$y = x^2$

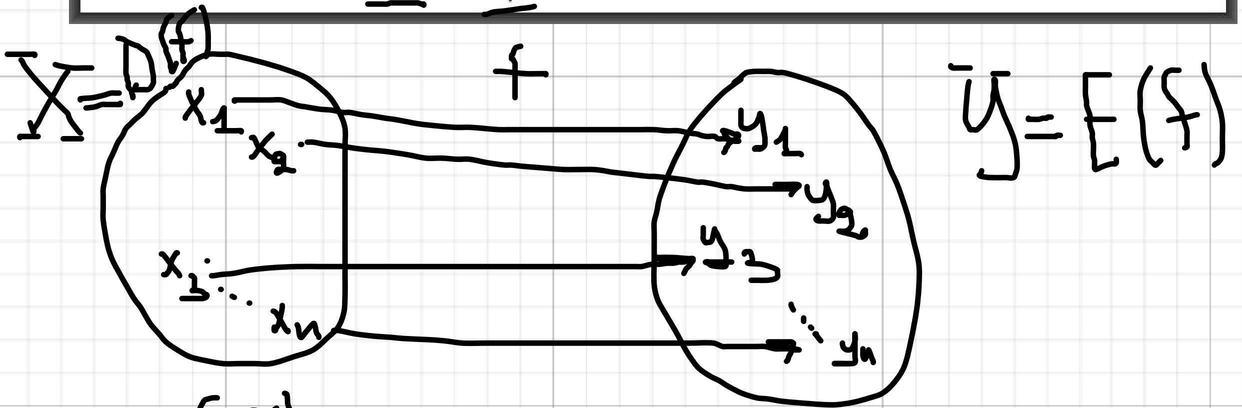
Область определения, множество значений

Определение. Пусть даны множества действительных чисел X и Y. *Функциональной зависимостью* (*функцией*) называется закон, по которому каждому значению величины $x \in X$, называемой *аргументом*, ставится в соответствие некоторое (единственное) число $y = f(x)$ из множества Y.

В математике словом «функция» называют и закон (правило) соответствия f, и величину $f(x)$.

Вместо букв x, f, y можно взять другие буквы, например функция может быть записана в виде $y = \varphi(t)$ или $z = F(x)$.

Множество X называется *областью определения функции* (обозначается $D(f)$ или D_f).



$y = f(x)$

$2x - 5 \geqslant 0$

Например, функция $f(x) = \sqrt{2x-5}$ определена при $x \geqslant 2{,}5$, т. е. $D(f) = [2{,}5; +\infty)$, а для функции $\frac{3x}{x-5}$ имеем $D(f) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

$x \neq 5$

Если число a принадлежит области определения функции f, то говорят, что *функция f определена в точке a*. Для того чтобы указать значение функции в фиксированной точке a, используется такая запись: $f(a), y(a), f(x)|_{x=a}$.

Укажем, например, значения функции $y = \sqrt{2x-5}$ в некоторых точках:

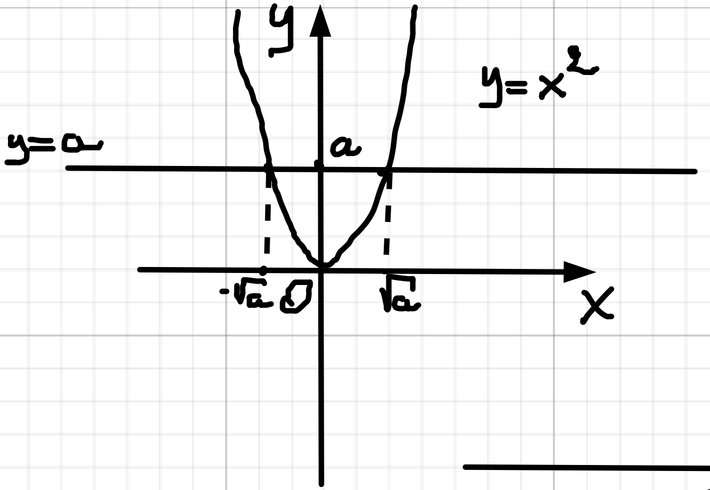
$$y(2{,}5) = 0, \quad y(3) = 1, \quad y(10) = \sqrt{15}.$$

Множеством значений $E(f)$ числовой функции f называется множество всех $a \in \mathbb{R}$, для которых существует хотя бы одно $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = a$. Можно сказать иначе: E_f состоит из тех значений a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение.

