■ **Случайные эксперименты и случайные события.** Нам часто приходится проводить различные наблюдения, опыты, принимать участие в экспериментах или испытаниях. Часто такие эксперименты завершаются результатом, который заранее предусмотреть невозможно. Например, мы покупаем лотерейный билет и не знаем, выиграет ли он; подбрасываем монету и не знаем, что выпадет — число или герб. Можно ли каким-то образом оценить шансы появления результата, который нас интересует? Ответ на эти вопросы дает раздел математики, который называется *теорией вероятностей*. Мы ознакомимся только с основами этой теории.

Одним из основных понятий, которые рассматриваются в теории вероятностей, является понятие *эксперимента со случайными результатами*. Примером такого эксперимента может служить подбрасывание монеты судьей футбольного матча перед его началом, чтобы определить, какая из команд начнет матч с центра поля.

Под экспериментами со случайными результатами (или, коротко говоря, случайными экспериментами) понимают различные эксперименты, опыты, испытания, наблюдения, измерения, результаты которых зависят от случая и которые можно повторить много раз в одинаковых условиях. Например, это серия выстрелов одного и того же стрелка по одной и той же мишени, участие в лотерее, вынимание пронумерованных шаров из коробки, эксперименты с рулеткой, бросанием игрального кубика, подбрасыванием монеты.

Любой результат случайного эксперимента называется случайным событием. Вследствие рассматриваемого эксперимента это событие может или произойти, или не произойти. Заметим, что для каждого случайного эксперимента обычно заранее уславливаются, какие его результаты рассматриваются как элементарные события, а затем случайное событие рассматривается как подмножество получившегося множества [redacted].

Далее, как правило, будем обозначать случайные события прописными буквами латинского алфавита A, B, C, D, … .

Если любой элемент множества A принадлежит множеству B, то множество A называется *подмножеством* множества B, что обозначается $A \subset B$ ($\subset$ — знак включения) и читается «*множество A содержится в множестве B*» («*A включено в B*») или «*множество B содержит множество A*». Справедливо утверждение $A \subset A$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Полагают, что $\varnothing$ является подмножеством любого множества

Полагают, что $\varnothing$ является подмножеством любого множества.

Замечание. Иногда для обозначения включения множеств используют обозначение $A \subseteq B$, а если A строго содержится в B (т. е. A содержится в B и $A \neq B$), то пишут $A \subset B$.

Говоря о случайных событиях, будем иметь в виду, что эти события связаны с одним вполне определенным случайным экспериментом.

Заметим, что много важных и нужных фактов теории вероятностей сначала были получены с помощью очень простых экспериментов. Большую роль в развитии теории вероятностей как науки сыграли обычные монеты и игральные кубики. Но те монеты и кубики, которые рассматривают в теории вероятностей, являются математическими образами настоящих монет и кубиков (потому о них иногда говорят, что это математическая монета и математический игральный кубик).

Например, *математическая монета*, которую используют в теории вероятностей, лишена многих качеств настоящей монеты. У математической монеты нет цвета, размера, веса и стоимости. Она не сделана ни из какого материала и не может служить платежным средством. Монета с точки зрения теории вероятностей имеет только две стороны, одна из которых называется «герб*», а другая — «число». Монету бросают, и она падает одной из сторон вверх. Никаких других свойств у математической монеты нет. Математическая монета считается *симметричной*. Это означает, что *брошенная на стол монета имеет равные шансы выпасть «гербом» или «числом»*. При этом имеется в виду, что никакой другой результат бросания монеты невозможен — она не может потеряться, закатившись в угол, и, тем более, не может «встать на ребро».

Рис. 120

Настоящая металлическая монета (рис. 120) служит лишь иллюстрацией для математической монеты. Настоящая монета может быть немного вогнутой, может иметь другие дефекты, которые влияют на результаты бросания. Однако, чтобы проверить на практике опыты с бросанием математической монеты, мы бросаем обычную монету (без явных дефектов).

Игральный кубик также служит прекрасным средством для получения случайных событий. Игральный кубик имеет удивительную историю. Игра с кубиками — одна из древнейших. Она была известна в глубокой древности в Индии, Китае, Лидии, Египте, Греции и Риме. Игральные кубики находили в Египте (XX в. до н. э.) и в Китае (VI в. до н. э.) при раскопках древних захоронений. *Правильные (симметричные) кубики* обеспечивают одинаковые шансы выпадения каждой грани. Для этого все грани должны иметь одинаковую площадь, быть плоскими и одинаково гладкими. Кубик должен иметь кубическую форму, и его центр тяжести должен совпадать с геометрическим центром. Вершины и ребра кубиков должны иметь правильную форму. Если они округлены, то все округления должны быть одинаковыми. Отверстия, которые маркируют количество очков на гранях, должны быть просверлены на одинаковую глубину (рис. 121).

