Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

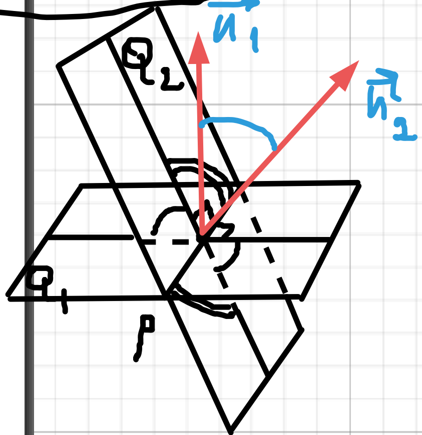
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Под ***углом между плоскостями*** Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов (см. рис. 72). Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$ или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$ ✓

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Если плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны (см. рис. 73, *а*), то таковы же их нормали, т. е. $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$,

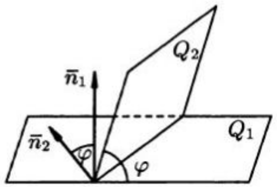
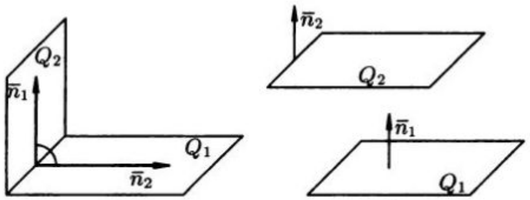


Рис. 72



а *б*

Рис. 73

т. е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Полученное равенство есть *условие перпендикулярности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны (см. рис. 73, *б*), то будут параллельны и их нормали $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда, как известно, координаты векторов пропорциональны: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. Это и есть *условие параллельности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

$Q_1 \perp Q_2$

$\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$

$(A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2)$

$A_1 = kA_2,\ B_1 = kB_2,\ C_1 = kC$

$k = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

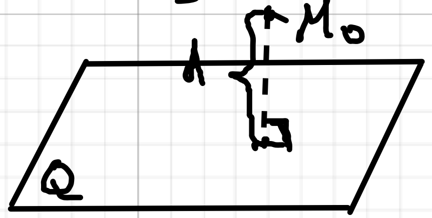
Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$ ✓

Вывод этой формулы такой же, как вывод формулы расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ [redacted].

$Q: Ax+By+Cz+D=0$ $\qquad\qquad$ $\alpha_1 \parallel \alpha_2$



[redacted] Найдите угол между плоскостями, заданными уравнениями $6x-7y-6z+11=0$ и $-2x+11y-10z-2=0$.

Решение: $\vec{n_1}(6; -7; -6)$ и $\vec{n_2}(-2; 11; -10)$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} = \frac{|-12-77+60|}{\sqrt{36+49+36}\cdot\sqrt{4+121+100}} =$$

$$= \frac{29}{\sqrt{}} \qquad\qquad \frac{29}{}$$

$\varphi =$

[redacted] Найдите расстояние от точки $A(4; -2; 7)$ до плоскости $4x+20y-5z+4=0$.

Решение: $d=\rho(A; \alpha) = \frac{|4\cdot 4+20\cdot(-2)-5\cdot 7+4|}{\sqrt{16+400+25}} =$

$$= \frac{|16-40-35+4|}{\sqrt{441}} = \frac{55}{21}$$ — ответ.

[redacted] Уравнения прямой в пространстве

Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_0 на прямой и вектор $\bar{S}$, параллельный этой прямой. Вектор $\bar{S}$ называется ***направляющим вектором прямой.*** Пусть прямая L задана ее точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{S} = (m; n; p)$. Возьмем на прямой L произвольную точку $M(x; y; z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$. Очевидно, что три вектора $\bar{r}_0$, $\bar{r}$ и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

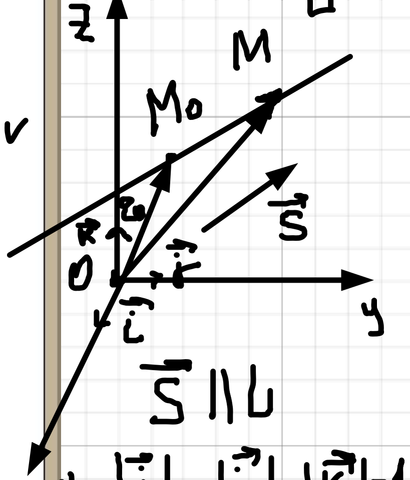
$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}. \tag{12.10}$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на прямой L, параллелен направляющему вектору $\bar{S}$, поэтому $\overline{M_0M} = t\bar{S}$, где t — скалярный множитель, называемый *параметром*, может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой (см. рис. 75).

Уравнение (12.10) можно записать в виде

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}.} \tag{12.11}$$

Полученное уравнение называется ***векторным уравнением прямой.***



$\vec{S} \parallel L$

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\bar{r} = (x; y; z)$, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\bar{S} = (tm; tn; tp)$, уравнение (12.11) можно записать в виде

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}}$$

Они называются *параметрическими уравнениями прямой* в пространстве.

