Пример Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3-(a+4)x^2+4ax=0$ имеет ровно два различных корня.

Решение: $x\underbrace{(x^2-(a+4)x+4a)}=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-(a+4)x+4a=0 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0$

$x_1=4, \quad x_2=a$

1) $x=0$

$x_1=x_2 \hookrightarrow a=4 \quad (D=0)$

2) $x_1\neq x_2 \quad (D>0)$

$x_2=0 \hookrightarrow a=0$

Ответ: 0 и 4.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+2x+a=17$ и $x^2+5x=3a+18$ имеют хотя бы один общий корень.

Решение: x_0 – общий корень! $\hookrightarrow$

$$-\begin{array}{l} x_0^2+2x_0+a-17=0 \\ x_0^2+5x_0-3a-18=0 \end{array}$$

$$-3x_0+4a+1=0$$

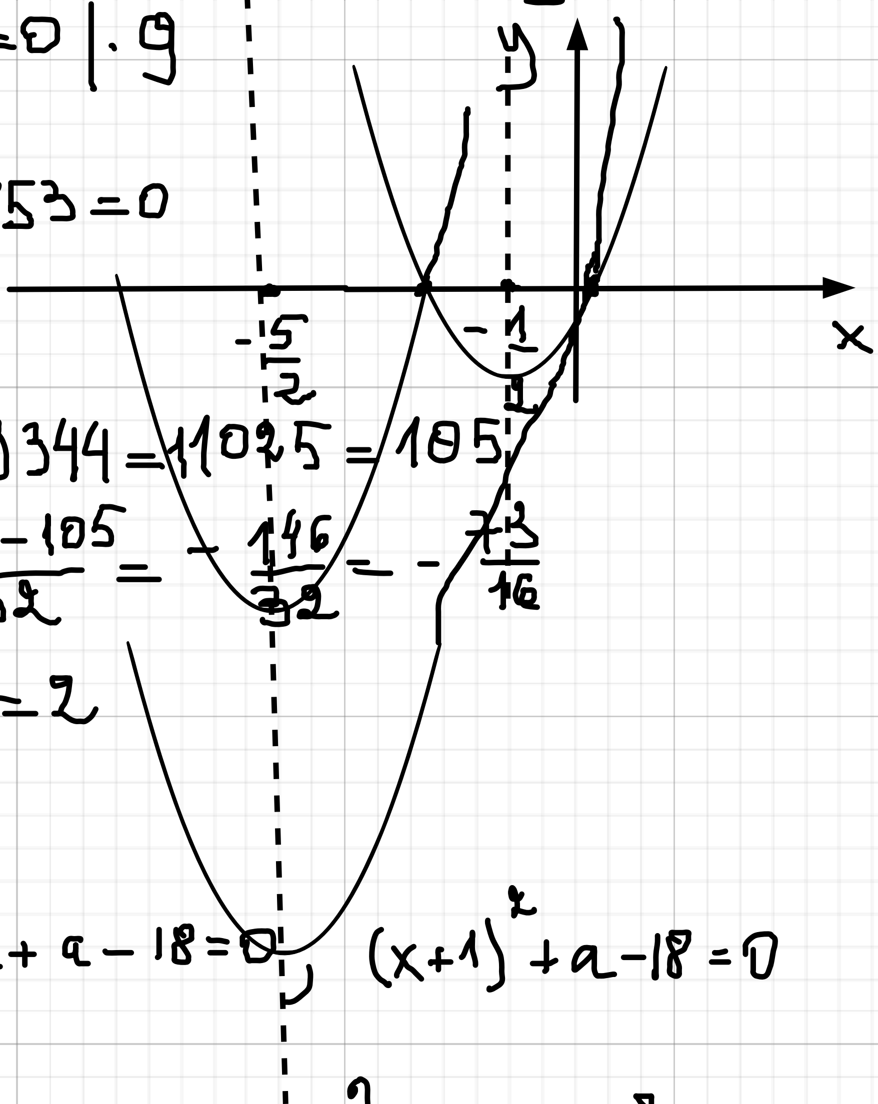
$$x_0=\frac{4a+1}{3}$$

$$\left(\frac{4a+1}{3}\right)^2+2\left(\frac{4a+1}{3}\right)+a-17=0$$

$$\frac{16a^2+8a+1}{9}+\frac{8a+2}{3}+a-17=0 \;\Big|\cdot 9$$

$$16a^2+8a+1+24a+6+9a-153=0$$

$$16a^2+41a-146=0$$



$$D=1681+4\cdot16\cdot146=1681+9344=11025=105^2$$

$$a_{1,2}=\frac{-41\pm105}{32};\quad a_1=\frac{-41-105}{32}=-\frac{146}{32}=-\frac{73}{16}$$

$$a_2=\frac{64}{32}=2$$

Ответ: $a=-\frac{73}{16}$, $a=2$

$x^2+2x+a-17=0$, $x^2+2x+1+a-18=0$, $(x+1)^2+a-18=0$

$\boxed{x=-1}$ — ось симм.

