Université de Montpellier HLIN502 janvier 2017

Numéro d'anonymat :

Durée : 2 heures

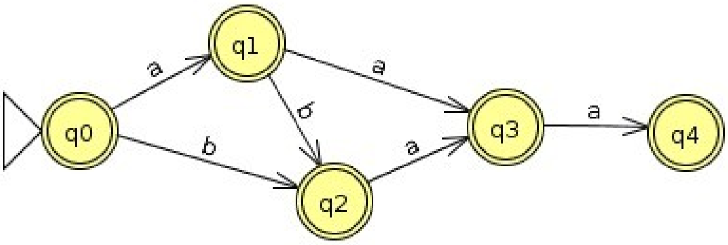
Examen de langages formels (première session)
Seule, une feuille A4 recto-verso est autorisée
Interdiction de communiquer tout document.

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLÉTÉ
UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ PAR DES POINTS NÉGATIFS

TOUTES LES PROPRIETES PRESENTEES EN COURS POURRONT ETRE UTILISEES

Exercice 1 :

Donner une définition en extension du langage associé à cet automate :



On ordonnera les éléments du langage en respectant l'ordre hiérarchique, sachant que a < b.

{ ε, a, b, aa, ab, ba, aaa, aba, baa, abaa }

Exercice 2 :

Soit la grammaire G d'axiome S, d'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ et définie par les productions :

$S \rightarrow aSbS \mid \varepsilon \mid cS$

Soit la fonction φ de Σ^* vers {a, b}* définie par :

$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$

$\varphi(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \in \{a, b\} \\ \varepsilon & \text{si } \alpha = c \end{cases}$

$\varphi(\alpha m) = \varphi(\alpha)\varphi(m)$ où $\alpha \in \Sigma$ et $m \in \{a, b, c\}^*$

1) Prouver que : $\varphi(m_1 m_2) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)$ où m_1 et m_2 sont des mots de $\{a, b, c\}^*$

Conseil : Faire un raisonnement par induction sur le nombre de lettres de m_1 .

Π(n) = $|m_1| \leq n \Rightarrow \varphi(m_1 m_2) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)$

Π(0) vrai car :

$|m_1| \leq 0 \Rightarrow m_1 = \epsilon \Rightarrow \varphi(m_1 m_2) = \varphi(m_2) = \varphi(\epsilon)\varphi(m_2) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)$

Remarque : Π(1) est vrai car inclus dans la définition de φ.

Hypothèse : Π(n) vrai pour n ≥ 0

Montrons Π(n+1) :

$$\begin{aligned} |m_1| = n+1 \quad & \Rightarrow m_1 = m'_1\alpha \\ & \Rightarrow \varphi(m_1 m_2) = \varphi(\alpha m'_1 m_2) \\ & \qquad = \varphi(\alpha)\varphi(m'_1 m_2) \\ & \qquad = \varphi(\alpha)\varphi(m'_1)\varphi(m_2) \\ & \qquad = \varphi(\alpha m'_1)\varphi(m_2) \\ & \qquad = \varphi(m_1)\varphi(m_2) \end{aligned}$$

2) Prouver par un raisonnement par induction que : $S \xrightarrow{*} m \Rightarrow S \xrightarrow{*} \varphi(m)$

Soit Π(n) = $\left(S \xrightarrow{\leq n} m \Rightarrow S \xrightarrow{*} \varphi(m) \right)$

Π(1) vrai :

$S_c \xrightarrow{\leq 1} m \Rightarrow m = \epsilon \Rightarrow S \rightarrow \epsilon = m$

Hypothèse : Π(n) vrai et n ≥ 1

Montrons que Π(n+1) est vrai :

$$S_c \xrightarrow{n+1} m \Rightarrow \left(\begin{array}{l} S_c \rightarrow a S_c b S_c \xrightarrow{n} m \\ \quad \text{ou} \\ S_c \rightarrow c S_c \xrightarrow{n} m \\ \quad \text{ou} \\ S_c \rightarrow \epsilon \xrightarrow{n} m \end{array} \right)$$

