Méthode de résolution en calcul des séquents

correction de la résolution

HLIN602 Logique II Christian Retoré

version revue le: 29 avril 2020

1 Résolution et calcul des séquents

Le but de ce petit chapitre est de montrer que la méthode de résolution est correcte, en établissant une correspondance entre séquents et clauses, et entre règles du calcul des séquents et résolution.

1 Une clause $\mathscr{C} : (\neg B_1), \ldots, (\neg B_n), C_1, \ldots, C_n$ avec
— B_i et C_j atomiques
— variables libres $x_1, \ldots, x_q$.

correspond au séquent $Seq_{\mathscr{C}} : \neg B_1, \ldots, B_n \vdash C_1, \ldots, C_n$:
toute interprétation et assignation des x_i rendant $\mathscr{C}$ vrai rend $Seq_{\mathscr{C}}$ vrai.

2 Si $\mathscr{C}$ est un résolvant de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}'_2$
alors le calcul des séquents dérive $Seq_{\mathscr{C}}$ à partir de $Seq_{\mathscr{C}_1}$ et $Seq_{\mathscr{C}'_2}$

C'est à dire que le calcul des séquents "contient" la résolution.
(La réciproque qu'on obtiendra indirectement, est aussi vraie.)

2 Méthode de résolution (rappel)

Pour chercher une contradiction dans la conjonction

$$C_1, \ldots, C_n, (\neg B_1), \ldots, (\neg B_n)$$

la méthode de résolution consiste à :

1. écrire chaque C_i et chaque $(\neg B_j)$ comme une clause $\mathscr{C}_k$, et utiliser des variables différentes dans les diverses clauses.
2. unifier éventuellement plusieurs atomes positifs d'une clause et plusieurs atomes négatifs d'une autres clauses (plusieurs : sinon la méthode n'est pas complète)
3. simplifier les deux clauses unifiées

C'est plus simple sur un exemple.

3 Résolution : unifier et simplifier. Exemple.

clauses :
$C_1 = \neg B(f(w)) \vee A(w, f(w)) \vee E(f(w), w)$
$C_2 = \neg C(g(u)) \vee \neg A(u, v) \vee \neg A(u, f(u)) \vee E(g(u), g(v))$

unification σ : $[x/w; x/u; f(x)/v]$ **et contraction :**
$\sigma(C_1) = \neg B(f(x)) \vee A(x, f(x)) \vee E(f(x), x)$
$\sigma(C_2) = \neg C(g(x)) \vee \neg A(x, f(x)) \vee E(g(x), g(f(x)))$
($A(u, v) \vee A(u, f(u))$ *avec* $u := x$ *et* $v := f(x)$ *est devenu* $A(x, f(x))$)

On neutralise un atome X de $\sigma(C_1)$ avec un atome $\neg X$ de $\sigma(C_2)$ comme dans la règle de résolution propositionnelle

résolvant de C_1, C_2 avec σ : $[x/w; x/u; f(x)/v]$:
$C_{1,2} = \neg C(g(x)) \vee E(f(x), x) \vee E(g(x), g(f(x)))$

4 Séquents à une ou plusieurs formules 1/3

$$\mathscr{S}_1 : \quad F_1, ..., F_n \vdash G_1, ..., G_p$$

$$\mathscr{S}_2 : \quad \vdash (\neg F_1) \vee \cdots \vee (\neg F_n) \vee G_1 \vee \cdots \vee G_p$$

De $\mathscr{S}_1$ on peu dériver $\mathscr{S}_2$ et réciproquement.

Pour passer de $\mathscr{S}_1$ à $\mathscr{S}_2$ il faut faire passer les F_i de gauche à droite en utilisant n fois la règle $\neg_d$, puis regrouper les $\neg F_i$ et les G_j avec la règle $\vee_d$ utilisée $n+p-1$ fois.

5 Séquents à une ou plusieurs formules 2/3

Pour passer de $\mathscr{S}_2$: $\vdash (\neg F_1) \vee \cdots \vee (\neg F_n) \vee G_1 \vee \cdots \vee G_p$
à $\mathscr{S}_1$: $F_1, ..., F_n \vdash G_1, ..., G_p$ c'est plus compliqué :
seule la règle de coupure déconstruit les connecteurs.

Il faut combiner $\mathscr{S}_2$ $n+p-1$ fois avec cette preuve partielle :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,axiom \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,axiom}{A \vee B \vdash A, B}\,\vee_g}{\Gamma \vdash \Delta, A, B}\,cut$$

ce qui conduit à une preuve de : $\vdash (\neg F_1), \ldots, (\neg F_n), G_1, \ldots, G_p$

6 Séquents à une ou plusieurs formules 3/3

Une fois passé de $\mathscr{S}_2$ à : $\vdash (\neg F_1), \ldots, (\neg F_n), G_1, \ldots, G_p$
il faut encore "faire passer" les $\neg F_i$ à gauche ce qui se fait en combinant la preuve obtenue précédemment n fois avec la preuve ci-dessous :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg U, \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{}{U \vdash U}\,axiom}{\neg U, U \vdash}\,\neg_g}{\Gamma, U \vdash \Delta}\,cut$$

les $\neg$ disparaissent ainsi ce qui conduit à $\mathscr{S}_1$: $\quad F_1, ..., F_n \vdash G_1, ..., G_p$.

