Определения и понятие равенства многочленов

Определение. *Многочленом* (*полиномом*) от одной переменной x называется выражение вида

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — числовые коэффициенты, $a_0 \neq 0$.

Число n называется *степенью* многочлена $P(x)$. Форма (1) называется *канонической* или *стандартной записью многочлена n-й степени*. Слагаемое a_0x^n называется *старшим членом* многочлена $P(x)$, a_0 — *старшим коэффициентом*, а a_n — его *свободным членом*. Многочлен $P(x) = a_0$, где $a_0 \neq 0$ — заданное число, называют *многочленом нулевой степени*. Многочлен $P(x) = 0$ называют *нулевым многочленом*.

Для обозначения многочленов используются также и другие буквы: $Q(x)$, $T(x)$, $R(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $f(x)$ и т. д. Если хотят подчеркнуть, что степень многочлена равна n, вместо $P(x)$ пишут $P_n(x)$. Например, $Q_4(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3$, $P_5(x) = 3x^5 + 2x^2 + 5$, $T_3(x) = x^3 - 2x + 1$.

Выражения вида ax^k, где a — действительное, а k — неотрицательное целое число, называют *одночленом* (*мономом*). Одночлены одинаковой степени называют *подобными*.

Значением $P(c)$ *многочлена* $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n$ в точке c (при $x = c$) называется число $P(c) = a_0c^n + \ldots + a_kc^{n-k} + \ldots + a_n$.

Замечание. Отметим, что $P(0) = a_n$, а $P(1) = a_0 + \ldots + a_k + \ldots + a_n$.

Два многочлена считаются *равными*, если они составлены в канонической записи из одинаковых одночленов, т. е.

$$a_0x^n + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n = b_0x^n + \ldots + b_kx^{n-k} + \ldots + b_n$$

в том и только том случае, если $a_i = b_i$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Соответственно из определения следует, что равные многочлены имеют одинаковую степень и для любого числа c значения многочленов при $x = c$ совпадают.

$n = n + 0 = n - 1 + 1 = \ldots = n$

$a_n = a_n \cdot x^0$

$n = 0$

$P(x) = 0,\ \forall x \hookrightarrow$

$\hookrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

$x^4 - 1$

$a_0 = 1,\ a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$a_4 = -1$

$ax^k + bx^k = (a+b)x^k$

$x^3 + 2x^2 + 1 = ax^3 + bx^2 + cx + 1 \Leftrightarrow \boxed{a = 1,\ b = 2,\ c = 0}$

① Если $P(x) = Q(x) \hookrightarrow \forall c \in R \quad P(c) = Q(c)$

② Если $\forall c \in R\ P(c) = Q(c) \hookrightarrow P(x) = Q(x)$

$(2x-1)^{1000}$, найти $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$x = 1$, $P(1) = (2 \cdot 1 - 1)^{1000} = 1^{1000} = 1$.

Пример ■ Найти неизвестные коэффициенты, при которых будет выполняться следующее равенство:

$$8x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 1 = (2x+3)(ax^3 + bx^2 + cx - 1) - 7x^3 + 4.$$

△ Перемножая многочлены в правой части равенства и приводя подобные, получим

$$8x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 1 =$$
$$= 2ax^4 + 2bx^3 + 2cx^2 - 2x + 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx - 3 - 7x^3 + 4 =$$
$$= 2ax^4 + (2b + 3a - 7)x^3 + (2c + 3b)x^2 + (3c - 2)x + 1.$$

Из определения равенства многочленов следует

$$\begin{cases} 2a = 8, \\ 2b + 3a - 7 = -1, \\ 2c + 3b = -5, \\ 3c - 2 = 4. \end{cases}$$

$\to a = 4$, $2b + 12 - 7 = -1$, $2b = -6$, $b = -3$

$2c - 9 = -5$, $2c = 4$, $c = 2$

Отсюда получаем $a = 4$, $b = -3$, $c = 2$. ▲

Вычесть из многочлена $P(x)$ многочлен $T(x)$ — это значит найти такой многочлен $Q(x)$, что $P(x) = Q(x) + T(x)$. Многочлен $Q(x)$ называют *разностью многочленов* $P(x)$ и $T(x)$. Для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$ существует и притом только один многочлен $Q(x)$, являющийся их разностью. Он записывается в виде $Q(x) = P(x) - T(x)$.

Особое место в теории многочленов занимает деление одного многочлена на другой.

Пусть заданы многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ и ненулевой многочлен $T(x)$. Если существует такой многочлен $Q(x)$, что для всех x выполняется равенство

$$P(x) = T(x) \cdot Q(x), \tag{2}$$

то говорят, что многочлен $P(x)$ *делится* на многочлен $T(x)$ или $T(x)$ *делит* $P(x)$, а формулу (2) называют *формулой деления многочленов*, многочлен $Q(x)$ называют *частным*.

