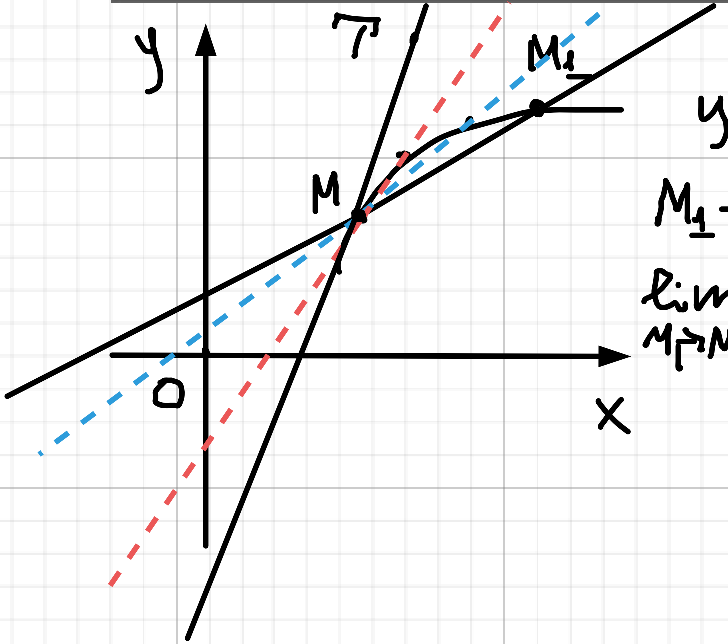
Касательная к кривой

Дадим сначала общее определение касательной к кривой.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (см. рис. 128).

Прямую MM_1, проходящую через эти точки, называют *секущей.*

Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT.

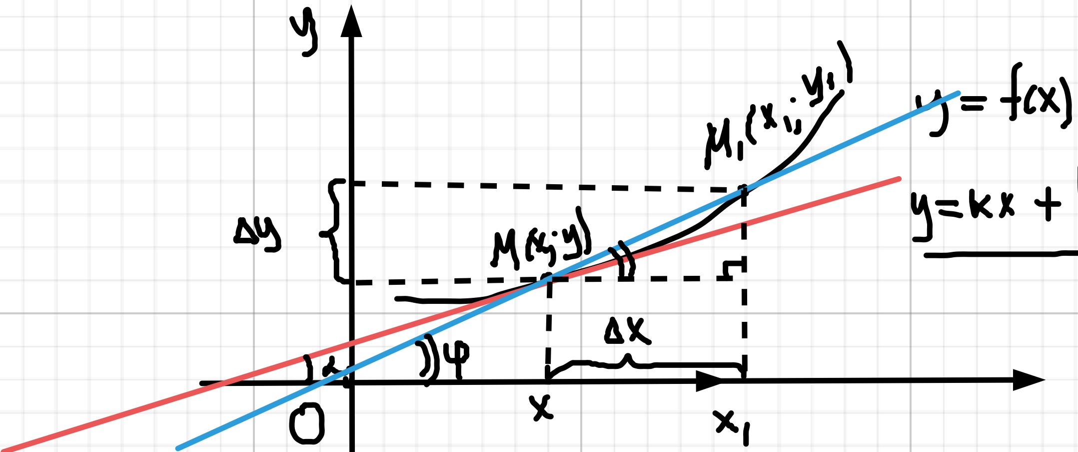


$$y = f(x)$$

$$M_1 \to M$$

$$\lim_{M_1 \to M} MM_1 = MT$$

Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M.



$$\underline{y = kx + b}$$

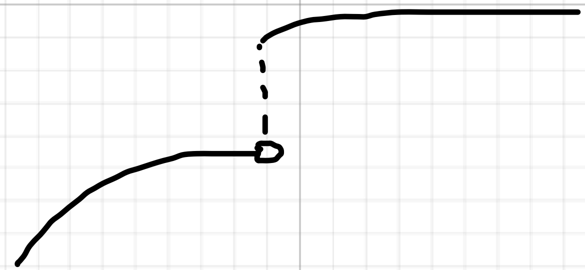
$$x_1 = x + \Delta x$$

$$MM_1: \quad k_{\text{сек.}} = \underline{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

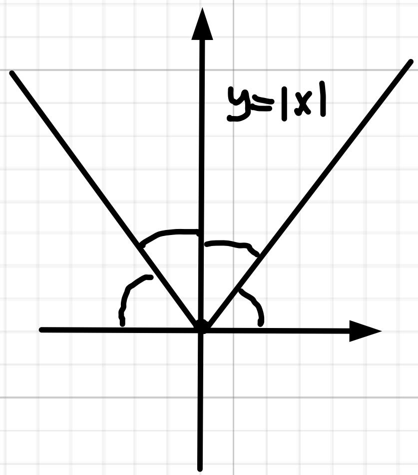
$\Delta x \to 0 \Rightarrow M_1 \to M \Rightarrow \varphi \to \alpha$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{f'(x)} = \operatorname{tg}\alpha = \underline{k}$$

1)



2)



3)

Рассмотрим теперь график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющий в точке $M(x; y)$ невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол касательной с осью Ox.

