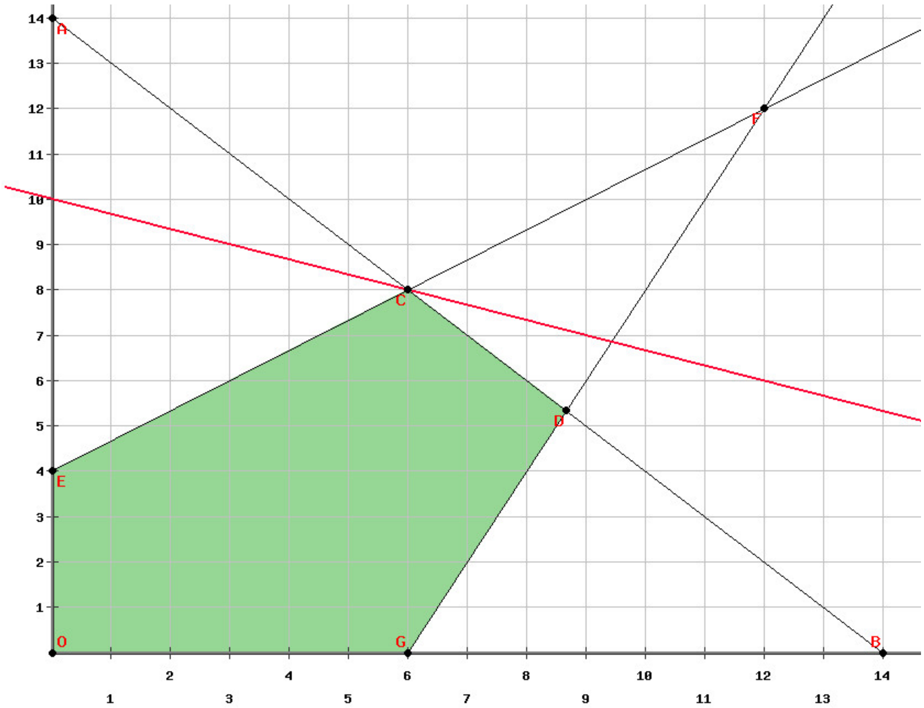
Exercices de cours

Préparation à l'examen

Exercice 1 Résolution graphique

Résoudre graphiquement le problème d'optimisation linéaire continue (P) suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{rl} \text{Maximiser} & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 \leqslant 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ & 2x_1 - x_2 \leqslant 12 \\ \text{et} & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{array}\right.$$



La solution optimale du problème est le point $C = (6, 8)$ avec $z = 30$.

La sortie graphique ci-dessus est obtenue via le site internet : `http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=fr`. Ce site permet aussi une résolution par le simplexe.

Exercice 2 Résolution à l'aide de l'algorithme du simplexe

1. Le problème sous sa forme standard (i.e. les contraintes sous forme d'égalité, c'est-à-dire avec les variables d'écart) est le suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{rl} \text{Maximiser} & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 + x_3 = 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ & 2x_1 - x_2 + x_5 = 12 \\ \text{et} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

2. Application de l'algorithme du simplexe :

Initialisation : Trouver un dictionnaire réalisable

$\mathbf{x_0} = (0, 0, 14, 12, 12)$ avec $z = 0$ est une solution réalisable évidente.

$$(D_0)\left\{\begin{array}{rrrr} x_3 = & 14 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 = & 12 & +2x_1 & -3x_2 \\ x_5 = & 12 & -2x_1 & +x_2 \\ z = & & x_1 & +3x_2 \end{array}\right.$$ est le dictionnaire associé.

Itération 1 :

Variables entrantes candidates :

- x_1 avec un coût réduit égale à 1
- x_2 avec un coût réduit égale à 3

$\Rightarrow$ x_2 entre

Variables sortantes candidates :

- x_3 avec $x_3 = 14 - x_2 \geqslant 0 \Longrightarrow x_2 \leqslant 14$
- x_4 avec $x_4 = 12 - 3x_2 \geqslant 0 \Longrightarrow x_2 \leqslant 12/3 = 4$
- x_5 avec $x_5 = 12 + x_2 \geqslant 0 \Longrightarrow x_2 \geqslant -12$: contrainte pas contraignante car on a déjà $x_2 \geqslant 0$

$\Rightarrow$ x_4 sort (car c'est la première variable qui s'annule lorsque x_2 augmente)

On effectue le pivotage, donc : $x_2 = 4 + 2/3x_1 - 1/3x_4$

et le nouveau dictionnaire est : $(D_1)\left\{\begin{array}{rlll} x_2 = & 4 & +2/3x_1 & -1/3x_4 \\ x_3 = & 10 & -5/3x_1 & +1/3x_4 \\ x_5 = & 16 & -4/3x_1 & -1/3x_4 \\ z = & 12 & +3x_1 & -x_4 \end{array}\right.$

Solution du dictionnaire : $\mathbf{x_1} = (0, 4, 10, 0, 16)$ avec $z = 12$

Itération 2 :

Variables entrantes candidates :

- x_1 avec un coût réduit égale à 3 est la seule variable candidate, elle entre en base.

Variables sortantes candidates :

- x_2 avec $x_2 = 4 + 2/3x_1 \geqslant 0 \Longrightarrow x_1 \geqslant -6$: contrainte pas contraignante.
- x_3 avec $x_3 = 10 - 5/3x_1 \geqslant 0 \Longrightarrow x_1 \leqslant 10 * 3/5 = 6$
- x_5 avec $x_5 = 16 - 4/3x_1 \geqslant 0 \Longrightarrow x_1 \leqslant 16 * 3/4 = 12$

$\Rightarrow$ x_3 sort (car c'est la première variable qui s'annule lorsque x_1 augmente)

On effectue le pivotage, donc : $x_1 = 6 - 3/5x_3 + 1/5x_4$

et le nouveau dictionnaire est : $(D_2)\left\{\begin{array}{rlll} x_1 = & 6 & -3/5x_3 & +1/5x_4 \\ x_2 = & 8 & -2/5x_3 & -1/5x_4 \\ x_5 = & 8 & +4/5x_3 & -9/15x_4 \\ z = & 30 & -9/5x_3 & -2/5x_4 \end{array}\right.$

Solution du dictionnaire : $\mathbf{x_2} = (6, 8, 0, 0, 8)$ avec $z = 30$

Itération 3 :

Il n'y a plus de variables entrantes candidates car tous les coûts réduits sont négatifs donc $\mathbf{x_2} = \mathbf{x}^* = (6, 8, 0, 0, 8)$ est la solution optimale de (P) avec $z^* = 30$.

Exercice 3 : Simplexe avec variables auxillaire

Soit le problème d'optimisation linéaire continue (P) suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{rl} \text{Maximiser} & 5x_1 + 7x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 \geqslant 6 \\ & x_1 \geqslant 4 \\ & x_2 \leqslant 3 \\ \text{et} & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

1. Mettre le problème (P) sous sa forme standard.

$$(P)\left\{\begin{array}{rl} \text{Maximiser} & 5x_1 + 7x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ & x_1 - x_4 = 4 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ \text{et} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

2. