Corrigé sujet Programmation Linéaire Session Mai 2018

Exercice 1

Le programme linéaire est fourni sous forme canonique (avec des inférieurs ou égal)

$$\begin{cases} Max \quad 5\,x_1 + 3\,x_2 \\ \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad (1) \\ \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 20 \quad (2) \\ \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \quad (3) \\ \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Mise sous forme standard (avec des égalités par ajout de variables d'écart)

$$\begin{cases} Max \quad 5\,x_1 + 3\,x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 + s_1 \qquad\quad = 12 \quad (1) \\ 4x_1 + 6x_2 \qquad + s_2 \quad = 20 \quad (2) \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad + s_3 = 8 \quad (3) \\ \qquad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Les variables d'écart sont la Base, on exprime celles-ci en fonction des variables Hors Base

$$\begin{cases} Max \quad 5\,x_1 + 3\,x_2 \\ s_1 = -4x_1 - 2x_2 + 12 \quad (1) \\ s_2 = -4x_1 - 6x_2 + 20 \quad (2) \\ s_3 = -2x_1 - 3x_2 + 8 \quad (3) \\ \qquad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Nous avons donc le premier dictionnaire

	x_1	x_2	
s_1	-4	-2	12
s_2	-4	-6	20
s_3	-2	-3	8
	5	3	0

Nous maximisons : le plus grand coût réduit est 5 pour x_1 qui rentre en Base.
Le plus petit ratio $b_i/-a_{ij}$ est 12/4=3, c'est s_1 qui sort. On pivote autour de -4

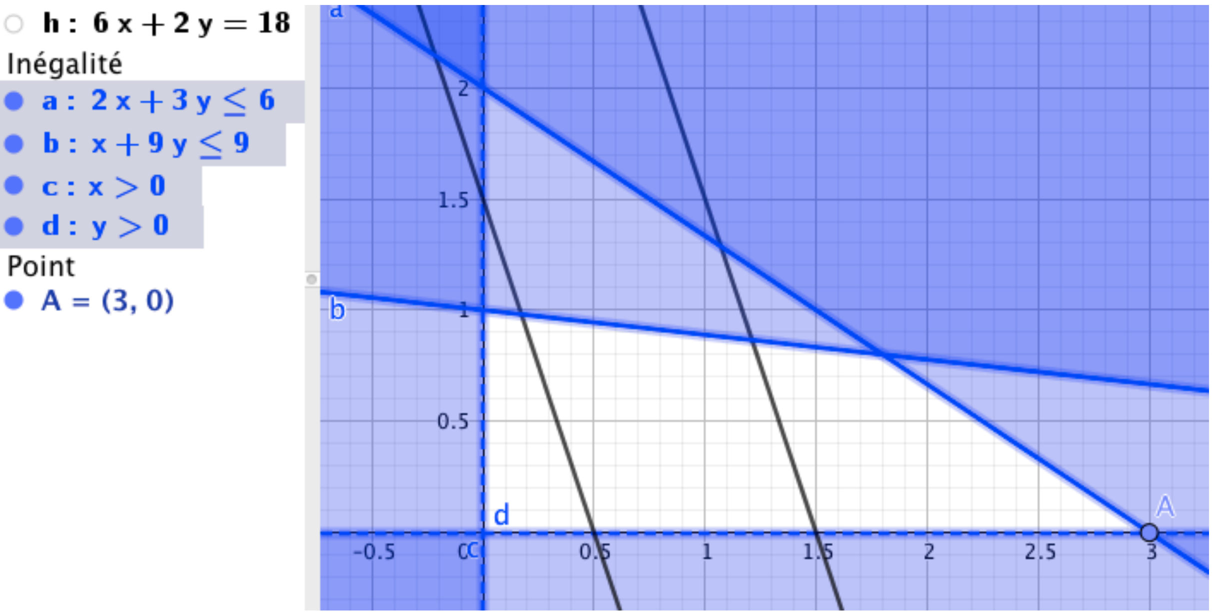
	s_1	x_2	
x_1	-1/4	-1/2	3
s_2	1	-4	8
s_3	1/2	-2	2
	-5/4	1/2	15

