Sémantique de la logique du premier ordre

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Licence L3 2019-2020

Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

Définitions préliminaires

- $\mathcal{V} \equiv$ ensemble de variables d'individu x, y, etc. ;
- $\mathcal{S_F} \equiv$ ensemble de symboles de fonctions f, g, etc. ;
- $\mathcal{S_P} \equiv$ ensemble de symboles de prédicats P, Q, etc. ;
- $\mathcal{S_F} \cap \mathcal{S_P} = \emptyset$;
- Arité (nombre d'arguments) $m : \mathcal{S_F} \cup \mathcal{S_P} \to \mathbb{N}$:
  - Exemple : pour $f(x, y)$ avec $f \in \mathcal{S_F}$, $m(f) = 2$;
  - Exemple : pour $P(x, y, z)$ avec $f \in \mathcal{S_P}$, $m(P) = 3$.

Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

Termes du premier ordre

- Plus petit ensemble $\mathcal{T}$ t.q. :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $x \in \mathcal{T}$;
  - Si $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$.
- Les constantes sont des fonctions d'arité 0 ;
- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans nos exemples.

Formules du premier ordre

- Plus petit ensemble $\mathcal{F}$ t.q. :
  - Si $P \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$;
  - $\bot, \top \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\neg\Phi \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors $\Phi \wedge \Phi', \Phi \vee \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$;
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\forall x.\Phi, \exists x.\Phi \in \mathcal{F}$.

Sémantiques

Logique classique

- Une formule est toujours vraie ou fausse ;
- Que je puisse en démontrer la validité ou non ;
- Logique bi-valuée (vrai, faux) ;
- Logique du « tiers exclu » : $A \vee \neg A$.

Logique intuitionniste ou constructive

- Une formule est vraie, fausse, ou « on ne sait pas » ;
- Si on ne sait en démontrer la validité, alors « on ne sait pas » ;
- Logique tri-valuée d'une certaine manière ;
- Le « tiers exclu » n'est pas admis dans cette logique.

Sémantique (classique)

Interprétation

- Une interprétation I est un ensemble non vide D_I, appelé le domaine de l'interprétation, muni d'éléments $I(c)$ de D_I pour chaque symbole de constante (fonction d'arité 0), et d'une application $I(P)$ de D_I^n vers $\mathcal{B}$ pour chaque symbole de prédicat P d'arité n.

Affectation

- Une affectation ρ est une application de $\mathcal{V}$ vers D_I ;
- Pour toute affectation ρ, $\rho[v/x]$ est l'affectation envoyant chaque variable y autre que x vers $\rho(y)$, et x vers v.

Remarque

- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans la sémantique.

Sémantique (classique)

Termes

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $[\![x]\!]^I_\rho = \rho(x)$;
  - Si $c \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité 0 (constante) alors $[\![c]\!]^I_\rho = I(c)$.

Sémantique (classique)

Prédicats

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(P)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]^I_\rho)$;

Sémantique (classique)

Formules propositionnelles

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - $[\![\top]\!]^I_\rho = T$, $[\![\bot]\!]^I_\rho = F$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $[\![\neg\Phi]\!]^I_\rho = \neg_\mathcal{B}[\![\Phi]\!]^I_\rho$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\Phi \wedge \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \vee \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \vee_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Rightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Rightarrow_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Leftrightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Leftrightarrow_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$.
  - où $\neg_\mathcal{B}$, $\wedge_\mathcal{B}$, $\vee_\mathcal{B}$, $\Rightarrow_\mathcal{B}$, et $\Leftrightarrow_\mathcal{B}$ sont les fonctions d'interprétation de la logique propositionnelle.

Sémantique (classique)

Quantificateurs

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\forall x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$;
    - $[\![\exists x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigvee_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$.
  - où $\bigwedge$ est la conjonction distribuée et $\bigvee$ la disjonction distribuée :
    - $\bigwedge_{v \in D_I} f(v) = f(v_0) \wedge_{\mathcal{B}} f(v_1) \wedge_{\mathcal{B}} \ldots$, avec $v_0, v_1, \ldots \in D_I$;
    - $\bigvee_{v \in D_I} f(v) = f(v_0) \vee_{\mathcal{B}} f(v_1) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$, avec $v_0, v_1, \ldots \in D_I$.

Sémantique (classique)

Définition

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $[\![x]\!]^I_\rho = \rho(x)$;
  - Si $c \in \mathcal{S_F}$ d'arité 0 (constante) alors $[\![c]\!]^I_\rho = I(c)$;
  - Si $P \in \mathcal{S_P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(P)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_1]\!]^I_\rho)$;
  - $[\![\top]\!]^I_\rho = T$, $[\![\bot]\!]^I_\rho = F$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $[\![\neg\Phi]\!]^I_\rho = \neg_{\mathcal{B}}[\![\Phi]\!]^I_\rho$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\Phi \wedge \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \vee \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \vee_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Rightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Leftrightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$.
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\forall x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$;
    - $[\![\exists x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigvee_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$.