Число x_0 из области определения функции $y = f(x)$ называется *нулем функции*, если $f(x_0) = 0$.

Например, числа -2 и 2 являются нулями квадратичной функции

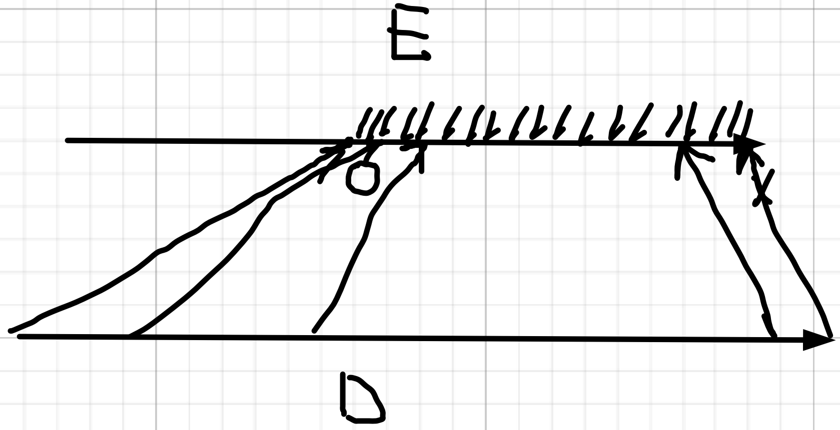
$y = x^2 - 4.$



$D(y) = R$

$E(y) = [0; +\infty)$

$f(x) = a$



$x^2 = a$, $a \geq 0$ $\longrightarrow$ $x_1 = -\sqrt{a}$

$x_2 = \sqrt{a}$

Основные способы задания функций

1) *Аналитический* — задание функции формулой $y = f(x)$, показывающей способ вычисления значения функции по соответствующему значению аргумента. Если при этом ничего не говорится об области определения, то считается, что функция определена на множестве тех значений аргумента, для каждого из которых аналитическое выражение имеет смысл. Множество всех таких значений аргумента иногда называется *естественной областью определения функции.*

Следует подчеркнуть, что одна и та же функция может задаваться разными аналитическими выражениями (формулами). Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называются *тождественно равными* или просто равными *на множестве* M, если они определены на множестве M и для каждого x_0, принадлежащего M, справедливо числовое равенство $f(x_0) = g(x_0)$. В этом случае пишут $f(x) \equiv g(x)$, $x \in M$. Примером функций, тождественно равных на множестве всех действительных чисел, могут служить функции $f(x) = \sqrt{x^2}$ и $g(x) = |x|$.

$\sqrt{x^2} = |x|$

Пример 1. Доказать, что функции $f(x) = 3x$ и $g(x) = |x-1| + |2x+1|$ совпадают на множестве $[1; +\infty)$.

$\triangle$ Если $x \geqslant 1$, то $x-1 \geqslant 0$ и $2x+1>0$, и поэтому $|x-1| = x-1$ и $|2x+1| = 2x+1$. Следовательно, $|x-1| + |2x+1| = x-1+2x+1 = 3x$. $\blacktriangle$

$|x-1| = \left[\begin{array}{l} x-1, \ x \geqslant 1 \\ -(x-1), \ x < 1 \end{array}\right.$ $\quad |2x+1| = \left[\begin{array}{l} 2x+1, \ x \geqslant -\frac{1}{2} \\ -(2x+1), \ x < -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Пример 2. Выяснить, на каком множестве равны функции $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ и $g(x) = x+1$.

$\triangle$ Заметим, что $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, и на всей области определения $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, т. е. $f(x) = g(x)$ при всех $x \neq 1$. Следовательно, $f(x) = g(x)$ на любом множестве, не содержащем 1. $\blacktriangle$

В случае задания функции формулой возникает задача нахождения области определения (имеется в виду естественной области определения) функции. Если функция f представляет собой сумму, разность, произведение функций f_1 и f_2, то ее область определения состоит из тех значений x, которые принадлежат областям определения всех функций, т. е. $D(f) = D(f_1) \cap D(f_2)$. Если же функция $f = \frac{f_1}{f_2}$, то $D(f) = (D(f_1) \cap D(f_2)) \setminus \{x | f_2(x) = 0\}$, т. е. из множества $D(f_1) \cap D(f_2)$ необходимо удалить нули знаменателя.

