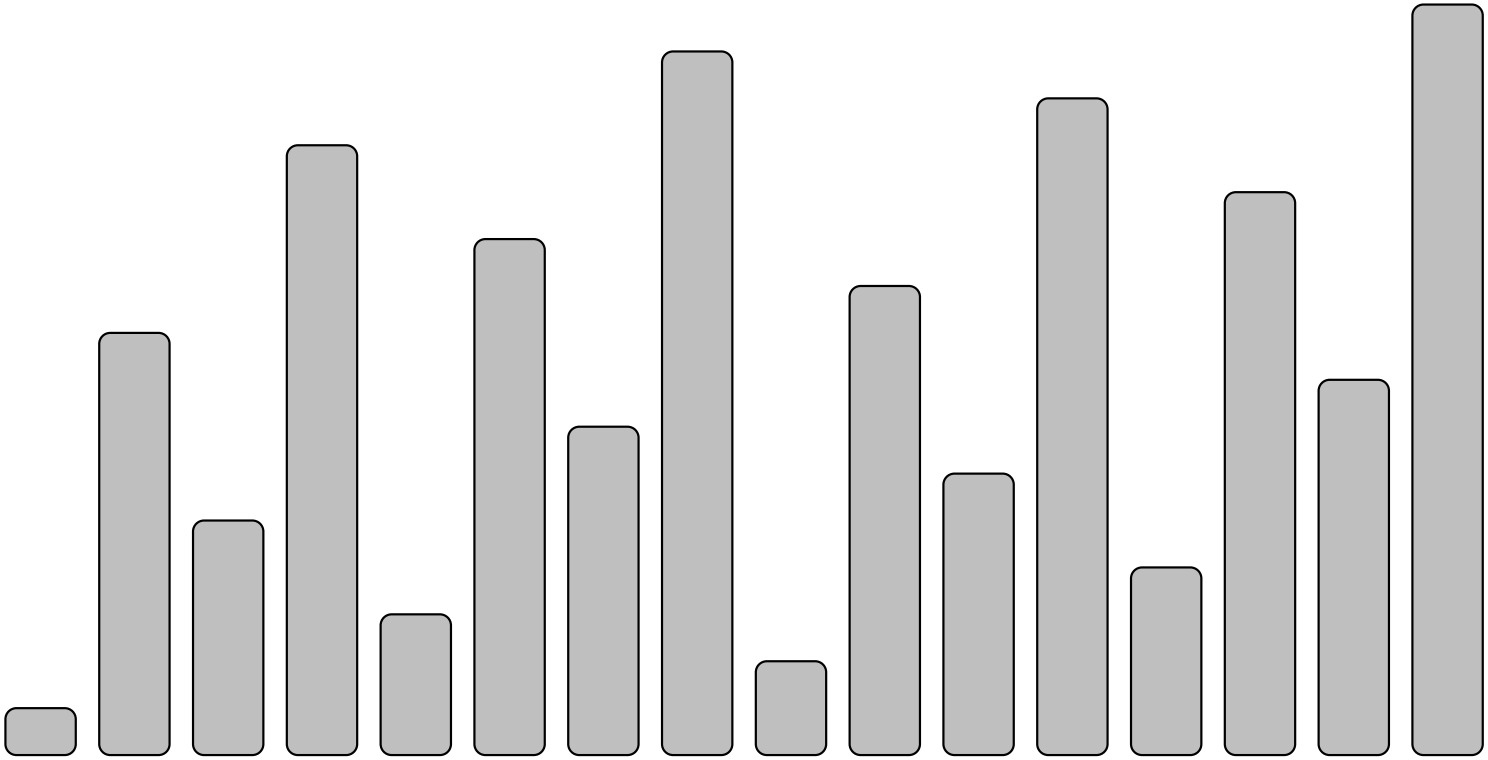
Chapitre 6
Programmation dynamique

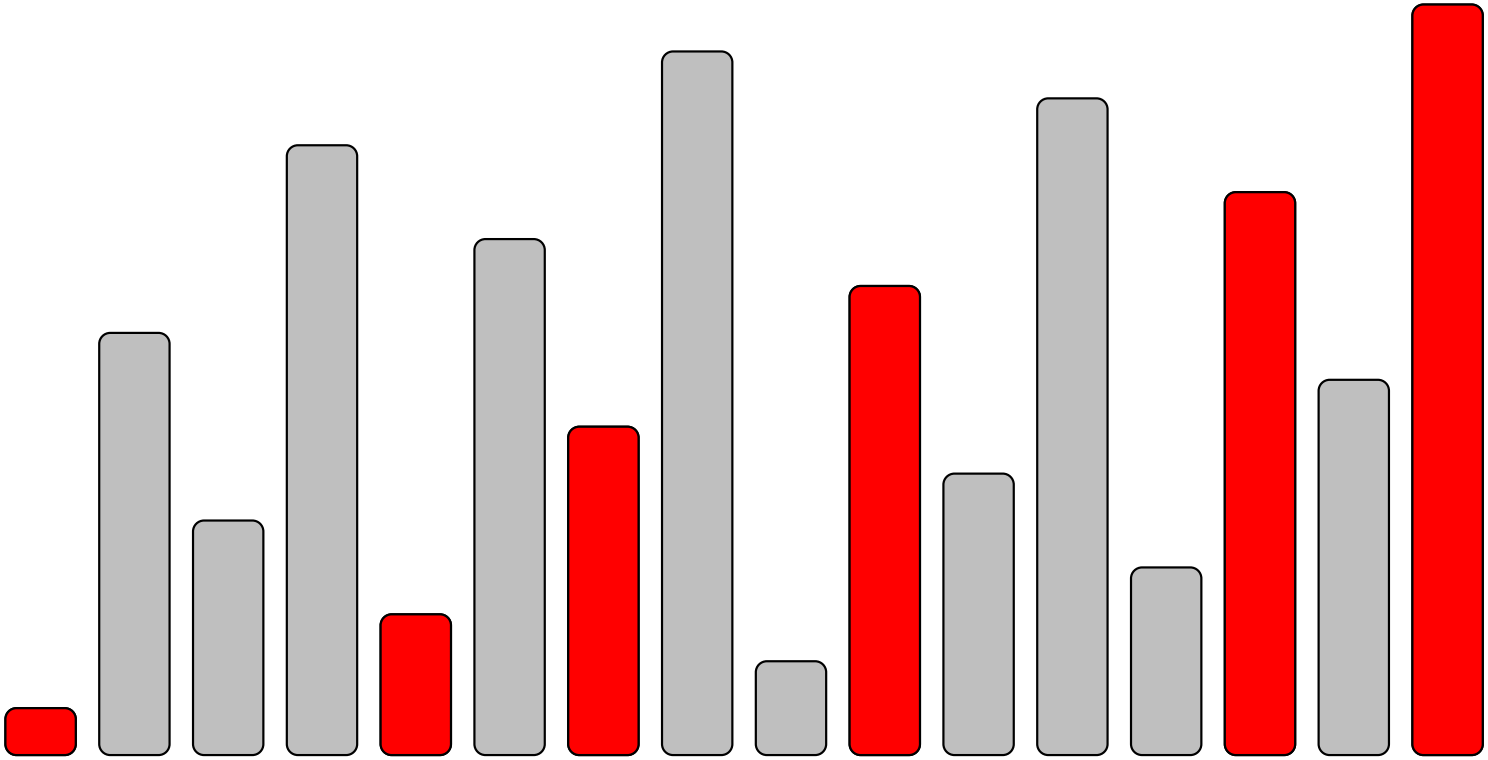
HLIN401 : Algorithmique et complexité

Université de Montpellier
2018 – 2019

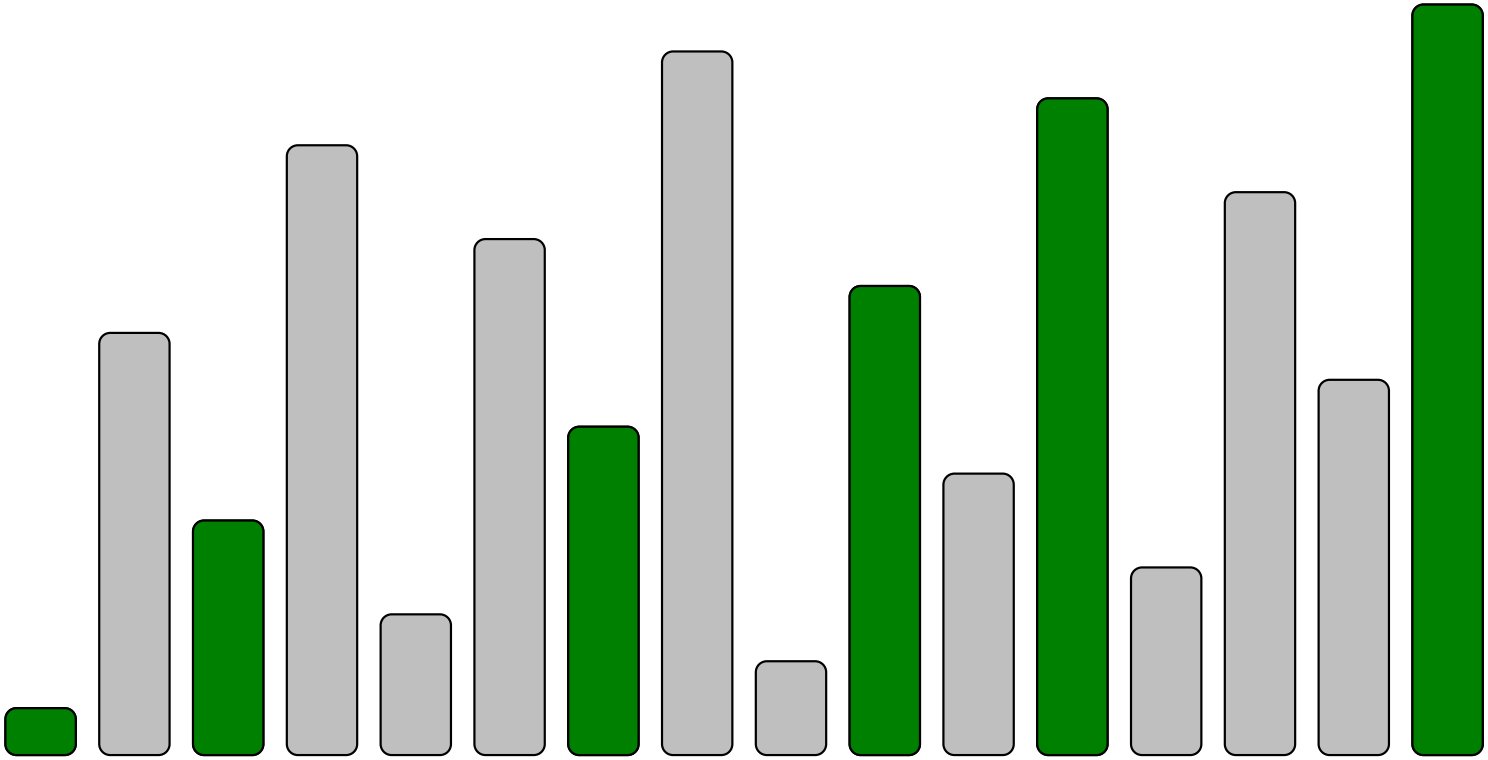
Plus longue sous-suite croissante



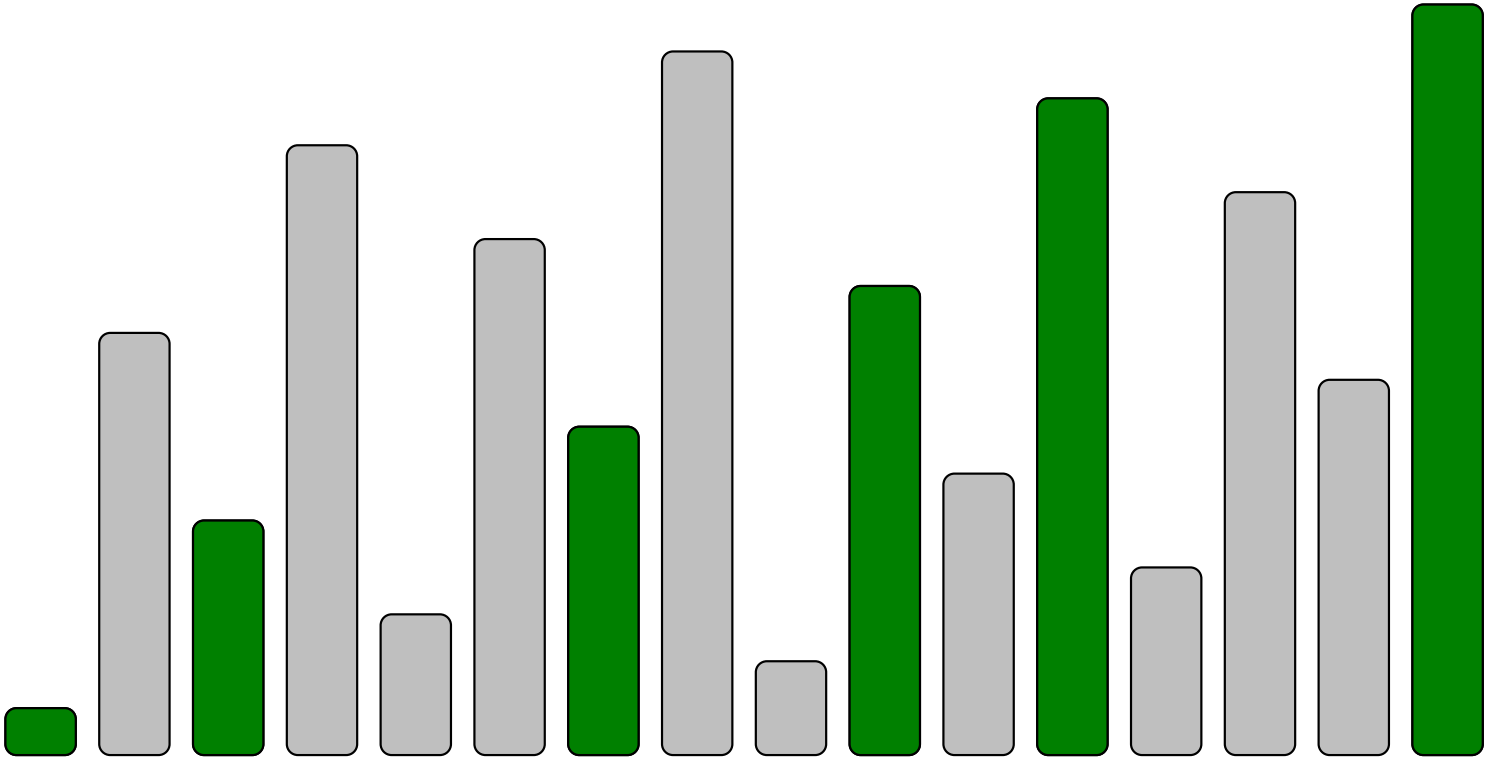
Plus longue sous-suite croissante



Plus longue sous-suite croissante



Plus longue sous-suite croissante



Définition

Une **plus longue sous-suite croissante (PLSSC)** d'un tableau T d'entiers est une suite la plus grande possible d'indices $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n-1$ telle que $T[i_1] \leq T[i_2] \leq \cdots \leq T[i_k]$.

