GLIN502
Université Montpellier 2 janvier 2015

Numéro d'anonymat :

Examen de langages et automates (première session)

Seuls, les documents papiers (et traducteurs) sont autorisés.

Interdiction de communiquer un document.

Durée : 2 heures

REMPLIR LES CADRES ET RENDRE CE DOCUMENT AINSI COMPLÉTÉ

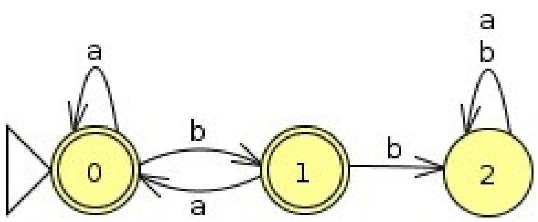
UN EXCÈS DE REPONSES FAUSSES SERA SANCTIONNÉ

PAR DES POINTS NÉGATIFS

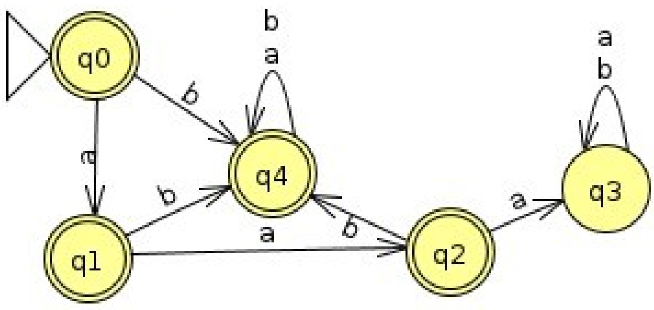
Exercice 1 :

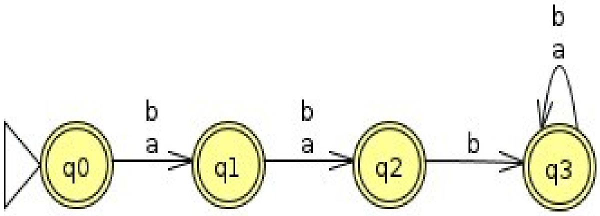
a) Expliquer comment construire un automate fini déterministe sur l'alphabet {a, b} qui reconnaît tous les mots n'ayant pas de facteur bb. Puis, dessiner l'automate.

On construit l'automate déterministe et complet qui reconnaît le facteur bb. Puis on prend son complémentaire. On peut aussi simplifier l'état 2 non co-accessible dans l'automate ainsi construit :



b) Trouver un mot le plus petit possible (en nombre de lettres) qui soit reconnu par l'un de ces automates mais pas par les deux :





Justifier votre réponse.

Réponse : tous les mots de trois lettres xya avec xy ≠ aa
Justification : ε, a, b , ab, ba, aa, bb sont reconnus par les deux automates.
Par conséquent, le plus petit mot a au moins trois lettres.

c) En admettant que $\forall \alpha \in \Sigma$, $|\epsilon|_\alpha = 0$ et $|\alpha m|_a = |\alpha|_a + |m|_a$ où Σ est un alphabet, prouver en faisant un raisonnement par récurrence que $|m_1 . m_2|_a = |m_1|_a + |m_2|_a$

Soit Π(n) = Si $|m_1| \leq n$ alors $|m_1 . m_2|_a = |m_1|_a + |m_2|_a$

Π(0) est vrai car $|m_1| \leq 0$ ==> $m_1 = \epsilon$ ==> $|m_1 . m_2|_a = |\epsilon\, m_1|_a = |m_2|_a$ et $|m_1|_a + |m_2|_a = |\epsilon|_a + |m_2|_a = |m_2|_a$ La même valeur