Sémantique (classique)

Remarque

- La sémantique donnée est valable pour des formules closes ou non ;
- Si une formule Φ est close, sa sémantique $[\![\Phi]\!]^{I}_{\rho}$ ne dépend pas de ρ ;
- Pour une formule close Φ, sa sémantique sera donc notée $[\![\Phi]\!]^{I}$;
- Par la suite, nous ne considérerons que des formules closes.

Sémantique

Vocabulaire

- Soit Φ une formule et I une interprétation ;
- I est un modèle de Φ ou I satisfait Φ, noté $I \models \Phi$, ssi $[\![\Phi]\!]^I = T$;
- Un ensemble G de formules entraîne Φ, noté $G \models \Phi$, ssi toutes les interprétations satisfaisant toutes les formules de G en même temps (les modèles de G) sont aussi des modèles de Φ, c'est-à-dire quand $I \models \Phi'$ pour tout $\Phi' \in G$ implique $I \models \Phi$;
- Φ est valide ssi Φ est vraie dans toute interprétation ($[\![\Phi]\!]^I = T$ pour tout I, noté $\models \Phi$), et est invalide sinon ;
- Une formule valide est aussi appelée une tautologie ;
- Φ est satisfiable ssi elle est vraie dans au moins une interprétation ($[\![\Phi]\!]^I = T$ pour un certain I, c'est-à-dire elle a un modèle), et est insatisfiable sinon.

Sémantique

Vocabulaire

- Toutes les formules valides sont satisfiables, et toutes les formules insatisfiables sont invalides ;
- Ceci divise l'espace des formules en trois catégories :
  - Les valides (toujours vraies) ;
  - Les insatisfiables (toujours fausses) ;
  - Les formules contingentes (parfois vraies, parfois fausses).
- La validité et l'insatisfiabilité se correspondent via négation : Φ est valide ssi $\neg\Phi$ est insatisfiable, Φ est insatisfiable ssi $\neg\Phi$ est valide.

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_\mathcal{B} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_\mathcal{B} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_\mathcal{B} T = T$.

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$ $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$ $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$ $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$ $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$ $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$ $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, a_1\}$, $I(a) = a_0$, et $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\forall x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{\mathbf{a_0}\}} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{\mathbf{a_0}\}} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{\mathbf{a_0}\}} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{\mathbf{a_0}\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) =$
    $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$ est donc contingente.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $\llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho =$
    $\llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_\mathcal{B} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots = T \Rightarrow_\mathcal{B} T \vee_\mathcal{B} \ldots = T \Rightarrow_\mathcal{B} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_\mathcal{B} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots = T \Rightarrow_\mathcal{B} T \vee_\mathcal{B} \ldots = T \Rightarrow_\mathcal{B} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho = [\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_\mathcal{B} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = I(P)(I(a)) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} = I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots = T \Rightarrow_\mathcal{B} T \vee_\mathcal{B} \ldots = T \Rightarrow_\mathcal{B} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_\mathcal{B} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots = T \Rightarrow_\mathcal{B} T \vee_\mathcal{B} \ldots = T \Rightarrow_\mathcal{B} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_\mathcal{B} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots = T \Rightarrow_\mathcal{B} T \vee_\mathcal{B} \ldots = T \Rightarrow_\mathcal{B} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$ est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$, mais la valeur de $I(P)$ en a_0 est quelconque ;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$ $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$ $I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$ $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$ $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) =$ $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$ $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$ $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$ $I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$ $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$ $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) =$ $T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(T \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} T =$ $T \wedge_\mathcal{B} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(T \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} T =$
      $T \wedge_\mathcal{B} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \land \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \land \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \land \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \land_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) =$
      $T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \lor_{\mathcal{B}} \ldots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \lor_{\mathcal{B}} \ldots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
      $T \land_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(T \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} T =$
      $T \wedge_\mathcal{B} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(T \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} T =$
      $T \wedge_\mathcal{B} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(T \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} T =$
      $T \wedge_\mathcal{B} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(T \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} T =$
      $T \wedge_\mathcal{B} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$ $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$ $I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$ $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$ $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$ $T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(T \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} T =$ $T \wedge_\mathcal{B} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(T \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} T =$
      $T \wedge_\mathcal{B} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \dots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(T \vee_\mathcal{B} \dots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} T =$
      $T \wedge_\mathcal{B} F = F$.