Formalisation du problème

Entrée Un tableau T de n entiers

Sortie 1 Une PLSSC de T

Formalisation du problème

Entrée Un tableau T de n entiers

Sortie 1 Une PLSSC de T

Sortie 2 La longueur d'une PLSSC de T

Formalisation du problème

Entrée Un tableau T de n entiers

Sortie 1 Une PLSSC de T

Sortie 2 La longueur d'une PLSSC de T

Exemple précédent

Entrée $T = [1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16]$

Sortie 1 $[1, 3, 7, 10, 12, 16]$ ou $[1, 5, 7, 10, 14, 16]$ ou ...

Sortie 2 6

Formalisation du problème

Entrée Un tableau T de n entiers

Sortie 1 Une PLSSC de T

Sortie 2 La longueur d'une PLSSC de T

Exemple précédent

Entrée $T = [1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16]$

Sortie 1 $[1, 3, 7, 10, 12, 16]$ ou $[1, 5, 7, 10, 14, 16]$ ou ...

Sortie 2 6

- Algo. naïf : considérer toutes les sous-suites $\rightsquigarrow O(2^n)$

Formalisation du problème

Entrée Un tableau T de n entiers

Sortie 1 Une PLSSC de T

Sortie 2 La longueur d'une PLSSC de T

Exemple précédent

Entrée $T = [1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16]$

Sortie 1 $[1, 3, 7, 10, 12, 16]$ ou $[1, 5, 7, 10, 14, 16]$ ou ...

Sortie 2 6

- Algo. naïf : considérer toutes les sous-suites $\rightsquigarrow O(2^n)$

Algorithme de complexité polynomiale ?

Formule récursive pour PLSSC

- **plssc(T)** : longueur des PLSSC de T
- $L[i]$: longueur des PLSSC de T **finissant en case** $T[i]$

Formule récursive pour PLSSC

- **plssc(T)** : longueur des PLSSC de T
- **$L[i]$** : longueur des PLSSC de T **finissant en case $T[i]$**

Remarque

$$\text{plssc}(T) = \max_{0 \leq i < n} L[i]$$

Formule récursive pour PLSSC

- **plssc(T)** : longueur des PLSSC de T
- **$L[i]$** : longueur des PLSSC de T **finissant en case $T[i]$**

Remarque

$$\text{plssc}(T) = \max_{0 \leq i < n} L[i]$$

Lemme

$$L[i] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{L[j] : j < i \text{ et } T[j] \leq T[i]\} & \text{pour } 1 \leq i < n \end{cases}$$

Formule récursive pour PLSSC

- **plssc(T)** : longueur des PLSSC de T
- **$L[i]$** : longueur des PLSSC de T **finissant en case $T[i]$**

Remarque

$$\text{plssc}(T) = \max_{0 \leq i < n} L[i]$$

Lemme

$$L[i] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{L[j] : j < i \text{ et } T[j] \leq T[i]\} & \text{pour } 1 \leq i < n \end{cases}$$

Preuve On montre deux inégalités :

- $\geq$ si $L[j_m]$ est le max, il existe une SSC $T[i_1], \ldots, T[i_k]$ de longueur $L[j_m] \rightsquigarrow T[i_1], \ldots, T[i_k], T[i]$ est une SSC de longueur $1 + L[j_m]$
- $\leq$ si $T[i_1], \ldots, T[i_k]$ est une PLSSC finissant en i, alors $L[i_{k-1}] \geq k - 1$ donc $\max\{L[j] : \ldots\} \geq k - 1$

Formule récursive pour PLSSC

- **plssc(T)** : longueur des PLSSC de T
- **$L[i]$** : longueur des PLSSC de T **finissant en case $T[i]$**

Remarque

$$\text{plssc}(T) = \max_{0 \leq i < n} L[i]$$

Lemme

$$L[i] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \max\{L[j] : j < i \text{ et } T[j] \leq T[i]\} & \text{pour } 1 \leq i < n \end{cases}$$

Ne pas programmer la formule par un algorithme récursif !

Algorithme PLSSC

Algorithme : PLSSC(T)

$L \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à 1

$M \leftarrow L[0]$ // M contient $\max_i L[i]$

pour $i = 1$ *à* $n - 1$ **faire**

  $m \leftarrow 0$ // m contient $\max\{L[j] : j < i, T[j] \leq T[i]\}$

  pour $j = 0$ *à* $i - 1$ **faire**

    si $T[j] \leq T[i]$ *et* $L[j] > m$ **alors**

      $m \leftarrow L[j]$

  $L[i] \leftarrow 1 + m$

  si $L[i] > M$ **alors** $M \leftarrow L[i]$

retourner M

Correction et complexité

Théorème

L'algorithme PLSSC *calcule* plssc(T) *en temps* $O(n^2)$.

Algorithme : PLSSC(T)

$L \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à 1
$M \leftarrow L[0]$
pour $i = 1$ *à* $n - 1$ **faire**
    $m \leftarrow 0$
    pour $j = 0$ *à* $i - 1$ **faire**
        si $T[j] \leq T[i]$ *et* $L[j] > m$ **alors**
            $m \leftarrow L[j]$
    $L[i] \leftarrow 1 + m$
    si $L[i] > M$ **alors** $M \leftarrow L[i]$
retourner M

Correction et complexité

Théorème
L'algorithme PLSSC *calcule* plssc(T) *en temps* $O(n^2)$.

Algorithme : PLSSC(T)

$L \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à 1
$M \leftarrow L[0]$
pour $i = 1$ *à* $n-1$ **faire**
    $m \leftarrow 0$
    pour $j = 0$ *à* $i-1$ **faire**
        si $T[j] \leq T[i]$ *et* $L[j] > m$ **alors**
            $m \leftarrow L[j]$
    $L[i] \leftarrow 1 + m$
    si $L[i] > M$ **alors** $M \leftarrow L[i]$
retourner M

Preuve de correction : utilisation de la formule récursive
Preuve de complexité : double boucle

Correction et complexité

Théorème
L'algorithme PLSSC *calcule* plssc(T) *en temps* $O(n^2)$.

Algorithme : PLSSC(T)

$L \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à 1
$M \leftarrow L[0]$
pour $i = 1$ *à* $n-1$ **faire**
    $m \leftarrow 0$
    pour $j = 0$ *à* $i-1$ **faire**
        si $T[j] \leq T[i]$ *et* $L[j] > m$ **alors**
            $m \leftarrow L[j]$
    $L[i] \leftarrow 1 + m$
    si $L[i] > M$ **alors** $M \leftarrow L[i]$
retourner M

Preuve de correction : utilisation de la formule récursive
Preuve de complexité : double boucle

Comment calculer une PLSSC (en plus de sa longueur) ?

- Retenir les indices des max
- Reconstruire *a posteriori*

Algorithme PLSSC avec reconstruction

Algorithme : PLSSC(T)

$L \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à 1

$Ind \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à -1

$i_M \leftarrow 0$

pour $i = 1$ *à* $n - 1$ **faire**

  $m \leftarrow 0$

  pour $j = 0$ *à* $i - 1$ **faire**

    si $T[j] \leq T[i]$ *et* $L[j] > m$ **alors**

      $m \leftarrow L[j]$; $Ind[i] \leftarrow j$

  $L[i] \leftarrow 1 + m$

  si $L[i] > L[i_M]$ **alors** $i_M \leftarrow i$

retourner $L[i_M]$, i_M *et* Ind

Algorithme PLSSC avec reconstruction

Algorithme : PLSSC(T)

$L \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à 1

$Ind \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à -1

$i_M \leftarrow 0$

pour $i = 1$ *à* $n - 1$ **faire**

  $m \leftarrow 0$

  pour $j = 0$ *à* $i - 1$ **faire**

    si $T[j] \leq T[i]$ *et* $L[j] > m$ **alors**

      $m \leftarrow L[j]$; $Ind[i] \leftarrow j$

  $L[i] \leftarrow 1 + m$

  si $L[i] > L[i_M]$ **alors** $i_M \leftarrow i$

retourner $L[i_M]$, i_M *et* Ind

Algorithme :
PLSSC_REC(T, i_M, Ind)

$S \leftarrow \emptyset$

$i \leftarrow i_M$

tant que $i \neq -1$ **faire**

  $S \leftarrow \{i\} \cup S$

  $i \leftarrow Ind[i]$

retourner S

Algorithme PLSSC avec reconstruction

Algorithme : PLSSC(T)

$L \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à 1

$Ind \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à -1

$i_M \leftarrow 0$

pour $i = 1$ *à* $n - 1$ **faire**

  $m \leftarrow 0$

  pour $j = 0$ *à* $i - 1$ **faire**

    si $T[j] \leq T[i]$ *et* $L[j] > m$ **alors**

      $m \leftarrow L[j]$; $Ind[i] \leftarrow j$

  $L[i] \leftarrow 1 + m$

  si $L[i] > L[i_M]$ **alors** $i_M \leftarrow i$

retourner $L[i_M]$, i_M *et* Ind

Algorithme : PLSSC_REC(T, i_M, Ind)

$S \leftarrow \emptyset$

$i \leftarrow i_M$

tant que $i \neq -1$ **faire**

  $S \leftarrow \{i\} \cup S$

  $i \leftarrow Ind[i]$

retourner S

Lemme

L'algo. PLSSC_REC *reconstruit une* PLSSC *de* T *en temps* $O(n)$.

Idée générale

Programmation dynamique = récursion sans répétition

Idée générale

Programmation dynamique = récursion sans répétition

Ingrédients

1. Formule récursive pour la valeur optimale
   - en fonction des valeurs de sous-problèmes
   - sous-problèmes possiblement nombreux et non disjoints

Idée générale

Programmation dynamique = récursion sans répétition

Ingrédients

1. Formule récursive pour la valeur optimale
   - en fonction des valeurs de sous-problèmes
   - sous-problèmes possiblement nombreux et non disjoints
2. Algorithme itératif pour la valeur optimale
   - en commençant par les plus petits sous-problèmes
   - approche « *bottom-up* »

Idée générale

Programmation dynamique = récursion sans répétition

Ingrédients

1. Formule récursive pour la valeur optimale
   - en fonction des valeurs de sous-problèmes
   - sous-problèmes possiblement nombreux et non disjoints
2. Algorithme itératif pour la valeur optimale
   - en commençant par les plus petits sous-problèmes
   - approche « *bottom-up* »
3. Reconstruction de la solution *a posteriori*
   - ajout d'informations à l'algo. pour la valeur
   - algorithme de reconstruction indépendant

Idée générale

Programmation dynamique = récursion sans répétition

Ingrédients

1. Formule récursive pour la valeur optimale
   - en fonction des valeurs de sous-problèmes
   - sous-problèmes possiblement nombreux et non disjoints
2. Algorithme itératif pour la valeur optimale
   - en commençant par les plus petits sous-problèmes
   - approche « *bottom-up* »
3. Reconstruction de la solution *a posteriori*
   - ajout d'informations à l'algo. pour la valeur
   - algorithme de reconstruction indépendant

« Diviser pour régner »

Sous-problèmes disjoints, approche « *top-down* »

Ingrédient 1 : Formule récursive

Partie la plus importante (et difficile) !

Ingrédient 1 : Formule récursive

Partie la plus importante (et difficile) !

Étapes

1. Spécification **précise** du problème
2. Formule récursive basée sur les solutions d'instances plus petites du **même problème exactement**

Ingrédient 1 : Formule récursive

Partie la plus importante (et difficile) !

Étapes

1. Spécification **précise** du problème
2. Formule récursive basée sur les solutions d'instances plus petites du **même problème exactement**

Plus longue sous-suite croissante

1. Définition de $L[i]$ en pas seulement plssc(T)
2. Expression de $L[i]$ en fonction des $L[j]$, $j < i$

Ingrédient 1 : Formule récursive

Partie la plus importante (et difficile) !

Étapes

1. Spécification **précise** du problème
2. Formule récursive basée sur les solutions d'instances plus petites du **même problème exactement**

Plus longue sous-suite croissante

1. Définition de $L[i]$ en pas seulement plssc(T)
2. Expression de $L[i]$ en fonction des $L[j]$, $j < i$

En pratique, étape souvent (très) guidée

Ingrédient 2 : Algorithme itératif

Partie plutôt facile... mais attention quand même !

Ingrédient 2 : Algorithme itératif

Partie plutôt facile... mais attention quand même !

Étapes

1. choix d'une structure de données (*très* souvent un tableau)
2. **ordre de calcul** si tableau multi-dimensionnel *cf. ex. suivants*
3. écriture effective de l'algorithme
4. analyse de complexité

Ingrédient 2 : Algorithme itératif

Partie plutôt facile... mais attention quand même !

