Complétude et décidabilité du calcul propositionnel (calcul des séquents)

HLIN602 Logique II 2019-20 Retoré

mercredi 29 janvier 2020

1. Retour sur le calcul propositionnel

Afin d'établir la complétude du calcul des prédicats à la fin de ce cours, nous allons revenir sur le calcul propositionnel, srutotu pour que vous compreniez bien sur un cas simple la signification de la **complétude** d'un système logique :

— preuves en calculs des séquents,
— propriétés du calcul des séquents (+/- vues)
— complétude (pour l'étendre au calcul des prédicats)
— compacité
— décidabilité

2. Séquents : déf. formelle

On manipule des expressions appelées sequents :

$$A_1, \ldots, A_k \vdash B_1, \ldots, B_l$$

— $A_1, \ldots, A_k$ sont des formules appelées hypothèses du séquent. Si $k = 0$, le séquent n'a pas d'hypothèse.
— $B_1, \ldots, B_l$ sont des formules appelées conclusions du séquent. Si $l = 0$, le séquent n'a pas de conclusion.

3. Signification d'un séquent

Un séquent $A_1, \ldots, A_k \vdash B_1, \ldots, B_l$
signifie que
la conjonction des $A_1, \ldots, A_k$ *entraîne la disjonction des* $B_1, \ldots, B_l$
ou encore
si toutes les formules de $A_1, \ldots, A_k$ *sont vraies alors l'une au moins des formules* $B_1, \ldots, B_l$ *est vraie.*

4. Séquent et valeurs de vérité

Conséquemment on appellera *formule associée au séquent* la formule

$$(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow (B_1 \vee \cdots \vee B_l)$$

[Si $k = 0$ alors $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) = \top$ et si $l = 0$ alors $(B_1 \vee \cdots \vee B_l) = \perp$]
Etant donnée une valuation, on dira dira qu'un séquent est vrai ou faux si et seulement si la formule associée l'est pour cette valuation.

5. Démonstrations ou preuves dans le calcul des séquents

On construit des preuves qui sont des arbres.

— Les feuilles sont des axiomes

— Les branchements sont des règles du calcul des séquents.

Nous utiliserons les connecteurs $\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$.

Les axiomes sont tous les séquents de la forme : $\Gamma \vdash \Delta$ tel que Γ et Δ sont des suites de formules atomiques qui contiennent une même proposition atomique. [On peut également autoriser comme axiomes les séquents $\Gamma \vdash \Delta$ tel que Γ et Δ comportent une proposition (non nécessairement atomique) en commun.]

Les majuscules grecques désignent des suites de formules.

6. Règles "et" et "ou"

Règles

$$\frac{A, B, \Delta \vdash \Theta}{(A \wedge B), \Delta \vdash \Theta} \wedge_g$$

$$\frac{\Theta \vdash \Gamma, A \qquad \Theta \vdash \Gamma, B}{\Theta \vdash \Gamma, (A \wedge B)} \wedge_d$$

$$\frac{A, \Delta \vdash \Theta \qquad B, \Delta \vdash \Theta}{(A \vee B), \Delta \vdash \Theta} \vee_g$$

$$\frac{\Theta \vdash \Gamma, A, B}{\Theta \vdash \Gamma, (A \vee B)} \vee_d$$

7. Règles "implication" et "négation"

Règles

$$\frac{\Delta \vdash \Theta, A \qquad B, \Delta \vdash \Theta}{(A \Rightarrow B), \Delta \vdash \Theta} \Rightarrow_g$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B), \Delta} \Rightarrow_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Theta}{\Gamma, (\neg A) \vdash \Theta} \neg_g \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Theta}{\Gamma \vdash (\neg A), \Theta} \neg_d$$

8. Un exemple de démonstration

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{axiome}{\mathbf{q}, p, p, s \vdash \mathbf{q}, t, t}
    }{q, p, (\neg q), p, s \vdash t, t}\ \neg_g
  }{q, p, (\neg q), (p \wedge s) \vdash t, t}\ \wedge g
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{axiome}{r, \mathbf{q}, p, p, s \vdash \mathbf{q}, t}
    }{r, q, p, (\neg q), p, s \vdash t}\ \neg_g
  }{r, q, p, (\neg q), (p \wedge s) \vdash t}\ \wedge g
}{q, p, (\neg q), (t \Rightarrow r), (p \wedge s) \vdash t}\ \Rightarrow_g
$$

