HLIN502
Université de Montpellier juin 2015

Numéro d'anonymat :

Examen de langages et automates (deuxième session)
Seuls, les documents papiers (et traducteurs) sont autorisés.
Interdiction de communiquer un document.
Durée : 2 heures

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLÉTÉ
UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ PAR DES POINTS NÉGATIFS

Exercice 1 :

a) Soit l'automate A = (∑, E, I, F, δ) où ∑ = {4, 5 }. E={0, 1, 2, 3 }, I={0,1}, F={1, 2 } et δ défini par :

$\forall i \in E, \forall j \in \Sigma, \delta(i,j)=(i+j) \mod 4$ où « n mod p » est le reste de la division de n par p

Donner la valeur des expressions suivantes :

$\delta(0,4)$: 0

$\delta(I,4)$: {0 , 1 }

$\delta^*(F,5.5)$: {0 , 3 } 5.5 est la concaténation des deux lettres 5

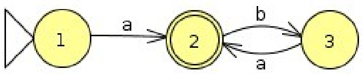
$\delta^*(\{0,3\},5.5) \cap F \neq \emptyset$: vrai

Exercice 2 :

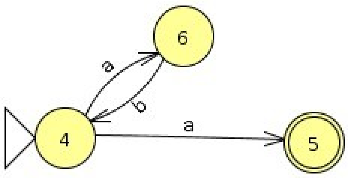
a) Montrer que les deux expressions rationnelles a(ba)* et (ab)*a sont égales, dans le sens où l'ensemble des mots du langage associé à chacune des deux expressions rationnelles est le même.

$$\begin{aligned}
m \in L(a(ba)^*) &\Leftrightarrow m = a.m' \text{ avec } m' \in L((ba)^*) \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, m = a.(ba)^n \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, m = a\underbrace{(ba)\ldots(ba)}_{n}\, fois \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, m = \underbrace{ab(ab)\ldots(ab)}_{n \text{ fois}}a \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, m = (ab)^n a \\
&\Leftrightarrow m \in L((ab)^n.a)
\end{aligned}$$

b) Soit l'automate A_1 = (Σ={a,b}, E_1, I_1, F_1, δ_1) représenté par le diagramme suivant :



Soit l'automate A_2 représenté par le diagramme suivant :



Montrer, qu'en appliquant la méthode de variation des états d'entrée, on peut associer à l'automate A_1 l'une des deux expressions rationnelles de la question a) précédente.
Montrer, qu'en appliquant la méthode de variation des états de sortie, on peut associer à l'automate A_2 l'une des deux expressions de la question a) précédente.

Méthode de variation des états d'entrée pour A1 :
R1 = aR2
R2 =bR3 + ε
R3=aR2

On recherche R1 :

R2 = bR3 + ε = baR2 + ε ==> R2 = (ba)*
==> R1 = a $(ba)^n$

Méthode de variation des états de sortie pour A2 :
R4 = R6 b + ε
R5 = R4 a
R6 = R4 a

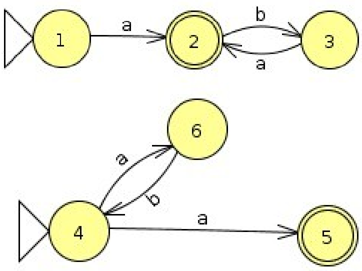
On recherche R5 :
R4 = R6b + ε = R4 ab + ε ==> R4 = (ab)*
==> R5 = (ab)*a

c) Que peut-on en déduire sur le lien entre ces deux automates.

Que les deux automates reconnaissent le même langage. Il sont équivalent.

d) Soit l'automate A_{12} = (Σ={a,b}, E_1 U E_2, I_1 U I_2 , F_1 U F_2, δ_1 U δ_2). Appliquer en l'expliquant la méthode vue en cours pour déterminiser l'automate A_{12}.

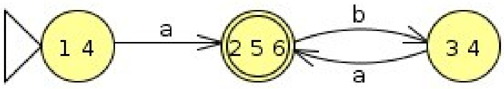
L'automate A_{12} est :



Il n'est pas déterministe puisqu'il a deux états initiaux.
Sa déterminisation donne :

état initial i = {1,4}

L'automate déterminisé est :



On remarquera que l'o obtient l'automate A1, ce qui n'est pas surprenant puisque A1 et A2 sont équivalent et que A1 est déterministe.

Exercice 3 : Soit la grammaire G_P , définies sur l'alphabet $\Sigma=\{a,b\}$, ayant S_P comme axiome et ayant comme productions :

$$S_P \rightarrow a\, S_P\, a \mid b\, S_P\, b \mid \varepsilon$$

a) Prouver que $\forall m \in \Sigma^*,\ S_P \overset{*}{\rightarrow} m \Rightarrow |m|_a$ est pair et $|m|_b$ est pair

Soit $\Pi(n) = S_P \overset{\leq n}{\rightarrow} m \Rightarrow |m|_a = |m|_b$

$\Pi(1)$ est vrai car $S_P \overset{\leq 1}{\rightarrow} m \Rightarrow m = \epsilon \Rightarrow |m|_a = |m|_b$

Hypothèse : $\Pi(n)$ vrai et $n \geq 1$. Montrons que $\Pi(n+1)$ est vrai :

$S_P \overset{n+1}{\rightarrow} m \Rightarrow S_P \rightarrow \alpha S_p \alpha \overset{n}{\rightarrow} m$ (avec $\alpha = a$ ou $\alpha = b$) ($S_P \rightarrow \epsilon \overset{n}{\rightarrow} m$ impossible)

$\Rightarrow m = \alpha m' \alpha$ et $S_P \rightarrow m'$ (Lemme fondamental)

$\Rightarrow m = \alpha m' \alpha$ et $|m'|_a$ est pair ainsi que $|m'|_b$ par (H.R.)

