Полярное уравнение прямой

Найдем уравнение прямой в полярных координатах. Ее положение можно определить, указав расстояние p от полюса O до данной прямой и угол α между полярной осью OP и осью l, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (см. рис. 44).

Для любой точки $M(r;\varphi)$ на данной прямой имеем:

$$\text{пр}_l\,\overline{OM} = p.$$

С другой стороны,

$$\text{пр}_l\,\overline{OM} = |\overline{OM}|\cdot\cos(\alpha-\varphi) = r\cdot\cos(\varphi-\alpha).$$

Следовательно,

$$\boxed{r\cos(\varphi-\alpha) = p.} \checkmark$$

[redacted]

Полученное уравнение [redacted] и есть *уравнение прямой в полярных координатах.*

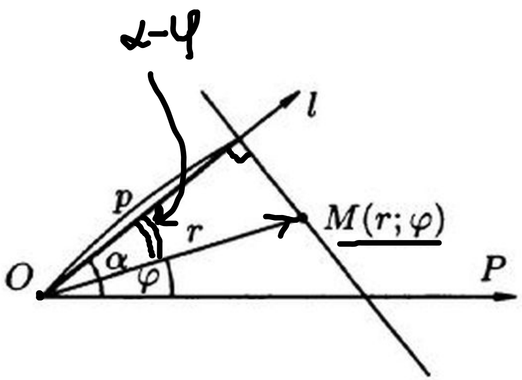
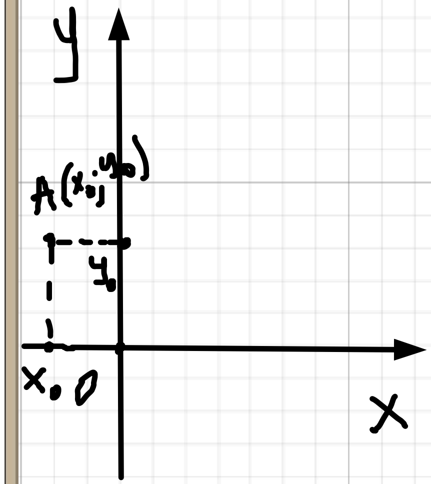
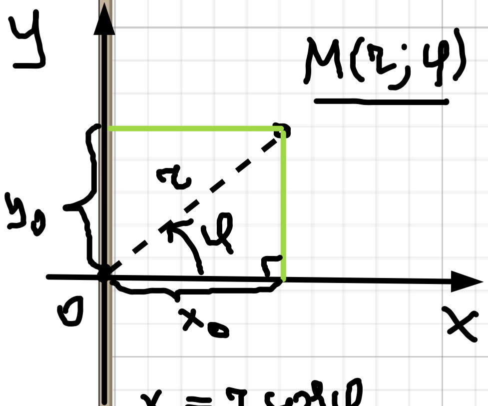


Рис. 44





$x_0 = r\cos\varphi$

$y_0 = r\sin\varphi$

Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая определяется заданием p и α (см. рис. 45). Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy. Введем полярную систему, взяв O за полюс и Ox за полярную ось. Уравнение прямой можно записать в виде

$\cos(\varphi-\alpha) = \cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha$

$$r\cdot\cos(\varphi-\alpha) - p = 0, \quad \text{т. е.} \quad r\cdot\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0.$$

Но, в силу формул, связывающих прямоугольные и полярные координаты, имеем: $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$. Следовательно, уравнение [redacted] прямой в прямоугольной системе координат примет вид

$$\boxed{x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha - p = 0.} \checkmark \qquad (10.11)$$

Уравнение (10.11) называется нормальным уравнением прямой

Уравнение (10.11) называется *нормальным уравнением прямой.*

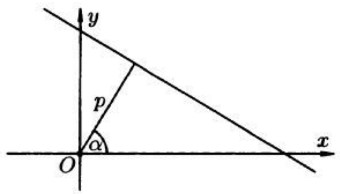


Рис. 45

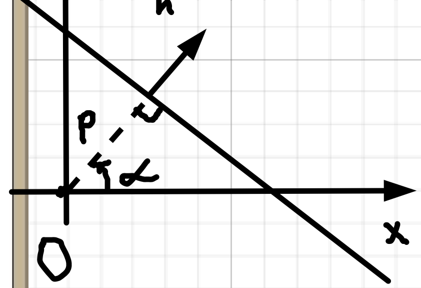
Покажем, как привести уравнение (10.4) прямой к виду (10.11).

