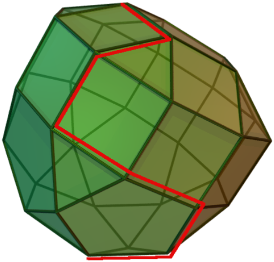
Programmation linéaire

Simplexe



Eric Bourreau
Vincent Boudet

10 février 2020

Résolution graphique

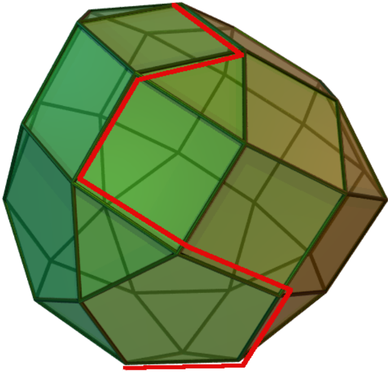
Remarques

- L'optimum se trouve sur les bords du polyèdre
- L'optimum se trouve dans un point extrême du polyèdre (à l'intersection des contraintes).
- La recherche de l'optimum peut se résumer à voyager d'un coin du polyèdre vers un autre coin en améliorant à chaque fois la fonction de coût associé (on appelle cette direction, le gradient d'optimisation)

Résolution graphique

n dimensions

- n variables => espace admissible en n dimensions
- Polygone convexe => Polyèdre
- Même stratégie :
  - Un point réalisable
  - Un cheminement sur les points extrêmes
  - Un gradient d'optimisation



Simplexe par l'exemple

La cimenterie

Forme canonique (n variables, m contraintes) :

$$\begin{cases} \max & 50x_1 + 70x_2 \\ s.t. & 40x_1 + 20x_2 \leq 420 \\ & 20x_1 + 30x_2 \leq 510 \end{cases}$$

On ajoute des variables d'écarts (positives) => égalités (n+m variables)

$$\begin{cases} \max & 50x_1 + 70x_2 \\ s.t. & 40x_1 + 20x_2 + s_1 = 420 \\ & 20x_1 + 30x_2 + s_2 = 510 \end{cases}$$

Simplexe par l'exemple

La cimenterie

On note z l'objectif qu'on veut maximiser

$$\left\{\begin{array}{rl} z & = 50x_1 + 70x_2 \\ 40x_1 + 20x_2 + s_1 & = 420 \\ 20x_1 + 30x_2 + s_2 & = 510 \end{array}\right.$$

On pivote et on exprime tout en fonction de x_1 et x_2

$$\left\{\begin{array}{rl} z & = 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 & = 420 - 40x_1 - 20x_2 \\ s_2 & = 510 - 20x_1 - 30x_2 \end{array}\right.$$

On appelle (z, s_1, s_2) le dictionnaire.

Simplexe par l'exemple

La cimenterie

On veut maximiser z. On prend comme solution de départ $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. Le dictionnaire vaut $(z = 0, s_1 = 420, s_2 = 510)$.

Coût marginal :

- si j'augmente x_1 de 1, z augmente de 50
- si j'augmente x_2 de 1, z augmente de 70

Quelque soit la variable que j'augmente, on améliore la fonction de coût : on peut prendre celle qu'on veut. Nous allons choisir x_2 qui fait augmenter le plus z.

Simplexe par l'exemple

La cimenterie

On pousse x_2 à son maximum (avec x_1 qui reste à 0) :

- $s_1 \geq 0 => 20x_2 \leq 420 => x_2 \leq 21$
- $s_2 \geq 0 => 30x_2 \leq 510 => x_2 \leq 17$

On met donc x_2 à 17 et s_2 passe à 0. L'étape suivante consiste à faire sortir s_2 du dictionnaire et à y faire rentrer x_2.

