GLIN502
Université Montpellier 2 janvier 2014

Numéro d'anonymat :

Examen de langages et automates (première session)

Tout document personnel autorisé

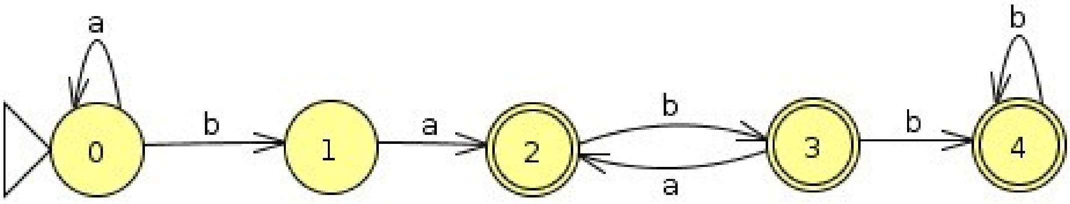
Durée : 2 heures

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLETE

UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ PAR DES POINTS NÉGATIFS

Exercice 1 :

a) Appliquer la méthode de variation des états d'entrée pour trouver une expression régulière dont le langage associé soit le même que le langage associé à l'automate suivant :



R0 = aR0 + bR1

R1 = a R2

R2 = b R3 + ε

R3 = a R2 + b R4 + ε

R4 = b R4 + ε

Résolution (non unique) :

R4 = b*

R1 et R2 sont remplacées par leur « valeur » dans les deux équations donnant R0 et R3

R0 = a R0 + ba R2 = a R0 + ba (b R3 + ε) = a R0 + ba b R3 + ba

R3 = a (bR3 + ε) + b b* + ε = abR3+ a + bb* + ε

==> R3 = (ab)*(a + bb* + ε)

==> R0 = a* (ba b R3 + ba) = a* (ba b (ab)*(a + bb* + ε) + ba)

Résultat recherché : R0

Remarque : L'expression régulière la plus simple est $a^*(ba)^+b^*$ en calculant :

R4 = b*

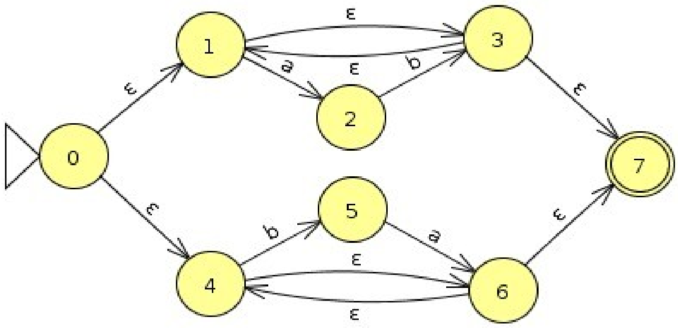
R3 = aR2 + b^+ + ε = aR2 + b*

R2 = bR3 + ε = b(aR2 + b*) + ε = baR2 + bb* + ε = baR2 + b^+ + ε = baR2 + b*= (ba)*b*

R1 = a(ba)*b*

R0 = aR0 + bR1 = a*bR1 = a*ba(ba)*b* = $a^*(ba)^+b^*$

b) Éliminer les ε-transitions dans l'automate suivant en appliquant précisément la méthode générale vue en cours, en explicitant obligatoirement les calculs intermédiaires, et en indiquant finalement les états non accessibles ou non co-accessibles à éliminer :



Calcul des ε-fermetures :

$\hat{\varepsilon}(0)=\{0,1,4,3,6,7\}$ $\hat{\varepsilon}(1)=\{1,3,7\}$ $\hat{\varepsilon}(2)=\{2\}$ $\hat{\varepsilon}(3)=\{3,1,7\}$ $\hat{\varepsilon}(4)=\{4,6,7\}$

$\hat{\varepsilon}(5)=\{5\}$ $\hat{\varepsilon}(6)=\{6,4,7\}$ $\hat{\varepsilon}(7)=\{7,\}$

δ({0},a) = δ({0,1,4,3,6,7},a) = {2}   Expliciter ces calculs des δ({e},α) est non obligatoire

