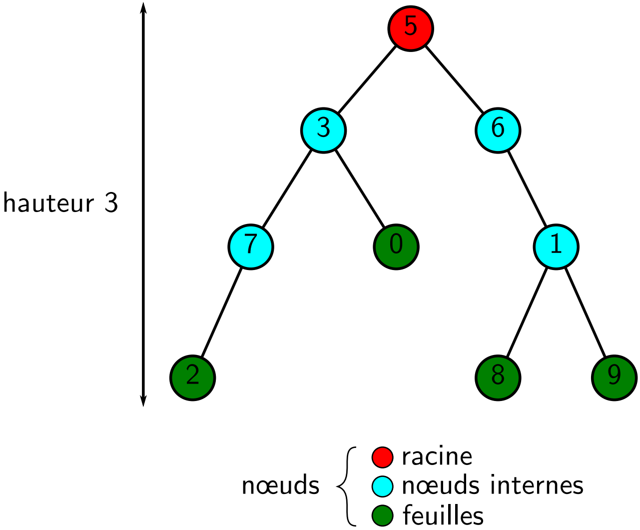
Chapitre 3

# Structures de données arborescentes : arbres binaires de recherche et tas

HLIN401 : Algorithmique et Complexité

Université de Montpellier
2018 – 2019

# Exemple et vocabulaire



# Définition récursive

Un **arbre binaire** est défini récursivement :

- l'arbre vide $\emptyset$ est un arbre binaire ;
- un arbre non vide est constitué d'une **racine**, d'un **sous-arbre gauche** $G$ et d'un **sous-arbre droit** $D$ qui sont eux-mêmes deux arbres binaires.

# Définition récursive

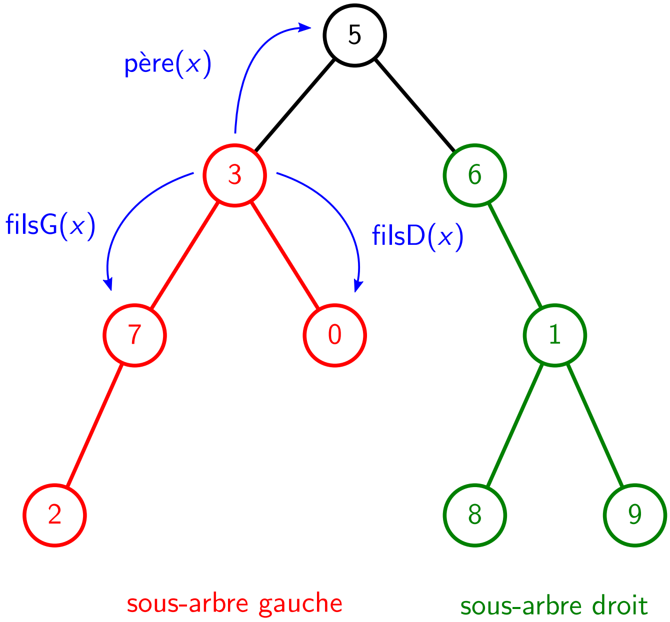
Un **arbre binaire** est défini récursivement :

- l'arbre vide $\emptyset$ est un arbre binaire ;
- un arbre non vide est constitué d'une **racine**, d'un **sous-arbre gauche** $G$ et d'un **sous-arbre droit** $D$ qui sont eux-mêmes deux arbres binaires.

## Représentation informatique

- Un **nœud** $x$ est soit
  - le **nœud vide**, noté $\emptyset$
  - défini par une **valeur** val($x$) et trois **liens** vers d'autres nœuds : père($x$), filsG($x$), filsD($x$) tels que
    - Si filsG($x$) $\neq \emptyset$, père(filsG($x$)) $= x$
    - Si filsD($x$) $\neq \emptyset$, père(filsD($x$)) $= x$
- Un **arbre binaire** $A$ est donné par une **racine** rac($A$) qui est un nœud tel que père(rac($A$)) $= \emptyset$.

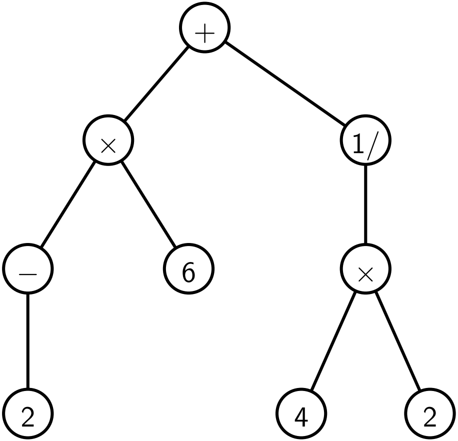
# Exemple


père($x$)
5
3
6
filsG($x$)
filsD($x$)
7
0
1
2
8
9
sous-arbre gauche
sous-arbre droit

# Utilité des arbres binaires

- Arbres binaires de recherche
- Tas

- Analyse syntaxique
- Bases de données
- Partition binaire de l'espace
- Tables de routage
- ...




$$(-2 \times 6) + 1/(4 \times 2)$$

# Caractéristiques

## Définition

- Un nœud $x$ est une **feuille** si $\text{filsG}(x) = \emptyset$ et $\text{filsD}(x) = \emptyset$
- La **hauteur** $\boldsymbol{h(x)}$ d'un nœud $x$ dans l'arbre $A$ est définie récursivement par
  - Si $x = \text{rac}(A)$, $h(x) = 0$ $\qquad (\Leftrightarrow \text{père}(x) = \emptyset)$
  - Sinon, $h(x) = 1 + h(\text{père}(x))$
- La **hauteur** d'un arbre $A$ est $\boldsymbol{h(A)} = \max\{h(x) : x \in A\}$
- Le $\boldsymbol{k}^{\textbf{ème}}$ **niveau** de $A$ est $\boldsymbol{N_k} = \{x : h(x) = k\}$
- Le **sous-arbre gauche** (resp. **droit**) de $A$ est l'arbre dont la racine est le fils gauche (resp. droit) de la racine de $A$

# Résultats structurels

**Lemme**

$$|N_k| = \#\{x : h(x) = k\} \leq 2^k$$

**Preuve par récurrence sur $k$**

- $k = 0 : \{x : h(x) = 0\} = \{\mathrm{rac}(A)\}$
- Chaque nœud de $N_{k-1}$ a au plus 2 fils : Donc $|N_k| \leq 2|N_{k-1}| \leq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$

# Résultats structurels

**Lemme**

$$|N_k| = \#\{x : h(x) = k\} \leq 2^k$$

**Preuve par récurrence sur $k$**

- $k = 0 : \{x : h(x) = 0\} = \{\mathrm{rac}(A)\}$
- Chaque nœud de $N_{k-1}$ a au plus 2 fils : Donc $|N_k| \leq 2|N_{k-1}| \leq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$

**Lemme**

$h(A) + 1 \leq n(A) \leq 2^{h(A)+1} - 1$ *où* $n(A) =$ *nombre de nœuds de* $A$

**Preuve** $\quad n(A) = \sum_{i=0}^{h(A)} |N_i|$ et $1 \leq |N_i| \leq 2^i$

$\rightsquigarrow h(A) + 1 \leq n(A) \leq \sum_{i=0}^{h(A)} 2^i = 2^{h(A)+1} - 1$

# Résultats structurels

**Lemme**

$$|N_k| = \#\{x : h(x) = k\} \le 2^k$$

**Preuve par récurrence sur $k$**

- $k = 0 : \{x : h(x) = 0\} = \{\mathrm{rac}(A)\}$
- Chaque nœud de $N_{k-1}$ a au plus 2 fils : Donc $|N_k| \le 2|N_{k-1}| \le 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$

**Lemme**

$h(A) + 1 \le n(A) \le 2^{h(A)+1} - 1$ *où* $n(A) =$ *nombre de nœuds de* $A$

**Preuve** $n(A) = \sum_{i=0}^{h(A)} |N_i|$ et $1 \le |N_i| \le 2^i$

$\rightsquigarrow h(A) + 1 \le n(A) \le \sum_{i=0}^{h(A)} 2^i = 2^{h(A)+1} - 1$

**Corollaire**

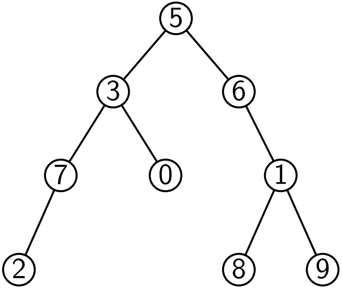
$$\lfloor \log(n(A)) \rfloor \le h(A) < n(A)$$

# Parcours d'un arbre binaire

**Algorithme :** ParcoursInfixe($x$)

**si** $x \neq \emptyset$ **alors**

    ParcoursInfixe(filsG($x$))
    Afficher val($x$)
    ParcoursInfixe(filsD($x$))



# Parcours d'un arbre binaire

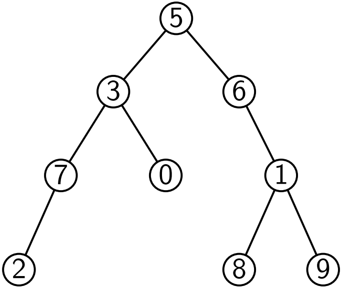
**Algorithme :** ParcoursInfixe($x$)

**si** $x \neq \emptyset$ **alors**

  ParcoursInfixe(filsG($x$))

  Afficher val($x$)

  ParcoursInfixe(filsD($x$))



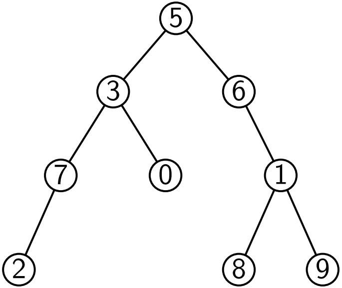

- Affichage : 2 7 3 0 5 6 8 1 9

# Parcours d'un arbre binaire

**Algorithme :** ParcoursInfixe($x$)

**si** $x \neq \emptyset$ **alors**

    ParcoursInfixe(filsG($x$))
    Afficher val($x$)
    ParcoursInfixe(filsD($x$))




- Affichage : 2 7 3 0 5 6 8 1 9
- Complexité en $O(n(A))$

  Preuve $\mathcal{P}_n$ : l'algo. effectue $5n$ appels de fonctions

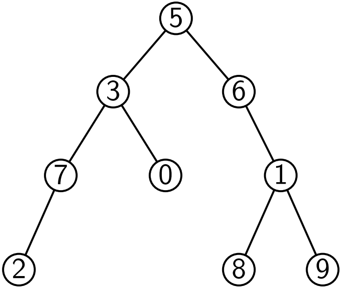
  - $n = 0$ : pas trop dur...
  - Supp. $\mathcal{P}_k$ pour tout $k < n(A)$ et soit $n_G$ et $n_D$ le nb de nœuds dans les sous-arbres gauche et droit. Dans les deux appels récursifs, $5n_G$ et $5n_D$ appels de fonctions, donc au total $5n_G + 5n_D + 5$ appels. Or $n(A) = n_G + n_D + 1$, d'où le résultat.

# Parcours d'un arbre binaire

**Algorithme :** ParcoursInfixe($x$)

**si** $x \neq \emptyset$ **alors**

ParcoursInfixe(filsG($x$))
Afficher val($x$)
ParcoursInfixe(filsD($x$))




- Affichage : 2 7 3 0 5 6 8 1 9
- Complexité en $O(n(A))$
- Appel de la fonction : ParcoursInfixe(rac($A$))
- Variantes : ParcoursPrefixe et ParcoursSuffixe

# Algorithme générique sur les arbres binaires

Appel de $\textsc{Algo}(\text{rac}(A))$ avec

**Algorithme :** $\textsc{Algo}(x)$

res $\leftarrow$ valeur pour l'arbre vide
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $\text{res}_G \leftarrow \textsc{Algo}(\text{filsG}(x))$
  $\text{res}_D \leftarrow \textsc{Algo}(\text{filsD}(x))$
  $\text{res} \leftarrow f(\text{res}, \text{res}_G, \text{res}_D, x)$
**retourner** $g(res)$

# Algorithme générique sur les arbres binaires

Appel de $\textsc{Algo}(\text{rac}(A))$ avec

**Algorithme :** $\textsc{Algo}(x)$

res $\leftarrow$ valeur pour l'arbre vide
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $\text{res}_G \leftarrow \textsc{Algo}(\text{filsG}(x))$
  $\text{res}_D \leftarrow \textsc{Algo}(\text{filsD}(x))$
  $\text{res} \leftarrow f(\text{res}, \text{res}_G, \text{res}_D, x)$
**retourner** $g(res)$

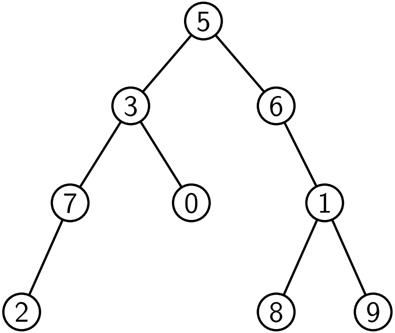
## Lemme

*L'algorithme générique sur les arbres binaires a une complexité $O(n(A))$ si $f$ et $g$ ont complexité $O(1)$.*

# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** MINIMUM($x$)

