Cours 2 :
La Programmation Linéaire

Eric Bourreau

+ Vincent Boudet

Objectif de ce cours

- Etre capable de :
  - identifier et modéliser un problème d’optimisation (combinatoire),
  - différencier la modélisation d’un problème de sa résolution (c-à-d de la production de solution(s) optimale(s)),
  - comprendre comment se résout un problème de programmation linéaire …
  - … et de programmation linéaire en nombres entiers.
- Se construire
  - une collection de problèmes d’optimisation classiques,
  - une collection de techniques de modélisation.

Plan du cours

- Modélisation mathématique d'un POC (Problème d'Optimisation Combinatoire)
- La PL (Programmation Linéaire)
  - Introduction / Intuition
  - Définitions
  - Résolution graphique
  - Résolution Algébrique
  - L'algorithme du simplexe
  - Dualité
- La PLNE (programmation Linéaire en Nombres Entiers)

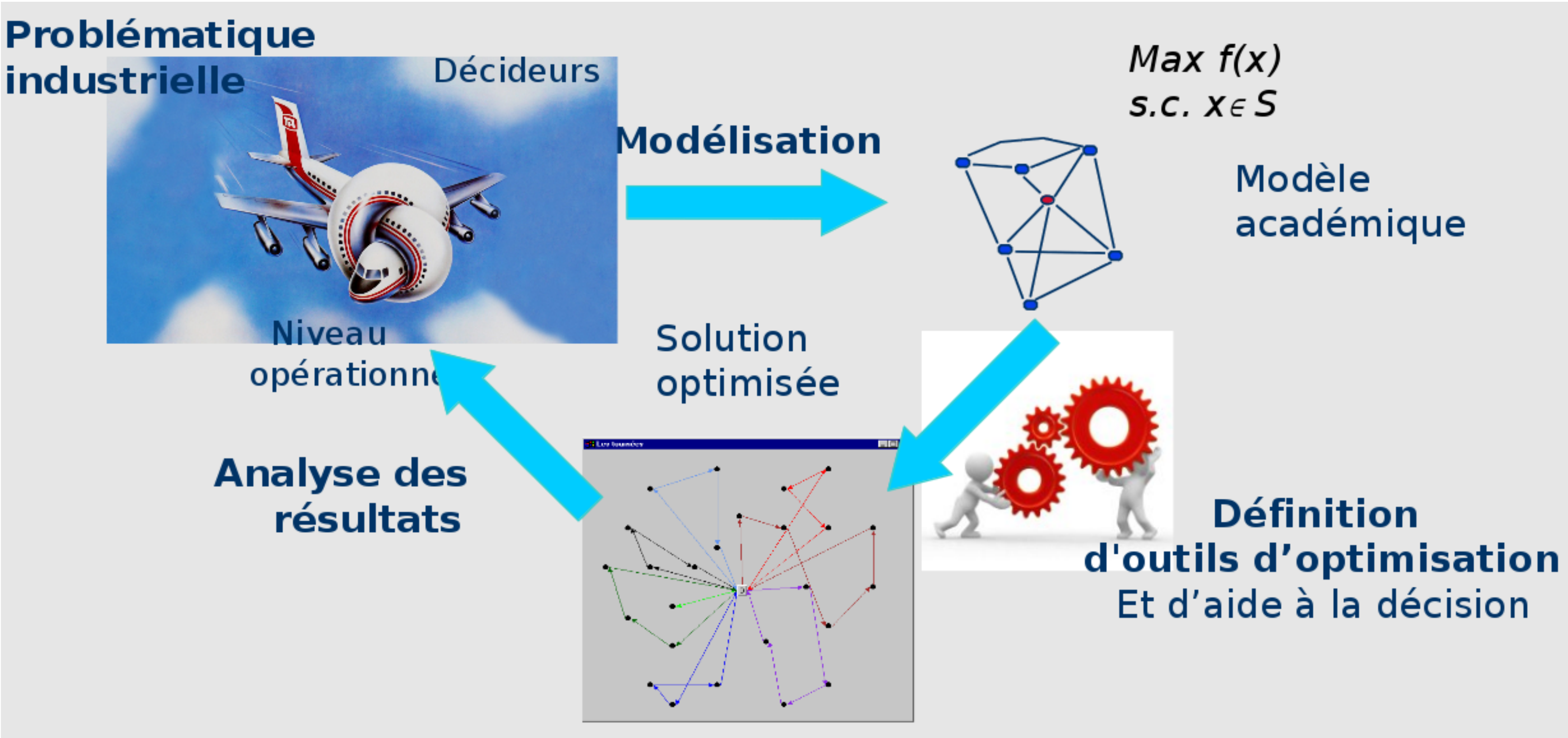
La Recherche Opérationnelle

- RO : Discipline qui regroupe les méthodes scientifiques pour aborder les problèmes de décision qu'on retrouve notamment dans les grandes organisations (publiques ou privées) et derrière toute technologie, afin d'en optimiser le fonctionnement.

