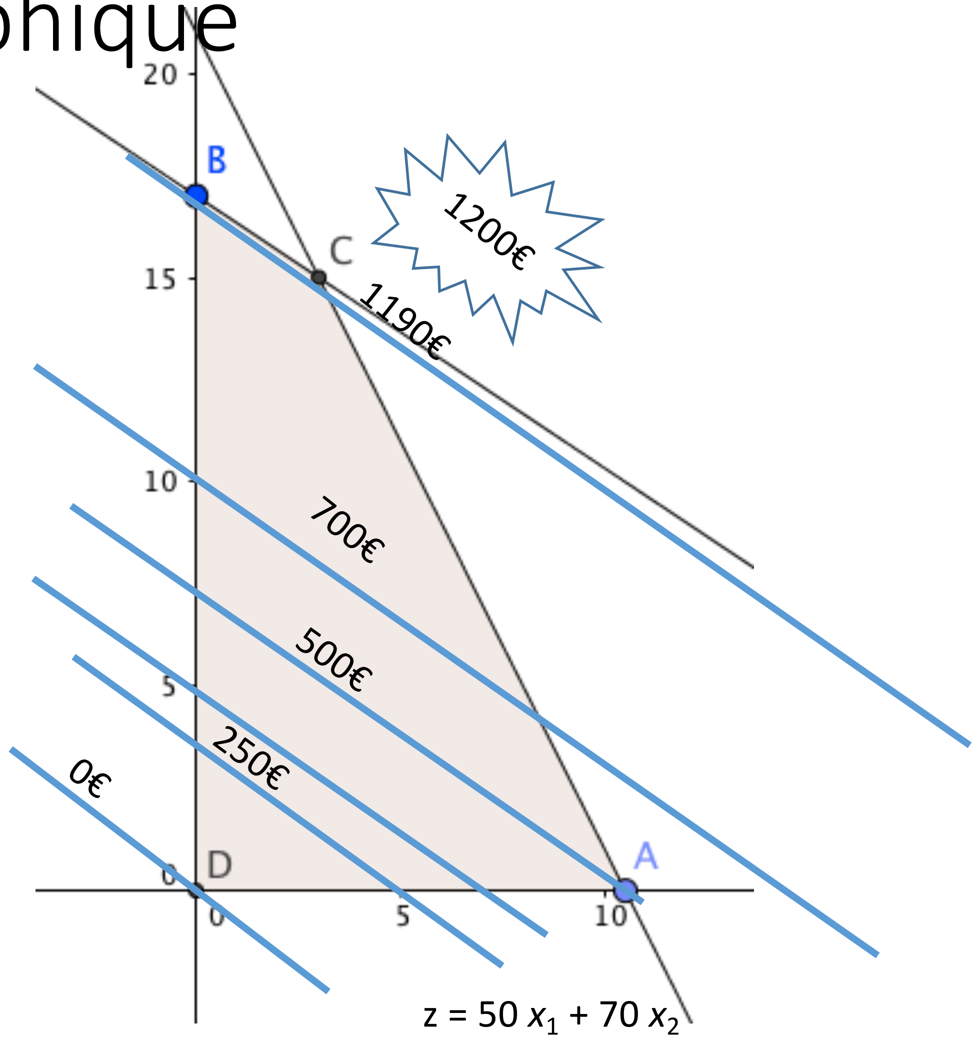
Cours 3 :
La Résolution d’un programme linéaire

Eric Bourreau

+ Vincent Boudet

La Résolution graphique

$$\begin{cases} Max \quad \sum_{i=1}^{2} p_i x_i = 50x_1 + 70x_2 \\ \qquad s.c \quad \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i \leq b \qquad j = 1, \dots, 2 \\ \qquad 40x_1 + 20x_2 \leq 420 \quad (1) \\ \qquad 20x_1 + 30x_2 \leq 510 \quad (2) \\ \qquad\quad et \;\; x \geq 0 \end{cases}$$



