

Enoncés des problèmes à modéliser

Vous devez résoudre tous les problèmes ci-dessous. A chaque fois, vous modéliserez en TD le problème sous forme d'un programme linéaire où vous justifierez vos choix de variables. Dans un second temps en TP, vous résoudrez ceux-ci avec Calc.

La cimenterie

Soit une usine qui produit deux ciments rapportant 50€ et 70€ la tonne. Pour fabriquer une tonne de ciment 1, il faut 40 min de calcination dans un four et 20 min de broyage. Pour fabriquer une tonne de ciment 2, il faut 20 min de four et 30 min de broyage. Le four et l'atelier de broyage sont disponibles 7 h et 8,5 h par jour. Combien de ciment de chaque type peut-on produire par jour pour maximiser le bénéfice ?

Un problème de viennoiserie d'optimisation

Un boulanger/pâtissier auto-entrepreneur débutant d'origine bretonne vient de s'installer à Montpellier. Pour l'instant il ne connaît que 2 recettes (glanées sur Marmiton) : les croissants (à gauche) et les Kouign-amanns (à droite).

Croissants au beurre

Dessert - Très facile - Bon marché - Végétarien

1,23 €

Temps de préparation : 120 minutes
Temps de cuisson : 15 minutes

Ingrédients (pour 8 personnes) :

- 500 g de farine
- 25 cl de lait
- 15 g de sel
- 1 verre d'eau chaude
- 50 g de sucre
- 200 g de beurre semi-salé (doit avoir la même consistance que la Ate)



2,50 €

Temps de préparation : 30 minutes
Temps de cuisson : 35 minutes

Ingrédients (pour 8 personnes) :

- 250 g de farine de blé
- 200 g de beurre demi-sel
- 200 g de sucre en poudre
- 10 g de levure fraîche de boulanger
- 2 pincées de sel
- 10 cl d'eau

Pour se lancer, il a acheté 10kg de farine et 10kg de beurre.

1/ Comment optimiser ses revenus ?

2/ Sachant que dans le sud, les gens préfèrent les croissants, il décide d'assurer au moins la production de 10 lots de croissants, pour attirer la clientèle dans son échoppe. Quel est l'impact sur sa production ?

Chargement équilibré de wagons

Trois wagons de chemin de fer de charge utile limitée à 100 quintaux sont réservés pour transporter seize caisses. Les caisses et leurs poids en quintaux sont donnés dans le tableau suivant. Comment affecter les caisses aux wagons de façon à respecter les charges utiles maximales et à minimiser la charge du wagon le plus chargé ?

Caractéristiques des caisses

Caisse n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Poids	34	6	8	17	16	5	13	21
Caisse n°	9	10	11	12	13	14	15	16
Poids	25	21	14	13	33	9	25	25

Le loueur de voitures

Un loueur de voitures possède 94 véhicules, répartis sur 10 agences. L'emplacement de chaque agence est défini par des coordonnées géographiques X et Y dans un repère gradué en kilomètres et on suppose que la distance par la route entre deux agences est égale à la distance euclidienne (à vol d'oiseau). Le tableau suivant indique agence par agence les coordonnées, le parc normal et le parc actuel observé. La dernière ligne donne pour chaque site les excès (positifs) ou les déficits (négatifs).

Caractéristiques des agences de location										
Agence	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Coordonnée X	0	4	4	6	7	7	1	1	2	0
Coordonnée Y	0	4	2	2	0	5	5	2	0	3
Parc normal	10	6	8	11	9	7	15	7	9	12
Parc observé	8	13	4	8	12	2	14	11	15	7
Excès ou déficit	-2	+7	-4	-3	+3	-5	-1	+4	+6	-5

1/ En supposant que le coût de déplacement d'une voiture est de 0,3 €/km, déterminez les mouvements de voitures permettant de rétablir l'effectif idéal de chaque agence, tout en minimisant le coût total de transport.

2/ Chaque lendemain le problème se reposera. Quelles modifications faut-il apporter pour permettre au loueur d'optimiser quotidiennement son parc de véhicules ?

