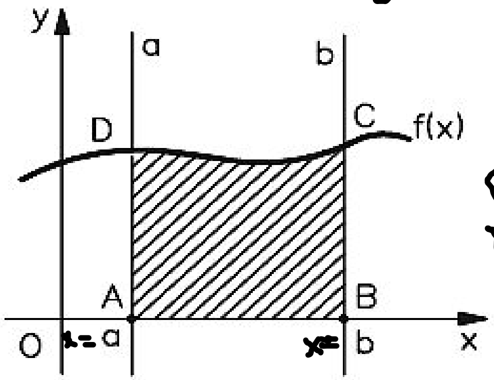
$y=f(x)\geq 0$

КРИВОЛИНЕЙНАЯ ТРАПЕЦИЯ. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции f, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$.



$$\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ a\leq x\leq b \end{cases}$$

Площадь криволинейной трапеции находится по формуле:

$$S_{ABCD}=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$ [redacted].

Площадь криволинейной трапеции

Фигура $ABCD$ на рисунке 80 снизу ограничена осью абсцисс, сверху — графиком функции $y=f(x)$, а слева и справа — параллельными прямыми $x=a$ и $x=b$. Параллельность сторон AD и BC вызывает ассоциации с трапецией, отличие лишь в стороне DC: у трапеции это отрезок, а у фигуры на рисунке — часть графика функции $y=f(x)$.

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная линиями: $y=0$, $x=a$, $x=b$ и $y=f(x)$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$ и принимающая на нем только неотрицательные значения.

Рисунки 81—82 иллюстрируют способ приближенного вычисления площади криволинейной трапеции: разбиение на несколько криволинейных трапеций, замена их прямоугольниками, нахождение высот, а затем и площадей этих прямоугольников.

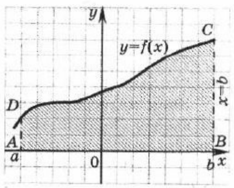


Рис. 80

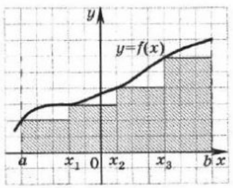


Рис. 81

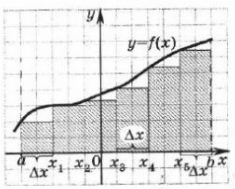


Рис. 82

Так, для разбиения на рисунке 82, используя для равных оснований прямоугольников обозначение Δx,

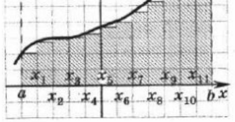


Рис. 83

получим:

$$S_{ABCD} \approx f(a)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + + f(x_3)\cdot\Delta x + f(x_4)\cdot\Delta x + f(x_5)\cdot\Delta x.$$

При увеличении числа частей n, на которые разбивается трапеция, погрешность приближения уменьшается, и ее можно сделать как угодно малой, взяв n достаточно большим.

Поскольку при увеличении n значение $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ стремится к нулю, можно записать:

$$S_{ABCD} = \lim_{\Delta x \to 0} (f(a)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x).$$

Сумму, стоящую под знаком предела, называют ***интегральной***, концы отрезка $[a; b]$ — границами (или пределами) интегрирования, а сам предел называют ***интегралом*** и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$ (читается: *интеграл от а до b эф от икс дэ икс*)[1].

Таким образом,

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■ Знак интеграла, представляющий собой удлиненную букву S, был введен Лейбницем в 1686 г. Термин «интеграл» от латинского слова *integer* — целый (с помощью интеграла находится площадь целой фигуры) предложил И. Бернулли, сотрудник Лейбница. Определение интеграла как предела суммы принадлежит Б. Риману, поэтому интегральную сумму иногда называют *римановой*.

Первообразная

Будем теперь рассматривать площадь фигуры под кривой $y = f(x)$ как функцию $S(x)$. Действительно, каждому значению x из промежутка $(a; b]$ (рис. 96) соответствует площадь криволинейной трапеции $AXYD$. Приращению Δx (рис. 97) соответствует приращение ΔS — площадь заштрихованной криволинейной трапеции, которую и здесь при стремлении Δx к нулю можно заменить площадью прямоугольника $f(x)\,\Delta x$.