Simplexe par l'exemple

La cimenterie

$$\left\{\begin{array}{ll} z & = 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 & = 420 - 40x_1 - 20x_2 \\ s_2 & = 510 - 20x_1 - 30x_2 \end{array}\right.$$

Simplexe par l'exemple

La cimenterie

$$\left\{\begin{array}{ll} z & = 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 & = 420 - 40x_1 - 20x_2 \\ s_2 & = 510 - 20x_1 - 30x_2 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} z & = 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 & = 420 - 40x_1 - 20x_2 \\ x_2 & = \frac{1}{30}(510 - 20x_1 - s_2) \end{array}\right.$$

Simplexe par l'exemple

La cimenterie

$$\left\{\begin{array}{ll} z & = 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 & = 420 - 40x_1 - 20x_2 \\ s_2 & = 510 - 20x_1 - 30x_2 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} z & = 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 & = 420 - 40x_1 - 20x_2 \\ x_2 & = \frac{1}{30}(510 - 20x_1 - s_2) \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{ll} z & = 50x_1 + \frac{70}{30}(510 - 20x_1 - s_2) \\ s_1 & = 420 - 40x_1 - \frac{20}{30}(510 - 20x_1 - s_2) \\ x_2 & = \frac{1}{30}(510 - 20x_1 - s_2) \end{array}\right.$$

Simplexe par l'exemple

La cimenterie

$$\left\{\begin{array}{ll} z & = 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 & = 420 - 40x_1 - 20x_2 \\ s_2 & = 510 - 20x_1 - 30x_2 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} z & = 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 & = 420 - 40x_1 - 20x_2 \\ x_2 & = \frac{1}{30}(510 - 20x_1 - s_2) \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{ll} z & = 50x_1 + \frac{70}{30}(510 - 20x_1 - s_2) \\ s_1 & = 420 - 40x_1 - \frac{20}{30}(510 - 20x_1 - s_2) \\ x_2 & = \frac{1}{30}(510 - 20x_1 - s_2) \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll} z & = 70 \times 17 + \frac{100}{30}x_1 - \frac{70}{30}s_2 \\ s_1 & = \frac{2400}{30} - \frac{800}{30}x_1 + \frac{20}{30}s_2 \\ x_2 & = \frac{510}{30} - \frac{20}{30}x_1 - \frac{1}{30}s_2 \end{array}\right.$$

Simplexe par l'exemple

La cimenterie

$$\begin{cases} z &= 1190 + \frac{10}{3}x_1 - \frac{7}{3}s_2 \\ s_1 &= 80 - \frac{80}{3}x_1 + \frac{2}{3}s_2 \\ x_2 &= 17 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{30}s_2 \end{cases}$$

On recommence avec comme dictionnaire (z, s_1, x_2).
Avec $x_1 = 0$ et $s_2 = 0$, on a $(z = 1190, s_1 = 80, x_2 = 17)$.
On peut encore améliorer z car le coefficient marginal de x_1 est positif (par contre, modifier s_2 pénaliserait la fonction de coût).

- $s_1 \leq 0 => \frac{80}{3}x_1 \leq 80 => x_1 \leq 3$
- $x_2 \leq 0 => \frac{2}{3}x_1 \leq 17 => x_1 \leq \frac{51}{2}$

On pousse x_1 à 3 et on pivote pour faire sortir s_1 et entrer x_1.

Simplexe par l'exemple

La cimenterie

On arrive à

$$\begin{cases} z &= 1190 + \frac{10}{3}(3 - \frac{3}{80}s_1 + \frac{1}{40}s_2) - \frac{70}{30}s_2 \\ x_1 &= 3 - \frac{3}{80}s_1 + \frac{1}{40}s_2 \\ x_2 &= 15 - \frac{20}{30}(3 - \frac{3}{80}s_1 + \frac{1}{40}s_2) - \frac{1}{30}s_2 \end{cases}$$

