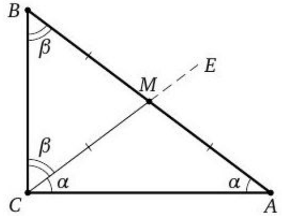
Теорема. *Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.*

Доказательство. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Тогда $\alpha + \beta = 90^\circ$.

От луча CA в полуплоскость, содержащую точку B, отложим угол ACE, равный α. Тогда луч CE проходит между сторонами угла ACB, так как $\alpha = \angle ACE < \angle ACB = 90^\circ$. Поэтому сторона CE этого угла пересекает гипотенузу AB в некоторой точке M.



V

Треугольник AMC равнобедренный, поскольку $\angle ACM = \angle CAM$, значит, $CM = AM$. С другой стороны, треугольник BMC также равнобедренный, поскольку

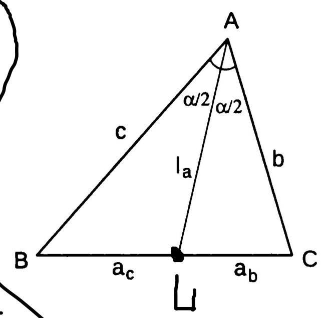
$$\angle BCM = 90^\circ - \angle ACM = 90^\circ - \alpha = \beta = \angle CBM.$$

Значит, $CM = BM$. Следовательно, M — середина гипотенузы AB, т. е. CM — медиана треугольника ABC и $CM = \frac{1}{2}AB$. Что и требовалось доказать. □

Теорема (обратная). *Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.* V

Теорема о биссектрисе. Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$



Формулы длины биссектрисы:

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}, \quad l_a^2 = bc - a_b a_c.$$

Формула длины медианы: $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} =$

$$= \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4} \Leftrightarrow \boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}}$$

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$$

Два треугольника называются *подобными*, если у них равны все три угла, а соответствующие стороны пропорциональны.

Признаки подобия треугольников:

1. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.
2. Если один угол первого треугольника равен углу второго треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольников пропорциональны, то треугольники подобны.
3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

Замечание 1. В подобных фигурах углы между любыми сходственными линейными элементами равны; отношение длин сходственных линейных элементов равно коэффициенту подобия. V

То есть не только длины сходственных сторон, но и длины биссектрис, медиан, высот, периметров, радиусов вписанных и описанных окружностей относятся как коэффициент подобия.

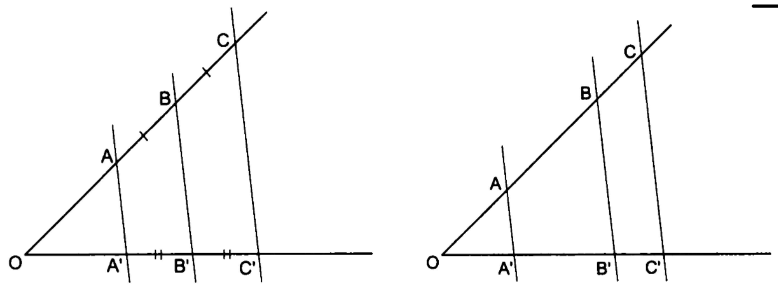
V Замечание 2. В подобных фигурах площади любых сходственных элементов относятся как квадрат коэффициента подобия.

Напомним также и некоторые другие полезные сведения.

- Соответственные и накрест лежащие углы при параллельных прямых равны.
- **Теорема Фалеса.** Если при пересечении сторон угла параллельными прямыми на одной стороне угла отсекаются равные между собой отрезки, то и на другой стороне угла отсекаются также равные между собой отрезки (левый рисунок). V
- **Обобщенная теорема Фалеса.** При пересечении сторон угла параллельными прямыми на сторонах угла отсекаются пропорциональные отрезки (правый рисунок)

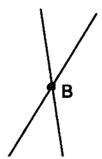
$$\boxed{\frac{AO}{A'O} = \frac{AB}{A'B'}} = \frac{BC}{B'C'}.$$

$$\frac{AO}{AB} = \frac{A'O}{A'B'}$$

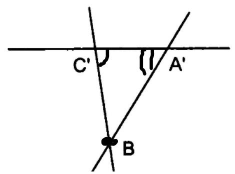


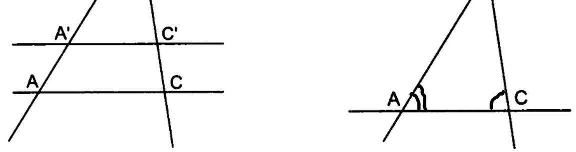
Наиболее распространенными являются ситуации, когда пара подобных треугольников возникает при пересечении параллельными прямыми двух пересекающихся прямых.

1)



1)





В обоих случаях треугольники ABC и $A'BC'$ подобны по первому признаку подобия треугольников. В первом случае углы $\angle A = \angle A'$ и $\angle C = \angle C'$ как соответственные, во втором – как накрест лежащие при параллельных прямых.

