Numéro d'anonymat :

Examen de langages et automates (deuxième session)

Tout document personnel autorisé

Durée : 2 heures

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLETE

UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ PAR DES POINTS NÉGATIFS

Exercice 1 :

Soit la grammaire G d'axiome S, d'alphabet {a, b} et définie par les productions : S → a | SaS

Question1 : Donner tous les mots de longueur inférieure ou égale à 5 qui soient dans le langage associé à G.

a, aaa, aaaaa

Question 2 : Montrer que cette grammaire G est ambiguë.

Deux arbres de dérivations différents pour un même mot a^5 :

```
          S                                   S
        / | \                               / | \
       S  a  S                             S  a  S
       |    / | \                        / | \   |
       a   S  a  S                      S  a  S  a
           |     |                      |     |
           a     a                      a     a
```

Question 3 : Prouver que l'on a $S \overset{*}{\rightarrow} m \Rightarrow |m|_a$ est un entier impair

Soit $\Pi(n) = \left(S \overset{\leq n}{\rightarrow} m \Rightarrow |m|_a \text{ est un entier impair}\right)$

Π(0) est vrai par vacuité car il n'esiste pas de mot m tel que $S \overset{0}{\rightarrow} m$

Hypothèse : Π(n) est vrai.

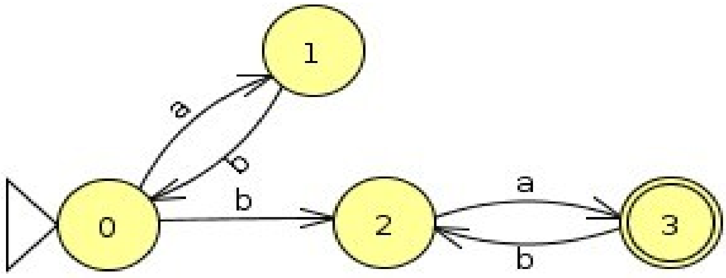
Montrons que : Π(n+1) est vrai : $S \overset{\leq n+1}{\rightarrow} m \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S \overset{1}{\rightarrow} a = m \Rightarrow |m|_a = 1 \text{ entier impair} \\ \text{ou} \\ S \rightarrow SaS \overset{\leq n}{\rightarrow} m \end{array}\right\}$

Dans le deuxième cas, on a :

$$\begin{aligned} SaS \overset{\leq n}{\rightarrow} m \quad & \Rightarrow m = m_1 a m_2 \text{ et } S \overset{\leq n}{\rightarrow} m_1 \text{ et } S \overset{\leq n}{\rightarrow} m_2 \\ & \Rightarrow m = m_1 a m_2 \text{ et } |m_1|_a \text{ impair et } |m_2|_a \text{ impair} \\ & \Rightarrow |m|_a = |m_1|_a + 1 + |m_2|_a \text{ est un entier impair} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Soit l'automate A = (∑, E, i, F, δ) représenté graphiquement par :



Question 1 : Cet automate est-il complet ? Justifier votre réponse.

Non car, par exemple, il ne part pas de flèche étiquetée b au départ de l'état 0.

Question 2 : Montrer pour chaque état e de l'automate A que l'on a : $\exists m \in \Sigma^*$, tel que $\delta^*(e,\ m)=e$

Pour l'état 0 : m = ab vérifie la propriété.

Pour l'état 1 : m = ba vérifie la propriété.

Pour l'état 2 : m = ab vérifie la propriété.

Pour l'état 3 : m = ba vérifie la propriété.

Question 3 : Prouver, en faisant un raisonnement par récurrence, que : $\forall n \geq 0$, $\delta^*(0,(ab)^n)=0$

Rappel : par convention, on a : $m^0=\epsilon$

Soit $\Pi(n)=\left(\delta^*(0,(ab)^n)=0\right)$

Π(0) est vrai car $\delta^*(0,(ab)^0)=\delta^*(0,\epsilon)=0$

Hypothèse : Π(n) est vrai avec n >=0

Montrons que Π(n+1) est vrai :

$$\begin{aligned}\delta^*(0,(ab)^{n+1}) &= \delta^*(0,(ab)(ab)^n)\\ &= \delta^*(\delta^*(0,(ab)),(ab)^n)\\ &= \delta^*(0,(ab)^n)\\ &= 0 \qquad \text{par H.R.}\end{aligned}$$

Question 4 : En admettant que l'on ait démontré de même que : $\forall n \geq 0$, $\delta^*(3,(ba)^n)=3$, déduire que l'on a : $\forall n \geq 0, n' > 0$, $\delta^*(0,(ab)^n(ba)^{n'})=3$

Pour tout n positif ou nul et pour tout n' strictement positif :

$$\begin{aligned}\delta^*(0,(ab)^n(ba)^{n'}) &= \delta^*(\delta^*(0,(ab)^n),(ba)^{n'})\\ &= \delta^*(0,(ba)^{n'})\\ &= \delta^*(\delta^*(0,ba),(ba)^{n'-1})\\ &= \delta^*(3,(ba)^{n'-1})\\ &= 3\end{aligned}$$