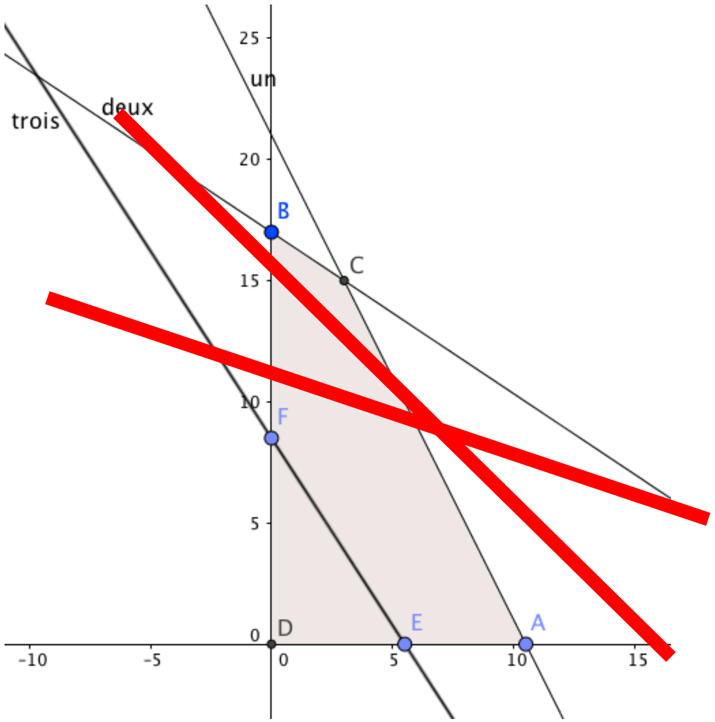
Résolution géométrique : remarques

- L’optimum se trouve sur les bords du polyèdre
- L’optimum se trouve dans un point extrême du polyèdre (à l’intersection des contraintes).
- La recherche de l’optimum peut se résumer à voyager d’un coin du polyèdre vers un autre coin en améliorant à chaque fois la fonction de coût associé (on appelle cette direction, le gradient d’optimisation)

La cimenterie : extension

- … Ajoutons une ressource (ensacheuse) disponible 5 h/j. Les 2 ciments nécessitent 55 et 35 min d'ensacheuse par tonne

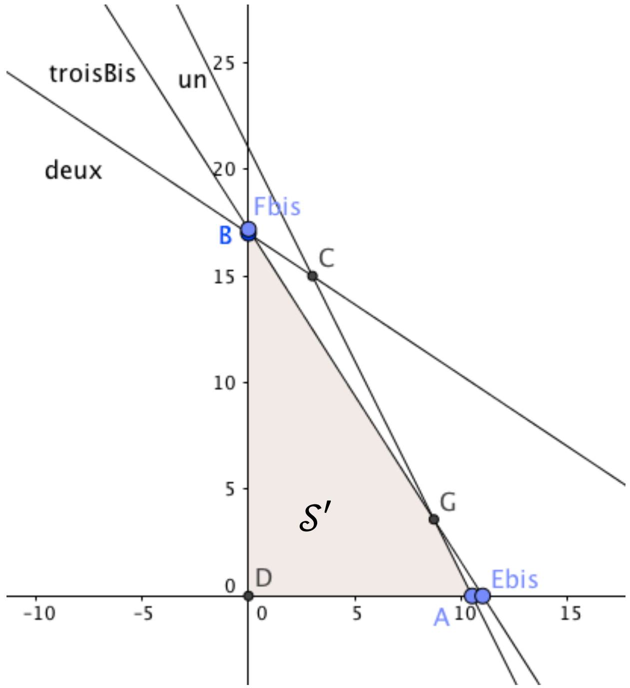
$$\begin{cases} Max \quad 50x_1 + 70x_2 \\ \\ \quad 40x_1 + 20x_2 \leq 420 \quad (1) \\ \quad 20x_1 + 30x_2 \leq 510 \quad (2) \\ \quad 55x_1 + 35x_2 \leq 300 \quad (3) \\ \qquad et \;\; x \geq 0 \end{cases}$$



