Таблица неопределенных интегралов. Из определения интеграла следует, что всякая формула для производной конкретной функции, т. е. формула вида

$$F'(x) = f(x),$$

может быть записана в виде интегральной формулы:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Используя это соображение и таблицу производных, составим таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int 0\,dx = C$, C — константа.
2. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$
10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad a \neq 0.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a \neq 0.$

Каждая из формул 1—13 справедлива на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции. Справедливость каждой из приведенных формул можно установить дифференцированием.

Метод непосредственного интегрирования. *Непосредственным интегрированием* называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путем применения к ним основных свойств неопределенных интегралов. При этом подынтегральную функцию обычно предварительно соответствующим образом преобразуют.

Пример 1. Найти $\int (1+\sqrt{x})^2\,dx$.

Решение: △ Преобразовав подынтегральную функцию и воспользовавшись свойствами 4 и 3 интеграла, находим

$$\int (1+\sqrt{x})^2\,dx = \int (1+2\sqrt{x}+x)\,dx =$$

$$= \int 1\,dx + 2\int \sqrt{x}\,dx + \int x\,dx = x + \frac{4x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$$

$$(\sqrt{x})^2 = x,\quad x \geq 0$$

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C_1$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\int dx = x + C_0$$

$$C_0 + C_1 + C_2 = C$$

Последнее равенство получено с помощью табличного интеграла 2 соответственно при $\alpha=0$, $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\alpha=1$. ▲

Пример 2. Найти $\int \frac{2+x^4}{x}\,dx$.

Решение: $f(x) = \frac{2+x^4}{x} = \frac{2}{x} + \frac{x^4}{x} = \frac{2}{x} + x^3$

△ Интеграл сводится к табличным интегралам 3 и 2 ($\alpha=3$):

$$\int \frac{2+x^4}{x}\,dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int x^3\,dx = 2\ln|x| + \frac{x^4}{4} + C. \ ▲$$

$$\int \frac{2+x^4}{x}\,dx = 2\ln|x| + \frac{x^4}{4} + C$$

Пример 3. Найти $\int 3^x \cdot 4^{2x}\,dx$.

△ Преобразовав подынтегральную функцию, приводим интеграл к табличному интегралу 4 ($a=48$):

$$\int 3^x \cdot 4^{2x}\,dx = \int 3^x 16^x\,dx = \int 48^x\,dx = \frac{48^x}{\ln 48} + C. \ ▲$$

$$4^{2x} = (4^2)^x = 16^x,\quad a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

Пример 4. Найти $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$.

△ Так как $2\cos^2\frac{x}{2} = 1+\cos x$, то

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

$$\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos x)\,dx = \frac{1}{2}(x+\sin x) + C. \ ▲$$

$$\cos 2\alpha = \underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sin^2\alpha} - \underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \hookrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{25+4x^2}$.

△ Путем простых преобразований подынтегральной функции приходим к табличному интегралу 9 $\left(a = \frac{5}{2}\right)$:

$$\int \frac{dx}{25+4x^2} = \int \frac{dx}{4\left(\frac{25}{4}+x^2\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + x^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5} + C. \blacktriangle$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

Пример 6. Найти $\int \frac{x^2\,dx}{3+x^2}$.

△ Интеграл приводится к табличному интегралу 9 $(a = \sqrt{3})$: $3 = (\sqrt{3})^2$

$$\int \frac{x^2\,dx}{3+x^2} = \int \frac{3+x^2-3}{3+x^2}\,dx = \int \frac{3+x^2}{3+x^2}\,dx + \int \frac{-3\,dx}{3+x^2} =$$

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{3+x^2} = x - 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= x - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangle \quad ✓$$

Пример 7. Найти $\int \frac{dx}{3x^2-5}$.

$$\frac{3+x^2-3}{3+x^2} = \frac{3+x^2}{3+x^2} - \frac{3}{3+x^2} = 1 - \frac{3}{3+x^2}$$