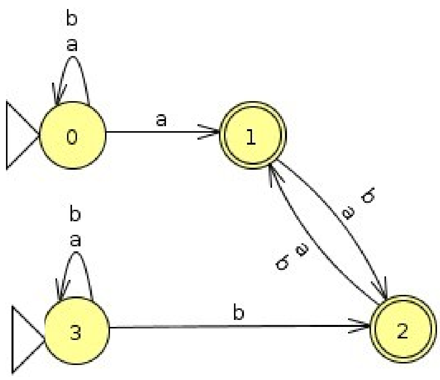
Hypothèse : Π(n) vrai

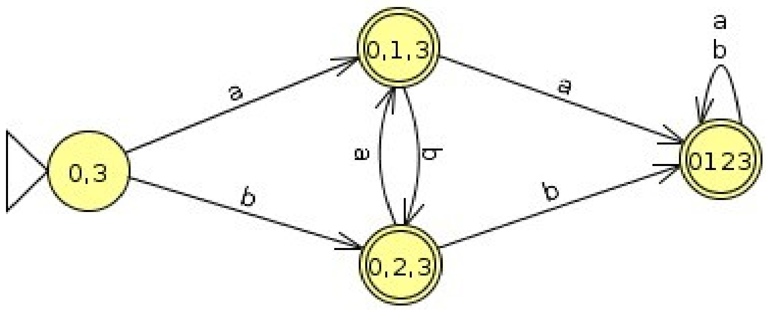
Montrons que Π(n+1) est vrai :

Soit $|m_1| = n+1$ et décomposons $m_1 = \alpha m_1'$ où α est une lettre. Alors on a :

$$\begin{aligned} |m_1 . m_2|_a &= |\alpha m_1' . m_2|_a \\ &= |\alpha|_a + |m_1' . m_2|_a \\ &= |\alpha|_a + |m_1'|_a + |m_2|_a \\ &= |\alpha . m_1'|_a + |m_2|_a \\ &= |m_1|_a + |m_2|_a \end{aligned}$$

d) Déterminiser l'automate suivant en appliquant la méthode générale vue en cours, et en particulier sans renommer les états de l'automate déterministe construit.





Exercice 2 :

Soit la grammaire G d'axiome S, d'alphabet {a, b} et définies par les productions :

$$S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$$

a) Prouver que $S \overset{*}{\rightarrow} m \Rightarrow |m|_a = |m|_b$

Soit Π(n) = $S \overset{\leq n}{\rightarrow} m \Rightarrow |m|_a = |m|_b$

Π(1) est vrai car $S \overset{\leq 0}{\rightarrow} m \Rightarrow m = \epsilon \Rightarrow \begin{array}{c} |m|_a = |\epsilon|_a = 0 \\ \text{et} \\ |m|_b = |\epsilon|_b = 0 \end{array}$ même valeur

Hypothèse : Π(n) est vrai.

Montrons que Π(n+1) est vrai pour n >=1 :

$$S \overset{n+1}{\rightarrow} m \Rightarrow \left(\begin{array}{l} S \rightarrow aSbS \overset{n}{\rightarrow} m \\ \quad \text{ou} \\ S \rightarrow aSbS \overset{n}{\rightarrow} m \\ \quad \text{ou} \\ S \rightarrow \epsilon \overset{n}{\rightarrow} m \end{array} \right)$$

Le dernier cas est impossible. Traitons le premier cas, le second étant « symétrique ».

$$\begin{aligned} S \rightarrow aSbS \overset{n}{\rightarrow} m \quad & \Rightarrow \exists m_{1,} m_2 \text{ tel que } S \overset{\leq n}{\rightarrow} m_1 \text{ et } S \overset{\leq n}{\rightarrow} m_2 \text{ et } m = am_1 b m_2 \\ & \Rightarrow |m_1|_a = |m_1|_b \text{ et } |m_2|_a = |m_2|_b \quad \text{et } m = am_1 b m_2 \\ & \Rightarrow |m|_a = |am_1 b m_2|_a = 1 + |m_1|_a + |m_2|_a = 1 + |m_1|_b + |m_2|_b = 1 + |m_1 m_2|_b = |am_1 b m_2|_b = |m|_b \end{aligned}$$

b) Soit la grammaire d'axiome S, d'alphabet {a, b} et de productions : $S \rightarrow aSbS \mid \varepsilon$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un mot soit reconnu par cette grammaire, en explicitant les propriétés caractéristiques d'un tel mot.