$t\vec{S} = tm\vec{i} + tn\vec{j} + tp\vec{k}$

$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$

$t = \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

[redacted]

Канонические уравнения прямой

Пусть $\bar{S} = (m; n; p)$ — направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x; y; z)$ прямой L, параллелен вектору $\bar{S}$. Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и вектора $\bar{S} = (m; n; p)$ пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.} \tag{12.13}$$

Уравнения (12.13) называются ***каноническими уравнениями прямой*** в пространстве.

$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{S}$

$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$

Замечания: 1) Уравнения (12.13) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (12.12), исключив параметр t. Из уравнений (12.12) находим

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t.$$

2) Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (12.13) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2;-4;1)$ перпендикулярно оси Oz (проекция вектора $\bar{S}$ на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z = 1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z - 1 = 0$.

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$$

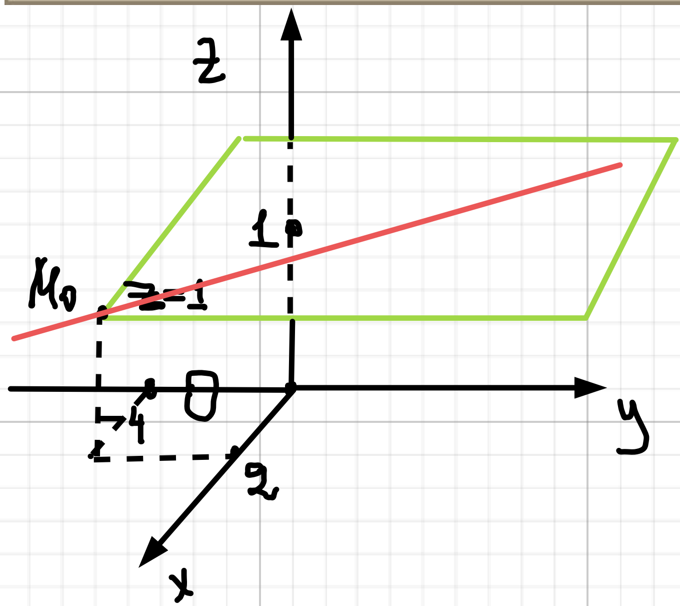
$$\frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

$\vec{S}(3;2;0)$

$z-1=t\cdot 0$

$z-1=0$

$z=1$



$z=1$

$0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z-1=0$

$\vec{n}(0;0;1)$

$d=-1$

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. В качестве направляющего вектора $\bar{S}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, т. е. $\bar{S} = \overline{M_1M_2}$ (см. рис. [redacted]). Следовательно, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, то, согласно уравнениям (12.13), уравнения прямой L имеют вид

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.} \qquad (12.14)$$

Уравнения (12.14) называются ***уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.***

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{12.15}$$

Каждое из уравнений этой системы определяет плоскость. Если плоскости не параллельны (координаты векторов $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не пропорциональны), то система (12.15) определяет прямую L как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы (см. рис. 77). Уравнения (12.15) называют *общими уравнениями прямой.*

От общих уравнений (12.15) можно перейти к каноническим уравнениям (12.13). Координаты точки M_0 на прямой L получаем из системы уравнений (12.15), придав одной из координат произвольное значение (например, $z = 0$).

Пример 12.1. Написать канонические уравнения прямой L, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Решение: Положим $z = 0$ и решим систему $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x - y = -5. \end{cases}$ Находим точку $M_1(-2; 1; 0) \in L$. Положим $y = 0$ и решим систему $\begin{cases} x - z = -1, \\ 2x - 3z = -5. \end{cases}$ Находим вторую точку $M_2(2; 0; 3)$ прямой L. Записываем уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

$3x = -6$

$x = -2$

$y = 1$

$$\begin{cases} -2x + 2z = 2 \\ 2x - 3z = -5 \end{cases}$$

$-z = -3$

$z = 3$

$x = 2$

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L уравнениями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ — угол между векторами $\bar{n} = (A; B; C)$ и $\bar{S} = (m; n; p)$ (см. рис. 80). Тогда $\cos\theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{S}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{S}|}$. Найдем синус угла φ, считая $\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$: $\sin\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$. И так как $\sin\varphi \geqslant 0$, получаем

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{12.17}$$

$\sin\varphi = \cos\theta$

Если *прямая L параллельна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ перпендикулярны (см. рис. 81), а потому $\bar{S} \cdot \bar{n} = 0$, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0$$

является ***условием параллельности*** прямой и плоскости.

$Q \parallel L$

$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$

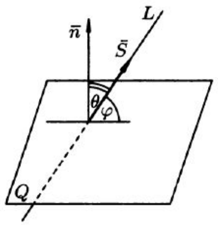


Рис. 80

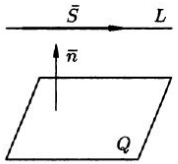


Рис. 81

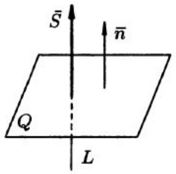


Рис. 82

Если *прямая L перпендикулярна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ параллельны (см. рис. 82). Поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$ ✓

являются ***условиями перпендикулярности*** прямой и плоскости.

$\vec{n} = t\vec{S}$

$Q \perp L$