Simplexe par l'exemple

La cimenterie

On arrive à

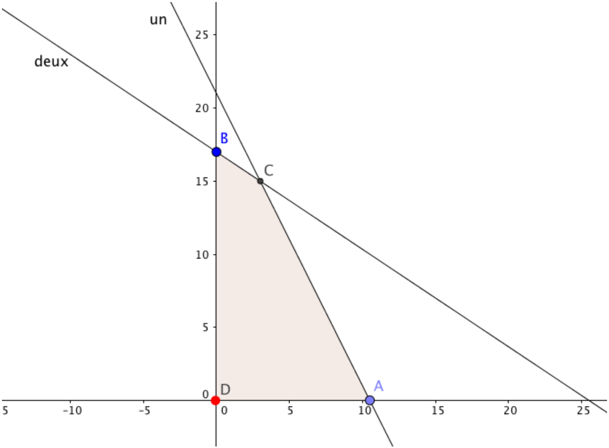
$$\left\{\begin{array}{ll} z & = 1190 + \frac{10}{3}(3 - \frac{3}{80}s_1 + \frac{1}{40}s_2) - \frac{70}{30}s_2 \\ x_1 & = 3 - \frac{3}{80}s_1 + \frac{1}{40}s_2 \\ x_2 & = 15 - \frac{20}{30}(3 - \frac{3}{80}s_1 + \frac{1}{40}s_2) - \frac{1}{30}s_2 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{ll} z & = 1200 - etc \\ x_1 & = 3 + etc \\ x_2 & = 15 + etc \end{array}\right.$$

Tous les coûts marginaux sont négatifs, on ne peut plus améliorer. La solution est donnée par $s_1 = 0$ et $s_2 = 0 => z = 1200$ obtenu par $x_1 = 3$ et $x_2 = 15$.

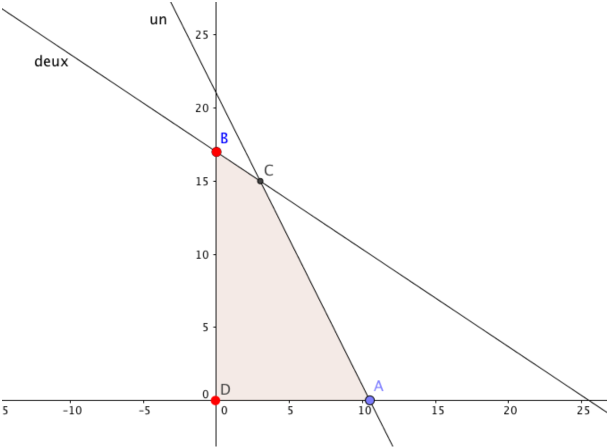
Simplexe par l'exemple

Graphiquement



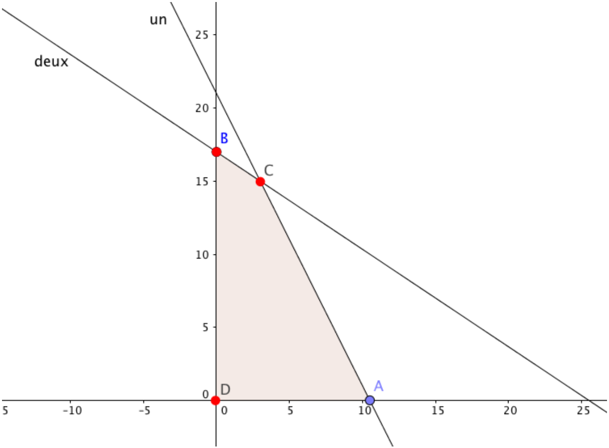
Simplexe par l'exemple

Graphiquement



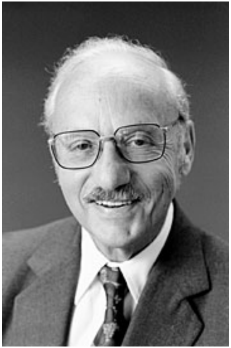
Simplexe par l'exemple

Graphiquement



Simplexe formellement

Dantzig
(1914-2005)



<u>US Air Force</u> (1941-1945)

My office collected data about sorties flown, bombs dropped, aircraft lost... I also helped other divisions of the Air Staff prepare plans called "programs". ... everything was planned in greatest detail: all the nuts and bolts, the procurement of airplanes, the detailed manufacture of everything. There were hundreds of thousands of different kinds of material goods and perhaps fifty thousand specialties of people. My office collected data about the air combat such as the number of sorties flown, the tons of bombs dropped, attrition rates. I also became a skilled expert on doing planning by hand techniques.