Приращение функции при этом превратится в ее дифференциал: $dS = f(x)\,dx$. Значит, $S'(x) = f(x)$.

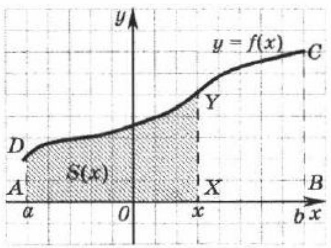


Рис. 96

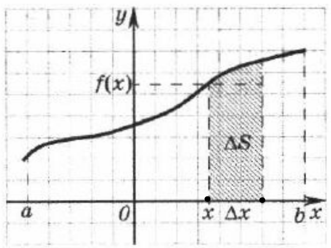


Рис. 97

$\Delta S \approx f(x)\Delta x$

$\Delta x \to 0$

$dS = f(x)dx$

dS $f(x)$

Оказалось, что введенная нами функция $S(x)$ имеет производную, равную функции $f(x)$, чей график ограничивает кри-

водную, равную функции $f(x)$, а ее график ограничивает кри-
волинейную трапецию сверху.

В математике для таких функций используют специальный термин.

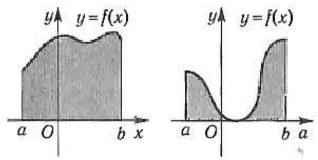
$\frac{dS}{dx} = f(x)$

$S'(x) = f(x)$

Площадь криволинейной трапеции. Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$, где $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a;b]$. Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком функции $y=f(x)$, двумя вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью Ox. Такая фигура называется *криволинейной трапецией* (рис. 2). Пусть требуется найти площадь этой фигуры.

Поставленную задачу можно решить так:

1) разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей и обозначим последовательно точки деления через $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ (рис. 3), причем $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$;
2) обозначим длину отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ через Δx_k, т. е. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, и пусть c_k — середина отрезка $[x_{k-1}; x_k]$, где $k=1, 2, \ldots, n$;



а) б)

Рис. 2

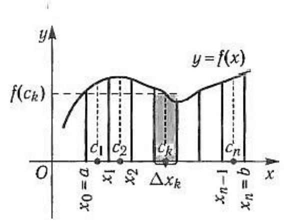


Рис. 3

3) значение $f(c_k)$ функции $f(x)$ в точке c_k умножим на Δx_k для всех $k=1, 2, \ldots, n$, получим $f(c_k)\cdot\Delta x_k$. Геометрически каждое такое произведение численно равно площади прямоугольника со сторонами $f(c_k)$ и Δx_k. Составим сумму всех таких произведений $f(c_k)\cdot\Delta x_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$

$$\sigma_n = f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k.$$

При $n\to\infty$ длины $\Delta x_n \to 0$ и сумма σ_n, численно равная площади ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников, стремится к значению площади S данной криволинейной трапеции.

В рассмотренных задачах речь идет о нахождении предела сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k$, которые называют *интегральными суммами*. К вычислению предела таких сумм сводится решение многих важных задач из геометрии, физики, техники и других дисциплин.

Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, и пусть задано разбиение отрезка $[a;b]$ произвольным образом на n частей так, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Назовем совокупность точек $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ *разбиением отрезка* $[a;b]$ и обозначим $T=\{x_k, k=0, 1, \ldots, n\}$, а отрезки $\Delta_k = [x_{k-1}; x_k]$, где $k=1, \ldots, n$, назовем *отрезками разбиения* T.

Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ — длина k-го отрезка разбиения T. Тогда число $l(T) = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$ назовем *мелкостью разбиения* T (или *диаметром этого разбиения*). Если $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$, то совокупность точек c_k $(k=1, \ldots, n)$ назовем *выборкой* и обозначим $\{c_k\}$ $(k=1, \ldots, n)$.

