

Cours 7 : La linéarisation

Eric Bourreau
+ Vincent Boudet

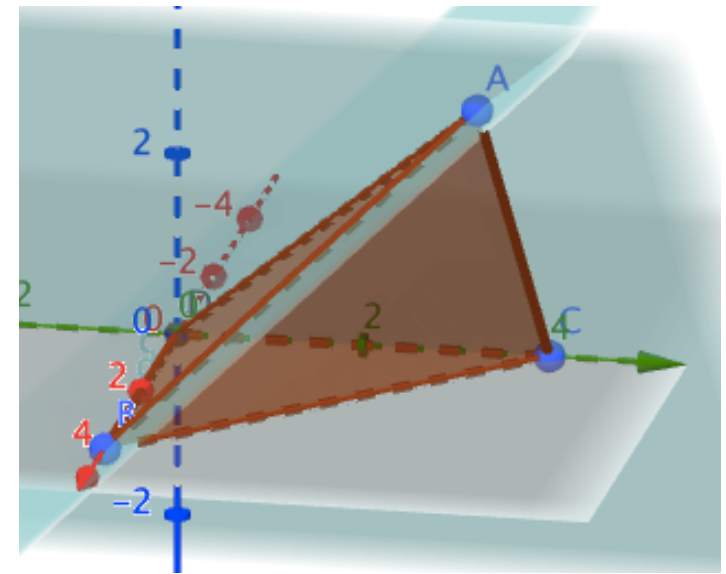


Linear Tricks – Techniques de linéarisation

- De nombreux concepts sont non-linéaires :
 - Max
 - Valeur absolue
 - Si
- Il est possible de les représenter de manière linéaire en introduisant des variables dont les variations *capturent* cette non-linéarité
(Attention, il est possible que cela ralentisse la résolution)
- Il est aussi possible de modéliser le problème avec d'autres formalismes plus étendu : CSP (Constraint Satisfaction Problem), NLP (Non-Linear Programming), LS (Local Search), ...

Linéarisation du Max

- L'exemple des wagons
Minimiser $\max(\text{chargement})$
- Minimiser $(\max_j (\sum_{i=1}^n w_i x_{ij}))$
- Introduction d'une variable représentant le concept $\rightarrow K$
- Mise sous forme linéaire des relations liant les variables x_{ij} et K
 - $\sum_{i=1}^n w_i x_{ij} \leq K \quad j = 1, \dots, 3$ K se comporte correctement en fonction des valeurs de x_{ij}



Linéarisation de la valeur absolue

- L'exemple de l'emploi du temps

$$x_i \neq x_j$$

- $x_i - x_j \neq 0 \Rightarrow |x_i - x_j| > 0 \Rightarrow |x_i - x_j| \geq 1$
- Si $x_i \geq x_j$ alors $(x_i - x_j) \geq 1$ // Si $x_j > x_i$ alors $(x_j - x_i) \geq 1$
- On introduit une variable pour arbitrer l'ordre entre x_i et x_j : y_{ij}
- Mise sous forme linéaire des relations liant les variables (x_i, x_j, y_{ij})

$$(x_i - x_j) + M(1 - y_{ij}) \geq 1 \quad // \quad (x_j - x_i) + My_{ij} \geq 1$$

M est appelé *BigM*, on lui donne une valeur suffisamment grande pour dominer la condition

Linéarisation du SI

- Exemple Rail/Route

« La SNCF impose à l'entreprise de transporter au moins 10 tonnes sur chaque liaison pour qu'elle puisse bénéficier des tarifs indiqués »

- $x_{ij} = 0$ OU $x_{ij} \geq 10$
- Soit $x_{ij} = 0$ // Soit $x_{ij} \neq 0$ ET $x_{ij} \geq 10$
- On introduit une variable pour représenter la condition y_{ij}
- Mise sous forme linéaire des relations liant les variables (x_{ij}, y_{ij})

$$x_{ij} \geq 10(1 - y_{ij}) \text{ // } x_{ij} \leq M y_{ij}$$

Linéarisation des tournées

- Exemple du fioul

« Chaque client doit être livré en une seule fois. Déterminez les tournées »

- Modèle 1 : contrainte de sous-tour interdites
- Modèle 2 : x_{ij} + modéliser la quantité livrée jusqu'au client i : y_i

$$q_i \leq y_i \leq Q$$

$$y_i \leq Q - (Q - q_i) x_{1i} \quad \forall i$$

$$y_j \geq y_i + q_j - Q + Q x_{ij} + (Q - q_j - q_i) x_{ji} \quad \forall i, j$$

- On peut voir les y_i comme des variables d'ordre