Le plus grand coût réduit positif est 0.5 pour x_2 qui rentre en Base.
Le plus petit ratio $b_i/-a_{ij}$ est 2/2=1, c'est s_3 qui sort, on pivote sur -2

	s_1	s_3	
x_1	-3/8	1/4	5/2
s_2	0	2	4
x_2	1/4	-1/2	1
	-9/8	-1/4	15.5

Tous les coûts sont négatifs, nous sommes à l'optimum (5/2 ; 1)

Exercice 2

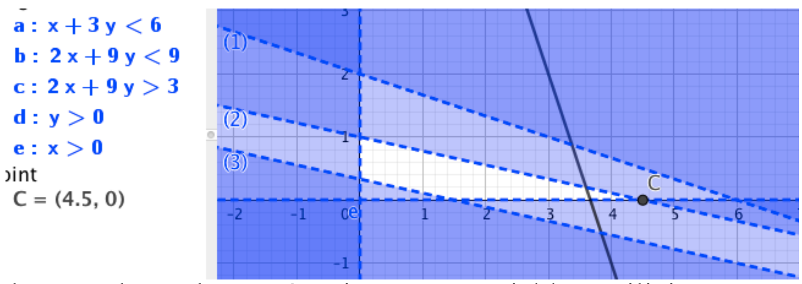


L'optimum est sur le point A en (3,0) … attention, à la pente de la fonction de coût !

Exercice 3

Nous avions le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} Max \quad 6\,x_1 + 2\,x_2 \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 6 \quad (1) \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 9 \quad (2) \\ 2x_1 + 9x_2 \geq 3 \quad (3) \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$



La contrainte (3) impose un simplexe en deux phases. On ajoute une variable auxiliaire :

$$\begin{cases} Min \quad x_0 \\ 1x_1 + 3x_2 + s_1 \qquad\qquad = 6 \;\; (1) \\ 2x_1 + 9x_2 \quad + s_2 \qquad = 9 \;\; (2) \\ 2x_1 + 9x_2 \qquad - s_3 + x_0 \;= 3 \;\; (3) \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Les variables en bases sont s_1, s_2 et x_0, les variables hors bases sont x_1 x_2 et s_3

	x_1	x_2	s_3	
s_1	-1	-3	0	6
s_2	-2	-9	0	9
x_0	-2	-9	1	3
	-2	-9	1	-3

La variable au plus fort coût réduit **négatif** (on minimise) est x_2 qui rentre en base, la variable sortante est évidemment x_0.

	x_1	x_0	s_3	
s_1	-1/3	1/3	-1/3	5
s_2	0	1	-1	6
x_2	-2/9	-1/9	1/9	1/3
	0	1	0	0

Nous avons la fonction de coût à 0 ce que nous souhaitions. La première phase du simplexe nous a amené sur le point (0,1/3) dans le polyèdre et l'on peut se débarrasser de x_0. Nous pouvons démarrer la phase 2 en réintroduisant le vrai z et en l'exprimant en fonction de x1 et s3

	x_1	s_3	
s_1	-1/3	-1/3	5
s_2	0	-1	6
x_2	-2/9	1/9	1/3
	50/9	2/9	2/3

x_1 remplace x_2

	x_2	s_3	
s_1	3/2	-1/2	9/2
s_2	0	-1	6
x_1	-9/2	1/2	3/2
	-25	-3	9

Nous sommes dans le point (3/2 ; 0) de coût 9. Seul s_3 est nul, on est collé à la courbe (3) les deux autres étant encore libre. Il reste un coût positif.

s_2 remplace s_3

	x_2	s_2	
s_1	3/2	1/2	3/2
s_3	0	1	6
x_1	-9/2	-1/2	9/2
	-25	-3	27

Nous sommes en (4.5 ; 0) [C sur la figure], tous les coûts réduits sont négatifs, l'optimum est donc de 27, mais n'est pas entier. Le point le plus proche est (4,0). Au final, nous ne faisons quatre fois la première recette !

