

Réécriture et types inductifs

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Master M1 2020-2021

Réécriture (raisonnement équationnel)

Un exemple simple

```
Coq < Parameter E : Set.
```

```
E is assumed
```

```
Coq < Parameters a b : E.
```

```
a is assumed
```

```
b is assumed
```

```
Coq < Parameter P : E -> Prop.
```

```
P is assumed
```

```
Coq < Axiom eq : a = b.
```

```
eq is assumed
```

Réécriture (raisonnement équationnel)

Un exemple simple

```
Coq < Goal P(b) -> P(a).
```

```
1 subgoal
```

```
=====
```

```
P b -> P a
```

```
Coq < intro.
```

```
1 subgoal
```

```
H : P b
```

```
=====
```

```
P a
```

Réécriture (raisonnement équationnel)

Un exemple simple

```
Coq < rewrite eq.
```

```
1 subgoal
```

```
  H : P b
```

```
=====
```

```
  P b
```

```
Coq < assumption.
```

```
No more subgoals.
```

Réécriture (raisonnement équationnel)

Sens de la réécriture

```
Coq < Goal P(a) -> P(b).
```

```
1 subgoal
```

```
=====
```

```
P a -> P b
```

```
Coq < intro.
```

```
1 subgoal
```

```
H : P a
```

```
=====
```

```
P b
```

Réécriture (raisonnement équationnel)

Sens de la réécriture

```
Coq < rewrite <- eq.
```

```
1 subgoal
```

```
  H : P a
```

```
=====
```

```
  P a
```

```
Coq < assumption.
```

```
No more subgoals.
```

Isomorphismes de types dans les CCC

Open Scope type_scope.

Section Iso_axioms.

Variables A B C : Set.

Axiom Com : $A * B = B * A$.

Axiom Ass : $A * (B * C) = A * B * C$.

Axiom Cur : $(A * B \rightarrow C) = (A \rightarrow B \rightarrow C)$.

Axiom Dis : $(A \rightarrow B * C) = (A \rightarrow B) * (A \rightarrow C)$.

Axiom P_unit : $A * \text{unit} = A$.

Axiom AR_unit : $(A \rightarrow \text{unit}) = \text{unit}$.

Axiom AL_unit : $(\text{unit} \rightarrow A) = A$.

End Iso_axioms.

Isomorphismes de types dans les CCC

Un exemple de preuve

```
Coq < Goal forall A B : Set, A * (B -> unit) = A.  
1 subgoal
```

```
=====
```

```
forall A B : Set, A * (B -> unit) = A
```

```
Coq < intros.  
1 subgoal
```

```
A : Set
```

```
B : Set
```

```
=====
```

```
A * (B -> unit) = A
```


Isomorphismes de types dans les CCC

Un exemple de preuve

```
Coq < rewrite AR_unit.
```

```
1 subgoal
```

```
A : Set
```

```
B : Set
```

```
=====
```

```
A * unit = A
```

Isomorphismes de types dans les CCC

Un exemple de preuve

```
Coq < rewrite P_unit.
```

```
1 subgoal
```

```
  A : Set
```

```
  B : Set
```

```
  =====
```

```
    A = A
```

```
Coq < reflexivity.
```

```
No more subgoals.
```

Isomorphismes de types dans les CCC

Tactiques

```
Coq < Ltac remove_unit :=  
Coq <   repeat  
Coq <     rewrite P_unit || rewrite AR_unit ||  
Coq <     rewrite AL_unit.  
remove_unit is defined
```

Isomorphismes de types dans les CCC

Tactiques

```
Coq < Goal forall A B : Set, A * (B -> unit) = A.  
1 subgoal
```

```
=====
```

```
forall A B : Set, A * (B -> unit) = A
```

```
Coq < intros.  
1 subgoal
```

```
A : Set
```

```
B : Set
```

```
=====
```

```
A * (B -> unit) = A
```

Isomorphismes de types dans les CCC

Tactiques

```
Coq < remove_unit.
```

```
1 subgoal
```

```
A : Set
```

```
B : Set
```

```
=====
```

```
A = A
```

```
Coq < reflexivity.
```

```
No more subgoals.
```

Isomorphismes de types dans les CCC

Tactiques

```
Coq < Ltac remove_unit :=  
Coq <   repeat  
Coq <     match goal with  
Coq <       | |- context[?A * unit] => rewrite P_unit  
Coq <       | |- context[?A -> unit] => rewrite AR_unit  
Coq <       | |- context[unit -> ?A] => rewrite AL_unit  
Coq <     end.  
remove_unit is defined
```

Exercices

Propositions à démontrer

Lemma isos_ex1 : forall A B:Set,
 A * unit * B = B * (unit * A).

