Tous documents sur support papier autorisés.

Correction: Sujet avec indications de correction.

1 Logiques de description

Question 1 : Vrai / Faux Indiquez si les phrases suivantes sont vraies ou fausses. Dans le cas où l'assertion est fausse, vous justifierez votre réponse en la corrigeant. On note $\mathcal{I} = (\Delta, .^{\mathcal{I}})$ une interprétation.

1. $\mathcal{I}$ interprète un vocabulaire composé de noms de concepts et de rôles, de constantes et de variables. **Correction**: FAUX : les variables ne sont pas interprétées (mais le reste est vrai)
2. $\mathcal{I}$ interprète chaque nom de concept par un sous-ensemble de Δ. **Correction**: VRAI
3. $\mathcal{I}$ interprète chaque variable par un élément de Δ. **Correction**: FAUX (Voir 1). Ce sont les constantes qui sont interprétées par un élément de Δ
4. $\mathcal{I}$ interprète chaque nom de rôle par un couple d'éléments de Δ. **Correction**: FAUX : par un ensemble de couples.

Question 2 : interprétation d'un vocabulaire On se donne un vocabulaire $\mathcal{V}$ contenant les concepts A et B ainsi que le rôle p. Soit $\mathcal{I} = (\Delta, .^{\mathcal{I}})$ l'interprétation de $\mathcal{V}$ définie par :

$\Delta = \{a, b, c, d, e\}$
$A^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$
$B^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\}$
$p^{\mathcal{I}} = \{(a, e), (b, e), (c, e), (c, b), (e, d)\}$

1. Donnez une représentation graphique de l'interprétation $\mathcal{I}$
2. Donnez l'interprétation dans $\mathcal{I}$ du concept $B \sqcap \exists p^{-1}.\top$ **Correction**: $(\exists p^{-1}.\top)^{\mathcal{I}} = \{b, d, e\}$ (tout ce qui est destination d'une flèche p), par intersection avec $B^{\mathcal{I}}$ on obtient $\{b, d\}$
3. Donnez l'interprétation dans $\mathcal{I}$ du concept $B \sqcap \exists p.\neg(A \sqcup B)$ **Correction**: $(\neg(A \sqcup B))^{\mathcal{I}} = \{e\}$ donc $(\exists p.\neg(A \sqcup B))^{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$ (tout ce qui pointe vers e). Par intersection avec $B^{\mathcal{I}}$ on obtient $\{b, c\}$
4. Donnez l'interprétation dans $\mathcal{I}$ du concept $B \sqcap \forall p.\neg(A \sqcup B)$ **Correction**: $(\forall p.\neg(A \sqcup B))^{\mathcal{I}} = \{a, b, d\}$ (tout ce qui pointe vers e ou ne pointe vers rien par vacuité). Par intersection avec $B^{\mathcal{I}}$ on obtient $\{b, d\}$

Question 3 : interprétation d'une assertion On considère de nouveau l'interprétation $\mathcal{I}$ de la question 2. Pour chacune des assertions suivantes, vous justifierez si elle est vraie ou fausse dans cette interprétation $\mathcal{I}$, ou si il ne s'agit pas d'une assertion (de la ABox ou de la TBox).

1. $B \sqcap \exists p^{-1}.\top \sqsubseteq B \sqcap \exists p.\neg(A \sqcup B)$ **Correction**: C'est bien une assertion (inclusion de concepts). Elle est vraie dans $\mathcal{I}$ ssi l'interpretation $(B \sqcap \exists p^{-1}.\top)^{\mathcal{I}}$ est incluse dans l'interprétation $(B \sqcap \exists p.\neg(A \sqcup B))^{\mathcal{I}}$. On a deja calculé ces interprétations et $\{b, d\} \not\subseteq \{b, c\}$ donc FAUX.
2. $B \sqcap \exists p^{-1}.\top$ **Correction**: Pas une assertion, juste l'énoncé d'un concept.
3. $B \sqcap \exists p^{-1}.\top \sqsubseteq B \sqcap \forall p.\neg(A \sqcup B)$ **Correction**: VRAI
4. $B \sqcap \exists p^{-1}.\top \sqsubseteq p$ **Correction**: Pas une assertion (pas d'inclusion concept dans role). Comme je ne l'avais pas explicitement exclu dans le cours, j'aurais accepté une réponse FAUX (un ensemble d'éléments ne peut pas être inclus dans un ensemble de paires... Mais personne n'a fait ça.)