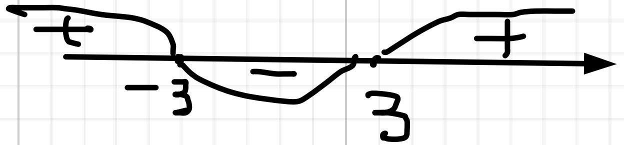
Пример 3. Найти область определения функции

$$y = \frac{x-4}{3x+6} + \sqrt{9-x^2}.$$

$\triangle$ Для функции $f_1(x) = \frac{x-4}{3x+6}$ естественной областью определения является множество тех значений аргумента, для которых знаменатель дроби не обращается в нуль, т. е. $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$. Функция $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ определена на множестве тех значений x, для которых $9 - x^2 \geqslant 0$, т. е. $D_g = [-3; 3]$. Следовательно, $D(y) = D(f) \cap D(g) = [-3; -2) \cup (-2; 3]$.

Ответ. $D(y) = [-3; 2) \cup (-2; 3]$. $\blacktriangle$

$9 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \leqslant 0$



$\Leftrightarrow x \in [-3; 3]$

$\left\{\begin{array}{l} x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty) \\ x \in [-3; 3] \end{array}\right. \Leftrightarrow D(y) = [-3; -2) \cup (-2; 3]$

При аналитическом способе задания функция может быть задана *явно*, когда дано выражение y через x, т. е. формула имеет вид $y=f(x)$, *неявно*, когда x и y связаны между собой уравнением вида $F(x,y)=0$, а также *параметрически*, когда соответствующие друг другу значения x и y выражены через третью переменную величину t, называемую *параметром*.

Например, два равенства $x=2t$, $y=3t^2+4$ определяют параметрически через параметр t функцию $y=0{,}75x^2+4$.

1) явный: $y=f(x)$

2) неявный: $ax+by+c=0$, $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ $(b\neq 0)$

$xy-1=0$, $x\neq 0$ $\to$ $\boxed{y=\frac{1}{x}}$

3) параметрический: $\begin{cases} x=2t \\ y=3t^2+4 \end{cases}$ $t=\frac{x}{2}$

$$\boxed{y=3\cdot\frac{x^2}{4}+4}$$

Возможно задание функции разными аналитическими выражениями на различных участках. Например,

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2, & \text{если } x<-1, \\ 2x+1, & \text{если } -1\leqslant x<1, \\ 2-x^2, & \text{если } x\geqslant 1 \end{cases}$$ ✓

или *функция Дирихле*

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Кроме аналитического способа иногда функциональную зависимость задают парами чисел $(x,f(x))$, показывающих, что значению величины $x\in X$, ставится в соответствие число $f(x)$ из множества Y. При этом используют один из двух способов.

2) *Табличный* — указание значений функции от соответствующих значений аргумента. Способ применяется в тех случаях, когда область определения функции *дискретна*, т. е. состоит из конечного числа

определения функции *дискретна*, т. е. состоит из конечного числа значений. В виде таблиц записывают результаты экспериментального исследования каких-либо процессов. При этом способе значения независимой переменной выписываются в определенном порядке x_1, $x_2, \ldots, x_n$, а рядом с ними указываются соответствующие им значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Например,

x_1	x_2	x_3	x_4	...
y_1	y_2	y_3	y_4	...

Для значений аргумента, не содержащихся в таблице, значения функции обычно находят приближенно.

Этот способ задания функции дает возможность определить конкретные значения функции сразу, без каких-либо дополнительных вычислений, но не дает наглядного представления об изменении функции в зависимости от аргумента.

3) *Графический.* Графическим способом задания функции пользуются в тех случаях, когда он становится единственно доступным и наиболее удобным. Например, в технике, физике и т. д. Хотя этот способ является наглядным, однако он не позволяет точно определить числовые значения аргумента и функции, поскольку по чертежу значения y, отвечающие данным значениям x, находятся приближенно.

Графиком Γ_f *функции* $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy вида $(x, f(x))$, $x \in D(f)$.

Графиком функции может быть кривая, прямая или множество отдельных точек. Изображение графика функции на координатной плоскости дает наглядное представление о свойствах и поведении функции.

Не всякая кривая на плоскости является графиком некоторой функции. Для того чтобы кривая была графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы вертикальные прямые (т. е. прямые, заданные уравнением $x = x_0$) пересекали кривую не более чем в одной точке.