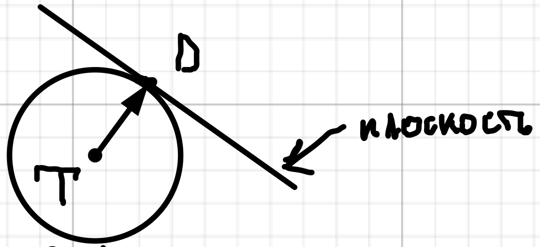
Задача [redacted] В пространстве заданы четыре точки: $A(3;\ 2;\ 1)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 4)$, $D(-1;\ 0;\ 1)$.

1. Составьте: а) параметрические уравнения прямой BC; б) уравнение плоскости ABC; в) уравнение сферы, диаметром которой является отрезок AD; г) уравнение плоскости, касающейся этой сферы в точке D.

2. Определите взаимное расположение прямой BC и этой сферы.

3. Найдите расстояние между прямыми BC и AD.

Решение: 2)



$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$T(1;1;1),\quad \overrightarrow{TD}(-2;-1;0)$$

$$-2(x+1)-y=0,\quad -2x-2-y=0$$

$$\boxed{2x+y+2=0}$$

2) $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=4-4t \end{cases}$ $t\in R$ ур-ие BC

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5,\quad R=\sqrt{5}$$

$$(t-1)^2+(t-1)^2+(3-4t)^2=5 \Leftrightarrow t^2-2t+1+t^2-2t+1+9-24t+16t^2=5$$

$$18t^2-28t+6=0,\quad 9t^2-14t+3=0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{22}}{9}$$

$\hookrightarrow$ 2 точки пересечения!

3) $\overrightarrow{BC}(1;1;-4)$ $\quad \vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$ $\quad , \vec{n}(x;y;z)$

$\overrightarrow{AD}(-4;-2;0)$ $\quad \vec{n} \perp \overrightarrow{AD}$

$$\begin{cases} x+y-4z=0 \\ -4x-2y=0 \end{cases} \qquad z=1$$

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ -2x-y=0 \end{cases}$$

$$+ \quad \overline{-x-4=0}$$

$x=-4$

$y=8$ $\qquad \vec{n}(-4;8;1)$

$\overrightarrow{CD}(-1;0;-3)$

$$\rho(BC, AD) = \left|\Pi p_{\vec{n}} \overrightarrow{CD}\right| = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|4-3|}{\sqrt{16+64+1}} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

Первообразная и неопределенный интеграл. В дифференциальном исчислении мы решали задачу нахождения производной или дифференциала заданной функции. В математике и ее приложениях часто приходится решать обратную задачу: по заданной производной находить новую функцию, производная которой равна заданной функции. Например, если нам известна скорость $v=v(t)$, $t \in [a;\ b]$, прямолинейного движения материальной точки, а мы должны узнать путь s, пройденный этой точкой, то, зная, что $\frac{ds}{dt}=v$, мы как раз должны будем по заданной производной $\frac{ds}{dt}=v(t)$ найти функцию s. Нахождение функции по

$$s'(t) = v = \frac{ds}{dt}$$

$s = s(t)$

ее производной или дифференциалу рассматривается в интегральном исчислении. Функцию, восстанавливаемую по заданной ее производной или дифференциалу, называют первообразной.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, для функции $f(x) = 3x^2$, $x \in \mathbf{R}$, первообразной во всех точках действительной оси будет функция $F(x) = x^3$, так как $F'(x) = 3x^2 = f(x)$ для каждого $x \in \mathbf{R}$. Заметим, что $F_1(x) = x^3 + 1$, или $F_2(x) = x^3 - 5$, или, вообще, $F_3(x) = x^3 + C$, где C — произвольная константа, также являются первообразными для функции $f(x) = 3x^2$, $x \in \mathbf{R}$, так как эти функции имеют одну и ту же производную, равную $3x^2$.

$s = s(t)$

$(x^3 + C)' =$
$= (x^3)' + C' =$
$= 3x^2$

Таким образом, функция $f(x) = 3x^2$, $x \in \mathbf{R}$, имеет бесконечное множество первообразных. Следующая теорема показывает, как найти все первообразные заданной функции, зная одну из них.