Correspondance d'avions

La compagnie aérienne SafeFlight utilise l'aéroport de Roissy-Charles-de-Gaulle comme hub pour minimiser le nombre de correspondances en Europe. Six Fokker 100 de cette compagnie en provenance de Bordeaux, Clermont-Ferrand, Marseille, Nantes, Nice et Toulouse atterrissent sur cet aéroport entre 11 h et 12 h 30. Ils repartent vers Berlin, Berne, Bruxelles, Londres, Rome et Vienne entre 12 h 30 et 13 h 30. Les nombres de passagers en transfert entre les vols d'arrivée et les vols de départ sont donnés dans le tableau suivant.

Nombres de passagers en transfert entre les différents vols		Destinations					
Provenances		Berlin	Berne	Bruxelles	Londres	Rome	Vienne
	Bordeaux	35	12	16	38	5	2
	Clermont-Ferrand	25	8	9	24	6	8
	Marseille	12	8	11	27	3	2
	Nantes	38	15	14	30	2	9
	Nice	-	9	8	25	10	5
	Toulouse	-	-	-	14	6	7

Par exemple, si le vol en provenance de Bordeaux assure ensuite le vol à destination de Berlin, 35 passagers et leurs bagages peuvent rester dans leur avion à l'escale de Paris. Le vol en provenance de Nice arrive trop tard pour être réemployé pour le vol vers Berlin, même chose pour le vol en provenance de Toulouse qui ne peut pas assurer les vols à destination de Berlin, Berne et Bruxelles (cases indiquées par un tiret dans le tableau).

Comment réemployer les avions arrivés pour les vols de départ pour minimiser le nombre de passagers changeant d'avion à Roissy ?

Choix d'emprunts

Monsieur Clothes, directeur d'une chaîne de magasins de vêtements, désire ouvrir trois nouvelles boutiques : une à Nantes, une à Troyes et une à Lorient. L'ouverture de chaque nouvelle boutique lui coûtera respectivement 250 000 €, 100 000 € et 170 000 €. Pour financer ses projets, il fait appel à trois différentes banques.

Taux proposés par les banques pour les différents projets

	Boutique de Nantes	Boutique de Troyes	Boutique de Lorient
Banque 1	5 %	6,5 %	6,1 %
Banque 2	5,2 %	6,2 %	6,2 %
Banque 3	5,5 %	5,8 %	6,5 %

En fonction de l'emplacement de ces boutiques et des risques évalués, chaque banque décide de financer au plus 300 000 € sur 8 ans et propose des taux différents suivant les boutiques (voir tableau). Déterminez le montant à emprunter à chacune des banques pour financer chaque boutique de façon à minimiser les dépenses totales de M. Clothes.

Affectations de personnel à des postes

Chacune des six machines d'un atelier doit recevoir un opérateur. Six personnes ont été pressenties. Chacune d'elles a passé un test de productivité sur chaque machine. Le tableau suivant donne les productivités obtenues, en pièces par heure. Les machines sont en parallèle, c'est-à-dire que la productivité totale de l'atelier est la somme des productivités des personnes affectées aux machines.

		Machines					
		1	2	3	4	5	6
Personnes	1	13	24	31	19	40	29
	2	18	25	30	15	43	22
	3	20	20	27	25	34	33
	4	23	26	28	18	37	30
	5	28	33	34	17	38	20
	6	19	36	25	27	45	24

L'objectif est de déterminer une affectation des personnes aux machines permettant de maximiser la productivité totale.