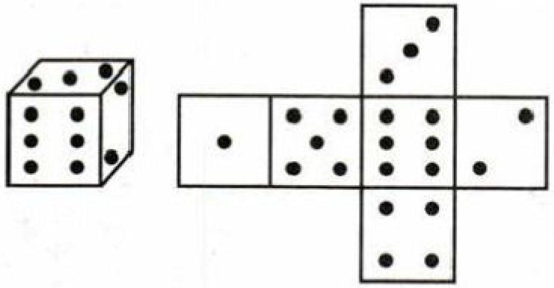


Рис. 121

Математический игральный кубик, который обсуждается в теории вероятностей, — это математический образ правильного кубика. Выпадение всех граней равновозможно. Подобно математической монете, математический кубик не имеет ни цвета, ни размера, ни веса, ни других материальных качеств.

■ **Некоторые понятия, связанные со случайными событиями.** Пусть проведен какой-то случайный эксперимент. Как отмечалось выше, его результатами являются некоторые случайные события. Вследствие такого эксперимента каждое из событий может или произойти, или не произойти. Говоря о случайных событиях, будем иметь в виду, что эти события связаны с одним вполне определенным экспериментом.

События называют *равновозможными,* если в данном эксперименте нет никаких оснований предполагать, что одно из них может произойти предпочтительнее, чем любое другое. Например, в эксперименте с однократным подбрасыванием однородной монеты правильной формы равновозможными являются события: A — выпал «герб» и B — выпало «число».

События A и B называют *несовместными,* если они не могут произойти одновременно в данном эксперименте. Так, в эксперименте с однократным подбрасыванием монеты события A — выпал «герб» и B — выпало «число» — несовместные.

События $C_1, C_2, \ldots, C_n$ называют несовместными, если каждая пара из них несовместна в данном эксперименте. Для эксперимента с однократным подбрасыванием игрального кубика события: C_1 — выпадение 1 очка, C_2 — выпадение 2 очков, C_3 — выпадение 3 очков, C_4 — выпадение 4 очков, C_5 — выпадение 5 очков, C_6 — выпадение 6 очков — несовместные (и равновозможные).

Событие U называют *достоверным*, если в результате данного эксперимента оно обязательно произойдет. Например, выпадение меньше 7 очков при бросании игрального кубика (на гранях обозначено от 1 до 6 очков) является достоверным событием.

Событие $\varnothing$ называют *невозможным*, если оно не может произойти в данном эксперименте. Например, выпадение 7 очков при бросании игрального кубика — невозможное событие. ■

■ **Пространство элементарных событий.** Пусть результатом некоторого случайного эксперимента может быть только одно из несовместных событий $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Назовем их *элементарными событиями*, а множество всех этих событий $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — *пространством элементарных событий*.

Например, для эксперимента с подбрасыванием монеты элементарными будут события u_1 — выпадение «герба», u_2 — выпадение «числа». Тогда пространство элементарных событий будет состоять из двух событий: $U = \{u_1, u_2\}$. (Эти события несовместные, и в результате эксперимента обязательно произойдет одно из этих событий.)

Для эксперимента с подбрасыванием игрального кубика элементарными событиями могут быть события: u_1 — выпадение 1 очка, u_2 — выпадение 2 очков, u_3 — выпадение 3 очков, u_4 — выпадение 4 очков, u_5 — выпадение 5 очков, u_6 — выпадение 6 очков. В этом случае пространство элементарных событий будет состоять из шести событий: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

Случайным событием A назовем любое подмножество пространства элементарных событий U.

$A \subset U$

Например, для эксперимента с подбрасыванием игрального кубика случайным является событие A — выпадение четного числа очков, поскольку $A = \{u_2, u_4, u_6\}$ — подмножество U. ■

■ **Классическое определение вероятности.** Пусть результатом некоторого случайного эксперимента может быть одно и только одно из n попарно несовместных и равновозможных элементарных событий $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (то есть пространство U элементарных событий данного случайного экспери-

есть пространство U элементарных событий данного случайного экспери-
мента состоит из элементарных событий $u_1, u_2, \ldots, u_n$). И пусть в рассматриваемом эксперименте событие A состоит в том, что происходит одно из m заранее выделенных элементарных событий $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$, то есть $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ (в этом случае говорят, что элементарные события $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$ *благоприятствуют событию* A).

