# Sémantique de la logique du premier ordre

David Delahaye

Faculté des Sciences David.Delahaye@lirmm.fr

Licence L3 2019-2020

# Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

### Définitions préliminaires

- $V \equiv$  ensemble de variables d'individu x, y, etc.;
- $S_F \equiv$  ensemble de symboles de fonctions f, g, etc.;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \equiv$  ensemble de symboles de prédicats P, Q, etc.;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \emptyset$ ;
- Arité (nombre d'arguments)  $m: \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \to \mathbb{N}:$ 
  - Exemple : pour f(x, y) avec  $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ , m(f) = 2;
  - Exemple : pour P(x, y, z) avec  $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ , m(P) = 3.

# Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

### Termes du premier ordre

- ullet Plus petit ensemble  ${\mathcal T}$  t.q. :
  - ▶ Si  $x \in \mathcal{V}$  alors  $x \in \mathcal{T}$ ;
  - ▶ Si  $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  d'arité n et  $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$  alors  $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$ .
- Les constantes sont des fonctions d'arité 0;
- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans nos exemples.

### Formules du premier ordre

- ullet Plus petit ensemble  ${\cal F}$  t.q. :
  - ▶ Si  $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  d'arité n et  $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$  alors  $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$ ;
  - $\bot$ ,  $\top \in \mathcal{F}$ ;
  - ▶ Si  $\Phi \in \mathcal{F}$  alors  $\neg \Phi \in \mathcal{F}$ ;
  - ▶ Si  $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$  alors  $\Phi \land \Phi', \Phi \lor \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$ ;
  - ▶ Si  $x \in \mathcal{V}$  et  $\Phi \in \mathcal{F}$  alors  $\forall x.\Phi, \exists x.\Phi \in \mathcal{F}$ .

### Sémantiques

### Logique classique

- Une formule est toujours vraie ou fausse;
- Que je puisse en démontrer la validité ou non;
- Logique bi-valuée (vrai, faux);
- Logique du « tiers exclu » :  $A \lor \neg A$ .

### Logique intuitionniste ou constructive

- Une formule est vraie, fausse, ou « on ne sait pas »;
- Si on ne sait en démontrer la validité, alors « on ne sait pas »;
- Logique tri-valuée d'une certaine manière;
- Le « tiers exclu » n'est pas admis dans cette logique.

### Interprétation

• Une interprétation I est un ensemble non vide  $D_I$ , appelé le domaine de l'interprétation, muni d'éléments I(c) de  $D_I$  pour chaque symbole de constante (fonction d'arité 0), et d'une application I(P) de  $D_I^n$  vers  $\mathcal B$  pour chaque symbole de prédicat P d'arité n.

#### Affectation

- Une affectation ho est une application de  ${\cal V}$  vers  $D_I$ ;
- Pour toute affectation  $\rho$ ,  $\rho[v/x]$  est l'affectation envoyant chaque variable y autre que x vers  $\rho(y)$ , et x vers v.

### Remarque

• Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans la sémantique.

#### **Termes**

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation  $\rho$ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si  $x \in \mathcal{V}$  alors  $[x]_{\rho}^{I} = \rho(x)$ ;
  - Si  $c \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  d'arité 0 (constante) alors  $\llbracket c 
    rbracket^I_
    ho = I(c)$ .

#### **Prédicats**

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation  $\rho$ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si  $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  d'arité n et  $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$  alors  $\llbracket P(t_1, \ldots, t_n) \rrbracket_{\rho}^I = I(P)(\llbracket t_1 \rrbracket_{\rho}^I, \ldots, \llbracket t_n \rrbracket_{\rho}^I)$ ;

### Formules propositionnelles

• Dans une interprétation I, et modulo l'affectation  $\rho$ , la sémantique des termes et des formules est définie par :

```
\begin{split} & \| \top \|_{\rho}^{I} = T, \ \| \bot \|_{\rho}^{I} = F; \\ & \text{Si } \Phi \in \mathcal{F} \text{ alors } \| \neg \Phi \|_{\rho}^{I} = \neg_{\mathcal{B}} \| \Phi \|_{\rho}^{I}; \\ & \text{Si } \Phi, \Phi' \in \mathcal{F} \text{ alors } : \\ & \| \Phi \wedge \Phi' \|_{\rho}^{I} = \| \Phi \|_{\rho}^{I} \wedge_{\mathcal{B}} \| \Phi' \|_{\rho}^{I}; \\ & \| \Phi \vee \Phi' \|_{\rho}^{I} = \| \Phi \|_{\rho}^{I} \vee_{\mathcal{B}} \| \Phi' \|_{\rho}^{I}; \\ & \| \Phi \Rightarrow \Phi' \|_{\rho}^{I} = \| \Phi \|_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \| \Phi' \|_{\rho}^{I}; \\ & \| \Phi \Leftrightarrow \Phi' \|_{\rho}^{I} = \| \Phi \|_{\rho}^{I} \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} \| \Phi' \|_{\rho}^{I}. \end{split}
```

où  $\neg_{\mathcal{B}}$ ,  $\wedge_{\mathcal{B}}$ ,  $\vee_{\mathcal{B}}$ ,  $\Rightarrow_{\mathcal{B}}$ , et  $\Leftrightarrow_{\mathcal{B}}$  sont les fonctions d'interprétation de la logique propositionnelle.

