Понятие условной вероятности. Вероятность произведения двух событий. Оценивая вероятность случайного события, иногда приходится учитывать какие-то дополнительные условия, влияющие на оценку вероятности этого события.

Пусть A и B — два события, рассматриваемые в данном эксперименте. Появление одного события (скажем, B) может влиять на возможность появления другого (A).

Например, пусть проводится эксперимент по извлечению шаров из коробки, в которой находятся 8 шаров, из которых 2 белых и 6 черных. Наугад последовательно вынимают два шара, причем взятый шар в коробку не возвращают. Какова вероятность того, что второй шар окажется белым при условии, что первый шар был черным?

Обозначим события: A — второй вынутый шар белый, B — первый вынутый шар черный. Извлечение (наугад) из коробки любого из шаров — равновозможные события. Так как событие B произошло, то в коробке находятся уже не 8, а 7 шаров, из которых 2 белых. Тогда вероятность события A, при условии, что произошло событие B, равна $\frac{2}{7}$.

$P_B(A) = \frac{2}{7}$

Число, выражающее вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется *условной вероятностью события A при условии события B* и обозначается $P_B(A)$ или $P(A \mid B)$.

Условная вероятность события A при условии события B вычисляется по формуле

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ (где } P(B) > 0).} \qquad (11)$$

● Докажем эту формулу для классического определения вероятности. Пусть в результате случайного эксперимента мы можем получить n равновозможных элементарных событий (пространство U). Из этих событий m событий благоприятствуют событию A, k — событию B, l — событию AB (рис. 138). Тогда $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B) = \frac{k}{n}$, $P(AB) = \frac{l}{n}$. Найдем вероятность события A при условии события B. Для вычисления условной вероятности вместо всего пространства элементарных событий U возьмем только ту его часть, элементарные события которой благоприятствуют событию B. В этом случае общее количество результатов эксперимента равно k. Из них событию A благоприятствуют только l элементарных событий, составляющих событие AB. Тогда

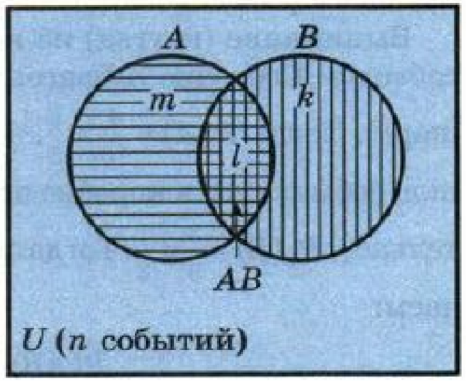


Рис. 138

$$P_B(A) = \frac{l}{k} = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \ ○$$

Отметим, что равенство (11) часто принимается за определение условной вероятности события A при условии, что произошло событие B.

Из равенства (11) получаем:

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A). = P(A) \cdot P_A(B) \qquad (12)$$

Поскольку событие BA совпадает с событием AB, то в правой части формулы (12) можно поменять местами A и B. Тогда

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (13)$$

Вероятность произведения (то есть совместного появления) двух событий равна произведению вероятности одного из них и условной вероятности второго события, вычисленной при условии, что первое событие уже произошло.

Равенство (13) (или (12)) обычно называют *теоремой умножения вероятностей*. Если мы можем вычислить вероятность события A и условную вероятность $P_A(B)$, то по формуле (13) легко найти вероятность $P(AB)$ произведения событий A и B.

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$$

Задача 1 В коробке находятся 10 шаров, из них 4 белых. Наугад берут друг за другом два шара, причем взятый шар в коробку не возвращают. Вычислите вероятность того, что оба вынутых шара будут белыми.

▶ Обозначим события: A — первый вынутый шар белый, B — второй вынутый шар белый. Тогда событие AB — оба вынутых шара белые.

Вынимание (наугад) из коробки любого из 10 шаров — равновозможные события. Событию A благоприятствуют 4 события (в коробке всего 4 белых шара). Тогда $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. После того как вынули один белый шар (произошло событие A), в коробке осталось 9 шаров, из них только 3 белых, следовательно, $P_A(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Тогда по формуле умножения вероятностей (13) получаем:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}. \triangleleft$$

✓

Задача 2 Среди однотипных деталей, выпускаемых в цехе, 1 % бракованных. Среди качественных деталей 40 % деталей высшего сорта. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь высшего сорта?

▶ Обозначим события: A — деталь небракованная, B — деталь высшего сорта. Тогда событие AB — выбрали качественную деталь высшего сорта.