Question 4 : satisfiabilité, validité Pour chacune des phrases suivantes, vous direz si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse en utilisant autant que possible vos réponses à la question 3.

1. $B \sqcap \exists p^{-1}.\top \sqsubseteq B \sqcap \exists p.\neg(A \sqcup B)$ est satisfiable. **Correction**: Cette assertion est fausse dans $\mathcal{I}$, mais elle pourrait être vraie dans une autre interprétation $\mathcal{J}$ et être satisfiable. Voir qu'il suffit de prendre $\mathcal{J}$ défini par $\Delta' = \{a\}$ (il faut non vide), $A^{\mathcal{J}} = B^{\mathcal{J}} = p^{\mathcal{J}} = \emptyset$ pour avoir $(B \sqcap \exists p^{-1}.\top)^{\mathcal{J}} = \emptyset \subseteq (B \sqcap \exists p.\neg(A \sqcup B))^{\mathcal{J}} = \emptyset$ donc l'assertion est vraie dans $\mathcal{J}$ et elle est donc satisfiable.
2. $B \sqcap \exists p^{-1}.\top \sqsubseteq B \sqcap \exists p.\neg(A \sqcup B)$ est valide. **Correction**: Cette assertion est fausse dans $\mathcal{I}$ donc elle n'est pas vraie dans toutes les interprétations donc elle n'est pas valide.

Question 5 : transformation en logique du premier ordre Dans ce qui suit on note $\Phi_C(x)$ la formule de logique du premier ordre exprimant que x est une instance du concept C et $\Phi(C \sqsubseteq D)$ celle exprimant que C est un sous-concept de D. Vous construirez inductivement vos réponses.

1. Donnez la formule $F_1 = \Phi_{B \sqcap \exists p^{-1}.\top}(x)$ **Correction**: $F_1 = \Phi_{B \sqcap \exists p^{-1}.\top}(x) = \Phi_B(x) \land \Phi_{\exists p^{-1}.\top}(x) = B(x) \land \exists y(\Phi_{p^{-1}}(x,y) \land \Phi_\top(y)) = B(x) \land \exists y(\Phi_p(y,x) \land \top(y)) = B(x) \land \exists y\, p(y,x)$
2. Donnez la formule $F_2 = \Phi_{B \sqcap \exists p.\neg(A \sqcup B)}(x)$ **Correction**: $F_2 = \Phi_{B \sqcap \exists p.\neg(A \sqcup B)}(x) = \Phi_B(x) \land \Phi_{\exists p.\neg(A \sqcup B)}(x) = B(x) \land \exists y(\Phi_p(x,y) \land \Phi_{\neg(A \sqcup B)}(y)) = B(x) \land \exists y(p(x,y) \land \neg\Phi_{A \sqcup B}(y)) = B(x) \land \exists y(p(x,y) \land \neg(\Phi_A(y) \lor \Phi_B(y))) = B(x) \land \exists y(p(x,y) \land \neg(A(y) \lor B(y)))$
3. En utilisant votre réponse à la question 4, prouvez que la formule de logique du premier ordre $\forall x(F_1 \rightarrow F_2)$ est satisfiable. Vous justifierez soigneusement votre réponse. **Correction**: $\forall x(F_1 \rightarrow F_2) = \forall x(\Phi_{B \sqcap \exists p^{-1}.\top}(x) \rightarrow \Phi_{B \sqcap \exists p.\neg(A \sqcup B)}(x)) = \Phi(B \sqcap \exists p^{-1}.\top \sqsubseteq B \sqcap \exists p.\neg(A \sqcup B))$. On a vu a la question 4.1 que cette assertion en DL était satisfiable, donc par le théorème d'équivalence entre les assertions DL et leur traduction par Φ, la formule logique $\forall x(F_1 \rightarrow F_2)$ est également satisfiable.

