Université de Montpellier HLIN502 janvier 2016

Numéro d'anonymat : Durée : 2 heures

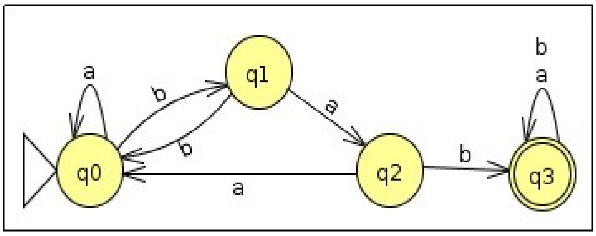
Examen de langages formels (première session)

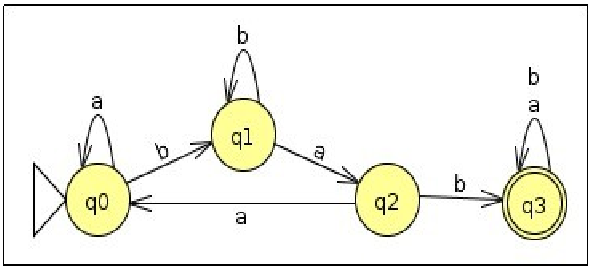
Seuls, les documents papiers (et traducteurs) sont autorisés.
Interdiction de communiquer un document.

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLÉTÉ
UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ PAR DES POINTS NÉGATIFS

Exercice 1 :

Soit les deux automates suivants :



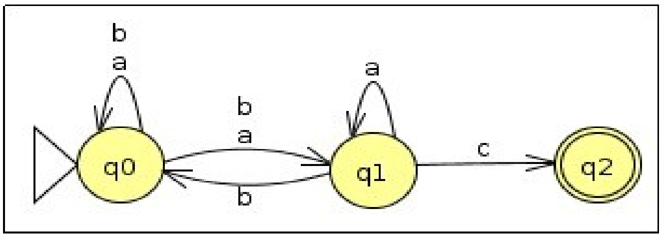


Trouver un mot de quatre lettres qui soit reconnu par l'un de ces 2 automates mais pas par l'autre automate.

bbab

Exercice 2 :

Soit l'automate A suivant :



a) Calculer une expression rationnelle associée à l'automate A, en appliquant la méthode de variation des états de sorties.

Notons R_0, R_1 et R_2 les expressions rationnelles associées aux états q0, q1 et q2 respectivement.

$R_0 = R_0\, a + R_0\, b + R_1\, b + \varepsilon$

$R_1 = R_0\, a + R_0\, b + R_1\, a \quad \Rightarrow \quad R_1 = R_0\, (a+b)a^*$

$R_2 = R_1\, c$

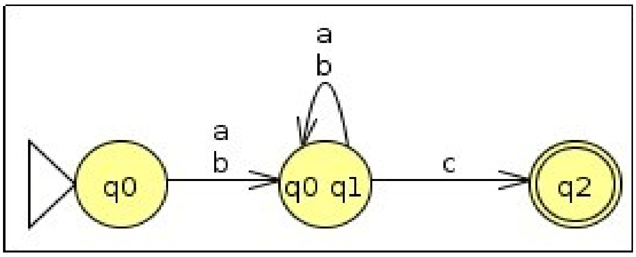
Il en découle que : $R_0 = R_0\, a + R_0\, b + R_0\, (a+b)a^*b + \varepsilon = R_0\, (a + b + (a+b)a^*b) + \varepsilon$

D'où $R_0 = (a + b + (a+b)a^*b)^*$

et le résultat recherché est $R_2 = R_1\, c = R_0\, (a+b)a^*c = (a + b + (a+b)a^*b)^*\, (a+b)a^*c$

Il n'y a bien sûr pas unicité de l'expression rationnelle obtenue.

b) Déterminiser l'automate A précédent en appliquant la méthode générale vue en cours, et en particulier sans renommer les états de l'automate déterministe construit.

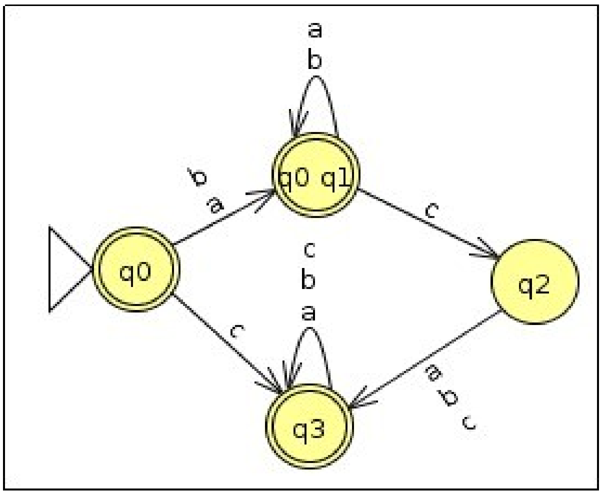


c) Donner une expression régulière (rationnelle) r telle que le langage associé à r soit celui reconnu par l'automate déterminisé en b. L'expression r devra se déduire de l'observation de l'automate précédent.

