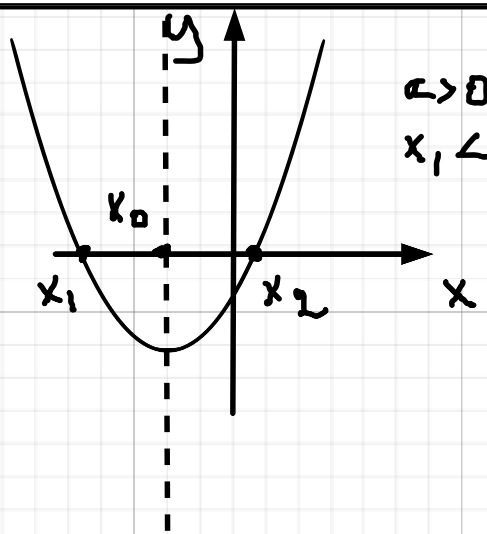
Расположение корней квадратного трехчлена на числовой оси

Пусть квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$, M и K — заданные числа.

$a \neq 0$!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$



$a > 0$

$x_1 < x_2$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Справедливы следующие утверждения, связанные с расположением точек x_1 и x_2 на числовой оси.

1°. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше M ($x_1 < M$, $x_2 < M$), необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ x_0 = -\frac{b}{2a} < M, \\ af(M) > 0, \end{cases} \qquad (14)$$

где $f(M) = aM^2 + bM + c$ — значение трехчлена при $x = M$ (рис. 7 и 8).

В частности, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ ($M = 0$) тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ ab > 0, \\ ac > 0. \end{cases} \qquad (15)$$

$M = 0$

$-\frac{b}{2a} < 0 \;\Big|\cdot(-2)$

$\frac{b}{a} > 0 \;\Big|\cdot a^2$

$ab > 0$

$a\cdot f(0) = a(a\cdot 0 + b\cdot 0 + c) =$

$= ac$

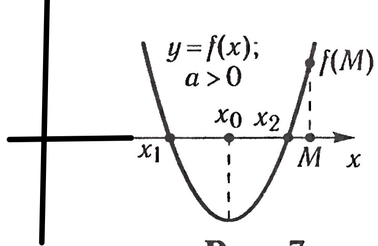


Рис. 7

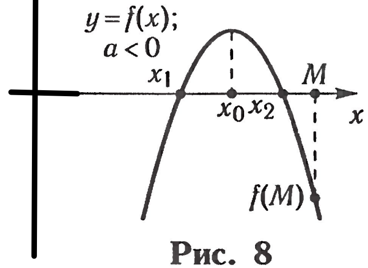


Рис. 8

Док-во: $D = b^2 - 4ac \geq 0$, $x_1 < M$ и $x_2 < M \iff x_1 - M < 0$ и $x_2 - M < 0 \iff$

$$+\begin{array}{l} x_1 - M < 0 \\ x_2 - M < 0 \\ \hline (x_1 - M) + (x_2 - M) < 0 \end{array} \longrightarrow (x_1 - M)(x_2 - M) > 0$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} (x_1 - M) + (x_2 - M) < \\ (x_1 - M)(x_2 - M) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - 2M < 0 \\ x_1 x_2 - M x_2 - M x_1 + M^2 > 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < 2M \\ x_1 x_2 - M(x_1 + x_2) + M^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{b}{a} < 2M \\ \frac{c}{a} + M\cdot\frac{b}{a} + M^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{b}{2a} < M \\ a^2\left(\frac{c}{a} + M\cdot\frac{b}{a} + M^2\right) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} < M \\ a\left(a\cdot\frac{c}{a} + a\cdot M\cdot\frac{b}{a} + aM^2\right) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{b}{2a} < M \\ a(\underbrace{c + Mb + aM^2}_{f(M)}) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{b}{2a} < M \\ af(M) > 0 \end{cases}$$

ч.т.д.

2°. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше M ($x_1 > M$, $x_2 > M$), необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ -\frac{b}{2a} > M, \end{cases} \qquad (16)$$

$$af(M) > 0$$

(*рис.* 9 *и* 10).