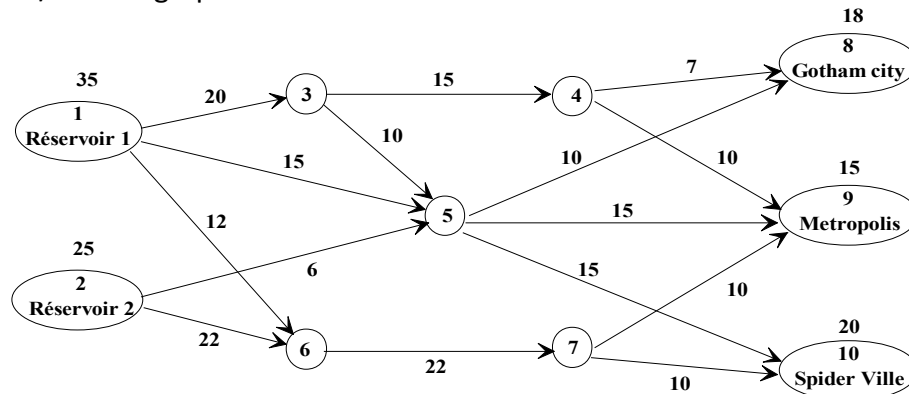
Question 1 : Commencez par calculer une solution avec la méthode heuristique (non optimale) suivante, très naturelle : choisir l'affectation $i \rightarrow j$ de plus grande productivité, barrez la ligne i et la colonne j puisque la personne est placée et la machine pourvue, et recommencez le processus jusqu'à obtenir six affectations.

Question 2 : Trouvez la solution optimale avec un modèle de programmation linéaire.

Question 3 : Résolvez enfin le même problème, mais pour des postes en série.

Problème d'adduction d'eau

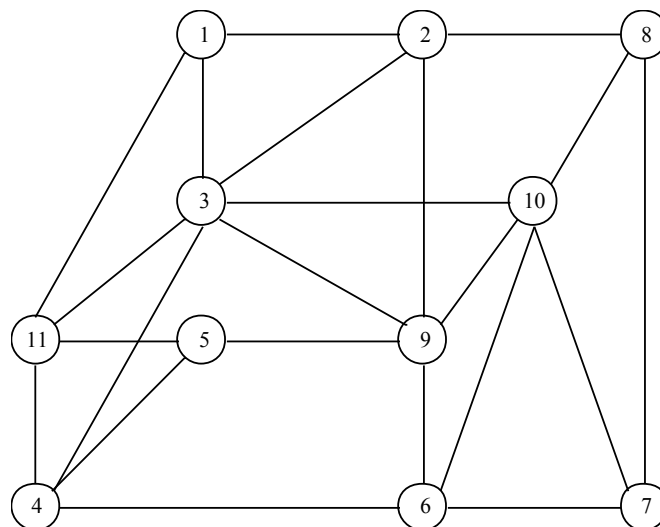
Le graphe suivant représente un réseau d'adduction d'eau. Les nœuds, numérotés de 1 à 10, représentent des villes, des réservoirs et des stations de pompage reliées par des canalisations. Les trois villes de Gotham City, Metropolis et Spider Ville sont alimentées par les deux réservoirs. Les disponibilités de ces réservoirs en milliers de m^3/h sont de 35 pour le réservoir 1, de 25 pour le réservoir 2. Les capacités de chaque canalisation sont données en milliers de m^3/h sur le graphe.



Une étude est en cours pour savoir si ce réseau pourra satisfaire les besoins respectifs des trois villes dans dix ans, à savoir 18, 15 et 20 milliers de m^3/h . Déterminez le flot maximal permis par le réseau actuel. Sera-t-il suffisant dans dix ans ?

Fiabilité d'un réseau

On considère le réseau de télécommunications militaires donné sur la figure suivante, composé de onze sites (ou nœuds) reliés par des lignes bidirectionnelles de transmission de données.



Pour des raisons de fiabilité en cas de conflit, le cahier des charges exige que les deux sites 10 et 11 de ce réseau puissent continuer à communiquer malgré la destruction de trois autres sites quelconques. Le réseau respecte-t-il cette exigence ?

Planification de production de bicyclettes

L'entreprise DeRoo fabrique des bicyclettes pour enfants. Les prévisions de ventes en milliers d'unités pour l'année à venir sont données dans le tableau suivant. La capacité de production de l'entreprise est de 30 000 bicyclettes par mois. Elle peut produire davantage en demandant à ses employés de travailler en heures supplémentaires. Mais le coût de revient d'une bicyclette est alors plus élevé : 160 € par unité, au lieu de 130 €.