Lemma isos_ex2 : forall A B C:Set,
 (A * unit -> B * (C * unit)) =
 (A * unit -> (C -> unit) * C) * (unit -> A -> B).

Tactiques à écrire

- Écrire une tactique qui normalise les expressions ;
- Démontrer les propositions précédentes à l'aide de cette tactique.

Arithmétique de Peano

Section Peano.

Parameter N : Set.

Parameter o : N.

Parameter s : N -> N.

Parameters plus mult : N -> N -> N.

Variables x y : N.

Axiom ax1 : $\sim((s\ x) = o)$.

Axiom ax2 : $\text{exists } z, \sim(x = o) \rightarrow (s\ z) = x$.

Axiom ax3 : $(s\ x) = (s\ y) \rightarrow x = y$.

Axiom ax4 : $(\text{plus } x\ o) = x$.

Axiom ax5 : $(\text{plus } x\ (s\ y)) = s\ (\text{plus } x\ y)$.

Axiom ax6 : $(\text{mult } x\ o) = o$.

Axiom ax7 : $(\text{mult } x\ (s\ y)) = (\text{plus } (\text{mult } x\ y)\ x)$.

End Peano.

Arithmétique de Peano

Un exemple de preuve

```
Coq < Goal (plus (s o) (s (s o))) = (s (s (s o))).  
1 subgoal
```

```
=====
```

```
plus (s o) (s (s o)) = s (s (s o))
```

```
Coq < rewrite ax5.  
1 subgoal
```

```
=====
```

```
s (plus (s o) (s o)) = s (s (s o))
```

Arithmétique de Peano

Un exemple de preuve

```
Coq < rewrite ax5.
```

```
1 subgoal
```

```
=====
```

```
s (s (plus (s o) o)) = s (s (s o))
```

Arithmétique de Peano

Un exemple de preuve

```
Coq < rewrite ax4.
```

```
1 subgoal
```

```
=====
```

```
s (s (s o)) = s (s (s o))
```

```
Coq < reflexivity.
```

```
No more subgoals.
```

Exercices

Propositions à démontrer

- $2 + 2 = 4$;
- $2 \times 2 = 4$.

Tactiques à écrire

- Écrire une tactique qui calcule automatiquement ;
- Démontrer les propositions précédentes à l'aide de cette tactique ;
- Même question en utilisant la tactique autorewrite.

Anneaux (travail à la maison)

Anneaux

- Construire une structure d'anneau sur un ensemble donné.

Propositions à démontrer

- Démontrer les identités remarquables ;
- Même question en utilisant la tactique `ring` (voir documentation).

Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < Print nat.
```

```
Inductive nat : Set := 0 : nat | S : nat -> nat
```

```
For S: Argument scope is [nat_scope]
```

```
Coq < Check (S 0).
```

```
1
    : nat
```

```
Coq < Check 1.
```

```
1
    : nat
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < Print plus.  
plus =  
fix plus (n m : nat) {struct n} : nat :=  
  match n with  
  | 0 => m  
  | S p => S (plus p m)  
  end  
      : nat -> nat -> nat  
Argument scopes are [nat_scope nat_scope]
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < Goal forall x : nat, 0 + x = x.
```

