NOM : **NOTE :**
PRÉNOM :
numéro d'étudiant :

Session : contrôle continu	Durée de l'épreuve : **1 heure (sauf tiers temps 80 mn)**
Date : **11 mars 2020 15:00**	**Seul** document autorisé : **Aide-mémoire inclus**
Licence informatique 3^{e} année : Logique 2 **HLIN602**	
Sujet : **7 pages + 2 pages d'aide-mémoire**	Matériel utilisé : **aucun**

Exercice A

Dans l'exercice qui suit, les majuscules S,T,P,Q,R,F,G,H,K désignent des prédicats, et les minuscules x,y,z des variables.

Les formules suivantes sont-elles correctement formées ? Si non, dire pour quelle(s) raison(s). Si oui, donner l'arbre syntaxique, l'ensemble des variables libres et l'ensemble des variables liées, et dire si la formule est polie ou non et pourquoi, et sinon la rendre polie.

Question A(a) $\forall x.S(x) \Rightarrow S(T(x))$

Réponse: Ceci n'est pas une formule de la logique du premier ordre. Le prédicat S ne peut avoir pour argument une formule, ici $T(x)$.

Question A(b) $\forall z.P(x \wedge y) \vee \neg Q(z)$

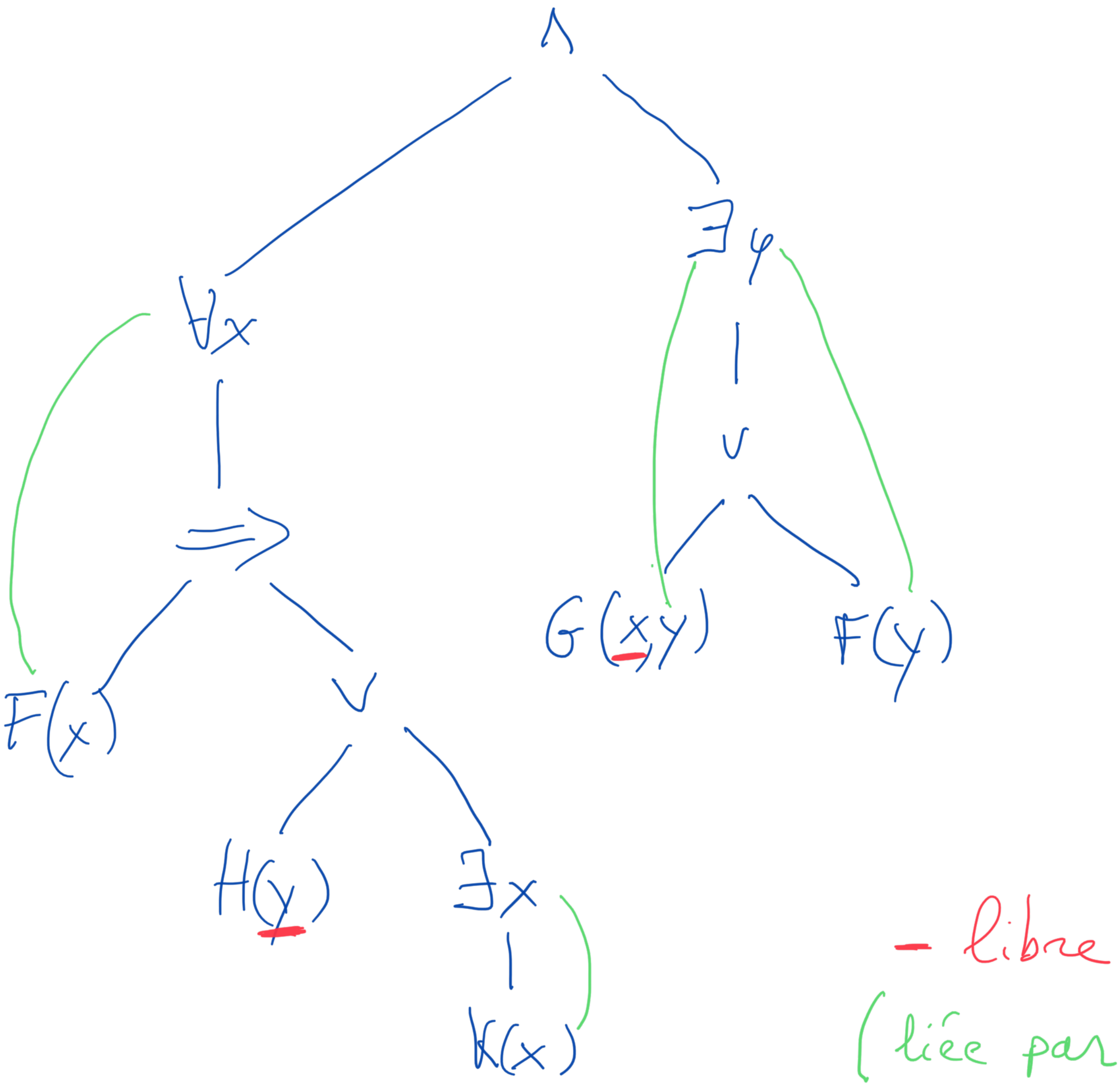
Réponse: Ceci n'est pas une formule de la logique du premier ordre. L'argument du prédicat P ne peut pas être $x \wedge y$, qui n'est pas un terme : x et y sont des variables et non des formules et ne sauraient être reliées par $\wedge$.

