Правила решения уравнений
• Если любое слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом знак слагаемого, то корни уравнения не изменяются. • Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то корни уравнения не изменяются.

Линейные уравнения

Линейное уравнение — целое уравнение вида $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.
Решение линейных уравнений
• Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x = -\frac{b}{a}$; • Если $a \neq 0$, $b = 0$, то $x = 0$; • Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет; • Если $a = 0$, $b = 0$, то x — любое число.

Линейные уравнения и неравенства с параметром

К числу самых простых задач с параметром относятся линейные уравнения и неравенства, а также их системы. Любое линейное уравнение с параметром может быть сведено к виду $f(a) \cdot x = g(a)$, а неравенство — к виду $f(a) \cdot x \vee g(a)$ (здесь a — параметр, $f(a)$ и $g(a)$ — алгебраические выражения, «$\vee$» — один из четырёх возможных знаков неравенств: «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$»). Такой вид линейного уравнения (неравенства) с параметром будем называть стандартным. Линейные уравнения и неравенства после приведения к стандартному виду обычно решаются с помощью логического перебора. В некоторых задачах, прежде чем перейти к исследованию линейного уравнения или неравенства, необходимо сделать замену переменной.

$\underline{f(a)\cdot x = g(a)}$:

1) $f(a)=0,\ g(a)\neq 0 \to 0\cdot x \neq g(a)$ — реш. нет!

2) $f(a)=0,\ g(a)=0 \to 0\cdot x = 0,\ x\in \mathbb{R}$

3) $f(a)\neq 0,\ g(a)\neq 0 \to x = \dfrac{g(a)}{f(a)}$ — ед. реш.

если $g(a)=0$, $x=\dfrac{0}{f(a)}=0$

$\underline{f(a)\cdot x < g(a)}$:

1) $f(a)>0 \to x<\dfrac{g(a)}{f(a)} \to x\in\left(-\infty; \dfrac{g(a)}{f(a)}\right)$

2) $f(a)<0 \to x>\dfrac{g(a)}{f(a)} \to x\in\left(\dfrac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$

3) $f(a)=0 \to \underline{0\cdot x < g(a)}$

а) если $g(a)\leq 0$ — реш. нет

б) если $g(a)>0$ — x любое!

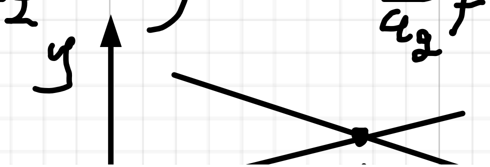
$f(a)\cdot x > g(a)$, $f(a)x\leq g(a)$, $f(a)\cdot x \geq g(x)$ — аналогично!

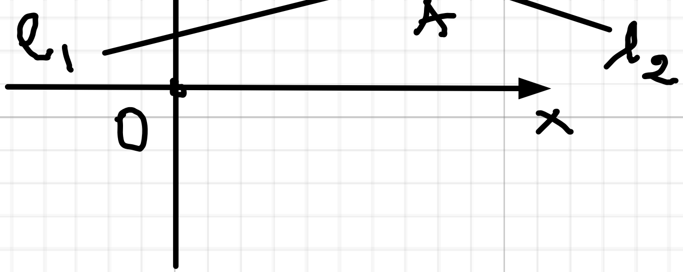
$y=ax+b$ — лин. фун-я;

$l_1:\ a_1x+b_1y+C_1=0$

$l_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0$

$\to$ 1) $l_1 \cap l_2 = A$, если $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$;





2) $l_1 \parallel l_2$, если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$;

3) $l_1 = l_2$ – совпадают, если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$;

4) $l_1 \perp l_2$, если $a_1b_2+a_2b_1=0$.

