Spécifications formelles, vérification, validation (HMIN203)

Master AIGLE

Département Informatique

Faculté des Sciences de Montpellier

Examen du 27 juin 2017

Tous les documents sont autorisés. Les ordinateurs portables sont également autorisés, mais sans le réseau, et vous ne pouvez pas exécuter Coq.
L'examen dure 2h. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet comporte 2 pages et il y a 3 exercices.

Exercice 1 (7 pts)

1. Démontrer dans LK les propositions suivantes en logique du premier ordre :
   — $(\forall x.P(x)) \lor (\forall x.Q(x)) \Rightarrow \forall x.P(x) \lor Q(x)$;
   — $(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \Rightarrow (\exists x.Q(x))$.
2. Dans la logique implicative minimale, donner les λ-termes correspondants aux preuves des propositions suivantes :
   — $A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$;
   — $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow C$.

Exercice 2 (7 pts)

Dans ce qui suit, vous pouvez utiliser soit une notation mathématique (en logique du premier ordre), soit du code Coq (sauf pour la partie preuve, qui devra être faite semi-formellement en logique du premier ordre).

1. Spécifier inductivement le comportement de la suite (paramétrée) suivante :
   $u_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } n = 0 \\ x \times u_{n-1}(x), \text{ sinon} \end{cases}$
2. Écrire la suite précédente comme une fonction.
   Que calcule cette fonction ?
3. Écrire le schéma d'induction fonctionnelle correspondant à la fonction précédemment écrite.
4. Démontrer en utilisant ce schéma que la fonction est conforme à sa spécification.

Exercice 3 (7 pts)

En utilisant la logique de Hoare, démontrer la validité du triplet suivant (ce qui revient à démontrer que le programme ci-dessous implante la fonction qui calcule la somme des n premiers entiers) :

$\{\}$
$i := 0;$
$r := 0;$
while i != n do
  $i := i + 1;$
  $r := r + i;$
$\{r = \frac{n(n+1)}{2}\}$