Question A(c) $\forall x.R(x) \Rightarrow \exists y.R(x,y)$

Réponse: Ceci n'est pas une formule de la logique du premier ordre. Le prédicat R ne peut avoir pour arité 1 et pour arité 2.

Question A(d) $(\forall x.(F(x) \Rightarrow (H(y) \vee (\exists x.K(x))))) \wedge (\exists y.(G(x,y) \vee F(y)))$

Réponse:



Formule correcte, mais non polie : la variable x a des occurrences libres (la première) et liées (la dernière).

Exercice B

Pour chacune des preuves suivantes dans LK, dire si elle est correcte ou non. Si elle n'est pas correcte, dire pour quelle(s) raison(s). Si le séquent final est dérivable, en donner une preuve correcte, sinon donner une interprétation dans laquelle il est faux (contre-modèle), c'est-à-dire, si le séquent est de la forme $\Gamma \vdash \Phi$, où Φ est une formule, exhiber une interprétation permettant de démontrer que $\Gamma \not\models \Phi$. Dans le cas où vous donnerez une interprétation, il faudra justifier votre réponse et développer les calculs pour démontrer que $\Gamma \not\models \Phi$.

Question B(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(x) \vdash A(x)}\ \mathsf{ax}}{A(x) \vdash \forall x.A(x)}\ \forall_{\mathsf{right}}}{\forall x.A(x) \vdash \forall x.A(x)}\ \forall_{\mathsf{left}}$$

<u>Réponse:</u> Preuve non correcte lors de $\forall_{\mathsf{right}}$ il y a un "x" libre à gauche de "$\vdash$" mais séquent démontrable :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(x) \vdash A(x)}\ \mathsf{ax}}{\forall x.A(x) \vdash A(x)}\ \forall_{\mathsf{left}}}{\forall x.A(x) \vdash \forall x.A(x)}\ \forall_{\mathsf{right}}$$

Question B(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(x) \vdash A(x)}\ \mathsf{ax}}{A(x) \vdash \forall x.A(x)}\ \forall_{\mathsf{right}}}{\exists x.A(x) \vdash \forall x.A(x)}\ \exists_{\mathsf{left}}$$

<u>Réponse:</u> Preuve non correcte lors de $\forall_{\mathsf{right}}$ il ya un "x" libre à gauche de "$\vdash$" mais séquent démontrable :

Il est aisé de voir que la formule n'est pas démontrable. Soit I l'interprétation de domaine $D = \{a,b\}$ définie par $i(A) = \{a\}$. On a $[\![\exists x.A(x)]\!]_{I\rho[]} = \mathbf{1}$ et $[\![\forall x.A(x)]\!]_{I\rho[]} = \mathbf{0}$.

Question B(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(x) \vdash A(x), B(x)}\ \mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{B(x) \vdash A(x), B(x)}\ \mathsf{ax}}{A(x) \vee B(x) \vdash A(x), B(x)}\ \vee_{\mathsf{left}}}{\forall x.A(x) \vee B(x) \vdash A(x), B(x)}\ \forall_{\mathsf{left}}}{\forall x.A(x) \vee B(x) \vdash A(x), (\forall x.B(x))}\ \forall_{\mathsf{right}}}{\forall x.A(x) \vee B(x) \vdash (\forall x.A(x)), (\forall x.B(x))}\ \forall_{\mathsf{right}}}{\forall x.A(x) \vee B(x) \vdash (\forall x.A(x)) \vee (\forall x.B(x))}\ \vee_{\mathsf{right}}$$