Умножим все члены уравнения (10.4) на некоторый множитель $\lambda \neq 0$. Получим $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$. Это уравнение должно обратиться в уравнение (10.11). Следовательно, должны выполняться равенства: $\lambda A = \cos\alpha$, $\lambda B = \sin\alpha$, $\lambda C = -p$. Из первых двух равенств находим

$$\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Множитель λ называется *нормирующим множителем.* Согласно третьему равенству $\lambda C = -p$ знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

$$\lambda^2(A^2+B^2) = 1 \rightsquigarrow \lambda^2 = \frac{1}{A^2+B^2}$$



$\vec{n}_x = 1\cdot\cos\alpha = \cos\alpha$

$\vec{n}_y = 1\cdot\sin\alpha = \sin\alpha$

Пример [redacted] Привести уравнение $-3x+4y+15=0$ к нормальному виду.

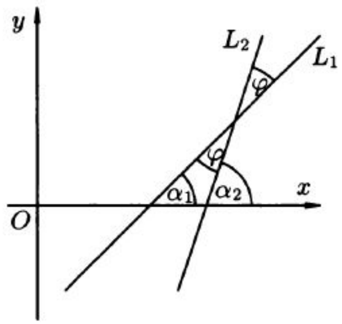
Решение: Находим нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{-\sqrt{(-3)^2+4^2}} = -\dfrac{1}{5}$. Умножая данное уравнение на λ, получим искомое нормальное уравнение прямой: $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$.

$-\frac{1}{5}\cdot 15 = -3$

Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис. 46).

Требуется найти угол φ, на который надо повернуть в положительном направлении прямую L_1 вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой L_2.



Решение: Имеем $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема о внешнем угле треугольника) или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

Рис. 46

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},} \quad ✓ \qquad (10.12)$$

откуда легко получим величину искомого угла. ●

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая — второй, то правая часть формулы (10.12) берется по модулю, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$. ✓

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Из формулы (10.12) следует $k_2 - k_1 = 0$, т. е. $k_2 = k_1$. И обратно, если прямые L_1 и L_2 таковы, что $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т. е. прямые параллельны. Следовательно, *условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:* $k_1 = k_2$.

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$. Отсюда $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, т. е. $k_1 \cdot k_2 = -1$ ✓ (или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$). Справедливо и обратное утверждение. Таким образом, *условием перпендикулярности прямых является равенство* $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$\to \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$

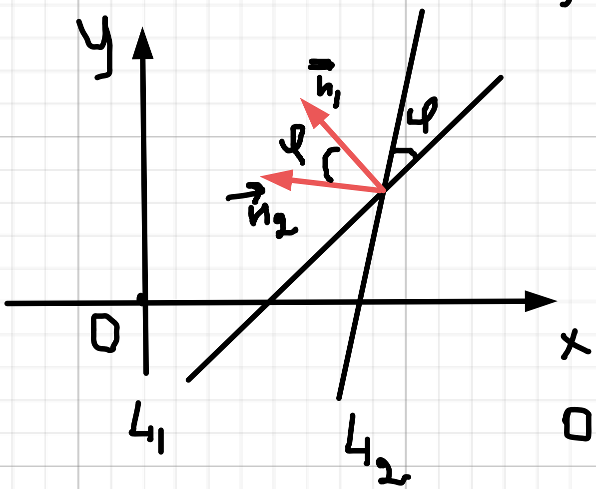
$\to k_2 - k_1 = 0$

$\to k_1 = k_2$

$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1}$

$L_1:\ k_1x - y + b_1 = 0$, $\vec{n}_1(k_1; -1)$ и $\vec{n}_1 \perp L_1$

$L_2:\ k_2x - y + b_2 = 0$, $\vec{n}_2(k_2; -1)$ и $\vec{n}_2 \perp L_2$



$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cos\varphi$

$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{k_1k_2 + 1}{\sqrt{k_1^2+1} \cdot \sqrt{k_2^2+1}}$

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \to \cos\varphi = \frac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{k_1^2+1} \cdot \sqrt{k_2^2+1}}$

$\varphi = \arccos \frac{|k_1k_2 + 1|}{\ldots}$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \to k_1k_2 = -1$