δ({0},b) ={5}

δ({1},a) ={2}

δ({1},b) ={}

δ({2},a) ={}

δ({2},b) ={3}

δ({3},a) ={2}

δ({3},b) ={}

δ({4},a) ={}

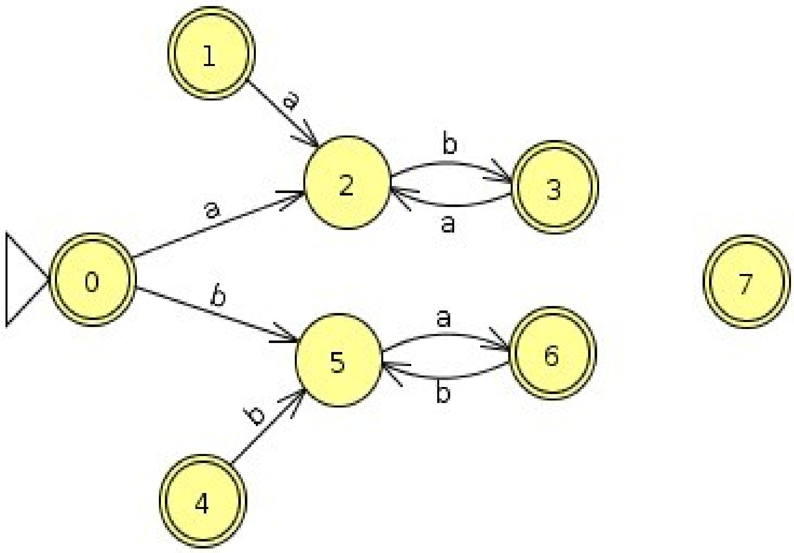
δ({4},b) ={5}

δ({5},a) ={6}

δ({5},b) ={}

δ({6},a) ={}

δ({6},b) ={5}



état terminaux : {0, 1, 3, 4, 6, 7} car leur ε-fermeture contient l'état 7

Les états non accessibles ou non co-accessibles à éliminer sont les états 1, 4 et 7.

Exercice 2 :

Rappel éventuellement utile : $A \subseteq B \Rightarrow \delta^*(A,m) \subseteq \delta^*(B,m)$

Soit A = (∑, E, I, F, δ) un automate indéterministe sans ε-transitions, dont tous les états sont accessibles.
Soit A_s = (∑, E, I_s , F, δ) avec $I_s=\{e \in E \mid \exists m \in \Sigma^* \text{ tel que } e \in \delta^*(I,m)\}$

a) Prouver que $I \subseteq I_s$

Pour tout i dans I, il faut montrer que i est dans Is, c'est-à-dire trouver un m tel que i ∈ δ*(I, m)

Il suffit de prendre m=ε car δ*(I, ε) = I et on a bien i ∈ δ*(I, ε) = I

b) Expliquer pourquoi tous les états de A_s sont des états initiaux.

Quelque soit e un état de As, il est supposé accessible. Donc il existe m tel que e ∈ δ*(I, m). Il en découle que e ∈ Is (par définition de Is) et donc que e est un état initial.

c) Prouver que $L(A) \subseteq L(A_s)$

m ∈ L(A) ==> δ*(I, m) ∩ F ≠ {}

==> δ*(Is, m) ∩ F ≠ {} car I ⊆ Is

==> m ∈ L(As)

d) Prouver que $m \in L(A) \Rightarrow (\forall s \text{ suffixe de } m, \; s \in L(A_s))$

Hypothèse : m ∈ L(A)

Soit s un suffixe quelconque de m. Posons m = m'.s

m ∈ L(A) ==> δ*(I, m) ∩ F ≠ {}

==> δ*(I, m'.s) ∩ F ≠ {}

==> δ*(δ*(I, m') , s) ∩ F ≠ {}

==> δ*(Is , s) ∩ F ≠ {} car δ*(i, m') ⊆ Is

==> s ∈ L(As)

e) Prouver que $s \in L(A_s) \Rightarrow (\exists m' \text{ tel que } m = m'.s \text{ et } m \in L(A))$

s ∈ L(As) ==> Il existe un état i tel que δ*(i, s) ∩ F ≠ {}

Or tous les états sont accessibles : il existe un mot m' tel que i ∈ δ*(I, m')

On a alors : δ*(I, m'.s) = δ*(δ*(I, m'), s) ⊇ δ*(i, s)

et

δ*(i, s) ∩ F ≠ {} ==> δ*(I, m'.s) ∩ F ≠ {}

==> m'.s ∈ L(A)

==> Il existe m = m'.s avec m ∈ L(A)

f) En notant **suff(L(A))** l'ensemble des suffixes des mots de L(A), déduire des questions précédentes que l'on a l'égalité : suff(L(A)) = L(A_s)

$s \in$ suff(L(A)) ==> il existe m $\in$ L(A) tel que m = m'.s

==> $s \in$ L(As) (c'est la question d)

et

$s \in$ L(As) ==> Il existe m' tel que m = m'.s et m $\in$ L(A) (c'est la question e)

==> s est un suffixe d'un mot m qui est dans L(A)

==> $s \in$ suff(L(A))

g) Soit A= (Σ, E, I, F, δ) un automate indéterministe **quelconque** sans ε-transitions. Décrire comment construire l'automate A_p qui reconnaît tous les préfixes des mots de L(A) et uniquement eux.

Enlever les états non co-accessibles et rendre terminal tous les états accessibles :

Remarque : on peut rendre terminal tous les états et pas juste ceux qui sont accessibles.