<u>Réponse:</u> La règle $\forall_{\mathsf{right}}$ créant $\forall_{\mathsf{right}}$ ne peut être appliquée : x est libre dans $A(x)$.
Le séquent conclusion est évidemment non démontrable il est aisé de le rendre faux. Il est faux que "toute personne parle allemand ou bulgare" entraîne que "toute personne parle allemand ou toute personne parle bulgare. Soit I l'interprétation de domaine $\{a,b\}$ définie par $i(A) = \{a\}$ et $i(B) = \{b\}$. On alors $[\![\forall x.A(x) \vee B(x)]\!]_{I\rho[]} = \mathbf{1}$ tandis que $[\![\forall x.A(x)]\!]_{I\rho[]} = \mathbf{0}$ et $[\![\forall x.A(x)]\!]_{I\rho[]} = \mathbf{0}$.

Exercice C

Soit I un prédicat binaire et les propriétés suivantes :

1. $\forall x.I(x,x)$
2. $\forall x.\neg I(x,x)$
3. $\forall x.\forall y.\neg(I(x,y) \wedge I(y,x))$
4. $\forall x.\forall y.(\neg(I(x,y) \wedge I(y,x)) \vee (x = y))$
5. $\forall x.\forall y.\forall z.((I(x,y) \wedge I(y,z)) \Rightarrow I(x,z))$
6. $\forall x.\forall y.(I(x,y) \vee I(y,x))$
7. $\forall x.\exists y.I(x,y)$
8. $\forall y.\exists x.I(x,y)$

Question C(a) Soit l'interprétation suivante :
Domaine D : $\mathbb{N}$.
Interprétation de I : $\{ \ (d,d') \in D \times D \mid d < d' \ \}$.
Pour chaque formule 1–8 dire, sans justification, si elle est vraie ou fausse dans cette interprétation (écrire ✓dans la case correspondante et rien dans l'autre). Les réponses fausses seront comptées négativement sur la question.

		vraie	fausse
1	$\forall x. I(x,x)$		✓
2	$\forall x. \neg I(x,x)$	✓	
3	$\forall x. \forall y. \neg(I(x,y) \wedge I(y,x))$	✓	
4	$\forall x. \forall y. (\neg(I(x,y) \wedge I(y,x)) \vee x{=}y)$	✓	
5	$\forall x. \forall y. \forall z. ((I(x,y) \wedge I(y,z)) \Rightarrow I(x,z))$	✓	
6	$\forall x. \forall y. (I(x,y) \vee I(y,x))$		✓
7	$\forall x. \exists y. I(x,y)$	✓	
8	$\forall y. \exists x. I(x,y)$		✓

Question C(b) Soit l'interprétation suivante :

Domaine D : $\mathscr{P}(\{a,b,c\})$.

Interprétation de I : $\{\ (d,d') \in D \times D \mid d \subseteq d'\ \}$.

Pour chaque formule 1–8 dire, sans justification, si elle est vraie ou fausse dans cette interprétation (écrire ✓dans la case correspondante et rien dans l'autre). Les réponses fausses seront comptées négativement sur la question.

		vraie	fausse
1	$\forall x.I(x,x)$	✓	
2	$\forall x.\neg I(x,x)$		✓
3	$\forall x.\forall y.\neg(I(x,y) \wedge I(y,x))$		✓
4	$\forall x.\forall y.(\neg(I(x,y) \wedge I(y,x)) \vee x{=}y)$	✓	
5	$\forall x.\forall y.\forall z.((I(x,y) \wedge I(y,z)) \Rightarrow I(x,z))$	✓	
6	$\forall x.\forall y.(I(x,y) \vee I(y,x))$		✓
7	$\forall x.\exists y.I(x,y)$	✓	
8	$\forall y.\exists x.I(x,y)$	✓	

Exercice D

Démontrer que la formule suivante :

$$C = \forall x.((\exists y.R(x,y)) \Rightarrow R(x,x))$$

est une conséquence logique des deux formules A et B suivantes :

$$A = \forall x.\forall y.(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$$
$$B = \forall x.\forall y.\forall z.((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$$

Pour ce faire, vous pourrez soit utiliser la sémantique et démontrer que $A, B \models C$, soit utiliser une preuve dans LK et démontrer que $A, B \vdash C$.