△ Интеграл сводится к табличному интегралу 10 $\left(a=\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$: $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

$$\int\frac{dx}{3x^2-5}=\int\frac{dx}{3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{5}{3}}}{x+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{5}}{x\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right|+C.\ \blacktriangle$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{15}}$$

Пример 8. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

△ Сводим интеграл к табличному интегралу 11 $\left(a=\frac{1}{3}\right)$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{1}{9}-x^2\right)}}=\int\frac{dx}{3\sqrt{\frac{1}{9}-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{1}{3}}+C=\frac{1}{3}\arcsin 3x+C.\ \blacktriangle$$

Пример 9. Найти $\int\frac{\sqrt{x^2+4}-4\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^4-16}}\,dx$.

△ Данный интеграл сводится к табличным интегралам 12 и 13 $(a=2)$:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+4}-4\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^4-16}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}-4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|-4\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C.\ \blacktriangle$$

Пример 10. Найти $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}$.

△ Так как $\sin^2x+\cos^2x=1$, то

$$\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}.$$

Таким образом, интеграл сводится к табличным интегралам 7 и 8:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \blacktriangle$$

$$\frac{\sqrt{x^2+4} - 4\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{(x^2-4)(x^2+4)}} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x^2+4}} - \frac{4\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x^2+4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}$$

■ **Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки).** В основе метода подстановки (или метода замены переменной) вычисления неопределенных интегралов лежит следующая формула, являющаяся простым следствием правила дифференцирования сложной функции:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C, \qquad (1)$$

где $F(t)$ — какая-либо первообразная функции $f(t)$, $t = g(x)$.

Действительно, согласно этому правилу получаем

$$(F(g(x)) + C)' = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x).$$

Правую часть формулы (1) обычно записывают в виде

$$\int f(t)\, dt, \qquad (2)$$

где $t = g(x)$.

Из формулы (1) следует, что если подынтегральное выражение имеет вид

$$f(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x))\, dg(x) \qquad (3)$$

или приводится к этому виду, то интеграл

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

можно свести к интегралу (2) с помощью замены переменной, положив $t = g(x)$.

Пример 1. Найти $\int \cos(5x+3)\, dx$.

△ Подынтегральное выражение приводится к виду (3):

$$\cos(5x+3)\, dx = \frac{1}{5}\cos(5x+3)\, d(5x+3)$$

(здесь $f(x) = \cos(5x+3)$, $g(x) = 5x+3$). Сделав замену переменной $t = 5x+3$, получим

$$\int \cos(5x+3)\, dx = \frac{1}{5}\int \cos t\, dt = \frac{\sin t}{5} + C = \frac{\sin(5x+3)}{5} + C. \blacktriangle$$

$F'(x) = f(x)$

$df(x) = f'(x)dx$

$F'(g(x)) =$
$= f(g(x))\cdot g'(x)$

$dt = g'(x)dx = dg(x)$

$\int f(t)\, dt = F(t) + C$

$t = 5x+3$

$dt = d(5x+3) = 5dx$

$dx = \frac{1}{5}dt$

$\cos(5x+3)\, dx = \cos t\, dt$

$\frac{}{5}\,dt$

Пример 2. Найти $\int (2x+1)^{10}\,dx$.

△ Так как

$$(2x+1)^{10}\,dx = \frac{1}{2}(2x+1)^{10}\,d(2x+1),$$

то, положив $t = 2x+1$, получим

$$\int (2x+1)^{10}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^{10}\,d(2x+1) = \frac{1}{2}\int t^{10}\,dt =$$

$$= \frac{t^{11}}{22} + C = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + C. \blacktriangle$$ V

$$\int t^{10}\,dt = \frac{t^{11}}{11} + C$$

Пример 3. Найти $\int xe^{x^2}\,dx$.

△ Положив $t = x^2$, находим

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C. \blacktriangle$$

Пример 4. Найти $\int \frac{x^2\,dx}{4+3x^3}$.