Теорема. *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции f на этом промежутке задается формулой $F(x) + C$, $C \in \mathbf{R}$.*

□ Любая функция вида $F(x) + C$, где C — некоторая постоянная, является первообразной для $f(x)$. Действительно,

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Докажем теперь, что любая первообразная для f представима в виде $F(x) + C$, где C — некоторое число.

Пусть $\Phi(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$ и покажем, что она является постоянной.

Пусть x_1 и x_2 — две произвольные точки рассматриваемого промежутка и пусть, например, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа найдется точка $c \in (x_1; x_2)$ такая, что

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(c)(x_2 - x_1).$$

Так как $\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ для всех x и, в частности, $\varphi'(c) = 0$, то $\varphi(x_2) = \varphi(x_1)$. Итак, $\varphi(x_2) = \varphi(x_1)$ для любых x_1 и x_2. Следовательно, $\varphi(x) = C$, где C — некоторое число, т. е.

$$\Phi(x) = F(x) + C. \blacksquare$$

Из доказанной теоремы следует, что графики первообразных функции $y = f(x)$ получаются из графика какой-нибудь одной первообразной $F(x)$ параллельным переносом графика функции $y = F(x)$ вдоль оси ординат.

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ первообразные для непрерывной функции $f(x)$ на промежутке L. То есть на этом промежутке $F'(x) =$

$= G'(x) = f(x)$. Разность функций $F(x)$ и $G(x)$ является первообразной для разности их производных, которая равна нулю: $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Значит, разность функций $F(x) - G(x)$ постоянна, а это позволяет сделать вывод о том, что

любые две первообразные одной функции отличаются на константу:

$F(x) = G(x) + C$, где C — константа.

Графики первообразных получаются один из другого сдвигом вдоль оси ординат (рис. 98).

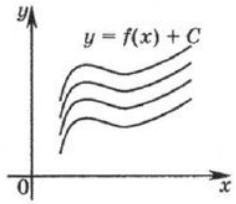


Рис. 98

Пример ■ Найти первообразную функции $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, график которой проходит через точку $M(-1; 4)$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна при всех x, кроме $x = 0$, поэтому она имеет первообразную либо на промежутке $(-\infty; 0)$, либо на промежутке $(0; +\infty)$. Однако отрицательность абсциссы точки M говорит о том, что речь идет о промежутке $(-\infty; 0)$.

Поскольку $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2} = (-1) \cdot x^{-1-1} = (x^{-1})'$, то $G(x) = x^{-1}$ является одной из первообразных функции f.

Пусть $F(x)$ — искомая первообразная, тогда, во-первых, $F(x) = x^{-1} + C$, и, во-вторых, из условия принадлежности точки M ее графику: $F(-1) = 4$. Имеем: $(-1)^{-1} + C = 4$, $C = 5$ и, наконец, $F(x) = x^{-1} + 5$.

Ответ: $F(x) = x^{-1} + 5$, где $x < 0$.

$(x^n)' =$
$= n x^{n-1}$

Пример. Для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$, найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(2; 2)$.

△ Так как при всех $x \in (0; +\infty)$ верно равенство $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то $\ln x$ — одна из первообразных функции $f(x) = \frac{1}{x}$. По доказанной теореме искомая первообразная $F(x)$ должна иметь вид $F(x) = \ln x + C$, где C — некоторая постоянная. Постоянную C находим из условия $F(2) = 2$, т. е. $\ln 2 + C = 2$, откуда $C = 2 - \ln 2$. Следовательно,

$$F(x) = \ln x + 2 - \ln 2 = \ln \frac{x}{2} + 2. \ ▲$$

Определение ■ Множество всех первообразных функции $f(x)$ на некотором промежутке называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Этот символ читается так: «интеграл от $f(x)$ по dx». Таким образом, согласно определению,

$$\int f(x)\,dx = \{F(x)+C\}, \qquad (2)$$

где $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная. Формулу (2) принято записывать без фигурных скобок, опуская обозначение множества

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*.

Нахождение функции по ее производной или по ее дифференциалу называется *интегрированием функции*. Интегрирование — действие, обратное дифференцированию. Правильность интегрирования можно проверить дифференцированием. Например,

$$\int (2x+3)\,dx = x^2+3x+C,$$

так как

$$(x^2+3x+C)' = 2x+3.$$

Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, или $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$.

