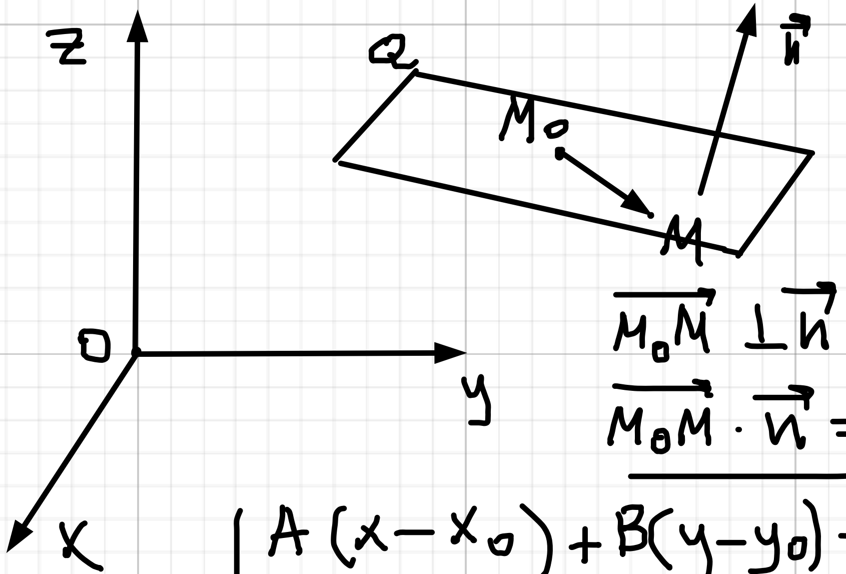
[redacted] Уравнения плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\overline{n} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости (см. рис. 69). Выведем уравнение плоскости Q. Возьмем на ней произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим вектор

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$ ✓



$M \in Q$

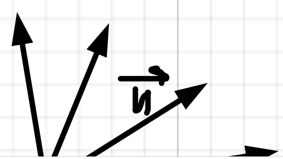
$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$

$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

При любом расположении точки M на плоскости Q векторы $\overline{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, т. е.

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \quad ✓ \qquad (12.3)$$



Координаты любой точки плоскости Q удовлетворяют уравнению (12.3), координаты точек, не лежащих на плоскости Q, этому уравнению не удовлетворяют (для них $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} \neq 0$).

Уравнение (12.3) называется ***уравнением плоскости, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{n} = (A; B; C)$. Оно первой степени относительно текущих координат x, y и z. Вектор $\bar{n} = (A; B; C)$ называется ***нормальным вектором плоскости.***

Придавая коэффициентам A, B и C уравнения (12.3) различные значения, можно получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку M_0. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется *связкой плоскостей*, а уравнение (12.3) — *уравнением связки плоскостей.*

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \longrightarrow$

$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0 \longrightarrow$

$$\underbrace{Ax + By + Cz}\, + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_{= D} = 0 \longrightarrow$$

$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ – общее ур-ие плоскости!

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим общее уравнение первой степени с тремя переменными x, y и z:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad ✓ \qquad (12.4)$$

Полагая, что по крайней мере один из коэффициентов A, B или C не равен нулю, например $B \neq 0$, перепишем уравнение (12.4) в виде

$$A(x - 0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z - 0) = 0. \qquad (12.5)$$

Сравнивая уравнение (12.5) с уравнением (12.3), видим, что уравнения (12.4) и (12.5) являются уравнением плоскости с нормальным вектором $\bar{n} = (A; B; C)$, проходящей через точку $M_1\left(0; -\frac{D}{B}; 0\right)$.

Итак, уравнение (12.4) определяет в системе координат $Oxyz$ некоторую плоскость. Уравнение (12.4) называется ***общим уравнением плоскости.***

Частные случаи общего уравнения плоскости:

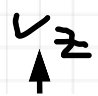
1. *Если* $D = 0$, то оно принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0; 0; 0)$. Следовательно, в этом случае *плоскость проходит через начало координат.*

2. *Если* $C = 0$, то имеем уравнение $Ax + By + D = 0$. Нормальный

$x + y + z + 1 = 0$

$(x - 0) + (y - (-1)) + (z - 0) = 0$

т. $(0; -1; 0)$ $\perp \vec{n}(1; 1; 1)$

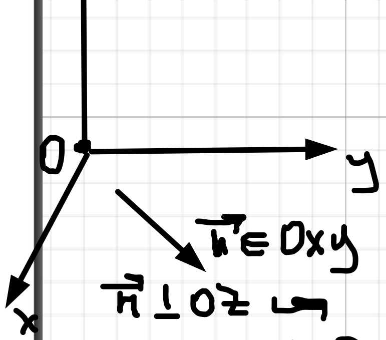


вектор $\bar{n} = (A;B;0)$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, *плоскость параллельна оси* Oz; если $B = 0$ — параллельна оси Oy, $A = 0$ — параллельна оси Ox.

3. *Если* $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O(0;0;0)$ параллельно оси Oz, т. е. плоскость $Ax + By = 0$ *проходит через ось* Oz. Аналогично, уравнениям $By + Cz = 0$ и $Ax + Cz = 0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy.