Cette grammaire a été vue et revue en cours et en TD, il s'agit des mots qui ont autant de « a » que de « b » et dont tout préfixe (peu importe de le demander « propre ») a plus, ou autant, de « a » que de « b ».

c) Même question pour la grammaire d'axiome S, d'alphabet {a, b} et de productions : $S \rightarrow bSaS \mid \varepsilon$.

Par « symétrie » avec la grammaire précédente, i.e. en permutant le rôle de « a » et de « b », on peut en déduire qu'il s'agit des mots qui ont autant de « a » que de « b » et dont tout préfixe a plus, ou autant, de « b » que de « a ».

d) Expliquer pourquoi, si m est un mot non vide sur l'alphabet {a, b} avec autant de « a » que de « b », alors il existe un préfixe non vide de m, noté m_p tel que :

- $|m_p|_a = |m_p|_b$
- $\forall q$ préfixe de $m_p, |q|_a \geq |q|_b$ ou $\forall q$ préfixe de $m_p, |q|_a \leq |q|_b$

Le préfixe m_p existe car il existe au moins un mot non vide préfixe de m qui a autant de « a » que de « b » : m lui-même.

Pour choisir m_p, on regarde m[1] la première lettre de m. Supposons (sans perte de généralité) que cela soit un « a ». Alors, on peut choisir pour m_p le mot construit en parcourant m de la gauche vers la droite, tant que ce préfixe construit a plus ou autant de « a » que de « b », et on s'arrête lorsqu'il en a autant. Le m_p ainsi construit vérifie les deux propriétés demandés, avec : $\forall q$ préfixe de $m_p, |q|_a \geq |q|_b$ dans le cas de notre hypothèse m[1] =a

et

$\forall q$ préfixe de $m_p, |q|_a \leq |q|_b$ dans l'autre cas où m[1] = b.

Remarque : implicitement on suppose que l'on ne peut passer « brutalement », i.e. en ajoutant une seule lettre, d'un préfixe qui a strictement plus de « a » que de « b » à un préfixe qui a strictement moins de « a » que de « b ».

e) Prouver que si m est un mot sur l'alphabet {a, b} avec autant de « a » que de « b », alors $S \xrightarrow{*} m$ pour la grammaire G. Pour simplifier, on admettra que le langage associé à la grammaire G est fermé pour la concaténation.

Soit Π(n) = $|m|_a = |m|_b$ et $|m| \leq n \Rightarrow S \xrightarrow{*} m$

Π(0) est vrai car $|m| \leq 0 \Rightarrow m = \epsilon$ `et ε est dérivable dans la grammaire G (S → ε)`

Hypothèse : Π(n) est vrai

Montrons que Π(n+1) est vrai pour $n \geq 0$:

Soit m un mot de n+1 lettres qui a autant de « a » que de « b ». Il est non vide. Supposons que m[1]=a.

On applique le résultat de la question précédente :

$\exists m_p, m'$ tel que $m = m_p . m'$ et $|m_p|_a = |m_p|_b$ et $\forall q$ préfixe de $m_p, |q|_a \geq |q|_b$

On reconnaît une condition nécessaire et suffisante pour que m_p soit dérivable par la grammaire de la question b. Donc en particulier on a : $S \rightarrow m_p$

Si m[1]=b, alors on a :

$\exists m_p, m'$ tel que $m = m_p . m'$ et $|m_p|_a = |m_p|_b$ et $\forall q$ préfixe de $m_p, |q|_a \leq |q|_b$

et on reconnaît une condition nécessaire et suffisante pour que m_p soit dérivable par la grammaire de la question c. Donc $S \rightarrow m_p$

Par ailleurs, comme m et m_p ont autant de « a » que de « b », il en est de même de m' qui est de plus strictement plus petit que m (m_p est non vide). Par hypothèse de récurrence, $S \rightarrow m'$

Enfin, comme on a admis que le langage est fermé pour la concaténation, si $S \rightarrow m_p$ et $S \rightarrow m'$, alors on en déduit le résultat demandé : $S \xrightarrow{*} m_p . m' = m$

Exercice 3 :

Soit L_A le langage associé à l'automate indéterministe avec ε-transitions A = (∑, E, I, F, δ), où ∑ = {a, b, c}.
Soit $L_{A'}$ le langage associé à l'automate indéterministe avec ε-transitions A' = (∑, E, I, F, δ') tel que :

$$\delta' = \delta \cup \{(e_2, \varepsilon, e_1) \mid (e_1, b, e_2) \in \delta\}$$

Rappel : $A \subseteq B \Rightarrow \delta^*(A, m) \subseteq \delta^*(B, m)$

a) Prouver que, s'il existe un chemin dans A' d'un état e_1 à un état e_n de trace b, alors il existe un chemin dans A' d'un état e_1 à un état e_n de trace bb.