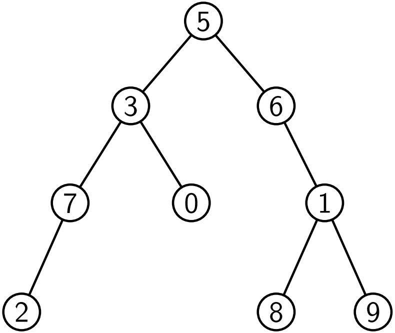
$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow$ MINIMUM(filsG($x$))
  $m_D \leftarrow$ MINIMUM(filsD($x$))
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \mathrm{val}(x))$
**retourner** $m$



# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
  $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$

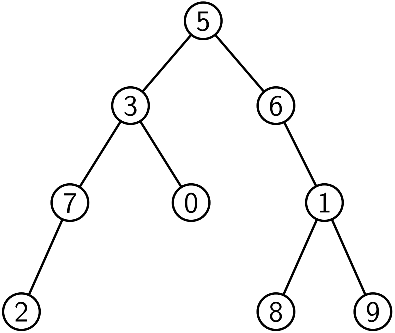



$$\textsc{Min}(A_5) = \min(5, \textsc{Min}(A_3), \textsc{Min}(A_6))$$

# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
  $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$

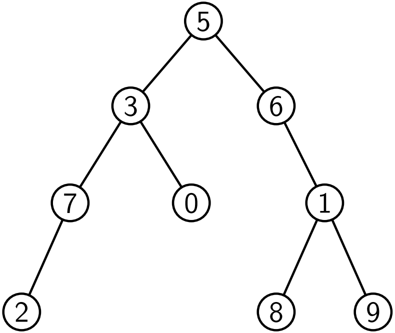



$$\textsc{Min}(A_5) = \min(5, \textsc{Min}(A_3), \textsc{Min}(A_6))$$
$$\textsc{Min}(A_3) = \min(3, \textsc{Min}(A_7), \textsc{Min}(A_0))$$

# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
  $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$

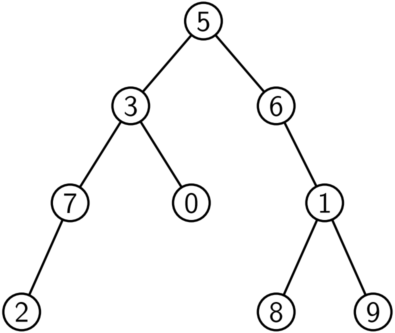



$$\textsc{Min}(A_5) = \min(5, \textsc{Min}(A_3), \textsc{Min}(A_6))$$
$$\textsc{Min}(A_3) = \min(3, \textsc{Min}(A_7), \textsc{Min}(A_0))$$
$$\textsc{Min}(A_7) = \min(7, \textsc{Min}(A_2), \textsc{Min}(\emptyset))$$

# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
  $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$

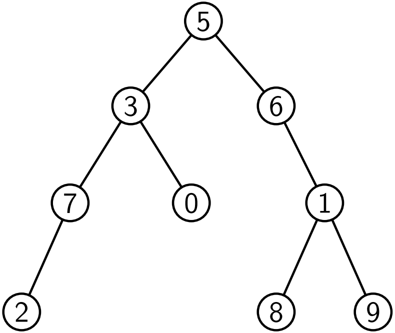



$$\textsc{Min}(A_5) = \min(5, \textsc{Min}(A_3), \textsc{Min}(A_6))$$
$$\textsc{Min}(A_3) = \min(3, \textsc{Min}(A_7), \textsc{Min}(A_0))$$
$$\textsc{Min}(A_7) = \min(7, \textsc{Min}(A_2), \textsc{Min}(\emptyset))$$
$$\textsc{Min}(A_2) = \min(2, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset))$$

# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
    $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
    $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
    $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$

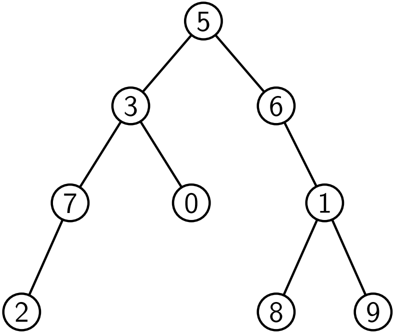



$$\textsc{Min}(A_5) = \min(5, \textsc{Min}(A_3), \textsc{Min}(A_6))$$
$$\textsc{Min}(A_3) = \min(3, \textsc{Min}(A_7), \textsc{Min}(A_0))$$
$$\textsc{Min}(A_7) = \min(7, \textsc{Min}(A_2), \textsc{Min}(\emptyset))$$
$$\textsc{Min}(A_2) = \min(2, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2$$

# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
  $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$

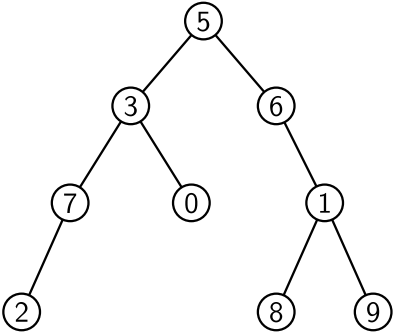



$$\textsc{Min}(A_5) = \min(5, \textsc{Min}(A_3), \textsc{Min}(A_6))$$
$$\textsc{Min}(A_3) = \min(3, \textsc{Min}(A_7), \textsc{Min}(A_0))$$
$$\textsc{Min}(A_7) = \min(7, \textsc{Min}(A_2), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2$$
$$\textsc{Min}(A_2) = \min(2, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2$$

# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
  $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$

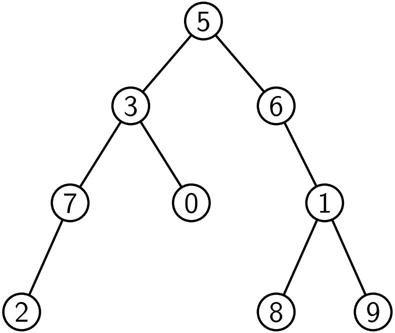



$$\begin{aligned}
\textsc{Min}(A_5) &= \min(5, \textsc{Min}(A_3), \textsc{Min}(A_6)) \\
\textsc{Min}(A_3) &= \min(3, \textsc{Min}(A_7), \textsc{Min}(A_0)) \\
\textsc{Min}(A_7) &= \min(7, \textsc{Min}(A_2), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2 \\
\textsc{Min}(A_2) &= \min(2, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2 \\
\textsc{Min}(A_0) &= \min(0, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset)) = 0
\end{aligned}$$

# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
  $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$

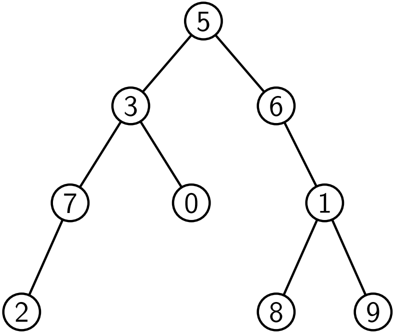



$\textsc{Min}(A_5) = \min(5, \textsc{Min}(A_3), \textsc{Min}(A_6))$
$\textsc{Min}(A_3) = \min(3, \textsc{Min}(A_7), \textsc{Min}(A_0)) = 0$
$\textsc{Min}(A_7) = \min(7, \textsc{Min}(A_2), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2$
$\textsc{Min}(A_2) = \min(2, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2$
$\textsc{Min}(A_0) = \min(0, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset)) = 0$

# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
  $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$

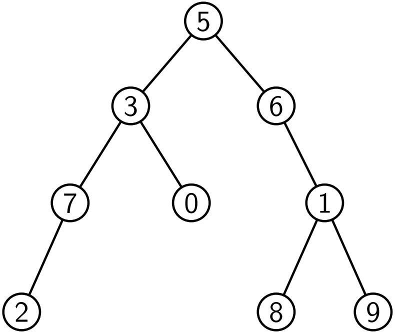



$\textsc{Min}(A_5) = \min(5, \textsc{Min}(A_3), \textsc{Min}(A_6))$
$\textsc{Min}(A_3) = \min(3, \textsc{Min}(A_7), \textsc{Min}(A_0)) = 0$
$\textsc{Min}(A_7) = \min(7, \textsc{Min}(A_2), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2$
$\textsc{Min}(A_2) = \min(2, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2$
$\textsc{Min}(A_0) = \min(0, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset)) = 0$
$\textsc{Min}(A_6) = \cdots = 1$

# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
  $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$



$\textsc{Min}(A_5) = \min(5, \textsc{Min}(A_3), \textsc{Min}(A_6)) = 0$
$\textsc{Min}(A_3) = \min(3, \textsc{Min}(A_7), \textsc{Min}(A_0)) = 0$
$\textsc{Min}(A_7) = \min(7, \textsc{Min}(A_2), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2$
$\textsc{Min}(A_2) = \min(2, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset)) = 2$
$\textsc{Min}(A_0) = \min(0, \textsc{Min}(\emptyset), \textsc{Min}(\emptyset)) = 0$
$\textsc{Min}(A_6) = \cdots = 1$

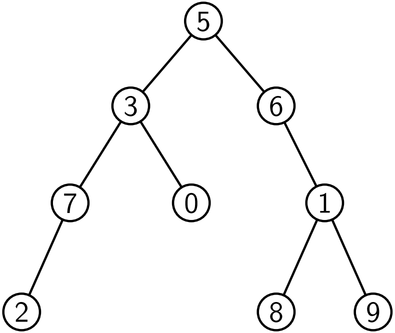
# Exemples d'utilisation

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

$m \leftarrow +\infty$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $m_G \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsG}(x))$
  $m_D \leftarrow \textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$
  $m \leftarrow \min(m_G, m_D, \text{val}(x))$
**retourner** $m$

**Algorithme :** $\textsc{NbNœuds}(x)$

$n \leftarrow 0$
**si** $x \neq \emptyset$ **alors**
  $n_G \leftarrow \textsc{NbNœuds}(\text{filsG}(x))$
  $n_D \leftarrow \textsc{NbNœuds}(\text{filsD}(x))$
  $n \leftarrow n_G + n_D + 1$
**retourner** $n$



# Objectifs

Stocker un **ensemble ordonné** de $n$ valeurs avec les opérations :

- INSÉRER et SUPPRIMER
- MINIMUM et MAXIMUM
- RECHERCHER
- SUCCESSEUR et PRÉDÉCESSEUR

$\rightsquigarrow$ toutes ces opérations en « bonne » complexité

# Objectifs

Stocker un **ensemble ordonné** de $n$ valeurs avec les opérations :

- INSÉRER et SUPPRIMER
- MINIMUM et MAXIMUM
- RECHERCHER
- SUCCESSEUR et PRÉDÉCESSEUR

$\rightsquigarrow$ toutes ces opérations en « bonne » complexité

**Listes chaînées :** $O(1)$ pour max/min, $O(n)$ pour le reste

# Objectifs

Stocker un **ensemble ordonné** de $n$ valeurs avec les opérations :

- INSÉRER et SUPPRIMER
- MINIMUM et MAXIMUM
- RECHERCHER
- SUCCESSEUR et PRÉDÉCESSEUR

**Listes chaînées :** $O(1)$ pour max/min, $O(n)$ pour le reste

$\leadsto$ toutes ces opérations en « bonne » complexité

## Utilisation

- Stockage de données dynamiques
- Base de données (valeurs = identifiant)
- Linux : ordonnancement, mémoire virtuelle, ...

# Objectifs

Stocker un **ensemble ordonné** de $n$ valeurs avec les opérations :

- INSÉRER et SUPPRIMER
- MINIMUM et MAXIMUM
- RECHERCHER
- SUCCESSEUR et PRÉDÉCESSEUR

**Listes chaînées :** $O(1)$ pour max/min, $O(n)$ pour le reste

$\rightsquigarrow$ toutes ces opérations en « bonne » complexité

## Utilisation

- Stockage de données dynamiques
- Base de données (valeurs = identifiant)
- Linux : ordonnancement, mémoire virtuelle, ...

Les arbres binaires de recherche sont **une** structure de donnée remplissant ces objectifs, mais pas la seule !