La cimenterie : extension

- … Ajoutons une ressource (ensacheuse) disponible 10 h/j. Les 2 ciments nécessitent 55 et 35 min d'ensacheuse par tonne

$$\begin{cases} Max \quad 50x_1 + 70x_2 \\ \\ 40x_1 + 20x_2 \leq 420 \quad (1) \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 510 \quad (2) \\ 55x_1 + 35x_2 \leq 600 \quad (3bis) \\ et \;\; x \geq 0 \end{cases}$$



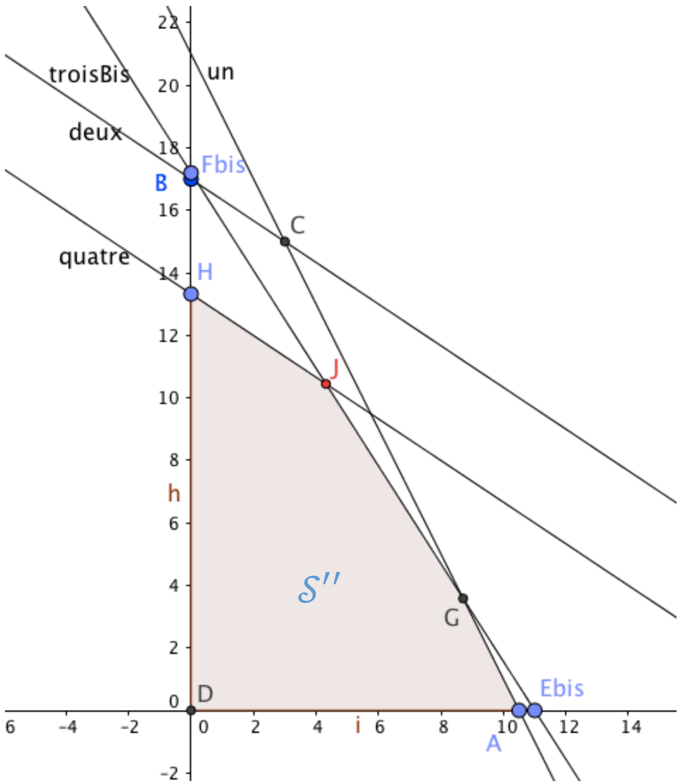
- ADBG, défini $\mathcal{S}'$ le nouveau polygone des solutions réalisables

La cimenterie : extension

- … Ajoutons une ressource (ensacheuse) disponible 10 h/j. Les 2 ciments nécessitent 55 et 35 min d'ensacheuse par tonne
- … et finalement, une refroidisseuse (il est impossible de transférer directement du four au broyage, le résultat étant trop chaud) nécessitant 30 et 45 min toute la journée (10h).

$$\begin{cases} Max \quad 50x_1 + 70x_2 \\ \\ 40x_1 + 20x_2 \leq 420 \quad (1) \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 510 \quad (2) \\ 55x_1 + 35x_2 \leq 600 \quad (3bis) \\ 30x_1 + 45x_2 \leq 600 \quad (4) \\ et \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

- Nouvel optimum J (réaliste opérationnellement, cette fois)



Résolution graphique : remarques (suite)

- Nous sommes dans le plan : 2 axes liés à nos 2 variables x_1,x_2 quel que soit le nombre de contraintes (3, 4, 5, .. , 1000).
- Une solution est donc toujours l'intersection de 2 droites (2 contraintes saturées) et laisse les autres contraintes non saturées.
- Il existe plusieurs cheminements pour atteindre l'optimum (D→A→G→J ou D→H→J).