$\underbrace{x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}}-\frac{25}{4}-3a-18=0$, $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2\underbrace{-3a-\frac{97}{4}}=0$

$x=-\frac{5}{2}$ — ось симм.

Пример 3. При каждом значении параметра a решите неравенство $\dfrac{5}{x-3a}>3a$.

$x\neq3a$, $a\neq0$

Решение:

Решение: $\frac{5}{x-3a}-3a>0 \Leftrightarrow \frac{5-3a(x-3a)}{x-3a}>0 \Leftrightarrow$

$\frac{5-3ax+9a^2}{x-3a}>0 \Leftrightarrow \frac{3ax-(9a^2+5)}{x-3a}<0 \Leftrightarrow$

$\frac{3a\left(x-\left(3a+\frac{5}{3a}\right)\right)}{x-3a}<0 \Leftrightarrow \frac{a\left(x-\left(3a+\frac{5}{3a}\right)\right)}{x-3a}<0.$ (*)

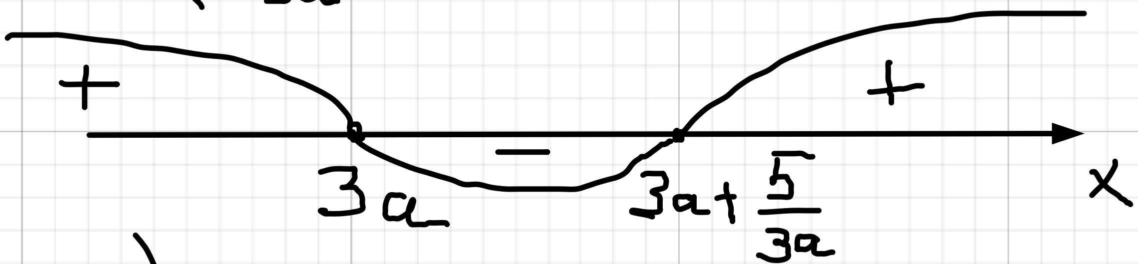
нули: $3a$ и $3a+\frac{5}{3a}$

1) $a=0$, $\frac{5}{x}>0 \hookrightarrow x(0;+\infty)$

2) $a>0$, из (*) $\hookrightarrow \frac{x-\left(3a+\frac{5}{3a}\right)}{x-3a}<0$

$3a>0$

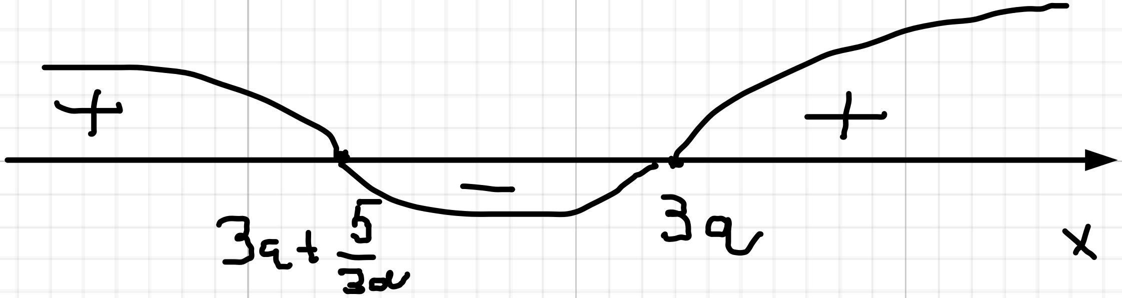
$3a<3a+\frac{5}{3a}$



$x\in\left(3a;\ 3a+\frac{5}{3a}\right)$

3) $a<0$, из (*) $\hookrightarrow \frac{x-\left(3a+\frac{5}{3a}\right)}{x-3a}>0$

$$3a+\frac{5}{3a}<3a$$



$$x\in\left(-\infty;\ 3a+\frac{5}{3a}\right)\cup(3a;+\infty)$$

Ответ: 1) $a<0$; $x\in\left(-\infty;3a+\frac{5}{3a}\right)\cup(3a;+\infty)$

2) $a=0$; $x\in(0;+\infty)$

3) $a>0$; $x\in\left(3a;3a+\frac{5}{3a}\right)$

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x+\sqrt{x^2-4ax-7a}=3$ имеет хотя бы один корень.

Решение:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-4ax-7a}=3-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 3\\ x^2-4ax-7a=(3-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\leq 3\\ x^2-4ax-7a=9-6x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 3\\ -4ax+6x=7a+9\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\leq 3\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \left[\underbrace{(6-4a)}\, x = 7a+9 \right.$

1) $6-4a=0$, $a=\frac{3}{2}$ $\hookrightarrow$ $0\cdot x \neq 7\cdot\frac{3}{2}+9$ - корней нет!

2) $a\neq\frac{3}{2}$ $\hookrightarrow$ $x=\frac{7a+9}{6-4a}$ - корень!

$\left(\boxed{\frac{7a+9}{6-4a} \leq 3} \right)$ $\hookrightarrow$ $a\in\left(-\infty; \frac{9}{19}\right] \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ - Ответ