# Définition

Si $A$ est un arbre binaire, on note

- saG($A$) le **sous-arbre gauche** de $A$
- saD($A$) le **sous-arbre droit** de $A$

# Définition

Si $A$ est un arbre binaire, on note

- $\text{saG}(A)$ le **sous-arbre gauche** de $A$
- $\text{saD}(A)$ le **sous-arbre droit** de $A$

Un **arbre binaire de recherche** (ABR) est un arbre binaire tel que pour tout nœud $x$,

- $\forall y \in \text{saG}(x), \text{val}(y) \leq \text{val}(x)$
- $\forall z \in \text{saD}(x), \text{val}(z) \geq \text{val}(x)$

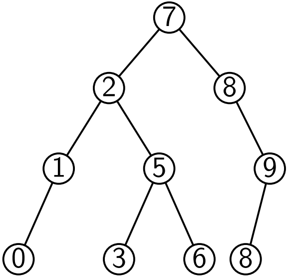
# Définition

Si $A$ est un arbre binaire, on note

- saG($A$) le **sous-arbre gauche** de $A$
- saD($A$) le **sous-arbre droit** de $A$

Un **arbre binaire de recherche** (ABR) est un arbre binaire tel que pour tout nœud $x$,

- $\forall y \in \mathrm{saG}(x)$, $\mathrm{val}(y) \leq \mathrm{val}(x)$
- $\forall z \in \mathrm{saD}(x)$, $\mathrm{val}(z) \geq \mathrm{val}(x)$



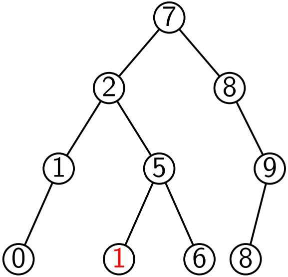
# Définition

Si $A$ est un arbre binaire, on note

- saG($A$) le **sous-arbre gauche** de $A$
- saD($A$) le **sous-arbre droit** de $A$

Un **arbre binaire de recherche** (ABR) est un arbre binaire tel que pour tout nœud $x$,

- $\forall y \in \text{saG}(x), \text{val}(y) \leq \text{val}(x)$
- $\forall z \in \text{saD}(x), \text{val}(z) \geq \text{val}(x)$



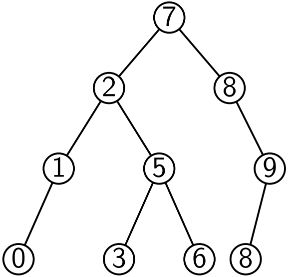
# Définition

Si $A$ est un arbre binaire, on note

- saG($A$) le **sous-arbre gauche** de $A$
- saD($A$) le **sous-arbre droit** de $A$

Un **arbre binaire de recherche** (ABR) est un arbre binaire tel que pour tout nœud $x$,

- $\forall y \in \text{saG}(x)$, $\text{val}(y) \leq \text{val}(x)$
- $\forall z \in \text{saD}(x)$, $\text{val}(z) \geq \text{val}(x)$

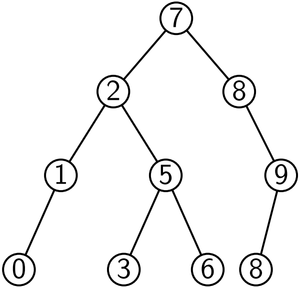


# Parcours infixe d'un ABR

**Algorithme :** ParcoursInfixe($x$)

**si** $x \neq \emptyset$ **alors**

  ParcoursInfixe(filsG($x$))
  Afficher val($x$)
  ParcoursInfixe(filsD($x$))

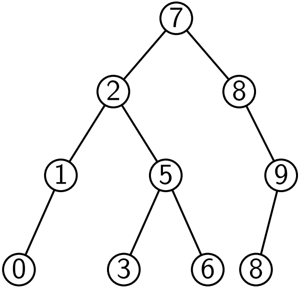


# Parcours infixe d'un ABR

**Algorithme :** ParcoursInfixe($x$)

**si** $x \neq \emptyset$ **alors**

  ParcoursInfixe(filsG($x$))
  Afficher val($x$)
  ParcoursInfixe(filsD($x$))




## Lemme

*Le parcours infixe d'un arbre binaire $A$ affiche les valeurs de $A$ triées si et seulement si $A$ est un ABR.*

Preuve par induction : affichage en ordre $\nearrow$
ssi $\mathrm{val}(y) \leq \mathrm{val}(\mathrm{rac}(A)) \leq \mathrm{val}(z)$ pour $y \in \mathrm{saG}(A)$, $z \in \mathrm{saD}(A)$
ssi $A$ est un ABR

# Recherche dans un ABR

**Algorithme :** RECHERCHER$(x, k)$

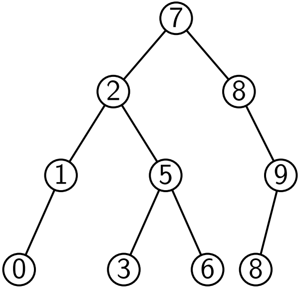
**si** $x = \emptyset$ **alors retourner** $\emptyset$

**si** $\mathrm{val}(x) = k$ **alors retourner** $x$

**si** $\mathrm{val}(x) > k$ **alors**

  **retourner** RECHERCHER(filsG$(x)$, $k$)

**retourner** RECHERCHER(filsD$(x)$, $k$)

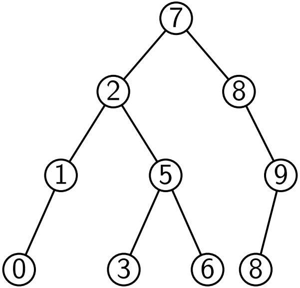


# Recherche dans un ABR

**Algorithme :** RECHERCHER$(x, k)$

**tant que** $x \neq \emptyset$ *et* $\mathrm{val}(x) \neq k$ **faire**
    **si** $k < \mathrm{val}(x)$ **alors**
        $x \leftarrow \mathrm{filsG}(x)$
    **sinon**
        $x \leftarrow \mathrm{filsD}(x)$

**retourner** $x$



# Recherche dans un ABR

**Algorithme :** RECHERCHER$(x, k)$

**tant que** $x \neq \emptyset$ *et* $\mathrm{val}(x) \neq k$ **faire**

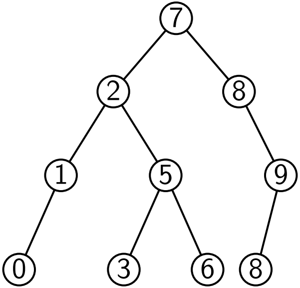
  **si** $k < \mathrm{val}(x)$ **alors**

    $x \leftarrow \mathrm{filsG}(x)$

  **sinon**

    $x \leftarrow \mathrm{filsD}(x)$

**retourner** $x$



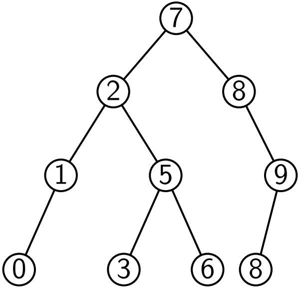

Validité admise

# Recherche dans un ABR

**Algorithme :** RECHERCHER($x, k$)

**tant que** $x \neq \emptyset$ *et* $\text{val}(x) \neq k$ **faire**
  **si** $k < \text{val}(x)$ **alors**
    $x \leftarrow \text{filsG}(x)$
  **sinon**
    $x \leftarrow \text{filsD}(x)$

**retourner** $x$




Validité admise

**Lemme**

RECHERCHER(rac($A$)) *a une complexité* $O(h(A))$.

**Preuve**

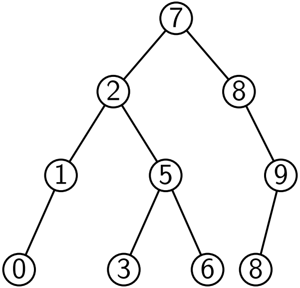
- À chaque passage dans la boucle, la hauteur est diminuée d'au moins 1 : $\leq h(A)$ passages
- Chaque passage coûte $O(1)$

# Minimum et successeur

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

**tant que** $\text{filsG}(x) \neq \emptyset$ **faire**
  $x \leftarrow \text{filsG}(x)$

**retourner** $x$



# Minimum et successeur

**Algorithme :** MINIMUM($x$)

**tant que** filsG($x$) $\neq \emptyset$ **faire**

  $x \leftarrow$ filsG($x$)

**retourner** $x$

**Algorithme :** SUCCESSEUR($x$)

**si** filsD($x$) $\neq \emptyset$ **alors**

  **retourner** MINIMUM(filsD($x$))

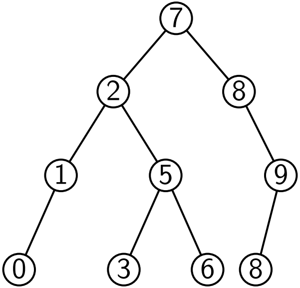
$p \leftarrow$ père($x$)

**tant que** $p \neq \emptyset$ *et* $x =$ filsD($p$) **faire**

  $x \leftarrow p$

  $p \leftarrow$ père($x$)

**retourner** $y$



# Minimum et successeur

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

**tant que** $\text{filsG}(x) \neq \emptyset$ **faire**
- $x \leftarrow \text{filsG}(x)$

**retourner** $x$

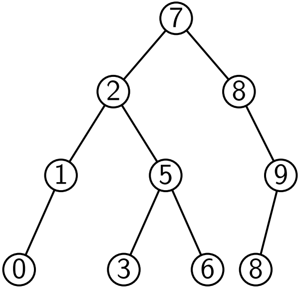
**Algorithme :** $\textsc{Successeur}(x)$

**si** $\text{filsD}(x) \neq \emptyset$ **alors**
- **retourner** $\textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$

$p \leftarrow \text{père}(x)$

**tant que** $p \neq \emptyset$ *et* $x = \text{filsD}(p)$ **faire**
- $x \leftarrow p$
- $p \leftarrow \text{père}(x)$

**retourner** $y$




$\textsc{Successeur}(2) = 3$

# Minimum et successeur

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

**tant que** $\text{filsG}(x) \neq \emptyset$ **faire**

  $x \leftarrow \text{filsG}(x)$

**retourner** $x$

**Algorithme :** $\textsc{Successeur}(x)$

**si** $\text{filsD}(x) \neq \emptyset$ **alors**

  **retourner** $\textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$

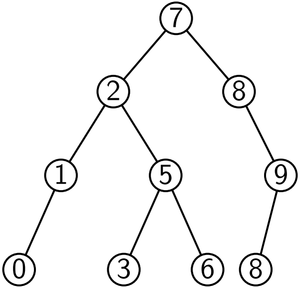
$p \leftarrow \text{père}(x)$

**tant que** $p \neq \emptyset$ *et* $x = \text{filsD}(p)$ **faire**

  $x \leftarrow p$

  $p \leftarrow \text{père}(x)$

**retourner** $y$




$\textsc{Successeur}(2) = 3$

$\textsc{Successeur}(6) = 7$

# Minimum et successeur

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

**tant que** $\text{filsG}(x) \neq \emptyset$ **faire**
  $x \leftarrow \text{filsG}(x)$

**retourner** $x$

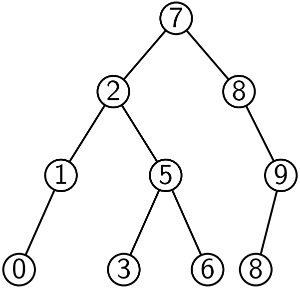
**Algorithme :** $\textsc{Successeur}(x)$

**si** $\text{filsD}(x) \neq \emptyset$ **alors**
  **retourner** $\textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$

$p \leftarrow \text{père}(x)$

**tant que** $p \neq \emptyset$ *et* $x = \text{filsD}(p)$ **faire**
  $x \leftarrow p$
  $p \leftarrow \text{père}(x)$

**retourner** $y$




$\textsc{Successeur}(2) = 3$
$\textsc{Successeur}(6) = 7$
$\textsc{Successeur}(9) = \emptyset$

# Minimum et successeur

**Algorithme :** $\textsc{Minimum}(x)$

**tant que** $\text{filsG}(x) \neq \emptyset$ **faire**
  $x \leftarrow \text{filsG}(x)$

**retourner** $x$

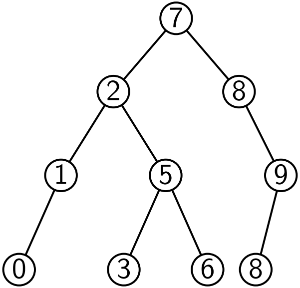
**Algorithme :** $\textsc{Successeur}(x)$

**si** $\text{filsD}(x) \neq \emptyset$ **alors**
  **retourner** $\textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$

$p \leftarrow \text{père}(x)$

**tant que** $p \neq \emptyset$ *et* $x = \text{filsD}(p)$ **faire**
  $x \leftarrow p$
  $p \leftarrow \text{père}(x)$

**retourner** $y$




$\textsc{Successeur}(2) = 3$
$\textsc{Successeur}(6) = 7$
$\textsc{Successeur}(9) = \emptyset$

**Lemme**

$\textsc{Minimum}$ *et* $\textsc{Successeur}$ *ont une complexité* $O(h(A))$

# Validité de successeur

**Algorithme :** $\textsc{Successeur}(x)$

**si** $\mathrm{filsD}(x) \neq \emptyset$ **alors**
  **retourner** $\textsc{Minimum}(\mathrm{filsD}(x))$

$p \leftarrow \mathrm{père}(x)$
**tant que** $p \neq \emptyset$ *et* $x = \mathrm{filsD}(p)$ **faire**
  $(x, p) \leftarrow (p, \mathrm{père}(x))$

**retourner** $p$

## Lemme

$\textsc{Successeur}$ *renvoie un sommet de plus petite valeur parmi ceux dont la valeur est* $\geq \mathrm{val}(x)$.

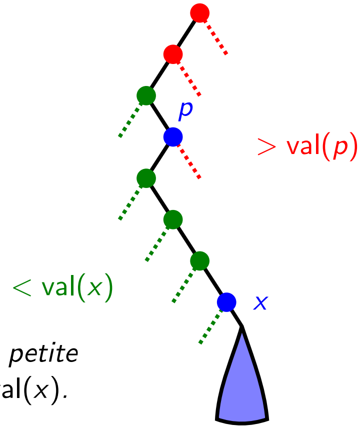
# Validité de successeur

**Algorithme :** $\textsc{Successeur}(x)$

**si** $\text{filsD}(x) \neq \emptyset$ **alors**
  **retourner** $\textsc{Minimum}(\text{filsD}(x))$

$p \leftarrow \text{père}(x)$
**tant que** $p \neq \emptyset$ *et* $x = \text{filsD}(p)$ **faire**
  $(x, p) \leftarrow (p, \text{père}(x))$

**retourner** $p$




## Lemme

$\textsc{Successeur}$ *renvoie un sommet de plus petite valeur parmi ceux dont la valeur est* $\geq \text{val}(x)$.