Étapes

1. choix d'une structure de données (*très* souvent un tableau)
2. **ordre de calcul** si tableau multi-dimensionnel *cf. ex. suivants*
3. écriture effective de l'algorithme
4. analyse de complexité

Plus longue sous-suite croissante

1. Tableau L
2. Ordre croissant

Ingrédient 2 : Algorithme itératif

Partie plutôt facile... mais attention quand même !

Étapes

1. choix d'une structure de données (*très* souvent un tableau)
2. **ordre de calcul** si tableau multi-dimensionnel *cf. ex. suivants*
3. écriture effective de l'algorithme
4. analyse de complexité

Plus longue sous-suite croissante

1. Tableau L
2. Ordre croissant

En pratique, étape souvent non guidée

Ingrédient 3 : Reconstruction

Partie de difficulté très variable !

Ingrédient 3 : Reconstruction

Partie de difficulté très variable !

Étapes

1. ajout d'informations supplémentaires à l'algo. précédent
2. *redescente* depuis la solution générale vers les instances petites

Ingrédient 3 : Reconstruction

Partie de difficulté très variable !

Étapes

1. ajout d'informations supplémentaires à l'algo. précédent
2. *redescente* depuis la solution générale vers les instances petites

Plus longue sous-suite croissante

1. tableau Ind, indice i_M
2. descente depuis $T[i_M]$, en suivant Ind

Ingrédient 3 : Reconstruction

Partie de difficulté très variable !

Étapes

1. ajout d'informations supplémentaires à l'algo. précédent
2. *redescente* depuis la solution générale vers les instances petites

Plus longue sous-suite croissante

1. tableau Ind, indice i_M
2. descente depuis $T[i_M]$, en suivant Ind

En pratique, étape pas toujours effectuée

Conclusion sur la programmation dynamique

Comparaison avec les algorithmes gloutons :

- Algo. glouton : cas particulier de programmation dynamique avec un seul sous-problème
- Souvent pas suffisant

Conclusion sur la programmation dynamique

Comparaison avec les algorithmes gloutons :

- Algo. glouton : cas particulier de programmation dynamique avec un seul sous-problème
- Souvent pas suffisant

Les algorithmes gloutons fonctionnent rarement !

Conclusion sur la programmation dynamique

Comparaison avec les algorithmes gloutons :

- Algo. glouton : cas particulier de programmation dynamique avec un seul sous-problème
- Souvent pas suffisant

Les algorithmes gloutons fonctionnent rarement !

D'où vient ce nom ?

- Belman (1940) : travaux en optimisation mathématique
  - Programmation : planification, ordonnancement
  - Dynamique : « *it's impossible to use the word dynamic in a pejorative sense* »
- Origine du mot peu claire : référence à la programmation linéaire, et/ou problèmes de financements (*cf* Wikipédia)

Revisitons nos classiques

Choix de cours **valué**

Entrée cours $C_i = (d_i, f_i, e_i)$ [début, fin, crédits ECTS], $0 \leq i < n$

Sortie un sous-ensemble de cours compatibles qui maximise le nombre total de crédits ECTS

Revisitons nos classiques

Choix de cours **valué**

Entrée cours $C_i = (d_i, f_i, e_i)$ [début, fin, crédits ECTS], $0 \leq i < n$

Sortie un sous-ensemble de cours compatibles qui maximise le nombre total de crédits ECTS

Lemme

L'algorithme ChoixCoursGlouton *vu pour le choix de cours non valué est arbitrairement mauvais sur ce problème !*

Revisitons nos classiques

Choix de cours **valué**

Entrée cours $C_i = (d_i, f_i, e_i)$ [début, fin, crédits ECTS], $0 \leq i < n$

Sortie un sous-ensemble de cours compatibles qui maximise le nombre total de crédits ECTS

Lemme

L'algorithme ChoixCoursGlouton *vu pour le choix de cours non valué est arbitrairement mauvais sur ce problème !*

Exemple

$C = \{(9, 12, 1), (11, 14, 100), (13, 15, 1)\}$:

- ChoixCoursGlouton renvoie une solution à 2 ECTS
- L'optimal est 50 fois meilleur !

Formule récursive pour le choix de cours valué

Cours triés par ordre de fin croissante C_0, C_1, ..., C_{n-1}

Notations

- $\text{pred}(k) = \max\{j : f_j \leq d_k\}$ (avec $\max(\emptyset) = -1$)
- maxECTS(k) : nombre maximal d'ECTS avec les cours C_0, ..., C_k (maxECTS$(-1) = 0$)

Formule récursive pour le choix de cours valué

Cours triés par ordre de fin croissante C_0, C_1, ..., C_{n-1}

Notations

- $\text{pred}(k) = \max\{j : f_j \leq d_k\}$ (avec $\max(\emptyset) = -1$)
- maxECTS(k) : nombre maximal d'ECTS avec les cours C_0, ..., C_k (maxECTS$(-1) = 0$)

Lemme

maxECTS$(0) = e_0$ *et pour* $1 \leq k < n$,
maxECTS$(k) = \max(\textit{maxECTS}(k-1), e_k + \textit{maxECTS}(\textit{pred}(k)))$

Formule récursive pour le choix de cours valué

Cours triés par ordre de fin croissante $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$

Notations

- $\text{pred}(k) = \max\{j : f_j \leq d_k\}$ (avec $\max(\emptyset) = -1$)
- $\text{maxECTS}(k)$: nombre maximal d'ECTS avec les cours $C_0, \ldots, C_k$ ($\text{maxECTS}(-1) = 0$)

Lemme

$maxECTS(0) = e_0$ *et pour* $1 \leq k < n$,
$maxECTS(k) = \max(maxECTS(k-1), e_k + maxECTS(pred(k)))$

Preuve : la solution optimale pour $C_0, \ldots, C_k$ contient-elle C_k ?

- Si oui, les autres cours choisis sont parmi $C_0, \ldots, C_{\text{pred}(k)}$ $\rightsquigarrow$ nb d'ECTS : $e_k + \text{maxECTS}(\text{pred}(k))$
- Si non, nb d'ECTS : $\text{maxECTS}(k-1)$

Algorithme pour le choix de cours valué

Algorithme : MAXECTS(C)

Trier C par dates de fin croissantes

$P \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à -1 `// prédécesseurs`

pour $k = 1$ *à* $n - 1$ **faire**

  pour $j = 0$ *à* $k - 1$ **faire**

    si $f_j \leq d_k$ **alors** $P[k] \leftarrow j$

$M \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à 0

$M[0] \leftarrow e_0$

pour $k = 1$ *à* $n - 1$ **faire**

  si $P[k] \neq -1$ **alors** $M[k] \leftarrow \max(M[k-1], e_k + M[P[k]])$

  sinon $M[k] \leftarrow \max(M[k-1], e_k)$

retourner $M[n-1]$

Algorithme pour le choix de cours valué

Algorithme : MAXECTS(C)

Trier C par dates de fin croissantes

$P \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à -1 `// prédécesseurs`

pour $k = 1$ *à* $n - 1$ **faire**

  pour $j = 0$ *à* $k - 1$ **faire**

    si $f_j \leq d_k$ **alors** $P[k] \leftarrow j$

$M \leftarrow$ tableau de taille n, initialisé à 0

$M[0] \leftarrow e_0$

pour $k = 1$ *à* $n - 1$ **faire**

  si $P[k] \neq -1$ **alors** $M[k] \leftarrow \max(M[k-1], e_k + M[P[k]])$

  sinon $M[k] \leftarrow \max(M[k-1], e_k)$

retourner $M[n-1]$

Complexité : $O(n^2)$ (calcul de P, calcul de M en $O(n)$)

Et pour le sac-à-dos ?

Sac-à-dos (non fractionnaire)

Entrée un ensemble d'objets, ayant une taille t_i et une valeur v_i
une taille T de sac-à-dos

Sortie un sous-ensemble d'objets qui rentre dans le sac, et maximise la valeur totale

Et pour le sac-à-dos ?

Sac-à-dos (non fractionnaire)

Entrée un ensemble d'objets, ayant une taille t_i et une valeur v_i
une taille T de sac-à-dos

Sortie un sous-ensemble d'objets qui rentre dans le sac, et maximise la valeur totale

Lemme

L'algorithme SàdFracGlouton *n'est pas optimal pour le sac-à-dos non fractionnaire.*

Et pour le sac-à-dos ?

Sac-à-dos (non fractionnaire)

Entrée un ensemble d'objets, ayant une taille t_i et une valeur v_i
une taille T de sac-à-dos

Sortie un sous-ensemble d'objets qui rentre dans le sac, et maximise la valeur totale

Lemme

L'algorithme SàdFracGlouton *n'est pas optimal pour le sac-à-dos non fractionnaire.*

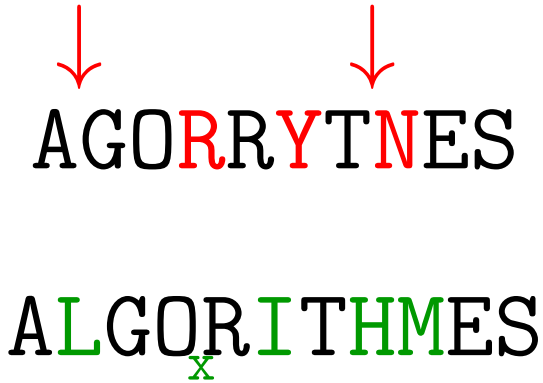
- Exemples vus en cours et TD
- Algos de programmation dynamique optimaux $\rightsquigarrow$ *cf.* TD

Corrigeons les erreurs

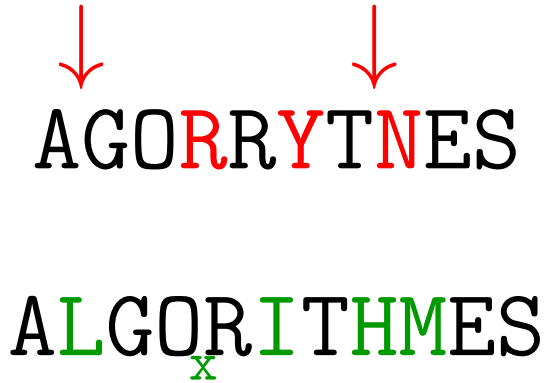
AGORRYTNES

Corrigeons les erreurs

Corrigeons les erreurs



Corrigeons les erreurs



À quelle **distance** se trouve-t-on du mot correct ?

Corrigeons les erreurs

ALGORITHMES

À quelle **distance** se trouve-t-on du mot correct ?

Distance 5

La distance d'édition

Définition

La **distance d'édition** (ou de **Levenshtein**, ou d'**Ulam**) entre deux mots A et B est la **longueur de la plus courte suite de transformations** pour passer de A à B, avec les transformations suivantes :

- **insertion** d'une nouvelle lettre
- **suppression** d'une lettre
- **remplacement** d'une lettre par une autre

La distance d'édition

Définition

La **distance d'édition** (ou de **Levenshtein**, ou d'**Ulam**) entre deux mots A et B est la **longueur de la plus courte suite de transformations** pour passer de A à B, avec les transformations suivantes :

- **insertion** d'une nouvelle lettre
- **suppression** d'une lettre
- **remplacement** d'une lettre par une autre

Définition alternative

Nombre minimal de désaccords dans un **alignement** de A et B

A	_	G	O	R	R	Y	T	_	N	E	S
A	L	G	O	_	R	I	T	H	M	E	S

Définition du problème

Entrée Deux mots A et B sur un alphabet
(mot : chaîne de caractère ou tableau de caractères ou ...)

Sortie 1 La distance d'édition entre A et B

Sortie 2 Une suite de transformations minimale de A à B

Définition du problème

Entrée Deux mots A et B sur un alphabet
(mot : chaîne de caractère ou tableau de caractères ou ...)

Sortie 1 La distance d'édition entre A et B

Sortie 2 Une suite de transformations minimale de A à B

Utilité

- Orthographe :
  - Correcteur orthographique
  - Reconnaissance optique de caractères
- Linguistique (proximité de langues)
- Bioinformatique :
  - similarité de séquences ADN
  - similarité d'arbres phylogénétiques
- ...

Formalisation

- $\delta(A, B)$: distance entre A et B
- edit(i, j) : distance entre $A[0, i]$ et $B[0, j]$
- convention : edit$(i, -1) = i + 1$ et edit$(-1, j) = j + 1$ pourquoi ?