Le dernier cas est impossible car n ≥ 1

Les deux autres cas sont :

$$\begin{aligned} S \rightarrow a S b S \xrightarrow{n} m & \Rightarrow \exists m_1, m_2 \text{ tel que } S \xrightarrow{\leq n} m_1 \text{ et } S \xrightarrow{\leq n} m_2 \text{ et } m = a m_1 b m_2 \\ & \Rightarrow \exists m_1, m_2 \text{ tel que } S \xrightarrow{\leq n} \varphi(m_1) \text{ et } S \xrightarrow{\leq n} \varphi(m_2) \text{ et } m = a m_1 b m_2 \\ & \Rightarrow \exists m_1, m_2 \text{ tel que } S \xrightarrow{1} aSbS \xrightarrow{*} a \varphi(m_1) b \varphi(m_2) = \varphi(a m_1 b m_2) = \varphi(m) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} S \rightarrow c S \xrightarrow{n} m & \Rightarrow \exists m' \text{ tel que } S \xrightarrow{\leq n} m' \text{ et } m = c m' \\ & \Rightarrow \exists m' \text{ tel que } S \xrightarrow{\leq n} \varphi(m') \text{ et } m = c m' \\ & \Rightarrow \exists m' \text{ tel que } S \xrightarrow{\leq n} \varphi(m') = \varphi(c) \varphi(m') = \varphi(c m') = \varphi(m) \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Soit A= (Σ, E, I, F, δ) un automate fini indéterministe avec ε-transitions.
Soit A' = (Σ, E, I, F', δ) l'automate qui ne diffère du précédent que par ses états terminaux :
$F' = \{ e \in E, \hat{\varepsilon}(e) \cap F \neq \emptyset \}$

1) Pourquoi a-t-on $F \subseteq F'$?

Si $e \in F$, comme $e \in \hat{\varepsilon}(e)$, on en déduit que $e \in F'$

2) Prouver que si le mot m est reconnu par le langage A, alors il l'est aussi par le langage A'.

$m \in L_A \Rightarrow \delta^*(I, m) \cap F \neq \emptyset \Rightarrow \delta^*(I, m) \cap F' \neq \emptyset \Rightarrow m \in L_{A'}$

3) Prouver, en faisant un raisonnement sur les chemins, que si le mot m est reconnu par le langage A', alors il l'est aussi par le langage A. Pour cela, on pourra utiliser le fait que :

$e \in F'$ $\Leftrightarrow$ Il existe un chemin de l'état e à un état de F, de trace ϵ

$m \in L_{A'}$ $\Rightarrow$ $\exists (e_{0,} \alpha_1 e_1 \cdots e_{n-1} \alpha_n e_n)$ chemin de A', de trace $\alpha_1 \cdots \alpha_n = m$ avec $e_0 \in I$ et $e_n \in F'$

$\Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} \exists (e_{0,} \alpha_1 e_1 \cdots e_{n-1} \alpha_n e_n) \text{ chemin de A (même transitions que A'),} \\ \text{avec } \alpha_1 \cdots \alpha_n = m \text{ avec } e_0 \in I \text{ et } e_n \in F' \end{array} \right|$

$\Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} \exists (e_{0,} \alpha_1 e_1 \cdots e_{n-1} \alpha_n e_n) \text{ chemin de A, de trace } \alpha_1 \cdots \alpha_n = m \\ \text{et } \exists (e_n \epsilon \cdots e') \text{ chemin de A et de trace } \epsilon \text{, avec } e' \in F \end{array} \right|$

$\Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} \exists (e_{0,} \alpha_1 e_1 \cdots e_n \epsilon \cdots e') \text{ chemin de A, de trace } \alpha_1 \cdots \alpha_n \epsilon \cdots \epsilon = m \epsilon = m \\ \text{avec } e_0 \in I \text{ et } e' \in F \end{array} \right|$

$\Rightarrow$ $m \in L_A$

Exercice 4 :

Soit A= (Σ, E, i, F, δ) un automate fini déterministe complet et émondé, c'est-à-dire tel que tous ses états sont accessibles et co-accessibles. On note L_A l'ensemble des mots reconnus par l'automate A.

Le but de cet exercice est de prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un automate émondé reconnaisse une infinité de mots est qu'il contienne au moins une boucle.

1) Soit e un état de E et m un mot tel que δ*(e,m) = e, prouver qu'il existe un mot $m_1.m.m_2$ tel que $\delta^*(i, m_1.m.m_2) \in F$

L'état e est accessible ⇒ il existe un mot m_1 tel que $\delta^*(i, m_1) = e$.

L'état e est co-accessible ⇒ il existe un mot m_2 tel que $\delta^*(e, m_2) \in F$.