Plus formellement (non demandé) :
A_P = (Σ, E_p, I_p, F_p, δ) avec

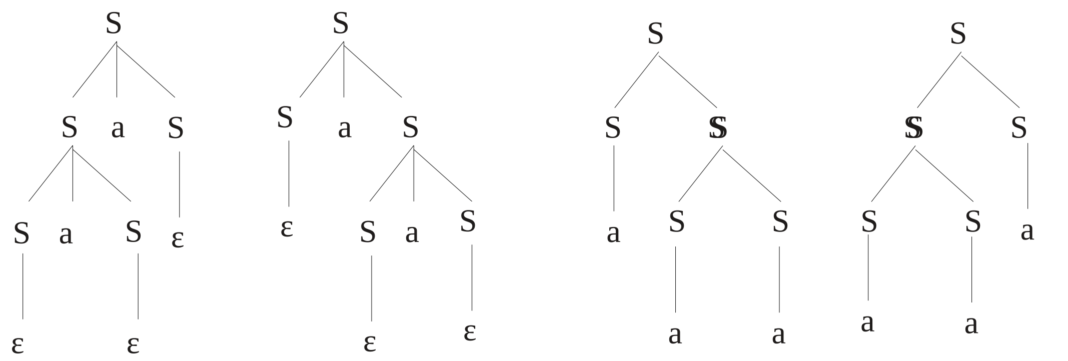
avec $E_p = \{e \in E \mid \exists\, m$ tel que $\delta^*(e, m) \cap F \neq \{\}\ \}$
et $I_p = E_p \cap I$
et $F_p = \{ e \in E_p \mid \exists\, m$ tel que $e \in \delta^*(I, m)\ \}$

Exercice 3 :

Soient les 2 grammaires suivantes d'axiome S, d'alphabet {a, b} et définies par les productions :

- G_1 : S → SaS | SbS | ε
- G_2 : S → ε | a | b | SS

a) Montrer que ces grammaires sont ambiguës.



Les deux premiers arbres montrent que G_1 est ambiguë.

Les deux arbres suivants montrent que G_2 est ambiguë.

b) Pour clarifier l'écriture, on notera $\underset{1}{\rightarrow}$ les dérivations pour la grammaire G_1 et $\underset{2}{\rightarrow}$ les dérivations pour la grammaire G_2.

Prouver que si $S \overset{*}{\underset{1}{\rightarrow}} m$ est une chaîne de dérivations pour la grammaire G_1 alors il existe une chaîne de dérivations $S \overset{*}{\underset{2}{\rightarrow}} m$ pour la grammaire G_2 .

La preuve devra contenir un raisonnement par induction sur la longueur de la chaîne de dérivations dans G_1.

Soit $\Pi(n) = \left(S \overset{\leq n}{\underset{1}{\rightarrow}} m \;\Rightarrow\; S \overset{*}{\underset{2}{\rightarrow}} m \right)$

Π(1) est vraie car : $S \overset{\leq 1}{\underset{1}{\rightarrow}} m \;\Rightarrow\; m = \epsilon$ et on a bien $S \overset{*}{\underset{2}{\rightarrow}} \epsilon$

Hypothèse : Π(n) vrai et n ≥ 1

Montrons que Π(n+1) est vrai.

$S \overset{n+1}{\underset{1}{\rightarrow}} m$ ==> $S \overset{1}{\underset{1}{\rightarrow}} SaS \overset{n}{\underset{1}{\rightarrow}} m$ ou $S \overset{1}{\underset{1}{\rightarrow}} SbS \overset{n}{\underset{1}{\rightarrow}} m$ ou $S \overset{1}{\underset{1}{\rightarrow}} \epsilon \overset{n}{\underset{1}{\rightarrow}} m$

Le dernier cas est impossible et on ne traite que le premier cas avec SaS car le cas SbS est le même en remplaçant « a » par « b ». .

==> m = $m_1 a m_2$ et $S \overset{\leq n}{\underset{1}{\rightarrow}} m_1$ et $S \overset{\leq n}{\underset{1}{\rightarrow}} m_2$ (lemme fondamental)

==> m = $m_1 a m_2$ et $S \overset{\leq n}{\underset{2}{\rightarrow}} m_1$ et $S \overset{\leq n}{\underset{2}{\rightarrow}} m_2$ (Hypothèse de récurrence)

==> il existe pour G_2 une chaîne de dérivations : $S \overset{1}{\underset{2}{\rightarrow}} SS \overset{1}{\underset{2}{\rightarrow}} SSS \overset{1}{\underset{2}{\rightarrow}} SaS \overset{*}{\underset{2}{\rightarrow}} m_1 a m_2$

==> $S \overset{*}{\underset{2}{\rightarrow}} m$

c) Prouver par un raisonnement par induction que $\forall k \leq n,\ a^k \in L_{G_1}$ où L_{G_1} est le langage associé à la grammaire G_1.

Soit $\Pi(n) = \left(\forall k \leq n,\ a^k \in L_{G_1}\right)$

$\Pi(0)$ est vrai car $a^0 = \varepsilon$ et on a : $S \rightarrow \varepsilon$ donc $\varepsilon \in L_{G1}$

Hypothèse : $\Pi(n)$ vrai et $n \geq 0$.

Montrons que $\Pi(n+1)$ est vrai.

On a :

$S \rightarrow S\, a\, S$

$\rightarrow a^n\, a\, S$ (car $a^n \in L_{G1}$ par H.R.)

$\rightarrow a^{n+1}$

Donc $a^{n+1} \in L_{G1}$