Complétude de la résolution pour le calcul des prédicats

HLIN602 Logique II 2018-2019 Christian Retoré

Mis à jour le: 29 avril 2020

1 Complétude

Un objectif majeur du cours est de mettre en rapport les deux notions centrales vues dans la première partie :

- les preuves (calcul des séquents ou résolution)
- les modèles

Théorème de complétude (Gödel, 1929) : $X_1, \ldots, X_n \vdash F$ est démontrable (par exemple dans le calcul des séquents, ou par résolution) si et seulement si toute interprétation qui rend $X_1, \ldots, X_n$ vrais rend F vraie.

Quand je dis “$X_1, \ldots, X_n \vdash F$ est démontrable par résolution" cela signifie que la résolution conduit de $X_1, \ldots, X_n, \neg F$ à $\perp$.

2 Model existence lemma

Model Existence Lemma : Si un ensemble de formules est cohérent (c.-à-d.consistent, c.-à-d.s'il ne démontre pas $\perp$) alors il admet un modèle.

On procède ainsi :

1. on part d'un ensemble cohérent de formules, une théorie $\mathscr{T}$
2. on complète cette théorie en une théorie $\bar{\mathscr{T}}$
   (pour tout F soit $\mathscr{T} \vdash F$ soit $\mathscr{T} \vdash \neg F$
   et avec des témoins de Henkin pour les formules existentielles)
3. on construit un modèle dont le domaine est constitué
   des termes de la syntaxe (attention c'est source de confusion)
4. être vrai dans ce modèle c'est être démontrable dans $\bar{\mathscr{T}}$
5. ce modèle satisfait donc toute formule de $\bar{\mathscr{T}}$
   et donc a fortiori toute formule de $\mathscr{T}$

3 Model existence lemma $\Rightarrow$ complétude

La contraposée (équivalente) du Model Existence Lemma s'exprime en termes d'insatisfiabilité et d'incohérence :

Contraposée du MEL Si un ensemble de formules n'admet pas de modèle (insatisfiable) alors cet ensemble de formules entraîne $\perp$ (dans le calcul des séquents, ou par résolution).

Si une formule F est vraie dans tout modèle alors sa négation $\neg F$ n'est vraie dans aucun modèle et donc, par la contraposée du Model Existence Lemma, $\neg F \vdash \perp$ est démontrable. On notera que la résolution est bien adaptée pour dériver une contradiction.

4 Quelques résultats utiles déjà vus

La méthode de résolution est correcte :

si la méthode de résolution dérive $\perp$ à partir d'un ensemble alors cet ensemble de clauses est insatisfiable

Techniquement nous aurons aussi besoin de :
– si une clause $\mathscr{C}$ est vraie pour une interprétation I alors toute substitution de $\mathscr{C}$ est vraie pour I
– si une clause $\mathscr{C}$ est obtenue par résolution à partir de clauses $(\mathscr{C}_q)_{q\in I}$ valides pour I alors cette clause $\mathscr{C}$ est valide pour I
– la **résolution propositionnelle** est complète : si un ensemble de clauses propositionnelles $(\mathscr{P}_p)_{n\in J}$ est insatisfiable alors la méthode de résolution propositionnelle dérive la clause vide à partir de $(\mathscr{P}_p)_{n\in J}$.

Tous ces résultats sont dans le chapitre "séquents, résolution et correction de la résolution" sauf le dernier qui se trouve dans "complétude de la résolution propositionnelle".

5 Complétude de la résolution

C’est la réciproque de ce qui a été dit précédemment :

si un ensemble de formules (clauses) est instatisfiable
alors il existe une séquence de résolution conduisant à la clause vide.

Commentaire : "il existe" ...
mais il n’y a pas d’algorithme pour trouver la séquence de résolution :
satisfiabilité, prouvabilité sont indécidables
pour le calcul des prédicats (cf. plus tard).

6 Une interprétation (très) particulière

Domaine $\mathscr{H}$ = ensemble des termes syntaxiques ! ! ! ($\mathscr{H}$ pour $\mathscr{H}$erbrand)

engendrés par les fonctions à partir des constantes et des variables.

Bien sûr, $(I(f))(t)$ pour le terme t du modèle $\mathscr{H}$ sera ... $f(t)$! ! !