#### Quantificateurs

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation  $\rho$ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si  $x \in \mathcal{V}$  et  $\Phi \in \mathcal{F}$  alors :
    - $\llbracket \forall x. \Phi \rrbracket_{\rho}^{I} = \bigwedge_{v \in D_{I}} \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho \llbracket v/x \rrbracket}^{I};$
    - $* [\exists x. \Phi]_{\rho}^{I} = \bigvee_{v \in D_{I}} [\Phi]_{\rho[v/x]}^{I}.$
  - où ∧ est la conjonction distribuée et ∨ la disjonction distribuée :

    - $\bigwedge_{v \in D_I} f(v) = f(v_0) \wedge_{\mathcal{B}} f(v_1) \wedge_{\mathcal{B}} \dots, \text{ avec } v_0, v_1, \dots \in D_I;$   $\bigvee_{v \in D_I} f(v) = f(v_0) \vee_{\mathcal{B}} f(v_1) \vee_{\mathcal{B}} \dots, \text{ avec } v_0, v_1, \dots \in D_I.$

#### **Définition**

• Dans une interprétation I, et modulo l'affectation  $\rho$ , la sémantique des termes et des formules est définie par :

```
Si x \in \mathcal{V} alors [x]_{\rho}^{I} = \rho(x);
Si c \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}} d'arité 0 (constante) alors [\![c]\!]_{a}^{I} = I(c);
  ▶ Si P \in S_{\mathcal{D}} d'arité n et t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T} alors
                                            [P(t_1,\ldots,t_n)]_0^I = I(P)([t_1]_0^I,\ldots,[t_1]_0^I);
\blacksquare \square \square = T, \square \square = F;
\triangleright Si \Phi \in \mathcal{F} alors \llbracket \neg \Phi \rrbracket_a^I = \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi \rrbracket_a^I;
  ▶ Si \Phi, \Phi' \in \mathcal{F} alors :
                                                                                     \star \quad \llbracket \Phi \Rightarrow \Phi' \rrbracket_{\rho}^{I} = \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_{\rho}^{I};
                                                                                     \star \tilde{\boldsymbol{\mathbf{A}}} \boldsymbol{\mathbf{A}} \boldsymbol{\mathbf{A}}
  ▶ Si x \in \mathcal{V} et \Phi \in \mathcal{F} alors :
                                                                                        \star \| \forall x. \Phi \|_{\rho}^{I} = \bigwedge_{v \in D_{I}} \| \Phi \|_{\rho[v/x]}^{I};
                                                                                        \star \|\exists x. \Phi\|_{\rho}^{I} = \bigvee_{y \in D_{\bullet}} \|\Phi\|_{\rho[y/x]}^{I}.
```

#### Remarque

- La sémantique donnée est valable pour des formules closes ou non;
- Si une formule  $\Phi$  est close, sa sémantique  $\llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I$  ne dépend pas de  $\rho$ ;
- Pour une formule close  $\Phi$ , sa sémantique sera donc notée  $\llbracket \Phi \rrbracket^I$ ;
- Par la suite, nous ne considérerons que des formules closes.

# Sémantique

#### Vocabulaire

- Soit Φ une formule et I une interprétation;
- I est un modèle de  $\Phi$  ou I satisfait  $\Phi$ , noté  $I \models \Phi$ , ssi  $\llbracket \Phi \rrbracket^I = T$ ;
- Un ensemble G de formules entraîne Φ, noté G ⊨ Φ, ssi toutes les interprétations satisfaisant toutes les formules de G en même temps (les modèles de G) sont aussi des modèles de Φ, c'est-à-dire quand I ⊨ Φ' pour tout Φ' ∈ G implique I ⊨ Φ;
- $\Phi$  est valide ssi  $\Phi$  est vraie dans toute interprétation ( $\llbracket \Phi \rrbracket^I = T$  pour tout I, noté  $\models \Phi$ ), et est invalide sinon;
- Une formule valide est aussi appelée une tautologie;
- $\Phi$  est satisfiable ssi elle est vraie dans au moins une interprétation ( $\llbracket \Phi \rrbracket^I = T$  pour un certain I, c'est-à-dire elle a un modèle), et est insatisfiable sinon.

# Sémantique

#### Vocabulaire

- Toutes les formules valides sont satisfiables, et toutes les formules insatisfiables sont invalides;
- Ceci divise l'espace des formules en trois catégories :
  - Les valides (toujours vraies);
  - Les insatisfiables (toujours fausses);
  - Les formules contingentes (parfois vraies, parfois fausses).
- La validité et l'insatisfiabilité se correspondent via négation : Φ est valide ssi ¬Φ est insatisfiable, Φ est insatisfiable ssi ¬Φ est valide.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$ ;
- Démonstration :

```
 \begin{split} & \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x. P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \rho[v/x](x) = \\ & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T. \end{split}
```

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$ ;
- Démonstration :

```
 [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} = [P(x)]_{\rho[x]}^{I} = [P(
```

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$ ;
- Démonstration :

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} = [P(x)$$

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} = [P(x)]_{\rho[x/x]}^{I} = [P(x)$$

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I_{\rho} = [P(a)]^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]^I_{\rho} = [P(a)]^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]^I_{\rho} = [P(x)]^I_{\rho[v/x]} = [P(x)]^I_$$

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$ ;
- Démonstration :

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$ ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(x)]_{\rho[\nu/x]}^{I} = [P(x)$

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} = [P(x)]_{\rho[x/x]}^{I} = [P(x)$$

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^I = [P(a)]_{\rho}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^I = I(P)([a]]_{\rho}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^I = I(P)([a]]_{\rho}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^I = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^I = I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = I \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = I \Rightarrow_{\mathcal{B}} I = I(P)(a_0) = I \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = I \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = I(P)(A_0) =$$

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$ ;
- Démontrer que I est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^I = [P(a)]_{\rho}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^I = I(P)([a]]_{\rho}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^I = I(P)([a]]_{\rho}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^I = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^I = I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = I \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = I \Rightarrow_{\mathcal{B}} I = I.$$

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
  - $\begin{aligned}
    & [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I_{\rho} = \\
    & [P(a)]^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]^I_{\rho} = \\
    & I(P)([a]^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [P(x)]^I_{\rho[v/x]} = \\
    & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[x]^I_{\rho[v/x]} = \\
    & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\
    & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\
    & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F = F.
    \end{aligned}$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow orall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [P(a)]_{\rho}^{I} = [$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [P(a)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

#### Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_{0}\}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_{0}\}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_{0}\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} I(P)(a_{1}) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F = F.$$

• La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = [I(P)([a]]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_{0}\}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_{0}\}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_{0}\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} I(P)(a_{1}) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I_{\rho} = [P(a)]^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]^I_{\rho} = I(P)([a]^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]^I_{\rho} = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [P(x)]^I_{\rho[v/x]} = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[x]^I_{\rho[v/x]} = I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v) = I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = I(P)(a_1) + I(P)(a_1) = I(P)(a_1) + I(P)(a_1)$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I_{\rho} = [P(a)]^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]^I_{\rho} = I(P)([a]^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [P(x)]^I_{\rho[v/x]} = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[x]^I_{\rho[v/x]} = I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = I \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = I \Rightarrow_{\mathcal{B}} I \land_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
  - $$\begin{split} & \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x. P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \rho[v/x](x) = \\ & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{split}$$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Soit l'interprétation I avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$ ;
- Démontrer que I est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)]_{\rho}^I = [P(a)]_{\rho}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^I = I(P)([a]_{\rho}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\forall x. P(x)]_{\rho}^I = I(P)([a]_{\rho}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^I = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^I = I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F = F.$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x. P(x)$  est donc contingente.

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = [P(a)]^{I}_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} [P(x)]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$
The proof of the second of the second proof of the second p

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

```
\begin{split} & [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^I_{\rho} = \\ & [P(a)]^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^I_{\rho} = I(P)([a]^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [P(x)]^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[x]^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & = I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T; \\ & = I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T. \end{split}
```

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

```
 \begin{split} & \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) \rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & & I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T; \\ & & I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T. \end{split}
```

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

```
 \begin{split} & \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = I(P) (\llbracket a \rrbracket^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P) (I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P) (a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) \rho[v/x](x) = \\ & I(P) (a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) (v) = \mathcal{F}; \\ & \text{Deux cas selon } I(P) (a_0) : \\ & & I(P) (a_0) = \mathcal{F} : \mathcal{F} = \mathcal{F} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) (v) = T; \\ & & I(P) (a_0) = \mathcal{T} : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) (v) = \\ & & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) (a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T. \end{split}
```

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

```
 \begin{split} & \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) \rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T; \\ & I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T. \end{split}
```

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

```
 [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F}; 
Deux cas selon I(P)(a_{0}) :
 I(P)(a_{0}) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = T : 
 I(P)(a_{0}) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = T : 
 I(P)(a_{0}) \vee_{\mathcal{B}} ... = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} ... = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.
```

#### Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ 

```
I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T;
I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =
T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T
```

#### Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]_{\rho}^I =$$

$$[P(a)]_{\rho}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]_{\rho}^I = I(P)([a]_{\rho}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} [P(x)]_{\rho[v/x]}^I =$$

$$I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^I =$$

$$I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) =$$

$$I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ;$$

Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ 

```
I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T;
I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =
T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T
```

#### Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :

```
I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T;

I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =

T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T
```

#### Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]_{\rho}^{I} =$$

$$[P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} =$$

$$I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^{I} =$$

$$I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) =$$

$$I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F} ;$$

▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :

```
* I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;

• I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T ;
```

#### Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$\begin{split} & \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P) \rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{split}$$

Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :

\* 
$$I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$$
  
 $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$ 

#### Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]_{\rho}^{I} =$$

$$[P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} =$$

$$I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^{I} =$$

$$I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) =$$

$$I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F} ;$$

Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :

\* 
$$I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T;$$
  
\*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$   
\*  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$ 

#### Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} =$$

$$[P(a)]^{I}_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} [P(x)]^{I}_{\rho[v/x]} =$$

$$I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} =$$

$$I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) =$$

$$I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$ ;
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$

 $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$ 

#### Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T$ ;
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_t} I(P)(v) =$

 $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \ldots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$ 

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]_{\rho}^{I} =$$

$$[P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} =$$

$$I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^{I} =$$

$$I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) =$$

$$I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F} ;$$

- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_t} I(P)(v) = T$ ;
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$\begin{split} & \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{split}$$

- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_t} I(P)(v) = T$ ;
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$\begin{split} & \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x. P(x) \rrbracket^I_{\rho} = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{split}$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_t} I(P)(v) = T$ ;
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T$

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)$  est valide;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de I(P) en  $a_0$  est quelconque;
- Démonstration :

$$[P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \Rightarrow \exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]_{\rho}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} [P(x)]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_t} I(P)(v) = T$ ;
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

```
[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)([a]_{\rho}^{I}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]_{\rho}^{I} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};

Power and solar I(P)(a_{0})
```

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_v} I(P)(v) = F;$
  - $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$ 
    - $\underline{T} \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = \underline{T} \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (\underline{T} \vee_{\mathcal{B}} \dots) = \underline{T} \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \underline{T} =$ 
      - $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

```
 [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^I = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^I_{\rho} = [P(a)]^I_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^I_{\rho} = I(P)([a]]^I_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^I_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[x]^I_{\rho[v/x]} = I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v)[x](x) = I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; 
Deux cas selon I(P)(a_0):
 I(P)(a_0) = F: \mathcal{F} = F \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F; 
 I(P)(a_0) = T: \mathcal{F} = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \lor_{\mathcal{B}} \dots = I(P)(a_0) \lor_{\mathcal{
```

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

```
 [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = [P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[v]_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F}; 
Deux cas selon I(P)(a_{0}) :
 I(P)(a_{0}) = F : \mathcal{F} = F \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = F; 
 I(P)(a_{0}) = T : \mathcal{F} = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots
```

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

```
 [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]]_{\rho}^{I} = [P(a)]_{\rho}^{I} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]]_{\rho}^{I} = I(P)([a]]_{\rho}^{I}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]]_{\rho}^{I} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]]_{\rho[v/x]}^{I} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F}; 
Deux cas selon I(P)(a_{0}) :
 I(P)(a_{0}) = F : \mathcal{F} = F \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = F; 
 I(P)(a_{0}) = T : \mathcal{F} = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = T \land_{\mathcal{B}} T = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = T \land_{\mathcal{B}} T
```