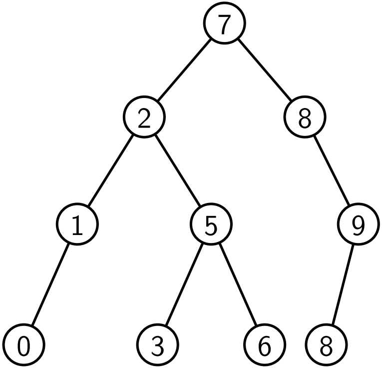
**Preuve** Supp. les valeurs 2-à-2 distinctes. Soit $p$ calculé par l'algo.

- pour tout $y \in \text{saD}(x)$, $\text{val}(x) < \text{val}(y) < \text{val}(p)$
- pour tout *ancêtre* $z \neq p$ de $x$, deux possibilités :
  - $x \in \text{saD}(z) \rightsquigarrow \text{val}(z) < \text{val}(x)$ et $\forall y \in \text{saG}(z), \text{val}(y) < \text{val}(x)$
  - $p \in \text{saG}(z) \rightsquigarrow \text{val}(z) > \text{val}(p)$ et $\forall y \in \text{saD}(z), \text{val}(y) > \text{val}(p)$

# Insertion d'un élément

**Algorithme :** $\textsc{Insérer}(A, z)$

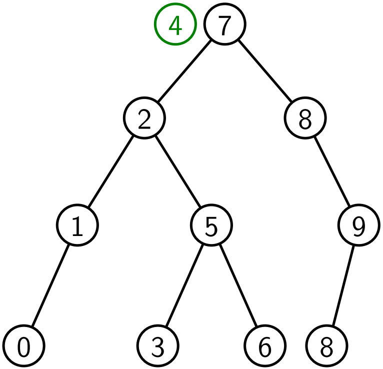
$x \leftarrow \mathrm{rac}(A)$
$p \leftarrow \emptyset$
**tant que** $x \neq \emptyset$ **faire**
    $p \leftarrow x$
    **si** $\mathrm{val}(z) < \mathrm{val}(x)$ **alors**
        $x \leftarrow \mathrm{filsG}(x)$
    **sinon** $x \leftarrow \mathrm{filsD}(x)$
$\text{père}(z) \leftarrow p$
**si** $p = \emptyset$ **alors** $\mathrm{rac}(A) \leftarrow z$
**sinon si** $\mathrm{val}(z) < \mathrm{val}(p)$ **alors**
    $\mathrm{filsG}(p) \leftarrow z$
**sinon** $\mathrm{filsD}(p) \leftarrow z$



# Insertion d'un élément

**Algorithme :** $\textsc{Insérer}(A, z)$

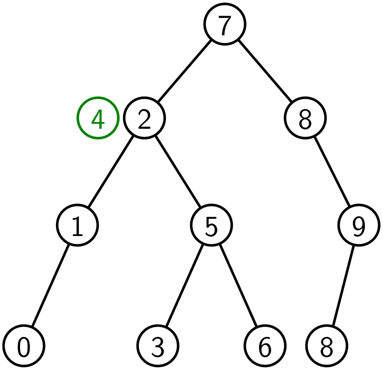
$x \leftarrow \text{rac}(A)$
$p \leftarrow \emptyset$
**tant que** $x \neq \emptyset$ **faire**
  $p \leftarrow x$
  **si** $\text{val}(z) < \text{val}(x)$ **alors**
    $x \leftarrow \text{filsG}(x)$
  **sinon** $x \leftarrow \text{filsD}(x)$
$\text{père}(z) \leftarrow p$
**si** $p = \emptyset$ **alors** $\text{rac}(A) \leftarrow z$
**sinon si** $\text{val}(z) < \text{val}(p)$ **alors**
  $\text{filsG}(p) \leftarrow z$
**sinon** $\text{filsD}(p) \leftarrow z$



# Insertion d'un élément

**Algorithme :** $\textsc{Insérer}(A, z)$

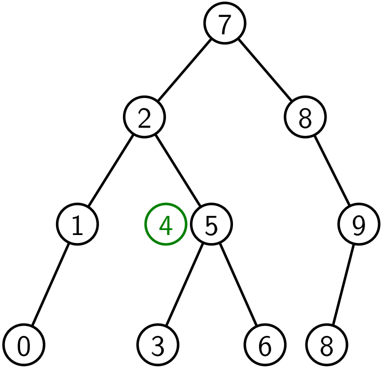
$x \leftarrow \text{rac}(A)$
$p \leftarrow \emptyset$
**tant que** $x \neq \emptyset$ **faire**
    $p \leftarrow x$
    **si** $\text{val}(z) < \text{val}(x)$ **alors**
        $x \leftarrow \text{filsG}(x)$
    **sinon** $x \leftarrow \text{filsD}(x)$
$\text{père}(z) \leftarrow p$
**si** $p = \emptyset$ **alors** $\text{rac}(A) \leftarrow z$
**sinon si** $\text{val}(z) < \text{val}(p)$ **alors**
    $\text{filsG}(p) \leftarrow z$
**sinon** $\text{filsD}(p) \leftarrow z$



# Insertion d'un élément

**Algorithme :** INSÉRER$(A, z)$

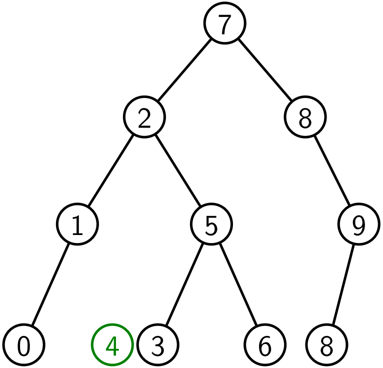
$x \leftarrow \text{rac}(A)$
$p \leftarrow \emptyset$
**tant que** $x \neq \emptyset$ **faire**
  $p \leftarrow x$
  **si** $\text{val}(z) < \text{val}(x)$ **alors**
    $x \leftarrow \text{filsG}(x)$
  **sinon** $x \leftarrow \text{filsD}(x)$
$\text{père}(z) \leftarrow p$
**si** $p = \emptyset$ **alors** $\text{rac}(A) \leftarrow z$
**sinon si** $\text{val}(z) < \text{val}(p)$ **alors**
  $\text{filsG}(p) \leftarrow z$
**sinon** $\text{filsD}(p) \leftarrow z$



# Insertion d'un élément

**Algorithme :** $\textsc{Insérer}(A, z)$

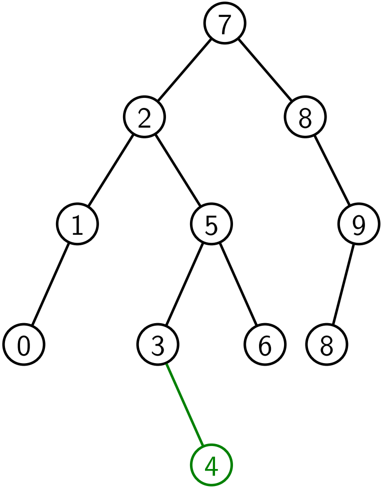
$x \leftarrow \mathrm{rac}(A)$
$p \leftarrow \emptyset$
**tant que** $x \neq \emptyset$ **faire**
    $p \leftarrow x$
    **si** $\mathrm{val}(z) < \mathrm{val}(x)$ **alors**
        $x \leftarrow \mathrm{filsG}(x)$
    **sinon** $x \leftarrow \mathrm{filsD}(x)$
$\mathrm{père}(z) \leftarrow p$
**si** $p = \emptyset$ **alors** $\mathrm{rac}(A) \leftarrow z$
**sinon si** $\mathrm{val}(z) < \mathrm{val}(p)$ **alors**
    $\mathrm{filsG}(p) \leftarrow z$
**sinon** $\mathrm{filsD}(p) \leftarrow z$



# Insertion d'un élément

**Algorithme :** $\textsc{Insérer}(A, z)$

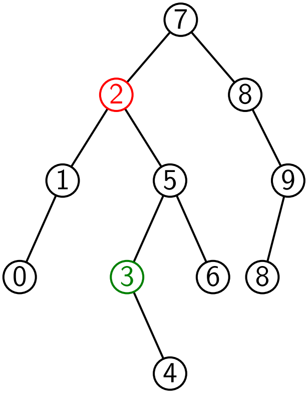
$x \leftarrow \text{rac}(A)$
$p \leftarrow \emptyset$
**tant que** $x \neq \emptyset$ **faire**
    $p \leftarrow x$
    **si** $\text{val}(z) < \text{val}(x)$ **alors**
        $x \leftarrow \text{filsG}(x)$
    **sinon** $x \leftarrow \text{filsD}(x)$
$\text{père}(z) \leftarrow p$
**si** $p = \emptyset$ **alors** $\text{rac}(A) \leftarrow z$
**sinon si** $\text{val}(z) < \text{val}(p)$ **alors**
    $\text{filsG}(p) \leftarrow z$
**sinon** $\text{filsD}(p) \leftarrow z$



# Suppression d'un élément

**Algorithme :** SUPPRIMER$(A, z)$

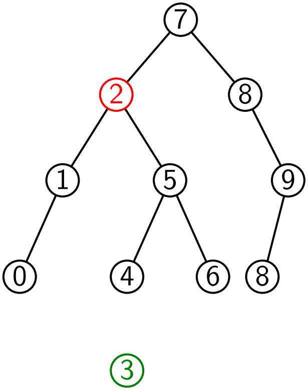
**si** filsG$(z) = \emptyset$ **alors**
  REMPLACE$(A, z, \text{filsD}(z))$
**sinon si** filsD$(z) = \emptyset$ **alors**
  REMPLACE$(A, z, \text{filsG}(z))$
**sinon**
  $y$ = SUCCESSEUR$(z)$
  SUPPRIMER$(A, y)$
  filsD$(y) \leftarrow$ filsD$(z)$
  filsD$(z) \leftarrow \emptyset$
  filsG$(y) \leftarrow$ filsG$(z)$
  filsG$(z) \leftarrow \emptyset$
  REMPLACE$(A, z, y)$



# Suppression d'un élément

**Algorithme :** $\textsc{Supprimer}(A, z)$

**si** $\text{filsG}(z) = \emptyset$ **alors**
  $\textsc{Remplace}(A, z, \text{filsD}(z))$
**sinon si** $\text{filsD}(z) = \emptyset$ **alors**
  $\textsc{Remplace}(A, z, \text{filsG}(z))$
**sinon**
  $y = \textsc{Successeur}(z)$
  $\textsc{Supprimer}(A, y)$
  $\text{filsD}(y) \leftarrow \text{filsD}(z)$
  $\text{filsD}(z) \leftarrow \emptyset$
  $\text{filsG}(y) \leftarrow \text{filsG}(z)$
  $\text{filsG}(z) \leftarrow \emptyset$
  $\textsc{Remplace}(A, z, y)$



# Suppression d'un élément

**Algorithme :** $\textsc{Supprimer}(A, z)$

**si** $\text{filsG}(z) = \emptyset$ **alors**

  $\textsc{Remplace}(A, z, \text{filsD}(z))$

**sinon si** $\text{filsD}(z) = \emptyset$ **alors**

  $\textsc{Remplace}(A, z, \text{filsG}(z))$

**sinon**

  $y = \textsc{Successeur}(z)$

  $\textsc{Supprimer}(A, y)$

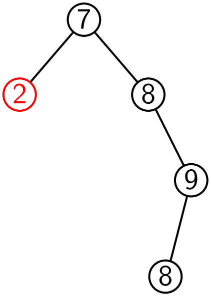
  $\text{filsD}(y) \leftarrow \text{filsD}(z)$

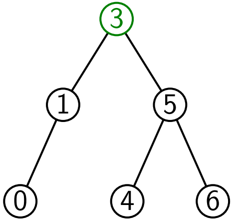
  $\text{filsD}(z) \leftarrow \emptyset$

  $\text{filsG}(y) \leftarrow \text{filsG}(z)$

  $\text{filsG}(z) \leftarrow \emptyset$

  $\textsc{Remplace}(A, z, y)$

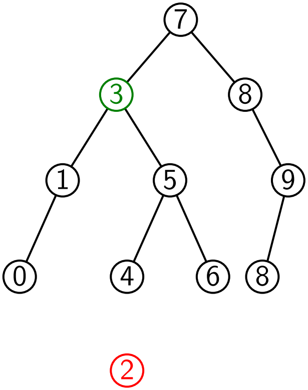


# Suppression d'un élément

**Algorithme :** Supprimer$(A, z)$

**si** filsG$(z) = \emptyset$ **alors**
  Remplace$(A, z, \text{filsD}(z))$
**sinon si** filsD$(z) = \emptyset$ **alors**
  Remplace$(A, z, \text{filsG}(z))$
**sinon**
  $y =$ Successeur$(z)$
  Supprimer$(A, y)$
  filsD$(y) \leftarrow$ filsD$(z)$
  filsD$(z) \leftarrow \emptyset$
  filsG$(y) \leftarrow$ filsG$(z)$
  filsG$(z) \leftarrow \emptyset$
  Remplace$(A, z, y)$



# Validité et complexités

**Algorithme :** $\textsc{Remplace}(A, x, z)$

$p \leftarrow \text{père}(x)$ ; $\text{père}(x) \leftarrow \emptyset$
**si** $p = \emptyset$ **alors** $\text{rac}(A) \leftarrow z$
**sinon si** $x = \text{filsG}(p)$ **alors** $\text{filsG}(p) \leftarrow z$
**sinon** $\text{filsD}(p) \leftarrow z$
**si** $z \neq \emptyset$ **alors** $\text{père}(z) \leftarrow p$

# Validité et complexités

**Algorithme :** $\textsc{Remplace}(A, x, z)$

$p \leftarrow$ père$(x)$ ; père$(x) \leftarrow \emptyset$
**si** $p = \emptyset$ **alors** rac$(A) \leftarrow z$
**sinon si** $x =$ filsG$(p)$ **alors** filsG$(p) \leftarrow z$
**sinon** filsD$(p) \leftarrow z$
**si** $z \neq \emptyset$ **alors** père$(z) \leftarrow p$

## Lemme

*Si A est un ABR, il reste un ABR après* $\textsc{Supprimer}(A, z)$.