Formalisation

- $\delta(A, B)$: distance entre A et B
- edit(i, j) : distance entre $A[0, i]$ et $B[0, j]$
- convention : edit$(i, -1) = i + 1$ et edit$(-1, j) = j + 1$
  pourquoi ?

$$\text{si } |A| = m \text{ et } |B| = n,\ \delta(A, B) = \text{edit}(m - 1, n - 1)$$

Formalisation

- $\delta(A, B)$: distance entre A et B
- edit(i, j) : distance entre $A[0, i]$ et $B[0, j]$
- convention : edit$(i, -1) = i + 1$ et edit$(-1, j) = j + 1$
  pourquoi ?

$$\text{si } |A| = m \text{ et } |B| = n,\ \delta(A, B) = \text{edit}(m - 1, n - 1)$$

Trois alignements possibles

$$\begin{array}{c} A[0,i-1] \\ \cdots \\ \cdots \\ B[0,j] \end{array} \begin{array}{c} A[i] \\ \_ \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{c} A[0,i] \\ \cdots \\ \cdots \\ B[0,j-1] \end{array} \begin{array}{c} \_ \\ B[j] \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{c} A[0,i-1] \\ \cdots \\ \cdots \\ B[0,j-1] \end{array} \begin{array}{c} A[i] \\ B[j] \end{array}$$

Formalisation

- $\delta(A, B)$: distance entre A et B
- edit(i, j) : distance entre $A[0, i]$ et $B[0, j]$
- convention : edit$(i, -1) = i + 1$ et edit$(-1, j) = j + 1$
  pourquoi ?

$$\text{si } |A| = m \text{ et } |B| = n,\ \delta(A, B) = \text{edit}(m - 1, n - 1)$$

Trois alignements possibles

$$\begin{array}{c} A[0,i-1] \\ \cdots \\ \cdots \\ B[0,j] \end{array} \begin{array}{c} A[i] \\ \_ \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{c} A[0,i] \\ \cdots \\ \cdots \\ B[0,j-1] \end{array} \begin{array}{c} \_ \\ B[j] \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{c} A[0,i-1] \\ \cdots \\ \cdots \\ B[0,j-1] \end{array} \begin{array}{c} A[i] \\ B[j] \end{array}$$

Alignements AGORR et ALGOR

AGORR	_		AGOR	R		AGOR	R		
ALGO	R		ALGOR	_		ALGO	R		
3	1		1	1		2	0	$\rightarrow$	2

Formule récursive

Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} = 1$ *si* $A[i] \neq B[j]$, 0 *sinon*

Formule récursive

Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} = 1$ *si* $A[i] \neq B[j]$, 0 *sinon*

Preuve : Notation $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i] \\ B[0,j] \end{smallmatrix}\right|$: alignement, avec $\text{edit}(i,j)$ désaccords

Formule récursive

Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} = 1$ *si* $A[i] \neq B[j]$, 0 *sinon*

Preuve : Notation $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i] \\ B[0,j] \end{smallmatrix}\right|$: alignement, avec $\text{edit}(i,j)$ désaccords

- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j)+1$: $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i-1] \\ B[0,j] \end{smallmatrix}\right|$ + suppression $A[i]$

Formule récursive

Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} = 1$ *si* $A[i] \neq B[j]$, 0 *sinon*

Preuve : Notation $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i] \\ B[0,j] \end{smallmatrix}\right|$: alignement, avec $\text{edit}(i,j)$ désaccords

- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j)+1$: $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i-1] \\ B[0,j] \end{smallmatrix}\right|$ + suppression $A[i]$
- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i,j-1)+1$: $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i] \\ B[0,j-1] \end{smallmatrix}\right|$ + insertion $B[j]$

Formule récursive

Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} = 1$ *si* $A[i] \neq B[j]$, 0 *sinon*

Preuve : Notation $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i] \\ B[0,j] \end{smallmatrix}\right|$: alignement, avec $\text{edit}(i,j)$ désaccords

- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j)+1$: $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i-1] \\ B[0,j] \end{smallmatrix}\right|$ + suppression $A[i]$
- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i,j-1)+1$: $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i] \\ B[0,j-1] \end{smallmatrix}\right|$ + insertion $B[j]$
- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]}$: $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i-1] \\ B[0,j-1] \end{smallmatrix}\right|$ + remplacement $A[i] \to B[j]$

Formule récursive

Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} = 1$ *si* $A[i] \neq B[j]$, 0 *sinon*

Preuve : Notation $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i] \\ B[0,j] \end{smallmatrix}\right|$: alignement, avec $\text{edit}(i,j)$ désaccords

- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j)+1$: $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i-1] \\ B[0,j] \end{smallmatrix}\right|$ + suppression $A[i]$
- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i,j-1)+1$: $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i] \\ B[0,j-1] \end{smallmatrix}\right|$ + insertion $B[j]$
- $\text{edit}(i,j) \leq \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]}$: $\left|\begin{smallmatrix} A[0,i-1] \\ B[0,j-1] \end{smallmatrix}\right|$ + remplacement $A[i] \to B[j]$

$$\Longrightarrow \text{edit}(i,j) \leq \min\{\dots\}$$

Formule récursive

Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} = 1$ *si* $A[i] \neq B[j]$, 0 *sinon*

Preuve Si $\text{edit}(i,j) = d$,

Formule récursive

Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} = 1$ *si* $A[i] \neq B[j]$, 0 *sinon*

Preuve Si $\text{edit}(i,j) = d$,

- $A[i] = B[j] \implies \text{edit}(i-1,j-1) = d$

Formule récursive

Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} = 1$ *si* $A[i] \neq B[j]$, 0 *sinon*

Preuve Si $\text{edit}(i,j) = d$,

- $A[i] = B[j] \implies \text{edit}(i-1,j-1) = d$
- $A[i] \neq B[j]$:
  - $\text{edit}(i-1,j-1) \geq d-1$
  - $\text{edit}(i,j-1) \geq d-1$
  - $\text{edit}(i-1,j) \geq d-1$

Formule récursive

Lemme

$$\text{edit}(i,j) = \min \begin{cases} \text{edit}(i-1,j)+1 \\ \text{edit}(i,j-1)+1 \\ \text{edit}(i-1,j-1)+\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_{A[i]\neq B[j]} = 1$ *si* $A[i] \neq B[j]$, 0 *sinon*

Preuve Si $\text{edit}(i,j) = d$,

- $A[i] = B[j] \implies \text{edit}(i-1,j-1) = d$
- $A[i] \neq B[j]$:
  - $\text{edit}(i-1,j-1) \geq d-1$
  - $\text{edit}(i,j-1) \geq d-1$
  - $\text{edit}(i-1,j) \geq d-1$

$$\implies \text{edit}(i,j) \geq \min\{\dots\}$$

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1									
L	2									
G	3									
O	4									
R	5									
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0								
L	2									
G	3									
O	4									
R	5									
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2									
G	3									
O	4									
R	5									
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1								
G	3									
O	4									
R	5									
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1							
G	3									
O	4									
R	5									
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3									
O	4									
R	5									
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2								
O	4									
R	5									
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1							
O	4									
R	5									
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4									
R	5									
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5									
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6									
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7									
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8									
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9									
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10									

Algorithme : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

L'algorithme

Algorithme : DISTANCEEDITION(A, B)

$(m, n) \leftarrow$ tailles de A et B

$E \leftarrow$ tableau de dimensions m par n

pour $i = 0$ *à* $m - 1$ **faire**

  pour $j = 0$ *à* $n - 1$ **faire**

    $\epsilon \leftarrow 0$ si $A[i] = B[j]$, 1 sinon

    $E[i, j] \leftarrow \min(E[i-1, j]+1, E[i, j-1]+1, E[i-1, j-1]+\epsilon)$

retourner $E[m - 1, n - 1]$

L'algorithme

Algorithme : DISTANCEEDITION(A, B)

$(m, n) \leftarrow$ tailles de A et B
$E \leftarrow$ tableau de dimensions m par n
pour $i = 0$ *à* $m - 1$ **faire**
    pour $j = 0$ *à* $n - 1$ **faire**
        $\epsilon \leftarrow 0$ si $A[i] = B[j]$, 1 sinon
        $E[i, j] \leftarrow \min(E[i-1, j]+1, E[i, j-1]+1, E[i-1, j-1]+\epsilon)$
retourner $E[m - 1, n - 1]$

- Convention : $E[-1, j] = j + 1$; $E[i, -1] = i + 1$
- En pratique : ajouts de tests, ou fonction `E(i,j)`

L'algorithme

Algorithme : DistanceEdition(A, B)

$(m, n) \leftarrow$ tailles de A et B
$E \leftarrow$ tableau de dimensions m par n
pour $i = 0$ *à* $m - 1$ **faire**
    pour $j = 0$ *à* $n - 1$ **faire**
        $\epsilon \leftarrow 0$ si $A[i] = B[j]$, 1 sinon
        $E[i, j] \leftarrow \min(E[i-1, j]+1, E[i, j-1]+1, E[i-1, j-1]+\epsilon)$
retourner $E[m - 1, n - 1]$

- Convention : $E[-1, j] = j + 1$; $E[i, -1] = i + 1$
- En pratique : ajouts de tests, ou fonction `E(i,j)`

Lemme

L'algorithme DistanceEdition *renvoie* $\delta(A, B)$ *en temps* $O(mn)$.

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

Reconstruction : exemple

		A	G	O	R	R	Y	T	N	E
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
G	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
O	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7
R	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
I	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
T	7	6	5	4	3	3	3	3	4	5
H	8	7	6	5	4	4	4	4	4	5
M	9	8	7	6	5	5	5	5	5	5
E	10	9	8	7	6	6	6	6	6	5

AGORRYTNES $\rightarrow$ ALGORRYTNES $\rightarrow$ ALGORYTNES

$\downarrow$ x

ALGORITHMES $\leftarrow$ ALGORITHNES $\leftarrow$ ALGORITNES

Algorithme de reconstruction

Algorithme : ALIGNEMENT(A, B, E)

$(i, j) \leftarrow (m-1, n-1)$
tant que $i \geq 0$ *et* $j \geq 0$ **faire**
  si $E[i,j] = E[i-1, j-1]$ *et* $A[i] = B[j]$ **alors**
    $(i, j) \leftarrow (i-1, j-1)$
  sinon si $E[i,j] = E[i-1, j-1] + 1$ **alors**
    $(i, j) \leftarrow (i-1, j-1)$
  sinon si $E[i,j] = E[i-1, j] + 1$ **alors**
    Insérer « _ » après $B[j]$; $i \leftarrow i-1$
  sinon si $E[i,j] = E[i, j-1] + 1$ **alors**
    Insérer « _ » après $A[i]$; $j \leftarrow j-1$
tant que $i \geq 0$ **faire** Insérer « _ » en tête de B ; $i \leftarrow i-1$
tant que $j \geq 0$ **faire** Insérer « _ » en tête de A ; $j \leftarrow j-1$
retourner A *et* B

Correction et complexité

Lemme

L'algorithme ALIGNEMENT *aligne les mots A et B avec $\delta(A, B)$ désaccords, en temps $O(m + n)$.*

Algorithme : ALIGNEMENT(A, B, E)

$(i, j) \leftarrow (m - 1, n - 1)$
tant que $i \geq 0$ *et* $j \geq 0$ **faire**
  si $E[i, j] = E[i - 1, j - 1]$ *et* $A[i] = B[j]$ **alors**
    $(i, j) \leftarrow (i - 1, j - 1)$
  sinon si $E[i, j] = E[i - 1, j - 1] + 1$ **alors**
    $(i, j) \leftarrow (i - 1, j - 1)$
  sinon si $E[i, j] = E[i - 1, j] + 1$ **alors**
    Insérer « _ » après $B[j]$; $i \leftarrow i - 1$
  sinon si $E[i, j] = E[i, j - 1] + 1$ **alors**
    Insérer « _ » après $A[i]$; $j \leftarrow j - 1$
tant que $i \geq 0$ **faire**
  Insérer « _ » en tête de B ; $i \leftarrow i - 1$
tant que $j \geq 0$ **faire**
  Insérer « _ » en tête de A ; $j \leftarrow j - 1$
retourner A *et* B

Correction et complexité

Lemme

L'algorithme ALIGNEMENT *aligne les mots A et B avec $\delta(A, B)$ désaccords, en temps $O(m + n)$.*

Algorithme : ALIGNEMENT(A, B, E)

$(i, j) \leftarrow (m - 1, n - 1)$
tant que $i \geq 0$ *et* $j \geq 0$ **faire**
  si $E[i, j] = E[i - 1, j - 1]$ *et* $A[i] = B[j]$ **alors**
    $(i, j) \leftarrow (i - 1, j - 1)$
  sinon si $E[i, j] = E[i - 1, j - 1] + 1$ **alors**
    $(i, j) \leftarrow (i - 1, j - 1)$
  sinon si $E[i, j] = E[i - 1, j] + 1$ **alors**
    Insérer « _ » après $B[j]$; $i \leftarrow i - 1$
  sinon si $E[i, j] = E[i, j - 1] + 1$ **alors**
    Insérer « _ » après $A[i]$; $j \leftarrow j - 1$
tant que $i \geq 0$ **faire**
  Insérer « _ » en tête de B ; $i \leftarrow i - 1$
tant que $j \geq 0$ **faire**
  Insérer « _ » en tête de A ; $j \leftarrow j - 1$
retourner A *et* B

Preuve de complexité : à chaque tour, $i + j$ diminue de ≥ 1

Correction et complexité

Lemme

L'algorithme ALIGNEMENT *aligne les mots A et B avec $\delta(A, B)$ désaccords, en temps $O(m+n)$.*

Algorithme : ALIGNEMENT(A, B, E)

$(i, j) \leftarrow (m-1, n-1)$
tant que $i \geq 0$ *et* $j \geq 0$ **faire**
  si $E[i,j] = E[i-1, j-1]$ *et* $A[i] = B[j]$ **alors**
    $(i, j) \leftarrow (i-1, j-1)$
  sinon si $E[i,j] = E[i-1, j-1] + 1$ **alors**
    $(i, j) \leftarrow (i-1, j-1)$
  sinon si $E[i,j] = E[i-1, j] + 1$ **alors**
    Insérer « _ » après $B[j]$; $i \leftarrow i-1$
  sinon si $E[i,j] = E[i, j-1] + 1$ **alors**
    Insérer « _ » après $A[i]$; $j \leftarrow j-1$
tant que $i \geq 0$ **faire**
  Insérer « _ » en tête de B ; $i \leftarrow i-1$
tant que $j \geq 0$ **faire**
  Insérer « _ » en tête de A ; $j \leftarrow j-1$
retourner A *et* B

Preuve de complexité : à chaque tour, $i + j$ diminue de ≥ 1

Preuve de correction : « en entrant dans la boucle, $A[i+1, m-1]$ et $B[j+1, n-1]$ sont *alignés* avec $\delta(A[i+1, m-1], B[j+1, n-1])$ désaccords »

Conclusion

Théorème

La distance d'édition entre deux mots A et B de tailles respectives m et n peut être calculée en temps $O(m \times n)$. L'alignement ou la suite de transformations correspondants peuvent être calculées en temps $O(m + n)$ supplémentaire.

Conclusion

Théorème

La distance d'édition entre deux mots A et B de tailles respectives m et n peut être calculée en temps $O(m \times n)$. L'alignement ou la suite de transformations correspondants peuvent être calculées en temps $O(m + n)$ supplémentaire.