Et $\delta^*(i, m_1\ m\ m_2) = \delta^*(\delta^*(i, m_1\ m), m_2)) = \delta(*\delta^*(\delta^*(i, m_1), m), m_2))$

$= \delta(*\delta^*(e, m), m_2))$

$= \delta(e, m_2) \in F$

2) Sachant qu'il existe un état e de E et un mot m tel que δ*(e,m) = e, prouver en faisant un raisonnement par induction que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \delta^*(e, m^n) = e$

Soit $\Pi(n) = (\delta^*(e, m^n) = e)$

Π(0) est vrai car $\delta^*(e, m^0) = \delta^*(e, \varepsilon) = e$

Hypothèse : Π(n) vrai avec n ≥ 0
Montrons que Π(n+1) est vrai :
$\delta^*(e, m^{n+1}) = \delta(\delta^*(e, m^n), m) = \delta(e, m) = e$
CQFD.

3) En déduire : $\exists e \in E$ et $\exists m \in \Sigma^+$ tel que $\delta^*(e,m)=e \quad \Rightarrow \quad L_A$ contient une infinité de mots

$\delta^*(e,m)=e \quad \Rightarrow \forall n \geq 0,\ \delta^*(e,m^n)=e$

$\Rightarrow \forall n \geq 0,\ \exists m_{1,} m_2$ tel que $\delta^*(i, m_1 m^n m_2) \in F$

$\Rightarrow \{m_1 m^n m_2, n \geq 0\} \subseteq L_A$

$\Rightarrow L_A$ contient une infinité de mots (car $m \neq \varepsilon$)

4) Expliquer pourquoi, si L_A est un ensemble infini, alors il existe un mot, noté m_G, dans L_A qui a plus de lettres qu'il n'y a d'états dans E. Remarque : si besoin, on notera |E| le nombre d'états de l'automate A.

Par l'absurde :
si tous les mots de L_A ont moins de |E| lettres, alors il y a au plus $2^{|E|}$ mots dans L_A et L_A est alors un ensemble fini.

5) Soit $P = \{ m_G[1..i],\ i \in \{1,2,\ldots,|m_G|\} \}$ l'ensemble des préfixes du mot m_G, sauf ε .
Pourquoi l'ensemble $\{ \delta^*(i,p),\ p \in P \}$ a au plus |E| éléments et contient moins d'éléments que P.

On a : $\{ \delta^*(i,p),\ p \in P \} \subseteq E$
Par conséquent, $\{ \delta^*(i,p),\ p \in P \}$ contient au plus |E| éléments,

Par ailleurs, P contient $|m_G|$ éléments.
La question précédente permet d'en déduire que P contient plus de |E| éléments.
En conclusion, $\{ \delta^*(i,p),\ p \in P \}$ contient moins d'éléments que P.

6) En déduire l'existence de deux préfixes $p=m_G[1..k]$ et $p'=m_G[1..k']$ avec k < k' ,tel que :
δ*(i,p) =δ*(i,p').

La propriété établie à la question précédente, signifiant que $\{ \delta^*(i,p),\ p \in P \}$ a moins d'éléments que P, implique qu'il existe deux préfixes distincts $p=m_G[1..k]$ et $p'=m_G[1..k']$ tel que $\delta^*(i,p)=\delta^*(i,p')$.
Les préfixes étant distincts, cela signifie que k ≠ k'.
Et sans perte de généralité, on peut supposer que k< k', quitte à permuter k avec k'.

7) Que peut-on prendre comme état e et comme mot m non vide pour que l'on ait : δ*(e,m) = e
Justifier votre réponse.

Prenons : $e=\delta^*(i, m_G[1..k])$ et $m=m_G[k+1..k']$ avec les notations de la question précédente.
Le mot m est non vide puisque k ≠ k'.
On a :

$$\begin{aligned}
\delta^*(e,m) &= \delta^*(\delta^*(i,m_G[1..k]), m_G[k+1..k']) \\
&= \delta^*(i, m_G[1..k].m_G[k+1..k']) \\
&= \delta^*(i, m_G[1..k']) = \delta^*(i, m_G[1..k']) = e
\end{aligned}$$

8) En déduire que : L_A contient une infinité de mots $\Leftrightarrow$ $\exists e \in E$ et $\exists m \in \Sigma^+$ tel que $\delta^*(e,m)=e$

La condition suffisante a été établie à a question 3.
Les questions 4 à 7 ont permis de montrer que si L_A est un ensemble infini, alors il existe m_G puis e et m ≠ ε tel que δ*(e,m) = e. Ceci établit la condition nécessaire.