Preuve Le nœud $z$ est remplacé par son successeur $y$ :

- Pour tout $x \in \mathrm{saG}(y)$, $\mathrm{val}(x) \leq \mathrm{val}(z) \leq \mathrm{val}(y)$
- Pour tout $x \in \mathrm{saD}(y)$, $\mathrm{val}(x) \geq \mathrm{val}(y)$ car $y = \min(\mathrm{saD}(z))$

Le reste de l'arbre est inchangé.

# Validité et complexités

**Algorithme :** REMPLACE$(A, x, z)$

$p \leftarrow$ père$(x)$ ; père$(x) \leftarrow \emptyset$
**si** $p = \emptyset$ **alors** rac$(A) \leftarrow z$
**sinon si** $x =$ filsG$(p)$ **alors** filsG$(p) \leftarrow z$
**sinon** filsD$(p) \leftarrow z$
**si** $z \neq \emptyset$ **alors** père$(z) \leftarrow p$

## Lemme

*Si $A$ est un ABR, il reste un ABR après* SUPPRIMER$(A, z)$.

## Lemme

INSÉRER *et* SUPPRIMER *ont une complexité $O(h(A))$.*

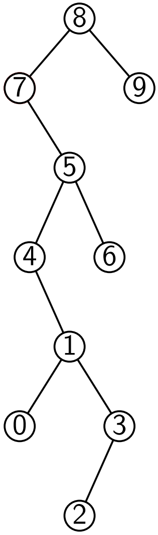
Preuve On parcourt *une branche de l'arbre* pour trouver soit l'endroit où insérer (INSÉRER) soit le successeur (SUPPRIMER) : complexité $O(h(A))$. Le reste est un nombre constant de modifications de pointeurs.

# Motivation

## Rappel des complexités

- INSÉRER et SUPPRIMER : $O(h(A))$
- MINIMUM et MAXIMUM[1] : $O(h(A))$
- RECHERCHER : $O(h(A))$
- SUCCESSEUR et PRÉDECESSEUR[1] : $O(h(A))$

[1] Exercice !

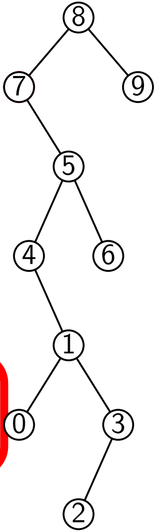


# Motivation

## Rappel des complexités

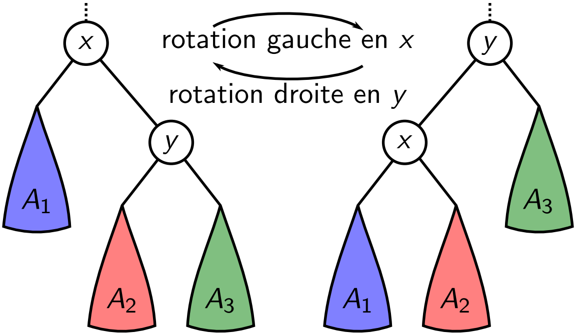
- Insérer et Supprimer : $O(h(A))$
- Minimum et Maximum[1] : $O(h(A))$
- Rechercher : $O(h(A))$
- Successeur et Prédecesseur[1] : $O(h(A))$

[1] Exercice !

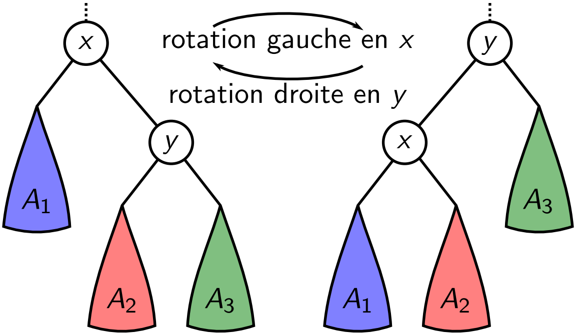



Un ABR est une structure de donnée efficace s'il est **équilibré**, c'est-à-dire si $h(A) = O(\log(n(A)))$.

# Outil de base : les rotations



# Outil de base : les rotations



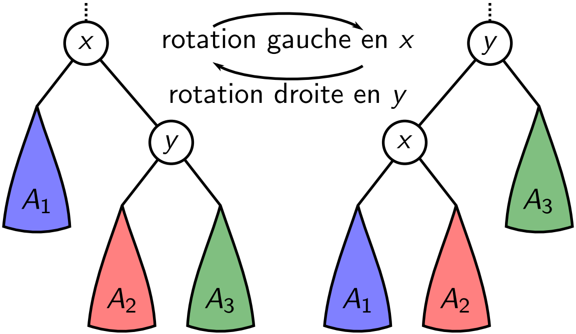

### Lemme

*Si A est un ABR, il reste un ABR après rotation.*

Preuve Les rotations ne modifient que leur sous-arbre.

- Pour tout $z \in A_1$, $\mathrm{val}(z) \leq \mathrm{val}(x) \leq \mathrm{val}(y)$
- Pour tout $z \in A_2$, $\mathrm{val}(x) \leq \mathrm{val}(z) \leq \mathrm{val}(y)$
- Pour tout $z \in A_3$, $\mathrm{val}(x) \leq \mathrm{val}(y) \leq \mathrm{val}(z)$

# Outil de base : les rotations



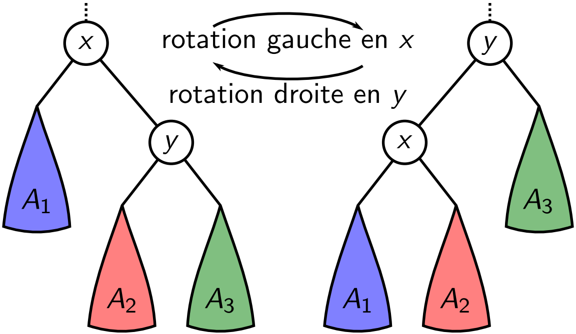

## Lemme

*Si A est un ABR, il reste un ABR après rotation.*

## Utilisation

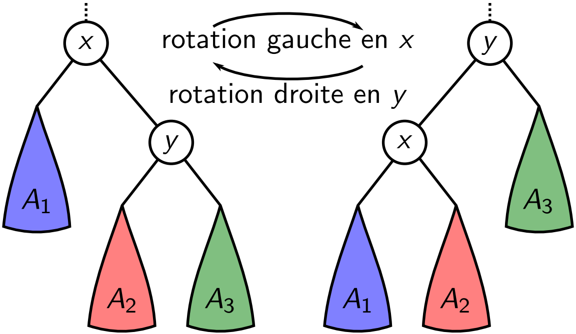
- Augmentation de la hauteur d'un côté, diminution de l'autre
- Opération en temps $O(1)$ : quelques pointeurs à changer

# Comment équilibrer ?




- Techniques d'équilibrage lors de INSÉRER/SUPPRIMER
  - arbres rouge-noir, AVL, B, déployés, ...
  - Tarbres (ou arbres-tas) : simulent l'insertion en ordre aléatoire

# Comment équilibrer ?




- Techniques d'équilibrage lors de INSÉRER/SUPPRIMER
  - arbres rouge-noir, AVL, B, déployés, ...
  - Tarbres (ou arbres-tas) : simulent l'insertion en ordre aléatoire
- Au delà du contenu de ce cours...

# Conclusion sur les ABR

- Structure de données pour ensembles ordonnés
- INSÉRER/SUPPRIMER, RECHERCHER, ... : $O(h(A))$
- $\lfloor \log(n(A)) \rfloor \leq h(A) < n(A)$
  - Efficace que si $h(A) = O(\log(n(A)))$
  - Vrai si insertion en ordre aléatoire
  - Techniques d'équilibrage basées sur les rotations

# Utilisations principales des tas

- Algorithme du « **tri par tas** »
- **Files de priorité** : stockage d'un ensemble d'éléments ayant chacun une priorité, avec les opérations
  - AJOUTER : ajoute un nouvel élément (avec sa priorité)
  - RETIRERMAX : retire l'élément de priorité maximale
  - AUGMENTERPRIORITÉ : augmente la priorité d'un élément
  - DIMINUERPRIORITÉ : diminue la priorité d'un élément

# Utilisations principales des tas

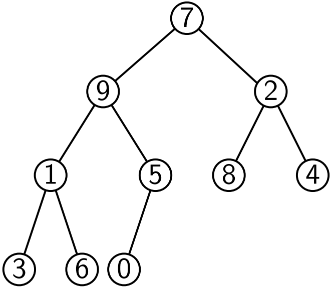
- Algorithme du « **tri par tas** »
- **Files de priorité** : stockage d'un ensemble d'éléments ayant chacun une priorité, avec les opérations
  - AJOUTER : ajoute un nouvel élément (avec sa priorité)
  - RETIRERMAX : retire l'élément de priorité maximale
  - AUGMENTERPRIORITÉ : augmente la priorité d'un élément
  - DIMINUERPRIORITÉ : diminue la priorité d'un élément
- Utilisation de files de priorité
  - Trouver le chemin le plus court entre deux points
    - dans un graphe (Dijkstra) $\rightsquigarrow$ HLIN501
    - sur une carte ($A^*$, ...)
  - Répartition de charge entre serveurs, gestion des exceptions
  - Priorités aléatoires pour équilibrer des ABR $\rightsquigarrow$ HMIN119

# Utilisations principales des tas

- Algorithme du « **tri par tas** »
- **Files de priorité** : stockage d'un ensemble d'éléments ayant chacun une priorité, avec les opérations
  - AJOUTER : ajoute un nouvel élément (avec sa priorité)
  - RETIRERMAX : retire l'élément de priorité maximale
  - AUGMENTERPRIORITÉ : augmente la priorité d'un élément
  - DIMINUERPRIORITÉ : diminue la priorité d'un élément
- Utilisation de files de priorité
  - Trouver le chemin le plus court entre deux points
    - dans un graphe (Dijkstra) $\rightsquigarrow$ HLIN501
    - sur une carte ($A^*$, ...)
  - Répartition de charge entre serveurs, gestion des exceptions
  - Priorités aléatoires pour équilibrer des ABR $\rightsquigarrow$ HMIN119

Le tas est **une** structure de donnée permettant d'implanter les files de priorités, mais les autres sont en général des extensions.

# Arbres quasi-complets

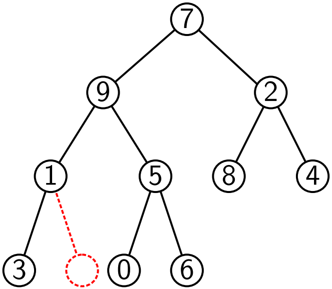



## Définition

Un arbre binaire est **quasi-complet** si

- pour tout $k < h(A)$, $|N_k| = 2^k$
- les nœuds de $N_{h(A)}$ sont « *le plus à gauche possible* »

# Arbres quasi-complets




## Définition

Un arbre binaire est **quasi-complet** si

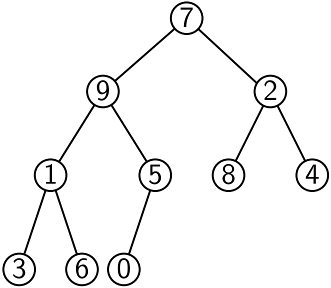
- pour tout $k < h(A)$, $|N_k| = 2^k$
- les nœuds de $N_{h(A)}$ sont ≪ *le plus à gauche possible* ≫

# Arbres quasi-complets

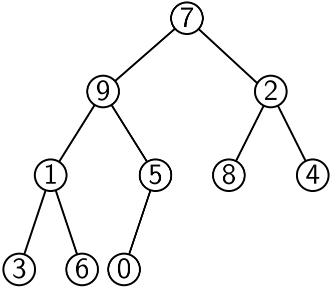
## Définition

Un arbre binaire est **quasi-complet** si

- pour tout $k < h(A)$, $|N_k| = 2^k$
- les nœuds de $N_{h(A)}$ sont ≪ *le plus à gauche possible* ≫



# Arbres quasi-complets




## Définition

Un arbre binaire est **quasi-complet** si

- pour tout $k < h(A)$, $|N_k| = 2^k$
- les nœuds de $N_{h(A)}$ sont « *le plus à gauche possible* »

## Lemme

*Si $A$ est un arbre quasi-complet,* $2^{h(A)} \leq n(A) \leq 2^{h(A)+1} - 1$.