Peut-on faire mieux que $O(m \times n)$?

Conclusion

Théorème

La distance d'édition entre deux mots A et B de tailles respectives m et n peut être calculée en temps $O(m \times n)$. L'alignement ou la suite de transformations correspondants peuvent être calculées en temps $O(m + n)$ supplémentaire.

Peut-on faire mieux que $O(m \times n)$?

$\rightsquigarrow$ un peu...

Conclusion

Théorème

La distance d'édition entre deux mots A et B de tailles respectives m et n peut être calculée en temps $O(m \times n)$. L'alignement ou la suite de transformations correspondants peuvent être calculées en temps $O(m + n)$ supplémentaire.

Peut-on faire mieux que $O(m \times n)$?

$\rightsquigarrow$ un peu...

Peut-on faire beaucoup mieux que $O(m \times n)$?

Conclusion

Théorème

La distance d'édition entre deux mots A et B de tailles respectives m et n peut être calculée en temps $O(m \times n)$. L'alignement ou la suite de transformations correspondants peuvent être calculées en temps $O(m + n)$ supplémentaire.

Peut-on faire mieux que $O(m \times n)$?

$\rightsquigarrow$ un peu...

Peut-on faire beaucoup mieux que $O(m \times n)$?

$\rightsquigarrow$ sans doute pas (si on veut le résultat exact)

Conclusion

Théorème

La distance d'édition entre deux mots A et B de tailles respectives m et n peut être calculée en temps $O(m \times n)$. L'alignement ou la suite de transformations correspondants peuvent être calculées en temps $O(m + n)$ supplémentaire.

Peut-on faire mieux que $O(m \times n)$?

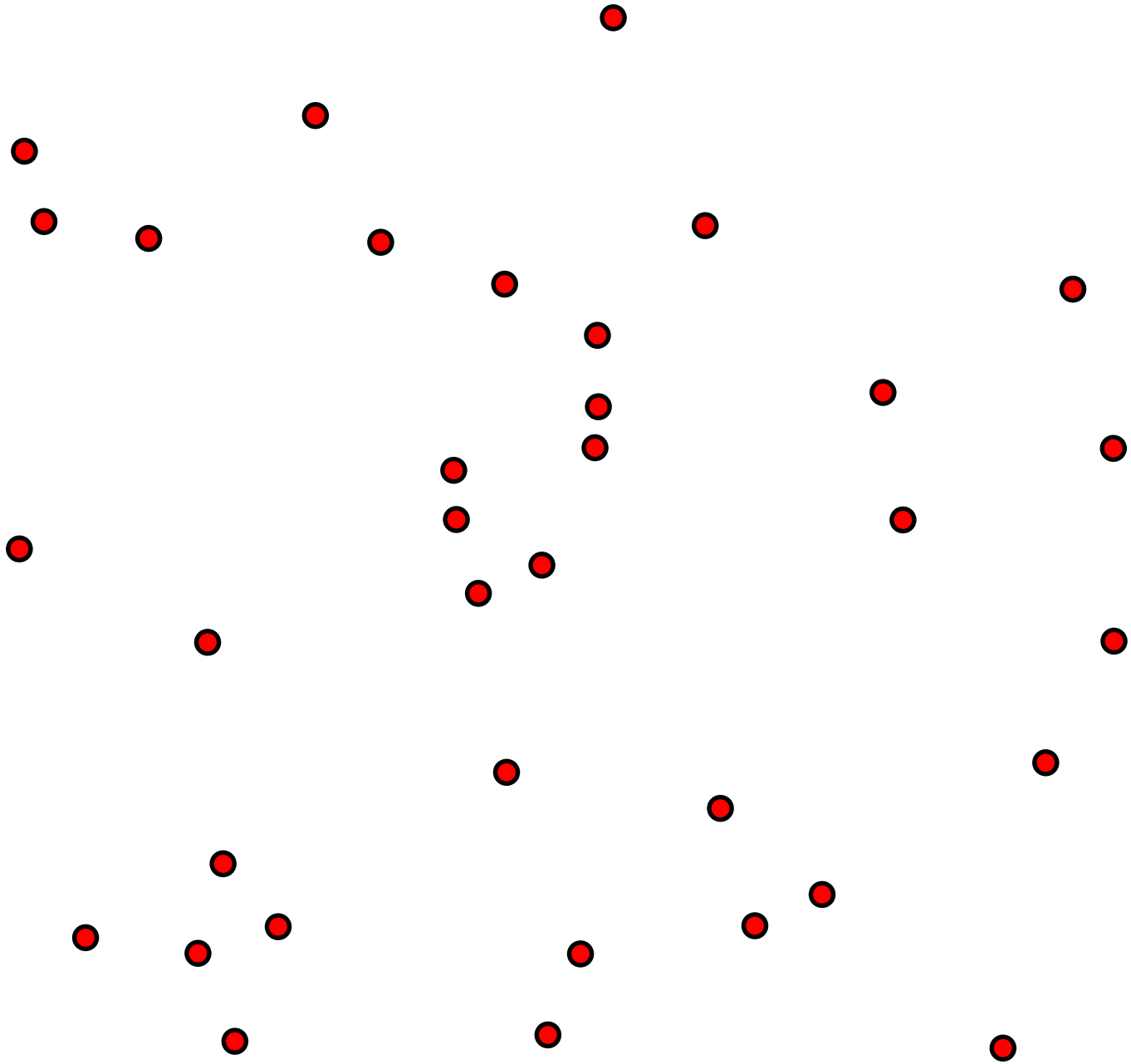
$\rightsquigarrow$ un peu...

Peut-on faire beaucoup mieux que $O(m \times n)$?

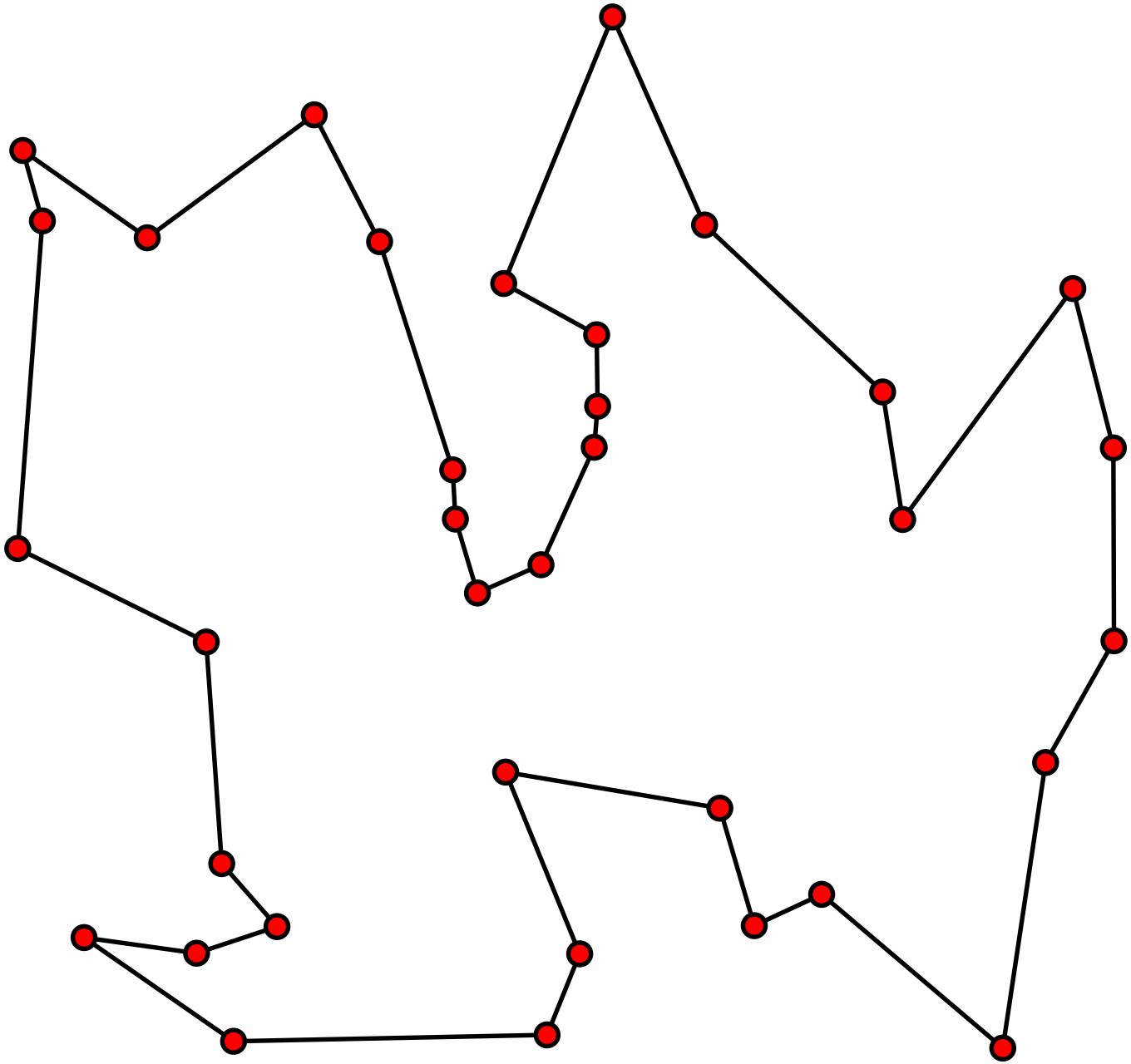
$\rightsquigarrow$ sans doute pas (si on veut le résultat exact)

- Problème très important en pratique... et en théorie !
- Beaucoup de résultats très récents (2019 !) sur le sujet

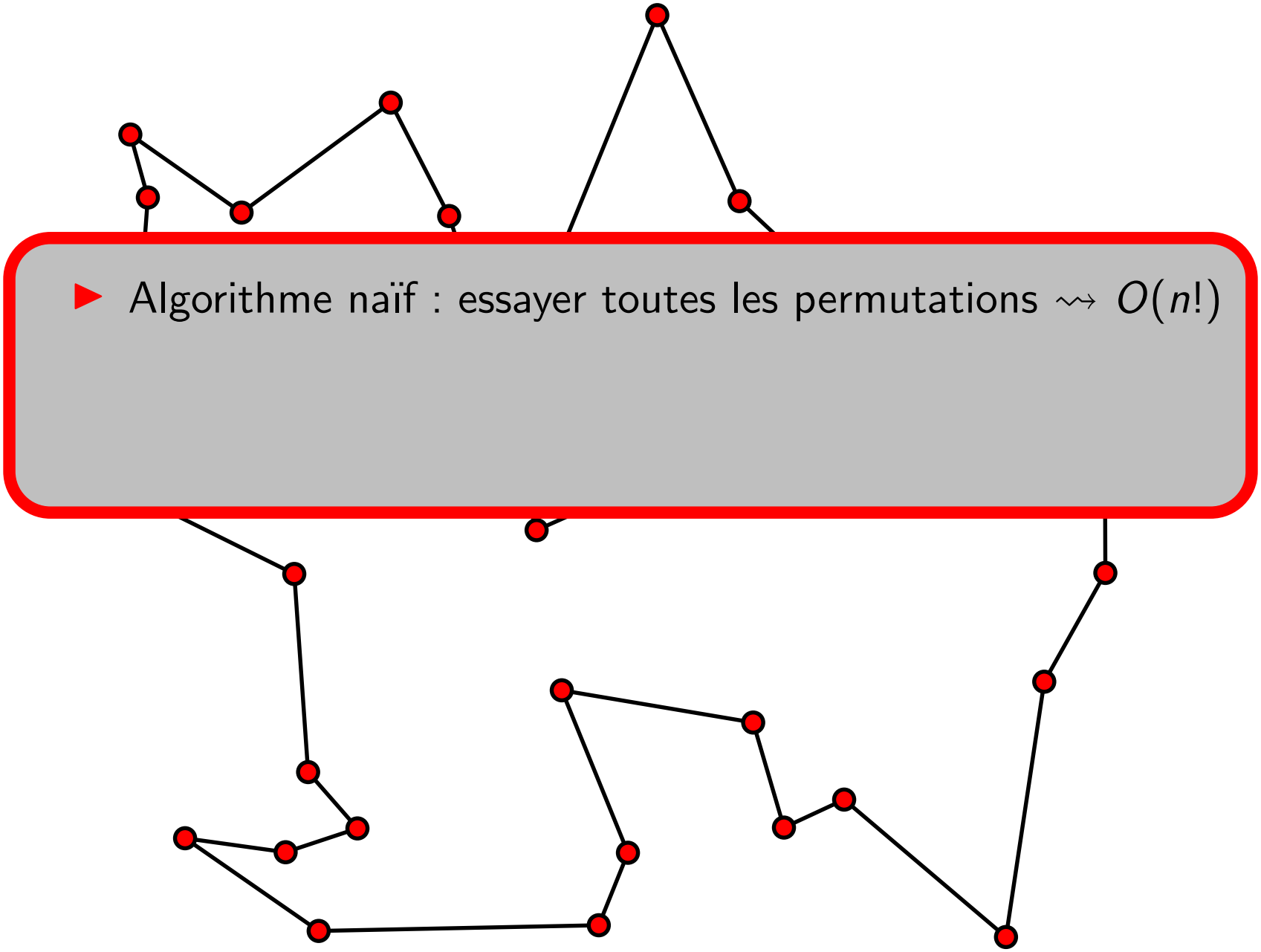
Chemin le plus court passant par chaque point ?



Chemin le plus court passant par chaque point ?