9. Un autre exemple

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$q, p, p, s \vdash q, t, t$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$q, p, (\neg q), p, s \vdash t, t$}
\RightLabel{$\wedge g$}
\UnaryInfC{$q, p, (\neg q), (p \wedge s) \vdash t, t$}
\AxiomC{$r, q, p, p, s \vdash q, t$}
\RightLabel{$\neg g$}
\UnaryInfC{$r, q, p, (\neg q), p, s \vdash t$}
\RightLabel{$\wedge g$}
\UnaryInfC{$r, q, p, (\neg q), (p \wedge s) \vdash t$}
\RightLabel{$\Rightarrow g$}
\BinaryInfC{$q, p, (\neg q), (t \Rightarrow r), (p \wedge s) \vdash t$}
\AxiomC{$p, (\neg q), (t \Rightarrow r), (p \wedge s) \vdash p, t$}
\RightLabel{$\wedge g$}
\BinaryInfC{$p, (\neg q), (p \Rightarrow q), (t \Rightarrow r), (p \wedge s) \vdash t$}
\RightLabel{$\wedge g$}
\UnaryInfC{$(p \wedge (\neg q)), (p \Rightarrow q), (t \Rightarrow r), (p \wedge s) \vdash p, t$}
\end{prooftree}
$$

10. Validité des axiomes

Remarquons que les axiomes corrrespondent à des formules universellement valides, c.-à-d.

Propriété 8 *Un axiome*

$$a_1, \ldots, a_k \vdash b_1, \ldots, b_l$$

avec $a_i = b_j$ *(pour un* i *et un* j *t.q.* $1 \leq i \leq k$ *et* $1 \leq j \leq l$*) a une formule associée universellement valide —* $v((a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) \Rightarrow (b_1 \vee \cdots \vee b_l)) = 1$ *pour toute valuation* v*.*

$$a_1, \ldots, a_k \vdash b_1, \ldots, b_l$$

avec $a_i = b_j$ est valide, en effet :

— si $v(a_i) = v(b_j) = 1$ alors $v(b_1 \vee \cdots \vee b_l) = 1$ et donc $v((a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) \Rightarrow (b_1 \vee \cdots \vee b_l)) = 1$.

— si $v(a_i) = v(b_j) = 0$ alors $v(a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) = 0$ et donc $v((a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) \Rightarrow (b_1 \vee \cdots \vee b_l)) = 1$.

11. Validité des règles

Propriété 9 *Etant donnée une valuation* v*,*
si tous les séquents prémisses de la règle R *(1 ou 2 suivant* R*) valent* 1*,*
alors le séquent conclusion de R *vaut* 1 *aussi.*

Cette propriété, plus la validité des axiomes (prop. 8), entraîne que tous les séquents démontrables sont vrais pour toute valuation. En particulier si $\vdash F$ est démontrable alors F est une tautologie.

Ici nous ne ne vérifierons que la validité des règles $\Rightarrow_g$ et $\Rightarrow_d$, la vérificationd es autres règles étant du même acabit.

12. Validité de la règle $\Rightarrow_d$

Cette règle consiste à dire que si "on a montré B avec une hypothèse A", alors "on a montré $A \Rightarrow B$ *sans* l'hypothèse A."

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta \quad \textbf{P}}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B), \Delta \quad \textbf{C}} \Rightarrow_d$$

Soit v une valuation. Si $v(\textbf{P}) = 1$ alors l'une des formules de B, Δ vaut 1 (a) ou l'une des formules de A, Γ vaut 0 (b).

13. Validité de la règle $\Rightarrow_d$ — suite

(a) Dans le premier cas,

si $v(B) = 1$ alors $v(A \Rightarrow B) = 1$ et l'une des formules de $\Delta, (A \Rightarrow B)$ vaut 1, donc **C** vaut 1.

Si $v(B) = 0$ alors une formule de Δ vaut 1 et donc une formule de $\Delta, (A \Rightarrow B)$ vaut 1 et finalement C vaut 1.

14. Validité de la règle $\Rightarrow_d$ — fin

(b) Dans le second cas,

si $v(A) = 0$ alors $v(A \Rightarrow B) = 1$ et l'une des formules de $\Delta, (A \Rightarrow B)$ vaut 1, donc **C** vaut 1.

Sinon, une des formules de Γ vaut 0, et par conséquent **C** vaut 1.