7 Séquents unaires et quantification universelle

On peut dériver d'un séquent à une formule à droite n'importe quelle de ces instances obtenue par substitution des variables libres.

$$\dfrac{\vdash \forall x_k A[x_k] \qquad \dfrac{\dfrac{}{A[t] \vdash A[t]}\ \mathit{axiome}}{\forall x_k\ A[x_k] \vdash A[t]}\ \forall_l}{\vdash A[t]}\ \mathit{cut}$$

8 Séquents et substitution 1/2

Si un séquent $\mathscr{S}$: $F_1,...,F_n \vdash G_1,...,G_p$ est dérivable
alors il en est de même du séquent $\sigma(\mathscr{S})$: $\sigma(F_1),...,\sigma(F_n) \vdash \sigma(G_1),...,\sigma(G_p)$
où σ est une substitution de ses variables libres.

En utilisant la propriéte de $\mathscr{S}_1$ vers $\mathscr{S}_2$ à partir du séquent $\mathscr{S}$: $F_1,...,F_n \vdash G_1,...,G_p$ on peut dériver : $\vdash (\neg F_1) \vee \cdots \vee (\neg F_n) \vee G_1 \vee \cdots \vee G_p$.

9 Séquents et substitution 2/2

De $\vdash (\neg F_1) \vee \cdots \vee (\neg F_n) \vee G_1 \vee \cdots \vee G_p$, avec k règles $\forall_r$
on peut dériver $\vdash \forall x_1 \cdots x_k \Big((\neg F_1) \vee \cdots \vee (\neg F_n) \vee G_1 \vee \cdots \vee G_p \Big)$

Ce séquent n'ayant plus qu'une formule, grâce à la propriété on peut dériver le séquent : $\vdash \sigma \Big((\neg F_1) \vee \cdots \vee (\neg F_n) \vee G_1 \vee \cdots \vee G_p \Big)$

qui vaut :

$\vdash (\neg \sigma(F_1)) \vee \cdots \vee (\neg \sigma(F_n)) \vee \sigma(G_1) \vee \cdots \vee \sigma(G_p)$

et grace à la proposition de $\mathscr{S}_2$ vers $\mathscr{S}_1$ on obtient une preuve de

$\sigma(\mathscr{S})$: $\sigma(F_1), ..., \sigma(F_n) \vdash \sigma(G_1), ..., \sigma(G_p)$

10 Clauses en calcul des séquents : 3 variantes

Une clause est une formule $\forall x_1 \cdots x_k.\ (\neg F_1) \vee \cdots \vee (\neg F_n) \vee G_1 \vee \cdots \vee G_p$ où les F_i et les G_j sont atomiques.

Chacun des 3 séquents ci-dessous permet de dériver les autres.

1. $\vdash \forall x_1 \cdots x_k.\ \Big((\neg F_1) \vee \cdots \vee (\neg F_n) \vee G_1 \vee \cdots \vee G_p\Big)$
2. $\vdash (\neg F_1) \vee \cdots \vee (\neg F_n) \vee G_1 \vee \cdots \vee G_p$
3. $\vdash F_1, \ldots, F_n \vdash G_1, \ldots, G_p$

On obtient 1 à partir de 2 en appliquant k règles $\forall_d$.
On obtient 2 à partir de 3 avec n règles $\neg_d$ suivi de $n+p-1$ règles $\vee_d$.
On obtient 3 à partir de 1 en instanciant les x_i par eux mêmes dans la proposition puis en utilisant la proposition de $\mathscr{S}_2$ vers $\mathscr{S}_2$.

11 Résolution en mode séquents 1/3

Soit $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ deux clauses auxquelles la résolution s'applique.
$\mathscr{C}' = (\neg H'_1) \vee \cdots \vee (\neg H'_{n'}) \vee C_1 \vee \cdots \vee C_p$
$\mathscr{C}'' = (\neg H_1) \vee \cdots \vee (\neg H_n) \vee C''_1 \vee \cdots \vee C''_{p''}$

Il existe donc une substitution σ telle que certains $\sigma(C_i)$ valent X (les autres : C'_k) et certains $\sigma(H_i)$ s'unifient en un même atome négatif $\neg X$ (les autres : H''_j).
$\sigma(\mathscr{C}') = (\neg\sigma(H'_1)) \vee \cdots \vee (\neg\sigma(H'_{n'})) \vee C'_1 \vee \cdots \vee C'_{p'} \vee X \vee \ldots \vee X$
$\sigma(\mathscr{C}'') = (\neg X) \vee \cdots \vee (\neg X) \vee (\neg H''_1) \vee \cdots \vee (\neg H''_{n''}) \vee \sigma(C''_1) \vee \cdots \vee \sigma(C''_{p''})$