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

```
 [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = [P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[v]_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F}; 
Deux cas selon I(P)(a_{0}) :
 I(P)(a_{0}) = F : \mathcal{F} = F \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = F; 
 I(P)(a_{0}) = T : \mathcal{F} = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} (I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots)
```

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

```
 [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = [P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[v]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F}; 
Deux cas selon I(P)(a_{0}):
 I(P)(a_{0}) = F : \mathcal{F} = F \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = F; 
 I(P)(a_{0}) = T : \mathcal{F} = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots) = T \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} I(P)(a_{0}) \lor_{\mathcal{B}} \dots
```

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

#### Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} =$$

$$[P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F}$$

Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ 

```
I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F;
I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =
T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =
```

#### Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = [P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ 

```
I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F;
I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =
T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =
T \wedge_{\mathcal{B}} F = F
```

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} =$   $[P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$
  - Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
    - $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F;$   $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$   $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} =$   $[P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$
  - Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
    - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_l} I(P)(v) = F ;$ \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_l} I(P)(v) =$   $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$  $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F .$

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = [P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$
  - ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
    - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_l} I(P)(v) = F ;$   $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_l} I(P)(v) =$   $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$  $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} =$   $[P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$
  - ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
    - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_l} I(P)(v) = F ;$   $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_l} I(P)(v) =$   $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$  $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F .$

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} =$$

$$[P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F;$
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = I(P)(v)$ 
    - $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}T =$

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} =$$

$$[P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F;$
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$ 
    - $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}(T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}}T = T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

#### Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} =$$

$$[P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$ ;
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$

 $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$ 

#### Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} =$$

$$[P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F;$
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$

 $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$ 

#### Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I} = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} =$$

$$[P(a)]^{I}_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)([a]^{I}_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^{I}_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)[x]^{I}_{\rho[v/x]} = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_{0}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_{I}} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_i} I(P)(v) = F$ ;
  - $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = T \wedge_{\mathcal{B}} T = T \wedge_{\mathcal{B}} T = T \wedge_{\mathcal{B}} T = T \wedge_$

 $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$ 

#### Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :

$$[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^I = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^I_{\rho} = [P(a)]^I_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^I_{\rho} = I(P)([a]]^I_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^I_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[x]^I_{\rho[v/x]} = I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F};$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
  - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$ ;
  - \*  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

#### Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \land \neg \exists x. P(x)$  est insatisfiable;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ ;
- Démonstration :
  - $[P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^I = [P(a) \land \neg \exists x. P(x)]^I_{\rho} = [P(a)]^I_{\rho} \land_{\mathcal{B}} [\neg \exists x. P(x)]^I_{\rho} = I(P)([a]]^I_{\rho}) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} [\exists x. P(x)]^I_{\rho} = I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)[x]^I_{\rho[v/x]} = I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F};$
  - Deux cas selon  $I(P)(a_0)$ :
    - \*  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_i} I(P)(v) = F;$
    - $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = T$

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \left[ \exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]^I = \left[ \exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]_{\rho}^I = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left[ P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]_{\rho[v/x]}^I = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( \left[ P(x) \right]_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \left[ P(a) \land P(b) \right]_{\rho[v/x]}^I \right) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P) \left[ x \right]_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \left[ P(a) \right]_{\rho[v/x]}^I \land_{\mathcal{B}} \left[ P(b) \right]_{\rho[v/x]}^I \right) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( \left[ a \right]_{\rho[v/x]}^I \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( \left[ b \right]_{\rho[v/x]}^I \right) \right) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( I(a) \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( I(b) \right) \right) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( a_0 \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( b_0 \right) \right) \lor_{\mathcal{B}} \\ & \left( I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( a_0 \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( b_0 \right) \right) \lor_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ \exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]^I = \left[ \left[ \exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right] \right]_{\rho}^I = \right. \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left[ \left[ P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I = \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left( \left[ \left[ P(x) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \left[ P(a) \land P(b) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \right) = \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P) \left[ x \right]_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \left[ P(a) \right]_{\rho[v/x]}^I \land_{\mathcal{B}} \left[ P(b) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \right) = \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( \left[ a \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( \left[ b \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \right) = \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( I(a) \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( I(b) \right) \right) = \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( a_0 \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( b_0 \right) \right) \lor_{\mathcal{B}} \\ & \left. \left( I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( a_0 \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( b_0 \right) \right) \lor_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

$$\|\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)\|^{I} = \|\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)\|_{\rho}^{I} = \bigvee_{v \in D_{I}} \|P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)\|_{\rho[v/x]}^{I} = \bigvee_{v \in D_{I}} (\|P(x)\|_{\rho[v/x]}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \|P(a) \land P(b)\|_{\rho[v/x]}^{I}) = \bigvee_{v \in D_{I}} (I(P)\|x\|_{\rho[v/x]}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \|P(a)\|_{\rho[v/x]}^{I}) \land_{\mathcal{B}} \|P(b)\|_{\rho[v/x]}^{I}) = \bigvee_{v \in D_{I}} (I(P)\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\|a\|_{\rho[v/x]}^{I}) \land_{\mathcal{B}} I(P)(\|b\|_{\rho[v/x]}^{I})) = \bigvee_{v \in D_{I}} (I(P)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \land_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \bigvee_{v \in D_{I}} (I(P)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} (I(P)(b_0)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}.$$