Soit (e1 ε e2 ε e3 … ε ep b ep+1 ε …. ε en) un chemin dans A' quelconque de trace b. Alors il existe un chemin dans A' : (e1 ε e2 ε e3 … ε ep b ep+1 ε ep b ep+1…. ε en) de trace bb.

b) En déduire que $\delta'^*(Q, b) \subseteq \delta'^*(Q, b^2)$ pour tout ensemble Q d'états de A'.

$e_2 \in \delta'^*(Q, b)$ $\Rightarrow$ Il existe un chemin dans A' d'un état de Q vers e_2 de trace b
$\Rightarrow$ Il existe un chemin dans A' d'un état de Q vers e_2 de trace bb
$\Rightarrow e_2 \in \delta'^*(Q, bb)$

c) Prouver que $\delta'^*(Q, b) \subseteq \delta'^*(Q, b^n)$ pour tout $n \geq 1$ et pour Q un ensemble d'états de A'.

Soit Π(n) = $\delta'^*(Q, b) \subseteq \delta'^*(Q, b^n)$

Π(1) est trivialement vrai.

Hypothèse : Π(n) est vrai.

Montrons que Π(n+1) est vrai, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\delta'^*(Q, b^{n+1}) &= \delta'^*(\delta'^*(Q, b^{n-1}), bb) \\
&\supseteq \delta'^*(\delta'^*(Q, b^{n-1}), b) \\
&\supseteq \delta'^*(Q, b^n) \\
&\supseteq \delta'^*(Q, b)
\end{aligned}$$

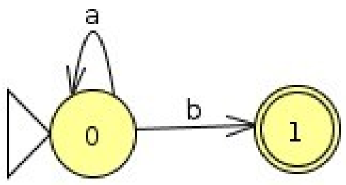
d) Prouver que $\delta'^*(Q, m_1.b.m_2) \subseteq \delta'^*(Q, m_1.b^n.m_2)$ pour Q un ensemble d'états de A' , n≥1, et m_1 et m_2 deux mots quelconques.

$$\begin{aligned}
\delta'^*(Q, m_1.b^n.m_2) &= \delta'^*(\delta'^*(\delta'^*(Q, m_1), b^n), m_2) \\
&\supseteq \delta'^*(\delta'^*(\delta'^*(Q, m_1), b), m_2) \\
&\supseteq \delta'^*(Q, m_1.b.m_2)
\end{aligned}$$

e) En déduire que $\{m_1.b^n.m_2 \;\mid\; n \geq 1 \text{ et } m_1.b.m_2 \in L_{A'}\} \subseteq L_{A'}$

$$m \in \{m_1.b^n.m_2 \;\mid\; n \geq 1 \text{ et } m_1.b.m_2 \in L_{A'}\}$$
$$\Rightarrow m = m_1.b^n.m_2 \text{ et } \delta'^*(I, m_1.b.m_2) \cap F \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow m = m_1.b^n.m_2 \text{ et } \delta'^*(I, m_1.b^n.m_2) \cap F \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow \delta'^*(I, m) \cap F \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow m \in L_{A'}$$

f) Montrer que $L_{A'} \neq \{m_1.b^n.m_2 \;\mid\; n \geq 1 \text{ et } m_1.b.m_2 \in L_{A'}\} \cup L_A$ en donnant un contre exemple avec un automate A à 2 états au plus, et en le justifiant.



Rajouter une ε-transition de l'état 1 vers l'état 2 fera que, par exemple le mot ba sera reconnu dans A' et n'est ni un mot de A ni un mot de A avec des b itérés n fois.