1. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{x+5} = 6^x$.

2. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков. Ответ округлите до сотых.

3. Стороны AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 75°, 63°, 93°, 129° (см. рис. 1). Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.

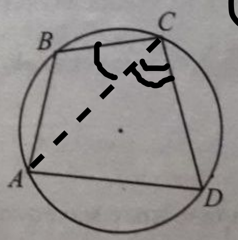


Рис. 1

3. $\angle BCA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BA} = \frac{75^\circ}{2} = 37{,}5^\circ$

$\angle ACD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} = \frac{129^\circ}{2} = 64{,}5^\circ$

$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = \underline{102^\circ}$

ответ.

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) = g(x)$

$a>0,\ a\neq 1$

$\frac{1}{6} = 6^{-1}$, $\left(6^{-1}\right)^{x+5} = 6^x \Longleftarrow 6^{-(x+5)} = 6^x \Longleftrightarrow -x-5 = x \to x = -\frac{5}{2} = \underline{-2{,}5}$.

2.

Некоторое событие называют *случайным по отношению к данному опыту* (испытанию), если при осуществлении этого опыта оно либо происходит, либо не происходит. Считается, что событие A произошло (наступило), если результатом случайного опыта явился какой-либо из элементарных исходов, входящих в подмножество события $A \subset \Omega$.

Достоверное событие U — событие, которое обязательно наступает в результате данного опыта ($U = \Omega$).

Невозможное событие $\varnothing$ — событие, которое заведомо не может произойти в результате данного опыта.

Пусть, например, в урне находятся только черные шары, а опыт заключается в извлечении шара из урны. Тогда событие «извлечен черный шар» является достоверным, а событие «извлечен белый шар» — невозможным.

При одном бросании игральной кости тот факт, что выпадает одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, — достоверное событие, так как при бросании кости оно обязательно произойдет, а выпадение, например, числа 7 является невозможным событием.

Например, при одном бросании правильной шестигранной игральной кости: *элементарный исход* (*событие*) $\omega_i = \{$выпало i очков$\}$; *неэлементарное событие*, например событие $A = \{$выпало четное число$\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$; *множество элементарных событий* этого опыта $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ состоит из шести элементов, т. е. $N(\Omega) = 6$.

Правило произведения

Если один из элементов комбинации можно выбрать n способами, каждому из которых соответствует m возможностей выбрать другой, то существует nm способов выбора этих двух элементов.

$(n; m)$

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для A исходов к числу всех равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию A.

Противоположные события

Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1; \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Объединение несовместных событий

Два события A и B называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A, так и событию B.

Событие C называют объединением событий A и B (пишут $C = A \cup B$), если событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Пересечение независимых событий

Два события A и B называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Событие C называют пересечением событий A и B (пишут $C = A \cap B$), если событие C означает, что произошли оба события A и B.

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

$(6;1)\ (6;2)\ (6;3)\ (6;4)\ (6;5)\ (6;6)$

$m\cdot n = 6\cdot 6 = 36$

$A = \{(1;4),\ (2;3),\ (3;2),\ (4;1)\}$

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}1(1) \approx 0{,}11.$

4. Найдите значение выражения $11\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{7\pi}{6}\cdot\cos\frac{4\pi}{3}$ $= 11\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = 11\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 11\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot -\frac{1}{2} = \boxed{-5{,}5}.$

5. Площадь поверхности куба равна 72 (см. рис. 2, с. 11). Найдите его диагональ.

6. На рисунке 3 (см. с. 11) изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

7. При температуре $0\,^\circ C$ рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина,

5. $S_{пов} = 6a^2 = 72$

$a^2 = 12,\quad a = 2\sqrt{3}$

$d = a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$

ответ

Вариант № 1

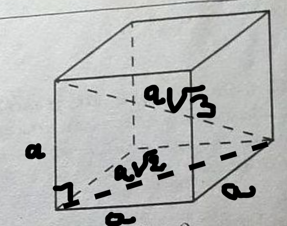


Рис. 2

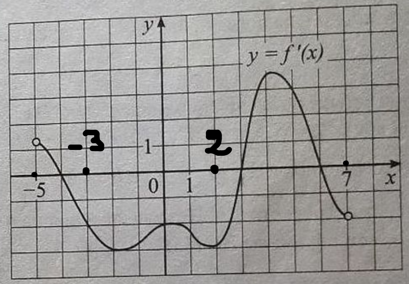


Рис. 3

$f'(x) < 0,\ x\in(-4;3),\ f(x)\searrow$

Ответ: 2.