Preuve La borne supérieure est vraie pour tout $A$.

$N_0$, ..., $N_{h(A)-1}$ complets et $|N_{h(A)}| \geq 1$

$$\rightsquigarrow n(A) = \sum_{i=0}^{h(A)} |N_i| \geq 1 + \sum_{i=0}^{h(A)-1} 2^i = (2^{h(A)} - 1) + 1$$

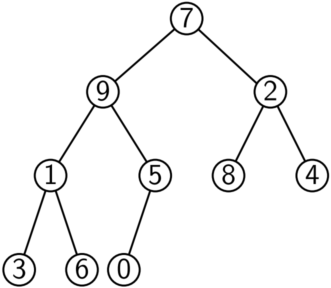
(Le + petit arbre quasi-complet est un arbre complet de hauteur $h(A) - 1$, donc de taille $2^{h(A)} - 1$, avec 1 élément au niveau $h(A)$)

# Numérotation des arbres quasi-complets

### Définition

Pour tout nœud $x$ d'un arbre, soit **num($x$)** son **numéro**, défini par

- $\mathrm{num}(\mathrm{rac}(A)) = 0$
- si $\mathrm{filsG}(x) \neq \emptyset$,
  $\mathrm{num}(\mathrm{filsG}(x)) = 2\,\mathrm{num}(x) + 1$
- si $\mathrm{filsD}(x) \neq \emptyset$,
  $\mathrm{num}(\mathrm{filsD}(x)) = 2\,\mathrm{num}(x) + 2$

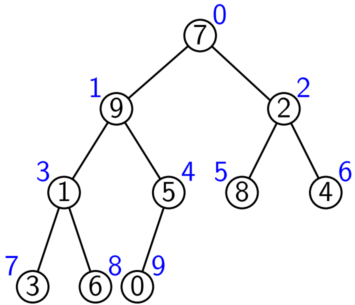


# Numérotation des arbres quasi-complets

## Définition

Pour tout nœud $x$ d'un arbre, soit **num($x$)** son **numéro**, défini par

- $\text{num}(\text{rac}(A)) = 0$
- si $\text{filsG}(x) \neq \emptyset$,
  $\text{num}(\text{filsG}(x)) = 2\,\text{num}(x) + 1$
- si $\text{filsD}(x) \neq \emptyset$,
  $\text{num}(\text{filsD}(x)) = 2\,\text{num}(x) + 2$

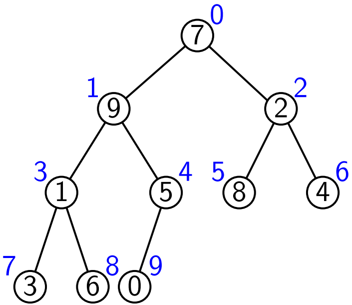


# Numérotation des arbres quasi-complets

### Définition

Pour tout nœud $x$ d'un arbre, soit **num($x$)** son **numéro**, défini par

- $\text{num}(\text{rac}(A)) = 0$
- si $\text{filsG}(x) \neq \emptyset$, $\text{num}(\text{filsG}(x)) = 2\,\text{num}(x) + 1$
- si $\text{filsD}(x) \neq \emptyset$, $\text{num}(\text{filsD}(x)) = 2\,\text{num}(x) + 2$




Numérotation de haut en bas et de gauche à droite (parcours en largeur)

# Propriétés de la numérotation

## Lemme

*Un arbre binaire est quasi-complet si et seulement si ses nœuds sont numérotés de* $0$ *à* $n(A) - 1$.

# Propriétés de la numérotation

## Lemme

*Un arbre binaire est quasi-complet si et seulement si ses nœuds sont numérotés de* $0$ *à* $n(A) - 1$.

## Preuve

1. Si $x \in N_k$, $2^k - 1 \leq \text{num}(x) \leq 2^{k+1} - 2$
   - $k = 0$...
   - si $x \in N_k$, père$(x) \in N_{k-1}$
     $\rightsquigarrow 2^{k-1} - 1 \leq \text{num}(\text{père}(x)) \leq 2^k - 2$
     $\rightsquigarrow 2 \cdot (2^{k-1} - 1) + 1 \leq \text{num}(x) \leq 2 \cdot (2^k - 2) + 2$
     $\rightsquigarrow 2^k - 1 \leq \text{num}(x) \leq 2^{k+1} - 2$

# Propriétés de la numérotation

## Lemme

*Un arbre binaire est quasi-complet si et seulement si ses nœuds sont numérotés de* $0$ *à* $n(A) - 1$.

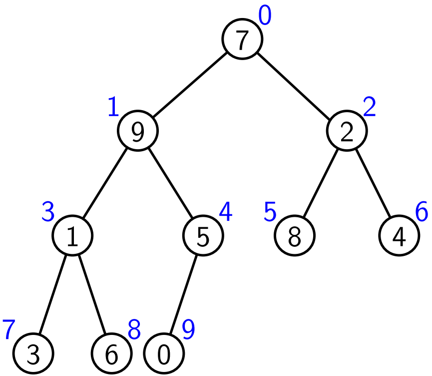
## Preuve

1. Si $x \in N_k$, $2^k - 1 \leq \mathrm{num}(x) \leq 2^{k+1} - 2$
   - $k = 0$...
   - si $x \in N_k$, père$(x) \in N_{k-1}$
     $\rightsquigarrow 2^{k-1} - 1 \leq \mathrm{num}(\text{père}(x)) \leq 2^k - 2$
     $\rightsquigarrow 2 \cdot (2^{k-1} - 1) + 1 \leq \mathrm{num}(x) \leq 2 \cdot (2^k - 2) + 2$
     $\rightsquigarrow 2^k - 1 \leq \mathrm{num}(x) \leq 2^{k+1} - 2$
2. Si $x$ est le *voisin de gauche* de $y$, $\mathrm{num}(y) = \mathrm{num}(x) + 1$
   - Si $\mathrm{num}(x) = 2p + 1$, $y = \mathrm{filsD}(\text{père}(x))$ donc $\mathrm{num}(y) = 2p + 2$
   - Si $\mathrm{num}(x) = 2p + 2$, $x = \mathrm{filsD}(\mathrm{filsG}(z))$ et $y = \mathrm{filsG}(\mathrm{filsD}(z))$
     $\rightsquigarrow \mathrm{num}(x) = 2 \cdot (2q + 1) + 2 = 4q + 4$
     $\rightsquigarrow \mathrm{num}(y) = 2 \cdot (2q + 2) + 1 = 4q + 5$.

# Représentation informatique des arbres quasi-complets

## Corollaire

On peut représenter un arbre quasi-complet par un tableau de taille $n(A)$ contenant $\mathrm{val}(x)$ en case $\mathrm{num}(x)$.




$$A = [7, 9, 2, 1, 5, 8, 4, 3, 6]$$

# Représentation informatique des arbres quasi-complets

## Corollaire

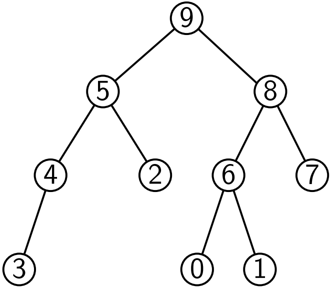
On peut représenter un arbre quasi-complet par un tableau de taille $n(A)$ contenant $\text{val}(x)$ en case $\text{num}(x)$.

On identifie un arbre quasi-complet et le tableau $A$ qui le représente, et un nœud $x$ et son numéro $\text{num}(x)$.

- $\text{rac}(A) = 0$
- $\text{filsG}(i) = 2i + 1$ et $\text{filsD}(i) = 2i + 2$
- $\text{père}(i) = \lfloor (i-1)/2 \rfloor$
- $\text{val}(i) = A[i]$
- $h(i) = \lfloor \log(i+1) \rfloor$

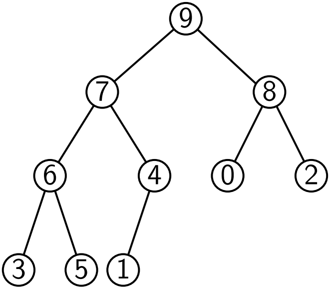
# Définition des tas

- Un arbre binaire $A$ a la **propriété de tas max** si pour tout $x \neq \mathrm{rac}(A)$, $\mathrm{val}(\text{père}(x)) \geq \mathrm{val}(x)$
- Un arbre binaire $A$ a la **propriété de tas min** si pour tout $x \neq \mathrm{rac}(A)$, $\mathrm{val}(\text{père}(x)) \leq \mathrm{val}(x)$



# Définition des tas

- Un arbre binaire $A$ a la **propriété de tas max** si pour tout $x \neq \text{rac}(A)$, $\text{val}(\text{père}(x)) \geq \text{val}(x)$
- Un arbre binaire $A$ a la **propriété de tas min** si pour tout $x \neq \text{rac}(A)$, $\text{val}(\text{père}(x)) \leq \text{val}(x)$



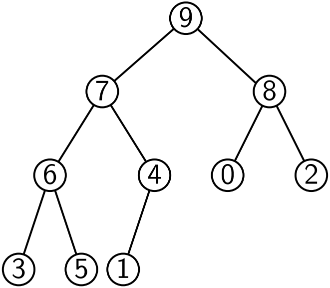
$[9, 7, 8, 6, 4, 0, 2, 3, 5, 1]$

### Définition

Un **tas max** (resp. **min**) est un arbre quasi-complet ayant la propriété de tas max (resp. min)
Un tableau $T$ est un tas max si pour tout $i \geq 1$, $T[\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor] \geq T[i]$

# Définition des tas

- Un arbre binaire $A$ a la **propriété de tas max** si pour tout $x \neq \mathrm{rac}(A)$, $\mathrm{val}(\text{père}(x)) \geq \mathrm{val}(x)$
- Un arbre binaire $A$ a la **propriété de tas min** si pour tout $x \neq \mathrm{rac}(A)$, $\mathrm{val}(\text{père}(x)) \leq \mathrm{val}(x)$




$[9, 7, 8, 6, 4, 0, 2, 3, 5, 1]$

### Définition

Un **tas max** (resp. **min**) est un arbre quasi-complet ayant la propriété de tas max (resp. min)
Un tableau $T$ est un tas max si pour tout $i \geq 1$, $T[\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor] \geq T[i]$

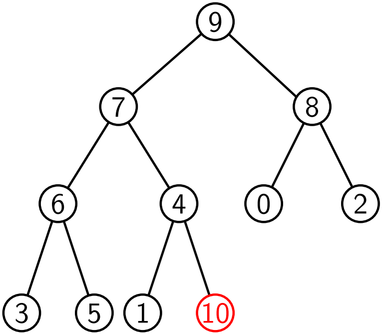
### Remarque

Un arbre binaire peut avoir la propriété de tas max sans être quasi-complet !

# Insertion dans un tas max

**Algorithme :** $\textsc{Insérer}(T, x)$

$i \leftarrow n(T)$
Agrandir $T$ d'une case
$T[i] \leftarrow x$
$\textsc{Remonter}(T, i)$

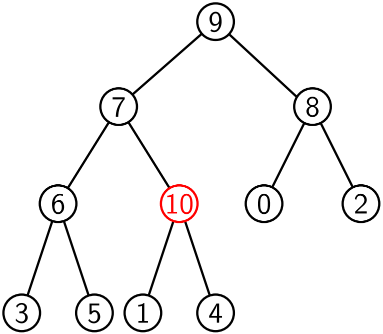



$[9, 7, 8, 6, 4, 0, 2, 3, 5, 1, 10]$

# Insertion dans un tas max

**Algorithme :** INSÉRER$(T, x)$

$i \leftarrow n(T)$
Agrandir $T$ d'une case
$T[i] \leftarrow x$
REMONTER$(T, i)$

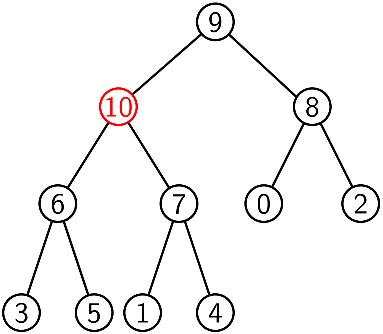



$[9, 7, 8, 6, 10, 0, 2, 3, 5, 1, 4]$

# Insertion dans un tas max

**Algorithme :** INSÉRER$(T, x)$

$i \leftarrow n(T)$
Agrandir $T$ d'une case
$T[i] \leftarrow x$
REMONTER$(T, i)$

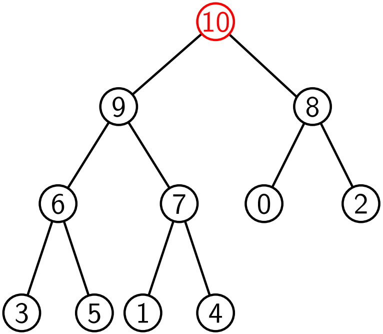


$[9, 10, 8, 6, 7, 0, 2, 3, 5, 1, 4]$

# Insertion dans un tas max

**Algorithme :** INSÉRER$(T, x)$

$i \leftarrow n(T)$
Agrandir $T$ d'une case
$T[i] \leftarrow x$
REMONTER$(T, i)$

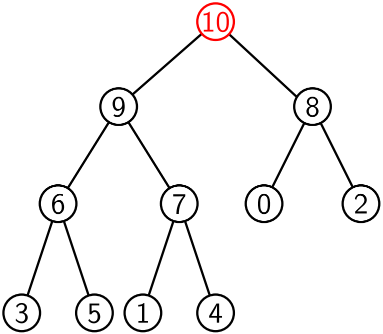



$[10, 9, 8, 6, 7, 0, 2, 3, 5, 1, 4]$

# Insertion dans un tas max

**Algorithme :** INSÉRER($T, x$)

$i \leftarrow n(T)$
Agrandir $T$ d'une case
$T[i] \leftarrow x$
REMONTER($T, i$)




$[10, 9, 8, 6, 7, 0, 2, 3, 5, 1, 4]$

**Algorithme :** REMONTER($T, i$)

**tant que** $i > 0$ *et* $T[\text{père}(i)] < T[i]$ **faire**
  Échanger $T[i]$ et $T[\text{père}(i)]$
  $i \leftarrow \text{père}(i)$

# Complexité et validité de l'insertion

**Algorithme :** $\textsc{Remonter}(T, i)$

**tant que** $i > 0$ *et* $T[\text{père}(i)] < T[i]$ **faire**
  Échanger $T[i]$ et $T[\text{père}(i)]$
  $i \leftarrow \text{père}(i)$

## Lemme

$\textsc{Remonter}(T, i)$ *a une complexité* $O(\log(n(T)))$.

