Сложная функция

Пусть заданы две функции $y = f(x)$ и $x = g(t)$, причем область определения функции f содержит множество значений функции g. Тогда каждому числу t из области определения функции g соответствует значение $x = g(t)$, принадлежащее области определения функции f, а ему, в свою очередь, соответствует число $y = f(x)$. Таким образом, каждому числу t из области определения функции g ставится в соответствие единственное число y из множества значений функции f, а это означает, что на области определения функции g задана функция, которую называют либо *сложной функцией*, либо *суперпозицией* (*композицией*) *функций*. При этом пишут $\boxed{y = f(g(t))}$.

Пример 5. Представить функцию $y = \sqrt{2x^3+3}$ как суперпозицию других функций.

△ Заметим, что задача имеет бесконечно много решений. Приведем лишь одно из них. Рассмотрим функции $g(x) = 2x^3 + 3$ и $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда $y = \sqrt{2x^3+3} = f(g(x))$. ▲

z

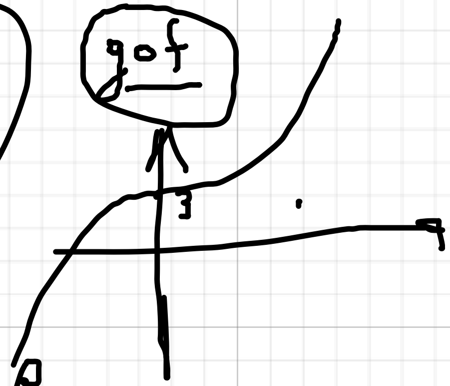
$y = f(g)$

$g = z(x)$, $y = f(z(x))$

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "g"] & x \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

$g \circ f$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "z"] & R \arrow[r, "f"] & {[0;+\infty)} = R_+ \end{tikzcd}$$



Рассмотрим сложную функцию $y = u(v(x))$, где функция v имеет производную в точке x, а функция u имеет производную в точке $v(x)$. Функцию u иногда называют *внешней*, а функцию v — *внутренней*. Заметим, что приращению Δx соответствует приращение Δv которому как приращению аргумента функции $u(v)$, в свою очередь, соответствует приращение Δu. Тогда:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot \Delta v} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

$\Delta x = x - x_0$

$\Delta V = V - V_0$

По условию, функция v дифференцируема в точке x, а значит, ее приращение Δv стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'_v \cdot v'_x$$

(нижние индексы показывают, по какому аргументу находится производная).

Итак,

$$y' = (u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x.$$

Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней.

▼ В выводе этой формулы есть небольшая тонкость — функция $v(x)$ не должна в окрестности точки x представлять собой постоянную. В противном случае приращение Δv в этой окрестности будет тождественно равно нулю, и выражение $\frac{\Delta u}{\Delta v}$ лишится смысла. △

v **Пример** ■ Найти значение производной функции $y = (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^5$ при $x = 1$.

Решение. Функция y сложная. Она составлена из двух функций: внутренней $v = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ и внешней $u = v^5$. Применим формулу производной сложной функции:

$$(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x = (v^5)'_v \cdot (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3)'_x =$$
$$= 5v^4(6x^2 - 10x + 4) = 5(2x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^4(6x^2 - 10x + 4).$$

Найдем $y'(1)$: $y'(1) = 5(2 - 5 + 4 - 3)^4(6 - 10 + 4) = 0$.

Ответ: $y'(1) = 0$.

$y = v^5(x)$

$y' = 5v^4 \cdot v'(x)$

■ **Таблица производных**

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
$x^n,\ n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R},\ x>0$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$a^x,\ a>0,\ a\neq 1,\ x\in\mathbb{R}$	$a^x \ln a$
$e^x,\ x\in\mathbb{R}$	e^x
$\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1,\ x>0$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\log_a \lvert x\rvert,\ a>0,\ a\neq 1,\ x\neq 0$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\ln x,\ x>0$	1

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x,\ x\in\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x,\ x\in\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x,\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x,\ x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x,\ \lvert x\rvert<1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x,\ \lvert x\rvert<1$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x,\ x\in\mathbb{R}$	1

$\ln\lvert x\rvert,\ x\neq 0$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arcctg} x,\ x\in\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Пример ■ Найти множество значений функции $y(x)=\frac{x^2-x+2}{x^2+1}$.