```
1 subgoal
```

```
=====
```

```
forall x : nat, 0 + x = x
```

```
Coq < intro.
```

```
1 subgoal
```

```
x : nat
```

```
=====
```

```
0 + x = x
```


Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < simpl.
```

```
1 subgoal
```

```
x : nat
```

```
=====
```

```
x = x
```

```
Coq < reflexivity.
```

```
No more subgoals.
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < Goal forall x : nat, x + 0 = x.
```

```
1 subgoal
```

```
=====
```

```
forall x : nat, x + 0 = x
```

```
Coq < intro.
```

```
1 subgoal
```

```
x : nat
```

```
=====
```

```
x + 0 = x
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < elim x.
```

```
2 subgoals
```

```
x : nat
```

```
=====
```

```
0 + 0 = 0
```

```
subgoal 2 is:
```

```
forall n : nat, n + 0 = n -> S n + 0 = S n
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < simpl.
```

```
2 subgoals
```

```
x : nat
```

```
=====
```

```
0 = 0
```

```
subgoal 2 is:
```

```
forall n : nat, n + 0 = n -> S n + 0 = S n
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < reflexivity.
```

```
1 subgoal
```

```
x : nat
```

```
=====
```

```
forall n : nat, n + 0 = n -> S n + 0 = S n
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < intros.
```

```
1 subgoal
```

```
x : nat
```

```
n : nat
```

```
H : n + 0 = n
```

```
=====
```

```
S n + 0 = S n
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < simpl.
```

```
1 subgoal
```

```
x : nat
```

```
n : nat
```

```
H : n + 0 = n
```

```
=====
```

```
S (n + 0) = S n
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Entiers naturels :

```
Coq < rewrite H.  
1 subgoal
```

```
x : nat
```

```
n : nat
```

```
H : n + 0 = n
```

```
=====
```

```
S n = S n
```

```
Coq < reflexivity.  
No more subgoals.
```


Types inductifs

Exemples de preuves

- Listes :

```
Coq < Print list.
Inductive list (A : Type) : Type :=
  nil : list A | cons : A -> list A -> list A
For nil: Argument A is implicit and maximally inserted
For cons: Argument A is implicit
For list: Argument scope is [type_scope]
For nil: Argument scope is [type_scope]
For cons: Argument scopes are [type_scope _ _]

Coq < Open Scope list.

Coq < Check (0 :: 1 :: nil).
0 :: 1 :: nil
      : list nat
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Listes :

```
Coq < Open Scope list.
```

```
Coq < Print app.
```

```
app =
```

```
fun A : Type =>
```

```
fix app (l m : list A) {struct l} : list A :=
```

```
  match l with
```

```
  | nil => m
```

```
  | a :: l1 => a :: app l1 m
```

```
end
```

```
      : forall A : Type, list A -> list A -> list A
```

```
Argument A is implicit
```

```
Argument scopes are [type_scope list_scope list_scope]
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Listes :

```
Coq < Goal forall (E : Type) (l : list E), l ++ nil = l.  
1 subgoal
```

```
=====
```

```
forall (E : Type) (l : list E), l ++ nil = l
```

```
Coq < intros.  
1 subgoal
```

```
E : Type
```

```
l : list E
```

```
=====
```

```
l ++ nil = l
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Listes :

```
Coq < elim l.
```

```
2 subgoals
```

```
E : Type
```

```
l : list E
```

```
=====
```

```
nil ++ nil = nil
```

```
subgoal 2 is:
```

```
forall (a : E) (l0 : list E),
```

```
l0 ++ nil = l0 -> (a :: l0) ++ nil = a :: l0
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Listes :

```
Coq < simpl.
```

```
2 subgoals
```

```
E : Type
```

```
l : list E
```

```
=====
```

```
nil = nil
```

```
subgoal 2 is:
```

```
forall (a : E) (l0 : list E),
```

```
l0 ++ nil = l0 -> (a :: l0) ++ nil = a :: l0
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Listes :

```
Coq < reflexivity.
```

```
1 subgoal
```

```
E : Type
```

```
l : list E
```

```
=====
```

```
forall (a : E) (l0 : list E),
```

```
l0 ++ nil = l0 -> (a :: l0) ++ nil = a :: l0
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Listes :

```
Coq < intros.
```

```
1 subgoal
```

```
E : Type
```

```
l : list E
```

```
a : E
```

```
l0 : list E
```

```
H : l0 ++ nil = l0
```

```
=====
```

```
(a :: l0) ++ nil = a :: l0
```

Types inductifs

Exemples de preuves

- Listes :

