Сочетания. В комбинаторике конечные множества называют *сочетаниями*. Число сочетаний из n по m (т. е. число таких подмножеств по m элементов в каждом, которые содержатся в множестве из n элементов) обозначают через C_n^m.

Вычислив число размещений из n по m, можно получить, что

$$A_n^m = C_n^m P_m, \tag{4}$$

откуда

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{5}$$

Эту формулу записывают также в виде

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m}. \tag{6}$$

Для любых n и m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ верно равенство

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \tag{7}$$

Действительно,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^{n-m}.$$

$A = \{a_1; a_2; a_3\}$ $n = 3$, $m \leq 3$

	A_3^m	P_m	C_3^m	
$m=1$	a_1, a_2, a_3 $A_3^1 = 3$	$P_1 = 1$	a_1, a_2, a_3 $C_3^1 = 3$	
$m=2$	$(a_1; a_2), (a_1; a_3) (a_2; a_3)$ $(a_2; a_1) (a_3; a_1) (a_3; a_2)$	(a_1, a_2) $(a_2; a_1)$	$a_1, a_2;\ a_2, a_3;\ a_1, a_3$	$A_3^2 = 6$, $P_2 = 2$, $C_3^2 = 3$
$m=3$	$(a_1; a_2; a_3)$ $(a_1; a_3; a_2)$ $(a_2; a_1; a_3)$ $(a_2; a_3; a_1)$ $(a_3; a_1; a_2)$	1	a_1, a_2, a_3	$A_3^3 = 6$ $P_3 = 6$

$(a_3; a_2; a_1)$

$C_3^3 = 1$

$A_3^1 = C_3^1 \cdot P_1$

$A_3^2 = C_3^2 \cdot P_2$

$A_3^3 = C_3^3 \cdot P_3$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$\boxed{A_n^m = C_n^m \cdot P_m} \longrightarrow C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$

Сочетания без повторений.

Сочетанием без повторений из n элементов по k называется любое k-элементное подмножество заданного n-элементного множества.

Например, из множества $\{a, b, c, d\}$ можно составить следующие сочетания без повторений из трех элементов: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$. V

Количество сочетаний без повторений из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «Число сочетаний из n по k» или «це из n по k», C — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание). Как видим, $C_4^3 = 4$. V

Выясним, сколько всего можно составить сочетаний без повторений из n элементов по k. Для этого используем известные нам формулы числа размещений и перестановок.

Составление размещения без повторений из n элементов по k проведем в два этапа. Сначала выберем k разных элементов из заданного n-элементного множества, не учитывая порядок выбора этих элементов (то есть выберем k-элементное подмножество из n-элементного множества — сочетание без повторений из n-элементов по k). По нашему обозначению это можно сделать C_n^k способами. После этого полученное множество из k разных элементов упорядочим. Его можно упорядочить $P_k = k!$ способами. Получим размещения без повторений из n элементов по k. Следовательно, количество размещений без повторений из n элементов по k в $k!$ раз больше числа сочетаний без повторений из n элементов по k. То есть $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. Учитывая, что по формуле (2) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, получаем:

$(n-k)!$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (3)$$

Например, $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot1} = 4$, что совпадает со значением, полученным выше.

Используя формулу (3), можно легко обосновать *свойство* 1 *числа сочетаний без повторений*, приведенное в таблице 21 [redacted]

1) Поскольку $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = C_n^k$, то

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (4)$$

Для того чтобы формулу (4) можно было использовать и при $k = n$, договорились считать, что $C_n^0 = 1$. Тогда по формуле (4) $C_n^n = C_n^0 = 1$.

[redacted] **Вычисление числа сочетаний без повторений с помощью треугольника Паскаля.** Для вычисления числа сочетаний без повторений можно применять формулу (3): $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, а можно последовательно вычислять соответствующие значения, пользуясь таким свойством:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \qquad (6)$$

Бином Ньютона.

$(x+a)$

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+$

$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$

. . . .

$\to (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdot\ldots\cdot(x+a_{n-1})(x+a_n) =$ (*)

$= x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \ldots + S_{n-1}x + S_n$

где $S_1 = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ — кол-во слагаемых C_n^1,

$S_2 = a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-2}a_n+a_{n-1}a_n$ — C_n^2

$$S_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \quad — \quad C_n^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{n-1} = a_1a_2a_3\ldots a_{n-1} + a_2a_3a_4\ldots a_n \quad — \quad C_n^{n-1}$$

$$S_n = a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n \quad — \quad C_n^n$$

если в (*) положить

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a_n = a$$

то из (*) $\mapsto (x+a)^n = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \ldots + S_{n-1}x + S_n =$

$=$

$$S_1 = a + a + \ldots + a = a\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{C_n^1} = C_n^1 a$$

$$S_2 = aa + aa + \ldots + aa = a^2\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{C_n^2} = C_n^2 a^2$$

$$S_3 = aaa + aaa + \ldots + aaa = a^3\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{C_n^3} = C_n^3 a^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{n-1} = C_n^{n-1} a^{n-1}$$

$$S_n = C_n^n a^n$$

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n =$$

$$= \underbrace{C_n^0 x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n}$$

$a^0 = \underline{1}$, $x^0 = \underline{1}$

Бином Ньютона. Формулу

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \quad (1)$$

справедливую при любом натуральном n, называют *формулой бинома Ньютона* или *биномом Ньютона*. Коэффициенты C_n^k в формуле (1) называют *биномальными коэффициентами*: $(k+1)$-е слагаемое суммы (1) считается k-м членом разложения и обозначается через T_k:

$$\boxed{T_k = C_n^k a^{n-k} b^k, \ k = 0, 1, \ldots n.} \quad (2)$$

<u>Δ-к Паскаля</u>

$n=0$								1								
$n=1$							1		1							
$n=2$						1		2		1						
$n=3$					1		3		3		1					
$n=4$				1		4		6		4		1				
$n=5$			1		5		10		10		5		1			
$n=6$		1		6		15		20		15		6		1		
$n=7$	1		7		21		35		35		21		7		1	

. . . .

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + \underbrace{10a^2x^3 + 10a^3x^2} + 5a^4x + a^5$$