Пример 1 (теорема о биссектрисе). Доказать, что биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

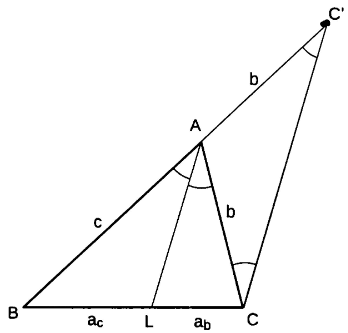
$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$

Решение. Пусть AL – биссектриса треугольника ABC. Через вершину C проведём прямую, параллельную AL, которая пересечёт прямую AB в точке C'. Заметим, что $\angle BAL = \angle AC'C$ как соответственные и $\angle CAL = \angle ACC'$ как внутренние накрест лежащие, следовательно, $\angle AC'C = \angle ACC'$ и треугольник ACC' является равнобедренным.

По теореме Фалеса получим

$$\frac{CL}{LB} = \frac{C'A}{AB} \iff \frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c},$$

что и требовалось доказать.



Пример 2 (теорема о высотах). Пусть AA' и CC' – две высоты остроугольного треугольника ABC. Доказать, что треугольники $A'BC'$ и ABC подобны с коэффициентом $\cos\angle B$.

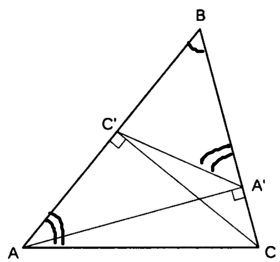
Решение. Запишем косинус угла B двумя способами:

$$\cos\angle B = \frac{BA'}{BA} \quad (\text{из} \quad \Delta ABA'),$$

$$\cos\angle B = \frac{BC'}{BC} \quad (\text{из} \quad \Delta CBC').$$

Теперь рассмотрим треугольники $\Delta A'BC'$ и ΔABC. У них угол $\angle B$ общий, а длины соответствующих сторон связаны соотношением

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \cos\angle B, = K$$



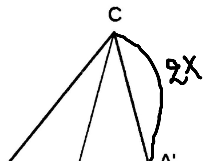
следовательно, треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников, причем коэффициент подобия равен $\cos\angle B$.

Замечание. В треугольнике с тупым углом $\angle B$ коэффициент подобия соответствующих треугольников равен $|\cos\angle B|$.

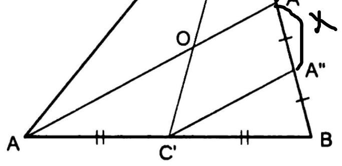
V

Пример 3 (теорема о медианах). Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

Решение. Пусть AA' и CC' – медианы треугольника ABC. Проведём отрезок $C'A'' \parallel AA'$. По теореме Фалеса из равенства отрезков $AC' = C'B$ следует равенство отрезков $A'A'' = A''B$, следовательно,



$$A'A'' = \frac{1}{2}A'B = \frac{1}{2}A'C.$$



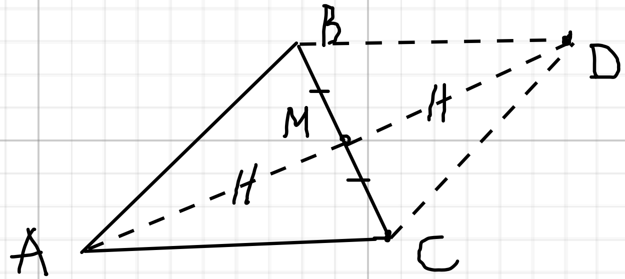
Теперь применим теорему Фалеса к углу $\angle BCC'$:

$$\frac{CO}{OC'} = \frac{CA'}{A'A''} = 2.$$

Таким образом, мы доказали, что медиана AA' проходит через точку $O \in CC'$, которая делит медиану CC' в отношении $2:1$. Аналогичным образом показывается, что и медиана BB' тоже проходит через точку O. Следовательно, медианы треугольника пересекаются в точке O и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

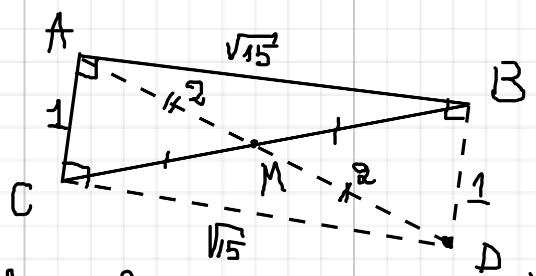
Во многих случаях для решения задачи удобно применить такое дополнительное построение, мы будем называть его удвоением медианы.

На продолжении медианы AM треугольника ABC за точку M отложим отрезок MD, равный AM. Тогда диагонали AD и BC четырёхугольника $ABDC$ точкой пересечения M делятся пополам, значит, $ABDC$ — параллелограмм. Далее применяем свойства параллелограмма.



Пример [redacted] Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведённая к третьей, равна 2.