$x^2\,dx = \frac{1}{3}\,d\,x^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\,d(4+3x^3) =$

$= \frac{1}{9}\,d(4+3x^3)$

△ Подынтегральное выражение приводится к виду

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{d(4+3x^3)}{4+3x^3}.$$ V

Положив $t = 4+3x^3$, получим

$$\int \frac{x^2\,dx}{4+3x^3} = \frac{1}{9}\int \frac{d(4+3x^3)}{4+3x^3} = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{9}\ln|t| + C = \frac{1}{9}\ln|4+3x^3| + C. \blacktriangle$$ V

$d\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{1}{x^2}\,dx$

Пример 5. Найти $\int \frac{1}{x^2} e^{1/x}\,dx$.

△ Положим $t = \frac{1}{x}$, тогда $x = \frac{1}{t}$ и $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Таким образом,

$$\int \frac{1}{x^2} e^{1/x}\,dx = \int t^2 e^t \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int e^t\,dt =$$

$$= -e^t + C = -e^{1/x} + C. \blacktriangle$$ V

Пример 6. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}$.

△ Так как $11+10x-x^2 = 36-(x-5)^2$, то с помощью замены переменной $t = x-5$ интеграл сводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-5)^2}} = \int \frac{d(x-5)}{\sqrt{6^2-(x-5)^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{6^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{6} + C = \arcsin\frac{x-5}{6} + C. \blacktriangle \quad \text{V}$$

Пример 7. Найти $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$. $= \int \sqrt{1-x^2}\,\frac{dx^2}{2} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2) =$

$= -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$

△ Сделаем подстановку $t = 1-x^2$, тогда $dt = -2x\,dx$, т. е. $x\,dx = -\frac{dt}{2}$. Поэтому

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{t}\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C. \blacktriangle \quad \text{V}$$

$-x^2+10x+11 = -(x^2-10x-11) = -(x^2-10x+25-25-11) =$

$= -((x-5)^2-36) = 36-(x-5)^2$

Пример 8. Найти $\int \sin x\cos^7 x\,dx$.

△ Положим $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x\,dx$. Следовательно,

$$\int \sin x\cos^7 x\,dx = -\int t^7\,dt = -\frac{t^8}{8} + C = -\frac{\cos^8 x}{8} + C. \blacktriangle$$

Пример 9. Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

△ Первый способ. Преобразовав подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \frac{-d\cos x}{1-\cos^2 x}$$

и положив $t = \cos x$, приходим к табличному интегралу 10:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.$$

Второй способ. Преобразуем подынтегральное выражение следующим образом:

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

и положим $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда получим

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C. \blacktriangle$$

Пример 10. Найти $\int\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$|x|<1$

$\triangle$ Положим $t=\arcsin x$, тогда $dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Таким образом,

$$\int\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(\arcsin x)^3}{3}+C. \blacktriangle$$ ✓

Пример 11. Найти $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

$\triangle$ Сделаем замену переменной, положив $x=t^2$, $t\geqslant 0$. Тогда, так как $dx=2t\,dt$, получим

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int\frac{t\,dt}{1+t}=2\int\frac{1+t-1}{1+t}\,dt=$$

$$=2\int dt-2\int\frac{dt}{1+t}=2t-2\ln(1+t)+C=$$

$$=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C. \blacktriangle$$ ✓

Пример 12. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

$\triangle$ Положим $e^x-1=t^2$, $t>0$, тогда

$$e^x\,dx=2t\,dt,\quad dx=\frac{2t\,dt}{t^2+1}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg} t+C=$$

$$=2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C. \blacktriangle$$

Пример 13. Найти $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$.

$\triangle$ Положим $x=2\sin t$, $|t|\leqslant\frac{\pi}{2}$, тогда $dx=2\cos t\,dt$ и $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Следовательно,

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cos t.$$

Таким образом,