Выбор одной детали из множества однотипных деталей — равновозможные события. Учитывая, что среди выпущенных деталей 99 % качественных, получаем $P(A) = 0{,}99$, а учитывая, что среди качественных деталей 40 % деталей высшего сорта, получаем, что $P_A(B) = 0{,}4$. Тогда

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B) = 0{,}99\cdot 0{,}4 = 0{,}396. \triangleleft$$

Содержательное определение	Формула
Число, выражающее вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется *условной вероятностью события A при условии события B* и обозначается $P_B(A)$ или $P(A\mid B)$.	$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ ✓
2. Вероятность произведения двух событий (теорема умножения вероятностей)	

$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.	*Вероятность произведения (то есть совместного появления) двух событий равна произведению вероятности одного из них и условной вероятности другого события, которая вычисляется при условии, что первое событие уже произошло.*
3. Вероятность произведения нескольких событий	
$P(A_1A_2...A_n) =$ $= P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n)$	*Вероятность произведения (то есть совместного появления) нескольких событий равна произведению вероятности одного из них и условных вероятностей остальных, причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что все предыдущие события уже произошли.*

Задача 3 В коробке лежат 6 белых, 4 черных и 3 красных шара. Наугад один за другим вынимают три шара, причем вынутый шар в коробку не возвращают. Найдите вероятность того, что первый шар будет красным, второй — белым, а третий — черным.

▶Пусть событие A — первый вынутый шар красный, событие B — второй шар белый, событие C — третий шар черный. Тогда событие ABC — вынули три шара, из которых первый — красный, второй — белый и третий — черный.

В коробке всего 13 шаров. Вынимание (наугад) любого из 13 шаров — равновозможные события. Событию A благоприятствуют 3 события (в коробке всего 3 красных шара). Тогда $P(A)=\frac{3}{13}$. После того как вынули один красный шар (произошло событие A), в коробке осталось 12 шаров, из них только 6 белых, следовательно, $P_A(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. После того как вынули один красный и один белый шар (произошли события A и B, то есть событие AB), в коробке осталось 11 шаров, из них только 4 черных, следовательно, $P_{AB}(C)=\frac{4}{11}$. Тогда по обобщенной формуле умножения вероятностей (14) получаем:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{11}=\frac{6}{143}. \triangleleft$$

[redacted] Предел функции. Непрерывность функции

Напомним, что любой интервал, содержащий точку a, называется *окрестностью* точки a. Симметричный интервал $]a-\delta;\ a+\delta[$ или $(a-\delta; a+\delta)$ при любом $\delta>0$ называется δ-*окрестностью* точки a.

$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, т. е. никаких предположений о том, определена ли функция в точке a или нет, не делается.

Число b называется *пределом* функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x\neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, будет выполняться неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

[redacted]

$$|x-a|<\delta \Leftrightarrow -\delta<x-a<\delta \Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$$

$$|f(x)-b|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<f(x)-b<\varepsilon \Leftrightarrow b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$$

$x\in(a-\delta;\, a+\delta)$

Для обозначения того, что число b есть предел функции $f(x)$ при x стремящемся к a, пишут

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b,} \quad \text{или} \quad f(x)\to b \quad \text{при} \quad x\to a.$$

V

Заметим, что условия $|x-a|<\delta$, $x\neq a$ означают, что точка x принадлежит δ-окрестности точки a и отлична от a; эти условия можно объединить в такой записи:

$$0<|x-a|<\delta.$$

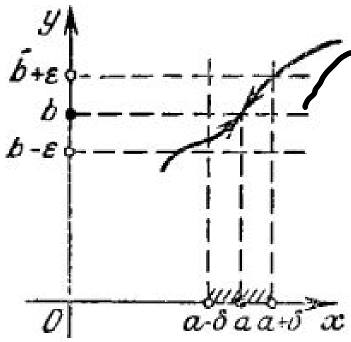
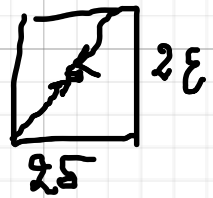


Рис. 42.

Данное определение предела можно проиллюстрировать следующим образом (рис. 42). Возьмем число $\varepsilon>0$ и на оси Oy отметим ε-окрестность точки b, т. е. интервал $]b-\varepsilon;\ b+\varepsilon[$, через концы которого проведем прямые, параллельные оси Ox. Получим полосу шириной 2ε. Если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что график функции $y=f(x)$, рассмотренный для x из δ-окрестности точки a и не равных a, целиком находится в этой полосе, то число b является пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a.