15. Validité de la règle $\Rightarrow_g$

Cette règle est moins intuitive.

$$\frac{\Delta \vdash \Theta, A \quad \textbf{P1} \qquad\qquad B, \Delta \vdash \Theta \quad \textbf{P2}}{(A \Rightarrow B), \Delta \vdash \Theta \quad \textbf{C}} \Rightarrow_g$$

Soit v une valuation, telle que $v(\textbf{P1}) = 1$ et $v(\textbf{P2}) = 1$. On sait donc que

(a) (l'une des formules de Δ vaut 0 (a1) OU l'une des formules de A, Θ vaut 1 (a2))

ET (b)(l'une des formules de B, Δ vaut 0 (b1) ou l'une des formule de Θ vaut 1 (b2)).

16. Validité de la règle $\Rightarrow_g$ — suite

Si l'une des formule de Θ vaut 1 alors **C** vaut 1.

Si l'une des formules de Δ vaut 0, alors **C** vaut 0.

Il reste à examiner la valeur de **C** lorsque toutes les formules de Δ valent 1 (I) et toutes les formules de Θ valent 0 (II).
— D'après (a) et (I), une des formules de A, Θ vaut 1 (a2), et d'après (II) on a $v(A) = 1$.
— D'après (b) et (II), une des formules de B, Δ vaut 0 (b2), et d'après (I) $v(B) = 0$.
Par conséquent $v(A \Rightarrow B) = 0$, l'une des formules de $(A \Rightarrow B), \Delta$ vaut 0, et **C** vaut donc 1.

17. Validité

Propriété 10 (validité) *Si un séquent est démontrable, alors la formule correspondante est une tautologie.*

Cette propriété se vérifie aisément par récurrence sur la hauteur de l'arbre de démonstration à partir des propriétés 8 et 9.

18. Justification de la validité

Considérons une valuation v.

Les axiomes correspondent à des formules vraies pour v (puisque ce sont des tautologies, cf. 8).

Or on sait d'après la prop. 9 que si les prémisses d'une règle sont vraies pour v alors la conclusion de la règle est vraie pour v.

Donc la formule associée au séquent conclusion de la démonstration est vraie pour v.

Comme l'argument fonctionne pour tout v, le séquent associé à la conclusion de la démonstration est vrai pour toute valuation.

19. Réversibilité des règles

Chaque règle R du calcul des séquents vérifie en outre la propriété suivante :

Propriété 11 *Etant donnée une valuation v, si le séquent conclusion de la règle R est vrai, alors les séquents prémisses de la règle R sont vrais.*

Ici nous ne ne vérifierons que la réversibilité des règles $\Rightarrow_g$ et $\Rightarrow_d$, la vérificationd es autres règles étant du même acabit.

20. Reversibilité (11) de $\Rightarrow_g$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Theta \quad \textbf{P1} \qquad\qquad B, \Delta \vdash \Theta \quad \textbf{P2}}{(A \Rightarrow B), \Delta \vdash \Theta \quad \textbf{C}} \Rightarrow_g$$

Soit v une valuation. Si le séquent conclusion de la règle est vrai pour v, c'est que l'une des formules de $(A \Rightarrow B), \Delta$ est fausse ou que l'une des formules de Θ est vraie.

Si l'une des formules de Δ est fausse, alors **P1** est vrai, et **P2** aussi. Si l'une des formules de Θ est vraie, alors **P1** est vrai, et **P2** aussi.

21. Reversibilité (11) de $\Rightarrow_g$ suite et fin

$$\dfrac{\Delta \vdash A, \Theta \quad \textbf{P1} \qquad\qquad B, \Delta \vdash \Theta \quad \textbf{P2}}{(A \Rightarrow B), \Delta \vdash \Theta \quad \textbf{C}} \Rightarrow_g$$

On s'est ramené au cas où toutes les formules de Δ sont vraies, où toutes les formules de Θ sont fausses, et où $A \Rightarrow B$ est faux. On a donc A vrai et B faux.

Comme A est vrai **P1** est vrai et comme B est faux, **P2** est vrai.

22. Reversibilité (11) de $\Rightarrow_d$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta \quad \textbf{P}}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B), \Delta \quad \textbf{C}} \Rightarrow_d$$

Soit v une valuation. Si **C** est vrai, c'est que l'une des formules de Γ est fausse ou que l'une des formules de $\Delta, (A \Rightarrow B), \Theta$ est vraie.

Si l'une des formules de Γ est fausse, **P** est vrai. Si l'une des formules de Γ est vraie, **P** est vrai.

Si aucun de ces deux cas ne s'applique, c'est que $A \Rightarrow B$ est vrai. Si A est faux, **P** est vrai. Si A est vrai, B l'est aussi, et donc **P** est vrai.

