ▲

Пример 4. Найти производную функции $y = x \ln x$.

△ $y' = (x)' \ln x + x (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. ▲

Пример 5. Найти производную функции $y = \frac{2x-1}{3+x}$.

$(2x-1)' = 2$

$(3+x)' = 1$

$$y' = \left(\frac{2x-1}{3+x}\right)' = \frac{(2x-1)'(3+x) - (2x-1)(3+x)'}{(3+x)^2} = \frac{2(3+x) - 1\cdot(2x-1)}{(3+x)^2} =$$

$$= \frac{6+2x-2x+1}{(3+x)^2} = \frac{7}{(3+x)^2} > 0$$

$$\Delta y(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$S = S(t)$

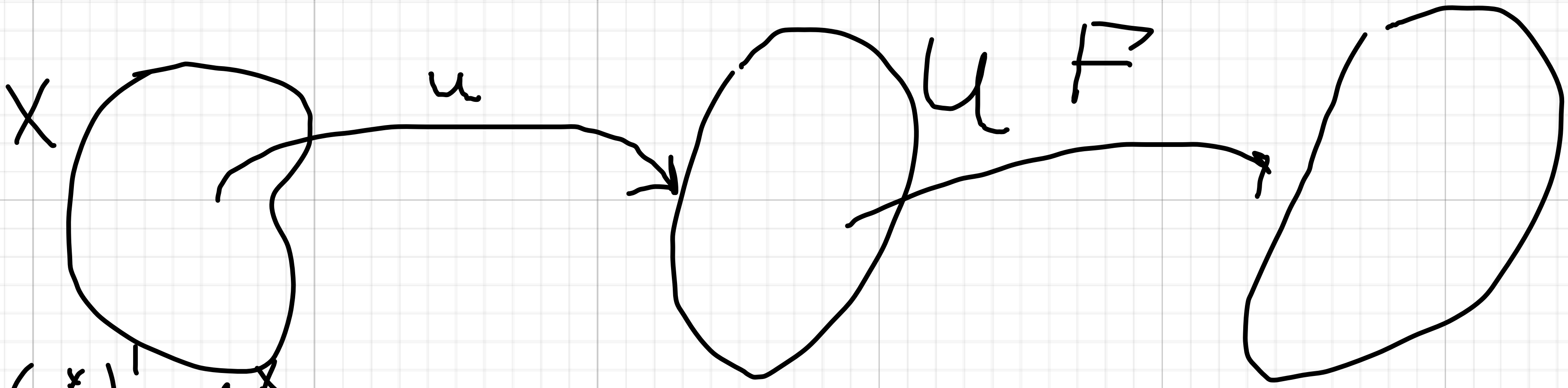
$v = S'(t)$

$a = v'(t) = S''(t)$

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Правило дифференцирования сложной функции. Пусть $y = F(u)$, $u = u(x)$ и $y(x) = F(u(x))$ — сложная функция. Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $F(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $y(x) = F(u(x))$ дифференцируема в точке x_0 и

$$y'(x_0) = F'(u_0)\, u'(x_0).$$



$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{f(x)})' = \underbrace{e^{f(x)}} \cdot f'(x)$$

$\underline{y = \sqrt{x}}$ $\quad y = \sqrt{u}$, $\underline{u = x}$

$$y' = \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \sqrt{u}' \cdot u'(x) = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot x' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot \underline{1} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \hookrightarrow \underline{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$