> "La RO est une approche quantitative permettant de produire de meilleures décisions. Elle fournit des outils pour rationaliser, simuler et optimiser l'architecture et le fonctionnement des systèmes industriels et économiques. Elle propose des modèles pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire des choix efficaces et robustes."
> *http://www.roadef.org.content/roadef/pdf/LivreBlancROMars2011.pdf*

- La RO est à l'interface des Mathématiques, de l'Informatique et de l'Ingénierie.

Exemple (extrait d'un cours à l'ENAC)



Modélisation d’un POC

- Un problème d'optimisation combinatoire (POC) consiste à chercher un ensemble de décisions qui permettent d'optimiser (\i.e. maximiser ou minimiser) un objectif tout en respectant un ensemble de contraintes.

- Un modèle mathématique d'un problème d'optimisation (appelé programme mathématique) est une description formelle du problème qui utilise le langage mathématique.

Un modèle

- Le modèle contient trois éléments principaux :
  - des variables de décision : elles représentent les décisions qui doivent être prises,
  - une fonction objectif : équation mathématique dont la valeur dépend de celles des variables et devant être maximisée ou minimisée (selon le problème),
  - des contraintes : expressions mathématiques qui expriment les relations entre les variables ainsi que les limitations sur leurs valeurs possibles. Elles définissent l'espace des solutions.
- Le modèle mathématique contient également des données ou paramètres : constantes apparaissant dans les contraintes, la fonction objectif, la taille du problème...

Formulation mathématique générale

Optimiser le problème (P) s'écrit :

$$\begin{cases} \quad\quad\quad\quad Minimiser\ \ f(x) \\ sous\ contraintes \quad\quad g_i(x) \leq 0\ \ i = 1, \ldots, m \\ \quad\quad\quad\quad et\ \ x \in S\ \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- Le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ a pour composantes x_1, x_2,…, x_n qui sont les variables de décision.
- f est la fonction objectif.
- $g_i(x) \leq 0$ et $x \in S$ sont les contraintes sur les variables décisions.
- S est appelé le domaine des variables de décision.
- Les paramètres du problème sont les constantes qui interviennent dans les g_i, f et S.
- f et g_i : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Solutions d'un problème d'optimisation (*P*)

$$\begin{cases} Min \quad f(x) \\ s.c \quad g_i(x) \leq 0 \;\; i = 1,\ldots,m \\ \quad et \;\; x \in S \;\subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- Une solution réalisable (ou admissible ou simplement une solution) de (*P*) est un vecteur x qui vérifie les contraintes : $g_i(x) \leq 0$ pour toutes les valeurs de i allant de 1 à m et $x \in S$.

$\mathcal{S}$ = {$x \in S$; $g_i(x) \leq 0$, ∀ i=1,...,m} est l'ensemble des solutions réalisables (ou ensemble admissible).

- Une solution optimale (ou optimum global) de (*P*) est une solution de (*P*) qui minimise $f(x)$ sur l'ensemble des solutions.

$x^* \in S$ optimum global de (*P*) <==> $\forall\, x \in \mathcal{S}$, $f(x^*) \leq f(x)$

Problème Linéaire (forme canonique)

$$\begin{cases} Max \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.c \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b \qquad j = 1, \dots, m \\ et \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

Remarques

- Minimiser f <==> Maximiser - f
  - Minimiser $\sum_{i=0}^{n} c_i x_i$ <==> Maximiser - $\sum_{i=0}^{n} c_i x_i$
- Les inégalités "$\leq$" se transforment en inégalités "$\geq$" en les multipliant par -1
  - $\sum_{i=0}^{n} a_{ij} x_i \leq b$ <==> $\sum_{i=0}^{n} -a_{ij} x_i \geq -b$
- Une égalité "$=$" revient à deux inégalités : "$\leq$" et "$\geq$"
- Si x est une variable négative, alors on définit y = -x comme variable positive.
- Si x est une variable non-contrainte en signe, alors on définit deux nouvelles variables tel que x =x_+-x_- avec $x_+ \geq 0$ et $x_- \geq 0$
- Les contraintes d'inégalité stricte posent le problème de l'existence d'une solution optimale.

