1) $a^{\log_a b} = b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$;

2) $\log_c a + \log_c b = \log_c (ab)$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1)$;

3) $\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1)$;

4) $\log_c a^b = b \log_c a$ $(a>0,\ c>0,\ c\neq 1)$;

5) $\log_{c^d} a = \frac{1}{d} \log_c a$ $(a>0,\ c>0,\ c\neq 1,\ d\neq 0)$;

6) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ $(a>0,\ b>0,\ b\neq 1,\ c>0,\ c\neq 1)$ и, в частности,

$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1)$;

7) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1)$.

Область допустимых значений логарифмического алгебраического выражения $\log_c f(x)$ с числовым основанием $c>0$, $c\neq 1$ задаётся неравенством $f(x)>0$. Область допустимых значений логарифмического алгебраического выражения общего вида (с переменным основанием) $\log_{g(x)} f(x)$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$$

$b = \log_a a^b$

$f(x) \geqslant a^b > 0$

$$\log_a f(x) \geqslant b \Leftrightarrow f(x) \geqslant a^b; \qquad a>1 \qquad (1)$$

$$\log_a f(x) \leqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant a^b, \\ f(x) > 0; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\log_a f(x) \leqslant \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Если $0<a<1$, то

$$\log_a f(x) \geqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant a^b, \\ f(x) > 0; \end{cases} \qquad (4)$$

$$\log_a f(x) \leqslant b \Leftrightarrow f(x) \geqslant a^b; \qquad (5)$$

$$\log_a f(x) \leqslant \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Для строгих неравенств все неравенства в правых частях приведённых равносильных переходов также будут строгими. Таким образом, для простейших логарифмических неравенств при освобождении от знаков логарифмов (такую операцию иногда называют *потенцированием*) знак неравенства сохраняется, если основание логарифма больше 1, и меняется на противоположный, если основание логарифма положительно и меньше 1. При этом ОДЗ можно не выписывать, ограничившись условием положительности меньшего (в силу неравенства, полученного после потенцирования) из двух чисел под знаками логарифмов.

$$\log_{a(x)} f(x) \leqslant b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \leqslant (a(x))^b; \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) < 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) \geqslant (a(x))^b; \end{cases} \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\log_{a(x)} f(x) \geqslant b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) \geqslant (a(x))^b; \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) < 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \leqslant (a(x))^b; \end{cases} \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\log_{a(x)} f(x) \leqslant \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \leqslant g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) < 1, \\ a(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant g(x). \end{cases} \end{array}\right. \tag{3}$$

Для строгих неравенств последние неравенства в каждой из систем каждой из совокупностей также будут строгими. Конечно же, при решении конкретных неравенств лучше не выписывать столь громоздкие совокупности, а рассматривать два случая, находить множество решений для каждого из них, а затем объединять найденные множества.

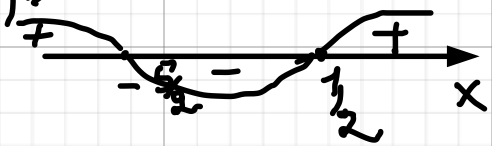
Пример 1. Решите неравенство $\log_{0,5}(4x^2+8x-3) \leqslant -1$.

Решение: т.к. $0,5 < 1$, ф-ия убыв-ая!

$\log_{0,5}(4x^2+8x-3) \leq \log_{0,5}(0,5)^{-1} \Leftrightarrow$

$4x^2+8x-3 \geqslant (0,5)^{-1} \Leftrightarrow$ $4x^2+8x-3 \geqslant 2$ $\Leftrightarrow$

$4x^2+8x-5\geqslant 0 \iff 4\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$



$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{4}=\frac{-4\pm 6}{4}=\left[\begin{array}{l}-\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

ОДЗ: $4x^2+8x-3>0$! – автоматически

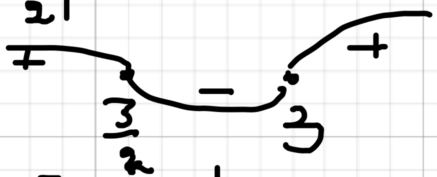
Пример 2. Решите неравенство $\pi>1$

$$\log_\pi(x^2+3x-4)\leqslant\log_\pi(3x^2-6x+5).$$

Решение: $\begin{cases} x^2+3x-4\leqslant 3x^2-6x+5 & (1)\\ x^2+3x-4\geqslant 0 & (2)\end{cases}$

(1): $2x^2-9x+9\geqslant 0 \iff 2(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)\geqslant 0$

$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{4}=\frac{9\pm 3}{4}=\left[\begin{array}{l}3\\ \frac{3}{2}\end{array}\right.$$



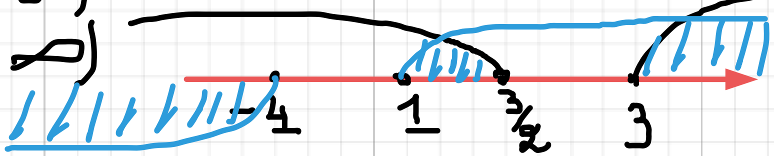
$x\in\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]\cup\left[3;+\infty\right)$

(2): $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)>0$

$x\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$

$\{x\in\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]\cup\left[3;+\infty\right)$

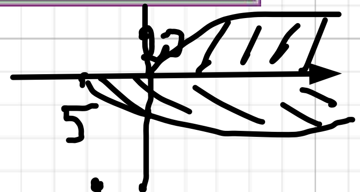
$\{x\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$



Ответ: $x\in(-\infty;-4)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right]\cup[3;+\infty)$

Пример 3. Решите неравенство $\lg(x-5)+\lg(x-20)\leqslant 2$.