Prévisions de vente pour l'année à venir en milliers d'unités

Janv	Fév	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
30	15	15	25	33	40	45	45	26	14	25	30

Actuellement, il y a 2 000 bicyclettes en stock. On peut calculer les coûts de stockage en considérant une valeur de 20 € par unité contenue dans le stock en fin de mois. On considère que les capacités de stockage sont virtuellement illimitées : ceci signifie que la capacité réelle, bien qu'évidemment limitée, n'est pas limitante ici. Nous sommes le premier janvier. Quelles quantités doivent être fabriquées et stockées dans les douze prochains mois, pour respecter les demandes prévisionnelles tout en minimisant les coûts ?

Construction d'un stade

Dans le but d'offrir plus de loisirs à ses administrés, une municipalité désire construire un petit stade. Après l'appel d'offres, la construction de l'ouvrage est confiée à un entrepreneur local. Ce dernier souhaite réaliser le stade dans les meilleurs délais. Les principales tâches sont reprises dans le tableau suivant, avec des durées exprimées en semaines. Certaines tâches ne peuvent être exécutées avant la fin d'autres tâches, appelées tâches précédentes. Les deux dernières colonnes du tableau concernent la question 2.

Données pour la construction du stade

N° tâche	Libellé des tâches	Durée	Tâches précédentes	Réduction maximale	Coût supplémentaire par semaine (en k€)
1	Installation du chantier	2	Aucune	0	-
2	Terrassements	16	1	3	30
3	Construction des fondations	9	2	1	26
4	VRD (voirie, réseaux divers)	8	2	2	12
5	Élévation du sous-sol	10	3	2	17
6	Plancher principal	6	4, 5	1	15
7	Cloisonnement des vestiaires	2	4	1	8
8	Électrification des gradins	2	6	0	-
9	Pose du toit	9	4, 6	2	42
10	Éclairage du stade	5	4	1	21
11	Installation des gradins	3	6	1	18
12	Mise hors d'eau du toit	2	9	0	-
13	Finition des vestiaires	1	7	0	-
14	Construction de la billetterie annexe	7	2	2	22
15	Voirie secondaire	4	4, 14	2	12
16	Signalétique	3	8, 11, 14	1	6
17	Pelouse et accessoires sportifs	9	12	3	16
18	Réception de l'ouvrage	1	17	0	-

Question 1 : quelle est la durée minimale du chantier ?

Question 2 : la mairie souhaite que le projet dure moins longtemps que dans la question 1. Pour cela, elle est prête à donner une prime supplémentaire de 30 k€ par semaine d'avance. L'entrepreneur doit alors faire appel à des ouvriers et du matériel supplémentaire pour arriver

à gagner du temps. Pour chaque tâche, il a résumé dans le tableau précédent le nombre de semaines qu'il peut gagner (colonne *Réduction*) et le coût supplémentaire correspondant. Quelle sera la nouvelle durée du projet si l'entrepreneur cherche à maximiser son gain ?

Rail ou Route

Une entreprise du Sud-Ouest doit transporter 180 tonnes de produits chimiques dangereux, stockés dans quatre entrepôts E1 à E4, vers trois centres de retraitement C1, C2 et C3. Les entrepôts E1 à E4 contiennent respectivement 50, 40, 35 et 65 tonnes, soit 190 tonnes en tout. Deux moyens de transport sont disponibles : le rail et la route. L'entrepôt E1 peut livrer le centre C1 et C2 par la route uniquement aux tarifs de 12 et 11 k€/t. L'entrepôt E2 ne dessert que C1, soit par rail ou par route, aux tarifs respectifs de 12 et 14 k€/t. L'entrepôt E3 dessert le centre C2 par la route au tarif de 9 k€/t et le centre C3 par rail ou par route aux tarifs respectifs de 4 et 5 k€/t. L'entrepôt E4 dessert le centre C2 par rail ou par route au coût de 11 et 14 k€/t et le centre C3 par rail ou route au tarif de 10 et 14 k€/t.

