Напомним, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox, равна определенному интегралу

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, принимающей только неположительные значения, двумя вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ и осью Ox (см. рис. 5). Составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k.$$

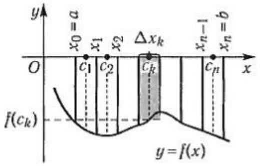


Рис. 5

В приведенной сумме k-е слагаемое $f(c_k)\cdot\Delta x_k$ по модулю равно площади прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $-f(c_k)$, $k=1,\dots,n$. Поэтому интегральная сумма σ_n, взятая со знаком минус, численно равна площади соответствующей ступенчатой фигуры, т. е. число, равное $-\int_a^b f(x)dx$, совпадает с площадью рассматриваемой фигуры. Следовательно, если $f(x)\leqslant 0$ для всех $x\in[a;b]$, то число, равное $\int_a^b f(x)dx$, представляет собой величину площади S между графиком функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и осью Ox, взятую со знаком минус, т. е. $\int_a^b f(x)dx = -S$.

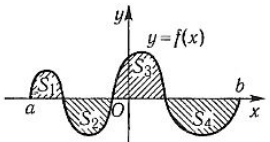
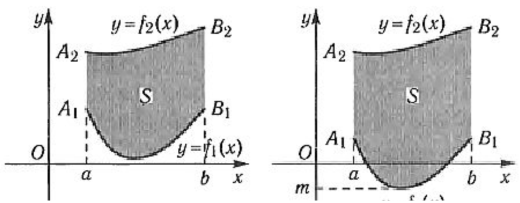


Рис. 6

Рассмотрим теперь фигуру, ограниченную на отрезке $[a;b]$ осью Ox и графиком непрерывной функции $y=f(x)$, принимающей как положительные, так и отрицательные значения (рис. 6). Тогда число, равное $\int_a^b f(x)dx$, совпадает с величиной, равной сумме площадей фигур между графиком функции $y=f(x)$, $x\in[a;b]$, и осью Ox, лежащих выше оси Ox, минус сумма площадей фигур между графиком функции $y=f(x)$, $x\in[a;b]$, и осью Ox, лежащих ниже оси Ox. Например, для функции $y=f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, график которой изображен на рис. 6, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = (S_1+S_3)-(S_2+S_4).$$



а) б)

Рис. 10

функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ (рис. 10, a). Площадь данной фигуры равна разности площадей двух криволинейных трапеций aA_2B_2b и aA_1B_1b, т. е.

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

[redacted] утверждение, справедливое в общем случае (функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не обязательно неотрицательны).

Площадь S фигуры, координаты точек которой удовлетворяют неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, $f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — заданные непрерывные функции, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (2)$$

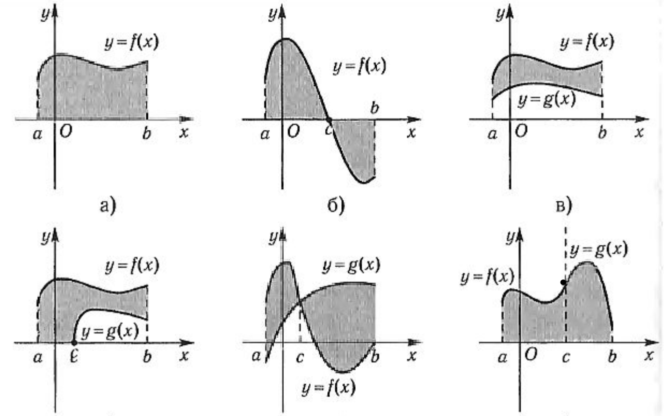


Рис. 12

△ а) $S = \int_a^b f(x)dx$;

б) $S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$;

в) $S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

г) $S = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b g(x)dx$ или $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b (f(x) - g(x))\,dx$;

д) $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$;

е) $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$. ▲

$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))\,dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\,dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