$U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots u_n\}$

Вероятность события A определим как отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к общему числу n элементарных событий в данном эксперименте, то есть как отношение $\frac{m}{n}$.

Вероятность события A принято обозначать $P(A)$ (буква P — первая буква французского слова *probabilité* или латинского слова *probabilitas*, что в переводе означает «вероятность»). Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Этим равенством выражается *классическое определение вероятности*, которое можно сформулировать следующим образом.

Если рассматривается пространство равновозможных элементарных событий, то вероятность события A — это отношение числа благоприятствующих ему элементарных событий к числу всех равновозможных элементарных событий в данном эксперименте. ■

Например, в эксперименте с подбрасыванием монеты равновозможными элементарными событиями являются два ($n = 2$) события: A — выпал «герб» и B — выпало «число». Событию A благоприятствует только один случай ($m = 1$), поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что вероятность события B также равна $\frac{1}{2}$: $P(B) = \frac{1}{2}$. Следовательно, в эксперименте с однократным подбрасыванием монеты вероятность выпадения «герба» (или «числа») равна $\frac{1}{2}$.

Аналогично обосновывается, что в эксперименте с подбрасыванием игрального кубика вероятность события A_i — выпало i очков ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) равна $\frac{1}{6}$ (обоснуйте это самостоятельно).

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) =$
$= P(A_4) = P(A_5) =$
$= P(A_6) = \frac{1}{6}$

Заметим, что если в любом эксперименте рассмотреть невозможное событие $\varnothing$, то нет элементарных событий, благоприятствующих данному событию, то есть число элементарных событий, ему благоприятствующих, равно нулю ($m = 0$), и тогда $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$. Следовательно, вероятность невозможного события равна 0.

Например, в эксперименте с подбрасыванием игрального кубика вероятность невозможного события A — выпало 7 очков — равна 0.

Если в любом эксперименте рассмотреть достоверное событие U, то ему благоприятствуют все элементарные события в этом эксперименте ($m = n$), и тогда $P(U) = \frac{n}{n} = 1$. Следовательно,

вероятность достоверного события равна 1.

Например, в эксперименте с подбрасыванием игрального кубика событие A — выпало 1 очко, или 2 очка, или 3 очка, или 4 очка, или 5 очков, или 6 очков, достоверное и его вероятность равна 1.

Задача 1 Пользуясь приведенным определением, найдем вероятность события A — выпало число очков, кратное 3, при бросании игрального кубика.

▶ Как отмечалось выше, в эксперименте с подбрасыванием кубика существует шесть попарно несовместных равновозможных элементарных событий — выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков (также можно сказать, что пространство элементарных событий состоит из шести указанных попарно несовместных равновозможных событий). Благоприятствуют событию A только два элементарных события: выпало 3 очка и выпало 6 очков. Следовательно, вероятность события A равна: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ◁ V

Задача 2 Петя и Паша бросают белый и черный игральные кубики (рис. 122) и каждый раз подсчитывают сумму выпавших очков. Они договорились, что в случае, когда в очередной попытке в сумме выпадет 8 очков, то выигрывает Петя, а когда в сумме выпадет 7 очков — выигрывает Паша. Является ли эта игра справедливой?

▶ При бросании кубиков на каждом из них может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Каждому числу очков, выпавших на белом кубике (1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков), отвечает шесть вариантов числа очков, выпавших на черном кубике. Следовательно, всего получаем 36 попарно несовместных равновозможных элементарных событий. Результаты этого эксперимента приведены в таблице:

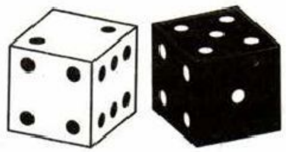


Рис. 122

$6 \cdot 6 = 36$

(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)

(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)

(В каждой паре чисел на первом месте записано число очков, выпавшее на белом кубике, а на втором месте — число очков, выпавшее на черном кубике.)

Пусть событие A состоит в том, что при бросании кубиков в сумме выпало 8 очков, а событие B — при бросании кубиков в сумме выпало 7 очков.