La SNCF impose à l'entreprise de transporter au moins 10 tonnes sur chaque liaison pour qu'elle puisse bénéficier des tarifs indiqués, et au plus 50 tonnes pour des raisons de sécurité. Par contre, il n'y a pas de limitations pour le transport par route. Comment acheminer les 180 tonnes de produits chimiques en minimisant le coût total de transport ?

Constitution d'équipages

Pendant la Seconde Guerre mondiale, la Royal Air Force (RAF) avait beaucoup de pilotes étrangers, parlant différentes langues et plus ou moins entraînés sur les différents avions. La RAF devait constituer des équipages pour chaque avion, avec un langage compatible et une maîtrise acceptable de l'appareil. Voici un exemple de problème avec huit pilotes. Le tableau suivant représente par une note sur 20 le niveau de langue de chaque pilote (en anglais, français, néerlandais et norvégien), ainsi que la maîtrise de différents avions biplaces (chasseur, transport, bombardier, planeur et ravitailleur).

Notations des pilotes								
Pilote	1	2	3	4	5	6	7	8
Anglais	20	14	0	13	0	0	8	8
Français	12	0	0	10	15	20	8	9
Néerlandais	0	20	12	0	8	11	14	12
Norvégien	0	0	0	0	17	0	0	16
Chasseur	18	12	15	0	0	0	8	0
Transport	10	0	9	14	15	8	12	13
Bombardier	0	17	0	11	13	10	0	0
Planeur	0	0	14	0	0	12	16	0
Ravitailleur	0	0	0	0	12	18	0	18

Un équipage est valide si les deux pilotes ont chacun au moins 10/20 à une même langue et 10/20 sur un même appareil.

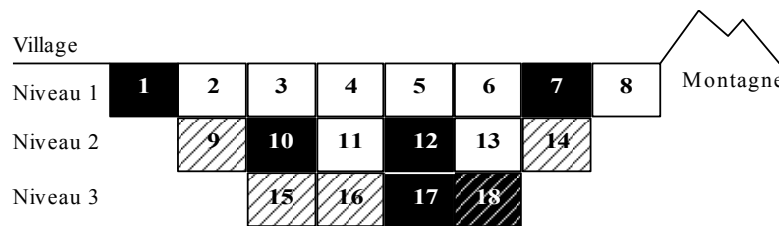
Question 1 : peut-on faire voler tous les pilotes ?

On calcule ensuite la somme des deux notes de pilotage pour chaque équipage valide et chaque avion sur lequel les deux membres ont au moins 10/20. Ceci permet de définir pour chaque équipage un score égal au maximum de ces notes. Par exemple, les pilotes 5 et 6 ont respectivement les notes 13 et 10 sur bombardier, 12 et 18 sur ravitailleur. Le score pour cet équipage est donc $\max(13+10, 12+18) = 30$.

Question 2 : quel est l'ensemble d'équipages de score total maximal ?

Exploitation d'une mine à ciel ouvert

Une mine à ciel ouvert est envisagée pour exploiter un gisement d'uranium. Les sondages ont permis de découper le gisement en unités d'exploitation appelées *blocs*. La fosse à creuser doit être en gradins pour permettre aux camions de descendre au fond. Elle est limitée à l'ouest par un village, à l'est par un massif montagneux. À cause de ces contraintes, 18 blocs de 10 000 tonnes sur trois niveaux ont été délimités (figure ci-dessous). Pour extraire un bloc, il faut extraire trois blocs du niveau supérieur : le bloc juste au-dessus et, pour respecter les contraintes de pente de la mine, le bloc de gauche et celui de droite.