$x\to a \hookrightarrow 2\delta\to 0$

$2\varepsilon\to 0$

$S_0=4\delta\varepsilon\to 0$

$(x;\, f(x))\to(a;\, b)$, $x\to a$

Пример 1. Доказать, что $\lim_{x\to 1}(3x-1)=2$.

$f(x)=3x-1$

△ Функция $f(x)=3x-1$ определена в любой окрестности точки $x=1$. Неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon$, т. е. $|(3x-1)-2|=3|x-1|<\varepsilon$, будет выполняться для всех x, удовлетворяющих условию $|x-1|<\varepsilon/3$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta=\varepsilon/3$, тогда для всех x таких, что $|x-1|<\delta$, будет справедливо неравенство $|f(x)-2|=3|x-1|<\varepsilon$. Это и означает, что

$$\boxed{\lim_{x\to 1}(3x-1)=2.} \ ▲$$

$\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$, она

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$, она определена всюду за исключением точки $x=1$. Доказать, что при x, стремящемся к 1, эта функция имеет предел, равный 2.

△ При всех $x \neq 1$ имеем $(x^2-1)/(x-1)=x+1$, следовательно, $|f(x)-2|=|x-1|$ и неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon$ выполняется, если $|x-1|<\varepsilon$ и $x \neq 1$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta=\varepsilon$, тогда при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-1|<\delta$, будет справедливо неравенство $\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|<\varepsilon$. Таким образом, по определению $(x^2-1)/(x-1) \to 2$ при $x \to 1$. ▲ V

$\delta=\delta(\varepsilon)$

$\delta=\varepsilon$

Решения примеров 1 и 2, в частности, показывают, что δ зависит от ε, причем зависимость эта, вообще говоря, различна для различных функций.

Пример 3. Пусть $f(x)>0$ в некоторой окрестности точки a, $\lim\limits_{x \to a} f(x)=b$ и $b>0$. Доказать, что при x, стремящемся к a, существует предел функции $\sqrt{f(x)}$ и $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)}=\sqrt{b}$.

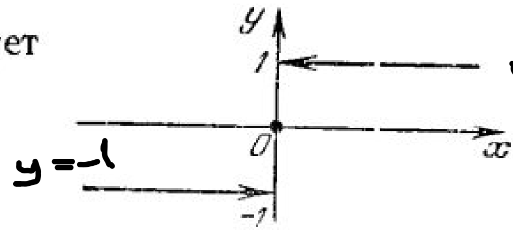
■ Не для всякой функции, определенной в окрестности точки a, существует предел при стремлении x к a. Рассмотрим, например, функцию

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1, & \text{если } x>0, \\ 0, & \text{если } x=0, \\ -1, & \text{если } x<0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 43. Докажем, что эта функция не имеет предела в точке $x=0$. Проведем доказательство методом от противного.

□ Предположим, что существует число b такое, что

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sign} x=b.$$



y=1

Рис. 43.

По определению предела для любого $\varepsilon>0$ и, следовательно, для $\varepsilon=1/2$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x| < \delta$, будет справедливо неравенство $|\operatorname{sign} x - b| < 1/2$. Таким образом, если x_1 и x_2 такие, что $0 < |x_1| < \delta$ и $0 < |x_2| < \delta$, то $|\operatorname{sign} x_1 - b| < 1/2$ и $|\operatorname{sign} x_2 - b| < 1/2$ и, следовательно,

$$|\operatorname{sign} x_1 - \operatorname{sign} x_2| = |\operatorname{sign} x_1 - b + b - \operatorname{sign} x_2| \leqslant |(\operatorname{sign} x_1 - b) - (\operatorname{sign} x_2 - b)| \leq$$
$$\leqslant |\operatorname{sign} x_1 - b| + |\operatorname{sign} x_2 - b| < 1.$$

Однако, взяв $x_1 = \delta/2$ и $x_2 = -\delta/2$, будем иметь $|\operatorname{sign} x_1 - \operatorname{sign} x_2| = |1 - (-1)| = 2 > 1$.

Полученное противоречие показывает, что функция $\operatorname{sign} x$ не имеет предела в точке $x = 0$. ■

Для функций, имеющих предел в точке, справедлива теорема, аналогичная теореме о сходящихся последовательностях.

Теорема. *Пусть при x, стремящемся к a, существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда при x, стремящемся к a, существуют также пределы суммы, разности и произведения этих функций, при этом*

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x),$$
$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x),$$
$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Если, кроме того, $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, то существует предел частного $f(x)/g(x)$ и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

Пример 4. Найти $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x - 3}{3 + 7x}$.

△ По теореме о пределах имеем