Событию A благоприятствуют следующие 5 результатов (элементарных событий):

$$(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2).$$

Событию B благоприятствуют следующие 6 результатов (элементарных событий):

$$(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1).$$

Тогда

$$P(A) = \frac{5}{36},\ P(B) = \frac{6}{36}.$$

Следовательно, шансов выиграть у Паши больше, чем у Пети, значит, такая игра не будет справедливой. ◁

Отметим, что результаты эксперимента с подбрасыванием двух игральных кубиков, приведенные в задаче 2, позволяют вычислить вероятности появления той или иной суммы очков, выпадающих при бросании двух игральных кубиков.

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Задача 3 Из 15 изготовленных велосипедов 3 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

▶ Пусть событие A состоит в том, что 2 выбранных наугад велосипеда будут без дефектов. Из 15 велосипедов выбрать 2 можно C_{15}^2 способами (число соединений из 15 по 2). Все эти выборы являются равновозможными и попарно несовместными. Следовательно, общее количество равновозможных результатов (то есть общее количество элементарных событий) равно C_{15}^2. Событием, благоприятствующим событию A, является выбор 2 бездефектных велосипедов из 12 бездефектных (15 − 3 = 12). Следовательно, число результатов (событий), благоприятствующих событию A, равно C_{12}^2. Отсюда получаем

$$P(A)=\frac{C_{12}^2}{C_{15}^2}=\frac{\dfrac{12!}{2!(12-2)!}}{\dfrac{15!}{2!(15-2)!}}=\frac{12\cdot 11}{15\cdot 14}=\frac{22}{35}. \triangleleft$$

Обратим внимание, что в зависимости от рассматриваемой задачи для одного и того же эксперимента пространство элементарных событий можно вводить по-разному. Для этого независимые элементарные события подбирают так, чтобы событие, вероятность которого необходимо найти, само было элементарным или выражалось через сумму элементарных событий. Но для того чтобы использовать классическое определение вероятности, необходимо быть уверенным, что все выделенные элементарные события — равновозможные.

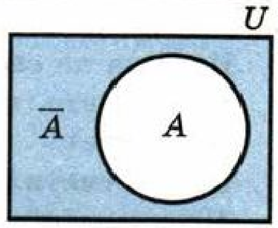
Например, как уже отмечалось в задаче о бросании игрального кубика, пространство элементарных событий может состоять из 6 независимых равновозможных событий — выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Но если в задаче требуется найти вероятность выпадения четного числа очков, то пространством элементарных событий для этого эксперимента может быть множество только двух событий: u_1 — выпало четное число очков и u_2 — выпало нечетное число очков (поскольку эти события попарно несовместны и результатом эксперимента обязательно будет одно из этих событий). Эти события равновозможны (поскольку среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 ровно половина четных и половина нечетных). Следовательно, по классическому определению вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$. Конечно, если бы мы рассмотрели первое из указанных пространств элементарных событий, то также смогли бы решить эту задачу: всего событий — 6, а благоприятствующих — 3 (выпадение четного числа очков: 2, 4, 6). Тогда вероятность выпадения четного числа очков равна $\frac{3}{6}$, то есть $\frac{1}{2}$.

Попробуем ввести для решения этой задачи следующее пространство элементарных событий: u_1 — выпало четное число очков, u_2 — выпало 1 очко, u_3 — выпало 3 очка, u_4 — выпало 5 очков. Эти события действительно образуют пространство элементарных событий эксперимента с бросанием игрального кубика, поскольку они попарно несовместны и в результате эксперимента обязательно произойдет одно из этих событий. Но, пользуясь таким пространством элементарных событий, мы не сможем применить классическое определение вероятности, потому что, как мы уже видели, указанные элементарные события не являются равновозможными: $P(u_1)=\frac{1}{2}$, $P(u_2)=\frac{1}{6}$, $P(u_3)=\frac{1}{6}$, $P(u_4)=\frac{1}{6}$.

