Université de Montpellier HLIN502 janvier 2018

Numéro d'anonymat :

Durée : 2 heures

Examen de langages formels (première session)

Seule, une feuille A4 recto-verso est autorisée

Interdiction de communiquer tout document.

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLÉTÉ

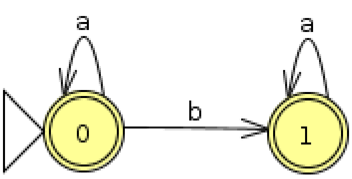
UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ PAR DES POINTS NÉGATIFS

TOUTES LES PROPRIETES PRESENTEES EN COURS POURRONT ETRE UTILISEES

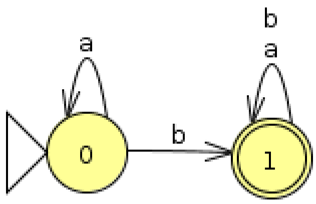
Exercice 1 :

a) Construire deux automates déterministes, définis sur l'alphabet {a,b}, et ayant chacun deux états.
Le premier automate devra reconnaître les mots ayant au plus une occurrence de la lettre b.
Le second automate devra reconnaître les mots ayant au moins une occurrence de la lettre b.

Au plus 1 b



Au moins 1 b



b) Soit la grammaire G d'axiome S, de terminaux « a » et « b » et de productions : S→ aSb | SS | ε
Montrer très simplement pourquoi, si $S \overset{*}{\rightarrow} m$ alors $S \overset{*}{\rightarrow} mS$

Si $S \overset{*}{\rightarrow} m$, alors $S \rightarrow SS \overset{*}{\rightarrow} mS$

c) Indiquer le plus simplement possible par une phrase en français quelle est la propriété caractéristique des éléments du langage défini par l'expression rationnelle : $(b^* a b^* a b^*)^*$

Les mots qui ont un nombre pair de « a ».

Exercice 2 :

On dira qu'un langage L est duplicable si, pour tout mot m , on a : $m \in L \Rightarrow m.m \in L$

a) Prouver que le langage $L = \{ m \in \{a,b\}^* \ , \ |m|_a = |m|_b \}$ est duplicable.

$m \in L \Rightarrow |m|_a = |m|_b \Rightarrow |m|_a + |m|_a = |m|_b + |m|_b \Rightarrow |m.m|_a = |m.m|_b \Rightarrow m.m \in L$

b) Prouver qu'un langage fini (ayant un nombre fini de mots), et ayant au moins un mot différent du mot vide, n'est pas duplicable.

Si le langage est fini et non vide, $\{\ |m|\ ,\ m \in L\}$ est aussi fini et non vide.

Soit n le plus grand entier de cet ensemble. Il existe alors m in L tel que |m|=n.

Et |m.m| = |m| + |m| =2 n > n (n >0 car L contient au moins un mot de longueur ≥ 1)

Donc $m.m \notin L$

Ce m est par conséquent un contre exemple prouvant la propriété demandée.

c) Soit la grammaire G d'axiome S, d'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ et définie par les productions :

$$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid \epsilon$$

Prouver que le langage L défini par cette grammaire est duplicable. Pour cela on démontrera par induction que, pour tout mot m, $S \overset{*}{\rightarrow} m \ \Rightarrow\ S \overset{*}{\rightarrow} mSm$; et on n'oubliera pas de conclure en justifiant cette conclusion.

Soit $\Pi(n) = (S \overset{\leq n}{\rightarrow} m \ \Rightarrow\ S \overset{*}{\rightarrow} mSm)$

$\Pi(1)$ est vrai car :

$S \overset{\leq 1}{\rightarrow} m \ \Rightarrow\ m = \epsilon$ et alors $S \overset{*}{\rightarrow} S = \epsilon S \epsilon = mSm$

Hypothèse : $\Pi(n)$ est vrai

Montrons que $\Pi(n+1)$ est vrai avec n ≥ 1

$$S \overset{\leq n+1}{\rightarrow} m \ \Rightarrow\ \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSb \overset{\leq n}{\rightarrow} m \\ \text{ou} \\ S \rightarrow bSa \overset{\leq n}{\rightarrow} m \\ \text{ou} \\ S \rightarrow \epsilon \overset{\leq n}{\rightarrow} m \end{array} \right\}$$

Le dernier cas est impossible. Le deuxième cas est symétrique du premier cas, qui sera le seul à avoir à être traité.