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

$$\begin{split} & \left[ \left[ \exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]^I = \left[ \exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]_{\rho}^I = \right. \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left[ P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]_{\rho[v/x]}^I = \right. \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left( \left[ P(x) \right]_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \left[ P(a) \land P(b) \right]_{\rho[v/x]}^I \right) = \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P) \left[ x \right]_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \left[ P(a) \right]_{\rho[v/x]}^I \land_{\mathcal{B}} \left[ P(b) \right]_{\rho[v/x]}^I \right) = \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( \left[ a \right]_{\rho[v/x]}^I \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( \left[ b \right]_{\rho[v/x]}^I \right) \right) = \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( I(a) \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( I(b) \right) \right) = \\ & \left. \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( a_0 \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( b_0 \right) \right) \lor_{\mathcal{B}} \\ & \left. \left( I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( a_0 \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( b_0 \right) \right) \lor_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{split}$$

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

$$\begin{split} & \left[ \left[ \exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]^I = \left[ \left[ \exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right] \right]_{\rho}^I = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left[ P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]_{\rho[v/x]}^I = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( \left[ P(x) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \left[ P(a) \land P(b) \right]_{\rho[v/x]}^I \right) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P) \left[ x \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \left[ P(a) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \land_{\mathcal{B}} \left[ P(b) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \right) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( \left[ a \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( \left[ b \right] \right) \right]_{\rho[v/x]}^I \right) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( I(a) \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( I(b) \right) \right) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( a_0 \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( b_0 \right) \right) \lor_{\mathcal{B}} \\ & \left( I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( a_0 \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( b_0 \right) \right) \lor_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{split}$$

- Démontrer que la formule  $\exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$  est valide;
- On se place dans une interprétation I quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$ ;
- Démonstration :

$$\begin{split} & \left[ \left[ \exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]^I = \left[ \left[ \exists x. P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right] \right]_{\rho}^I = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left[ P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b) \right]_{\rho[v/x]}^I = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( \left[ P(x) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \left[ P(a) \land P(b) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I ) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P) \left[ x \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \left[ P(a) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \land_{\mathcal{B}} \left[ P(b) \right] \right]_{\rho[v/x]}^I ) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( \left[ a \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( \left[ b \right] \right]_{\rho[v/x]}^I \right) ) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( I(a) \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( I(b) \right) \right) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \left( I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( a_0 \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( b_0 \right) \right) \lor_{\mathcal{B}} \\ & \left( I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P) \left( a_0 \right) \land_{\mathcal{B}} I(P) \left( b_0 \right) \right) \lor_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{split}$$

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}}
(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots;
Quatre cas selon I(P)(a_0) et I(P)(b_0):
I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F:
\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T:
\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F:
\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T:
\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.
```

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}}
(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots;
\mathsf{Quatre\ cas\ selon\ } I(P)(a_0) \ \mathsf{et\ } I(P)(b_0) \ \mathsf{:}
I(P)(a_0) = F, \ I(P)(b_0) = F \ \mathsf{:}
F = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = F, \ I(P)(b_0) = T \ \mathsf{:}
F = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = T, \ I(P)(b_0) = F \ \mathsf{:}
F = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = T, \ I(P)(b_0) = T \ \mathsf{:}
F = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.
```

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
 \mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} 
 (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \ldots; 
 \text{Quatre cas selon } I(P)(a_0) \text{ et } I(P)(b_0) : 
 * I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F : 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T; 
 I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T : 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F : 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T : 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T.
```

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
 \mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} 
 (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots; 
 \text{Quatre cas selon } I(P)(a_0) \text{ et } I(P)(b_0): 
 * I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F: 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T: 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F: 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T: 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.
```

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
 \mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} 
 (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots; 
 \text{Quatre cas selon } I(P)(a_0) \text{ et } I(P)(b_0) : 
 * I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F : 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T : 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F : 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T : 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.
```

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
 \mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} 
 (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \ldots; 
 \text{Quatre cas selon } I(P)(a_0) \text{ et } I(P)(b_0): 
 * I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F: 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T; 
 * I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T: 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F: 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T: 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T.
```

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
 \mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} 
 (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots; 
Quatre cas selon I(P)(a_0) et I(P)(b_0):
 * I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F: 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 * I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T: 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F: 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T: 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.
```

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
 \mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} 
 (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots; 
Quatre cas selon I(P)(a_0) et I(P)(b_0):
 * I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F: 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 * I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T: 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F: 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T: 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.
```

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
 \mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} 
 (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots; 
Quatre cas selon I(P)(a_0) et I(P)(b_0):
 I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F: 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T: 
 \mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F: 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T; 
 I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T: 
 \mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.
```

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}}
(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots;
Quatre cas selon I(P)(a_0) et I(P)(b_0):
I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F:
\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T:
\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F:
\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T:
\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.
```

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}}$   $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots;$ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$ :  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F:$   $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;$   $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T:$   $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;$   $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F:$   $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;$   $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T:$   $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T:$
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que  $[t]^I = v$  et  $[P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)]^I_{\rho[v/x]} = T!$

### Exotisme de la logique classique

Démonstration :

```
\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}}
(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots;
Quatre cas selon I(P)(a_0) et I(P)(b_0):
I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F:
\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T:
\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F:
\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;
I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T:
\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.
```

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}}$   $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \ldots;$ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$ :  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F:$   $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T;$   $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T:$   $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T;$   $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F:$   $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T;$   $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T:$   $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \ldots = T.$
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que  $[t]^I = v$  et  $[P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)]^I_{\rho[v/x]} = T!$

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}}$   $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots;$ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$ :  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F:$   $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;$   $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T:$   $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;$   $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F:$   $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;$   $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T:$   $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.$
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que  $[t]^I = v$  et  $[P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)]^I_{\rho[v/x]} = T!$

- Démonstration :
  - $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}}$   $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \land_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \lor_{\mathcal{B}} \dots;$ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$ :  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F:$   $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;$   $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T:$   $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;$   $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F:$   $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} F) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T;$   $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T:$   $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \land_{\mathcal{B}} T) \lor_{\mathcal{B}} \dots = T.$
- La formule est valide mais il n'y a aucun terme t tel que  $[t]^I = v$  et  $[P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)]^I_{\rho[v/x]} = T!$

### Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :
  - Tout homme est mortel;
  - Or Socrate est un homme;
  - Donc Socrate est mortel.
- Modélisation :
  - $H(x) \equiv x$  est un homme;
  - $M(x) \equiv x \text{ est mortel};$ 
    - $s \equiv \mathsf{Socrate}.$
  - $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x) (\mathcal{H}_1);$
  - $H(s)(\mathcal{H}_2)$
  - M(s)  $(\mathcal{H}_3)$

On doit démontrer :  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$ 

### Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :
  - Tout homme est mortel;
  - Or Socrate est un homme;
  - Donc Socrate est mortel.
- Modélisation :
  - $H(x) \equiv x$  est un homme;
  - $M(x) \equiv x \text{ est mortel};$
  - $ightharpoonup s \equiv \mathsf{Socrate}.$
  - $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x) (\mathcal{H}_1);$
  - $H(s)(\mathcal{H}_2)$
  - M(s)  $(\mathcal{H}_3)$

On doit démontrer :  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$ 

### Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :
  - Tout homme est mortel;
  - Or Socrate est un homme;
  - Donc Socrate est mortel.
- Modélisation :
  - $H(x) \equiv x$  est un homme;
  - $M(x) \equiv x \text{ est mortel};$
  - $ightharpoonup s \equiv \mathsf{Socrate}.$
  - $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x) (\mathcal{H}_1);$
  - $\vdash$   $H(s)(\mathcal{H}_2)$ ;
  - M(s)  $(\mathcal{H}_3)$ .

On doit démontrer :  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$ 

### Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :
  - Tout homme est mortel;
  - Or Socrate est un homme;
  - Donc Socrate est mortel.
- Modélisation :
  - $H(x) \equiv x$  est un homme;
  - $M(x) \equiv x \text{ est mortel};$
  - $ightharpoonup s \equiv \mathsf{Socrate}.$
  - $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x) (\mathcal{H}_1);$
  - $\vdash$   $H(s)(\mathcal{H}_2)$ ;
  - M(s)  $(\mathcal{H}_3)$ .

On doit démontrer :  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$ .

### Syllogisme et conséquence logique

#### Démonstration :

- Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
- On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$  :

$$[M(s)]' = [M(s)]'_{\rho} = I(M)([s]'_{\rho}) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho} =$

  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$
  - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ 
  - $\|H(s)\|^{l} = \|H(s)\|_{\rho}^{l} = I(H)(\|s\|_{\rho}^{l}) = I(H)(s_{0}) = T$  (2).
- En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - ${rliah}$  On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) 
    rbracket^I = T$  :

$$[M(s)]' = [M(s)]'_{\rho} = I(M)([s]'_{\rho}) = I(M)(s_0) = T (3)$$

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]' = T$ :
  - $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I_{\rho} =$
  - $\bigwedge_{v \in D_l} \|H(x) \Rightarrow M(x)\|_{\rho[v/x]}^l = \bigwedge_{v \in D_l} (\|H(x)\|_{\rho[v/x]}^l \Rightarrow_{\mathcal{B}} \|M(x)\|_{\rho[v/x]}^l) =$ 
    - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^*) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^*)) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$ 
  - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ 
  - $[H(s)]^{I} = [H(s)]_{\rho}^{I} = I(H)([s]_{\rho}^{I}) = I(H)(s_{0}) = T$  (2).
- En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - ${rliah}$  On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) 
    rbracket^I = T$  :

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :

  - - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([x]]_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([x]]_{\rho[v/x]})) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$ 
  - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ 
  - $[H(s)]' = [H(s)]'_{\rho} = I(H)([s]'_{\rho}) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) 
    rbracket^I = T$  :

$$[M(s)]^{I} = [M(s)]^{I}_{\rho} = I(M)([s]^{I}_{\rho}) = I(M)(s_{0}) = T (3).$$

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :

  - $\bigwedge_{v \in D_{I}} \|H(x) \Rightarrow M(x)\|_{\rho[v/x]}^{I} = \bigwedge_{v \in D_{I}} (\|H(x)\|_{\rho[v/x]}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \|M(x)\|_{\rho[v/x]}^{I}) =$ 
    - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$ 
  - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$

$$[H(s)]^I = [H(s)]^I_{\rho} = I(H)([s]^I_{\rho}) = I(H)(s_0) = T$$
 (2).

# Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) 
    rbracket^I = T$  :

$$[M(s)]^{I} = [M(s)]^{I}_{\rho} = I(M)([s]^{I}_{\rho}) = I(M)(s_{0}) = T (3).$$

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho} =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]_{\rho[v/x]}^I = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]_{\rho[v/x]}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]_{\rho[v/x]}^I) =$ 
    - $\bigwedge_{v \in D_{I}} (I(H)([x]'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([x]'_{\rho[v/x]})) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$ 
    - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = I(1)$
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :

$$[H(s)]^I = [H(s)]^I_{\rho} = I(H)([s]^I_{\rho}) = I(H)(s_0) = T$$
 (2).

# Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

$$[M(s)]^{I} = [M(s)]^{I}_{\rho} = I(M)([s]^{I}_{\rho}) = I(M)(s_{0}) = T (3).$$

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I_{\rho} =$
  - - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([x]'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([x]'_{\rho[v/x]})) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$ 
    - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$

$$[H(s)]^{I} = [H(s)]^{I}_{\rho} = I(H)([s]^{I}_{\rho}) = I(H)(s_{0}) = T$$
 (2).

# Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^{I} = [M(s)]_{\rho}^{I} = I(M)([s]_{\rho}^{I}) = I(M)(s_{0}) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = T$ :
  - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]' = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]_{\rho}^{I} =$

$$\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) =$$

- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I)) =$
- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$
- Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$

$$[H(s)]^I = [H(s)]^I_{\rho} = I(H)([s]^I_{\rho}) = I(H)(s_0) = T$$
 (2).

## Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^{I} = [M(s)]_{\rho}^{I} = I(M)([s]_{\rho}^{I}) = I(M)(s_{0}) = T$$
 (3).

 $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = T$ :

$$[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]' = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]'_{\rho} =$$

$$\bigwedge_{v \in D_{I}} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]_{\rho[v/x]}^{I} = \bigwedge_{v \in D_{I}} (\![H(x)]\!]_{\rho[v/x]}^{I} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]_{\rho[v/x]}^{I}) =$$

$$\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I)) =$$

$$\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$$

$$\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = 7$$

\* Ce qui implique que : 
$$I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$$
 (1)

 $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ 

$$[H(s)]^{I} = [H(s)]^{I}_{\rho} = I(H)([s]^{I}_{\rho}) = I(H)(s_{0}) = T$$
 (2).

# Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]_{\rho}^I = I(M)([s]_{\rho}^I) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = T$ :
  - \*  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho} = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho} = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \Rightarrow M($

- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}')) =$
- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$ 
  - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :

$$[H(s)]^{I} = [H(s)]^{I}_{\rho} = I(H)([s]^{I}_{\rho}) = I(H)(s_{0}) = T$$
 (2).

# Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^{I} = [M(s)]_{\rho}^{I} = I(M)([s]_{\rho}^{I}) = I(M)(s_{0}) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = T$ :
  - $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I_{\rho} =$

- $\bigwedge_{v \in D_{I}} (I(H)([x]]_{\rho[v/x]}^{I}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([x]]_{\rho[v/x]}^{I})) =$
- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$ 
  - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$

$$[H(s)]^I = [H(s)]^I_{\rho} = I(H)([s]^I_{\rho}) = I(H)(s_0) = T$$
 (2).

# Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]^I_{\rho} = I(M)([s]^I_{\rho}) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = T$ :

$$\bigwedge_{v \in D_l} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^l = \bigwedge_{v \in D_l} (\llbracket H(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^l \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^l) =$$

- $\bigwedge_{v \in D_{I}} (I(H)([\![x]\!]'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([\![x]\!]'_{\rho[v/x]})) =$
- $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
- Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = I(1)$
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$

$$[H(s)]^I = [H(s)]^I_{\rho} = I(H)([s]^I_{\rho}) = I(H)(s_0) = T$$
 (2).

# Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]^I_{\rho} = I(M)([s]^I_{\rho}) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = T$ :
  - $[\![\forall x. H(x) \Rightarrow M(x)]\!]' = [\![\forall x. H(x) \Rightarrow M(x)]\!]'_{\rho} = \\ \bigwedge_{v \in D_I} [\![H(x) \Rightarrow M(x)]\!]'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} ([\![H(x)]\!]'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![M(x)]\!]'_{\rho[v/x]}) =$ 
    - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)([x]]_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)([x]]_{\rho[v/x]})) =$
    - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
    - $\bigwedge_{v \in D_I}^{SCI}(I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T;$
  - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :

$$[H(s)]^I = [H(s)]^I_{\rho} = I(H)([s]^I_{\rho}) = I(H)(s_0) = T$$
 (2).

# Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^{I} = [M(s)]^{I}_{\rho} = I(M)([s]^{I}_{\rho}) = I(M)(s_{0}) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = T$ :

  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$ 
    - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :

$$[H(s)]^I = [H(s)]^I_{\rho} = I(H)([s]^I_{\rho}) = I(H)(s_0) = T$$
 (2).

### Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]^I_{\rho} = I(M)([s]^I_{\rho}) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket orall x. H(x) \Rightarrow M(x) 
  rbracket^I = T$  :
  - - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x])) \to_{\mathcal{B}} I(M)(\mathbb{I}^{\Delta} \mathbb{I}_{\rho[v/x]})) =$   $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x))) \to_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \land \ldots = T;$
  - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1)
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :

$$[H(s)]^{I} = [H(s)]_{\rho}^{I} = I(H)([s]_{\rho}^{I}) = I(H)(s_{0}) = T$$
 (2).

### Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^{I} = [M(s)]^{I}_{\rho} = I(M)([s]^{I}_{\rho}) = I(M)(s_{0}) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket orall x. H(x) \Rightarrow M(x) 
  rbracket^I = T$  :

$$\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I)) = \\ \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$$

$$\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T;$$

- Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :

$$[H(s)]^{I} = [H(s)]^{I}_{\rho} = I(H)([s]^{I}_{\rho}) = I(H)(s_{0}) = T (2).$$

### Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^{I} = [M(s)]^{I}_{\rho} = I(M)([s]^{I}_{\rho}) = I(M)(s_{0}) = T$$
 (3).

- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - - $\bigwedge_{v \in D_l} (I(H)(\lfloor v \rfloor \rho_l v/x \rfloor)) \to B I(H)(\lfloor v \rfloor \rho_l v/x \rfloor)) = \bigcup_{v \in D_l} (I(H)(\rho \lfloor v/x \rfloor(x))) = \bigcup_{v \in D_l} (I(H)(\rho \lfloor v/x \rfloor(x)) = \bigcup_{v \in D_l} (I(H)(\rho \lfloor v/x \rfloor(x))) = \bigcup_{v \in D_l} (I(H)(\rho \lfloor v/x \rfloor(x)) = \bigcup_{v \in D_l} (I(H)(\rho \lfloor v/x \rfloor(x))) = \bigcup_{v \in D_l} (I(H)(\rho \lfloor v/x \rfloor(x)) = \bigcup_{v \in D_l} (I(H)(\rho \lfloor v/x \rfloor(x))) = \bigcup_{v \in D_l} (I(H)(\rho \lfloor$
    - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T$
  - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$