[redacted] Операции над событиями. Свойства вероятностей событий

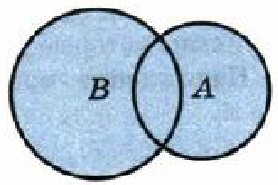
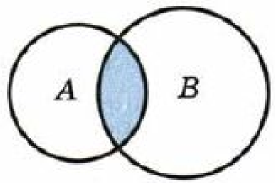
Таблица 26

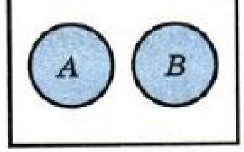
Определение	Пример	Теоретико-множест-

Определение	Пример	...венная иллюстрация
1. Противоположное событие		
Событие $\bar{A}$ называется *противоположным событию* A, если оно состоит в том, что в рассматриваемом случайном эксперименте не происходит событие A.	Событие A — выпал «герб» при подбрасывании монеты, тогда событие $\bar{A}$ — не выпал «герб» при подбрасывании монеты (то есть выпало «число»).	
Вероятность противоположного события: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	Если вероятность купить исправный прибор равна 0,95, то вероятность купить неисправный прибор равна: $1 - 0{,}95 = 0{,}05$.	

$\bar{A} = U - A$

$P(\bar{A}) = P(U) - P(A)$

Суммой (или объединением) событий A и B называется событие $A + B$ (другое обозначение $A \cup B$), которое состоит в том, что происходит событие A или событие B (или A, или B, или оба события).	Из колоды карт наугад вынимают 1 карту. Рассмотрим события: A — вынули бубновую карту, B — вынули червовую карту. Тогда событие $A + B$ — вынули или бубновую, или червовую карту (то есть карту красной масти).	 $A + B$
3. Произведение событий		
Произведением (или пересечением) событий A и B называется событие $A \cdot B$ (другое обозначение $A \cap B$), которое состоит в том, что происходят оба события A и B.	При бросании игрального кубика рассматривают события: A — выпало четное число очков, B — выпало число очков, кратное 3. Тогда событие $A \cdot B$ — выпало число очков, одновременно четное и кратное 3 (то есть выпало 6 очков).	 $A \cdot B$
4. Несовместные события		
Два случайных события A и B называются	При бросании игрального кубика рассматривают события: A — выпало четное число очков, B — выпало	U 

тия A и B называются *несовместными*, если их произведение является невозможным событием, то есть $A \cdot B = \varnothing$ (в других обозначениях $A \cap B = \varnothing$).	1 очко, C — выпало число очков, кратное 3. События A и B, а также события B и C — ***несовместные*** (*не могут происходить одновременно*). События A и C — ***совместные*** (*могут происходить одновременно*, если выпадет 6 очков, то есть $A \cdot C \neq \varnothing$).	 $A \cdot B = \varnothing$
5. Вероятность суммы двух несовместных событий		
Если события A и B несовместные, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$, то есть ***вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.***		

Нахождение суммы событий. Пусть заданы два случайных события A и B.

Суммой (или *объединением*) *событий* A и B называется событие $A + B$ (другое обозначение $A \cup B$), которое состоит в том, что происходит событие A или событие B (или A, или B, или оба события).

Например, пусть при бросании игрального кубика события A и B означают: A — выпало четное число очков, B — выпало число очков, кратное 3.

Тогда событие $A + B$ означает, что выпало или четное число очков, или число очков, кратное 3, то есть выпало 2, 3, 4 или 6 очков.

Аналогично вводится понятие суммы нескольких событий.

Суммой (или *объединением*) *событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называется событие* $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ (другое обозначение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$), *которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий.*

Нахождение произведения событий. Пусть заданы два случайных события A и B.

Произведением (или *пересечением*) *событий* A и B называется событие $A \cdot B$ (другое обозначение $A \cap B$), которое состоит в том, что происходят оба события A и B.

В приведенном выше примере событие $A \cdot B$ означает, что выпало и четное число очков, и число очков, кратное 3, то есть выпало 6 очков.

Аналогично вводится понятие произведения нескольких событий.

Произведением (или *пересечением*) *событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называется событие* $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ (другое обозначение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$), *которое состоит в том, что происходят все заданные события*: и A_1, и A_2, ..., и A_n.

З а м е ч а н и е. Определения операций над событиями аналогичны соответствующим определениям операций над множествами (поэтому и обозначения операций над событиями совпадают с обозначениями операций над множествами). Операции над событиями (как и операции над множествами) удобно иллюстрировать с помощью кругов Эйлера–Венна (см. рис. 125–127).

Например, учитывая, что всегда выполняется или событие A, или событие $\bar{A}$, получаем, что $A + \bar{A} = U$ (достоверное событие). Учитывая, что одновременно события A и $\bar{A}$ не могут выполняться, имеем $A \cdot \bar{A} = \varnothing$ (невозможное событие). Тогда событие $\bar{A}$ можно проиллюстрировать дополнением множества A (до множества U) (рис. 125).

