Logique 2 (HLIN602)

Licence 3
Département Informatique
Faculté des Sciences de Montpellier

TD N°4

Exercice 1

On considère deux symboles de prédicats P et Q, respectivement unaire et binaire, ainsi qu'un symbole de fonction f unaire. Soient les formules suivantes :

1. $\forall x.P(f(x))$;
2. $\forall x.Q(x, f(x))$;
3. $\forall x.\exists y.Q(f(x), y)$;
4. $\forall x, y.Q(x, y) \Rightarrow Q(f(x), f(y))$;
5. $\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(f(y), x)$.

Soit l'interprétation I telle que :
- $D_I = \{0, 1, 2\}$;
- $I(P) = \{(0, F), (1, T), (2, T)\}$;
- $I(Q)(x, y) = T$ si $x < y$, F sinon ;
- $I(f) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$.

Évaluer les formules dans l'interprétation I.

Exercice 2

On considère un symbole de prédicat P binaire, ainsi qu'un symbole de fonction f unaire. Soient les formules suivantes :
- $F_1 = \forall x.\exists y.P(x, y)$;
- $F_2 = \forall x.P(x, f(x))$.

Démontrer la validité des formules suivantes ou trouver un contre-modèle :

1. $F_1 \Rightarrow F_2$;
2. $F_2 \Rightarrow F_1$.

Exercice 3

On considère un symbole de prédicat P binaire, deux symboles de fonction f et g unaires, et une constante a. Soient les formules suivantes :
- $g(a) = a$ (H_1) ;
- $\forall x.g(f(x)) = g(x)$ (H_2) ;
- $\forall x.P(x, x)$ (H_3).

Démontrer que : $H_1, H_2, H_3 \models P(a, g(f(a)))$.

Exercice 4

On considère l'ensemble d'équations $\mathcal{E}$ suivant :

— $plus(x, o) \doteq x$;

— $plus(x, s(y)) \doteq s(plus(x, y))$.

Où o est une constante, s un symbole de fonction unaire, et $plus$ un symbole de fonction binaire.

1. Démontrer que l'équation $plus(s(s(o)), s(s(o))) \doteq s(s(s(s(o))))$ est prouvable dans le système EQ à partir de $\mathcal{E}$;
2. Peut-on démontrer l'équation $plus(o, x) \doteq x$ à partir de $\mathcal{E}$? Si oui, faire la démonstration dans EQ, sinon dire ce qu'il faudrait rajouter à $\mathcal{E}$.