Cours 6 :
La (vraie) Dualité

Eric Bourreau

+ Vincent Boudet

La cimenterie : Estimer un majorant : le Dual

$$\begin{cases} Max \quad \sum_{i=1}^{2} p_i x_i = 50x_1 + 70x_2 \\ \qquad s.c \quad \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i \le b_i \qquad j = 1, \dots ,2 \\ \quad 40x_1 + 20x_2 \le 420 \quad (1) \\ \quad 20x_1 + 30x_2 \le 510 \quad (2) \\ \qquad et \ \ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Min \quad \sum_{j=1}^{2} b_j y_j = 420y_1 + 510y_2 \\ \qquad s.c \quad \sum_{j=1}^{2} a_{ji} y_j \le p_i \qquad i = 1, \dots ,2 \\ \quad 40y_1 + 20y_2 \ge 50 \quad (3) \\ \quad 20y_1 + 30y_2 \ge 70 \quad (4) \\ \qquad et \ \ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40x_1 + 20x_2 \le 420 \quad (1) \\ 20x_1 + 30x_2 \le 510 \quad (2) \\ 160x_1 + 80x_2 \le 1680 \quad 4(1) \\ 60x_1 + 90x_2 \le 1530 \quad 3(2) \\ 140x_1 + 70x_2 \le 1470 \quad 3.5(1) \\ 50x_1 + 75x_2 \le 1275 \quad \frac{5}{6}3(2) \\ \alpha(40x_1 + 20x_2) + \beta(20x_1 + 30x_2) \le 420\alpha + 510\beta \quad \alpha(1) + \beta(2) \end{cases}$$

La Dualité au sens Matriciel

Problèmes primal et dual

Problème primal (P)

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \\ \text{s.c.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leqslant b_j, & j = 1, \ldots, m \\ \text{et} & x_i \geqslant 0, & i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Problème dual (D) du problème (P)

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} b_j y_j & \\ \text{s.c.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \geqslant c_i, & i = 1, \ldots, n \\ \text{et} & y_j \geqslant 0, & j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Le Dual du Dual revient au Primal !

Les règles de transformations

Correspondances entre problème dual et problème primal

Primal	$\Longrightarrow$	Dual
maximisation		minimisation
contrainte $j :\leqslant$		variable $y_j \geqslant 0$
contrainte $j : \geqslant$		variable $y_j \leqslant 0$
contrainte $j : =$		variable $y_j \lesseqgtr 0$
variable $x_i \geqslant 0$		contrainte $i : \geqslant$
variable $x_i \leqslant 0$		contrainte $i : \leqslant$
variable $x_i \lesseqgtr 0$		contrainte $i : =$
Dual	$\Longleftarrow$	Primal

Théorèmes 1 et 2

- Pour chaque solution réalisable *x* du primal en maximisation
- Pour chaque solution réalisable *y* du dual en minimisation

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq \sum_{j}^{m} b_j y_j$$

DUALITE FAIBLE

- Pour chaque solution optimale *x** du primal en maximisation
- Pour chaque solution optimale *y** du dual en minimisation

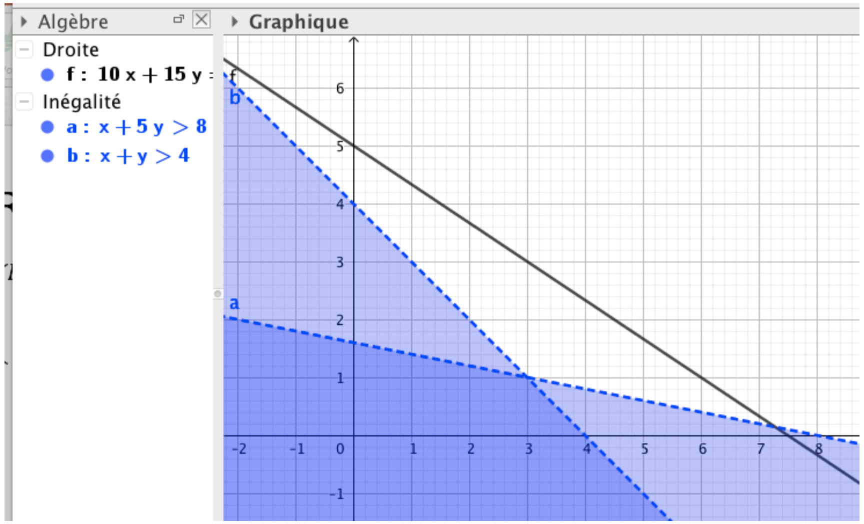
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* = \sum_{j}^{m} b_j y_j^*$$

