Analyse et correction des exercices

S3, S4

Principe général (rappel)

- Lire 2 fois l'énoncé pour être sûr d'avoir tout saisi.
  (La deuxième fois, on sait qu'elle est la question sur ce que l'on optimise et l'on note donc au passage les éléments importants)
- Relever les différents concepts sous jacents à l'énoncé. Que manipule t'on ?
  Que quantifie t'on (les ***données*** chiffrées sont souvent des indices données des proportions aux concepts manipulés) ? Quelles sont les bornes ?
- Construire à la main une solution pragmatiquement et naïvement (on ne cherche pas l'optimum mais une solution réalisable) avec une stratégie déterministe et réexplicable (par exemple je prend le premier et je remplis au maximum, j'affecte dans l'ordre croissant, …). Analyser quelles ***décisions*** sont prises pour construire cette solution.
- Corriger au fur et à mesure quand l'algorithme ne marche pas (il existe quelquepart des ***contraintes*** qui empêche l'algorithme de faire ce qu'il veut).
- Comptabiliser le score de la solution (prémisse de la fonction ***objectif*** à optimiser)
- Désormais, tout est prêt pour appliquer le protocole :
  - Données/Variables-Domaines/Contraintes/Objectif

La mine - Analyse

- Données :
  - Bloc i, nb nombre de blocs
  - V_i Valeur en uranium du bloc i
  - C_i Coût d’extraction du bloc i
- On cherche à savoir si on choisit ou non un bloc à extraire
- Comme tout produit, le bénéfice que l’on peut tirer d’un bloc est la différence entre sa valeur de vente et son coût
- On va utiliser un graphe représentant le concept d’enchainement lors de l’extraction : un nœud par bloc, un arc entre i et j si il faut absolument avoir extrait j pour accéder à i. Chaque nœud (bloc) inférieur possède 3 successeurs. Par exemple, le bloc 16 possède trois relations (16,10);(16,11);(16,12)

La mine - Modèle

$$(1) \quad \text{Max} \sum_{i=1}^{nb} (V_i - C_i) \cdot x_i$$

$$(2) \quad \forall (i, j) \in U : x_i \leq x_j$$

$$(3) \quad \forall i = 1 \ldots nb : x_i \in \{0,1\}$$

- La solution optimale vaut 400€. Seuls les blocs rentables sont extraits 1,7,10,12 et 17. 18 n’est pas rentable du fait de la présence de 14.

L'emploi du temps

- Données :
  - Un graphe G=(X,E)
  - n cours (nœuds)
- On chercher a trouver un numéro de créneau compatible pour chaque nœud i : x_i . Ce sont des variables entières.
- Les contraintes s'expriment entre deux nœuds connectés directement par une arête qui ne peuvent avoir la même valeur :

  ($x_i \neq x_j$) ou ($|x_i - x_j| > 0$) ou (si $x_i - x_j$ positif alors $x_i - x_j > 0$ sinon $x_j - x_i > 0$)
- Ce problème est appelé Coloration Minimale d'un Graphe et s'écrit :

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \text{Min Max}\{x_i : i = 1,n\} \\
(2) & \forall [i,j] \in E : x_i \neq x_j \\
(3) & \forall i \in V : 1 \leq x_i \leq n \quad \text{et} \quad x_i \in I\!N
\end{array}
$$

- Comme déjà vu précédemment dans d'autres exercices, le Max n'étant pas linéaire dans la fonction objectif, il faut ajouter un nouvelle variable que nous allons minimiser en bornant les valeurs de x_i .
  C'est la linéarisation du comportement du max.

$$
\begin{array}{l}
t \geq 0 \\
\forall i \in V : x_i \leq t \\
\text{Min } t
\end{array}
$$

L'emploi du temps

- Hélas, « ≠ » ; « valeur absolue » ou « si alors sinon » ne sont pas linéaires non plus. Il faut trouver une astuce de modélisation pour les linéariser.
- On introduit à nouveau une variable enfermant cette non linéarité : y_{ij} représente désormais de manière booléenne le fait que x_i est supérieur à x_j
- Il reste à lier le comportement des x et des y, par la subtile écriture des 2 contraintes linéaires ci contre :

$$\forall [i, j] \in E : y_{ij} \in \{0,1\}$$
$$x_i - x_j \geq 1 - n \cdot (1 - y_{ij})$$
$$x_j - x_i \geq 1 - n \cdot y_{ij}$$

- En effet, si $x_i > x_j$ la seconde contrainte ne peut être vérifiée que si $y_{ij} = 1$ et, dans ce cas, la première équivaut à $x_i - x_j \geq 1$.
- Réciproquement si $x_i < x_j$, la première contrainte n'est vérifiée que si $y_{ij} = 0$ et dès lors la seconde équivaut à $x_j - x_i \geq 1$.
- Enfin, si $x_i = x_j$, la deuxième contrainte n'est vérifiée que si $y_{ij} = 1$, mais alors la première est violée : ce cas ne pourra pas se produire.
- La coloration minimale d'un graphe en PLNE reste un problème NP-difficile.
  Il faudra plusieurs secondes au solveur pour prouver que t=3 pour ce graphe à 9 sommets !