Question 6 : transformation en règles Pour chacune des assertions de la forme $C \sqsubseteq D$ suivantes, vous commencerez par exprimer la formule de logique du premier ordre $\Phi(C \sqsubseteq D)$ traduisant cette assertion. Ensuite vous devrez dire si cette formule est exprimable (soit directement, soit par une transformation qui préserve l'équivalence) sous la forme d'une (ou plusieurs) règles datalog, contraintes négatives, ou règles existentielles.
Rappel : les règles existentielles étendent les règles datalog en autorisant des variables en conclusion de règle qui n'apparaissent pas en hypothèse de règle ; ces variables sont quantifiées existentiellement.

Correction: Remarque : toute règle datalog étant aussi une règle existentielle, on ne le précisera pas par la suite.

1. $A \sqsubseteq B \sqcap \exists p.B$ **Correction**: Par Φ on obtient la formule équivalente $\forall x(A(x) \rightarrow B(x) \land \exists y(p(x,y) \land B(y)))$. On peut voir cette formule comme une règle existentielle : $A(x) \rightarrow \exists y\ B(x), p(x,y), B(y)$, ou bien on peut la décomposer en une règle datalog $A(x) \rightarrow B(x)$ et une règle existentielle (non datalog) $A(x) \rightarrow \exists y\ p(x,y), B(y)$.
2. $A \sqcap \exists p.A \sqsubseteq B$ **Correction**: Par Φ on obtient la formule $\forall x((A(x) \land \exists y(p(x,y) \land A(y))) \rightarrow B(x))$ ce qu'on peut réécrire en $\forall x \forall y((A(x) \land p(x,y) \land A(y)) \rightarrow B(x))$. Ceci correspond à une règle datalog : $A(x), p(x,y), A(y) \rightarrow B(x)$.
3. $A \sqsubseteq \neg B$ **Correction**: C'est équivalent à $A \sqcap B \sqsubseteq \bot$ qui se traduit par Φ en $\forall x((A(x) \land B(x)) \rightarrow \bot)$ qui est la forme d'une contrainte négative qu'on peut écrire $A(x), B(x) \rightarrow \bot$.
4. $A \sqsubseteq \forall p.\neg B$ **Correction**: C'est équivalent à $A \sqsubseteq \neg(\exists p.B)$ (lois de Morgan) et donc à $A \land \exists p.B \sqsubseteq \bot$ (par la même manip que la question précédente) et nous donne donc la contrainte négative $A(x), p(x,y), B(y) \rightarrow \bot$.
5. $A \sqcup \exists p.B \sqsubseteq B$ **Correction**: C'est équivalent à la conjonction des deux assertions $A \sqsubseteq B$ et $\exists p.B \sqsubseteq B$ ce qui nous donne 2 règles datalog $A(x) \rightarrow B(x)$ et $p(x,y), B(y) \rightarrow B(x)$.
6. $A \sqsubseteq B \sqcup \exists p.\top$ **Correction**: On obtient la formule logique $\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(B(x) \land p(x,y)))$. Comme il y a une disjonction dans la partie tête dont on ne sait pas comment se débarrasser, ce n'est pas le format d'une règle datalog ni existentielle.

2 Règles

Soit la base de connaissances $\mathcal{K} = (F, \mathcal{R} = \{R_1, R_2\})$ avec :
$F = \{p(a,b,c), s(a,b), r(a,d), r(b,c), r(c,a), s(c,b), s(d,c), s(d,d)\}$
$R_1 = r(x_1, y_1) \wedge s(y_1, z_1) \rightarrow q(x_1)$
$R_2 = p(x_2, y_2, z_2) \wedge q(x_2) \rightarrow p(y_2, z_2, x_2)$

Question 1 : chaînage avant Saturez F par $\mathcal{R}$ avec l'algorithme de chaînage avant en largeur (à chaque étape, on recherche tous les nouveaux homomorphismes des hypothèses de règles dans la base de faits courante, et on effectue les applications correspondantes, avant de modifier effectivement la base de faits courante). Vous présenterez le déroulement de l'algorithme selon le format suivant :

Etape	Règle applicable	Homomorphisme	fait produit	utile ?
n^o étape	*n^o règle*			*oui/non*
...				