Pour en faire une interprétation il faut spécifier,
pour chaque prédicat n-aire P $I(P)$
mais aucun lien entre les valeurs de vérité de $P(u)$, et de $P(f(x))$ etc.
on peut choisir la valeur de vérité des atomes comme on veut.

Tout le contraire de ce qu'on recommande aux étudiants ;-)

syntaxe | interprétation

7 Résolution : prédicats & propositions

Nous allons nous servir simultanément de la résolution

1. dans le calcul des prédicats
2. dans le calcul propositionnel
   (avec des propositions comme $P(f(a))$ qui vaut 0 ou 1).

On appellera la "résolution propositionnelle" la "coupure"
(c’est la règle de coupure des calcul du séquents).

8 Complétude de la résolution

Soit $\Gamma = \{Cl_i | 1 \leq i \leq n\}$ un ensemble de clauses insatisfiable
alors Γ est réfutable (une suite de résolutions conduit à la clause vide).

On va s'appuyer sur les réfutations propositionnelles à partir de
$X = \{\sigma(Cl_i) | \sigma : \text{substitution et } 1 \leq i \leq n\}$

Remarque importante :
X n'est pas propositionnellement satisfaisable,
sinon... Γ le serait dans le modèle de base $\mathscr{H}$, avec les $I(P)$ définies par la valeur des propositions qui rendent X satisfiable.

Donc X est propositionnellement réfutable.

9 Lemme central RC

Notation : Dans une clause $Cl_i = (\wedge A_p) \Rightarrow (\vee B_q)$
on note $Cl_i^- = (\wedge A_p)$ et $Cl_i^+ = (\vee B_q)$

Lemme RC
Soit Dl une une clause démontrable à partir de X (ensemble des substitutions de Γ avec des termes de $\mathscr{H}$ vues comme des clauses propositionnelles) par la coupure (résolution propositionnelle)

alors il existe une clause El et une substitution τ telles que

– la clause El est démontrable par la résolution du calcul des prédicats à partir des clauses Γ du calcul des prédicats
– et $\tau((El)^+) \subset Dl^+$ et $(\tau(El)^-) \subset Dl^-$

10 Lemme RC $\Rightarrow$ complétude de la résolution

En effet si X n'est pas satisfiable
comme la résolution est complète pour le calcul propositionnel,
la méthode de coupure (résolution propositionnelle)
appliquée à X dérive la clause vide.

Le lemme RC affirme que si Dl est dérivable propositionnellement,
alors il existe une clause El dérivable par résolution à partir de Γ
telle que $\tau(El)$ est incluse dans Dl

Si Dl est la clause vide, El aussi,
qui est donc dérivable par résolution à partir de Γ. QED.

11 Preuve du lemme RC

RC : Soit Dl une une clause démontrable par coupure (résolution propositionnelle) à partir de X alors il existe une clause El et une substitution τ tels que El est démontrable par résolution (prédicats) à partir de Γ $\tau((El)^+) \subset Dl^+$ et $(\tau(El)^-) \subset Dl^-$.

Pour établir RC on procède par induction sur la longueur de la dérivation de $Dl = Dl_n$ à partir de X :

Si on a une dérivation $DL_1, ..., Dl_n = Dl$ par coupure de Dl à partir de X

alors chaque Dl_k est soit une clause de X soit obtenu par simplification d'une clause D_i avec $i < k$ (contraction de deux atomes identiques dans une clause), soit obtenu par coupure à partir de deux clauses Dl_i et Dl_j avec $i < k$ et $j < k$.

12 Preuve du lemme RC 1/6 — cas simple

Cas simples :

— Dl est dans X donc $Dl = \sigma(Cl_i)$ pour $Cl_i \in \Gamma$
(donc Cl_i est dérivable à partir de Γ).

— Dl est obtenue à partir de Dl_i avec $i < n$ par simplification :
on a alors $Dl_i^+ = Dl^+$ et $Dl_i^- = Dl^-$.
Dans ce cas, par hypothèse de récurrence
il existe une clause El qui s'obtient par résolution à partir de Γ
et telle que $\sigma(El^-) \subset Dl_i^-$ et $\sigma(El^+) \subset Dl_i^+$, donc El et σ conviennent.

13 Preuve RC 2/6 — cas intéressant

$Dl = Dl_n$ est obtenue par coupure à partir de Dl_i et Dl_j avec $i < n$ et $j < n$.