DUALITE FORTE

Résoudre le primal ou le dual

$$\begin{cases} Min \quad 10x_1 + 15x_2 \\ \qquad x_1 + 5x_2 \geq 8 \\ \qquad x_1 + x_2 \geq 4 \\ \quad et \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Max \quad 8y_1 + 4y_2 \\ \qquad y_1 + y_2 \leq 10 \\ \qquad 5y_1 + y_2 \leq 15 \\ \quad et \;\; y \geq 0 \end{cases}$$



	4	2		- y_1 entre
3	$^{1}/_{5}$	$-^{4}/_{5}$	7	- *argmin*$(^{10}/_{1};\ ^{15}/_{5})$
1	$-^{1}/_{5}$	$-^{1}/_{5}$	3	- $s_4$sort
	$-^{8}/_{5}$	$^{12}/_{5}$	24	

Sol(3,0) écart (0,7)

	4	3		- y_2 entre
2	$-\,^{1}/_{4}$	$-^{5}/_{4}$	$^{35}/_{4}$	- *argmin*$(^{7}/_{^{4}/_{5}};\ ^{3}/_{^{1}/_{5}})$
1	$-^{3}/_{20}$	$^{1}/_{4}$	$^{5}/_{4}$	- $s_3$sort
	$-^{11}/_{5}$	-3	45	OPT !

Théorème 3 : les écarts complémentaires

- On sait que les variables d'écarts et les variables duales sont liées
- Contrainte j saturée (active)

$$x_{n+j}^* = 0 \qquad\qquad y_j^* > 0$$

- Contrainte j non saturée (libre)

$$x_{n+j}^* > 0 \qquad\qquad y_j^* = 0$$

- On a toujours

$$x_{n+j}^* y_j^* = 0 \qquad\qquad y_{m+i}^* x_i^* = 0$$

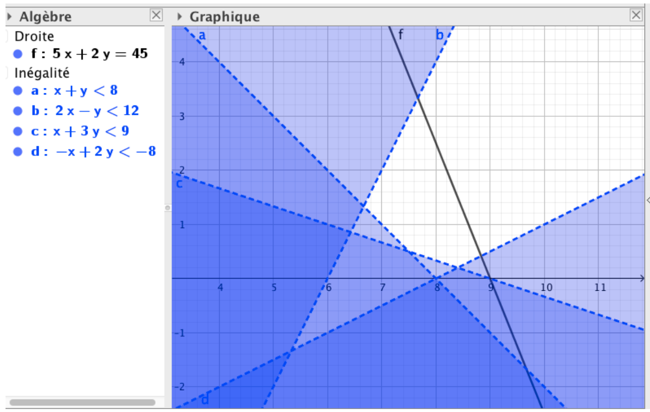
- Les écarts complémentaires disent

$$\left(b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i^*\right) y_j^* = 0 \qquad\qquad \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, y_j^* - c_i\right) x_i^* = 0$$

Application numérique 1/2

Pour chaque solution réalisable du primal, il est possible de calculer une solution duale qui lui correspond grâce aux écarts complémentaires (et réciproquement)

$$\begin{cases} Max \quad 8x_1 + 12x_2 + 9x_3 - 8x_4 \\ \qquad\qquad x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 5 \\ \qquad\qquad x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ \qquad\qquad\qquad et \;\; x \geq 0 \end{cases}$$



Solution graphique (intersection a et b) => x=20/3 et y=4/3, min z=36

Application numérique 2/2

- La solution duale sature la contrainte (a) et (b) mais pas (c) et (d),
  - Au niveau des écarts complémentaires x_3 et x_4 sont nuls
  - Ce sont x_1 et x_2 qui sont non nuls.

$$\begin{cases} Max \quad 8x_1 + 12x_2 \cancel{+ 9x_3 - 8x_4} \\ x_1 + 2x_2 \cancel{+ x_3 - x_4} \leq 5 \\ x_1 - x_2 \cancel{+ 3x_3 + 2x_4} \leq 2 \\ et \;\; x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Max \quad 8x_1 + 12x_2 = 36 \\ 0x_1 + 3x_2 = 3 \\ 3x_1 - 0x_2 = 9 \\ et \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

- La solution primale est x_1=3 et x_2=1 pour le coût max de 36