Correction: L'algorithme en largeur effectue 4 étapes : à la première étape, seule R_1 est applicable par 4 homomorphismes, correspondant à 3 applications utiles ; chaque étape suivante comporte une application de R_2, la dernière étant inutile. La base de faits saturée obtenue est BF $\cup\{q(a), q(b), q(c), p(b,c,a), p(c,a,b)\}$.

Question 2 : requêtage Soit la requête $Q(x,y,z) = \exists u\ p(x,y,z) \wedge r(x,u) \wedge s(u,z)$. Quelles sont toutes les réponses à Q sur la base de connaissances $\mathcal{K}$? Vous justifierez ces réponses avec des homomorphismes.

Correction: Il y a 2 homomorphismes de Q dans la base de faits saturée :
$h_1 : x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c, u \mapsto d$ et $h_2 : x \mapsto c, y \mapsto a, z \mapsto b, u \mapsto a$, ce qui donne l'ensemble de réponses $\{(a,b,c),(c,a,b)\}$.

Question 3 : chaînage arrière Soit la requête $Q_2(x_2, y_2, z_2) = p(x_2, y_2, z_2) \wedge r(x_2, z_2) \wedge s(z_2, z_2)$.

3.a) Que peut-on dire de Q_2 par rapport à Q ? Justifiez votre réponse.

Correction: Toute réponse à Q_2 est une réponse à Q, autrement dit $Q_2 \sqsubseteq Q$. En effet, on a un homomorphisme de Q dans Q_2 qui envoie la ième variable réponse de Q sur la ième réponse de Q_2. Remarquons qu'il est important que cet homomorphisme fasse "se correspondre" les variables réponses, sinon on n'aurait pas forcément le fait qu'une réponse à Q_2 est une réponse à Q.

3.b) Déterminez l'ensemble des réponses à Q_2 sur $\mathcal{K}$ par un algorithme de chaînage arrière (en appliquant les heuristiques de choix des atomes qui vous paraissent les plus pertinentes). Vous dessinerez l'arbre construit par le chaînage arrière, en indiquant sur chaque arc les informations utiles : l'atome de la requête considéré, le nom de la règle ou l'atome de la base de faits, ainsi que l'unificateur trouvé.

Correction: Il faut dessiner l'arbre construit par le chaînage arrière, sans oublier de développer toutes les branches si l'atome choisi peut s'unifier de plusieurs façons (avec des atomes de la base de faits ou des conclusions de règles). On constate que l'ensemble de réponses à Q_2 est vide. Dans cet exemple, on peut construire un arbre qui est en fait un chemin si on fait les "bons choix", autrement dit chaque atome choisi ne s'unifie que *d'une seule façon* : $s(z_2, z_2)$ unifié avec $s(d,d)$ de F, ce qui produit la requête $\{p(x_2, y_2, d), r(x_2, d)\}$ puis $r(x_2, d)$ avec $r(a,d)$ de F, ce qui produit $p(a, y_2', d)\}$, qui est ensuite unifié avec la conclusion de R_2, ce qui produit $p(d, a, y_2'), q(d)\}$, puis $q(d)$ unifié avec la conclusion de R_1, ce qui produit $\{p(d, a, y_2'), r(d, y_1), s(y_1, z_1)\}$, et l'on constate que l'on ne peut pas unifier $r(d, y_1)$, d'où l'échec.

Question 4 : question de réflexion Considérons pour simplifier que tous les prédicats sont binaires. On voudrait pouvoir poser des requêtes qui retournent aussi les prédicats (ou relations) qui lient deux individus, par exemple "quels sont tous les p tels que $p(a,b)$?" (si a et b sont des constantes), ou bien "quels sont les x, y et p tels que $p(x,y)$?" Quelle transformation de vocabulaire (et donc des bases de connaissances et des requêtes) pourrait-on effectuer de façon à pouvoir poser de telles requêtes ?

Correction: On se donne un nouveau vocabulaire avec un seul prédicat ternaire, que l'on nomme par exemple *triple*, et une constante par prédicat binaire du vocabulaire d'origine. Les bases de connaissances et requêtes sur le vocabulaire d'origine sont traduites en transformant tout atome de la forme $p(e_1, e_2)$ en l'atome $triple(e_1, p, e_2)$.