```
Coq < simpl.
```

```
1 subgoal
```

```
E : Type
```

```
l : list E
```

```
a : E
```

```
l0 : list E
```

```
H : l0 ++ nil = l0
```

```
=====
```

```
a :: l0 ++ nil = a :: l0
```


Types inductifs

Exemples de preuves

- Listes :

```
Coq < rewrite H.
```

```
1 subgoal
```

```
E : Type
```

```
l : list E
```

```
a : E
```

```
l0 : list E
```

```
H : l0 ++ nil = l0
```

```
=====
```

```
a :: l0 = a :: l0
```

```
Coq < reflexivity.
```

```
No more subgoals.
```

Exercices avec les types inductifs

Propositions à démontrer

- ❶ $\forall n : \mathbb{N}. n \times 1 = n$;
- ❷ $f(10) = 1024$, où :
$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 \times f(n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$
- ❸ $\forall E : \text{Type}. \forall l : (\text{list } E). \forall e : E. \text{rev } (l ++ [e]) = e :: \text{rev } l$;
- ❹ $\forall E : \text{Type}. \forall l : (\text{list } E). \text{rev } (\text{rev } l) = l$.

Exercices avec les types inductifs (travail à la maison)

Entiers naturels

- Démontrer la décidabilité de l'égalité :

Lemma `my_eq_nat_dec` :

`forall n m : nat, {n = m} + {n <> m}.`

- ▶ Manuellement ;
- ▶ En utilisant la tactique `decide equality`.

Arbres

- Définir le type des arbres binaires d'entiers naturels ;
- Démontrer la décidabilité de l'égalité :

- ▶ Manuellement ;
- ▶ En utilisant la tactique `decide equality` ;
- ▶ En utilisant la commande `Scheme Equality` ;
- ▶ En écrivant la fonction qui teste l'égalité :

`Fixpoint eq_tree (t1 t2 : tree) : bool := ...`

Relations inductives

Exemples de preuves

- Entiers pairs :

```
Coq < Inductive is_even : nat -> Prop :=  
Coq < | is_even_0 : is_even 0  
Coq < | is_even_S : forall n : nat,  
Coq <   is_even n -> is_even (S (S n)).  
is_even is defined  
is_even_ind is defined
```

Relations inductives

Exemples de preuves

- Entiers pairs :

```
Coq < Goal (is_even 2).
```

```
1 subgoal
```

```
=====
```

```
is_even 2
```

```
Coq < apply is_even_S.
```

```
1 subgoal
```

```
=====
```

```
is_even 0
```

```
Coq < apply is_even_0.
```

```
No more subgoals.
```

Relations inductives

Exemples de preuves

- Entiers pairs :

```
Coq < Goal ~(is_even 3).
```

```
1 subgoal
```

```
=====
```

```
~ is_even 3
```

```
Coq < intro.
```

```
1 subgoal
```

```
H : is_even 3
```

```
=====
```

```
False
```

Relations inductives

Exemples de preuves

- Entiers pairs :

```
Coq < inversion H.
```

```
1 subgoal
```

```
H : is_even 3
```

```
n : nat
```

```
H1 : is_even 1
```

```
H0 : n = 1
```

```
=====
```

```
False
```

```
Coq < inversion H1.
```

```
No more subgoals.
```

Exercices avec les relations inductives

Tactiques à écrire

- Écrire une tactique qui démontre des buts de la forme $(is_even\ n)$;
- Écrire une tactique qui démontre des buts de la forme $\sim(is_even\ n)$;
- Écrire une tactique qui démontre les buts précédents indifféremment.

Propositions à démontrer

- 1 $\forall n : \mathbb{N}. f_{is_even}(n) \rightarrow is_even(n)$ (correction) ;
- 2 $\forall n : \mathbb{N}. is_even(n) \rightarrow f_{is_even}(n)$ (complétude) ;

où f_{is_even} est la fonction qui teste la parité d'un entier naturel.

Exercices avec les relations inductives (travail à la maison)

Listes d'entiers naturels triées

- Définir la relation « être trié » pour une liste d'entiers naturels ;
- Démontrer que la liste $1::2::3::4::5::\text{nil}$ est triée ;
- Écrire une fonction de tri sur les listes d'entiers naturels ;
- Démontrer que cette fonction renvoie bien des listes triées.