$$[H(s)]^{I} = [H(s)]^{I}_{\rho} = I(H)([s]^{I}_{\rho}) = I(H)(s_{0}) = T (2).$$

### Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]_{\rho}^I = I(M)([s]_{\rho}^I) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - - $\bigwedge_{v \in D_l} (I(H)(\lfloor v \rfloor \rho_{\lfloor v/x \rfloor})) \to B(H)(\lfloor v \rfloor \mu_{\lfloor v/x \rfloor})) = \prod_{v \in D_l} (I(H)(\rho[v/x](x))) = \prod_{v \in D_l} (I(H)(\rho[v/x]($
    - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T;$
  - Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$

$$[H(s)]^{I} = [H(s)]^{I}_{\rho} = I(H)([s]^{I}_{\rho}) = I(H)(s_{0}) = T (2).$$

### Syllogisme et conséquence logique

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]^I_{\rho} = I(M)([s]^I_{\rho}) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\lfloor x \rfloor \rho \lfloor v/x \rfloor)) \to \mathcal{B} (M)(\lfloor x \rfloor \rho \lfloor v/x \rfloor)) =$   $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho \lfloor v/x \rfloor(x))) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho \lfloor v/x \rfloor(x))) =$
    - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T;$
  - \* Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :

$$[H(s)]^{I} = [H(s)]^{I}_{\rho} = I(H)([s]^{I}_{\rho}) = I(H)(s_{0}) = T$$
 (2).

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$ et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$  :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]^I_{\rho} = I(M)([s]^I_{\rho}) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - $[\![\forall x.H(x)\Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x)\Rightarrow M(x)]\!]_{\rho}^I =$  $\textstyle \bigwedge_{v \in D_i} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \bigwedge_{v \in D_i} (\llbracket H(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) =$  $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I)) =$ 
    - $\bigwedge_{v \in D_i} (I(H)(\rho[v/x](x))) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$
    - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T;$
  - \* Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :

$$[H(s)]^I = [H(s)]^I_{\rho} = I(H)([s]^I_{\rho}) = I(H)(s_0) = T$$
 (2).

- Démonstration :
  - Soit *I* une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]^I_{\rho} = I(M)([s]^I_{\rho}) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x])) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x)) =$
  - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \land \ldots = T;$   $Ce an implique que : I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T (1)$
  - \* Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :
  - \*  $[H(s)]^{I} = [H(s)]^{I}_{\rho} = I(H)([s]^{I}_{\rho}) = I(H)(s_{0}) = T$  (2).
- En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$ et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$  :

\* 
$$[M(s)]^{I} = [M(s)]^{I}_{\rho} = I(M)([s]^{I}_{\rho}) = I(M)(s_{0}) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - $[\![\forall x.H(x)\Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x)\Rightarrow M(x)]\!]_0^I =$  $\textstyle \bigwedge_{v \in D_i} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \bigwedge_{v \in D_i} (\llbracket H(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) =$  $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I)) =$ 
    - $\bigwedge_{v \in D_i} (I(H)(\rho[v/x](x))) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$  $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T;$

  - \* Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :
  - \*  $[H(s)]^I = [H(s)]^I = I(H)([s]^I) = I(H)(s_0) = T$  (2).

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$ et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$  :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]^I_{\rho} = I(M)([s]^I_{\rho}) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - $[\![\forall x.H(x)\Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x)\Rightarrow M(x)]\!]_0^I =$  $\textstyle \bigwedge_{v \in D_i} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \bigwedge_{v \in D_i} (\llbracket H(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) =$  $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I)) =$ 
    - $\bigwedge_{v \in D_i} (I(H)(\rho[v/x](x))) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$  $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T;$
  - \* Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :
  - \*  $[H(s)]^I = [H(s)]^I = I(H)([s]^I) = I(H)(s_0) = T$  (2).

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^{I} = [M(s)]^{I}_{\rho} = I(M)([s]^{I}_{\rho}) = I(M)(s_{0}) = T$$
 (3).

- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x))) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$  $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \land \ldots = T;$
  - \* Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :
  - \*  $[H(s)]^I = [H(s)]^I_{\rho} = I(H)([s]^I_{\rho}) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$ et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$  :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]^I_{\rho} = I(M)([s]^I_{\rho}) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = [\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I_{\rho} =$  $\textstyle \bigwedge_{v \in D_i} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \bigwedge_{v \in D_i} (\llbracket H(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) =$  $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I)) =$ 
    - $\bigwedge_{v \in D_i} (I(H)(\rho[v/x](x))) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$  $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \ldots = T;$
  - \* Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :
  - \*  $[H(s)]^{I} = [H(s)]^{I}_{0} = I(H)([s]^{I}_{0}) = I(H)(s_{0}) = T$  (2).

- Démonstration :
  - Soit I une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$ ;
  - On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$ :

\* 
$$[M(s)]^I = [M(s)]^I_{\rho} = I(M)([s]^I_{\rho}) = I(M)(s_0) = T$$
 (3).

- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $[\![\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)]\!]^I = T$ :
  - $\|\forall x. H(x) \Rightarrow M(x)\|^{l} = \|\forall x. H(x) \Rightarrow M(x)\|_{\rho}^{l} =$   $\bigwedge_{v \in D_{l}} \|H(x) \Rightarrow M(x)\|_{\rho[v/x]}^{l} = \bigwedge_{v \in D_{l}} (\|H(x)\|_{\rho[v/x]}^{l}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \|M(x)\|_{\rho[v/x]}^{l}) =$   $\bigwedge_{v \in D_{l}} (I(H)(\|x\|_{\rho[v/x]}^{l})) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\|x\|_{\rho[v/x]}^{l})) =$   $\bigwedge_{v \in D_{l}} (I(H)(\rho[v/x]_{\rho[v/x]}^{l})) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x]_{\rho[v/x]}^{l}) =$ 
    - $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$  $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \land \ldots = T;$
  - \* Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$ :
  - \*  $[H(s)]^{I} = [H(s)]^{I}_{\rho} = I(H)([s]^{I}_{\rho}) = I(H)(s_{0}) = T$  (2).
- En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).