Preuve $\mathcal{P}_i$ : le nombre de passage dans la boucle est $\leq h(i)$

- si $i = 0$, ok
- sinon : après le premier passage, $i$ est remplacé par $\text{père}(i)$. Le nombre de passages suivants est $\leq h(\text{père}(i))$ par hypothèse de récurrence, donc le nombre total est $\leq h(\text{père}(i)) + 1 = h(i)$.

$\rightsquigarrow$ Complexité $O(h(T)) = O(\log(n(T)))$

# Complexité et validité de l'insertion

**Algorithme :** Remonter$(T, i)$

**tant que** $i > 0$ *et* $T[\text{père}(i)] < T[i]$ **faire**

  Échanger $T[i]$ et $T[\text{père}(i)]$

  $i \leftarrow \text{père}(i)$

## Lemme

*Si* $i = n(T) - 1$ *et que* $T$ *privé de* $i$ *est un tas, alors* $T$ *est un tas après* Remonter$(T, i)$.

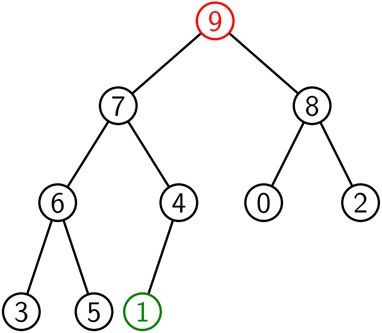
**Preuve (idée)** $T_i$ : sous-arbre enraciné en $i$

- utilisation de l'invariant : $T_i$ est un tas
- soit $p = \text{père}(i)$ et $f$ l'autre fils de $p$ s'il existe ; alors $T[i] > T[p] \geq T[f] \rightsquigarrow$ invariant conservé

# Suppression dans un tas max

**Algorithme :** SUPPRIMER$(T, i)$

$x \leftarrow T[i]$
$T[i] \leftarrow T[n(T) - 1]$
Réduire $T$ d'une case
ENTASSER$(T, i)$
**retourner** $x$

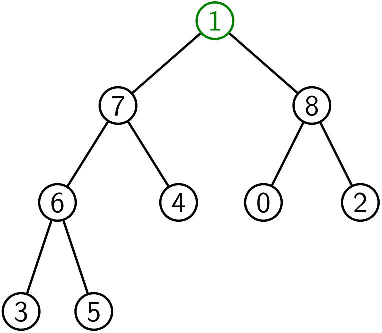



$[9, 7, 8, 6, 4, 0, 2, 3, 5, 1]$

# Suppression dans un tas max

**Algorithme :** $\textsc{Supprimer}(T, i)$

$x \leftarrow T[i]$
$T[i] \leftarrow T[n(T) - 1]$
Réduire $T$ d'une case
$\textsc{Entasser}(T, i)$
**retourner** $x$

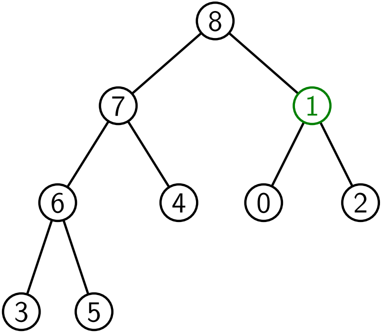



$[1, 7, 8, 6, 4, 0, 2, 3, 5]$

# Suppression dans un tas max

**Algorithme :** SUPPRIMER$(T, i)$

$x \leftarrow T[i]$
$T[i] \leftarrow T[n(T) - 1]$
Réduire $T$ d'une case
ENTASSER$(T, i)$
**retourner** $x$

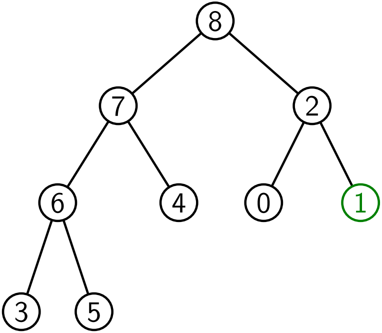



$[8, 7, 1, 6, 4, 0, 2, 3, 5]$

# Suppression dans un tas max

**Algorithme :** SUPPRIMER($T, i$)

$x \leftarrow T[i]$
$T[i] \leftarrow T[n(T) - 1]$
Réduire $T$ d'une case
ENTASSER($T, i$)
**retourner** $x$

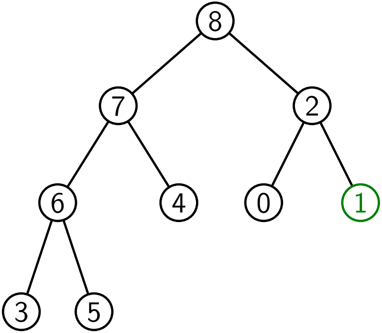



[8, 7, 2, 6, 4, 0, 1, 3, 5]

# Suppression dans un tas max

**Algorithme :** $\textsc{Supprimer}(T, i)$

$x \leftarrow T[i]$
$T[i] \leftarrow T[n(T) - 1]$
Réduire $T$ d'une case
$\textsc{Entasser}(T, i)$
**retourner** $x$



$[8, 7, 2, 6, 4, 0, 1, 3, 5]$

**Algorithme :** $\textsc{Entasser}(T, i)$

$(m, g, d) \leftarrow (i, \text{filsG}(i), \text{filsD}(i))$
**si** $g < n(T)$ *et* $T[g] > T[m]$ **alors** $m \leftarrow g$
**si** $d < n(T)$ *et* $T[d] > T[m]$ **alors** $m \leftarrow d$
**si** $m \neq i$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[m]$
    $\textsc{Entasser}(T, m)$

# Complexité et validité de la suppression

**Algorithme :** $\textsc{Entasser}(T, i)$

$(m, g, d) \leftarrow (i, \text{filsG}(i), \text{filsD}(i))$
**si** $g < n(T)$ *et* $T[g] > T[m]$ **alors** $m \leftarrow g$
**si** $d < n(T)$ *et* $T[d] > T[m]$ **alors** $m \leftarrow d$
**si** $m \neq i$ **alors**
  Échanger $T[i]$ et $T[m]$
  $\textsc{Entasser}(T, m)$

## Lemme

$\textsc{Entasser}(T, i)$ *a une complexité* $O(\log(n(T)))$

Preuve $\mathcal{P}_i$ : le nombre d'appels récursifs est $\leq h(T) - h(i)$
Récurrence *descendante* sur $h(i)$ :

- Si $h(i) = h(T)$, aucun appel récursif donc ok
- Sinon $\leq 1$ appel récursif sur un fils de hauteur $h(i) + 1 \rightsquigarrow$ nombre total d'appels récursif $\leq 1 + [h(T) - (h(i) + 1)]$ par hypothèse de récurrence

$\rightsquigarrow$ Complexité $O(h(T)) = O(\log(n(T)))$

# Complexité et validité de la suppression

**Algorithme :** $\textsc{Entasser}(T, i)$

$(m, g, d) \leftarrow (i, \text{filsG}(i), \text{filsD}(i))$
**si** $g < n(T)$ *et* $T[g] > T[m]$ **alors** $m \leftarrow g$
**si** $d < n(T)$ *et* $T[d] > T[m]$ **alors** $m \leftarrow d$
**si** $m \neq i$ **alors**
  Échanger $T[i]$ et $T[m]$
  $\textsc{Entasser}(T, m)$

## Lemme

*Si les sous-arbres gauche et droit de $i$ sont des tas, l'arbre enraciné en $i$ est un tas après* $\textsc{Entasser}(T, i)$

Preuve par récurrence sur $h(T) - h(i)$ (cas de base facile...)

- par hypothèse, $T_m$ est un tas après l'appel récursif
- l'autre sous-arbre de $i$ est un tas car non modifié
- $T[i] \geq T[g]$ et $T[i] \geq T[d]$ grâce à l'échange

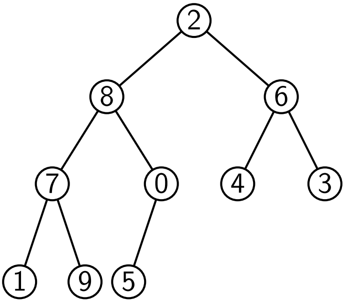
# Tri par tas

**Algorithme :** $\textsc{TriTas}(T)$

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  $\textsc{Entasser}(T, i)$

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow \textsc{Supprimer}(T, 0)$

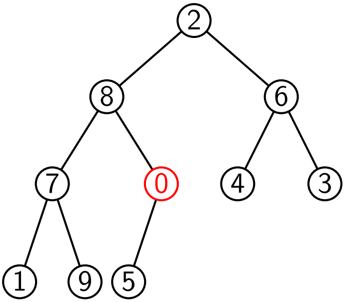
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TRITAS($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**
  ENTASSER($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**
  $S[i] \leftarrow$ SUPPRIMER($T, 0$)
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TRITAS($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$

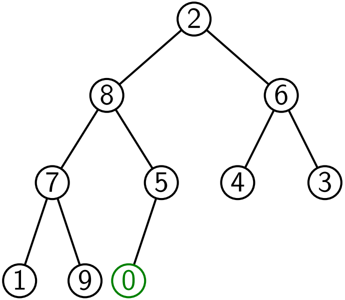
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**

  ENTASSER($T, i$)

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**

  $S[i] \leftarrow$ SUPPRIMER($T, 0$)

**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** $\textsc{TriTas}(T)$

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$

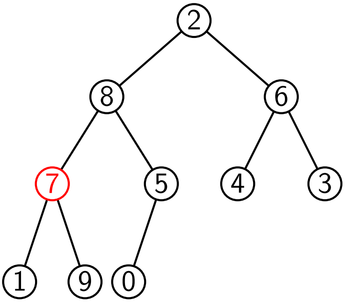
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**

  $\textsc{Entasser}(T, i)$

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**

  $S[i] \leftarrow \textsc{Supprimer}(T, 0)$

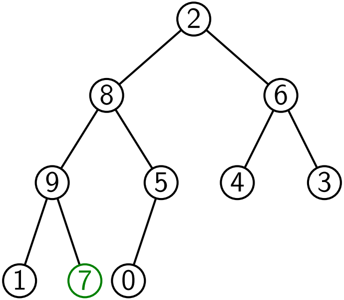
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** $\textsc{TriTas}(T)$

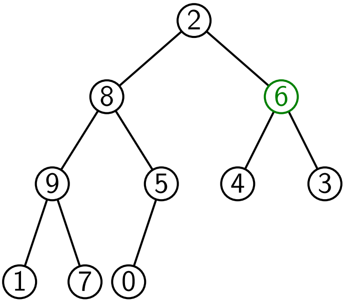
$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**
  $\textsc{Entasser}(T, i)$
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**
  $S[i] \leftarrow \textsc{Supprimer}(T, 0)$
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

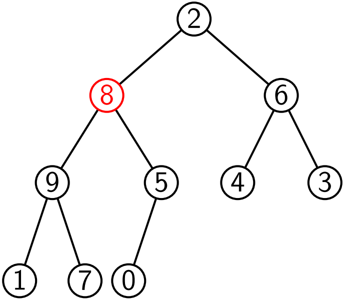
$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**
  Entasser($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**
  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

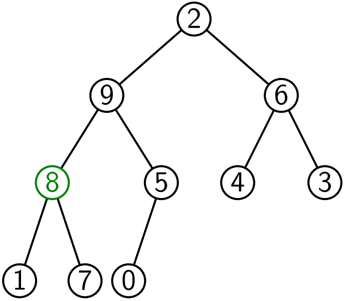
$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  Entasser($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  Entasser($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)
**retourner** $S$