Пусть заданы многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ и ненулевой многочлен $T(x)$ степени $m \geqslant 1$, где $m \leq n$. Говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком, если найдутся такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, что для всех x выполняется равенство

$$P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x), \tag{3}$$

где многочлен $Q(x)$ — *(неполное) частное*, степень которого $k = n - m$; а $R(x)$ — *остаток*, степень которого $p < m$.

Тождественное равенство (3) называют *формулой деления многочленов с остатком*.

Если остаток $R(x) = 0$, то говорят, что многочлен $P(x)$ *делится нацело* на многочлен $T(x)$.

$P_n(x)$, $T_m(x)$

$Q_{n-m}(x)$

$R_p(x)$

$0 \leq p < m$

■ Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода неопределенных коэффициентов заключается в следующем. Пусть требуется поделить многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

на многочлен

$$T_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

где $n \geqslant m$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — известные числа, причем $a_0 \neq 0$.

Представим частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$ в виде:

$Q(x) = c_0x^{n-m} + c_1x^{n-m-1} + \ldots + c_{n-m}$ и $R(x) = d_0x^{m-1} + d_1x^{m-2} + \ldots + d_{m-1}$,

где коэффициенты c_i и d_j пока не определены и $c_0 \neq 0$.

Потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$P_n(x) = T_m(x) \cdot Q(x) + R(x). \qquad (5)$$

Перемножая и складывая многочлены в правой части равенства (5) и приравнивая коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x в левой и правой частях (5), получим $n+1$ равенство, для определения $n+1$ коэффициента $c_0, c_1, \ldots, c_{n-m}, d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$. ✓

Пример 3. Пусть $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5$, а $T(x) = 3x^2 + 4x - 5$. Найти многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ такие, что $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ и степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $T(x)$.

$\triangle$ Положим $Q(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$ и $R(x) = d_0x + d_1$. Запишем равенство

$$6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5 = (3x^2 + 4x - 5) \cdot (c_0x^2 + c_1x + c_2) + (d_0x + d_1).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим:

$$6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5 = 3c_0x^4 + (4c_0 + 3c_1)x^3 + \\ + (-5c_0 + 4c_1 + 3c_2)x^2 + (-5c_1 + 4c_2 + d_0)x + (-5c_2 + d_1).$$

По определению равенства многочленов получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3c_0 = 6, \\ 4c_0 + 3c_1 = 5, \\ -5c_0 + 4c_1 + 3c_2 = -11, \\ -5c_1 + 4c_2 + d_0 = 9, \\ -5c_2 + d_1 = -5. \end{cases}$$

$\to c_0 = 2$

$\to 3c_1 = -3, \; c_1 = -1$

$3c_2 = 3, \; c_2 = 1$

$d_0 = 0, \; d_1 = 0$

Отсюда находим $c_0 = 2$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $d_0 = 0$, $d_1 = 0$. Следовательно, $Q(x) = 2x^2 - x + 1$ и $R(x) = 0$. ▲

$$(6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5) = (3x^2 + 4x - 5)(2x^2 - x + 1)$$

Пример [redacted] Разделить «уголком» многочлен

$$P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5$$

на многочлен $T(x) = 3x^2 + 4x - 5$.

$\triangle$ Условие данного примера совпадает с условием примера 2, только многочлены даны в стандартном виде.

Описанная в доказательстве теоремы 1 процедура деления многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$ (см. также пример 2) может быть реализована в виде *деления многочленов «уголком»*.

$$\begin{array}{rl|l}
\text{Делимое} \to & 6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5 & 3x^2 + 4x - 5 \;\leftarrow \text{Делитель} \\
- & 6x^4 + 8x^3 - 10x^2 & 2x^2 - x - 1 \;\leftarrow \text{Частное} \\
\hline
- & -3x^3 - 7x^2 + 9x & \\
 & -3x^3 - 4x^2 + 5x & \\
\hline
- & -3x^2 + 4x - 5 & \\
 & -3x^2 - 4x + 5 & \\
\hline
 & 8x - 10 \;\leftarrow \text{Остаток} &
\end{array}$$

В данном примере получаем $Q(x) = 2x^2 - x - 1$, $R(x) = 8x - 10$ и

$$6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5 = (3x^2 + 4x - 5)(2x^2 - x - 1) + (8x - 10). \; ▲$$

✓

Свойства делимости многочленов

1°. Если многочлен $P(x)$ делится (нацело) на многочлен $T(x)$, а многочлен $T(x)$ делится (нацело) на многочлен $M(x)$, то многочлен $P(x)$ делится на многочлен $M(x)$.

