UNIVERSITE DE MONTPELLIER
FACULTE DES SCIENCES

Session 1 : Ecrit	Durée de l'épreuve : 2h00
Date : 18 / 05 / 2018	aucun document autorisé
Licence 3	aucun appareil électronique autorisé

Programmation Linéaire, **HLIN606**

EXERCICE 1 (5 points)
Résoudre **numériquement** le Programme Linéaire suivant :

$$\begin{cases} Max \quad 5\,x_1 + 3\,x_2 \\ \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad (1) \\ \quad 4x_1 + 6x_2 \leq 20 \quad (2) \\ \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \quad (3) \\ \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

EXERCICE 2 (5 points)
Résoudre **graphiquement** le Programme Linéaire suivant :

$$\begin{cases} Max \quad 6\,x_1 + 2\,x_2 \\ \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \quad (1) \\ \quad 1x_1 + 9x_2 \leq 9 \quad (2) \\ \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

EXERCICE 3 (5 points)
Un chocolatier produit deux recettes phares. La première nécessite 1 kilo de cacao et 2 litres de lait et lui rapporte 6 euros. La seconde se fait à partir de 3 kilos de cacao et de 9 litres de lait pour un gain de 2 euros. Ce matin, la quantité en stock est de 6 kilos de cacao et 9 litres de lait. Il faut absolument, pour des raisons sanitaires, utiliser au moins 3 litres de lait. Evidemment, avant de démarrer, chocolatier pose un programme linéaire pour maximiser son profit.

Modéliser le problème (un indice est glissé dans le modèle de l'exercice 2) et résoudre **numériquement** le programme linéaire associé.

EXERCICE 4 (5 + 1 points)

Lors du dernier tp noté, un exercice de modélisation concernait des barrages hydroélectriques.

Trois barrages hydroélectriques des Pyrénées fournissent en électricité quatre villes. Le coût d'acheminement de chaque MWh d'électricité d'un barrage à la ville est donné dans le tableau ci-dessous, ainsi que la production journalière des barrages et la demande journalière en électricité de chacune des villes.

	Production	**Ville 1**	**Ville 2**	**Ville 3**	**Ville 4**
Barrage 1	70 MWh	1	2	1.5	2
Barrage 2	50 MWh	1.5	1	3	5
Barrage 3	10 MWh	1.1	2	1	1000
	Demande	30 MWh	20 MWh	50 MWh	30 MWh

Le modèle était le suivant :

Soient x_{ij} le nombre de MWh acheminés du barrage *i* à la ville *j* ; d_j la demande de la ville *j* ; p_i la production du barrage *i* et c_{ij} le coût de transport unitaire du barrage *i* à la ville *j*.

$$(P)\begin{cases} \text{Minimiser} & z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geqslant d_j,\ \forall j = 1,2,3,4 \\ & \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leqslant p_i,\ \forall i = 1,2,3 \\ & x_{ij} \geqslant 0,\ \forall i = 1,2,3,\ \forall j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

1/ Réécrire ce modèle sous une forme canonique permettant de faire tourner la résolution manuelle du simplexe (fournir les trois matrices *A*, *b*, et *c*).

$$\begin{cases} Min\ \ cx \\ s.c\quad Ax \leq b \\ et\ \ x \geq 0 \end{cases}$$

2/ Une première solution triviale consiste à affecter ville par ville par demande croissante au barrage de coût minimum. On a :

Ville 2 : Barrage 2 - 20 MWh
Ville 1 : Barrage 1 – 30 MWh
Ville 4 : Barrage 1 – 30 MWh
Ville 3 : Barrage 3 – 10 MWh + Barrage 1 – 10 MWh + Barrage 2 30 MWh

Pour un coût de 20+30+2*30+(10+1,5*10+3*30)=225.

Nous souhaitons utiliser cette première solution comme démarrage du simplexe.
Que peut-on dire sur les variables en base et hors bases ?
Comment écrire le modèle sous forme standard ?