$x^2+1>0 \hookrightarrow D(y)=R=(-\infty;\infty)$

$E(y)$ $\quad \underline{a=f(x)}$

$\frac{x^2-x+2}{x^2+1}=a \Leftrightarrow x^2-x+2=a(x^2+1) \Leftrightarrow$

$\underline{x^2}-x+2-\underline{ax^2}-a=0 \Leftrightarrow (1-a)x^2-x-(a-2)=0 \quad \Big|\cdot(-1)$

$\underline{(a-1)x^2+x+(a-2)=0}$

1) $a=1 \hookrightarrow x-1=0 \hookrightarrow x=1\in D(y) \hookrightarrow 1\in E(y)$

2) $a\neq 1 \hookrightarrow D=1-4(a-1)(a-2)=1-4(a^2-3a+2)=$

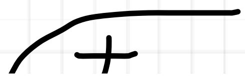
$=-4a^2+12a-7\geq 0, \quad \underbrace{4a^2-12a+7}\leq 0$

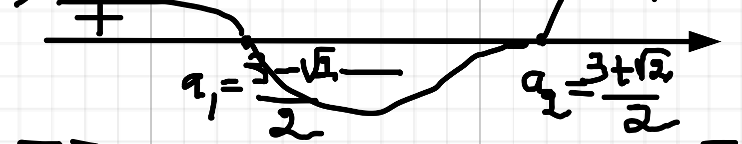
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$a_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-28}}{4}=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{2}$

$a_1=\frac{3-\sqrt{2}}{2}<a_2=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

$4(a-a_1)(a-a_2)\leq 0$





$a \in \left[\frac{3-\sqrt{2}}{2}; \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right] = E(y)$ $\qquad 1 < \frac{3+\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $E(y) = \left[\frac{3-\sqrt{2}}{2}; \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$.

$1 \vee \frac{3+\sqrt{2}}{2}$

$2 \vee 3+\sqrt{2}$

$-1 < \sqrt{2}$ $\qquad \hookrightarrow 1 < \frac{3+\sqrt{2}}{2}$

Пример [redacted] Найти производную функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = \sin 2x$; 2) $f(x) = e^{x^3}$;

3) $f(x) = \cos^2 x$; 4) $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$.

$\sin g$, $g = 2x$

Решение: 1) $y = \sin g(x)$

$y' = (\sin g(x))' = \sin'(g(x)) \cdot g'(x)$

$y' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$, $\qquad (ax+b)' = a$

$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$

2) $(e^{g(x)})' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

$(e^{x^3})' = e^{x^3} \cdot (x^3)' = 3x^2 e^{x^3}$.

3) $(\cos^2 x)' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$

4) $(\ln g(x))' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$

$g(x) = \frac{x-2}{x+2}$, $\quad g'(x) = \left(\frac{x-2}{x+2}\right)' = \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$= \frac{1(x+2) - (x-2)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x+2}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$

$\left(\ln \frac{x-2}{x+2}\right)' = \frac{1}{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{4}{x^2-4}.$

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию *сначала прологарифмировать*. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием.*

Пример 22.1. Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}.$$

$\ln e^x = x$

$\ln e = 1$

○ Решение: Можно найти y' с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 - 3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем y':

$$y' = y\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right),$$

т. е.

$$y' = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}\right).$$

Пример: $y = x^x$

$\ln y = \ln x^x \to \ln y = x\ln x, \quad (\ln y)' = (x\ln x)'$

$\frac{1}{y}\cdot y' = (x)'\ln x + x\cdot(\ln x)'$

$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + x\,\frac{1}{x} \to \frac{y'}{y} = \ln x + 1$

$y' = y(\ln x + 1), \quad \underline{y' = x^x(\ln x + 1)}$

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

2 способ: $y = x^x = e^{\ln x^x} = \underline{e^{x\ln x}}$

$y' = \left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\ln x)' = e^{x\ln x}(\ln x + 1) =$

$= e^{\ln x^x}(\ln x + 1) = \underline{x^x(\ln x + 1)}.$

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u\cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{\ldots}\cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{\ldots}\cdot u'$;

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;