Réponse:

Par souci de lisibilité j'écrirai Rxy plutôt que $R(x,y)$ — cela évite des "(" et ")" et comme il n'y pas pas de termes, que les prédicats sont en majuscules et les variables sont en minuscules, c'est sans ambiguïté.

Preuve en calcul des séquents Avant une règle de quantificateur les occurrence de la variable qui deviennent liées par ce quantificateurs sont notées en gras.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Ruv \vdash Ruv$}
\AxiomC{$Ruv \vdash Rvu, Ruv$}
\AxiomC{$Ruv, Rvu \vdash Rvu$}
\RightLabel{$\Rightarrow_g$}
\BinaryInfC{$Ruv, Ruv \Rightarrow Rvu \vdash Rvu$}
\RightLabel{$\&_d$}
\BinaryInfC{$Ruv, Ruv, Ruv \Rightarrow Rvu \vdash Ruv \wedge Rvu$}
\AxiomC{$Ruu \vdash Ruu$}
\RightLabel{$\Rightarrow_g$}
\BinaryInfC{$Ruv, Ruv, Ruv \Rightarrow Rvu, ((Ruv \wedge Rvu) \Rightarrow Ruu) \vdash Ruu$}
\RightLabel{$contr._g$}
\UnaryInfC{$Ruv, Ruv \Rightarrow Rvu, ((Ruv \wedge Rv\mathbf{u}) \Rightarrow Ru\mathbf{u}) \vdash Ruu$}
\RightLabel{$\forall_g \ \mathbf{u} := z$}
\UnaryInfC{$Ruv, Ruv \Rightarrow Rvu, \forall z.\ ((Ru\mathbf{v} \wedge R\mathbf{v}z) \Rightarrow Ruz) \vdash Ruu$}
\RightLabel{$\forall_g$}
\UnaryInfC{$Ruv, Ruv \Rightarrow Rvu, \forall y.\forall z.\ ((R\mathbf{u}y \wedge Ryz) \Rightarrow R\mathbf{u}z) \vdash Ruu$}
\RightLabel{$\forall_g$}
\UnaryInfC{$Ruv, Ru\mathbf{v} \Rightarrow R\mathbf{v}u, \forall x.\forall.y.\forall z.\ ((Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz) \vdash Ruu$}
\RightLabel{$\forall_g$}
\UnaryInfC{$Ruv, \forall y.\ R\mathbf{u}y \Rightarrow Ry\mathbf{u}, \forall x.\forall.y.\forall z.\ ((Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz) \vdash Ruu$}
\RightLabel{$\forall_g$}
\UnaryInfC{$Ru\mathbf{v}, \forall x.\forall y.\ Rxy \Rightarrow Ryx, \forall x.\forall.y.\forall z.\ ((Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz) \vdash Ruu$}
\RightLabel{$\exists_g restr.ok$}
\UnaryInfC{$\exists y.\ Ruy, \forall x.\forall y.\ Rxy \Rightarrow Ryx, \forall x.\forall.y.\forall z.\ ((Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz) \vdash Ruu$}
\RightLabel{$\Rightarrow_d$}
\UnaryInfC{$\forall x.\forall y.\ Rxy \Rightarrow Ryx, \forall x.\forall.y.\forall z.\ ((Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz) \vdash (\exists y.\ R\mathbf{u}y) \Rightarrow R\mathbf{uu}$}
\RightLabel{$\forall_d restr.ok$}
\UnaryInfC{$\forall x.\forall y.\ Rxy \Rightarrow Ryx, \forall x.\forall.y.\forall z.\ ((Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz)) \vdash \forall x.\ ((\exists y.\ Rxy) \Rightarrow Rxx)$}
\end{prooftree}
$$

Raisonnement informel dans les modèles Soit I une interprétation de domaine D avec R_I l'interprétation de R, interprétation dans laquelle A et B sont vraies. Montrons que C est vrai. Soit d appartenant à D. Nous sommes forcément dans l'un des deux cas suivants, Rde est faux pour tout e de D, ou Rdd' est vraie pour un certain d' de D.

- Si Rde est faux pour tout e de D alors $\exists y Rdy$ est fausse pour I et donc $(\exists x.Rdy) \Rightarrow Rdd$ est vraie pour I.
- Si Rdd' est vraie pour un certain d' de D. Comme A est vraie pour I et que Rdd' est vraie pour I, $Rd'd$ est vraie pour I. Comme Rdd' et $Rd'd$ sont vraies pour I et que B est vraie pour I, Rdd est vraie pour I et donc $(\exists y.Rdy) \Rightarrow Rdd$ est vraie pour I.