1947 : Naissance de l'algorithme du Simplexe (Projet SCOOP : Scientific Computation Of Optimal Programs) Publication => Linear Programming

Simplexe formellement

Soit (P) le programme linéaire suivant :

$$\text{Maximiser} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Avec les contraintes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i \in [1 \cdots m]$$

$$x_j \geq 0, \forall j \in [1 \cdots n]$$

Simplexe formellement

Création du dictionnaire

On forme le dictionnaire initiale (D_0)

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \forall i \in [1 \cdots m]$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

où

- x_j pour $j \in [1 \cdots n]$ est une variable de décision
- x_{n+i} pour $i \in [1 \cdots m]$ est une variable d'écart

Simplexe formellement

Variables de base/hors base

Dans un dictionnaire (D) :

- les variables des termes droits sont hors-base,
- les autres sont de base.

La solution basique associée à un dictionnaire (D) est celle obtenue en annulant les variables hors-base.
Au départ, la solution basique associé à (D_0) est :

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0, x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \cdots, x_{n+m} = b_m,$$

Remarque : Si l'un des $b_i < 0$, le dictionnaire initial n'admet de solution basique. Voir cours 4.

Pour l'instant, on suppose $b_i \geq 0$

Simplexe formellement

Pivot

Au cours de la méthode, des pivots sont itérés.
On a un dictionnaire réalisable (D) de la forme :

$$x_i = b'_i - \sum_{j \in \overline{B}} a'_{ij} x_j, \forall i \in B$$

$$z = C + \sum_{j \in \overline{B}} c'_j x_j$$

avec $B \subseteq \{1, \cdots, n+m\}$ et $|B| = m$ où les $x_i, i \in B$ sont de base et $x_j, j \in \overline{B}$ sont hors-base.

Simplexe formellement

Pivot

On doit choisir une variable entrante :

1. Pour tout $j \in \overline{B}$, $c'_j \leq 0$: tous les coûts réduits sont négatifs, on ne peut améliorer la solution. La valeur de (P) est $z = C$ obtenue en mettant à 0 les variables hors-base.
2. Il existe $c'_k > 0$ pour un certain k. On choisit x_k comme variable entrante.

On discutera plus loin du choix de k si plusieurs candidats.

Simplexe formellement

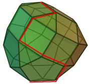
Pivot

x_k étant choisi, il faut trouver la variable sortante :

1. Si tous les coefficients a'_{ik} sont positifs, pas de candidat de variable sortante. Le programme (P) est non borné.
2. Parmi les coefficients $a'_{ik} < 0$ on en choisit un qui impose le plus de contraintes : on prend i tel que $\dfrac{b'_i}{-a'_{ik}}$ minimum. La variable sortante est alors x_i.

Simplexe formellement

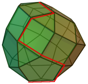
Complexité et convergence



- Chaque pivot coûte $O(mn)$ opérations
- En moyenne on a observé autour de m itérations
- Complexité en moyenne $O(m^2 n)$
- Mais complexité exponentielle dans le pire des cas [Klee 1972], improbable en pratique.
- Une autre approche [Karmarkar 1984] a une complexité au pire polynomiale : méthode des points intérieurs (mais est plus lente en moyenne !)

Simplexe formellement

On vérifie qu'on a bien compris



Une compagnie fabrique des figurines *Starwars*, *Aliens*, *Warhammer* et *Marvel*. La fabrication de chacune des figurines nécessite un certaine nombre d'heures de moulage, de cuisson et de peintures. La vente de chacune des figurines rapporte un certain bénéfice :

Figurine	StarWars	Aliens	WarHammer	Marvel
Moulage	2	4	5	7
Cuisson	1	1	2	2
Peinture	1	2	3	3
Bénéfice	7	9	18	17