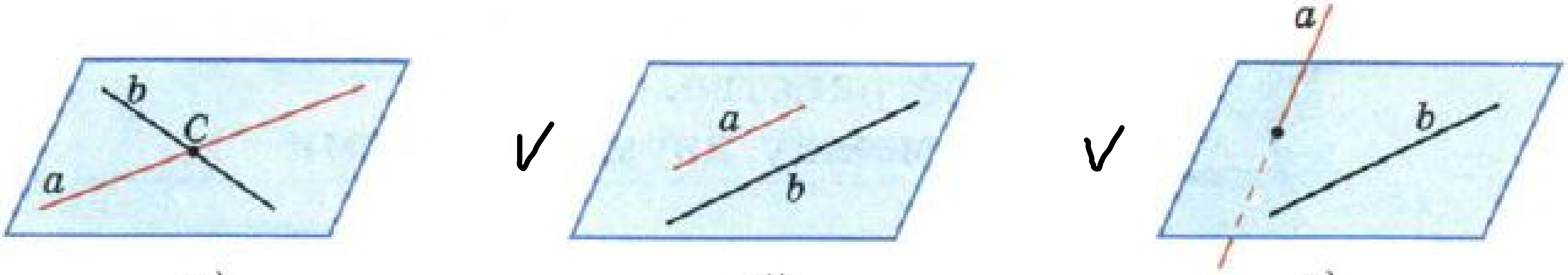


а)
Пересекающиеся прямые

б)
Параллельные прямые

в)
Скрещивающиеся прямые

Рис. 21

б) **прямые параллельны**, т. е. лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 21, *б*);

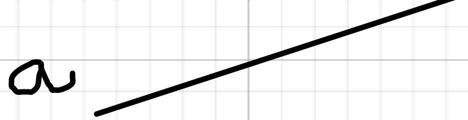
в) **прямые скрещиваются**, т. е. не лежат в одной плоскости (рис. 21, *в*).

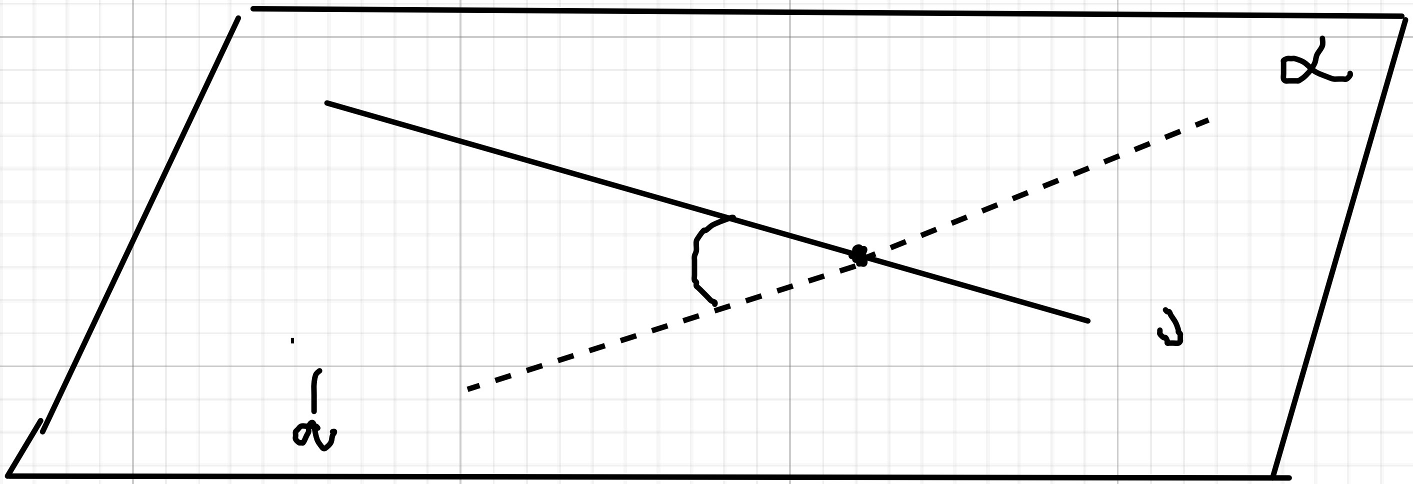
Докажем еще одну теорему о скрещивающихся прямых.