La cimenterie : résolution manuelle

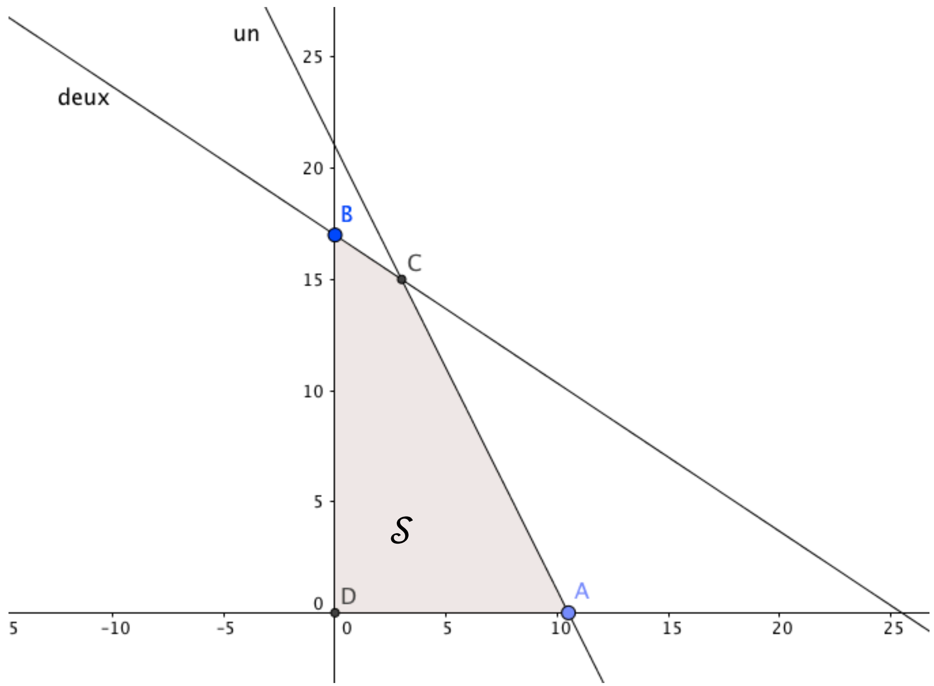
- Soit une usine qui produit deux ciments rapportant 50€ et 70€ la tonne.
  Pour fabriquer une tonne de ciment 1, il faut 40 min de calcination dans un four et 20 min de broyage. Pour fabriquer une tonne de ciment 2, il faut 20 min de four et 30 min de broyage.
  Le four et l'atelier de broyage sont disponibles 7 h et 8,5 h par jour.
  Combien de ciment de chaque type peut-on produire par jour pour maximiser le bénéfice ?

$$\begin{cases} Max \quad \sum_{i=1}^{2} p_i x_i = 50x_1 + 70x_2 \\ \quad s.c \quad \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i \le b \qquad j = 1, \dots ,2 \\ \quad 40x_1 + 20x_2 \le 420 \quad (1) \\ \quad 20x_1 + 30x_2 \le 510 \quad (2) \\ \quad\quad et \;\; x \ge 0 \end{cases}$$

Ciments	1	2		Profit total			
Profit / tonne	50	70		0			
Production	0	0					
Consommations de ressources / tonne				Utilisation		Disponibilité	
Four	40	20		0		420	
Broyeur	20	30		0		510	

La cimenterie : résolution graphique (géométrique)