Решение! ОДЗ: $\begin{cases}x-5>0\\x-20>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>5\\x>20\end{cases}$

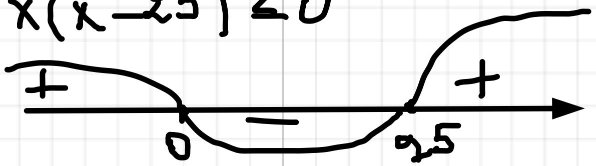


$\Leftrightarrow \boxed{x>20}$!

$\lg(x-5)(x-20)\leq\lg 10^2$, т.к. $10>1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)(x-20)\leq 100\\x>20\end{cases}$

$x^2-25x+100\leq 100 \Leftrightarrow x(x-25)\leq 0$



$x\in[0;25]$

$\begin{cases}x\in[0;25]\\x\in(20;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in(20;25]$

Ответ: $x\in(20;25]$.

Пример 4 Решите неравенство $\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right)+\log_{0,2}\left(4-\frac{x}{5}\right)\geqslant 1.$

Решение: $0{,}2=\frac{1}{5}=5^{-1}$

$$\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right)-\log_5\left(4-\frac{x}{5}\right)\geq 1 \iff$$

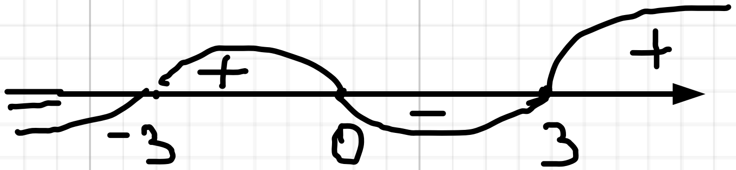
$$\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right)\geq \underbrace{\log_5\left(4-\frac{x}{5}\right)+\log_5 5}\iff$$

$$\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right)\geq \log_5 5\left(4-\frac{x}{5}\right),\quad \text{т.к. } \underline{5>1}$$

$$\begin{cases} 20-\frac{9}{x}\geq 5\left(4-\frac{x}{5}\right) & (1)\\ 4-\frac{x}{5}>0 & (2)\end{cases}$$

(1): $20-\frac{9}{x}\geq 20-x,\quad x-\frac{9}{x}\geq 0,\quad \frac{x^2-9}{x}\geq 0$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x}\geq 0$$



$x\in[-3;0)\cup[3;+\infty)$

(2): $20-x>0,\quad x<20$

$$\begin{cases} x\in[-3;0)\cup[3;+\infty)\\ x\in(-\infty;20)\end{cases}$$

Ответ: $x\in[-3;0)\cup[3;20)$

Ответ: $x\in[-3;0)\cup[3;20)$.

Пример 5 Решите неравенство $\frac{3}{\log_{x+8}64}-\frac{2}{\log_{x-1}16}\geqslant 1$.

Решение:

ОДЗ:
$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;2)\cup(2;+\infty)$$

$x+8>x-1$!

$$\frac{3}{\log_{x+8}2^6}-\frac{2}{\log_{x-1}2^4}\geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{3}{6\log_{x+8}2}-\frac{2}{4\log_{x-1}2}\geqslant 1$$

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b},\quad \frac{\log_2(x+8)}{2}-\frac{\log_2(x-1)}{2}\geqslant 1$$

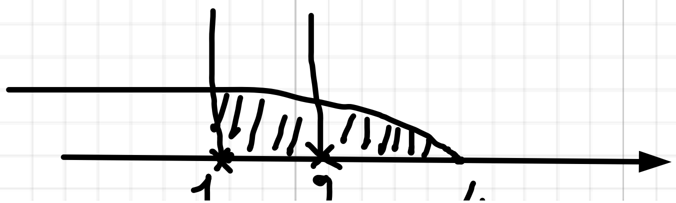
$$\log_2(x+8)-\log_2(x-1)\geqslant 2 \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x+8)\geqslant\log_2(x-1)+\log_2 2^2$$

$$\log_2(x+8)\geqslant\log_2 4(x-1) \Leftrightarrow \quad x+8\geqslant 4(x-1) \Leftrightarrow$$

$$x+8\geqslant 4x-4 \Leftrightarrow 3x\leq 12 \Leftrightarrow x\leq 4$$

$$\begin{cases} x\in(-\infty;4] \\ x\in(1;2)\cup(2;+\infty) \end{cases}$$



Ответ: $x \in (1;2) \cup (2;4]$.

Пример 6 Решите неравенство $\log_{0,5}\left(\log_2\left(\log_3\left(\frac{2x-5}{5x+2}\right)\right)\right) \geqslant 0$.