$$\log_{a(x)} f(x) \leqslant b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \leqslant (a(x))^b; \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) < 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) \geqslant (a(x))^b; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (1)$$

$$\log_{a(x)} f(x) \geqslant b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) \geqslant (a(x))^b; \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) < 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \leqslant (a(x))^b; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2)$$

$$\underline{\log_{a(x)} f(x) \leqslant \log_{a(x)} g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ \underline{f(x) \leqslant g(x)}; \end{cases} \\ \begin{cases} \underline{a(x) < 1}, \\ \underline{a(x) > 0}, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant g(x). \end{cases} \end{array}\right. \qquad (3)$$

Для строгих неравенств последние неравенства в каждой из систем каждой из совокупностей также будут строгими. Конечно же, при решении конкретных неравенств лучше не выписывать столь громоздкие совокупности, а рассматривать два случая, находить множество решений для каждого из них, а затем объединять найденные множества.

Пример 1: $\log_{6x}(x^2-15x+54) < 1$

$$\log_{6x}(x^2-15x+54) < \log_{6x} 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 6x > 1 \\ x^2-15x+54 < 6x \\ x^2-15x+54 > \end{cases} \\ 2)\begin{cases} 0 < 6x < 1 \\ x^2-15x+54 > 6x \end{cases} \end{array}\right.$$

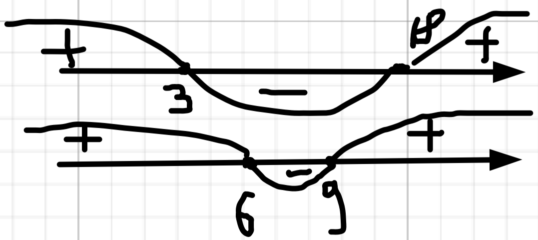
1) $\begin{cases} x > 1/6 \\ x^2-21x+54 < 0 \\ (x-6)(x-9) > 0 \end{cases}$

$x_{1,2} = \dfrac{15 \pm 3}{2} = \left[\begin{array}{l} 9 \\ 6 \end{array}\right.$

$x_{3,4} = \dfrac{21 \pm 15}{2} = \left[\begin{array}{l} 18 \\ 3 \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x > 1/6 \\ (x-18)(x-3) < 0 \\ (x-6)(x-9) > 0 \end{cases}$

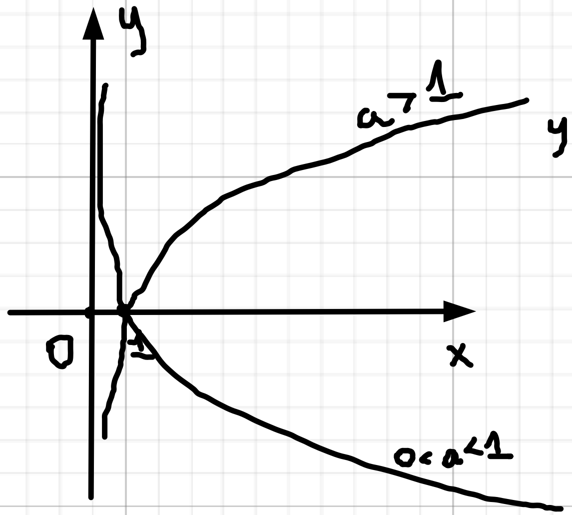


$\begin{cases} x \in (1/6; +\infty) \\ x \in (3; 18) \\ x \in (-\infty; 6) \cup (9; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3;6) \cup (9; 18)$

2) $\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{6} \\ x^2 - 21x + 54 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1/6 \\ (x-18)(x-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 1/6) \\ x \in (-\infty; 3) \cup (18; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1/6)$

$\left[\begin{array}{l} x \in (3;6) \cup (9;18) \\ x \in (0; 1/6) \end{array} \right. \Leftrightarrow \underline{x \in (0; 1/6) \cup (3;6) \cup (9;18)}$

Ответ



$y = \log_a x$

1) $a > 1$, $x > 1 \mapsto \log_a x > 0$

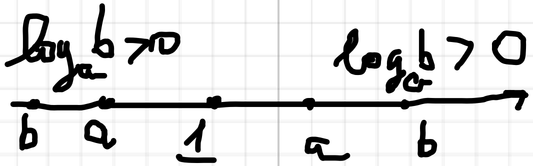
$0 < x < 1 \mapsto \log_a x < 0$

2) $0 < a < 1$, $x > 1 \mapsto \log_a x < 0$

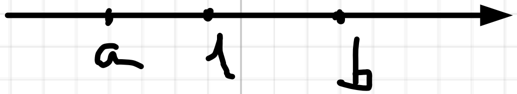
$0 < x < 1 \mapsto \log_a x > 0$

$\underline{x = b}$

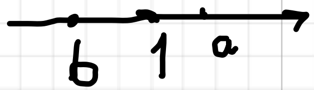
$\log_a b$



$\log_a b < 0$



$\log_a b < 0$



$\log_a b$ имеет такой же знак как $(a-1)(b-1)$

$\frac{b-1}{a-1}$

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_d c \cdot \log_n m > 0} \Leftarrow (b-1)(a-1)(c-1)(d-1)(m-1)(n-1) > 0$$

