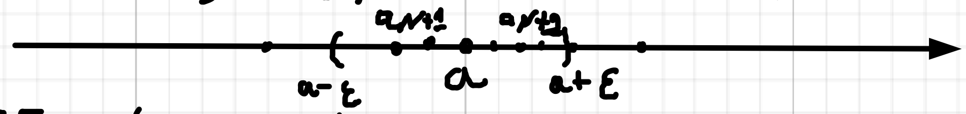
$\{a_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$, $n > N$ $|a_n - a| < \varepsilon$, $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$




$V_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

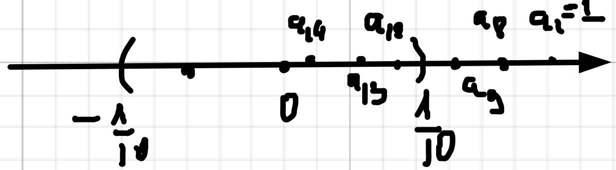
**Пример** $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

**Док-во** $|x_n - 0| < \varepsilon$, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$1 < n\varepsilon$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$, $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ $n > N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

1) $\varepsilon = 0{,}1 = \frac{1}{10}$ $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{10}$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$, $n > 10$

$N_\varepsilon = 11$, $n > 11$




$a_{12} = \frac{1}{12}$

$a_{13} = \frac{1}{13}$

$a_{14} = \frac{1}{14}$

2) $\varepsilon = 0{,}01 = \frac{1}{100}$, $n > 101$ . . . .

$\alpha_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\alpha_n$ – беск малая!

$y_n = n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_\varepsilon$ такой, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon$. Из определения предела последовательности и определения бесконечно малой последовательности следует, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный $a$, тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n - a\}$ имеет предел, равный нулю, т. е. является бесконечно малой.

$-\varepsilon < \alpha_n < \varepsilon$

Бесконечно малые последовательности обладают следующими свойствами:

**1°.** Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность. ✓

**2°.** Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.

$\alpha_n$, $A = \text{const}$ $\mapsto$ $A\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

**Дадим определение предела последовательности. Пусть задана переменная $x_n$. Если $x_n$ можно записать в виде суммы**

$$x_n = a + \alpha_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

**где $a$ — некоторое число и $\alpha_n$ — бесконечно малая, то говорят, что $x_n$ имеет своим пределом число $a$ или что $x_n$ стремится к числу $a$, и пишут**

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a,$$

**или**

$$x_n \to a \quad (n \to +\infty).$$

$x_n - a = \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$z_n = \frac{n+3}{n} = 1 + \underbrace{\frac{3}{n}}_{\alpha_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$

**Теорема** ■ *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ *при условии, что* $y_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $b \neq 0$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} k x_n = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = ka$

5) если $x_n \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \sqrt{a}$

I $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n^k} = a\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^k = a\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\right)^k = a\,0^k = 0$

II $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$, $\forall a > 0$

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt{2} > \sqrt[3]{2} > \sqrt[4]{2} > \sqrt[5]{2} > \ldots > \sqrt[k]{2} \longrightarrow 1\\ \sqrt{0{,}2} < \sqrt[3]{0{,}2} < \sqrt[4]{0{,}2} < \sqrt[5]{0{,}2} < \ldots < \sqrt[k]{0{,}2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1\end{gathered}}$$

III $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$

## Свойства сходящихся последовательностей

1°. *Числовая последовательность может иметь только один предел.*

○ Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела $a$ и $b$, причем $a < b$ (рис. 12). Выберем $\varepsilon > 0$ таким,

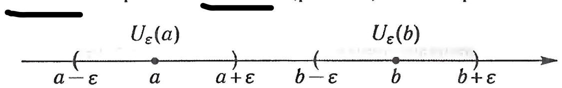



**Рис. 12**

чтобы $\varepsilon$-окрестности точек $a$ и $b$ не пересекались (не имели общих точек). Возьмем, например, $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$. Так как число $a$ — предел последовательности $\{x_n\}$, то по заданному $\varepsilon>0$ можно найти номер $N$ такой, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ для всех $n \geqslant N$. Поэтому вне интервала $U_\varepsilon(a)$ может оказаться лишь конечное число членов последовательности. В частности, интервал $U_\varepsilon(b)$ может содержать лишь конечное число членов последовательности. Это противоречит тому, что $b$ — предел последовательности (любая окрестность точки $b$ должна содержать бесконечное число членов последовательности). Полученное противоречие показывает, что последовательность не может иметь два различных предела. Итак, сходящаяся последовательность имеет только один предел. ●

$\boxed{a=b}$

**2°.** *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

**3°.** *Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N_0, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

*то последовательность* $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

**Пример** [redacted] Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

сходится, и найти ее предел.

**Решение.** $y_n \le x_n \le z_n$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdot + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n \text{ слагаемых}} \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdot + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \quad + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \quad + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = y_n$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0\,0}} = 1$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 1 \longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 1}$$

Добавим еще, что если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = 0$; если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$ $(A \neq 0)$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n y_n) = \infty$; если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$ $(x_n \neq 0)$.

Более сложный вопрос возникает при вычислении предела частного $\frac{x_n}{y_n}$, когда и $x_n \to 0$, и $y_n \to 0$ или когда $x_n \to \infty$ и $y_n \to \infty$. В таких случаях заранее невозможно сказать, чему равен предел. В зависимости от свойств переменных $x_n$ и $y_n$ предел может быть любым конечным или бесконечным числом[1]. Может также случиться, что отношение не имеет никакого предела — ни конечного, ни бесконечного.

Например, пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$. Тогда, очевидно, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n} = n \to +\infty, \quad \frac{y_n}{x_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Если же $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, то отношение $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ ни к какому пределу не стремится.

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2-3n}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(7-\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{7-\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} =$$

$$= \frac{7-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+2\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{7-3\cdot 0}{1+2\cdot 0^2} = 7$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3+4n^2+1}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{2n^3+4n^2+1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{2+\underbrace{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}}_{\alpha_n\to 0}} =$

$= \sqrt[3]{2+4\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^3} = \sqrt[3]{2+4\cdot 0+0^3} = \underline{\underline{\sqrt[3]{2}}}$