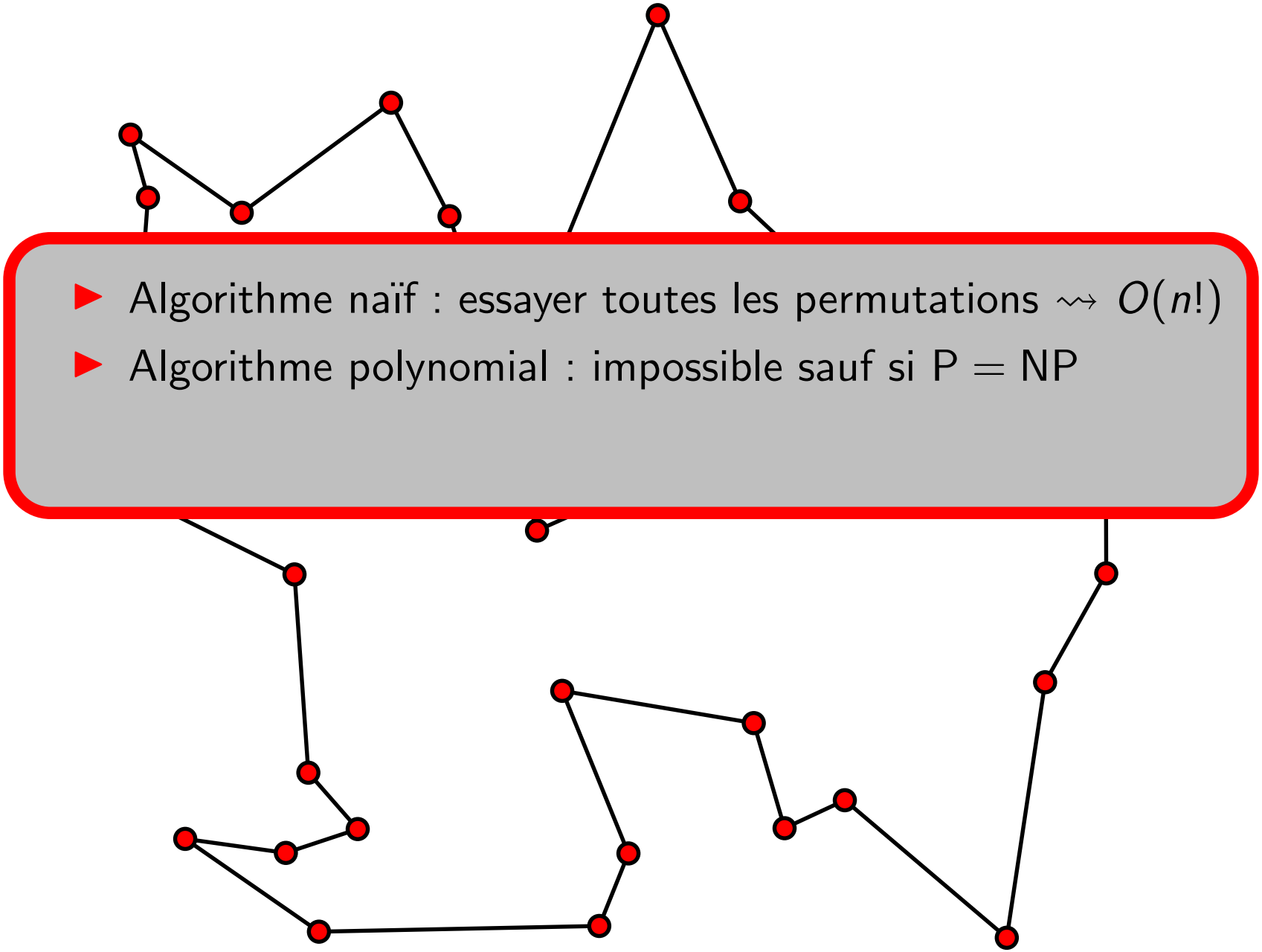


Chemin le plus court passant par chaque point ?



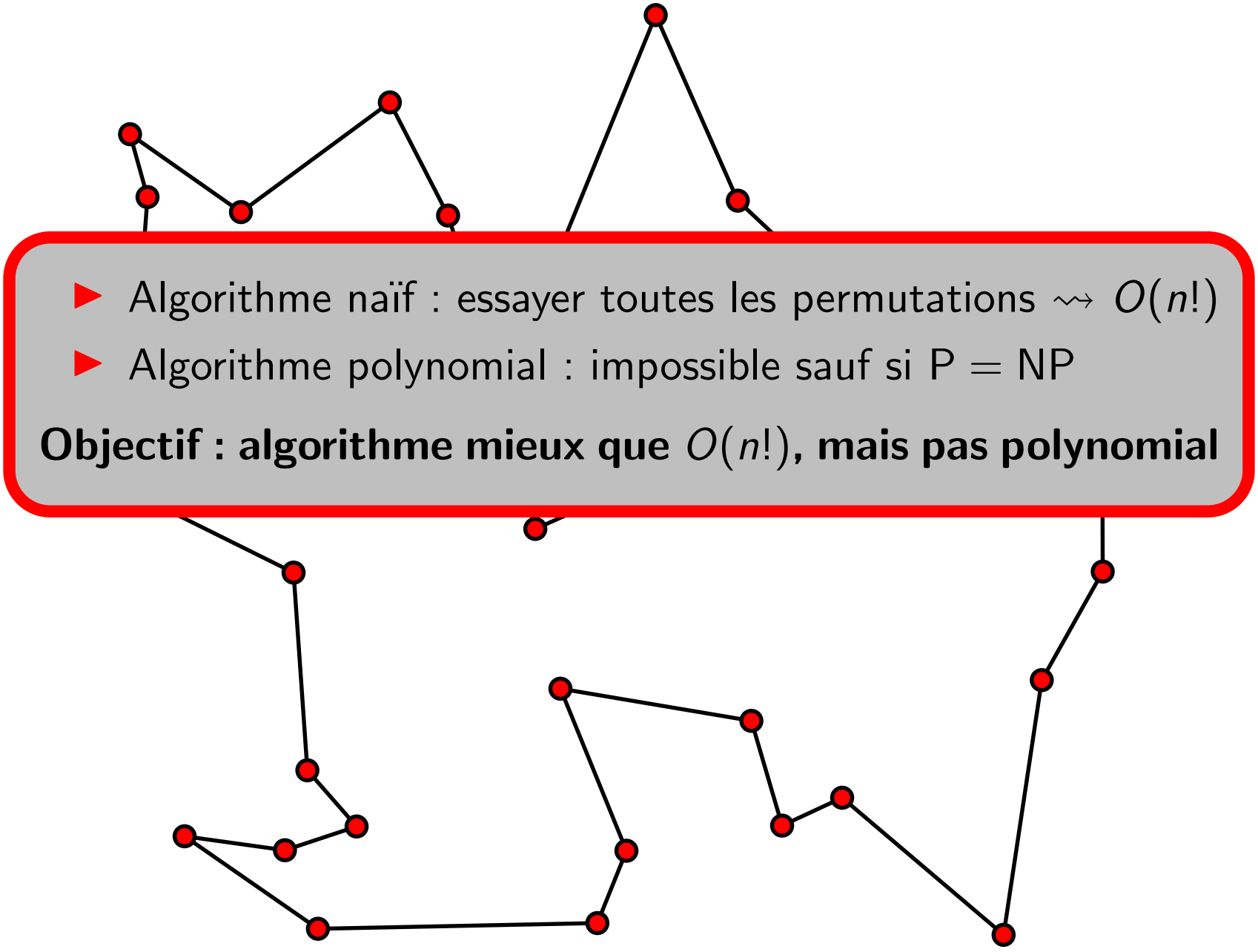
- Algorithme naïf : essayer toutes les permutations $\rightsquigarrow O(n!)$

Chemin le plus court passant par chaque point ?



- Algorithme naïf : essayer toutes les permutations $\rightsquigarrow O(n!)$
- Algorithme polynomial : impossible sauf si P = NP

Chemin le plus court passant par chaque point ?



- Algorithme naïf : essayer toutes les permutations $\rightsquigarrow O(n!)$
- Algorithme polynomial : impossible sauf si P = NP

Objectif : algorithme mieux que $O(n!)$, mais pas polynomial

Formalisation

Entrée Ensemble $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ de points dans le plan

Sortie 1 Chemin $s_{i_0} \to s_{i_1} \to \cdots \to s_{i_{n-1}} \to s_{i_0}$ qui minimise la distance totale, avec $\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ si $s_i = (x_i, y_i)$ et $s_j = (x_j, y_j)$

Sortie 2 Longueur $\ell_S = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{i_j i_{j+1}}$ du chemin le plus court ($i_n = i_0$)

Formalisation

Entrée Ensemble $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ de points dans le plan

Sortie 1 Chemin $s_{i_0} \to s_{i_1} \to \cdots \to s_{i_{n-1}} \to s_{i_0}$ qui minimise la distance totale, avec $\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ si $s_i = (x_i, y_i)$ et $s_j = (x_j, y_j)$

Sortie 2 Longueur $\ell_S = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{i_j i_{j+1}}$ du chemin le plus court ($i_n = i_0$)

- On peut fixer $s_{i_0} = s_0$

Formalisation

Entrée Ensemble $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ de points dans le plan

Sortie 1 Chemin $s_{i_0} \to s_{i_1} \to \cdots \to s_{i_{n-1}} \to s_{i_0}$ qui minimise la distance totale, avec $\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ si $s_i = (x_i, y_i)$ et $s_j = (x_j, y_j)$

Sortie 2 Longueur $\ell_S = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{i_j i_{j+1}}$ du chemin le plus court ($i_n = i_0$)

- On peut fixer $s_{i_0} = s_0$
- Si $U \subset S$ avec $s_0, s_j \in U$, on note $\boldsymbol{\Delta(U, s_j)}$ la longueur du plus court chemin de s_0 à s_j visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

Formalisation

Entrée Ensemble $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ de points dans le plan

Sortie 1 Chemin $s_{i_0} \to s_{i_1} \to \cdots \to s_{i_{n-1}} \to s_{i_0}$ qui minimise la distance totale, avec $\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ si $s_i = (x_i, y_i)$ et $s_j = (x_j, y_j)$

Sortie 2 Longueur $\ell_S = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{i_j i_{j+1}}$ du chemin le plus court ($i_n = i_0$)

- On peut fixer $s_{i_0} = s_0$
- Si $U \subset S$ avec $s_0, s_j \in U$, on note $\boldsymbol{\Delta(U, s_j)}$ la longueur du plus court chemin de s_0 à s_j visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

$$\boxed{\ell_S = \min_j \Delta(\{s_0, \ldots, s_{n-1}\}, s_j) + \delta_{j,0}}$$

Formule récursive pour Δ

$\Delta(U, s_j)$: longueur du plus court chemin de s_0 à s_j visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

Formule récursive pour Δ

$\Delta(U, s_j)$: longueur du plus court chemin de s_0 à s_j visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

Lemme

- $\Delta(\{s_0\}, s_0) = 0$ *et* $\Delta(U, s_0) = +\infty$ *si* $|U| > 1$
- $\Delta(U, s_j) = \min_{i \in U : i \neq j} \Delta(U \setminus \{s_j\}, s_i) + \delta_{ij}$

Formule récursive pour Δ

$\Delta(U, s_j)$: longueur du plus court chemin de s_0 à s_j visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

Lemme

- $\Delta(\{s_0\}, s_0) = 0$ *et* $\Delta(U, s_0) = +\infty$ *si* $|U| > 1$
- $\Delta(U, s_j) = \min_{i \in U : i \neq j} \Delta(U \setminus \{s_j\}, s_i) + \delta_{ij}$

Preuve : pour aller de s_0 à s_j,

- on choisit un point s_i
- on va de s_0 à s_i
- puis directement de s_i à s_j

Formule récursive pour Δ

$\Delta(U, s_j)$: longueur du plus court chemin de s_0 à s_j visitant chaque $s_i \in U$ une fois exactement

Lemme

- $\Delta(\{s_0\}, s_0) = 0$ *et* $\Delta(U, s_0) = +\infty$ *si* $|U| > 1$
- $\Delta(U, s_j) = \min_{i \in U : i \neq j} \Delta(U \setminus \{s_j\}, s_i) + \delta_{ij}$

Preuve : pour aller de s_0 à s_j,

- on choisit un point s_i
- on va de s_0 à s_i
- puis directement de s_i à s_j

  $\rightsquigarrow$ il *suffit* de trouver le meilleur s_i !