Dans un cas comme dans l'autre, $(\exists x.Rdy) \Rightarrow Rdd$ est vraie pour I . Donc pour tout d de D $(\exists x.Rdy) \Rightarrow Rdd$ est vraie pour I et donc $\forall x.\ ((\exists y.Rxy) \Rightarrow Rxx)$ est vaie pour I.
Donc toute interprétation satisfaisant A et B satisfait C.

Raisonnement et calcul dans les modèles Si on veut une preuve plus formelle, qui fasse référence au calcul de l'interprétation, on peut procéder ainsi.
Soit I une interprétation de domaine D dans laquelle A et B sont vraies, c'est à dire $[\![A]\!]_{I\rho[]} = 1$ et $[\![A]\!]_{I\rho[]}$ =1
Soit $d \in D$, nous sommes forcément dans l'un des deux cas suivants :

- si pour tout $d' \in D$ $\neg R_I dd'$ alors $[\![\exists x.Rxy]\!]_{I\rho[d/x]} = \mathbf{0}$ et donc

$$\begin{array}{rcl} [\![(\exists y.Rxy) \Rightarrow Rxx]\!]_{I\rho[d/x]} & = & [\![(\exists y.Rxy)]\!]_{I\rho[d/x]} \Rightarrow_B [\![Rxx]\!]_{I\rho[d/x]} \\ & = & \mathbf{0} \Rightarrow_B [\![Rxx]\!]_{I\rho[d/x]} \\ & = & \mathbf{1} \end{array}$$

- sinon il existe $d' \in D$ tel que $R_I dd'$. Comme A est vraie pour I,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{1} = [\![A]\!]_{I\rho[]} & = & \wedge_{e,e' \in D} [\![Rxy \Rightarrow Ryx]\!]_{I\rho[e/x,e'/y]} \\ & \leq & [\![Rxy \Rightarrow Ryx]\!]_{I\rho[d/x,d'/y]} \end{array}$$

  Donc $R_I dd' \Rightarrow_B Rd'd = \mathbf{1}$ et comme $R_I dd' = \mathbf{1}$ on a $R_I d'd = \mathbf{1}$.
  Comme $R_I dd' = \mathbf{1}$ et $R_I d'd = \mathbf{1}$, $R_I dd' \wedge_B R_I d'd = \mathbf{1}$.
  Comme B est vraie pour I,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{1} = [\![B]\!]_{I\rho[]} & = & \wedge_{e,e',e'' \in D} [\![(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz]\!]_{I\rho[e/x,e'/y,e''/z]} \\ & \leq & [\![(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz]\!]_{I\rho[d/x,d'/y,d/z]} \\ & = & [\![(Rxy \wedge Ryz)]\!]_{I\rho[d/x,d'/y,d/z]} \Rightarrow_B [\![Rxz]\!]_{I\rho[d/x,d'/y,d/z]} \end{array}$$

  Comme $[\![(Rxy \wedge Ryz)]\!]_{I\rho[d/x,d'/y,d/z]} = R_I dd' \wedge_B R_I d'd = \mathbf{1}$
  on a forcément $[\![Rxz]\!]_{I\rho[d/x,d'/y,d/z]} = \mathbf{1}$ c'est-à-dire $R_I dd = \mathbf{1}$.
  Finalement :

$$\begin{array}{rcl} [\![(\exists y.Rxy) \Rightarrow Rxx]\!]_{I\rho[d/x]} & = & [\![(\exists y.Rxy)]\!]_{I\rho[d/x]} \Rightarrow_B [\![Rxx]\!]_{I\rho[d/x]} \\ & = & [\![(\exists y.Rxy)]\!]_{I\rho[d/x]} \Rightarrow_B \mathbf{1} \\ & = & \mathbf{1} \end{array}$$

Dans un cas comme dans l'autre, et donc pour toute valeur de d dans D

$$[\![(\exists y.Rxy) \Rightarrow Rxx]\!]_{I\rho[d/x]} = \mathbf{1}$$

donc

$$[\![\forall x.\ ((\exists y.Rxy) \Rightarrow Rxx)]\!]_{I\rho[]} = \mathbf{1}$$

Ainsi pour toute interprétation I dans laquelle A et B sont vraies, C est vraie, $A, B \Vdash C$.