Теорема

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

$a \;|\!\!\setminus\; b$





$a \parallel \alpha$

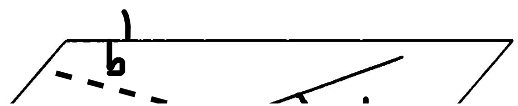
Скрещивающиеся прямые

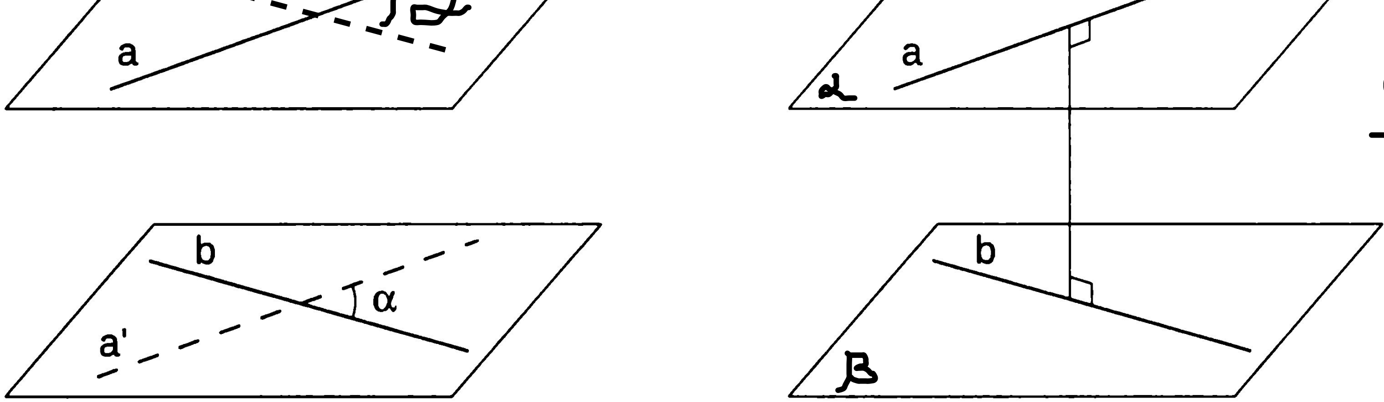
Прямые, которые не лежат в одной плоскости и не пересекаются называются *скрещивающимися.*

Угол между скрещивающимися прямыми определяется как угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку.

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на этих прямых, перпендикулярный к ним (такой отрезок существует и притом только один).

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра (оно же является и расстоянием между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые).





$\rho(a, b) = \rho(\alpha, \beta)$

Параллельные плоскости

Мы знаем, что если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой (аксиома A_3). Отсюда следует, что **две плоскости либо пересекаются по прямой** (рис. 28, *а*), **либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки** (рис. 28, *б*).

Определение

Две плоскости называются **параллельными, если они не пересекаются.**

Представление о параллельных плоскостях дают пол и потолок комнаты, две противоположные стены, поверхность стола и плоскость пола.

Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Рассмотрим признак параллельности двух плоскостей.

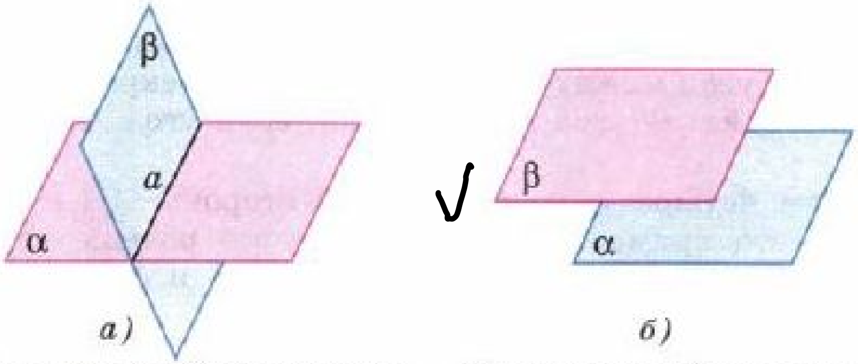
Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство

Рассмотрим две плоскости α и β (рис. 29). В плоскости α лежат пересекающиеся в точке M прямые

мые a и b, а в плоскости β — прямые a_1 и b_1, причем $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$. Докажем, что $\alpha \parallel \beta$. Прежде всего отметим, что по признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \beta$ и $b \parallel \beta$.



Плоскости α и β пересекаются Плоскости α и β параллельны

Рис. 28

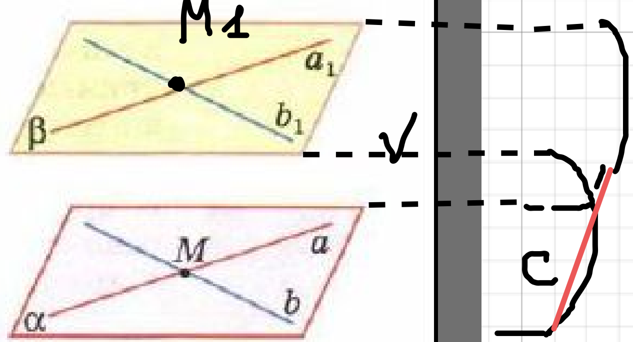


Рис. 29

Допустим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Мы получили, что плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β по прямой c. Отсюда следует (по свойству 1^0, п. 6), что прямые a и c параллельны.

Но плоскость α проходит также через прямую b, параллельную плоскости β. Поэтому $b \parallel c$. Таким образом, через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как по теореме о параллельных прямых через точку M проходит только одна прямая, параллельная прямой c. Значит, наше допущение неверно и, следовательно, $\alpha \parallel \beta$. Теорема доказана.

Дано: $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = M$
$a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a \parallel a_1$, $b = b_1$

Док-ть: $\alpha \parallel \beta$

Док-во: Пусть $\alpha \nparallel \beta \rightarrow$
$\rightarrow \alpha \cap \beta = c$.
$a \parallel c$, $c \parallel b \rightarrow$ $a \parallel b$?

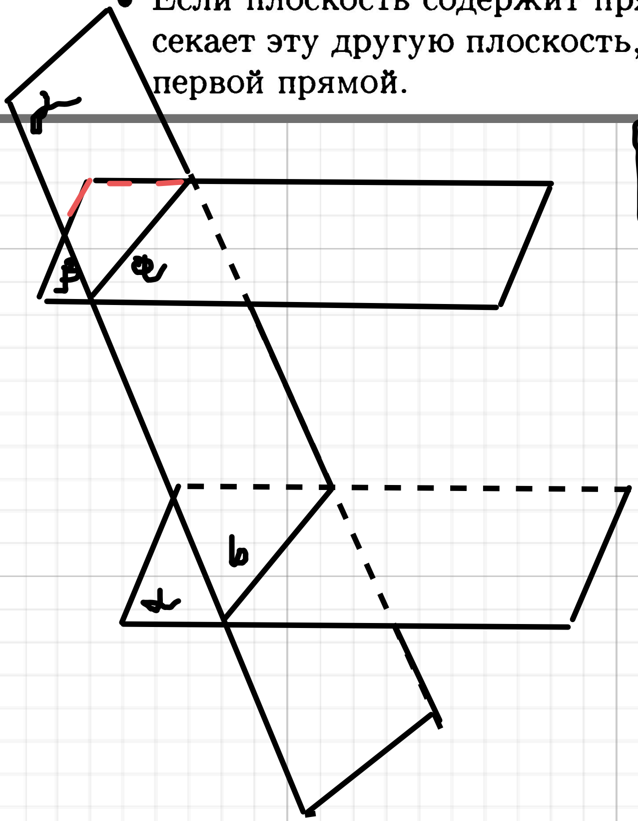
Теоремы о параллельности прямых и плоскостей:

- Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу (*транзитивность параллельности прямых*).
- Ели прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости (*признак параллельности прямой и плоскости*).

- Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (*признак параллельности плоскостей*).

- Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны (*теорема о параллельных плоскостях*).

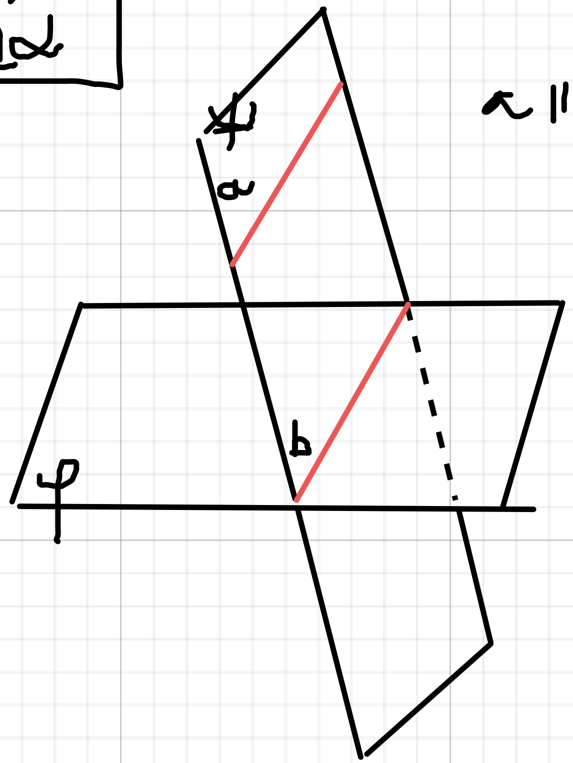
- Если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту другую плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна первой прямой.



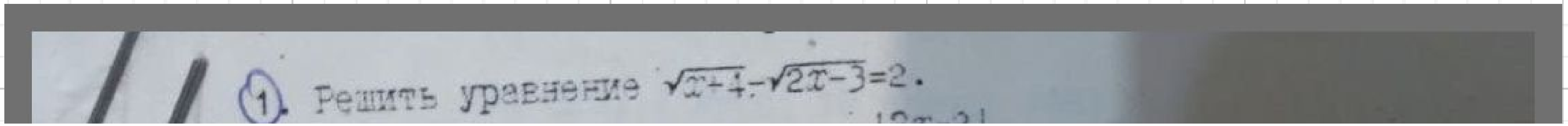
$\boxed{\alpha \parallel \beta} \Rightarrow \boxed{a \parallel b}$

$a = \gamma \cap \beta$

$b = \gamma \cap \alpha$



$a \parallel \varphi \Rightarrow a \parallel b$


1. Решить уравнение $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-3}=2$.

2. Построить график функции $y=\frac{|2x-2|}{x-2}$.

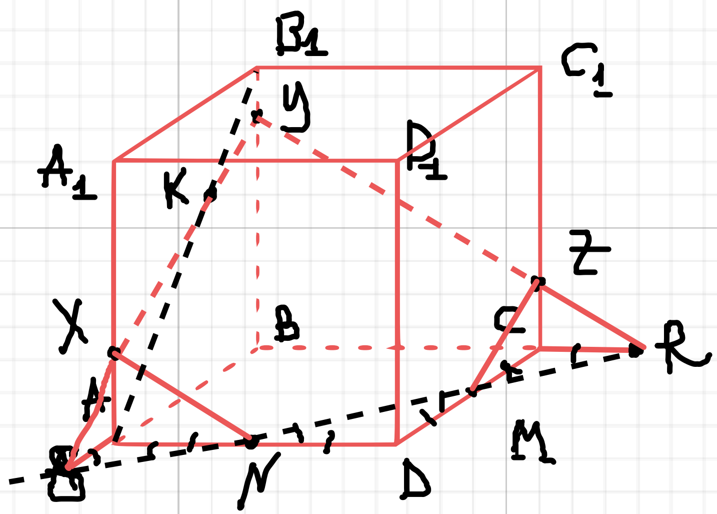
3. В треугольнике ABC проведены высота BH и медиана AM. Найти AC, если известно, что $AB=10$, $AM=\sqrt{65}$, $BH=8$.