$(a+b)(a+b)^*c$ ou bien $(a+b)^+c$

d) Donner un automate A_c qui reconnaisse tous les mots non reconnus par A et uniquement eux. Justifier la démarche.

On ajoute un état poubelle pour compléter l'automate. Puis on permute les états terminaux et non terminaux. Cela donne :



Exercice 3 :

Prouver que $|m|=|m|_a+|m|_b$ si $m \in \{a,b\}^*$. Pour établir la preuve (par induction), on pourra utiliser les deux propriétés suivantes :

$|m_1.m_2|=|m_1|+|m_2|$ et $|m_1.m_2|_\alpha=|m_1|_\alpha+|m_2|_\alpha$ pour tous mots m_1, m_2 et toute lettre α.

Soit Π(n) = Si $|m|\leq n$ alors $|m|=|m|_a+|m|_b$

Π(0) est vrai car $|m|\leq 0$ ==> $m=\epsilon$ ==> $|m|=|\epsilon|=0$ et $|m|_a+|m|_b=|\epsilon|_a+|\epsilon|_b=0$ La même valeur

Hypothèse : Π(n) vrai

Montrons que Π(n+1) est vrai :

Soit $|m|=n+1$ et décomposons $m=\alpha.m'$ où α est une lettre. Alors on a :

$$\begin{aligned} |m| &= |\alpha m'| \\ &= |\alpha|+|m'| \\ &= |\alpha|+|m'|_a+|m'|_b \\ &= 1+|m'|_a+|m'|_b \end{aligned}$$

et on a d'autre part :

$$\begin{aligned} |m|_a+|m|_b &= |\alpha m'|_a+|\alpha m'|_b \\ &= |\alpha|_a+|m'|_a+|\alpha|_b+|m'|_b \\ &= |\alpha|_a+|\alpha|_b+|m'|_a+|m'|_b \\ &= \left\{\begin{matrix} 1+0+|m'|_a+|m'|_b & \text{si } \alpha=a \\ 0+1+|m'|_a+|m'|_b & \text{si } \alpha=b \end{matrix}\right\} \\ &= 1+|m'|_a+|m'|_b \end{aligned}$$

On obtient bien le même résultat.

Exercice 4 :

Soit la grammaire G d'axiome S, d'alphabet {a, b} et définies par les productions :

S → aSS | b | SS

Prouver que $S \overset{*}{\rightarrow} \varepsilon$ est impossible. Pour ce faire on fera un raisonnement par induction sur la propriété Π suivante :

$$\Pi(n)=\left(S \overset{\leq n}{\rightarrow} m \quad \Rightarrow \quad m \neq \varepsilon\right)$$

Π(1) vrai :

$$S \xrightarrow{\leq 1} m \quad \Rightarrow \quad m=b \quad \Rightarrow \quad m \neq \varepsilon$$

Hypothèse : Π(n) vrai et n ≥ 1

Montrons que Π(n+1) est vrai :

$$S \xrightarrow{n+1} m \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{l} S \to aSS \xrightarrow{n} m \\ \quad \text{ou} \\ S \to SS \xrightarrow{n} m \\ \quad \text{ou} \\ S \to b \xrightarrow{n} m \end{array} \right)$$

Le dernier cas est impossible car n ≥ 1

Les deux autres cas sont :

$$\begin{aligned} S \to aSS \xrightarrow{n} m \quad &\Rightarrow \quad \exists m_{1,} m_2 \text{ tel que } S \xrightarrow{\leq n} m_1 \text{ et } S \xrightarrow{\leq n} m_2 \text{ et } m = a m_1 m_2 \\ &\Rightarrow \quad m \neq \epsilon \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} S \to SS \xrightarrow{n} m \quad &\Rightarrow \quad \exists m_{1,} m_2 \text{ tel que } S \xrightarrow{\leq n} m_1 \text{ et } S \xrightarrow{\leq n} m_2 \text{ et } m = m_1 m_2 \\ &\Rightarrow \quad m1 \neq \epsilon \qquad \text{(par hyp. rec.)} \\ &\Rightarrow \quad m \neq \epsilon \end{aligned}$$

Exercice 5 :

À partir d'un automate déterministe standard A=(∑, E, i, F, δ), où ∑ = {a, b}, on construit un nouvel automate A'=(∑, E U {eo }, i, {eo}, δ'), où « eo » est un nouvel état qui n'existait pas dans E, et où δ' est définie par :

δ' = δ U { (f, b, eo) | f ∈ F }

a) L'automate A' est-il déterministe ? Justifier votre réponse.

Remarque annexe : F est un singleton par définition d'un automate standard. On notera F = {f}.

A' est un automate déterministe car on n'ajoute qu'une seule transition à l'automate déterministe A et c'est une transition qui part de l'état terminal de A , état qui n'avait aucune flèche sortante puisque A est standard.

b) L'automate A' est-il standard ? Justifier votre réponse.

L'automate A' est standard car :
On n'a pas ajouté de flèches entrantes vers l'état i.
On n'a pas ajouté de flèches sortantes de l'état eo
Il y a un seul état initial i et un seul état terminal eo .

c) Justifier le fait que le mot vide n'est pas dans le langage reconnu par A'.

Si un mot est reconnu par A', il est la trace d'un chemin qui va de l'état i à l'état eo terminal de A'. Alors il doit forcément passer par la transition (f,b,eo). La trace du chemin contiendra donc au moins une lettre.

d) Justifier que : $\delta'(e, \alpha) \neq e_0 \Rightarrow \delta(e, \alpha) = \delta'(e, \alpha)$ et $e \neq e_0$

Si on a $\delta'(e, \alpha) \neq e_0$, alors cette transition n'est pas celle qui a été ajoutée dans δ', c'est une transition dans δ. Par conséquent $\delta(e, , \alpha) = \delta'(e, \alpha)$
De plus, $e \neq e_0$ puisque les transitions de A ne portent pas sur l'état e_0

e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur « e » et « α » pour que l'on ait $\delta'(e, \alpha) = e_0$

$\delta'(e, \alpha) = e_0$ si et seulement si $\alpha = b$ et $e = f$ où $F = \{f\}$

f) Prouver par induction que : $\delta'^*(e,m) \neq e_0 \Rightarrow \left(e \neq e_0 \text{ et } \delta'^*(e,m) = \delta^*(e,m)\right)$

$\Pi(n) = |m| \leq n$ et $\delta'^*(e,m) \neq e_0 \Rightarrow \left(e \neq e_0 \text{ et } \delta'^*(e,m) = \delta^*(e,m)\right)$

Π (0) vrai :
$|m| \leq 0$ et $\delta'^*(e,m) \neq e_0 \Rightarrow m = \varepsilon$ et $\delta'^*(e,\epsilon) \neq e_0 \Rightarrow e \neq e_0$ et $\delta'^*(e,\epsilon) = e = \delta^*(e,\epsilon)$
Hypothèse : Π(n) vrai et n ≥ 0
Montrons Π(n+1 : Soit m tel que : $|m| = n+1$ et décomposons $m = m'.\alpha$ où α est une lettre.
On a :

$$\begin{aligned}
\delta'^*(e,m'\alpha) \neq e_0 &\Rightarrow \delta'(\delta'^*(e,m'),\alpha) \neq e_0 \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta(\delta'^*(e,m'),\alpha) = \delta'(\delta'^*(e,m'),\alpha) \\ \text{et} \\ \qquad \delta'^*(e,m') \neq e_0 \end{array}\right\} \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta(\delta'^*(e,m'),\alpha) = \delta'(\delta'^*(e,m'),\alpha) \\ \text{et} \\ e \neq e_0 \text{ et } \delta'^*(e,m') = \delta^*(e,m') \end{array}\right\} \\
&\Rightarrow e \neq e_0 \text{ et } \delta(\delta^*(e,m'),\alpha) = \delta'(\delta'^*(e,m'),\alpha) \\
&\Rightarrow e \neq e_0 \text{ et } \delta^*(e,m'\alpha) = \delta'^*(e,m'\alpha)
\end{aligned}$$

g) Prouver que $L_{A'} = L_A \,.\, \{b\}$ en utilisant les résultats précédemment établis. On pourra admettre si nécessaire que l'on a : $\delta^*(e,m) = e' \Rightarrow \delta'^*(e,m) = e'$

$$\begin{aligned}
m \in L_{A'} &\Leftrightarrow \delta'^*(i,m) = e_0 \\
&\Leftrightarrow m = m'\alpha \text{ et } \delta'^*(i,m'\alpha) = e_0 \quad \text{car } m \neq \epsilon \\
&\Leftrightarrow m = m'\alpha \text{ et } \delta'(\delta'^*(i,m'),\alpha) = e_0 \\
&\Leftrightarrow m = m'\alpha \text{ et } \alpha = b \text{ et } \delta'^*(i,m') = f \\
&\Leftrightarrow m = m'b \text{ et } \delta'^*(i,m') = f \neq e_0 \\
&\Leftrightarrow m = m'b \text{ et } \delta'^*(i,m') = \delta^*(i,m') = f \\
&\Leftrightarrow m = m'b \text{ et } m' \in L_A \\
&\Leftrightarrow m \in L_A.\{b\}
\end{aligned}$$