Аналогично сумму двух событий A и B (напомним, что событие $A + B$ заключается в том, что происходит событие A или событие B, или оба одновременно) можно проиллюстрировать в виде объединения множеств A и B (рис. 126), а произведение событий A и B (событие $A \cdot B$ заключается в том, что происходят оба события A и B) — в виде пересечения множеств A и B (рис. 127).

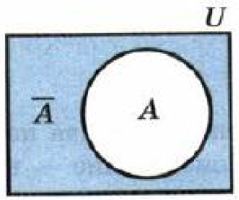
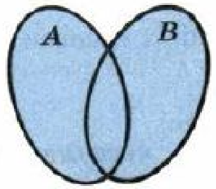
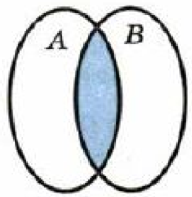


Рис. 125



$A + B$

Рис. 126



$A \cdot B$

Рис. 127

[redacted] **Свойства вероятностей событий.** Вероятности событий обладают следующими свойствами.

1) Вероятность любого события A удовлетворяет неравенству:

$$0 \leqslant P\,(A) \leqslant 1.$$

2) Вероятность достоверного события U равна 1:

$$P\,(U) = 1.$$

3) Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\,(A + B) = P\,(A) + P\,(B).$$

Действительно, из определения, приведенного в п. 18.1, следует, что вероятность $P\,(A)$, то есть дробь $\frac{m}{n}$, неотрицательна и не больше 1. Она равна нулю для невозможного события и единице для достоверного события.

Чтобы обосновать свойство 3), уточним понятие несовместных событий, опираясь на введенные операции над событиями. Из определения несовместных событий получаем:

два случайных события A и B будут *несовместными* тогда и только тогда, когда их произведение является невозможным событием, то есть $A \cdot B = \varnothing$ (другое обозначение $A \cap B = \varnothing$).

Например, при бросании игрального кубика могут произойти события: A — выпадет четное число очков, B — выпадет 5 очков. Эти события несовместны, поскольку 5 — нечетное число; поэтому событие $A \cdot B$, состоящее в том, что выпадет четное число очков и это будет 5 очков, — невозможное событие.

Рассмотрим несовместные события A и B в пространстве из n равновозможных элементарных событий. Пусть m — количество элементарных событий, благоприятствующих событию A, и k — количество элементарных событий, благоприятствующих событию B. Поскольку события A и B несовместные, то элементарные события, благоприятствующие событию A, отличны от элементарных событий, благоприятствующих событию B и, следовательно, событию $A+B$ благоприятствуют $m+k$ элементарных событий. Но тогда

$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B)$. Таким образом,

для несовместных событий A и B выполняется равенство

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (3)$$

То есть вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. ○

Назовем события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *несовместными*, если любые два из этих событий A_i и A_j (при $i \neq j$) несовместны, то есть их произведение — невозможное событие:

$$A_i \cdot A_j = \varnothing .$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, то из равенства (3) следует, что

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n), \qquad (4)$$

то есть *вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*. (Для обоснования этого свойства достаточно применить метод математической индукции.)

Отметим, что для несовместных событий A и B вероятность $P(A\cdot B)=0$ (так как $A\cdot B=\varnothing$).

Опираясь на рассмотренные основные свойства, можно доказать другие свойства вероятностей событий.

Покажем, что справедливо равенство

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \qquad (5)$$

● Обозначим через $A \setminus B$ событие, заключающееся в том, что событие A происходит, а событие B не происходит.

Так как события A и $B \setminus A\cdot B$ несовместны и $A+B=A+(B\setminus A\cdot B)$, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B\setminus A\cdot B). \qquad (6)$$

Аналогично, так как события $B\setminus A\cdot B$ и $A\cdot B$ несовместны и очевидно, что $B=(B\setminus A\cdot B)+A\cdot B$, то

$$P(B)=P(B\setminus A\cdot B)+P(A\cdot B). \qquad (7)$$

Выражая из равенства (7) значение $P(B\setminus A\cdot B)$ и подставляя его в равенство (6), получаем равенство (5). ○

Задача Имеется 36 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута козырная карта или дама?

Р е ш е н и е. Пусть событие A заключается в том, что вынута козырная карта, событие B — «вынута дама». Тогда событие $A+B$ — «вынута козыр-