выраженная в метрах, меняется по закону $l(t_0) = l_0(1+\alpha\cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}(^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Решение: $l(t) = 10м + 0{,}003м = 10{,}003\ м$

$10{,}003 = 10(1+1{,}2\cdot 10^{-5}\cdot t) \Leftrightarrow 10{,}003 = 10 + 1{,}2\cdot 10^{-4}t$

$1{,}2\cdot 10^{-4}t = 0{,}003 \quad |\cdot 10^4$

$12\cdot t = 30$

$t = \frac{30}{1,2} = \frac{300}{12} = \frac{150}{6} = \frac{50}{2} = 25$ Ответ: 25.

8. Из двух городов A и B, расстояние между которыми равно 360 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 3 часа на расстоянии 135 км от города B. За сколько часов автомобиль, выехавший из города A, доедет до города B?

9. График функции $y = \frac{k}{x} + b$ проходит через точки $(6;\ 8)$ и $(-2;\ 12)$. Найдите b.

8. $360 - 135 = 225$ км $\to$ $v_A = \frac{225}{3} = 75$ км/ч

$t = \frac{S}{v_A} = \frac{360}{75} = \frac{72}{15} = \frac{24}{5} = 4,8$ часа

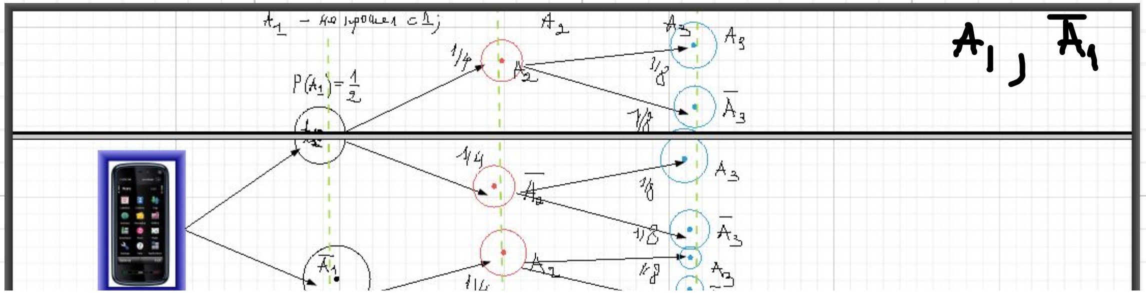
Ответ: 4,8.

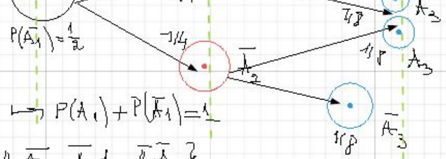
9. $\begin{cases} 8 = \frac{k}{6} + b \\ 12 = \frac{k}{-2} + b \end{cases}$ $\to b = 8 - \frac{k}{6}$; $\to b = 12 + \frac{k}{2}$ $\to 8 - \frac{k}{6} = 12 + \frac{k}{2}$ $|\ 6$

$48 - k = 72 + 3k \to 4k = -24 \to k = -6$

$b = 8 - \frac{-6}{6} = 9$ Ответ: 9.

10. Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи он делает следующую попытку. Вероятность того, что SMS-сообщение удастся передать без ошибок, в ходе каждой отдельной попытки равна 0,5. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше трёх попыток.





$\Omega_1=\{A_1,\bar{A}_1\} \mapsto P(A_1)+P(\bar{A}_1)=1$

$\Omega_2=\{A_1A_2,\ A_1\bar{A}_2,\ \bar{A}_1A_2,\ \bar{A}_1\bar{A}_2\}$

$$P(A_1A_2)+P(A_1\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=$$
$$=P(A_1)P(A_2)+P(A_1)P(\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1)P(A_2)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot 4=1$$

$\Omega_3=\{A_1A_2A_3,\ A_1A_2\bar{A}_3,\ A_1\bar{A}_2A_3,\ A_1\bar{A}_2\bar{A}_3,\ \bar{A}_1A_2A_3,\ \bar{A}_1A_2\bar{A}_3,\ \bar{A}_1\bar{A}_2A_3,\ \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\}$

$P(\Omega_3)=1=8\cdot\frac{1}{8}=1$

$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, $P=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

$$\Sigma=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=$$
$$\frac{4+2+1}{8}=\frac{7}{8}=0{,}875$$

Ответ: 0,875.

11. Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+6)-4x+11$.

12. а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{3}\sin(2\pi+x)$.

б) Найдите корни данного уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-3\pi\right]$.

14. Решите неравенство $7\log_{12}(x^2-2x-8)\leqslant 8+\log_{12}\frac{(x+2)^7}{x-4}$.