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{si } \alpha = a\ alors |m|_a = |m|_a + 2 \text{ est pair ainsi que } |m|_b = |m'|_b \\ \text{si } \alpha = b\ alors |m|_a = |m|_a \text{ est pair ainsi que } |m|_b = |m'|_b + 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |m|_a$ est pair et $|m|_b$ est pair

b) En déduire que $\forall m \in \Sigma^*,\ S_P \overset{*}{\rightarrow} m \Rightarrow |m|$ est un nombre pair

$|m| = |m|_a + |m|_b$ qui sont tous les deux des nombres pairs.
Donc $|m|$ est un nombre pair.

c) L'image miroir d'un mot $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n$ constitué des lettres α_i est le mot $\alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1$. On notera $\overline{m}$ l'image miroir de m. Formellement, l'image miroir est définie par :
$\forall m\in\Sigma^*,\ \forall\alpha\in\Sigma,\ \overline{\alpha.m}=\overline{m}.\overline{\alpha}$ et $\forall\alpha\in\Sigma\cup\{\epsilon\},\ \overline{\alpha}=\alpha$
On admettra que l'on a aussi $\forall m\in\Sigma^*,\ \forall\alpha\in\Sigma,\ \overline{m.\alpha}=\overline{\alpha}\,\overline{m}$
Définition : un mot m est un palindrome si $\exists m_1\in\Sigma^*,\ \exists\omega\in\Sigma\cup\{\epsilon\}$, tel que $m=m_1\omega\overline{m_1}$

Prouver que $\forall m\in\Sigma^*,\ S_P\overset{*}{\rightarrow}m\ \Rightarrow\ m$ est un palindrome

Soit $\Pi(n)=\ S_P\overset{\leq n}{\rightarrow}m\ \Rightarrow\ m$ est un palindrome

$\Pi(1)$ est vrai car $S_P\overset{\leq 1}{\rightarrow}m\ \Rightarrow\ m=\epsilon\ \Rightarrow\ m$ est un palindrome

Hypothèse : $\Pi(n)$ vrai et $n\geq 1$. Montrons que $\Pi(n+1)$ est vrai :

$S_P\overset{n+1}{\rightarrow}m\ \Rightarrow\ S_P\rightarrow\alpha S_p\alpha\overset{n}{\rightarrow}m$ (avec $\alpha=a$ ou $\alpha=b$) $\quad(S_P\rightarrow\epsilon\overset{n}{\rightarrow}m$ impossible)
$\Rightarrow\ m=\alpha m'\alpha$ et $S_P\rightarrow m'$ (Lemme fondamental)
$\Rightarrow\ m=\alpha m'\alpha$ et m' est un palindrome par (H.R.)
$\Rightarrow\ m=\alpha m'\alpha$ et $m'=m_1\omega\overline{m_1},\quad\omega\in\Sigma\cup\{\epsilon\}$
$\Rightarrow\ m=\alpha m_1\omega\overline{m_1}\alpha,\quad\omega\in\Sigma\cup\{\epsilon\}$
$\Rightarrow\ m=\alpha m_1\omega\overline{\alpha m_1},\quad\omega\in\Sigma\cup\{\epsilon\}$
$\Rightarrow\ m$ est un palindrome

d) Prouver que : $\forall m\in\Sigma^*,\ m$ est un palindrome et $|m|$ est pair $\Rightarrow\ S_P\overset{*}{\rightarrow}m$

Soit $\Pi(n)=\ m$ est un palindrome et $|m|$ est pair et $|m|\leq n\ \Rightarrow\ S_P\overset{*}{\rightarrow}m$
$\Pi(0)$ est vrai car, si m vérifie $|m|\leq 0$ alors $m=\epsilon$ et donc $S_P\rightarrow\epsilon=m$ est vrai.

Hypothèse : $\Pi(n)$ vrai et $n\geq 0$. Montrons que $\Pi(n+1)$ est vrai :

Soit m tel que $|m|=n+1$. Alors $\exists m_1\in\Sigma^*,\ \exists\omega\in\Sigma\cup\{\epsilon\}$, tel que $m=m_1\omega\overline{m_1}$
Si m_1 est le mot vide ϵ, alors il en est de même de $\overline{m_1}$ et donc $|m|$ est impair ce qui est impossible
Donc on peut décomposer $m_1=\alpha m'_1$ où α est une lettre de l'alphabet (a ou b). On a alors :

$S_P\overset{1}{\rightarrow}\alpha S_P\alpha\overset{*}{\rightarrow}\alpha m'_1\omega\overline{m'_1}\alpha$ en appliquant l'Hyp. Réc. Pour le palindrome $m'_1\omega\overline{m'_1}$ qui a au plus n lettres .

D'où :

$S_P\rightarrow\alpha m'_1\omega\overline{\alpha m'_1}=m_1\omega\overline{m_1}=m$