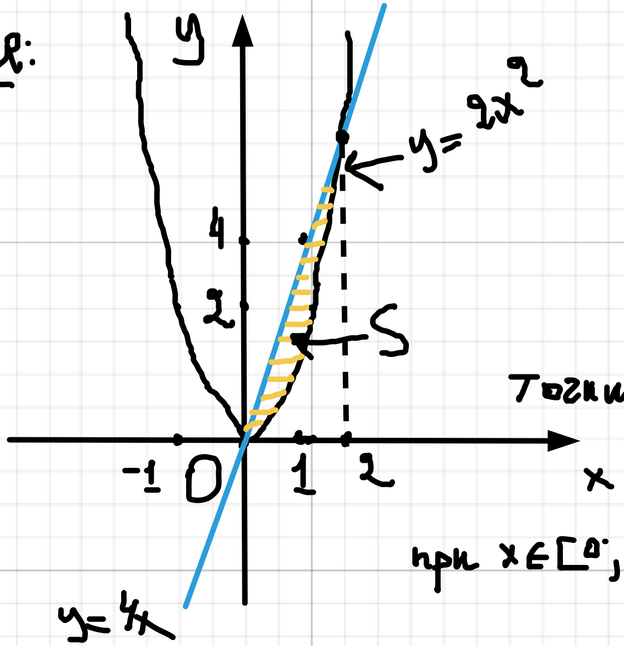
$$y = h(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq c \\ g(x), & c \leq x \leq b \end{cases}$$

$$h(c) = f(c) = g(c)$$

$y(x), c \le x \le b$

Пример [redacted] Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$ и $y = 4x$. $\to k = 4$

Решение:



$2x^2 = 4x \quad | : 2$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x_1 = 0$ и $x_2 = 2$

Точки пересечения:

$(0;0)$ и $(2;8)$

при $x \in [0;2]$, $4x \geqslant 2x$

$$S = \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx = \left(\frac{4x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(8 - \frac{16}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{24-16}{3} = \frac{8}{3}$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

[redacted] **Объем тела вращения.** Пусть Γ есть график непрерывной положительной функции $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ в прямоугольной системе координат xOy. Вычислим объем V тела вращения, ограниченного поверхностью вращения кривой Γ вокруг оси x и плоскостями, проходящими через точки $x = a$, $x = b$ перпендикулярно оси x (рис. 163). Произведем разбиение отрезка $[a; b]$ на части

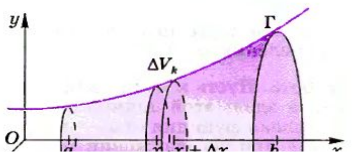


Рис. 163

точками: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — и будем считать, что элемент объема ΔV_k тела вращения, ограниченный плоскостями, проходящими через точки x_k и x_{k+1} перпендикулярно оси x, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса основания $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \Delta x_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k.$$

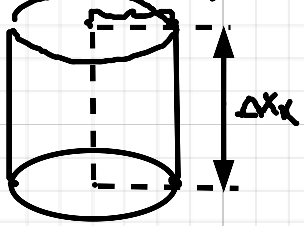
Но тогда объем V может быть записан при помощи приближенного равенства $V \approx \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k$. Чтобы получить точное равенство, надо взять предел

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

и мы получим формулу для объема тела вращения

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx. \qquad (1)$$

$z = f(x_k)$



$S_{осн} = \pi r^2 = \pi f^2(x_k)$

$\Delta V_k = \pi r^2 H = \pi f^2(x_k) \cdot \Delta k$

$\pi f^2(x) = S(x)$

В качестве примера применения формулы (1) докажем, что объем V шара радиуса R равен

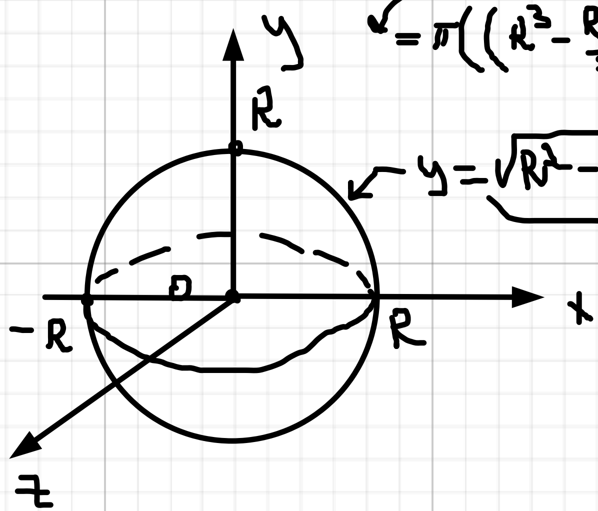
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

В самом деле, окружность радиуса R в плоскости xOy имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Тогда функция $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \leqslant x \leqslant R)$ имеет графиком верхнюю полуокружность Г.

