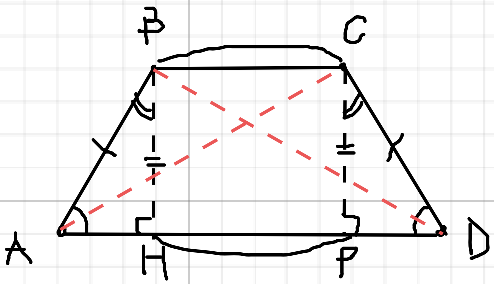


$\triangle ABH = \triangle DCP$

$\triangle ACP = \triangle DBH$ $(CP = BH,\ AP = HD)$

$\hookrightarrow AC = BD$

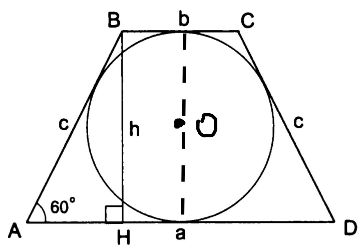
$AH = PD = \dfrac{AD - BC}{2}$

$AP = HD = \dfrac{AD + BC}{2} = \dfrac{AH + HP + PD + BC}{2} = \dfrac{2AH + 2HP}{2} = AH + HP = AP$

ч.т.д.

Пример [redacted] В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен $60°$, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = a$, $BC = b$, боковые стороны $AB = CD = c$. Опустим из вершины B высоту h на основание AD. Так как диаметр вписанной окружности равен h, то нам надо найти BH из треугольника ABH.



По условию задачи площадь трапеции равна $24\sqrt{3}$, в трапецию вписана окружность и $\angle BAH = 60°$, следовательно,

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} \cdot h = 24\sqrt{3}, \\ a + b = 2c, \\ \dfrac{h}{c} = \sin 60°. \end{cases} \implies \begin{cases} ch = 24\sqrt{3}, \\ \dfrac{h}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \implies h^2 = 36 \implies h = 6,$$

$= 2h$

$\frac{h}{c} = \sin 60^\circ$;

откуда радиус $r = h/2 = 3$.

Ответ. 3.

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

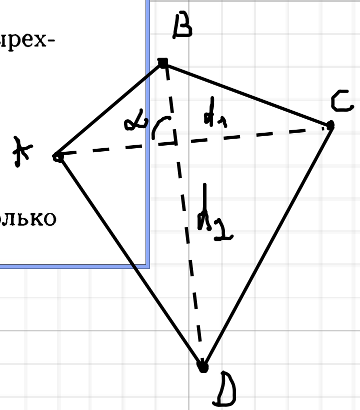
$c = \frac{\ }{\sqrt{3}}$

$\frac{2h}{\sqrt{3}}$ $h = 24\sqrt{3}$

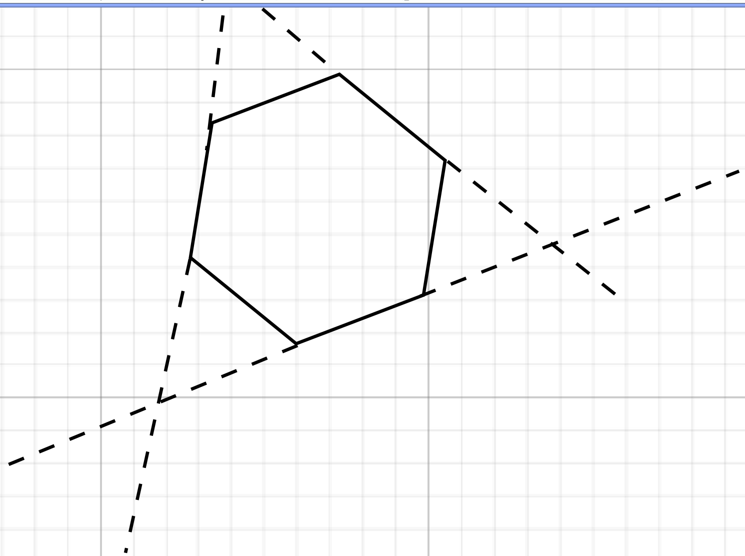
$h^2 = 36$

Теоретический материал

Напомним основные факты, связанные с произвольными выпуклыми четырехугольниками.



- *Площадь* выпуклого четырехугольника равна: $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 d_2 \sin\alpha$, где d_1 и d_2 – диагонали, а α – угол между ними.
- В выпуклый четырехугольник *можно вписать окружность* тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.



- Около выпуклого четырехугольника *можно описать окружность* тогда и только тогда, когда сумма двух его противоположных углов равна 180°.
- *Теорема Вариньона:* середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Напомним основные факты, связанные с правильными многоугольниками.

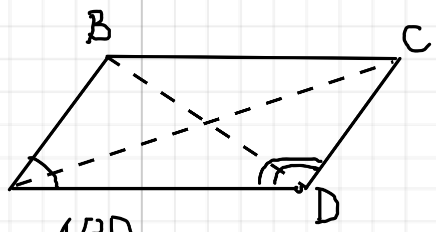
- Вокруг правильного многоугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность.

- Центр вписанной окружности совпадает с центром описанной окружности и называется *центром правильного многоугольника.*

- Сумма внутренних углов произвольного выпуклого n-угольника равна $\pi(n-2) = 180^0(n-2)$

Теорема. *Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*

Док-во



по Т. косинусов из $\triangle ABD$ $\to$ $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\, AD \cdot \cos\hat{A}$ (1)

по Т кос-ов из $\triangle ACD$ $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD\, CD \cos\hat{D}$ (2)

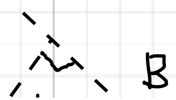
$\angle A + \angle D = 180^0 \to \angle A = 180^0 - \angle D \to \cos\angle A = \cos(180^0 - \angle D) = -\cos\angle D$

Почленно + (1) и (2): $AC^2 + BD^2 = AB^2 + AD^2 + AD^2 + CD^2 - \cancel{2AB\cdot AD\cos\angle A} + \cancel{2AD\, CD\cos\angle A}$

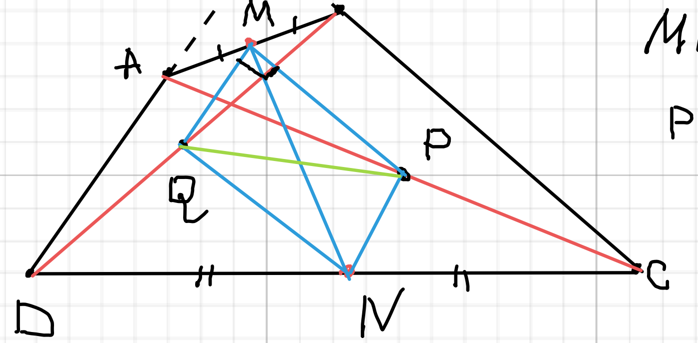
$$AC^2 + DB^2 = 2(AB^2 + CD^2)$$

Пример ■ В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

Решение:



$BC \perp AD$



$MN = 1$

$PQ = ?$

$MP \parallel BC \to MP = \frac{1}{2}BC$

$QN \parallel BC \to QN = \frac{1}{2}BC \to MP = QN$ и $MP \parallel QN \to$

$\to MPNQ$ – параллелограмм!

$MQ \parallel AD$ и $MP \parallel BC$ $\quad \underline{AD \perp BC} \to MQ \perp MP$!

$\to \underline{MPNQ \text{ – прямоуг.!}} \to QP = MN = 1$

Ответ: $\boxed{1}$