Le résolvant s'obtient en simplifiant les X de $\sigma(\mathscr{C}')$ avec les $(\neg X)$ de $\sigma(\mathscr{C}'')$:
$\mathscr{C} = (\neg H'_1) \vee \cdots \neg(H'_{n'}) \vee (\neg H''_1) \vee \cdots \vee (\neg H''_{n''}) \vee C'_1 \vee \cdots \vee C'_{p'} \vee C''_1 \vee \cdots \vee C''_{p''}$

12 Résolution en mode séquents 2/3

Les deux clauses $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ correspondent à deux séquents :
$Seq_{\mathscr{C}'} = H'_1, \ldots, H'_{n'} \vdash C_1, \ldots, C_p$
$Seq_{\mathscr{C}''} = H_1, \ldots, H_n \vdash C''_1, \ldots, C''_{p''}$

D'après **??** on peut dériver
$Seq_{\sigma(\mathscr{C}')} = \sigma(H'_1), \ldots, \sigma(H'_{n'}) \vdash C'_1, \ldots, C'_{p'}, X, \ldots, X$ à partir de $Seq_{\mathscr{C}'}$
$Seq_{\sigma(\mathscr{C}'')} = (\neg X), \ldots, (\neg X), H''_1, \ldots, H''_{n''} \vdash \sigma(C''_1), \ldots, \sigma(C''_{p''})$ à partir de $Seq_{\mathscr{C}''}$

Par contraction, on peut dériver :
$Seq^c_{\sigma(\mathscr{C}')} = \sigma(H'_1), \ldots, \sigma(H'_{n'}) \vdash C'_1, \ldots, C'_{p'}, X$ à partir de $Seq_{\mathscr{C}'}$
$Seq^c_{\sigma(\mathscr{C}'')} = X, H''_1, \ldots, H''_{n''} \vdash \sigma(C''_1), \ldots, \sigma(C''_{p''})$ à partir de $Seq_{\mathscr{C}''}$

Et par coupure on peut dériver de $Seq^c_{\sigma(\mathscr{C}')}$ et $Seq^c_{\sigma(\mathscr{C}'')}$:
$\sigma(H'_1), \ldots, \sigma(H'_{n'}), H''_1, \ldots, H''_{n''} \vdash \sigma(C''_1), \ldots, \sigma(C''_{p''}) = Seq_{\mathscr{C}}$

13 Résolution en mode séquents 3/3

Pour résumer :

si une clause $\mathscr{C}$ s'obtient par résolution à partir des clauses $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$

alors le séquent correspondant au résolvant $Seq_{\mathscr{C}}$ est dérivable dans le calcul des séquents (par substitution, contraction et coupure) à partir des séquents $Seq_{\mathscr{C}'}$ et $Seq_{\mathscr{C}''}$ correspondant aux clauses $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$

14 Interprétation, clause et séquents

Etant donné une interprétation I clause $\mathscr{C} = (\neg H_1) \vee \cdots \vee (\neg H_n) \vee C_1 \vee \cdots \vee C_p$ est valide si et seulement si le séquent associé $Seq_{\mathscr{C}} = H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p$ est vraie pour I et pour tout ρ.

Une clause est implicitement universellement quantifiée donc
$\mathscr{C} = (\neg H_1) \vee \cdots \vee (\neg H_n) \vee C_1 \vee \cdots \vee C_p$ est vraie pour I
si et seulement si, pour toute assignation ρ,
$[[(\neg H_1) \vee \cdots \vee (\neg H_n) \vee C_1 \vee \cdots \vee C_p]]_{I,\rho} = VRAI$.

Le séquent correspondant $Seq_{\mathscr{C}} = H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p$ est aussi vrai pour tout I est pour tout ρ :

$$\begin{array}{rcl} [[Seq_{\mathscr{C}}]]_{I,\rho} & = & [[(H_1 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee \cdots \vee C_p)]]_{I,\rho} \\ & = & [[(\neg H_1) \vee \cdots \vee (\neg H_n) \vee C_1 \vee \cdots \vee C_p]]_{I,\rho} \\ & = & VRAI \end{array}$$

15 Correction de la résolution

Soit un ensemble de clauses $\mathscr{C}_n$, telle que la méthode de résolution dérive $\perp$ à partir de $\mathscr{C}_n$. Alors elles sont instatisfiables.

Supposons que ces clauses soient simultanément satisfiables pour une assignation I. Chacune de ces clauses a une séquent associé $Seq_{\mathscr{C}_n}$, qui est vrai pour I. Comme nous venons de le voir la résolution peut être simulée par des règles du calcul des séquents et comme nous l'avons vu en TD les règles du calcul des séquents préservent la vérité des séquents pour une interprétation I.

Donc si les $\mathscr{C}_n$ sont vraies pour I et dérivent $\perp$ par résolution alors le séquent vide obtenu à partir des $Seq_{\mathscr{C}_n}$ qui sont vraies pour I serait vrai pour I. Il n'y a donc pas d'interprétation satisfasse simultanément toutes les clauses C_n.