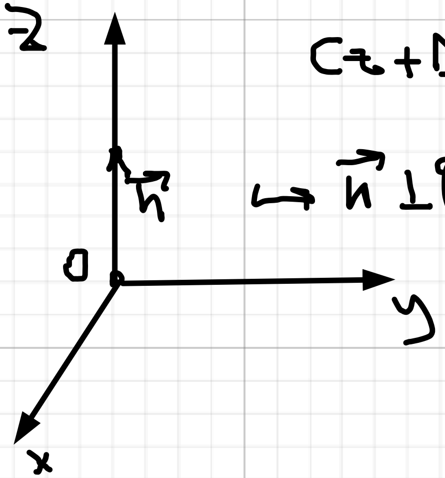
4. *Если* $A = B = 0$, то уравнение (12.4) принимает вид $Cz + D = 0$, т. е. $z = -\frac{D}{C}$. Плоскость *параллельна плоскости* Oxy. Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

5. *Если* $A = B = D = 0$, то уравнение (12.4) примет вид $Cz = 0$, т. е. $z = 0$. Это *уравнение плоскости* Oxy. Аналогично: $y = 0$ — уравнение плоскости Oxz; $x = 0$ — уравнение плоскости Oyz.



$\vec{n} \in Oxy$

$\vec{n} \perp Oz \hookrightarrow$ плоскость $\parallel Oz$



$Cz + D = 0$, $\vec{n}(0;0;C)$

$\hookrightarrow \vec{n} \perp Oxy \hookrightarrow$ плоскость $\parallel Oxy$

$z = 0$ — Oxy

$y = 0$ — Oxz

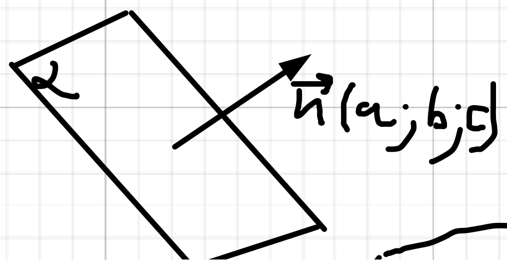
$x = 0$ — Oyz

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой.

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$, $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases}$$



$\vec{n} \perp \alpha \to k\vec{n} \perp \alpha$

Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3;\,0;\,1)$, $B(2;\,1;\,-1)$, $C(-2;\,2;\,0)$.

Решение:

$$\begin{cases} -3a+0\cdot b+c+d=0 \\ 2a+b-c+d=0 \\ -2a+2b+0\cdot c+d=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -3a+c+d=0 \\ 2a+b-c+d=0 \\ -2a+2b+d= \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}(2b+d)+c+d=0 \\ 2b+d+b-c+d=0 \\ a=\frac{2b+d}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -3b-\frac{3}{2}d+c+d=0 \\ 3b-c+2d=0 \\ a=b+\frac{d}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}d+3d=0$$

$$\frac{3}{2}d=0$$

плоскость проходит через $(0;0;0)$. $\leftarrow$ $\boxed{d=0}$

$b=a$, $c=3b=3a$

$ax+ay+3az=0 \quad | \; a\neq 0$

$\boxed{x+y+3z=0}$

$\vec{n}(1;\,1;\,3)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}$$

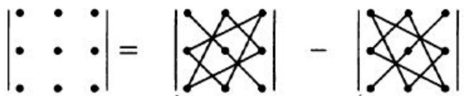
$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}$

$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 12-(-15) = 27;$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \quad \bullet$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (или Саррюса), которое символически можно записать так:



(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

(основания треугольников параллельны побочной диагонали)

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

❍ Решение:

$\det A =$

$$= 5\cdot 1\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4)\cdot 6 + 3\cdot 0\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot(-2)\cdot(-3) - 0\cdot(-4)\cdot 5 =$$

$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9. \quad \bullet$$

$\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ $\qquad M(x; y; z)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$.

$A(-3; 0; 1), B(2; 1; -1), C(-2; 2; 0).$

$$\begin{Vmatrix} x+3 & y & z-1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix} = -(x+3) - 2y + 10(z-1) - (z-1) + 5y + 4(x+3) =$$

$$= 3(x+3) + 9(z-1) + 3y = 3x + \cancel{9} + 9z - \cancel{9} + 3y = 0$$

$$3x + 3y + 9z = 0 \quad | :3$$

$$\underline{x + y + 3z = 0}$$

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и c, т. е. проходит через три точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$ (см. рис. 70).

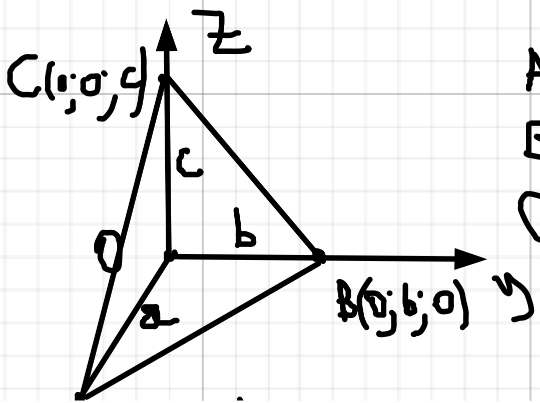
Подставляя координаты этих точек в уравнение (12.6), получаем

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем $bcx - abc + abz + acy = 0$, т. е. $bcx + acy + abz = abc$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (12.7)$$

✓

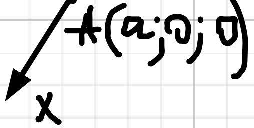


$A(a; 0; 0)$

$B(0; b; 0)$

$C(0; 0; c)$

$$\begin{Vmatrix} x-a & y & z \end{Vmatrix}$$



$$\begin{Vmatrix} -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{Vmatrix} =$$

$$= bc(x-a) + abz + acy = 0$$

$$bcx + acy + abz - abc = 0$$

$$bcx + acy + abz = abc \quad \Big/ : abc$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$