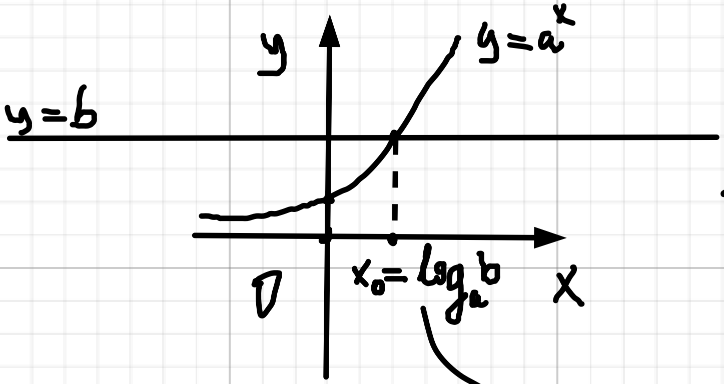


$a^x=b$

$\begin{cases} y=b \\ y=a^x \end{cases}$

$a^{x_0}=b$!

$b \neq a^c$

Рассмотрим уравнение

$$3^x=243.$$

Записав это уравнение в виде $3^x=3^5$ и используя свойства степени, получим $x=5$. В этом случае правую часть уравнения удалось представить в виде степени с основанием 3.

Однако при решении уравнения

$$3^x=40$$

его правая часть не приводится к виду 3^α, где $\alpha \in \mathbb{Q}$. Чтобы уметь решать подобные уравнения, вводится понятие логарифма.

Рассмотрим уравнение

$$a^x=b, \tag{1}$$

где $a>0$, $a \neq 1$, $b>0$.

Корень уравнения (1) называется логарифмом числа b по основанию a.

Определение. *Логарифмом положительного числа b по основанию a*, где $a>0, a \neq 1$, называется показатель степени c, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b. Обозначение: $\log_a b=c$. $\Leftrightarrow$ $a^c=b$, $c=\log_a b$

$\boxed{a^{\log_a b}=b}$

$a^x=1^x=1$

Операция логарифмирования, заключающаяся в нахождении логарифма числового, алгебраического или иного выражения, определена при $a>0, a \neq 1$, $b>0$, так как при $a=1$ выражение a^x тождественно равно 1 и при $b \neq 1$ значение x не определено, а при $a=b=1$ соответствующему уравнению удовлетворяет любое число x.

Например, $\log_3 9=2$, так как $3^2=9$; $\log_2 \frac{1}{8}=-3$, так как $2^{-3}=\frac{1}{8}$;

$\log_5 5 = 1$, так как $5^1 = 5$; $\log_7 1 = 0$, так как $7^0 = 1$.

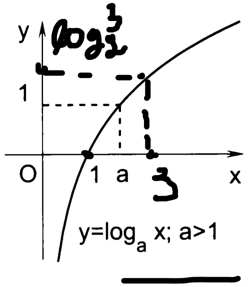
Итак, по определению, имеет место равенство

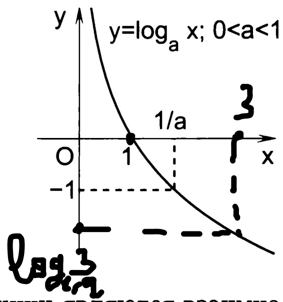
$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0.$$

Это равенство называется *основным логарифмическим тождеством*. V

$\log_x(-27)$?

Функция $y = \log_a x$**, где** $x > 0$**,** $a > 0$**,** $a \neq 1$**, называется** ***логарифмической.*** **Напомним, что число** b **называется** ***логарифмом*** **числа** $c > 0$ **по основанию** $a > 0$**,** $a \neq 1$**, если** $a^b = c$**; обозначение:** $b = \log_a c$**, где** $c > 0$**,** $a > 0$**,** $a \neq 1$**.**





Показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными. V

Областью значения логарифмической функции является вся числовая ось, причём $\forall y \in \mathbb{R}$ **найдётся только один** $x > 0$**, на котором** y **достигается.**

Если $a > 1$**, то** $y = \log_a x$ **возрастает; если** $0 < a < 1$**, то** $y = \log_a x$ **убывает.** V

$\log_2 3 > 0$, $\quad 3 > 2 > 1 \Rightarrow > 0$

$\log_{1/2} 3 < 0$, $\quad \frac{1}{2} < 1 < 3 \Rightarrow < 0$

Например, $2^{\log_2 5} = 5$, $4^{\log_4 0{,}75} = 0{,}75$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}} 12} = 12$.

Пример 1. Вычислить $\log_9 243$. $= x \Leftrightarrow 9^x = 243$

$$(3^2)^{x} = 3^5 \iff 3^{2x} = 3^5 \iff 2x = 5 \iff x = \frac{5}{2}$$

Пример 2. Вычислить $\sqrt{2}^{\,2+\log_2 5}$. $= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{(2+\log_2 5)} =$

$$= 2^{1+\frac{1}{2}\log_2 5} = 2\cdot 2^{\frac{1}{2}\log_2 5} = 2\cdot\left(2^{\log_2 5}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\cdot(5)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\sqrt{5}.$$

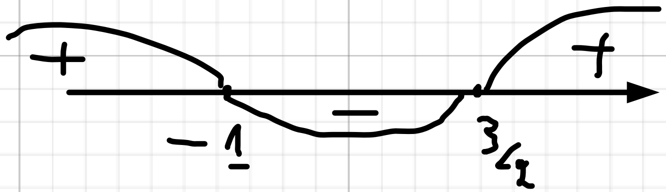
Пример 3. Решить уравнение $\log_2(3-2x) = 3$.