Составим сумму всех произведений $f(c_k)\cdot\Delta x_k$ $(k=1, \ldots, n)$

Составим сумму всех произведений $f(c_k)\cdot\Delta x_k$ $(k=1,\ldots,n)$, которую обозначим $\sigma(T,\{c_k\})$ и назовем *интегральной суммой* функции $f(x)$ для данного разбиения T и фиксированной выборки $\{c_k\}$ $(k=1,\ldots,n)$, т. е.

$$\sigma(T,\{c_k\})=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k. \qquad (1)$$

Определение. Число J называется *определенным интегралом* от функции f на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого разбиения T, мелкость которого $l(T)<\delta$, и для любой выборки $\{c_k\}$ $(k=1,\ldots,n)$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k - J\right|<\varepsilon. \qquad (2)$$

Иногда это определение записывают в виде $\sigma(T,\{c_k\})\to J$ при $l(T)\to 0$ или $\lim\limits_{l(T)\to 0}\sigma(T,\{c_k\})=J$, имея в виду, что этот предел не зависит от выбора точек c_k $(k=1,\ldots,n)$.

Функция $f(x)$, для которой существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, называется *интегрируемой на отрезке* $[a;b]$, числа a и b — соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*.

Пример ■ Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=x^2$, вертикальными прямыми $x=0$ и $x=1$ и осью Ox.

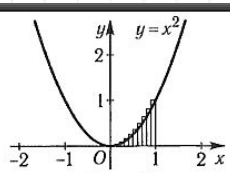


Рис. 4

△ Разобьем отрезок $[0;1]$ на n равных частей, тогда $\Delta x_k=\frac{1}{n}$ и $x_k=\frac{k}{n}$ (см. рис. 4). Положим $c_k=x_k=\frac{k}{n}$, $k=1,2,\ldots,n$ (т. е. c_k совпадает с правым концом отрезка $[x_{k-1},x_k]$). Тогда $f(c_k)=\frac{k^2}{n^2}$. Составляя сумму σ_n, получим

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=$$

Так как $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, то, подставляя в сумму, получим

$$\sigma_n=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{3}.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Поэтому искомая площадь равна $S=\frac{1}{3}$. ▲

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Замечание. Используя предельный переход, еще Архимед получил, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2$, отрезками прямых $x=0$ и $x=a$, где $a>0$, и осью Ox, равна $\frac{a^3}{3}$.

$$J=\int_0^1 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{0}{3}=\frac{1}{3}$$

Геометрический смысл определенного интеграла. Заметим, что для неотрицательной, непрерывной на $[a;b]$ функции $f(x)$ геометрически сумма

$$S = f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1} f(c_k)\cdot\Delta x_k$$

численно равна площади ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников, и при $l(T)\to 0$ стремится к площади криволинейной трапеции, т. е.

$$S = \lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Следовательно, определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$. В этом заключается *геометрический смысл определенного интеграла*.

Выясним условия интегрируемости функции $f(x)$.

Теорема 1 (***необходимое условие интегрируемости***). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

[redacted] Достаточные условия интегрируемости функции

Теорема 2. *Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, интегрируема на этом отрезке.*

Замечание. Имеет место общая теорема: если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 3. *Всякая функция, монотонная на отрезке $[a;b]$, интегрируема на этом отрезке.*

4. Свойства определенного интеграла

1. Если k — константа, то $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то функции $f(x)\pm g(x)$ также интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и выполняется равенство

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \tag{3}$$

   Это значит, что интеграл от алгебраической суммы интегрируемых функций равен алгебраической сумме их интегралов.

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, а k — константа, то функция $kf(x)$ также интегрируема на отрезке $[a;b]$ и выполняется равенство

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

   Это значит, что постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

Совокупность свойств 2 и 3 называется *линейностью* определенного интеграла.

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x)\geqslant 0$, то

$$\int_a f(x)dx \geqslant 0.$$

Замечание. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$ на $[a;b]$ и $f(x) > 0$ хотя бы в одной точке этого отрезка, то $\int_a^b f(x)dx > 0$. ✓

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \geqslant g(x)$ для всех точек этого отрезка, то
$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx. \qquad (5)$$
6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и выполняется неравенство
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (6)$$
7. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;c]$ и на отрезке $[c;b]$, причем $a < c < b$, то эта функция интегрируема также на отрезке $[a;b]$ и выполняется равенство
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (7)$$
Это означает, что определенный интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям.