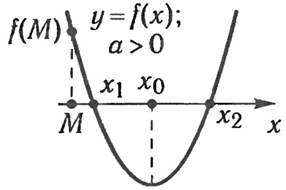


Рис. 9

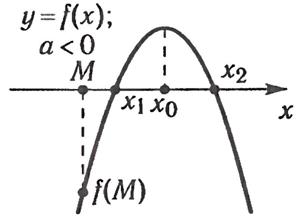


Рис. 10

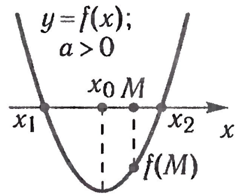


Рис. 11

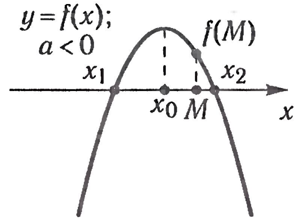


Рис. 12

В частности, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\left.\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ ab < 0, \\ ac > 0. \end{cases}\right) \qquad (17)$$

3°. *Для того чтобы число M было расположено между корнями квадратного трехчлена* ($x_1 < M < x_2$), *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\underline{af(M) < 0} \qquad (18)$$

(*рис.* 11 *и* 12).

4°. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена лежали в интервале* $(K; M)$, *т. е.* $K < x_1 < M$, $K < x_2 < M$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ K < -\frac{b}{2a} < M, \\ af(M) > 0, \\ af(K) > 0 \end{cases} \qquad (19)$$

$$\Longleftrightarrow \; a^2 f(M)\cdot f(K) > 0 \quad \Big| : a^2$$

(*рис.* 13 *и* 14).

Заметим, что в условиях (19) *последние два неравенства можно заменить одним неравенством*

$$f(K)f(M) > 0.$$

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ K < -\frac{b}{2a} < M \\ f(K) \cdot f(M) > \end{cases}$$

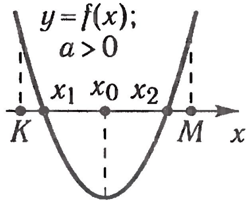


Рис. 13

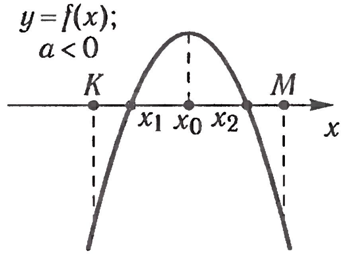


Рис. 14

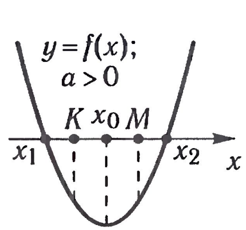


Рис. 15

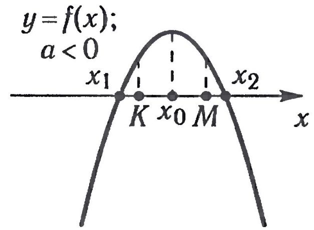


Рис. 16

5°. *Для того чтобы отрезок* $[K; M]$ *лежал в интервале* (x_1, x_2), *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} af(K) < 0, \\ af(M) < 0 \end{cases} \qquad (20)$$

(*рис.* 15 *и* 16).

$x_1 < K < M < x_2$

$x_1 < K < x_2$

$x_1 < M < x_2$

$a^2 f(K) f(M) > 0 \quad | : a^2$

$\boxed{f(K) f(M) > 0}$

Пример [redacted] Найти все значения r, при которых корни уравнения

$$(r-1)x^2 - 2rx + r + 3 = 0$$

[redacted]

положительны.

Решение: $\begin{cases} D \geq 0 \\ ab < 0 \\ ac > 0 \end{cases}$

$a = r - 1$

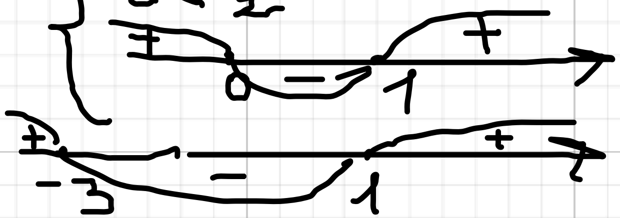
$b = -2r$

$c = r + 3$

$D = (-2r)^2 + 4(1-r)(r+3)$

$$\begin{cases} 4r^2 + 4(3 - 2r - r^2) \geq 0 \\ -2r(r-1) < 0 \\ (r-1)(r+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{4r^2} - \cancel{4r^2} - 8r + 12 \geq 0 \\ r(r-1) > 0 \\ (r-1)(r+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$



$\Leftrightarrow \quad r \in (-\infty; -3) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right]$

если $r = 1$, $-2x + 4 = 0$ и $x = 2 > 0$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Пример [redacted] Найти все значения r, при которых квадратный трехчлен

$$f(x) = rx^2 - (r+1)x + 2$$

имеет действительные корни x_1 и x_2 такие, что $-1 < x_1 < 1$, $-1 < x_2 < 1$. ■

Пример [redacted] При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?