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow aSb \overset{\leq n}{\rightarrow} m & \Rightarrow & m = am'b \ \text{ et } \ S \overset{\leq n}{\rightarrow} m' \\ & \Rightarrow & S \overset{*}{\rightarrow} m'Sm' \ \text{ et } \ m = am'b \\ & \Rightarrow & S \overset{1}{\rightarrow} aSb \overset{*}{\rightarrow} am'Sm'b \overset{1}{\rightarrow} am'bSam'b = mSm \end{array}$$

Il en découle la propriété $S \overset{*}{\rightarrow} m \ \Rightarrow\ S \overset{*}{\rightarrow} mSm$

Et on en déduit que : $S \overset{*}{\rightarrow} m \ \Rightarrow\ S \overset{*}{\rightarrow} mSm \overset{1}{\rightarrow} m.m$ ce qui prouve que le langage est duplicable.

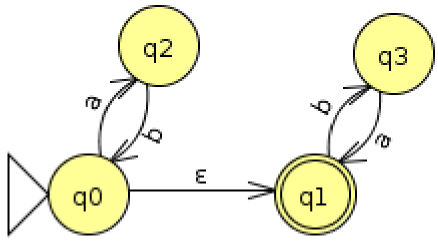
Exercice 3 :
Soit A= (Σ, E, I, F, δ) un automate fini indéterministe avec ε-transitions. On note L_A l'ensemble des mots reconnus par l'automate A. Soient deux états e_d et e_a de E tels qu'il existe une ε-transition de e_d à e_a

Soit $A1=(\Sigma, E, I, F, \delta_1)$ l'automate tel que $\delta_1=\delta \cup \{(e_d,\alpha,e) \mid e\in E\ ,\ \alpha\in\Sigma\ ,\ (e_a,\alpha,e)\in\delta\}$.
Une alternative à cette définition de δ_1 consiste à écrire :

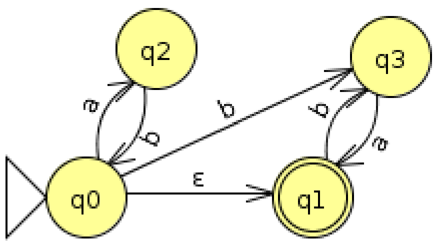
$\delta_1(e_d,\alpha)=\delta(e_d,\alpha) \cup \delta(e_a,\alpha)$ et $\delta_1(e,\alpha)=\delta(e,\alpha)$ si $e\neq e_d$

Comprendre en quoi l'automate A1 « ajoute » des raccourcis à l'automate A. Et remarquer que l'on déduit de la première définition de δ_1 que : $(e_d,\alpha,e)\in\delta_1$ et $(e_d,\alpha,e)\notin\delta \Rightarrow (e_a,\alpha,e)\in\delta$

a) Considérons uniquement pour cette question (et la question g) l'automate A suivant :



avec $e_d=q0$ et $e_a=q1$. Construire alors l'automate A1 :



b) Prouver que $L_A\subseteq L_{A1}$

$m\in L_A \Rightarrow \exists$ un chemin $(e_0,\alpha_1,e_1,\dots\alpha_n,e_n)$ dans A de trace m , avec $e_0\in I$ et $e_n\in F$

Ce chemin est aussi dans A1, puisqu'on n'enlève aucun transition pour passer de A à A1. Et comme on ne change pas non plus les états terminaux et initiaux, il en découle que $m\in L_{A1}$

c) Prouver que $L_{A1}\subseteq L_A$. Pour cela, on terminera la preuve :

$m\in L_{A1} \Rightarrow$

$\exists$ un chemin dans A1 $(e_0,e_1,\alpha_1\dots\underline{e_d,\alpha_{a1},e_{a1}}\dots,\underline{e_d,\alpha_{ak},e_{ak}},\dots\alpha_n,e_n)$ de trace m ,

avec $e_0\in I$ et $e_n\in F$

où les seules transitions qui ne sont pas dans A sont les transitions $\underline{(e_d,\alpha_{ai},e_{ai})}$

$\Rightarrow$ ...