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(I(P)(a_0) \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B}(T \vee_\mathcal{B} \ldots) = T \wedge_\mathcal{B} \neg_\mathcal{B} T =$
      $T \wedge_\mathcal{B} F = F.$

Exemples

Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$ est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0 \in D_I$ et $I(a) = a_0$;
- Démonstration :
  - $[\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I = [\![P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $[\![P(a)]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\neg\exists x.P(x)]\!]^I_\rho = I(P)([\![a]\!]^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}[\![\exists x.P(x)]\!]^I_\rho =$
    $I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$
    $I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}$;
  - Deux cas selon $I(P)(a_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$: $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) = F$;
    - $I(P)(a_0) = T$: $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v\in D_I} I(P)(v) =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$
      $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_\mathcal{B} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_\mathcal{B} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_\mathcal{B} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_\mathcal{B} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)(I(a)) \wedge_\mathcal{B} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} I(P)(b_0)) \vee_\mathcal{B}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_\mathcal{B} I(P)(a_0) \wedge_\mathcal{B} I(P)(b_0)) \vee_\mathcal{B} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$ est valide ;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec $a_0, b_0 \in D_I$, $I(a) = a_0$, et $I(b) = b_0$;
- Démonstration :
  - $[\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I = [\![\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_\rho =$
    $\bigvee_{v \in D_I} [\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigvee_{v \in D_I} ([\![P(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)[\![x]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(a)]\!]^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} [\![P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)\rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)([\![a]\!]^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)([\![b]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) =$
    $\bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) =$
    $(I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$
    $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = \mathcal{F}.$

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$:
      $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$:
      $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$:
      $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$:
      $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$:
      $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$:
      $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$:
      $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$:
      $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$:
      $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$:
      $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$:
      $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$:
      $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots;$
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$:
      $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$:
      $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$:
      $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$:
      $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Exotisme de la logique classique

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$ $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \ldots$;
  - Quatre cas selon $I(P)(a_0)$ et $I(P)(b_0)$:
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = F$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = F$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$;
    - $I(P)(a_0) = T$, $I(P)(b_0) = T$: $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T$.
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que $[\![t]\!]^I = v$ et $[\![P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)]\!]^I_{\rho[v/x]} = T$!

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :
  - Tout homme est mortel ;
  - Or Socrate est un homme ;
  - Donc Socrate est mortel.
- Modélisation :
  - $H(x) \equiv x$ est un homme ;
  - $M(x) \equiv x$ est mortel ;
  - $s \equiv$ Socrate.

  - $\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)$ $(\mathcal{H}_1)$;
  - $H(s)$ $(\mathcal{H}_2)$;
  - $M(s)$ $(\mathcal{H}_3)$.

On doit démontrer : $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$.

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :
  - Tout homme est mortel ;
  - Or Socrate est un homme ;
  - Donc Socrate est mortel.
- Modélisation :
  - $H(x) \equiv x$ est un homme ;
  - $M(x) \equiv x$ est mortel ;
  - $s \equiv$ Socrate.

  - $\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)$ $(\mathcal{H}_1)$;
  - $H(s)$ $(\mathcal{H}_2)$;
  - $M(s)$ $(\mathcal{H}_3)$.

On doit démontrer : $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$.

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :
  - Tout homme est mortel ;
  - Or Socrate est un homme ;
  - Donc Socrate est mortel.
- Modélisation :
  - $H(x) \equiv x$ est un homme ;
  - $M(x) \equiv x$ est mortel ;
  - $s \equiv$ Socrate.

  - $\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)$ $(\mathcal{H}_1)$;
  - $H(s)$ $(\mathcal{H}_2)$;
  - $M(s)$ $(\mathcal{H}_3)$.

On doit démontrer : $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$.

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :
  - Tout homme est mortel ;
  - Or Socrate est un homme ;
  - Donc Socrate est mortel.
- Modélisation :
  - $H(x) \equiv x$ est un homme ;
  - $M(x) \equiv x$ est mortel ;
  - $s \equiv$ Socrate.

  - $\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)$ $(\mathcal{H}_1)$;
  - $H(s)$ $(\mathcal{H}_2)$;
  - $M(s)$ $(\mathcal{H}_3)$.

On doit démontrer : $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$.

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I}[\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I}([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I}(I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I}(I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I}(I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_\mathcal{B} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$
      $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
      $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
      $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
      $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I}([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I}(I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I}(I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I}(I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I}([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I}(I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I}(I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I}(I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$
      $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I}([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
      $\bigwedge_{v \in D_I}(I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
      $\bigwedge_{v \in D_I}(I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
      $\bigwedge_{v \in D_I}(I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_\mathcal{B} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_\mathcal{B} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$
      $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
      $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
      $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
      $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).

Exemples

Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec $s_0 \in D_I$ et $I(s) = s_0$, et telle que $I \models \mathcal{H}_1$ et $I \models \mathcal{H}_2$;
  - On doit démontrer que $I \models \mathcal{H}_3$, à savoir que $[\![M(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![M(s)]\!]^I = [\![M(s)]\!]^I_\rho = I(M)([\![s]\!]^I_\rho) = I(M)(s_0) = T$ (3).
  - $I \models \mathcal{H}_1$ signifie que $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$:
    - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$ $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$;
    - Ce qui implique que : $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ (1).
  - $I \models \mathcal{H}_2$ signifie que $[\![H(s)]\!]^I = T$:
    - $[\![H(s)]\!]^I = [\![H(s)]\!]^I_\rho = I(H)([\![s]\!]^I_\rho) = I(H)(s_0) = T$ (2).
  - En remplaçant (2) dans (1), on obtient : $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$, ce qui implique que $I(M)(s_0) = T$ (3).