$$3-2x = 2^3 \iff 3-2x = 8 \iff 2x = -5$$

$$x = -\frac{5}{2}.$$

Пример 4. Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение $\log_{2x}\frac{3-2x}{x+1}$.

$$\begin{cases} \frac{3-2x}{x+1} > 0 \\ 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \end{cases} \longrightarrow \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x+1} < 0$$



$$\begin{cases} x \in \left(-1; \frac{3}{2}\right) \\ x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases} \longmapsto$$

Отв: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Пример 5. Решить уравнение:

$\log_5^2 x - 8\log_5 x = -7.$

$\log_5^2 x = (\log_5 x)^2$

$(\log_5 x)^2 - 8\log_5 x + 7 = 0$

$t = \log_5 x$ – замена!

$t^2 - 8t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 7 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 5^1 = 5 \\ x_2 = 5^7 \end{array}\right.$

Отв: 5 и 5^7

■ **Свойства логарифмов**

При любом $a > 0$ $(a \neq 1)$ справедливы следующие свойства.

1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $x > 0$, $y > 0$.

2°. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $x > 0$, $y > 0$.

3°. $\log_a x^p = p \log_a x$, $x > 0$;
если $p = \pm 2n$, $n \in \mathbb{N}$, то $\log_a x^p = p \log_a |x|$, $x \neq 0$.

4°. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$, $x > 0$, $p \neq 0$;
если $p = \pm 2n$, $n \in \mathbb{N}$, то $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_{|a|} x$, $x > 0$, $p \neq 0$.

5°. $\log_a 1 = 0$.

6°. $\log_a a = 1$;

7°. $\log_a x_1 > \log_a x_2$, если $a > 1$, $x_1 > x_2 > 0$,
и $\log_a x_1 > \log_a x_2$, если $0 < a < 1$, $0 < x_1 < x_2$.

$\log_{a^2} b^3 = \frac{3}{2} \log_a b$

Пример 6. Вычислить $A = \frac{\log_2 6 + \log_2 20 - \log_2 15}{\dots} =$

$\log_3 4\sqrt{2} - \log_3 20\sqrt{6} + \log_3 15\sqrt{3}$

$$= \frac{\log_2(6\cdot 20) - \log_2 15}{\log_3 \frac{4\sqrt{2}}{20\sqrt{6}} + \log_3 15\sqrt{3}} = \frac{\log_2 \frac{6\cdot 20}{15}}{\log_3 \frac{4\sqrt{2}}{20\sqrt{6}}\cdot 15\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\log_2 8}{\log_3 \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6}}} = \frac{\log_2 8}{\log_3 3} = \frac{3}{1} = 3.$$

Пример 7. Вычислить $\log_{32} 128$. $= \log_{2^5} 2^7 = \frac{7}{5}\log_2 2 = \frac{7}{5}.$

Пример 8. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c $(c \neq 1)$ имеет место равенство $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Д-во: $\log_c\left(a^{\log_c b}\right) = \log_c\left(b^{\log_c a}\right)$

$\log_c b \cdot \log_c a = \log_c a \cdot \log_c b$ ч.т.д.

Пример 9. Сравнить числа $\log_2 5$ и $\log_3 7$.

$\log_2 x > \log_2 y \Leftrightarrow x > y > 0$

$2 = \log_2 4 < \log_2 5$

$$2 = \log_3 9 > \log_3 7 \hookrightarrow \log_3 7 < 2 < \log_2 5$$

$$\hookrightarrow \log_3 7 < \log_2 5 \quad (a < c,\ c < b \hookrightarrow a < b)$$

Пример 10. Доказать, что число $\log_2 3$ — иррациональное.

Д-во: $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

Пусть $r = \log_2 3 \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \log_2 3 \Leftrightarrow 2^{\frac{m}{n}} = 3$

$$\left(2^{\frac{m}{n}}\right)^n = 3^n \Leftrightarrow 2^m = 3^n \text{ — неверно!}$$

$\hookrightarrow \log_2 3$ — иррационально!

Пример 7 Для каждого значения параметра a решить уравнение
$$3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}.$$

Решение: $y = 4^{x-2} > 0$

$$3y + 27 = a + ay$$

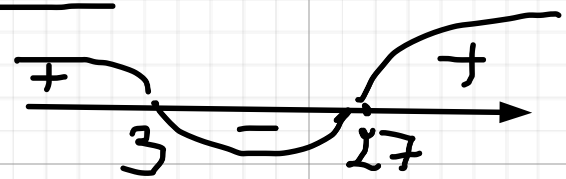
$$ay - 3y = 27 - a$$

$$y(a-3) = 27 - a$$

1) $a = 3$, $0 \cdot y \neq 24$ — реш. нет

2) $a \neq 3 \quad y = \frac{27-a}{a-3} > 0$?

$$\frac{a-27}{a-3} < 0$$



$a \in (3; 27)$

$$4^{x-2} = \frac{27-a}{a-3}, \quad \log_4 4^{x-2} = \log_4 \frac{27-a}{a-3}$$

$$x-2 = \log_4 \frac{27-a}{a-3}, \quad x = 2 + \log_4 \frac{27-a}{a-3}$$

Ответ: 1) $a \in (3; 27)$, $x = 2 + \log_4 \frac{27-a}{a-3}$

2) $a \notin (3; 27)$, $x \in \varnothing$