$\sqrt{k_1^2+1}\cdot\sqrt{k_2^2+1}$

$L_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0 \to \vec{n}_1(a_1;b_1)$

$L_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0 \to \vec{n}_2(a_2;b_2)$

$$\varphi=(\widehat{L_1,L_2})=\arccos\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$\cos\varphi=0 \to \varphi=\frac{\pi}{2} \to \underline{a_1a_2+b_1b_2=0} \to \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$

$\to L_1\perp L_2$

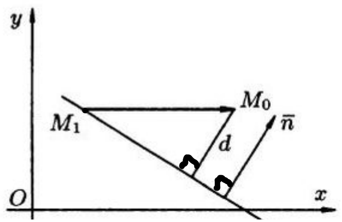
$L_1\parallel L_2 \to \vec{n}_1\parallel\vec{n}_2 \to \vec{n}_1=k\vec{n}_2 \to$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L уравнением $\underline{Ax+By+C=0}$ и точка $M_0(x_0;y_0)$ (см. рис. 47). Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L.

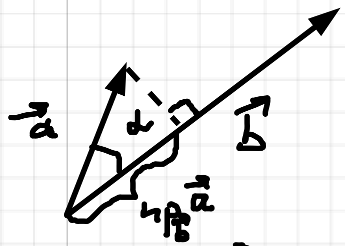
○ Решение: Расстояние d от точки M_0 до прямой L равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1;y_1)$ — произвольная точка прямой L, на направление нормального вектора $\underline{\bar{n}=(A;B)}$. Следовательно,



$\overline{M_1M_0}=(x_0-x_1;y_0-y_1)$

$$d=|\text{пр}_{\bar{n}}\overline{M_1M_0}|=\left|\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|=$$

$$=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=$

$=|\vec{b}|\,\underbrace{|\vec{a}|\cdot\cos\alpha}=$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Рис. 47

Так как точка $M_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т. е. $C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},} \qquad (10.13)$$

что и требовалось получить.

$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$

$= |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$

$|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$

Пример [redacted] Найти расстояние от точки $M_0(2; -1)$ до прямой $3x + 4y - 22 = 0$.

$\vec{n}(3; 4)$

Решение: По формуле (10.13) получаем

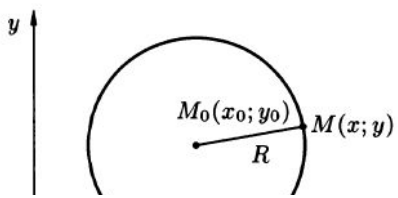
$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4.$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

[redacted] Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что ***окружностью*** радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$. Пусть точка M_0 в прямоугольной системе координат Oxy имеет координаты x_0, y_0, а $M(x; y)$ — произвольная точка окружности (см. рис. 48).

Тогда из условия $M_0M = R$ получаем уравнение



$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R,$$

то есть

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.} \quad (11.2)$$

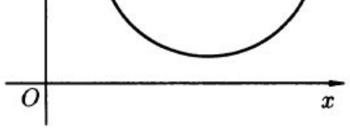


Рис. 48

Уравнению (11.2) удовлетворяют координаты любой точки $M(x;y)$ данной окружности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на окружности.

Уравнение (11.2) называется *каноническим уравнением окружности.*

В частности, полагая $x_0=0$ и $y_0=0$, получим уравнение окружности с центром в начале координат $x^2+y^2=R^2$.

Уравнение окружности (11.2) после несложных преобразований примет вид $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0$. При сравнении этого уравнения с общим уравнением (11.1) кривой второго порядка легко заметить, что для уравнения окружности выполнены два условия:

1) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой;

2) отсутствует член, содержащий произведение xy текущих координат.

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\underbrace{x^2+2\cdot\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{4}}-\frac{a^2}{4}+\underbrace{y^2+2\cdot\frac{b}{2}\cdot y+\frac{b^2}{4}}-\frac{b^2}{4}+c=0$$

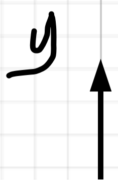
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$

$$R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}\,, \quad \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$$

$$x_0=-\frac{a}{2}$$

$$y_0=-\frac{b}{2}$$

$$x^2+y^2+2x+2y+1=0$$



$$\underbrace{x^2+2x+1}+\underbrace{y^2+2y+1}-1=0$$

$$(x+1)^2+(y+1)^2=1$$

$$(-1;1)$$

$$R=1$$