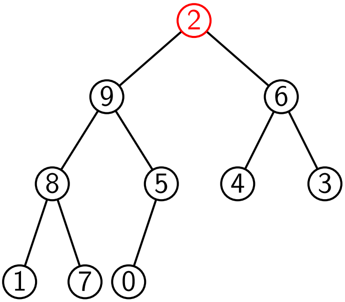
# Tri par tas

**Algorithme :** $\textsc{TriTas}(T)$

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  $\textsc{Entasser}(T, i)$

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow \textsc{Supprimer}(T, 0)$

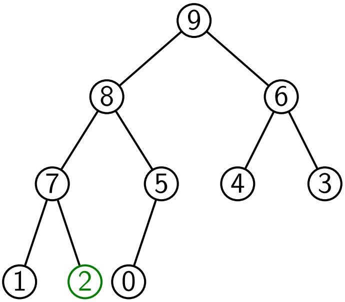
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TRITAS($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  ENTASSER($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow$ SUPPRIMER($T, 0$)
**retourner** $S$



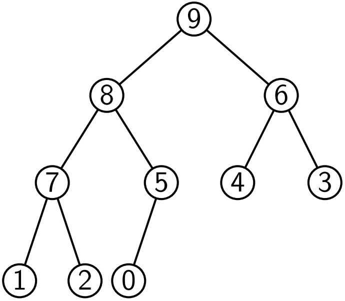
# Tri par tas

**Algorithme :** $\textsc{TriTas}(T)$

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**
    $\textsc{Entasser}(T, i)$

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**
    $S[i] \leftarrow \textsc{Supprimer}(T, 0)$

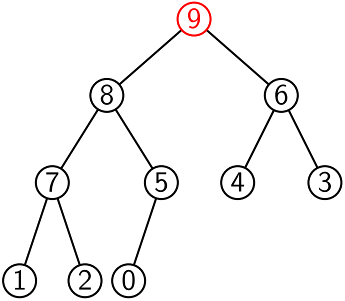
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

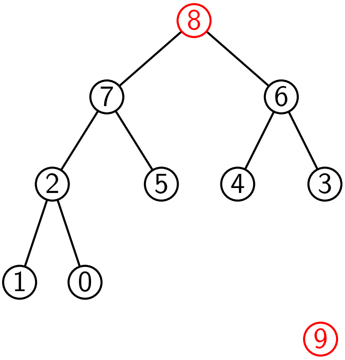
$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  Entasser($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

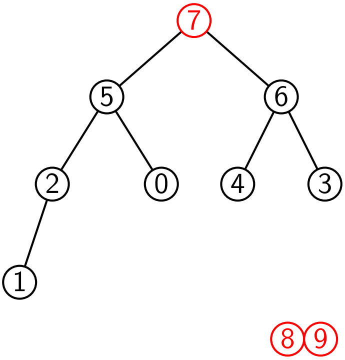
$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**
  Entasser($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**
  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TRITAS($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  ENTASSER($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow$ SUPPRIMER($T, 0$)
**retourner** $S$



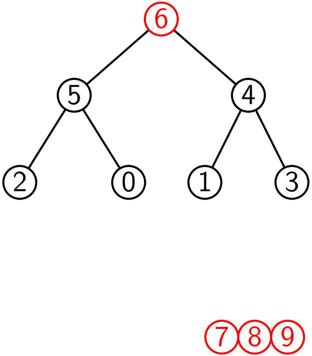
# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  Entasser($T, i$)

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)

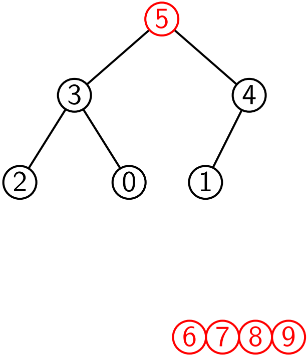
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**
  Entasser($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**
  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)
**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$

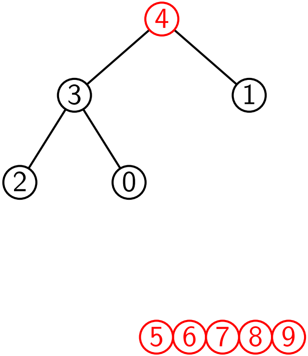
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**

  Entasser($T, i$)

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**

  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)

**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$

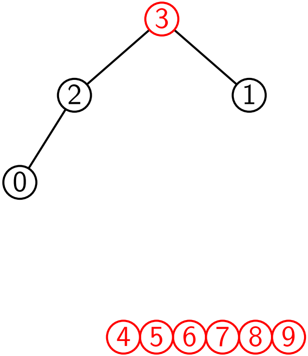
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**

  Entasser($T, i$)

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**

  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)

**retourner** $S$



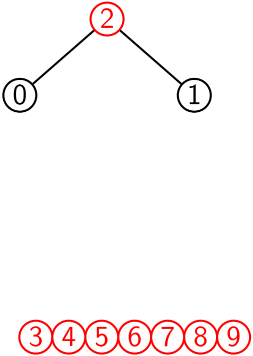
# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  Entasser($T, i$)

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)

**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** $\textsc{TriTas}(T)$

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$

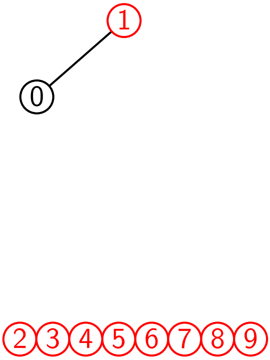
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**

  $\textsc{Entasser}(T, i)$

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**

  $S[i] \leftarrow \textsc{Supprimer}(T, 0)$

**retourner** $S$



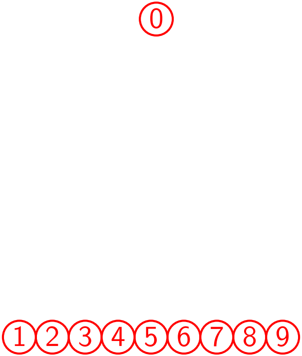
# Tri par tas

**Algorithme :** $\textsc{TriTas}(T)$

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**
  $\textsc{Entasser}(T, i)$

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**
  $S[i] \leftarrow \textsc{Supprimer}(T, 0)$

**retourner** $S$



# Tri par tas

**Algorithme :** $\textsc{TriTas}(T)$

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**
  $\textsc{Entasser}(T, i)$

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**
  $S[i] \leftarrow \textsc{Supprimer}(T, 0)$

**retourner** $S$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Tri par tas

**Algorithme :** $\textsc{TriTas}(T)$

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* $0$ **faire**
  $\textsc{Entasser}(T, i)$

**pour** $i = n(T) - 1$ *à* $0$ **faire**
  $S[i] \leftarrow \textsc{Supprimer}(T, 0)$

**retourner** $S$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Lemme

*Si $T$ est un tableau quelconque,* $\textsc{TriTas}$ *renvoie le tableau $T$ trié. Sa complexité est $O(n \log n)$.*

# Tri par tas

**Algorithme :** TRITAS($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  ENTASSER($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow$ SUPPRIMER($T, 0$)
**retourner** $S$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Lemme

*Si $T$ est un tableau quelconque,* TRITAS *renvoie le tableau $T$ trié. Sa complexité est $O(n \log n)$.*

## Preuve

- $O(n)$ appels à ENTASSER et SUPPRIMER $\rightsquigarrow O(n \log n)$
- Correction : si $i \geq \lfloor n(T)/2 \rfloor$, $i$ est une feuille

# Tri par tas

**Algorithme :** TriTas($T$)

$S \leftarrow$ tableau vide de taille $n(T)$
**pour** $i = \lfloor n(T)/2 \rfloor - 1$ *à* 0 **faire**
  Entasser($T, i$)
**pour** $i = n(T) - 1$ *à* 0 **faire**
  $S[i] \leftarrow$ Supprimer($T, 0$)
**retourner** $S$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Lemme

*Si $T$ est un tableau quelconque,* TriTas *renvoie le tableau $T$ trié. Sa complexité est $O(n \log n)$.*

## Remarque

Possibilité de tri *en place* car on remplit $S$ par la fin $\rightsquigarrow$ TD

# Borne inférieure pour le tri

**Théorème**

*Un algorithme de tri ne faisant que des comparaisons a une complexité* $\Omega(n \log n)$

# Borne inférieure pour le tri

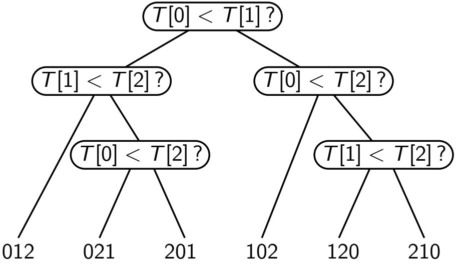
**Théorème**

*Un algorithme de tri ne faisant que des comparaisons a une complexité* $\Omega(n \log n)$

Preuve au tableau, basée sur l'**arbre de décision** :

- Nœuds : comparaisons entre deux entrées du tableau
- Feuilles : toutes les permutations de $n$ éléments

$\rightsquigarrow$ arbre à $n!$ feuilles, donc de hauteur $\geq \lfloor \log(n!) \rfloor = \Omega(n \log n)$



# Files de priorité

Stockage d'un ensemble d'éléments $x$ ayant chacun une priorité $p_x$

# Files de priorité

Stockage d'un ensemble d'éléments $x$ ayant chacun une priorité $p_x$

Tas max de couples $(x, p_x)$ qui vérifie la propriété de tas **pour les priorités**

# Files de priorité

Stockage d'un ensemble d'éléments $x$ ayant chacun une priorité $p_x$

Tas max de couples $(x, p_x)$ qui vérifie la propriété de tas **pour les priorités**

- AJOUTER : ajoute un nouvel élément (avec sa priorité)
  - Algorithme INSÉRER
- RETIRERMAX : retire l'élément de priorité maximale
  - Algorithme SUPPRIMER (en $i = 0$)
- AUGMENTERPRIORITÉ : augmente la priorité d'un élément
  - Algorithme : changer $p_x$ en $p'_x$ puis REMONTER
- DIMINUERPRIORITÉ : diminue la priorité d'un élément
  - Algorithme : changer $p_x$ en $p'_x$ puis ENTASSER

$\rightsquigarrow$ **opérations en complexité $O(\log n)$**

# Conclusion sur les tas

- Structure de données pour conserver un **ordre de priorité**
- Arbre binaire quasi-complet :
  - représentation en tableau
  - arbre équilibré $\rightsquigarrow$ hauteur $O(\log n)$
- INSÉRER et SUPPRIMER : $O(\log n)$
- Utilisations :
  - Tri par tas : $O(n \log n)$
  - Files de priorités

# Conclusion

# Les arbres binaires en informatique

- Représentation structurée de l'information
  - arbres binaires de recherche
  - tas
  - ...

# Les arbres binaires en informatique

stackoverflow

Search...

Home

PUBLIC

**Stack Overflow**

Tags

Users

Jobs

**Teams**
Q&A for work

Learn More

## What are the applications of binary trees?

380

### Applications of binary trees

- Binary Search Tree - Used in *many* search applications where data is constantly entering/leaving, such as the `map` and `set` objects in many languages' libraries.
- Binary Space Partition - Used in almost every 3D video game to determine what objects need to be rendered.
- Binary Tries - Used in almost every high-bandwidth router for storing router-tables.
- Hash Trees - used in p2p programs and specialized image-signatures in which a hash needs to be verified, but the whole file is not available.
- Heaps - Used in implementing efficient priority-queues, which in turn are used for scheduling processes in many operating systems, Quality-of-Service in routers, and A* *(path-finding algorithm used in AI applications, including robotics and video games)*. Also used in heap-sort.
- Huffman Coding Tree (Chip Uni) - used in compression algorithms, such as those used by the .jpeg and .mp3 file-formats.
- GGM Trees - Used in cryptographic applications to generate a tree of pseudo-random numbers.
- Syntax Tree - Constructed by compilers and (implicitly) calculators to parse expressions.
- Treap - Randomized data structure used in wireless networking and memory allocation.
- T-tree - Though most databases use some form of B-tree to store data on the drive, databases which keep all (most) their data in memory often use T-trees to do so.

*modifié depuis https://stackoverflow.com/a/2200588*

# Les arbres binaires en informatique

- Représentation structurée de l'information
  - arbres binaires de recherche
  - tas
  - ...
- Raisonnement informatique
  - Arbre de récursion (analyse des algorithmes récursifs)
  - Arbre de décision (borne inférieure sur le tri)
  - ...

# Les arbres binaires en informatique

- Représentation structurée de l'information
  - arbres binaires de recherche
  - tas
  - ...
- Raisonnement informatique
  - Arbre de récursion (analyse des algorithmes récursifs)
  - Arbre de décision (borne inférieure sur le tri)
  - ...
- Pourquoi binaires ?
  - Arbres ternaires, ..., $d$-aires
  - Arbres avec nombre quelconque (non constant) de fils

# Les arbres binaires en informatique

- Représentation structurée de l'information
  - arbres binaires de recherche
  - tas
  - ...
- Raisonnement informatique
  - Arbre de récursion (analyse des algorithmes récursifs)
  - Arbre de décision (borne inférieure sur le tri)
  - ...
- Pourquoi binaires ?
  - Arbres ternaires, ..., *d*-aires
  - Arbres avec nombre quelconque (non constant) de fils

**Les arbres sont un des objets centraux de l'informatique !**