Question 5 : Justifier, en étudiant les chemins que, si un mot m appartient au langage L(A) associé à l'automate A, alors :

$$\left\{\begin{array}{l}\exists m' \text{ tel que } m=abm' \text{ et } m'\in L(A)\\ \quad\text{ou}\\ \exists m'' \text{ tel que } m=bam''\end{array}\right\}$$

Si m est un mot reconnu par le langage, alors il existe un chemin de l'état initial 0 jusqu'à l'état terminal 3 dont la trace est m :

$e_0=0\,\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_{2\ldots}\,\alpha_n e_n=3$ avec $m=\alpha_1\alpha_{2\ldots.}\alpha_n$

En observant l'automate A, on voit que :

Soit $\alpha_1=a$ et $\alpha_2=b$ et $e_2=0$

c-à-d : m=abm' et m' est la trace du chemin $e_2=0\,\alpha_2\ldots\alpha_n e_{n+1}=3$ donc m' ∈L(A)

Soit $\alpha_1=b$ et $\alpha_2=a$ et $e_2=3$

c-à-d : m=bam''

Question 6 : Prouver en faisant un raisonnement par induction sur la longueur du mot m que l'on a :

$$m\in L(A) \;\Rightarrow\; \left(\exists p\geq 0 \text{ tel que } m=(ab)^p bam'\right)$$

$$\Pi(n)=\left(m\in L(A) \text{ et } |m|\leq n \;\Rightarrow\; \exists p\geq 0 \text{ tel que } m=(ab)^p bam'\right)$$

Π(0) est vrai car :

Hypothèse : $m\in L(A)$ et $|m|\leq 0$

Alors m = ε , mais $\epsilon\notin L(A)$ donc Π(0) est vrai par vacuité.

Supposons que Π(n) soit vrai avec n >= 0.

Montrons que Π(n+1) soit vrai :

Supposons que $m\in L(A)$ et $|m|\leq n+1$

Alors on a, en utilisant la question 5 :

$$m\in L(A) \text{ et } |m|\leq n+1 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l}\exists m' \text{ tel que } m=abm' \text{ et } m'\in L(A) \text{ et } |m'|\leq n\\ \quad\text{ou}\\ \exists m'' \text{ tel que } m=bam''\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\exists p'\geq 0,\; m=ab(ab)^p bam'' & \text{par H.R.}\\ \quad\text{ou} & \\ \exists m'' \text{ tel que } m=(ab)^0 bam'' & \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \exists p'\geq 0 \text{ tel que } m=(ab)^{p'}(ba)m''$$

Question 7 : Prouver que $m \in L(A) \Rightarrow \begin{pmatrix} \exists p \geq 0 \text{ tel que } m=(ab)^p bam' \\ \text{et} \\ \delta^*(3, m')=3 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
m \in L(A) \quad & \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta(0,m)=3 \\ \text{et} \\ \exists p \geq 0 \text{ tel que } m=(ab)^p bam' \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \delta^*(0,(ab)^p bam')=3 \\
& \Rightarrow \delta^*(\delta^*(0,(ab)^p), bam')=3 \\
& \Rightarrow \delta^*(0, bam')=3 \\
& \Rightarrow \delta^*(\delta^*(0, ba), m')=3 \\
& \Rightarrow \delta^*(3,m')=3
\end{aligned}
$$

Question 8 : Quelle propriété démontre-t-on avec le raisonnement suivant :

Si $m=\epsilon$ alors $\delta^*(3,\epsilon)=3$ et $m=\epsilon=(ba)^0$

Si $m=\alpha \in \Sigma$ alors $\delta^*(3,\alpha)=3$ est impossible

Si $m=\alpha\beta m'$ alors $\begin{pmatrix} \delta^*(3,\alpha\beta m')=3 & \Rightarrow & \delta^*(\delta^*(3,\alpha\beta),m')=3 \\ & \Rightarrow & \alpha=b \text{ et } \beta=a \text{ et } \delta^*(\delta^*(3,ab),m')=3 \\ & \Rightarrow & \alpha=b \text{ et } \beta=a \text{ et } \delta^*(3,m')=3 \\ & \Rightarrow & \exists p \geq 0,\ m=(ba)(ba)^p \end{pmatrix}$

$\delta^*(3,m)=3 \Rightarrow (\exists p \geq 0 \text{ tel que } m=(ba)^p)$

Question 9 : En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un mot m soit un élément de L(A).

La question 4 permet d'établir que $\{(ab)^n (ba)^{n'}, n \geq 0 \text{ et } n'>0\} \subseteq L(A)$

La question 7 et 8 permettent d'établir que, si m ∈ L(A) alors :

$m=(ab)^p bam'$ et $m'=(ba)^n$ pour un p >= 0 et un n >= 0

donc $m=(ab)^p ba (ba)^n = (ab)^p (ba)^{n+1}$

donc m ∈ $\{(ab)^n (ba)^{n'}, n \geq 0 \text{ et } n'>0\}$

Par conséquent, on a établit que : $L(A)=\{(ab)^n (ba)^{n'}, n \geq 0 \text{ et } n'>0\}$