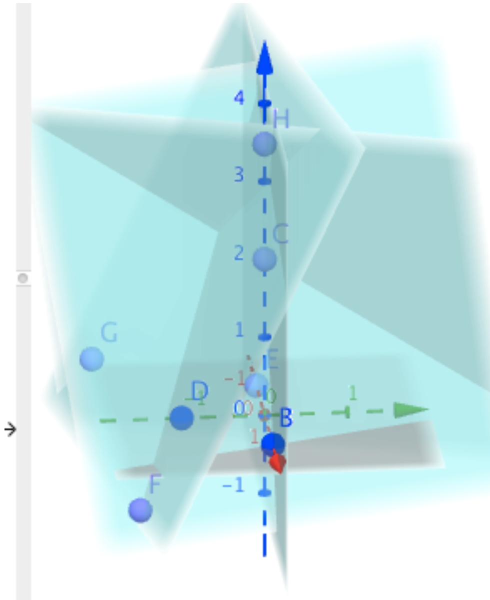
Résolution géométrique : cas extrêmes

- Le polygone peut être ouvert (non borné) : cas dégénéré
- L’optimum peut se trouver sur une face
- La solution initiale (0,0) peut ne pas être valide

La cimenterie : extension de l'extension

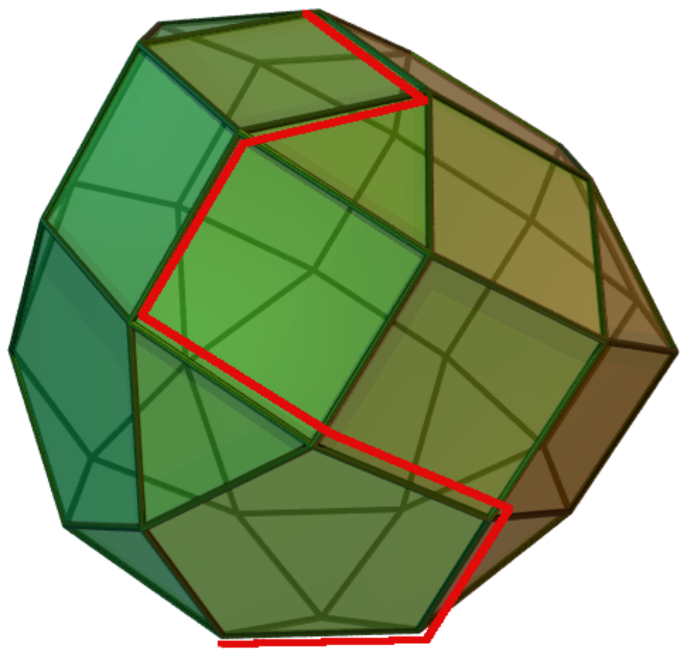
- On ajoute un nouveau ciment c3, de profit 80, nécessitant 50 min de four, 30 de refroidissement, 25 de broyage et 40 min d'ensachage.

$$\begin{cases} Max \quad \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = 50x_1 + 70x_2 + 80x_3 \\ \qquad s.c \quad \sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i \leq b \qquad j = 1, \dots, 4 \\ \qquad\qquad et \;\; x \geq 0 \end{cases}$$



Résolution géométrique : n-dimensions

- *n* variables => espace admissible en *n* dimensions
- Polygone convexe ➔ Polyèdre
- Même stratégie :
  - Un point réalisable
  - Une cheminement sur les points extrêmes
  - Un gradient d'optimisation

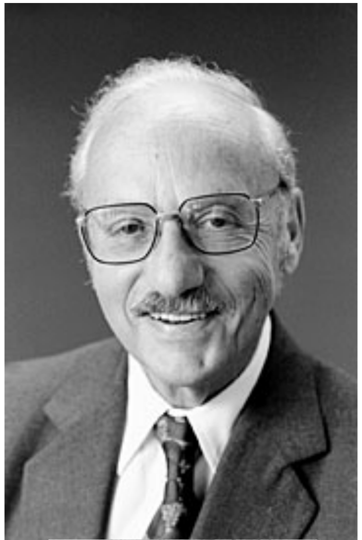


Construction d’un algorithme générique de résolution d’un programme linéaire

Gauss (1777-1855)

Pivot de Gauss

Dantzig (1914-2005)



Tjalling C. Koopmans 1901–1981 George B. Dantzig Leonid V. Kantorovich 1912–1986

US Air Force (1941-1945)