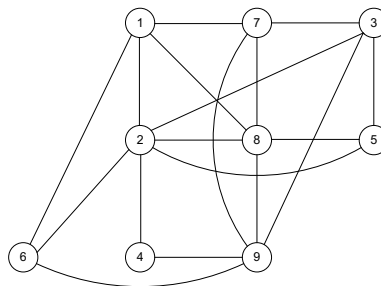


Vue en coupe de la mine

Les coûts d'extraction par tonne sont de 100 € pour les blocs du niveau 1, 200 € pour ceux du niveau 2, et 300 € au niveau 3, sauf pour les blocs hachurés qui sont formés d'une roche très dure et coûtent 1 000 € par tonne. Les seuls blocs contenant de l'uranium sont les blocs noirs 1, 7, 10, 12, 17, 18. Leurs valeurs marchandes respectives sont de 200, 300, 500, 200, 1000 et 1 200 €/t. Notez que le bloc 18 est hachuré : bien que situé dans la roche dure, il est très riche en minerai. Quels sont les blocs à extraire pour maximiser le bénéfice total ?

Emploi du temps pour un lycée * (difficile)

Un lycée doit concevoir un emploi du temps pour neuf cours de deux heures dont certains sont incompatibles (même enseignant, élèves en commun, etc.). Le graphe non orienté $G = (V, E)$ suivant résume ces conflits : les nœuds correspondent aux cours tandis qu'une arête $[i, j]$ entre deux cours i et j représente une incompatibilité. En supposant que le nombre de salles est suffisant, quel est le nombre minimal de créneaux de deux heures pour assurer tous les cours ?



Livraison de fioul * (difficile)

Un transporteur doit livrer du fioul à certains de ses clients de Loire-Atlantique (44) et du Maine-et-Loire (49), à partir de la raffinerie de Donges dans le département 44. Ces clients se situent à Andard (49), Carquefou (44), Guérande (44), Monnières (44), Pannecé (49) et Trélazé (49). Le tableau suivant contient les demandes en litres des clients.

Demandes des sites (en litres)

Andard	Carquefou	Donges	Guérande	Monnières	Pannecé	Trélazé
14 000	3 000	0	6 000	16 000	5 000	15 000

La matrice des distances en kilomètres entre les différents sites est donnée dans le tableau ci-dessous.

Distancier (en km)

	Andard	Carquefou	Donges	Guérande	Monnières	Pannecé	Trélazé
Andard	0	93	148	180	99	72	12
Carquefou	93	0	55	85	20	28	83
Donges	148	55	0	32	70	73	140
Guérande	180	85	32	0	100	99	174
Monnières	99	20	70	100	0	49	85
Pannecé	72	28	73	99	49	0	73
Trélazé	12	83	140	174	85	73	0

Pour effectuer ses livraisons, le transporteur dispose de camions-citernes pouvant contenir jusqu'à 39 000 litres. Chaque client doit être livré en une seule fois. Déterminez les tournées à réaliser pour livrer tous les clients et minimiser le nombre de kilomètres parcourus.

Ordonnancement d'un atelier en ligne ** (très difficile)

Un atelier fabrique à la demande des tuyauteries en métal pour l'industrie automobile, avec trois machines : une pour cintrer les tubes, une pour souder des pattes de fixation et une pour monter des raccords aux extrémités. L'atelier doit réaliser six pièces, dont les durées opératoires sont données dans le tableau suivant. Chaque pièce doit passer d'abord au cintrage, puis à la soudure et enfin à la pose des raccords. Une fois commencée, une opération doit se dérouler sans interruption, mais les pièces peuvent attendre entre les machines.

Durées d'usinage en minutes

Pièce	1	2	3	4	5	6
Cintrage	3	6	3	5	5	7
Fixations	5	4	2	4	4	5
Raccords	5	2	4	6	3	6

Une machine ne peut accueillir qu'une pièce à la fois. Une pièce ne peut pas en doubler une autre en passant d'une machine à la suivante, c'est-à-dire que si on détermine un ordre de passage des pièces en entrée, chaque machine verra passer les pièces dans cet ordre. Quel est l'ordre de passage permettant de terminer toutes les pièces en une durée minimale ?