Exercice 4

1/ Le modèle fourni peut se réécrire comme suit :

$$\left\{\begin{array}{llllllllllllll}
Min & 1x_{1,1} + 2x_{1,2} + 1{,}5x_{1,3} + 2x_{1,4} + 1{,}5x_{2,1} + 1x_{2,2} + 3x_{2,3} + 5x_{2,4} + 1{,}1x_{3,1} + 2x_{3,2} + 1x_{3,3} + 1000x_{3,4} & & \\
& x_{1,1} \quad + x_{2,1} \quad + x_{3,1} & \geq 30 & (1) \\
& x_{1,2} \quad + x_{2,2} \quad + x_{3,2} & \geq 20 & (2) \\
& x_{1,3} \quad + x_{2,3} \quad + x_{3,3} & \geq 50 & (3) \\
& x_{1,4} \quad + x_{2,4} \quad + x_{3,4} & \geq 30 & (4) \\
& x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} & \leq 70 & (5) \\
& x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} & \leq 50 & (6) \\
& x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} & \leq 10 & (7) \\
& x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,4} \geq 0 & &
\end{array}\right.$$

Mis sous forme canonique, il devient :

$$\left\{\begin{array}{llll}
Min & 1x_{1,1} + 2x_{1,2} + 1{,}5x_{1,3} + 2x_{1,4} + 1{,}5x_{2,1} + 1x_{2,2} + 3x_{2,3} + 5x_{2,4} + 1{,}1x_{3,1} + 2x_{3,2} + 1x_{3,3} + 1000x_{3,4} & & \\
& -x_{1,1} \quad - x_{2,1} \quad - x_{3,1} & \leq -30 & (-1) \\
& -x_{1,2} \quad - x_{2,2} \quad - x_{3,2} & \leq -20 & (-2) \\
& -x_{1,3} \quad - x_{2,3} \quad - x_{3,3} & \leq -50 & (-3) \\
& -x_{1,4} \quad - x_{2,4} \quad - x_{3,4} & \leq -30 & (-4) \\
& x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} & \leq 70 & (5) \\
& x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} & \leq 50 & (6) \\
& x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} & \leq 10 & (7) \\
& x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,4} \geq 0 & &
\end{array}\right.$$

C'est à dire que pour un programme linéaire exprimé habituellement par :

$$\left\{\begin{array}{ll}
Max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
s.c & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b \qquad j = 1, \dots, m \\
& et \;\; x \geq 0
\end{array}\right.$$

Les 3 matrices sont A, b et c sont :

$$A = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{-30} \\ \mathbf{-20} \\ \mathbf{-50} \\ \mathbf{-30} \\ \mathbf{70} \\ \mathbf{50} \\ \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

et c = (-1, -2, -1.5, -2, -1.5, -1, 3, -5, -1.1, -2, -1, -1000)

2/ La solution fournie nous apprend que $x_{2,2}$=20 ; $x_{1,1}$=30 et $x_{1,4}$=30 ; $x_{3,3}$=10, $x_{3,1}$=10 et $x_{3,2}$=30. Les 6 autres variables sont donc nulles. Habituellement dans une solution courante du simplexe, les variables Hors Base sont nulles et les variables en Base sont déduites. Ici, nous avons 12 variables et 7 équations, soit 19 variables si l'on ajoute les variables d'écart s_1 à s_7. Nous connaissons 6 des 7 variables de la Base B = ($x_{1,1}$; $x_{1,4}$; $x_{2,2}$; $x_{3,1}$; $x_{3,2}$; $x_{3,3}$;?). Si on regarde les variables d'écart, c'est la contrainte (5) qui n'est pas saturée par la solution, c'est donc s_5 qui est la dernière variable en Base.

L'intérêt de cette solution, réside dans le fait qu'au lieu de faire le simplexe en deux phases, il est déjà possible de forcer le pivotage pour être sur un coin admissible du polyèdre, correspondant à cette solution. C'est ce que l'on appelle un *warm-start.*