$\alpha = \alpha(x)$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x) = 0$

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x)\cdot\Delta x$ и $\alpha\cdot\Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x\to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f'(x)\neq 0$, а второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha = 0.$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x)\cdot\Delta x$ называют ***главной частью приращения*** функции Δy.

Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x. \qquad (24.1)$$

Дифференциал dy называют также ***дифференциалом первого порядка***. Найдем дифференциал независимой переменной x, т. е. дифференциал функции $y=x$.

Так как $y' = x' = 1$, то, согласно формуле (24.1), имеем $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (24.1) можно записать так:

$$\boxed{dy = f'(x)dx,} \qquad (24.2)$$

иными словами, ***дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.***

Из формулы (24.2) следует равенство $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Теперь обозначение производной $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов dy и dx.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx}$$

[redacted] Геометрический смысл дифференциала функции

Выясним геометрический смысл дифференциала.

Для этого проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x + \Delta x$ (см. рис. 138). На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MAB имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}, \text{ т. е. } |AB| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x.$$

Но, согласно геометрическому смыслу производной, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Поэтому $AB = f'(x) \cdot \Delta x$.

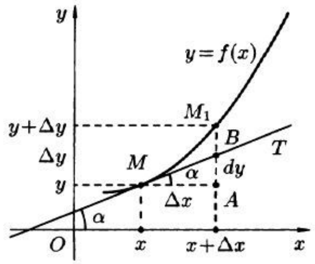


Рис. 138

$$\Delta y = AB + BM_1 =$$
$$= dy + \alpha \cdot \Delta x$$

Сравнивая полученный результат с формулой (24.1), получаем $dy = AB$, т. е. ***дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.***

В этом и состоит геометрический смысл дифференциала.

■ Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \qquad (1)$$

□ Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, тогда, по определению,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)\,dx$. Следовательно,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)\,dx. \blacksquare$$

2. Если $f(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C, \quad \int df(x) = f(x) + C. \qquad (2)$$

□ Так как $df(x) = f'(x)\,dx$ и f является первообразной для своей производной f', то

$$\int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C. \blacksquare$$

3. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то при $a \neq 0$ верно равенство

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Это свойство означает, что постоянный отличный от нуля множитель можно выносить за знак интеграла.

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные, то

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \qquad (4)$$

Это свойство означает, что интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций.

Доказательство свойств 3 и 4 аналогично доказательству первых двух свойств.

Формула (4) естественным образом обобщается на случай суммы n $(n>2)$ функций.

Пример. Найти $\int (2\sin x + 3e^{-x})\,dx$.

$\triangle$ Согласно свойствам 4 и 3 неопределенного интеграла получаем

$$\int (2\sin x + 3e^{-x})\,dx = \int 2\sin x\,dx + \int 3e^{-x}\,dx =$$
$$= 2\int \sin x\,dx + 3\int e^{-x}\,dx = \underline{-2\cos x} - \underline{3e^{-x}} + \underline{C}.$$

$C_1 + C_2 = C$

Последнее равенство следует из известных формул:

$$(-\cos x)' = \sin x \text{ и } (-e^{-x})' = e^{-x}. \blacktriangle$$

$$C' = 0 \quad \text{для любой константы } C \in \mathbb{R},$$

$$x' = 1, \qquad (x^a)' = ax^{a-1},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

Таблица неопределенных интегралов. Из определения интеграла следует, что всякая формула для производной конкретной функции, т. е. формула вида

$$F'(x) = f(x),$$

может быть записана в виде интегральной формулы:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Используя это соображение и таблицу производных, составим таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int 0\,dx = C$, C — константа.
2. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad a \neq 0.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln | x + \sqrt{x^2 - a^2} | + C, \quad a \neq 0.$

Каждая из формул 1—13 справедлива на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции. Справедливость каждой из приведенных формул можно установить дифференцированием.

Проверим, например, формулу 3.

Здесь надо рассмотреть два случая.

1) Пусть $x > 0$; тогда $|x| = x$ и формула 3 примет вид

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Дифференцируя, получим

$$(\ln x + C)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

2) Пусть $x < 0$; тогда $|x| = -x$ и формула 3 имеет вид

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

Дифференцируя, будем иметь

$$(\ln(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

Интегралы, приведенные в рассмотренной выше таблице, получили название *табличных интегралов*.