23. Propriétés

En combinant les prop. 11 et 9 on obtient :

Propriété 12 *Soit v une valuation ; alors pour toute règle R du calcul des séquents :*

(i) tous les séquents prémisses de la règle R (1 ou 2 suivant R) valent 1,
si et seulement si
(ii) le séquent conclusion de R vaut 1.

si (i) alors (ii) est la prop. 9
si (ii) alors (i) est la contraposée de la prop. 11.

24. Un algorithme de démonstration automatique

Algorithme 13 *On construit un arbre de séquents de sorte que les branchements soient des règles. Si les feuilles sont des axiomes, alors la formule est démontrable, et sinon on peut produire une valuation qui rend la formule fausse.*

1. *L'arbre est initialisé au séquent à démontrer/réfuter.*
2. *Si toutes les feuilles ne contiennent que des propositions atomiques, c'est fini.*
3. *Si une feuille est un séquent qui contient une proposition composée, écrire en dessus les prémisses de la règle qui fabrique cette formule, et on retourne en 2*

25. Une remarque

Une fois choisie la formule à décomposer, les prémisses sont totalement déterminées, et ce choix n'influe pas sur le fait qu'on obtienne ou non une démonstration.

26. Propriétés de l’algorithme

Propriété 14 *L’algorithme appliqué à un un séquent* $a_1, \dots, a_k \vdash b_1, \dots, b_l$ *s’arrête*

(1) soit sur une démonstration et pour toute valuation $v((a_1, \dots, a_k) \Rightarrow (b_1 \vee \dots \vee b_l)) = 1$
(2) soit sur un arbre de séquents dont les branchements sont des règles, et dont au moins une feuille n’est pas un axiome, et il existe une valuation v *telle que* $v((a_1, \dots, a_k) \Rightarrow (b_1 \vee \dots \vee b_l)) = 0$

27. Propriétés de l’algorithme (suite)

L’arbre construit ne peut avoir de branche infinie : le nombre de connecteurs dans une prémisse d’une règle est toujours moindre que le nombre de connecteurs dans la conclusion de la règle.
Lorsque l’algorithme est fini, toutes les feuilles sont des séquents ne contenant que des propositions atomiques,
(1) soit qui sont toutes des axiomes (et on aune démonstration)
(2) soit dont l’une au moins n’est pas un axiome

28. Propriétés de l’algorithme (suite)

(1) Si toutes les feuilles sont des axiomes, on a une démonstration et la formule correspondant au séquent démontré est donc une tautologie d’après la prop. 10.

29. Propriétés de l'algorithme (fin)

(2) Si l'une au moins des feuilles $p_1, p_2, \ldots, p_k \vdash q_1, q_2, \ldots, q_l$ n'est pas un axiome, c'est que $p_i \neq q_j$ pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq l$.

On définit une valuation v par $v(p_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq k$ et $v(q_j) = 0$ pour $1 \leq j \leq l$ (ce n'est pas contradictoire : il n'y a pas de proposition atomique qui soit à la fois l'un des p_i et l'un des q_j).

Pour cette valuation v la formule $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k) \Rightarrow (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_l)$ associée au séquent $p_1, p_2, \ldots, p_k \vdash q_1, q_2, \ldots, q_l$ vaut 0.

D'après la proposition 12 le séquent en dessous est faux, celui encore en dessous aussi, et donc le séquent racine (que l'on cherchait à démontrer) est faux pour v.

30. Complétude

Propriété 15 (complétude) *Si la formule correspondant à un séquent est une tautologie (vaut toujours VRAI), alors le séquent est démontrable.*

En effet en lui appliquant l'algorithme 13 on obtient un arbre de séquents de type (1) ou de type (2). D'après la prop. 14 s'il était de type (2) il existerait une valuation qui rende faux ce séquent, il est donc de type (1) c.-à-d.démontrable.
En combinant cela avec la prop. 10 on a :

Propriété 16 *Une formule F (resp. un séquent $\Gamma \vdash F$) est une tautologie (est vrai pour toute valuation) si et seulement si $\vdash F$ (resp. $\Gamma \vdash F$) est démontrable.*

31. Compacité

Soit $\mathcal{F} = \{F_i | i \in I\}$ un ensemble de formules (infini).
SI tout partie finie $\mathcal{F}^f$ de $\mathcal{F}$ est satisfiable (il existe une valuation qui la rende vraie) alors $\mathcal{F}$.
On utilise la complétude : si elle n'est pas satisfiable c'est que $\mathcal{F}$ est contradictoire, et par complétude il existe une démonstration π de $\perp$ à partir de $\mathcal{F}$. Cette démonstration n'utlise qu'un nombre **fini** des formules de $\mathcal{F}$. Il ya donc une partie finie de $\mathcal{F}$ qui est contradictoire.