Для этого проведем через точку M и точку M_1 графика с абсциссой $x + \Delta x$ секущую (см. рис. 129). Обозначим через φ — угол между секущей MM_1 и осью Ox. На рисунке видно, что угловой коэффициент секущей равен

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки M, переходит в касательную. Угол $\varphi \to \alpha$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$.

Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (20.2)$$

В задаче про касательную к кривой был найден угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это равенство перепишем в виде $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = k$, т. е. ***производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x.*** В этом заключается ***геометрический смысл производной.***

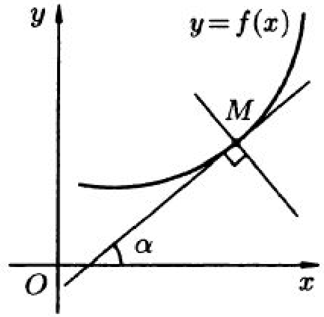


Рис. 130

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$ (см. рис. 130), то угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении ($y - y_0 = k(x - x_0)$), можно записать ***уравнение касательной***: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой.***

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

$k_1 \cdot k_2 = -1$

$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Поэтому *уравнение нормали* имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (если $f'(x_0) \neq 0$).

Скорость прямолинейного движения

Пусть материальная точка (некоторое тело) M движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = S$ до некоторой фиксированной точки O. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т. е. $S = S(t)$.

Это равенство называют *законом движения точки.* Требуется найти скорость движения точки.

Если в некоторый момент времени t

точка занимает положение M, то в момент времени $t+\Delta t$ (Δt — приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1 = S + \Delta S$ (ΔS — приращение расстояния) (см. рис. 127). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$.

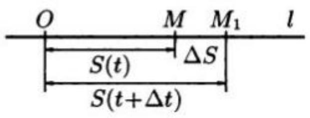


Рис. 127

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость движения точки за время* Δt:

$$V_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения точки в данный момент времени* (или мгновенной скоростью). Обозначив эту скорость через V, получим

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$ [redacted]

$S'(t) = V$.

Это равенство перепишем в виде $V = S'_t$, т. е. *скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t*. В этом заключается *механический смысл производной*.

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то ***производная y' есть скорость протекания этого процесса***. В этом состоит ***физический смысл производной***.

Пример ■ Найти уравнение касательной к параболе $y = x - x^2 + 6$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

△ Находим производную функции $f(x) = x - x^2 + 6$:

$$f'(x) = 1 - 2x,$$

и подставляем в уравнение касательной (1) значения $x_0 = 1$, $f(x_0) = 6$ и $f'(x_0) = -1$, получаем уравнение касательной $y + x = 7$. ▲.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $f'(x) = 1 - 2x$

$f(x_0) = 1 - 1^2 + 6 = 6$

$f'(x_0) = 1 - 2 \cdot 1 = -1$

$y = 6 - 1(x - 1)$

$y = 6 - x + 1$

$y = -x + 7$

Ответ: $y = -x + 7$

$k = -1 = f'(1)$

Пример [redacted] Записать уравнение касательной к графику функции $y = e^x$, параллельной прямой $y = x - 1$.

$\triangle$ Так как угловой коэффициент касательной по условию равен угловому коэффициенту прямой $y = x - 1$, т. е. равен единице, то из уравнения

$$f'(x) = e^x = 1$$

получаем $x_0 = 0$, а по формуле (3) при $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f'(x_0) = 1$ находим уравнение касательной

$$y = x + 1. \qquad \blacktriangle$$

Углом между кривыми, пересекающимися в точке M_0, называют угол между касательными к этим кривым в точке M_0. [redacted]

$l \parallel y = x - 1 \longrightarrow k = 1$

$f'(x) = (e^x)' = e^x$

$f'(x) = e^x = 1 = e^0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = e^0 = 1$

$y = 1 + 1(x - 0)$

$\boxed{y = x + 1}$

1 Найти уравнение касательной к графику функции $y=\sqrt{4x-3-x^2}$ в точке с абсциссой $x=3/2$.