*My office collected data about sorties flown, bombs dropped, aircraft lost... I also helped other divisions of the Air Staff prepare plans called "**programs**". ... everything was planned in greatest detail: all the nuts and bolts, the procurement of airplanes, the detailed manufacture of everything. There were hundreds of thousands of different kinds of material goods and perhaps fifty thousand specialties of people. My office collected data about the air combat such as the number of sorties flown, the tons of bombs dropped, attrition rates. I also became a skilled expert on doing planning by hand techniques.*

1947 Naissance de l’algorithme du Simplexe
(Projet SCOOP : Scientific Computation Of Optimal **Programs**)
*Publication => Linear **Programming***

Ajout de variables d'écart (slack variables)

- Forme canonique
  (n variables, m contraintes)

$$\begin{cases} Max \quad 50x_1 + 70x_2 \\ \quad 40x_1 + 20x_2 \leq 420 \quad (1) \\ \quad 20x_1 + 30x_2 \leq 510 \quad (2) \end{cases}$$

Forme standard
(n+m variables, m contraintes / équations)

$$\begin{cases} Max \quad 50x_1 + 70x_2 \\ 40x_1 + 20x_2 + \ s_1 = 420 \quad (1) \\ 20x_1 + 30x_2 + \ s_2 = 510 \quad (2) \end{cases}$$

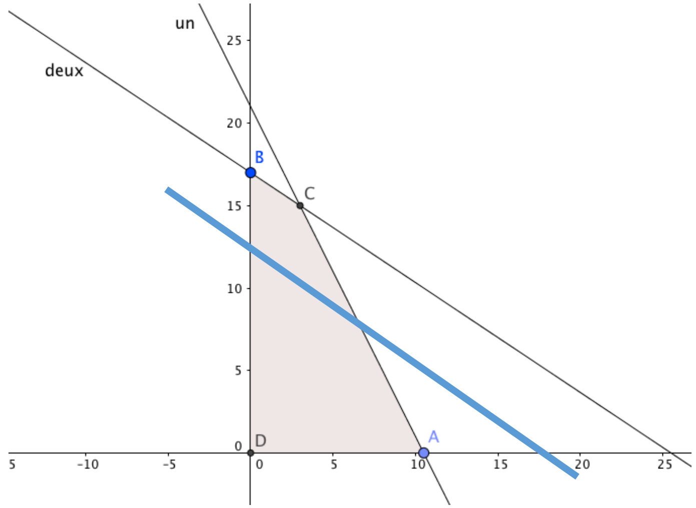
- On peut exprimer *m-n* variables en fonction des *m* autres (pivot de Gauss)

$$\begin{cases} z = \qquad\quad 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 = 420 - 40x_1 - 20x_2 \quad (1) \\ s_2 = 510 - 20x_1 - 30x_2 \quad (2) \end{cases}$$

- Le dictionnaire est (z, s_1, s_2)

Fonction de coût : on veut maximiser *z*

- Prenons comme solution de départ (0,0) pour x_1 et x_2
  - Le dictionnaire vaut (z=0, s_1=420 ,s_2=510)
- Evaluons le coût marginal permettant d'augmenter le gain
  - x_1 ➔ 50 ou x_2 ➔ 70
  - Quelle que soit la variable choisie, on améliore la fonction de coût
- On pousse la meilleure variable à ses limites
  - x_2 borné par 420/20 (1) et 510/30 (2)
  - On va donc donner la valeur 17 à x_2
  - La slack associée s_2 passe à 0