32. Exemple : l'algo 13 pour un séquent démontrable

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{q}, p, p, s \vdash \mathbf{q}, t, t}{q, p, (\neg q), p, s \vdash t, t}\,\neg_g}{q, p, (\neg q), (p \wedge s) \vdash t, t}\,\wedge g \qquad \dfrac{\dfrac{r, \mathbf{q}, p, p, s \vdash \mathbf{q}, t}{r, q, p, (\neg q), p, s \vdash t}\,\neg_g}{r, q, p, (\neg q), (p \wedge s) \vdash t}\,\wedge g}{q, p, (\neg q), (t \Rightarrow r), (p \wedge s) \vdash t}\,\Rightarrow_g$$

33. Exemple : l’algo 13 pour une formule non démontrable

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{p \vdash r, s}{\vdash r, s, (\neg p)}\,\neg_d
      }{(\neg r) \vdash s, (\neg p)}\,\neg_g
    }{\vdash (\neg p), ((\neg r) \Rightarrow s)}\,\Rightarrow_d
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{q \vdash r, s}{(\neg r), q \vdash s}\,\neg_g
    }{q \vdash ((\neg r) \Rightarrow s)}\,\Rightarrow_d
  }{((\neg p) \Rightarrow q) \vdash ((\neg r) \Rightarrow s)}\,\Rightarrow_g
}{\vdash ((\neg p) \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg r) \Rightarrow s)}\,\Rightarrow_d
$$

$(((\neg p) \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg r) \Rightarrow s))$

$\equiv (((\neg q) \vee r \vee s) \wedge ((\neg p) \vee r \vee s))$

34. Exemple bis : l'algo 13 pour un séquent non démontrable

$$
\cfrac{
  \cfrac{
    \cfrac{\vdash p, q}{(\neg p) \vdash q}\ \neg_g
  }{\vdash ((\neg p) \Rightarrow q)}\ \Rightarrow_d
  \qquad
  \cfrac{
    \cfrac{r \vdash}{\vdash (\neg r)}\ \neg_d \quad s \vdash
  }{((\neg r) \Rightarrow s) \vdash}\ \Rightarrow_g
}{(((\neg p) \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg r) \Rightarrow s)) \vdash}\ \Rightarrow_g
$$

$$
\begin{aligned}
&(((\neg p) \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg r) \Rightarrow s)) \\
&\equiv s \vee r \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))
\end{aligned}
$$

35. Forme normale conjonctive

L'algorithme 13 calcule une forme normale conjonctive d'une formule A en l'appliquant à $\vdash A$ — A est la formule associée au séquent $\vdash A$.
Si A est démontrable, $A \equiv p \vee (\neg p)$.
Si A n'est pas démontrable, d'après la propriété 12, une valuation rend A vrai exactement quand toutes les feuilles qui ne sont pas des axiomes sont vraies. Une telle feuille $p_1, p_2, \ldots, p_k \vdash q_1, q_2, \ldots, q_l$ est vraie lorsque la formule

$$(\neg p_1) \vee (\neg p_2) \vee \cdots \vee (\neg p_k) \vee q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_l$$

est vraie.
Donc A équivaut à la conjonction de toutes ces formules.

36. Forme normale disjonctive

L'algorithme 13 calcule une forme normale disjonctive d'une formule A en l'appliquant à $A \vdash$ — $\neg A$ est la formule associée au séquent $A \vdash$.
Si $A \vdash$ est démontrable, A est faux et $A \equiv p \wedge (\neg p)$.
Si $A \vdash$ n'est pas démontrable, d'après la propriété 12, une valuation rend A vrai (c.-à-d.$A \vdash$ faux) exactement quand l'une au moins des feuilles qui ne sont pas des axiomes est fausse. Une telle feuille $p_1, p_2, \ldots, p_k \vdash q_1, q_2, \ldots, q_l$ est fausse lorsque la formule

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k \wedge (\neg q_1) \wedge (\neg q_2) \wedge \cdots \wedge (\neg q_l)$$

est fausse.
Donc A équivaut à la disjonction de toutes ces formules.

37. Conclusion

Nous aurons l'occasion de revenir sur la complétude du calcul des séquents dans le cas des prédicats.
Ce sera plus difficile, car les valuations (modèles interprétations) sont plus complexes et doivent prendre en compte les éléments du modèle cela entrainera aussi la compacité.
En revanche cela n'entrainera PAS la décidabilité : le calcul des prédicats est indécidable, même si certains fragments le sont (comme les logiques de description, utilisées en IA pour les ontologies).