2 Найти уравнение общей касательной к параболам

$$y=x^2-2x+5 \text{ и } y=x^2+2x-11.$$

1) $$y' = \left(\sqrt{4x-3-x^2}\right)' = \left(\left(4x-3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(4x-3-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(4x-3-x^2\right)' =$$

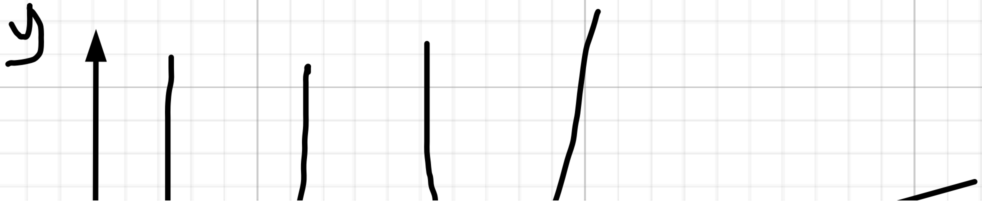
$$= \frac{(4-2x)}{2\sqrt{4x-3-x^2}} = \frac{2(2-x)}{2\sqrt{4x-3-x^2}} = \frac{2-x}{\sqrt{4x-3-x^2}};$$

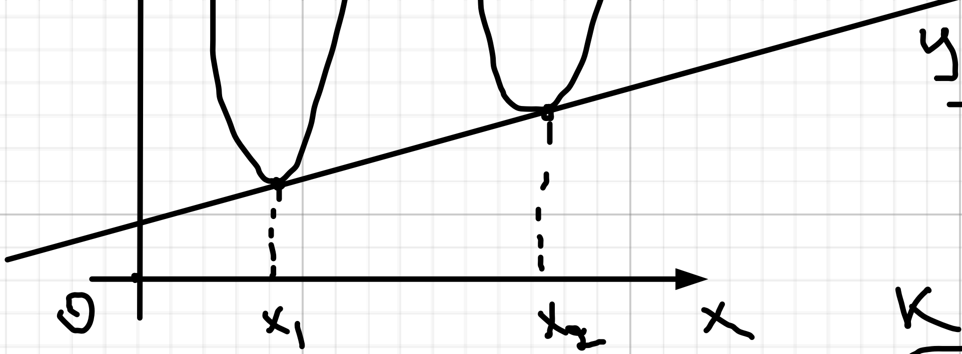
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{4\cdot\frac{3}{2}-3-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{6-3-\frac{9}{4}} = \sqrt{3-\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}x - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{\sqrt{3}}x}$$ – ответ!





$$\underline{y = kx + l}$$

$$\begin{aligned}
y = f_1(x_1) + f_1'(x_1)(x - x_1) &= \overbrace{f_1'(x_1)}^{k}\,x + \overbrace{f_1(x_1) - f_1'(x_1)\cdot x_1}^{l} \\
y = f_2(x_2) + f_2'(x_2)(x - x_2) &= \underbrace{f_2'(x_2)}_{k}\,x + \underbrace{f_2(x_2) - f_2'(x_2)\cdot x_2}_{l}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} k = f_1'(x_1) = f_2'(x_2) \\ l = f_1(x_1) - f_1'(x_1)\cdot x_1 = f_2(x_2) - f_2'(x_2)\cdot x_2 \end{cases}$$

$f_1(x) = x^2 - 2x + 5$, $f_2(x) = x^2 + 2x - 11$

$f_1'(x) = 2x - 2$, $f_2'(x) = 2x + 2$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2 = 2x_2 + 2 \\ x_1^2 - 2x_1 + 5 - (2x_1 - 2)\cdot x_1 = x_2^2 + 2x_2 - 11 - (2x_2 + 2)x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 2 \\ x_1^2 - \cancel{2x_1} + 5 - 2x_1^2 + \cancel{2x_1} = x_2^2 + \cancel{2x_2} - 11 - 2x_2^2 - \cancel{2x_2} \end{cases}$$

$\{ x_2 = x_1 - 2$ $\qquad$ $\{ x_2 = x_1 - 2$

$$\begin{cases} x_2 \ldots 2 \\ -x_1^2+5 = -x_2^2 - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - 2 \\ x_1^2 - x_2^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

$$2x_1 = 10$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 3$$

$$k_1 = f_1'(5) = 8 = k_2 = k$$

$$l = 25 - 10 + 5 - (10-2)5 = 20 - 40 = -20$$

$y = 8x - 20$ — ответ!