2°. Если многочлены $P(x)$ и $T(x)$ делятся на многочлен $M(x)$, то многочлены $P(x)+T(x)$ и $P(x)-T(x)$ делятся на многочлен $M(x)$, а многочлен $P(x)\cdot T(x)$ делится на многочлен $M^2(x)$.

Например, каждый из многочленов x^3+1 и x^2-x-2 делится на многочлен $x+1$, поэтому многочлен x^3+x^2-x-1 делится на $x+1$, многочлен $(x^3+1)(x^2-x-2)=x^5-x^4-2x^3+x^2-x-2$ делится на многочлен $(x+1)^2=x^2+2x+1$.

Основные свойства делимости многочленов

Все рассматриваемые ниже многочлены отличны от нуля. Слово "делится" означает, что многочлен делится на другой многочлен без остатка, то есть понимать надо так же, как в теории целых и натуральных чисел.

1. Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$делится на $h(x)$, то $f(x)$ делится на $h(x)$.
2. Если $f(x)$ делится на $h(x)$ и $g(x)$ делится на $h(x)$, то сумма и разность $f(x) \pm g(x)$ делится на $h(x)$, а произведение $f(x)\cdot g(x)$ делится на $(h(x))^2$.
3. Если $f(x)$ делится на $h(x)$ и $g(x)$ – ненулевой многочлен, то произведение $f(x)\cdot g(x)$ делится на $h(x)$.
4. Если $f(x)$ делится на $h(x)$ и $f(x)+g(x)$ или $f(x)-g(x)$ делится на $h(x)$, то $g(x)$ делится на $h(x)$.
5. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ делятся друг на друга тогда и только тогда, когда $f(x) = c\, g(x)$, где $c = \text{const} \neq 0$.

Существуют еще несколько очевидных следствий из этих свойств.

6. Всякий многочлен $f(x)$ делится на любую константу $a \neq 0$.
7. Если многочлен $f(x) = g(x)\cdot h(x)$ делится на двучлен $x - c$, то хотя бы один из многочленов $g(x)$ или $h(x)$ делится на $x - c$.
8. Если $f(x)$ делится на $g(x)$, то всякий корень $g(x)$ является корнем $f(x)$.

$x=c$ – корень, если $f(c)=0$.

Пример Не проводя деления многочленов, найти остаток от деления многочлена $P(x)=x^{50}+x^{25}+4$ на многочлен $T(x)=x^2-1$.

△ Используя теорему о делении многочленов, запишем

$$P_{50}(x)=Q_{48}(x)\cdot T(x)+R_1(x),\quad \text{где } R_1(x)=ax+b.$$

Из равенства $x^{50}+x^{25}+4=Q_{48}(x)\cdot(x^2-1)+ax+b$ найдем a и b, подставив значения x, равные 1 и -1. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1^{50}+1^{25}+4=Q_{48}(1)\cdot(1^2-1)+a+b, \end{cases}$$

$$\left\{(-1)^{50}+(-1)^{25}+4=Q_{48}(-1)\cdot\left((-1)^2-1\right)-a+b\right.$$

или

$$\begin{cases}6=a+b,\\ 4=-a+b.\end{cases}$$ ✓ $2b=10,\ b=5$

Отсюда получаем $a=1, b=5$. Значит, искомый остаток равен $x+5$. ▲ ✓

Многочлен вида $ax+b$, где $a\neq 0$, называется *линейным двучленом*. $ax+b=0$!

Пример [redacted] Некоторый многочлен при делении на двучлен $3x-2$ дает в остатке 2, а при делении на двучлен $x+2$ дает в остатке -10. Найти остаток от деления этого многочлена на $(3x-2)(x+2)$.

△ Пусть многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям задачи. Тогда запишем равенства

$$P(x)=Q(x)\cdot(3x-2)+2, \qquad (6)$$

$$P(x)=S(x)\cdot(x+2)-10. \qquad (7)$$

Соответственно при делении $P(x)$ на $T(x)=(3x-2)(x+2)$ будет иметь место равенство

$$P(x)=M(x)\cdot((3x-2)(x+2))+R(x), \qquad (8)$$

где $R(x)=ax+b$. Найдем значения a и b.

Из равенства (6) при $x=\frac{2}{3}$ получаем $P\left(\frac{2}{3}\right)=Q\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3\cdot\frac{2}{3}-2\right)+2$ ✓ или $P\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Из равенства (7) при $x=-2$ получаем $P(-2)=$ $=S(-2)\cdot(-2+2)-10$ или $P(-2)=-10$. Соответственно, подставляя в соотношение (8) значения $x=\frac{2}{3}$ и $x=-2$, получаем систему уравнений для нахождения a и b:

$$\begin{cases}P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}a+b=2,\\ P(-2)=-2a+b=-10.\end{cases}$$

Отсюда находим, что $a=4{,}5$, $b=-1$, т. е. остаток $R(x)=4{,}5x-1$. ▲