Algorithme TSP

Algorithme : TSP(S)

$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de S contenant $\{s_0\}$, et par les entiers de 0 à $n-1$

$\Delta[\{s_0\}, 0] = 0$

pour $s = 2$ *à* n **faire**

  pour *tous les* $U \subset S$ *de taille* s *tels que* $s_0 \in U$ **faire**

    $\Delta[U, s_0] = +\infty$

    pour *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **faire**

      $\Delta[U, s_j] = \min\{\Delta[U \setminus \{s_j\}, s_i] + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$

retourner $\min_j(\Delta[\{s_0, \ldots, s_n\}, s_j) + \delta_{j0}$

Algorithme TSP

Algorithme : TSP(S)

$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de S contenant $\{s_0\}$, et par les entiers de 0 à $n-1$

$\Delta[\{s_0\}, 0] = 0$

pour $s = 2$ *à* n **faire**

  pour *tous les* $U \subset S$ *de taille* s *tels que* $s_0 \in U$ **faire**

    $\Delta[U, s_0] = +\infty$

    pour *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **faire**

      $\Delta[U, s_j] = \min\{\Delta[U \setminus \{s_j\}, s_i] + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$

retourner $\min_j(\Delta[\{s_0, \ldots, s_n\}, s_j) + \delta_{j0}$

Lemme

L'algorithme TSP *calcule* ℓ_S *en temps* $O(n^2 2^n)$

Preuve de la complexité

Algorithme : $\text{TSP}(S)$

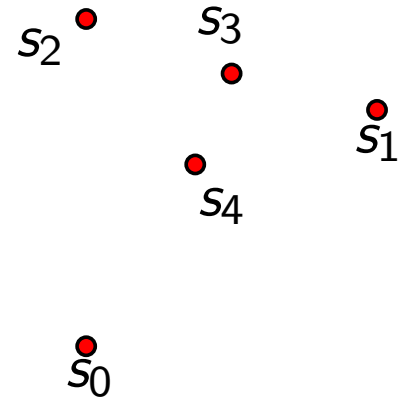
$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de S contenant $\{s_0\}$, et par les entiers de 0 à $n-1$
$\Delta[\{s_0\}, 0] = 0$
pour $s = 2$ *à* n **faire**
  pour *tous les* $U \subset S$ *de taille* s *tels que* $s_0 \in U$ **faire**
    $\Delta[U, s_0] = +\infty$
    pour *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **faire**
      $\Delta[U, s_j] = \min\{\Delta[U \setminus \{s_j\}, s_i] + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$
retourner $\min_j(\Delta[\{s_0, \ldots, s_n\}, s_j] + \delta_{j0})$

Preuve

- Calcul du min : $O(s)$ car $|U| = s$
- Boucle sur s_j : $O(s^2)$
- Boucle sur U : $\binom{n-1}{s-1} O(s^2)$ car $\binom{n-1}{s-1}$ ss-ens.
- Boucle sur s : $\sum_{s=2}^{n} \binom{n-1}{s-1} O(s^2) \leq O(n^2) \sum_s \binom{n}{s} = O(n^2 2^n)$

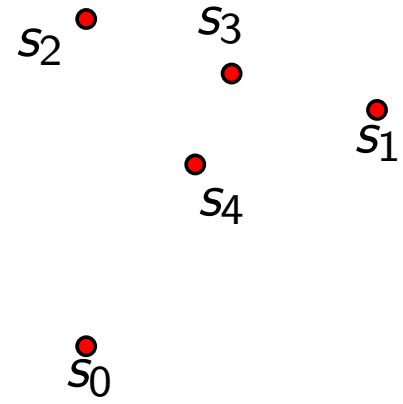
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



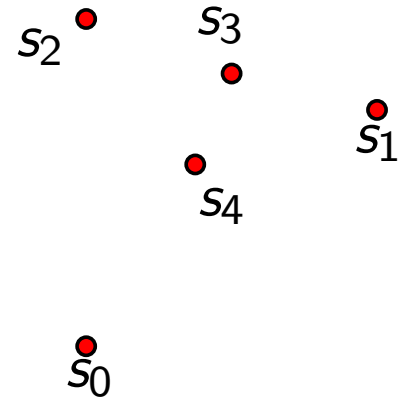
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



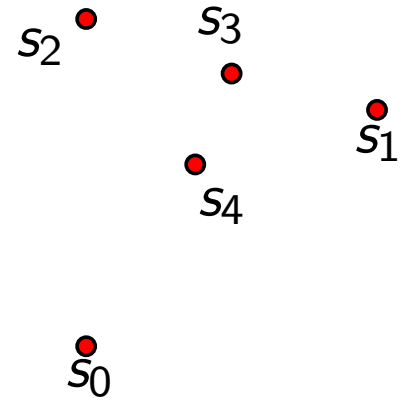
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	20, 6			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



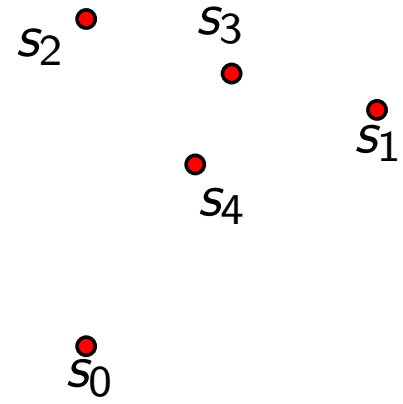
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	20, 6			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



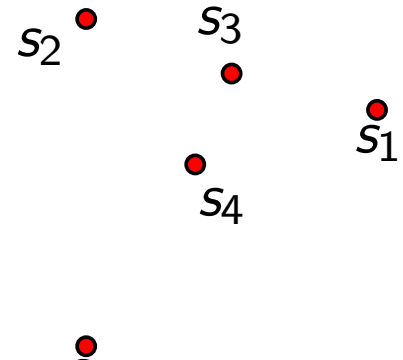
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



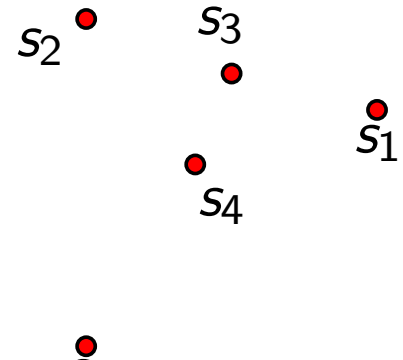
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$			
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



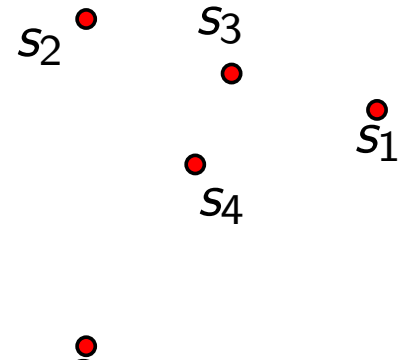
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$\boxed{37,4}$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



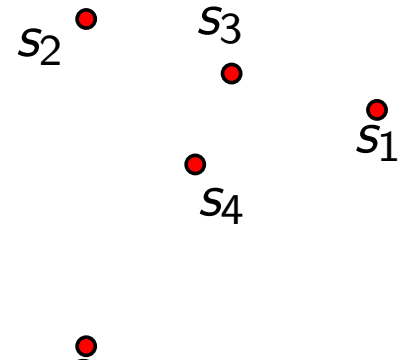
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



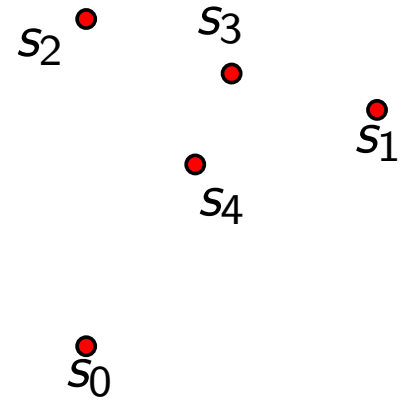
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



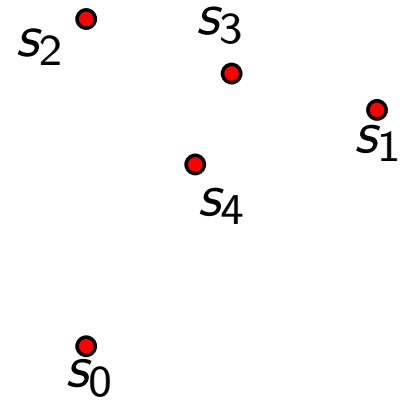
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$26,5$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



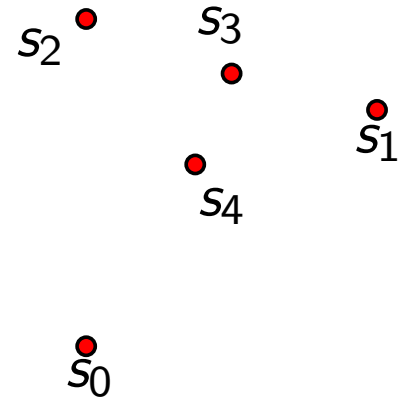
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$26,5$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		$21,7$		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



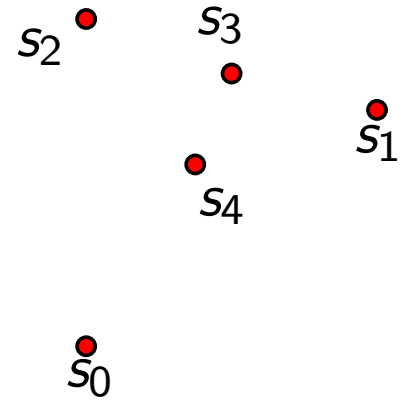
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$26,5$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		$21,7$		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			$17,0$	$22,4$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



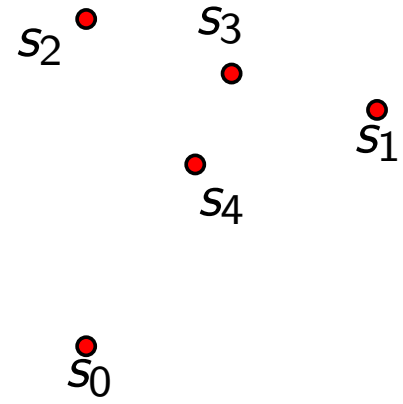
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$26,5$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		$21,7$		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			$17,0$	$22,4$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	$34,8$	$37,4$	$43,0$	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



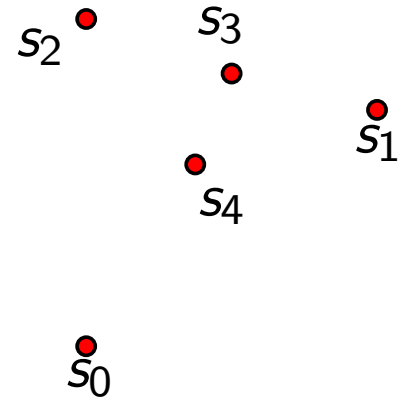
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$26,5$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		$21,7$		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			$17,0$	$22,4$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	$34,8$	$37,4$	$43,0$	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	$38,4$	$38,9$		$45,2$
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



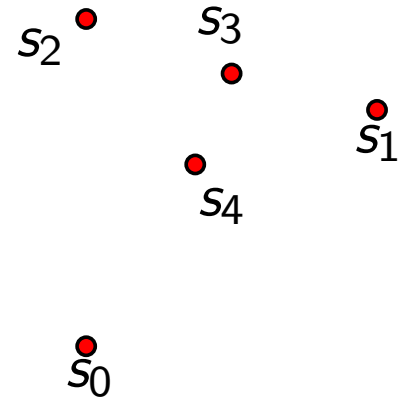
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$26,5$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		$21,7$		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			$17,0$	$22,4$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	$34,8$	$37,4$	$43,0$	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	$38,4$	$38,9$		$45,2$
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	$25,3$		$30,3$	$34,2$
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



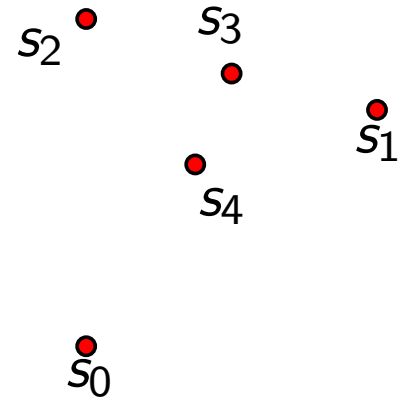
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$26,5$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		$21,7$		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			$17,0$	$22,4$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	$34,8$	$37,4$	$43,0$	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	$38,4$	$38,9$		$45,2$
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	$25,3$		$30,3$	$34,2$
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		$25,6$	$30,2$	$31,9$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$				
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



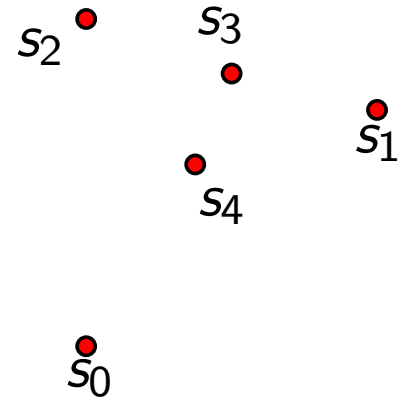
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$26,5$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		$21,7$		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			$17,0$	$22,4$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	$34,8$	$37,4$	$43,0$	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	$38,4$	$38,9$		$45,2$
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	$25,3$		$30,3$	$34,2$
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		$25,6$	$30,2$	$31,9$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	$38,5$	$38,9$	$46,7$	$45,2$
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$					



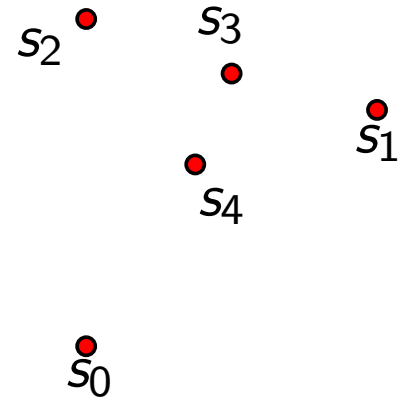
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$26,5$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		$21,7$		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			$17,0$	$22,4$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	$34,8$	$37,4$	$43,0$	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	$38,4$	$38,9$		$45,2$
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	$25,3$		$30,3$	$34,2$
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		$25,6$	$30,2$	$31,9$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	$38,5$	$38,9$	$46,7$	$45,2$
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$		$59,1$	$56,9$	$63,7$	$56,9$



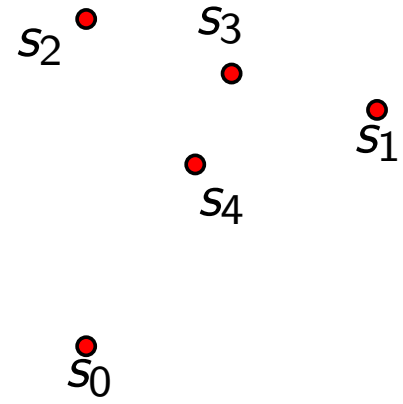
Exemple

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	20,6			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				11,7
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	34,7	37,4		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	25,2		28,9	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	22,1			31,1
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		25,5	26,5	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		21,7		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			17,0	22,4
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	34,8	37,4	43,0	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	38,4	38,9		45,2
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	25,3		30,3	34,2
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		25,6	30,2	31,9
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	38,5	38,9	46,7	45,2
$\min_j(\Delta[S,j] + \delta_{j0})$		59,1	56,9	63,7	56,9