4. Решить уравнение $\frac{\sin x+\sin 5x}{\sin 2x}=2\cos 2x$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M середина CD, точка N середина AD, точка K расположена на диагонали AB_1 так, что $AK:KB_1=2:1$. Найти, в каком отношении плоскость MNK делит ребра куба.

Решение

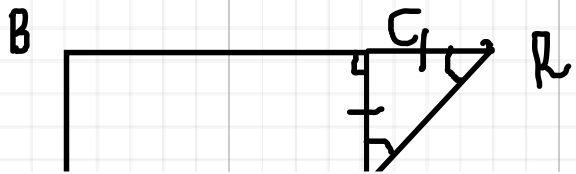
$\alpha = (MNK)$ — сек. плоскость



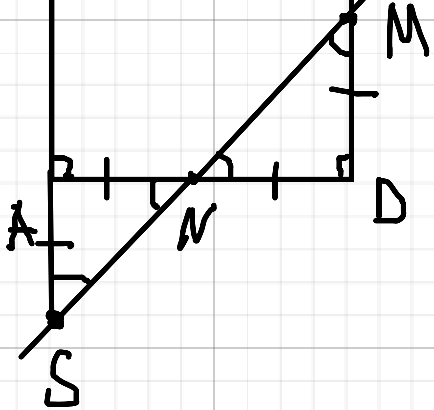
$YZMNX$ — сечение

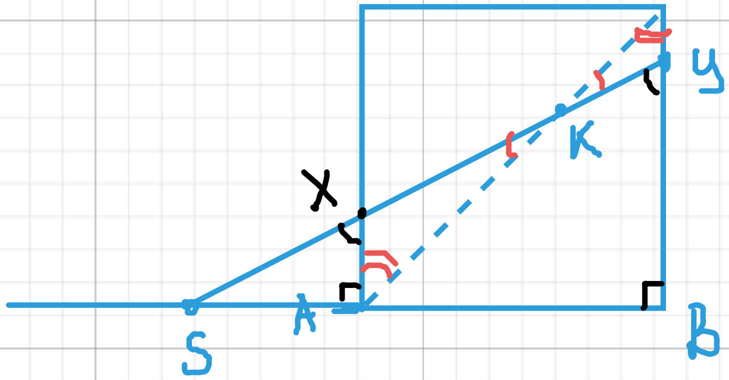
$\triangle NDM = \triangle SAN = \triangle RCM$

т.к. $AS = \frac{AB}{2}$



A_1 B_1





$\triangle SXA \sim \triangle SYB: \quad \frac{SA}{SB} = \frac{XA}{YB}, \quad SA = \frac{1}{2}AB$

$SB = SA + AB = \frac{3}{2}AB$

$\frac{SA}{SB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{3}{2}AB} = \frac{1}{3} \longrightarrow \boxed{\frac{XA}{YB} = \frac{1}{3}} \longrightarrow XA = \frac{1}{3}YB$

$\boxed{\triangle XAK \sim \triangle YB_1K} \qquad \frac{XK}{KB_1} = \frac{XA}{YB_1} = 2 \longrightarrow XA = 2YB_1$

$\frac{1}{3}YB = 2YB_1 \longrightarrow \frac{YB_1}{YB} = \frac{1}{6} \longrightarrow XA = \frac{1}{3}YB = \frac{1}{3}\,\frac{6}{7}AA_1 = \frac{2}{7}AA_1$

$XA_1 = AA_1 - XA = AA_1 - \frac{2}{7}AA_1 = \frac{5}{7}AA_1$

$\frac{A_1X}{XA} = \frac{\frac{5}{7}AA_1}{\frac{2}{7}AA_1} = \frac{5}{2} = \frac{C_1Z}{ZC}$

Ответ: 5:2 и 1 6