Решение:



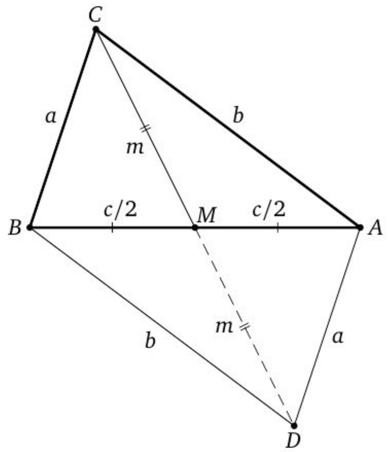
из $\triangle ACD$: $AD^2 = AC^2 + CD^2$ $(16 = 15 + 1)$

$S_{\triangle ABC} = 1\ AC \cdot AB = \sqrt{15}$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2} \approx 1,9$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$

Пример 2. Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что медиана, проведённая к стороне c, равна $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.



Доказательство. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ — стороны треугольника ABC; $CM = m_c$ — медиана треугольника.

На продолжении медианы CM за точку M отложим отрезок MD, равный CM. Тогда $ACBD$ — параллелограмм. Поэтому

$$\underline{CD^2 + AB^2 = 2(AC^2 + BC^2)}, \quad \text{или} \quad \underline{4m_c^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)}.$$

Отсюда находим, что

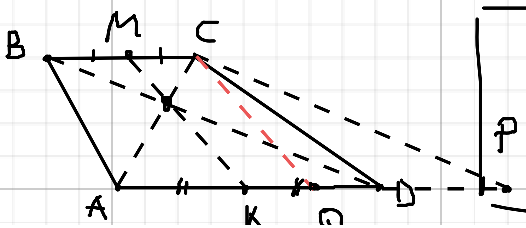
$$\boxed{m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).} = \frac{1}{4}\left(2(a^2+b^2) - c^2\right)$$

$$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2(b^2+c^2) - a^2\right)$$

$$m_b^2 = \frac{1}{4}\left(2(a^2+c^2) - b^2\right)$$

Пример 3. Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

Решение:



Дано

$AC = 3$

$BD = 5$

$MK = 2$

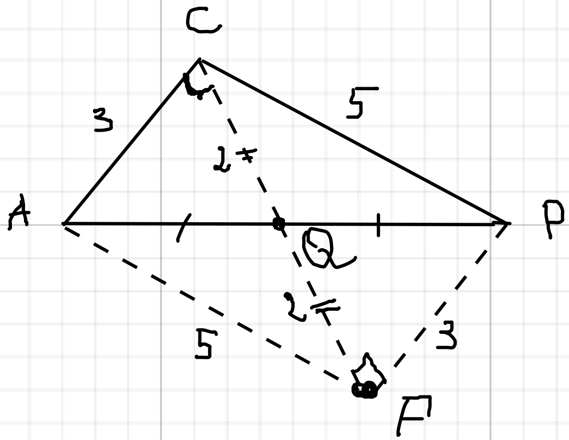
Найти: $S_{ABCD} = ?$

$DP = BC$, $BD = CP$

$KQ = MC$

$AQ = AK + KQ = AK + MC = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC) =$

$= \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}AP$; $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)\,h = \frac{1}{2}AP \cdot h = S_{\triangle ACP}$



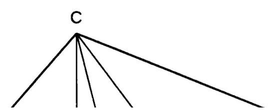
из $\triangle ACF$: $AF^2 = AC^2 + CF^2$ $(25 = 9 + 16)$

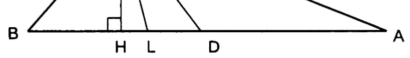
$S_{AQF} = S_{CQP} \to S_{ACP} = S_{ACF} = \frac{1}{2}AC \cdot CF = \frac{1}{2} \, 3 \, 4 = 6$

Ответ: 6

Пример 1. Доказать, что если в треугольнике из одной вершины проведены медиана, биссектриса и высота, то биссектриса лежит между медианой и высотой.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, где высота CH, биссектриса CL и медиана CD проведены к стороне AB.





Если $BC = AC$, то CH, CL и CD совпадают. Пусть для определённости $AC > BC$.

По свойству биссектрисы

$$\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AC} < 1 \quad \Longrightarrow \quad BL < AL \quad \Longrightarrow \quad BL < BA/2 = BD$$

и, следовательно, точка L лежит между точками B и D.

Теперь покажем, что $\angle BCH < \angle BCL$:

$$AC > BC \quad \Longrightarrow \quad \angle CBA > \angle CAB \quad \Longrightarrow \quad \angle BCH < \angle ACH \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \angle BCH < \angle BCA/2 = \angle BCL$$

и, следовательно, биссектриса лежит между медианой и высотой.

Пример 2. Доказать, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.

Решение. Рассмотрим треугольник со сторонами a, b, c и высотами h_a, h_b, h_c. Площадь треугольника равна

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2}.$$

Следовательно, если $h_a = h_b$, то и $a = b$.