Or chaque transition (e_d,α_{ai},e_{ai}) dans A1 et pas dans A peut se décomposer en deux transitions dans A : $(e_d,\epsilon,e_a,\alpha_{ai},e_{ai})$ par définition de δ_1 (en utilisant la remarque faite en début d'exercice).

On a donc :

$\exists$ un chemin dans A $(e_0,e_1,\alpha_1\dots\underline{e_d,\epsilon,e_a,\alpha_{a1},e_{a1}}\dots,\underline{e_d,\epsilon,e_a,\alpha_{ak},e_{ak}},\dots\alpha_n,e_n)$ de trace m ,

avec $e_0\in I$ et $e_n\in F$

Il en découle que $m\in L_A$

d) Soit $A2=(\Sigma, E, I, F, \delta_2)$ l'automate tel que $\delta_2=\delta_1-\{(e_d, \epsilon, e_a)\}$, c'est-à-dire l'automate qui ne se différencie de l'automate A1 que par la suppression de la ε-transition entre e_d et e_a .

Montrer que s'il existe un chemin dans A2 d'un état e0 vers un état e_n , de trace m, alors il existe un chemin dans A1 de l'état e0 vers l'état e_n , de trace m.

C'est la même justification que pour la question b. Pour passer de A2 à A1, on ne fait qu'ajouter une transition. Les chemins dans A2 seront donc encore des chemins dans A1.

e) Prouver que s'il existe un chemin dans A1 d'un état e0 vers un état e_n , de trace m et tel que la dernière transition du chemin ne soit pas (e_d, ϵ, e_a) , alors il existe un chemin dans A2 de l'état e0 vers l'état e_n , de trace m. On terminera la preuve commençant par :

$m \in L_{A1}$ $\Rightarrow$

∃ un chemin dans A1 $(e_0, e_1, \alpha_1 \ldots \underline{e_d, \epsilon, e_a, \alpha_{a1}, e_{a1}} \ldots, \underline{e_d, \epsilon, e_a, \alpha_{ak}, e_{ak}}, \ldots \alpha_n, e_n)$ de trace m ,

avec $e_0 \in I$ et $e_n \in F$

où toutes les transitions (e_d, ϵ, e_a) sont explicitées

et où les e_{ai} existent toujours car ....

$\Rightarrow$ ...

Les e_{ai} existent car le chemin ne peut se terminer par (e_d, ϵ, e_a)

Il en découle que :

∃ un chemin dans A2 $(e_{0,} e_1, \alpha_1 \ldots \underline{e_d, \alpha_{a1}, e_{a1}} \ldots, \underline{e_d, \alpha_{ak}, e_{ak}}, \ldots \alpha_n, e_n)$ de trace m ,

avec $e_0 \in I$ et $e_n \in F$

Le chemin est bien dans A2 car on a enlevé tous les (e_d, ϵ, e_a)

La trace reste bien m puisque l'on a enlevé que des ε.

Et alors $m \in L_{A2}$

f) En déduire que $L_{A1}=L_{A2}$ si $e_a \notin F$.

$L_{A2} \subseteq L_{A1}$ car la question d1 montre qu'un chemin dans A2 est un chemin dans A1 et car les états initiaux et terminaux sont les mêmes.

Par conséquent, un chemin d'un état initial vers un état terminal de A2 sera aussi un chemin d'un état initial vers un état terminal de A1.

