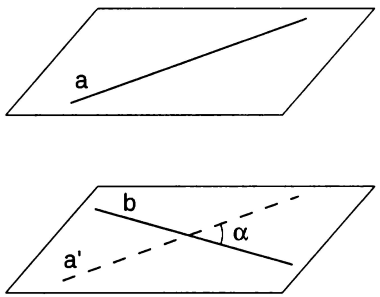
Скрещивающиеся прямые

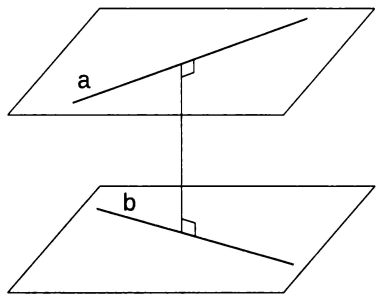
Прямые, которые не лежат в одной плоскости и не пересекаются называются *скрещивающимися.*

Угол между скрещивающимися прямыми определяется как угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку.

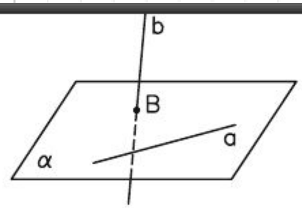
Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на этих прямых, перпендикулярный к ним (такой отрезок существует и притом только один).

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра (оно же является и расстоянием между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые).



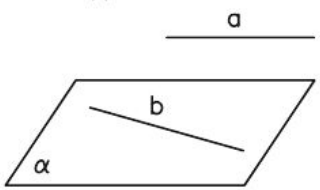


лежащие в одной плоскости.



Признак скрещивающихся прямых: если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то такие прямые являются скрещивающимися.

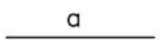
Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.



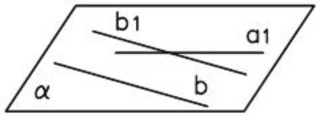
a и b — скрещивающиеся прямые, прямая b принадлежит плоскости α, прямая a параллельна плоскости α.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися параллельными им прямыми. Этот угол не зависит от того, какие пересекающиеся прямые взяты *(см. угол между прямыми на плоскости).*

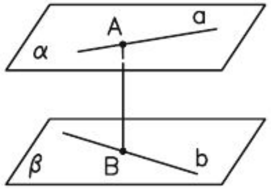
a и b — скрещивающиеся прямые, $a \| a_1$; $b \| b_1$, пря-



мые a_1 и b_1 пересекаются, угол между прямыми a_1 и b_1 равен углу между прямыми a и b.



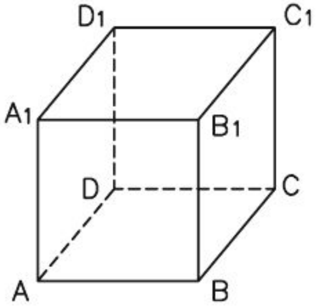
Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них. Длина этого перпендикуляра является расстоянием между скрещивающимися прямыми. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.



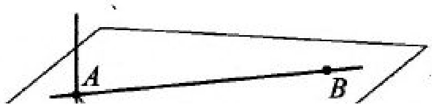
a и b — скрещивающиеся прямые; $\alpha \parallel \beta$; AB — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых a и b. Длина отрезка AB — расстояние между скрещивающимися прямыми a и b.

Наглядно представить скрещивающиеся прямые легко с помощью куба:

Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; ребра AB и CC_1; BC и AA_1; AD и BB_1 и т.д. лежат на скрещивающихся прямых.



Пусть имеются две скрещивающиеся прямые AB и CD (см. рис. 19). Необходимо найти расстояние между ними. Как известно, в этом случае существуют две параллельные плоскости, содержащие эти прямые. Эти плоскости для наглядности изображены на рисунке. Вектор $\vec{n}$ — произвольный вектор, который перпендикулярен обеим прямым, а следовательно, и обеим этим плоскостям. Видно, что искомое расстояние между прямыми AB и CD равно AH и представляет собой длину проекции вектора AC на вектор $\vec{n}$. Легко понять, что вместо вектора $\overrightarrow{AC}$ можно взять любой вектор, начало которого лежит на одной прямой, а конец — на другой.



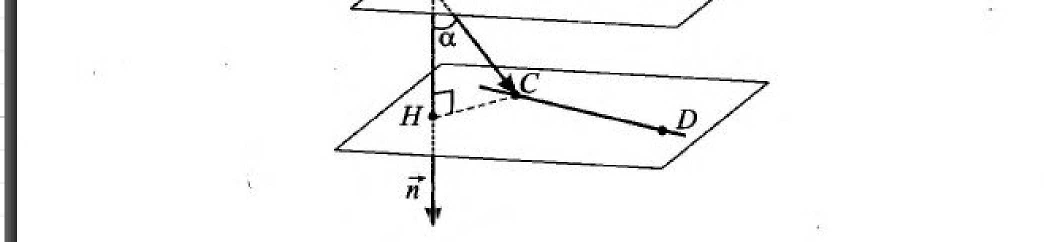
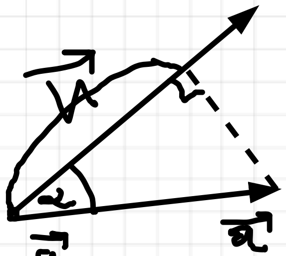


Рис. 19

1) вводим □XYZ ↪ коорд. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$

2) $\vec{n}(x;y;z)$ $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0 \\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}= \end{cases}$