рац. нер-во

$$\frac{(b-1)(c-1)(m-1)}{(a-1)(d-1)(n-1)} >$$

$$\log_{6x}(x^2-15x+54) - \log_{6x} 6x < 0$$

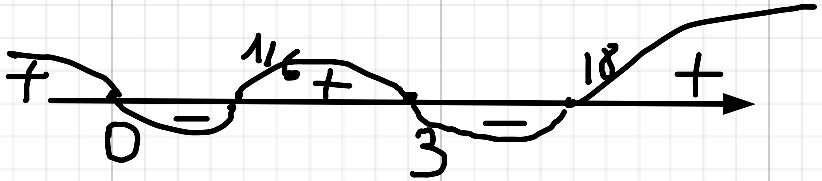
$$\log_{6x} \frac{(x^2-15x+54)}{6x} < 0$$

$$\boxed{\log_{g(x)} f(x) \vee 0 \Leftarrow (f(x)-1)(g(x)-1) \vee 0}$$

$$\left(\frac{x^2-15x+54}{6x} - 1\right)(6x-1) < 0$$

$$\frac{(x^2-21x+54)\cdot\cancel{6}(x-1/6)}{\cancel{6}x}<0$$

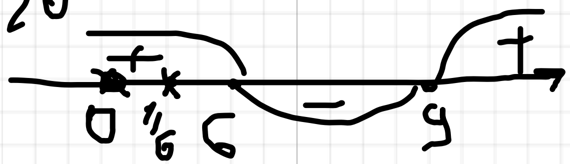
$$\frac{(x-3)(x-18)(x-1/6)}{x}<0$$



$x\in(0;\ 1/6)\cup(3;\ 18)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-15x+54>0\\ 6x>0\\ 6x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-9)(x-6)>0\\ x>0\\ x\neq 1/6\end{cases}$$



$x\in(0;\ 1/6)\cup(1/6;\ 6)\cup(9;\ +\infty)$

Ответ: $x\in(0;\ 1/6)\cup(3;\ 6)\cup(9;\ 18)$

Пример 2: $\left(4^{x^2-x-6}-1\right)\log\left(4^{x^2+2x+2}-3\right)\ldots$

Решение: $4^{x^2+2x+2}-3=4^{x^2+2x+1+1}-3=$

$=4^{(x+1)^2+1}-3$

$4^{(x+1)^2+1}=4\cdot4^{(x+1)^2}$

$f(x)=(x+1)^2$

$\min f(x)=(-1+1)^2=0$

$x=-1$

$\min\limits_{x=-1}4^{(x+1)^2+1}=4;$ $\hookrightarrow 4^{(x+1)^2+1}-3\geqslant1$

$\hookrightarrow x=-1$ - решение;

при $x\neq-1$ $\hookrightarrow 4^{(x+1)^2+1}-3>1$

$\log_{1/4}(>1)\hookrightarrow\log_{1/4}(4^{x^2+2x+2}-3)<0$!

Тогда $\hookrightarrow 4^{x^2-x-6}-1\geqslant0$

$4^{x^2-x-6}\geqslant4^0\Leftrightarrow x^2-x-6\geqslant0$

$(x-3)(x+2)\geqslant0$

$+\quad -2\quad -\quad 3\quad +$

$x\in(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-2]\cup\{-1\}\cup[3;+\infty)$

Пример 3:

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 64 \\ x\neq \frac{1}{64} \end{cases}$

$$\frac{\log_2(64x)}{\log_2 x-6}+\frac{\log_2 x-6}{\log_2(64x)}\geq\frac{73-\log_2 x}{\log_2^2 x-36}$$

Решение:

$$\frac{\log_2 2^6+\log_2 x}{\log_2 x-6}+\frac{\log_2 x-6}{\log_2 2^6+\log_2 x}\geq\frac{73-\log_2 x}{(\log_2 x-6)(\log_2 x+6)}$$

замена $\log_2 x = z$

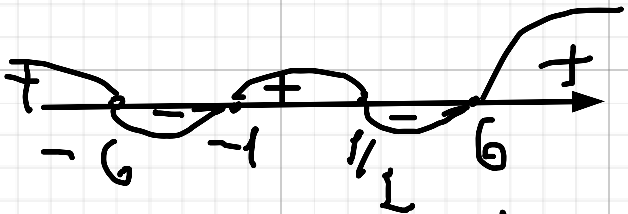
$$\frac{6+z}{z-6}\cancel{{}^{z+6}}+\frac{z-6}{6+z}\cancel{{}^{z-6}}\geq\frac{73-z}{(z-6)(z+6)}$$

$$\frac{(z+6)^2+(z-6)^2-73+z}{(z-6)(z+6)}\geq$$

$$\frac{z^2+\cancel{12z}+36+z^2-\cancel{12z}+36-73+z}{(z-6)(z+6)}\geq 0$$

$$\frac{2z^2+z-1}{(z-6)(z+6)}\geq 0 \qquad z_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}=\left[\begin{array}{l}-1\\ \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\frac{2(z+1)(z-\frac{1}{2})}{(z-6)(z+6)}\geq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} z<-6 \\ -1\leq z\leq \frac{1}{2} \\ z>6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x<-6 \\ -1\leq \log_2 x\leq \frac{1}{2} \\ \ldots \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<\frac{1}{64} \\ \frac{1}{2}\leq x\leq \sqrt{2} \\ \ldots \end{array}\right.$$

$\log_2 x > 6$ $\qquad$ $\left[x > 64 \right.$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{64}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right] \cup (64; +\infty)$