$L_{A1} \subseteq L_{A2}$ La justification est analogue à celle précédente. Il faut juste remarquer qu'un chemin de A1 qui termine par un état terminal ne peut terminer par l'état e_a puisque e_a est supposé non terminal. Donc le résultat de la question précédente peut s'appliquer.

g) Pourquoi la première question de cette exercice permet de montrer que $L_{A1}=L_{A2}$ n'est pas toujours vrai.

Dans la première question, l'automate A reconnaît le langage $\{ab\}^*\{ba\}^*$

L'automate A1 auquel on enlève la ε-transition reconnaît le langage $\{ab\}^*\{ba\}\{ba\}^*$

Il ne s'agit pas du même langage. Le mot vide appartient au premier langage, pas au second.

h) On suppose maintenant que l'état $e_a \in F$. Soit $A3=(\Sigma, E, I, F \cup \{e_d\}, \delta_2)$. Prouver que $L_{A1}=L_{A3}$

$L_{A3} \subseteq L_{A1}$:

$$
\begin{aligned}
m \in L_{A3} \quad & \Rightarrow \exists \text{ un chemin dans A3 } (e_{0,} \dots e_n) \text{ de trace } m \text{ avec } e_0 \in I \text{ et } e_n \in F \cup \{e_d\} \\
& \Rightarrow \exists \text{ un chemin dans A2 } (e_{0,} \dots e_n) \text{ de trace } m \text{ avec } e_0 \in I \text{ et } e_n \in F \cup \{e_d\} \\
& \Rightarrow \exists \text{ un chemin dans A1 } (e_{0,} \dots e_n) \text{ de trace } m \text{ avec } e_0 \in I \text{ et } e_n \in F \cup \{e_d\} \\
& \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ un chemin dans A1 } (e_{0,} \dots e_n) \text{ de trace } m \text{ avec } e_0 \in I \text{ et } e_n \in F \\ \text{ou} \\ \exists \text{ un chemin dans A1 } (e_{0,} \dots e_n) \text{ de trace } m \text{ avec } e_0 \in I \text{ et } e_n = e_d \end{array} \right\} \\
& \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \in L_{A1} \\ \text{ou} \\ \exists \text{ un chemin dans A1 } (e_{0,} \dots e_n \epsilon\, e_a) \text{ de trace } m \text{ avec } e_0 \in I \text{ et } e_a \in F \end{array} \right\} \\
& \Rightarrow m \in L_{A1}
\end{aligned}
$$

$L_{A1} \subseteq L_{A3}$:

$m \in L_{A1} \Rightarrow \exists$ un chemin dans A1 $(e_{0,} \dots e_{n-1}, \alpha_n, e_n)$ de trace m avec $e_0 \in I$ et $e_n \in F$

Il faut alors distinguer deux cas :

Soit la dernière transition n'est pas (e_d, ϵ, e_a) . Dans ce cas, on en déduit que :

$\exists$ un chemin dans A2 $(e_{0,} \dots e_{n-1}, \alpha_n, e_n)$ de trace m avec $e_0 \in I$ et $e_n \in F$

et donc que

$\exists$ un chemin dans A3 $(e_{0,} \dots e_{n-1}, \alpha_n, e_n)$ de trace m avec $e_0 \in I$ et $e_n \in F \cup \{e_d\}$

ce qui implique que $m \in L_{A3}$

Soit la dernière transition est (e_d, ϵ, e_a) . Dans ce cas, on en déduit que :

$\exists$ un chemin dans A1 $(e_{0,} \dots e_d, \epsilon, e_a)$ de trace m avec $e_0 \in I$ et $e_n = e_a$

D'où

$\exists$ un chemin dans A2 $(e_{0,} \dots e_d)$ de trace m avec $e_0 \in I$

et

$\exists$ un chemin dans A3 $(e_{0,} \dots e_d)$ de trace m avec $e_0 \in I$ et $e_d \in F \cup \{e_d\}$

ce qui implique que $m \in L_{A3}$