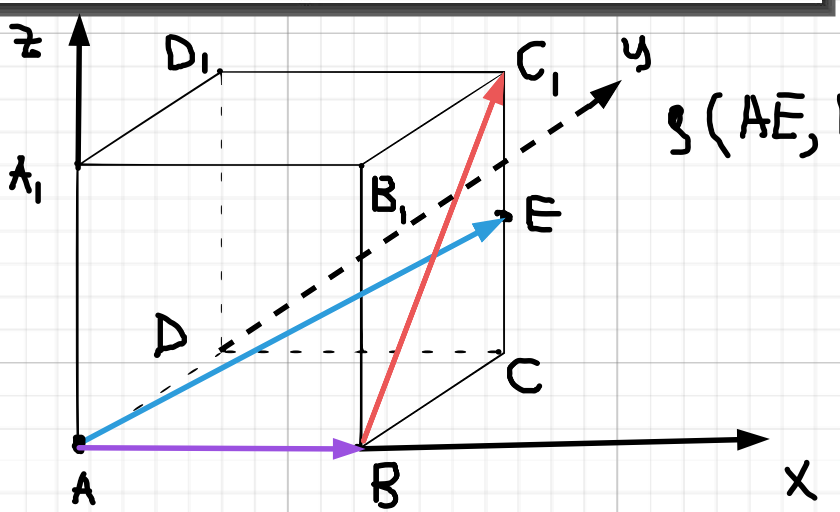
3) $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $|\Pi p_{\vec{n}}\vec{a}|$

$$\vec{n}\cdot\vec{a} = |\vec{n}|\cdot\underbrace{|\vec{a}|\cos\alpha} = |\vec{n}|\cdot\Pi p_{\vec{n}}\vec{a}$$

$$|\Pi p_{\vec{n}}\vec{a}| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|} = \rho(AB, CD) = AH$$

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AE и BC_1, где E — середина ребра CC_1.

Решение:



$\rho(AE, BC_1)=?$

$A(0;0;0)$

$B(1;0;0)$

$C_1(1;1;1)$

$E(1;1;\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{AE}(1;1;\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{BC_1}(0;1;1)$

$\vec{n}(x;y;z) \longrightarrow \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+y+\frac{z}{2}=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

пусть $x=1$ $\quad \begin{cases} 1+y+\frac{z}{2}=0 \\ y+z=0 \end{cases}$, $y=-z$

$1-z+\frac{z}{2}=0$, $-\frac{z}{2}=-1$, $z=2$, $y=-2$

$\vec{n}(1;-2;2)$

$\overrightarrow{AB}(1;0;0)$

$$\rho(AE, BC_1)=\left|\text{Пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{AB}\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}|}=$$

$$=\frac{|1\cdot 1+0\cdot(-2)+0\cdot 2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

Задача [redacted] В пространстве заданы четыре точки: $A(3;2;1)$, $B(1;1;0)$, $C(0;0;4)$, $D(-1;0;1)$.

1. Составьте: а) параметрические уравнения прямой BC;

б) уравнение плоскости ABC; в) уравнение сферы, диаметром которой является отрезок AD; г) уравнение плоскости, касающейся этой сферы в точке D.

2. Определите взаимное расположение прямой BC и этой сферы.

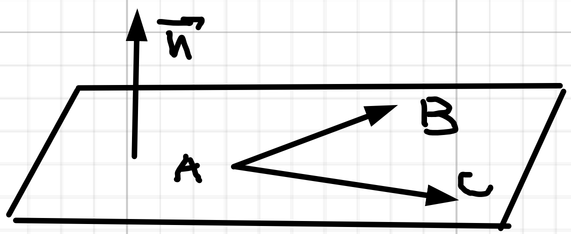
3. Найдите расстояние между прямыми BC и AD.

Решение:

1а) BC: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}=t$

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-4}=t \hookrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z-4=-4t \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=4-4t \end{cases}, \quad \underline{t\in R}$$

1б) ABC: $\vec{AB}(-2;-1;-1)$
$\vec{AC}(-3;-2;3)$



$\vec{n}(x;y;z)$ $\quad \begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \\ \vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -2x-y-z=0 \\ -3x-2y+3z=0 \end{cases}$

$y=1$ $\quad \begin{cases} -2x-1-z=0 \\ -3x-2+3z=0 \end{cases} \Big| 3 \Big| \quad + \begin{cases} -6x- \quad -3z=0 \\ -3x-2+3z=0 \end{cases}$

$-9x-5=0$

$-3\cdot\frac{5}{9}-2+3z=0$ $\qquad x=\frac{5}{9}$

$\frac{5}{3}-2=-3z$

$-\frac{1}{3}=-3z\ ,\ z=+\frac{1}{9}$

$\vec{n}_0\left(-\frac{5}{9};1;+\frac{1}{9}\right)$, $\vec{n}=9\vec{n}_0=(-5;9;1)$

$-5x+9y+z+d=0$, $C(0;0;4)$

$4+d=0 \qquad d=-4 \rightarrow \boxed{5x-9y-z+4=0}$

$D(-1;0;1)$ $\qquad 5\cdot(-1)-1+4=-5-1+4=-2\neq0$

$D\notin(ABC)$

1e) $AB=\sqrt{(3+1)^2+(2-0)^2+(1-1)^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

$A(3;2;1)$ $\qquad R=\sqrt{5}$

$O\left(\frac{3-1}{2};\frac{2+0}{2};\frac{1+1}{2}\right)$

$O(1;1;1)$

$$\boxed{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5}$$