Формула Ньютона—Лейбница осуществляет связь между первообразной данной функции и определенным интегралом. Правую часть формулы часто записывают в виде $F(x)\big|_a^b$. Тогда формула принимает вид
$$\int_a^b f(t)dt = F(x)\big|_a^b. \qquad (9)$$
$= F(b) - F(a)$ ✓

Пример 3. Вычислить интеграл:

1) $\int_0^1 x^2dx$; 2) $\int_1^3 (2x^2-3x)\,dx$; 3) $\int_a^b \cos x\,dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)dx$.

△ 1) Одной из первообразных функции $f(x) = x^2$ является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, поэтому $\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$. ✓

2) Одной из первообразных функции $f(x) = 2x^2 - 3x$ является функция $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$. Поэтому
$$\int_1^3 \left(2x^2 - 3x\right)dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_1^3 =$$
$$= \left(\frac{2\cdot 3^3}{3} - \frac{3\cdot 3^2}{2}\right) - \left(\frac{2\cdot 1^3}{3} - \frac{3\cdot 1^2}{2}\right) = 5\tfrac{1}{3}.$$
3) Одной из первообразных функции $f(x) = \cos x$ является функция $F(x) = \sin x$. Поэтому $\int_a^b \cos x dx = \sin x\big|_a^b = \sin b - \sin a$.

$F'(x) = f(x)$

$f(at+b)$

$\frac{1}{a}F(at+b)$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{4}.$ ▲

$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^6 f(x)dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x < 2, \\ x^2 & \text{при } x \geqslant 2. \end{cases}$$

△ Используя свойство 7 определенного интеграла, получаем:

$$\int\limits_0^6 f(x)dx = \int\limits_0^2 f(x)dx + \int\limits_2^6 f(x)dx = \int\limits_0^2 (x+1)dx + \int\limits_2^6 x^2 dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^6 = (4-0) + \left(72 - \frac{8}{3}\right) = 73\frac{1}{3}. \quad ▲$$

Пример 5. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{-1}^{6} |5-2x|dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2} |2x - |x-1||dx$.

△ 1) Раскрывая модуль, получаем

$$|5-2x| = \left[\begin{array}{l} 5-2x \text{ при } x \leqslant 2{,}5, \\ 2x-5 \text{ при } x > 2{,}5. \end{array}\right.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (7):

$$\int\limits_{-1}^{6} |5-2x|dx = \int\limits_{-1}^{2{,}5} (5-2x)dx + \int\limits_{2{,}5}^{6} (2x-5)dx =$$

$$= \left(5x - x^2\right)\Big|_{-1}^{2{,}5} + \left(x^2 - 5x\right)\Big|_{2{,}5}^{6} =$$

$$= (7{,}5 - 6{,}25) - (-5-1) + (36-30) - (6{,}25 - 7{,}5) = 14{,}5.$$

✓

2) Раскрывая модули, начиная с внутреннего, получаем

$$|2x - |x-1|| = \begin{cases} |2x + (x-1)| \text{ при } x < 1, \\ |2x - (x-1)| \text{ при } x \geqslant 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} |3x-1| \text{ при } x < 1, \\ |x+1| \text{ при } x \geqslant 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - 3x \text{ при } x < \frac{1}{3}, \\ 3x - 1 \text{ при } \frac{1}{3} \leqslant x < 1, \\ x + 1 \text{ при } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Далее, используя формулу (7), имеем

$$\int\limits_{-2}^{2} |2x - |x-1||dx = \int\limits_{-2}^{\frac{1}{3}} (1-3x)dx + \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} (3x-1)dx + \int\limits_{1}^{2} (x+1)dx =$$

$$= \left(x - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3x^2}{2} - x\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\right) - \left(-2 - \frac{3\cdot 4}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - 1\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) + (2+2) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{34}{3}.$$