Пример 1. Найдите все пары чисел $(a; b)$, для каждой из которых имеет не менее трёх корней уравнение

$$(a-2)x+b(x-2)=(2b-1)x+(2x-1)a.$$

Решение: $(a-2)x+bx-2b-(2b-1)x-2ax+a=0$

$x(a-2+b-2b+1-2a)-2b+a=0$

$x(-a-b-1)=2b-a$

$(a+b+1)x=a-2b$, $\underbrace{f(a,b)x=g(a,b)}$

1) $f(a,b)=a+b+1\neq0 \to x=\frac{a-2b}{a+b+1}$

$a=2b$
$x=0$

2) $f(a,b)=0,\ g(a,b)\neq 0$ $0\cdot x=g$ — реш. нет

3) $f(a,b)=g(a,b)=0$, $0\cdot x=0$ — $x\in R$

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ a-2b=0 \end{cases}$$

$a=2b$

$3b+1=0,\ b=-\frac{1}{3}$

$a=-\frac{2}{3}$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Пример 2. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$2xa^2-(5x+2)a+2x+1\geqslant 0.$$

Решение: $2xa^2-5xa-2a+2x+1\geqslant 0$

$(2a^2-5a+2)x\geqslant 2a-1$ $f(a)x\geqslant g(a)$

$a_{1,2}=\frac{5\pm 3}{4}=\left[\begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$

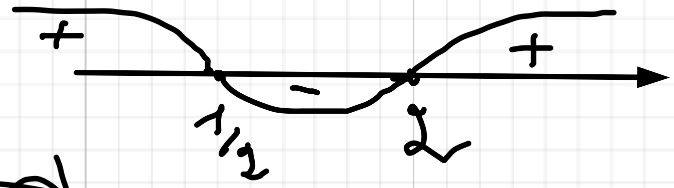
$2a^2-5a+2=2(a-2)\left(a-\frac{1}{2}\right)=(a-2)(2a-1)$

$(a-2)(2a-1)x\geqslant 2a-1$

1) $f(a)=g(a) \to a=\frac{1}{2}$, $0\cdot x \geqslant 0$ — $x\in R$;

2) $f(a)=0$, $g(a)\neq 0 \to a=2$, $0\cdot x \geqslant 3$ — $x\in\varnothing$;

3) $f(a)=(a-2)(2a-1)>0$



$a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$

$$x\geqslant \frac{2a-1}{(a-2)(2a-1)}=\frac{1}{a-2},\quad x\in\left[\frac{1}{a-2};+\infty\right)$$

4) $f(a)=(a-2)(2a-1)<0 \to a\in\left(\frac{1}{2};2\right)$

$$x\leqslant\frac{1}{a-2},\quad x\in\left(-\infty;\frac{1}{a-2}\right]$$

Ответ: 1) $a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$, то $x\in\left[\frac{1}{a-2};+\infty\right)$;

2) $a\in\left(\frac{1}{2};2\right)$, то $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a-2}\right]$;

3) $a=\frac{1}{2}$, то $x\in R=(-\infty;+\infty)$;

4) $a=2$, то $x\in\varnothing$ (реш. нет).

Пример 3. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет не менее семи решений система уравнений

$$\begin{cases}(3a^2-13a)x+8y=3a^2-16a-8,\\ 5x+4y=2.\end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases}8y+(3a^2-13a)x-(3a^2-16a-8)=0\\ 4y+5x-2=0\end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\longrightarrow \frac{8}{4}=\frac{3a^2-13a}{5}=\frac{3a^2-16a-8}{2}$$

$$\begin{cases}2=\frac{3a^2-13a}{5}\\ 2=\frac{3a^2-16a-8}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2-13a-10=0\\ 3a^2-16a-12=\end{cases}$$

$$a_{1,2}=\frac{13\pm17}{6}=\left[\begin{array}{l}5\\ -\frac{2}{3}\end{array}\right.\qquad a_{3,4}=\frac{8\pm10}{3}=\left[\begin{array}{l}6\\ -\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$. (ур-я совпадают!)