Если вращать полуокружность Г вокруг оси Ox, то получим поверхность шара. Но тогда согласно формуле (1) объем шара

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

$$= \pi\left(\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right) = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \pi\left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right)$$



$y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

[redacted] Используя формулу объема тела вращения, получите формулы для вычисления объемов цилиндра и конуса.

Решение. 1) Пусть дан цилиндр, радиус основания которого R, а высота H. Зададим систему координат xOy так, чтобы центрам оснований цилиндра соответствовали точки оси Ox: $x = 0$ и $x = H$ (рис. 79, *а*). Тогда функция $y = R$ задает прямую, вращением которой вокруг оси Ox образуется боковая поверхность цилиндра. Вычислим объем тела вращения по формуле $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$. В нашем примере $a = 0$ и $b = H$, $f(x) = R$, поэтому

$$V = \pi\int\limits_0^H R^2\,dx = \pi R^2 x\Big|_0^H = \pi R^2 H - 0 = \pi R^2 H. \checkmark$$

2) Пусть дан конус, радиус основания которого R, а высота H. Зададим систему координат xOy так, чтобы вершине и центру основания конуса соответствовали точки оси Ox: $x = 0$ и $x = H$ (рис. 79, *б*). Тогда функция $y = \frac{R}{H}x$ задает прямую, вращением которой вокруг оси Ox образуется боковая поверхность конуса. Вычислим объем тела

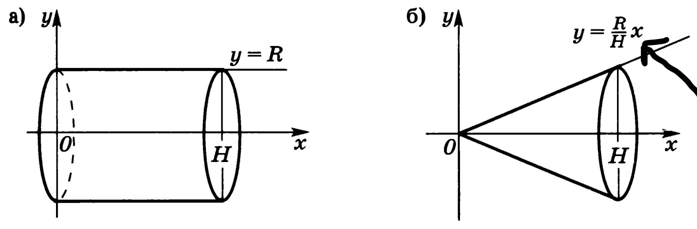


Рис. 79

$y = kx$

$R = k \cdot H$

$k = \frac{R}{H}$

вращения по формуле $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$. В нашем примере $a = 0$ и $b = H$, $\underline{f(x) = \frac{R}{H}x}$, поэтому

$$V = \pi\int\limits_0^H \frac{R^2}{H^2}x^2\,dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\int\limits_0^H x^2\,dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^H =$$

$$= \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^3 - 0}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \checkmark$$

[redacted] Множество точек координатной плоскости xOy, удовлетворяющих уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \neq b)$, называют эллипсом.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной эллипсом:

а) $x^2 + 9y^2 = 9$ (рис. 167); б) $4x^2 + y^2 = 4$ (рис. 168).

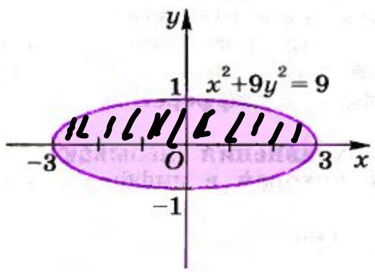


Рис. 167

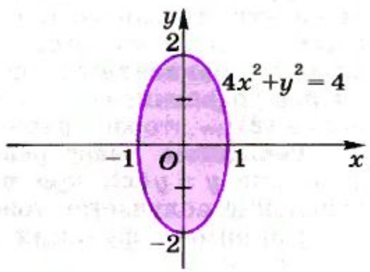


Рис. 168

Решение: а) площадь

$$x^2+9y^2=9, \qquad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1 \text{ - эллипс!}$$

$$a=3,\ b=1$$

$$y^2=1-\frac{x^2}{9} \rightarrow y=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2},\quad \underline{y\geq 0}$$

$$S=2\int_{-3}^{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx=2\int_{-3}^{3}\sqrt{\frac{1}{9}(9-x^2)}\,dx=$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C.$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{3}=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{3\cdot 0}{2}\right)-\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{-\pi}{2}-\frac{3\cdot 0}{2}\right)\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{9\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9\pi}{2}=3\pi$$

б) объем $\quad y=f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}$

$$=\pi\int^{3}\left(\ldots\right)^2dx=\frac{\pi}{9}\int^{3}\left(9-x^2\right)dx=$$

$$V = \frac{\pi}{3} \int_{-3} \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{3} \int_{-3} (9 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(9x - \frac{x^3}{3}\right) \Bigg|_{-3}^{3} = \frac{\pi}{3} \Big((27 - 9) - (-27 + 9) \Big) =$$

$$= \frac{\pi}{3} (18 + 18) = 12\pi.$$