✓

Способы вычисления определенного интеграла. Для вычисления определенных интегралов так же, как и для неопределенных, часто используется замена переменной

$\varphi(t) = x, \quad \varphi'(t)\,dt = d\varphi(t) = dx$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int_{a}^{b} f(x)dx, \tag{10}$$

где функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $f(x)$ непрерывна, и множество значений функции $\varphi(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$ содержится в области определения функции $f(x)$.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

$\triangle$ Обозначим $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$ и $dx = 2t\,dt$. Так как x изменяется от 0 до 4, то $t \in [0; 2]$, поэтому

$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{4} = 2$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}dt = \int_0^2 \left(\frac{2t+2-2}{1+t}\right) dt = \int_0^2 \frac{2(t+1)-2}{t+1}\,dt$$

$$= \int_0^2 \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = (2t - 2\ln|1+t|)\big|_0^2 = 4 - 2\ln 3. \qquad \blacktriangle$$

Замечание. При вычислении определенного интеграла не нужно возвращаться к исходной переменной.

*Еще одним методом вычисления определенных интегралов служит метод интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = (u(x)v(x))\big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_1^e \ln x\,dx$.

$\triangle$ Используя формулу интегрирования по частям, получим

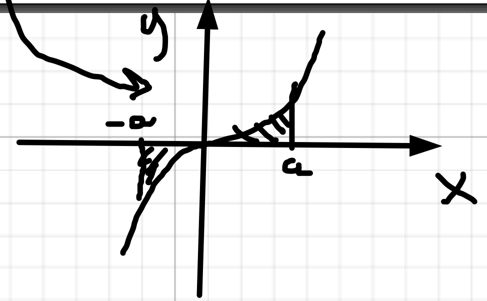
$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\,\big|_1^e - \int_1^e x d\ln x = e - \int_1^e dx = e - e + 1 = 1. \qquad \blacktriangle^*$$

Для непрерывной на отрезке $[-a; a]$ функции $f(x)$ справедливы равенства:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \quad \text{если } f(x) \text{ четная}, \tag{11}$$

и

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \quad \text{если } f(x) \text{ нечетная}. \tag{12}$$



Пример 8. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{-1}^{1}\left(6x^5-\sqrt[5]{x}-x^2+x\right)dx$; 2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\cos^4 x\,dx$.

△ 1) Используя свойства линейности определенного интеграла, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(6x^5-\sqrt[5]{x}-x^2+x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}6x^5\,dx-\int\limits_{-1}^{1}\sqrt[5]{x}\,dx-\int\limits_{-1}^{1}x^2\,dx+\int\limits_{-1}^{1}x\,dx.$$

Так как функции $6x^5$, $\sqrt[5]{x}$ и x — нечетные, то соответствующие интегралы на $[-1;\,1]$ от этих функций равны нулю. Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(6x^5-\sqrt[5]{x}-x^2+x\right)dx=-\int\limits_{-1}^{1}x^2\,dx=-2\int\limits_{0}^{1}x^2dx=-2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=-\frac{2}{3}.$$

2) Так как функция $\sin^3 x\cos^4 x$ является нечетной, то интеграл на $[-\pi;\,\pi]$ от нее равен нулю. Следовательно, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\cos^4 x\,dx=0$. ▲

Пример 9. Найти все положительные значения параметра a, для которых выполняется неравенство

$$\int\limits_{0}^{a}(1-x)dx\leqslant\frac{1+a}{4}.$$

△ Имеем $\int\limits_{0}^{a}(1-x)dx=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a=a-\frac{a^2}{2}$. Таким образом, искомые значения a удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}a>0,\\ a-\frac{a^2}{2}\leqslant\frac{1+a}{4}.\end{cases}$$

Решениями системы являются $a\in(0;\,0,5]\cup[1;+\infty)$. ▲

Пример 10. Найти все положительные значения параметра a, для которых

$$\int\limits_{1}^{2}(a^2-(4-4a)x+4x^3)dx\leqslant 12.$$

△ Имеем