Le retour du pivotage

- Nous allons donc modifier le dictionnaire pour y faire rentrer x_2

$$\left\{\begin{aligned} z &= 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 &= 420 - 40x_1 - 20x_2 \\ &\boxed{s_2 = 510 - 20x_1 - 30x_2} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} z &= 50x_1 + 70x_2 \\ s_1 &= 420 - 40x_1 - 20x_2 \\ x_2 &= \frac{510}{30} - \frac{20}{30}x_1 - \frac{1}{30}s_2 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} z &= 50x_1 + 70\left(\frac{510}{30} - \frac{20}{30}x_1 - \frac{1}{30}s_2\right) \\ s_1 &= 420 - 40x_1 - 20\left(\frac{510}{30} - \frac{20}{30}x_1 - \frac{1}{30}s_2\right) \\ x_2 &= \frac{510}{30} - \frac{20}{30}x_1 - \frac{1}{30}s_2 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} z &= 70 * 17 + \frac{100}{30}x_1 - \frac{70}{30}s_2 \\ s_1 &= \frac{2400}{30} - \frac{800}{30}x_1 + \frac{20}{30}s_2 \\ x_2 &= \frac{510}{30} - \frac{20}{30}x_1 - \frac{1}{30}s_2 \end{aligned}\right.$$

On recommence

- Nouveau dictionnaire (z, s_1, x_2), on choisit de mettre s_2 et x_1 à (0,0)
  - (z = 1190, s_1= 80, x_2= 17)
- On peut encore améliorer z car le coefficient marginal de x_1 est positif (par contre, modifier s_2 pénaliserait la fonction de coût)
- On cherche la borne maximale d'amélioration de x_1
- On re-pivote pour retrouver un nouveau dictionnaire

$$\left\{\begin{aligned} z &= 1190 + \frac{100}{30}\left(\frac{2400}{800} - \frac{30}{800}s_1 + \frac{20}{800}s_2\right) - \frac{70}{30}s_2 \\ x_1 &= \frac{2400}{800} - \frac{30}{800}s_1 + \frac{20}{800}s_2 \\ x_2 &= \frac{510}{30} - \frac{20}{30}\left(\frac{2400}{800} - \frac{30}{800}s_1 + \frac{20}{800}s_2\right) - \frac{1}{30}s_2 \end{aligned}\right. \longrightarrow \left\{\begin{aligned} z &= 1200 - etc \\ x_1 &= 3 + etc \\ x_2 &= 15 + etc \end{aligned}\right.$$

Complexité et convergence

- Chaque pivot coûte *O(mn)* opérations
- En moyenne on a observé autour de m itérations
  - **Complexité en moyenne $O(m^2n)$**
- Complexité exponentielle dans le pire des cas [Klee1972], improbable en pratique.
- Une autre approche [Karmarkar 1984] a une complexité au pire polynomiale : méthode des points intérieurs (mais est plus lente en moyenne !)

Exemple

- Résoudre

$$\begin{cases} Max \quad x_1 + 2x_2 \\ \quad x_1 + 3x_2 \leq 9 \quad (1) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \quad (2) \end{cases}$$

- Solution 1 : (0,0) ➔ dictionnaire (0,9,12)
- On choisit x_2 et on le remplace dans (1) avec la valeur max à 3
- Solution 2 : (0,3) ➔ dictionnaire (6,0,3)
- On choisit x_1 et on le remplace dans (2) avec la valeur max à 3
- Solution 3 : (3,2) ➔ dictionnaire (7,0,0)
- On ne peut plus améliorer z : optimum

$$\begin{cases} z = 7 - \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2 \\ x_2 = 2 - \frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_1 \\ x_1 = 3 - s_1 + s_2 \end{cases}$$

Equilibrage de wagons

- x_{ij} on place le colis i dans le wagon j, on minimise *Cmax* une borne supérieure du remplissage

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \text{Min } C_{max} \\
(2) & \forall i = 1 \ldots n : \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \\
(3) & \forall j = 1 \ldots m : \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \le C_{max}
\end{array}
$$

48+1 variables
16+3 contraintes
réécrits sous la forme
$Ax \le b$

3x16 variables x_{ij} mises en ligne + *Cmax*

$$
\begin{array}{c}
X^t \\
\boxed{x_{11}\ x_{12}\ x_{13} \ldots x_{1\,16}\ x_{21}\ x_{22} \ldots x_{2\,16}\ x_{31}\ x_{32} \ldots x_{3\,16}\ Cmax}
\end{array}
$$

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0\ 1 & \ldots & 0 & 0 & 0\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\
 & & & \ldots & & & & \ldots & & & & \ldots & & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & -1
\end{pmatrix}
\le
b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$