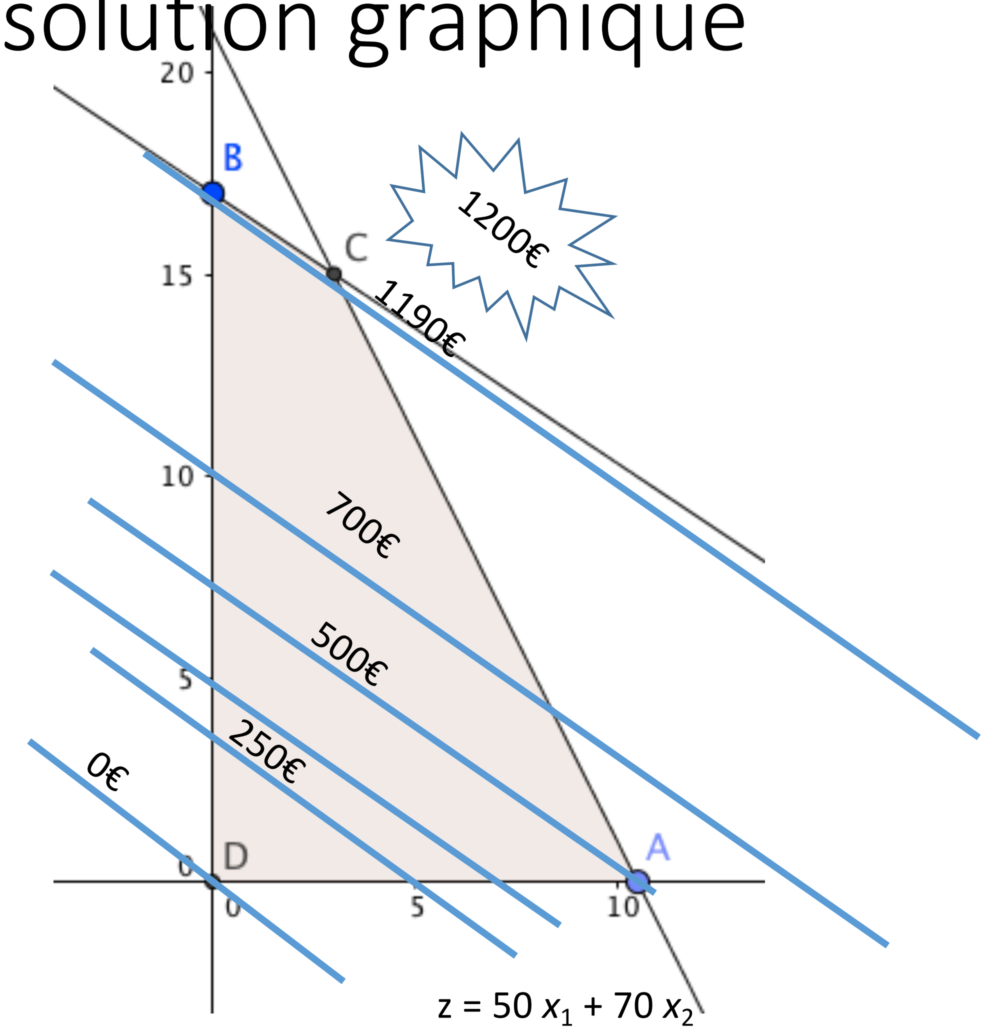
$$
\begin{cases}
Max \quad \sum_{i=1}^{2} p_i x_i = 50x_1 + 70x_2 \\
\qquad s.c \quad \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i \ \leq b \qquad j = 1, \dots ,2 \\
\qquad 40x_1 + 20x_2 \leq 420 \quad (1) \\
\qquad 20x_1 + 30x_2 \leq 510 \quad (2) \\
\qquad\qquad et \ \ x \geq 0
\end{cases}
$$



- ACBD est le polygone convexe des solutions réalisables
  $\mathcal{S}$ = {$x \in S$; $g_i(x) \leq 0$, $x \geq 0$, ∀ i=1,...,m}

La cimenterie : résolution graphique

$$\begin{cases} Max \quad \sum_{i=1}^{2} p_i x_i = 50x_1 + 70x_2 \\ \quad s.c \quad \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i \ \leq b \qquad j = 1, \dots, 2 \\ \quad 40x_1 + 20x_2 \leq 420 \quad (1) \\ \quad 20x_1 + 30x_2 \leq 510 \quad (2) \\ \qquad et \ \ x \geq 0 \end{cases}$$



La cimenterie : résolution graphique

$$\begin{cases} Max \quad \sum_{i=1}^{2} p_i x_i = 50x_1 + 70x_2 \\ \qquad s.c \quad \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i \leq b \qquad j = 1, \dots, 2 \\ \qquad 40x_1 + 20x_2 \leq 420 \quad (1) \\ \qquad 20x_1 + 30x_2 \leq 510 \quad (2) \\ \qquad\quad et \;\; x \geq 0 \end{cases}$$