Par hypothèse de récurrence
il existe El_1 et El_2 obtenues par résolutions à partir de Γ
et deux substitutions τ_1 et τ_2 telles que
$\tau_1(El_1^-) \subset Dl_i^-$ et $\tau_1(El_1^+) \subset Dl_i^+$
$\tau_2(El_2^-) \subset Dl_j^-$ et $\tau_2(El_2^+) \subset Dl_j^+$.

On peut renommer (permuter) les variables par σ
de sorte que $\sigma(El_2) = El_3$ n'ait plus de variable en commun avec El_1.

14 Preuve RC 3/6 — cas intéressant

Il existe alors une substitution des variables μ telle que
$\mu(x) = \tau_1$ pour les variables x de El_1,
et $\mu(y) = \tau_2 \circ \sigma^{-1}(y)$ pour les variables y de El_3.

On a alors $\mu(El_1^-) \subset Dl_i^-$ et $\mu(El_1^+) \subset Dl_i^+$
ainsi que $\mu(El_3^-) \subset Dl_j^-$ et $\mu(El_3^+) \subset Dl_j^+$.

15 Preuve RC 4/6 — cas intéressant

Posons
$El_1 = (\wedge A_i) \Rightarrow (\vee B_j)$ avec $\mu(El_1^+) \subset Dl_i^+$
$El_3 = (\wedge C_k) \Rightarrow (\vee D_l)$ avec $\mu(El_3^-) \subset Dl_j^-$

On sait que $Dl = Dl_n$ est obtenu par coupure à partir de Dl_i et Dl_j disons sur une formule E.

Plusieurs cas se présentent :
si aucun des $\mu(B_j)$ n'est égal à E alors El_1 et μ conviennent.
si aucun des $\mu(C_k)$ n'est égal à E alors El_3 et μ conviennent.

16 Preuve RC 5/6 — cas intéressant

Si ces cas ne s'appliquent pas,
on peut unifier certains B_j de El_1 avec certains C_k de El_3
(ou de El_2, car simple renommage σ de El_2 vers El_3),
et soit ϕ un unificateur le plus général de ces B_j et ces C_k
que $\mu \circ \sigma$ (σ sans effet sur El_1) envoient sur E.

Comme μ unifie aussi ces ces B_j et ces C_k
et que ϕ est un unificateur le plus général
il existe une substitution ψ tel que $\mu = \psi \circ \phi$.

Soit El_4 la clause obtenue par résolution à partir de El_3 et El_1
avec l'unificateur le plus général ϕ.

17 Preuve RC 6/6 — cas intéressant

On peut alors appliquer la règle de résolution
à El_1 et El_3 pour faire disparaitre
les $\mu(B_j) = E$ et les $\mu(C_k) = E$,
mais en prenant un unificateur le plus général ϕ de El_1 et El_3.

Ensuite on voit que $\psi(El_4^-) \subset Dl_n^-$ et $\psi(El_4^+) \subset Dl_n^+$ en effet $\psi \circ \phi(X) = \mu(X)$ pour X parmi les A_i, B_j, C_k, D_l.

18 Conséquences 1/2

Comme vu ci-avant, le lemme RC dont la preuve est un peu difficile, permet d'affirmer (en se ramenant à la résolution propositionnelle par remplacement ds variables par les termes) que si un ensemble de formules $(F_n)_{n \in I}$ n'est pas satisfiable alors la méthode de résolution obtient $\perp$ à partir des $(F_n)_{n \in I}$ (écrite comme des clauses).

Nous avons vu que F non satisfiable équivaut à F réfutable par résolution. Bien sûr F non satisfiable équivaut à $\neg F$ vraie pour toute interprétation. Et $\neg F$ vraie dans toute interprétation équivaut à $\neg F$ démontrable dans le calcul des séquents. (chapitre complétude à la Henkin)

19 Conséquences 2/2

En résumé des chapitres sur la complétude,
les diverses notions de vérité vue dans ce cours, coïncident :

- vérité dans les modèles
- dérivabilité en calcul des séquents
- réfutabilité par résolution

Plus précisément :

F instatisfiable (c.-à-d.$\neg F$ tautologie)
équivaut à
$\neg F$ démontrable dans le calcul des séquents
équivaut à
F réfutable par résolution

Joli, non ?