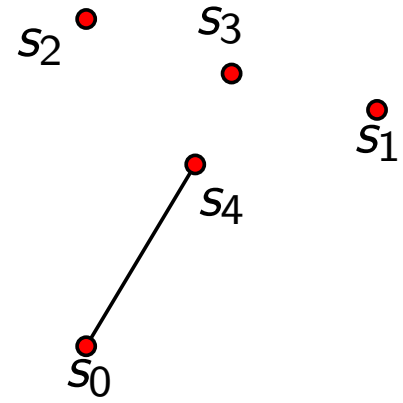
Exemple : reconstruction

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	20,6			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				11,7
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	34,7	37,4		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	25,2		28,9	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	22,1			31,1
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		25,5	26,5	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		21,7		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			17,0	22,4
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	34,8	37,4	43,0	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	38,4	38,9		45,2
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	25,3		30,3	34,2
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		25,6	30,2	31,9
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	38,5	38,9	46,7	45,2
$\min_j(\Delta[S,j] + \delta_{j0})$		59,1	56,9	63,7	56,9



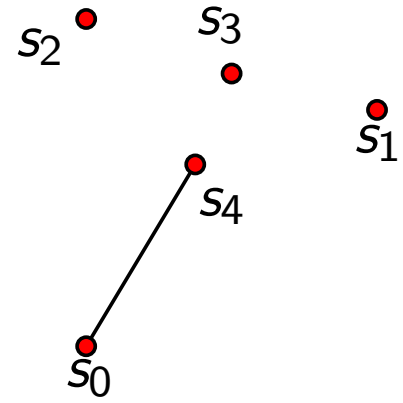
Exemple : reconstruction

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$26,5$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		$21,7$		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			$17,0$	$22,4$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	$34,8$	$37,4$	$43,0$	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	$38,4$	$38,9$		$45,2$
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	$25,3$		$30,3$	$34,2$
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		$25,6$	$30,2$	$31,9$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	$38,5$	$38,9$	$46,7$	$45,2$
$\min_j(\Delta[S, j] + \delta_{j0})$		$59,1$	$56,9$	$63,7$	$56,9$



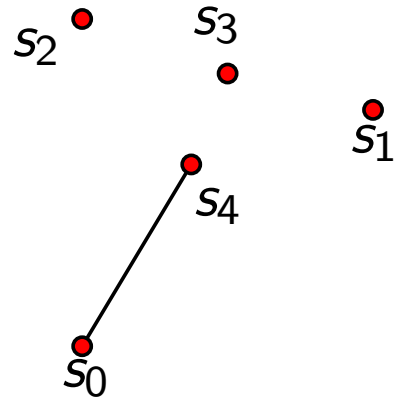
Exemple : reconstruction

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	20,6			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				11,7
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	34,7	37,4		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	25,2		28,9	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	22,1			31,1
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		25,5	26,5	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		21,7		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			17,0	22,4
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	34,8	37,4	43,0	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	38,4	38,9		45,2
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	25,3		30,3	34,2
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		25,6	30,2	31,9
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	38,5	38,9	46,7	45,2
$\min_j(\Delta[S,j] + \delta_{j0})$		59,1	56,9	63,7	56,9

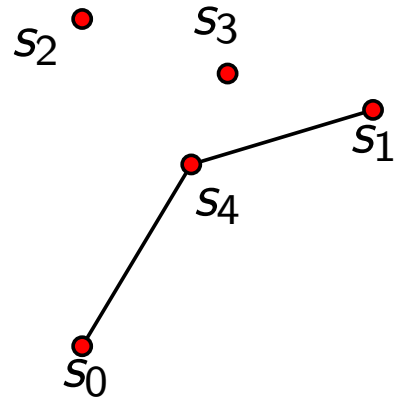


Exemple : reconstruction

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	20,6			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				11,7
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	34,7	37,4		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	25,2		28,9	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	22,1			31,1
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		25,5	26,5	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		21,7		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			17,0	22,4
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	34,8	37,4	43,0	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	38,4	38,9		45,2
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	25,3		30,3	34,2
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		25,6	30,2	31,9
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	38,5	38,9	46,7	45,2
$\min_j(\Delta[S,j] + \delta_{j0})$		59,1	56,9	63,7	56,9

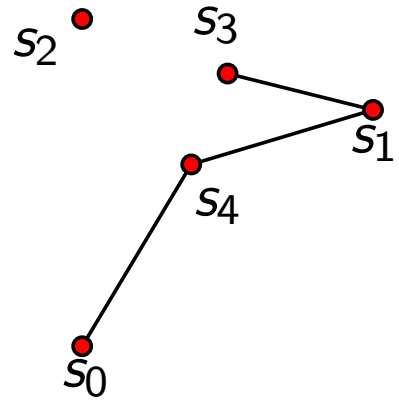


Exemple : reconstruction



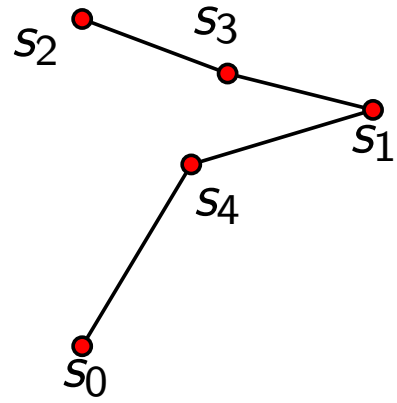
	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	20,6			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				11,7
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	34,7	37,4		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	25,2		28,9	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	22,1			31,1
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		25,5	26,5	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		21,7		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			17,0	22,4
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	34,8	37,4	43,0	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	38,4	38,9		45,2
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	25,3		30,3	34,2
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		25,6	30,2	31,9
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	38,5	38,9	46,7	45,2
$\min_j(\Delta[S,j]+\delta_{j0})$		59,1	56,9	63,7	56,9

Exemple : reconstruction



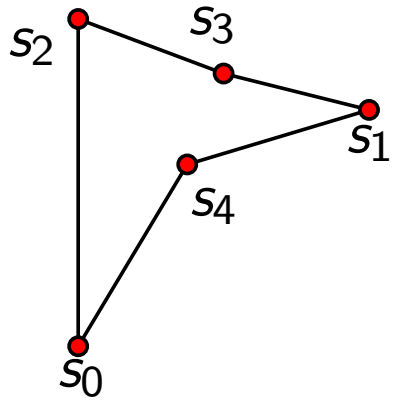
	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	20,6			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				11,7
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	34,7	37,4		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	25,2		28,9	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	22,1			31,1
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		25,5	26,5	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		21,7		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			17,0	22,4
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	34,8	37,4	43,0	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	38,4	38,9		45,2
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	25,3		30,3	34,2
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		25,6	30,2	31,9
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	38,5	38,9	46,7	45,2
$\min_j(\Delta[S,j]+\delta_{j0})$		59,1	56,9	63,7	56,9

Exemple : reconstruction



	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	$20,6$			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		$\boxed{18}$		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				$11,7$
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	$34,7$	$37,4$		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	$25,2$		$28,9$	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	$22,1$			$31,1$
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		$25,5$	$\boxed{26,5}$	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		$21,7$		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			$17,0$	$22,4$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	$\boxed{34,8}$	$37,4$	$43,0$	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	$38,4$	$38,9$		$45,2$
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	$25,3$		$30,3$	$34,2$
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		$25,6$	$30,2$	$31,9$
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	$38,5$	$38,9$	$46,7$	$\boxed{45,2}$
$\min_j(\Delta[S,j]+\delta_{j0})$		$59,1$	$56,9$	$63,7$	$\boxed{56,9}$

Exemple : reconstruction



	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
$\{s_0\}$	0				
$\{s_0, s_1\}$	$+\infty$	20,6			
$\{s_0, s_2\}$	$+\infty$		18		
$\{s_0, s_3\}$	$+\infty$			17	
$\{s_0, s_4\}$	$+\infty$				11,7
$\{s_0, s_1, s_2\}$	$+\infty$	34,7	37,4		
$\{s_0, s_1, s_3\}$	$+\infty$	25,2		28,9	
$\{s_0, s_1, s_4\}$	$+\infty$	22,1			31,1
$\{s_0, s_2, s_3\}$	$+\infty$		25,5	26,5	
$\{s_0, s_2, s_4\}$	$+\infty$		21,7		28
$\{s_0, s_3, s_4\}$	$+\infty$			17,0	22,4
$\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$	$+\infty$	34,8	37,4	43,0	
$\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$	$+\infty$	38,4	38,9		45,2
$\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$	$+\infty$	25,3		30,3	34,2
$\{s_0, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$		25,6	30,2	31,9
$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$+\infty$	38,5	38,9	46,7	45,2
$\min_j(\Delta[S,j]+\delta_{j0})$		59,1	56,9	63,7	56,9

Algorithme de reconstruction

Algorithme : $\textsc{tsp}(S)$

$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de S contenant $\{s_0\}$, et par les entiers de 0 à $n-1$

Prec $\leftarrow$ tableau de mêmes dimensions

$\Delta[\{s_0\}, 0] = 0$

pour $s = 2$ *à* n **faire**

  pour *tous les* $U \subset S$ *de taille* s *tels que* $s_0 \in U$ **faire**

    $\Delta[U, s_0] = +\infty$

    pour *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **faire**

      $\Delta[U, s_j] = \min\{\Delta[U \setminus \{s_j\}, s_i] + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$

      Prec$[U, s_j] \leftarrow$ indice du minimum

retourner $\min_j(\Delta[\{s_0, \ldots, s_n\}, s_j) + \delta_{j0}$, *indice du min et Prec*

Algorithme de reconstruction

Algorithme : TSP(S)

$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de S contenant $\{s_0\}$, et par les entiers de 0 à $n-1$

Prec $\leftarrow$ tableau de mêmes dimensions

$\Delta[\{s_0\}, 0] = 0$

pour $s = 2$ *à* n **faire**

  pour *tous les* $U \subset S$ *de taille* s *tels que* $s_0 \in U$ **faire**

    $\Delta[U, s_0] = +\infty$

    pour *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **faire**

      $\Delta[U, s_j] = \min\{\Delta[U \setminus \{s_j\}, s_i] + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$

      Prec$[U, s_j] \leftarrow$ indice du minimum

retourner $\min_j(\Delta[\{s_0, \ldots, s_n\}, s_j) + \delta_{j0}$, *indice du min et Prec*

Algorithme :

TSP-REC(S, Δ, Prec, j)

$i_0 \leftarrow 0$

$i_1 \leftarrow j$

$U \leftarrow S$

pour $k = 2$ *à* $n-1$ **faire**

  $i_k \leftarrow$ Prec$[U, i_{k-1}]$

  $U \leftarrow S \setminus \{s_{i_{k-1}}\}$

retourner $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_0)$

Algorithme de reconstruction

Algorithme : TSP(S)

$\Delta \leftarrow$ tableau à deux dimensions, indexé par les sous-ensembles de S contenant $\{s_0\}$, et par les entiers de 0 à $n-1$

Prec $\leftarrow$ tableau de mêmes dimensions

$\Delta[\{s_0\}, 0] = 0$

pour $s = 2$ *à* n **faire**

  pour *tous les* $U \subset S$ *de taille* s *tels que* $s_0 \in U$ **faire**

    $\Delta[U, s_0] = +\infty$

    pour *tout* $s_j \in U$, $j \neq 0$ **faire**

      $\Delta[U, s_j] = \min\{\Delta[U \setminus \{s_j\}, s_i] + \delta_{ij} : s_i \in U, i \neq j\}$

      Prec$[U, s_j] \leftarrow$ indice du minimum

retourner $\min_j(\Delta[\{s_0, \ldots, s_n\}, s_j) + \delta_{j0}$, *indice du min et Prec*

Algorithme :
TSP-REC(S, Δ, Prec, j)

$i_0 \leftarrow 0$

$i_1 \leftarrow j$

$U \leftarrow S$

pour $k = 2$ *à* $n-1$ **faire**

  $i_k \leftarrow$ Prec$[U, i_{k-1}]$

  $U \leftarrow S \setminus \{s_{i_{k-1}}\}$

retourner $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_0)$

Lemme

L'algorithme TSP-REC *construit un chemin de longueur minimale en temps* $O(n)$

Conclusion

Théorème

La longueur minimale d'un chemin passant par n points peut être calculée en temps $O(n^2 2^n)$. Le chemin lui-même peut être calculé en temps $O(n)$ supplémentaire.

Conclusion

Théorème

La longueur minimale d'un chemin passant par n points peut être calculée en temps $O(n^2 2^n)$. Le chemin lui-même peut être calculé en temps $O(n)$ supplémentaire.

- Détails à régler : gestion des ensembles
  - théorie : pas de problème (bonne complexité)
  - pratique : pas si facile !

Conclusion

Théorème

La longueur minimale d'un chemin passant par n points peut être calculée en temps $O(n^2 2^n)$. Le chemin lui-même peut être calculé en temps $O(n)$ supplémentaire.

- Détails à régler : gestion des ensembles
  - théorie : pas de problème (bonne complexité)
  - pratique : pas si facile !
- Fonctionne aussi hors d'un plan euclidien (carte, plans, graphes, ...)

Conclusion

Théorème

La longueur minimale d'un chemin passant par n points peut être calculée en temps $O(n^2 2^n)$. Le chemin lui-même peut être calculé en temps $O(n)$ supplémentaire.

- Détails à régler : gestion des ensembles
  - théorie : pas de problème (bonne complexité)
  - pratique : pas si facile !
- Fonctionne aussi hors d'un plan euclidien (carte, plans, graphes, ...)
- Très utile en pratique comme en théorie !

Conclusion

Théorème

La longueur minimale d'un chemin passant par n points peut être calculée en temps $O(n^2 2^n)$. Le chemin lui-même peut être calculé en temps $O(n)$ supplémentaire.

- Détails à régler : gestion des ensembles
  - théorie : pas de problème (bonne complexité)
  - pratique : pas si facile !
- Fonctionne aussi hors d'un plan euclidien (carte, plans, graphes, ...)
- Très utile en pratique comme en théorie !
- Un exemple : `http://map.vroom-project.org/`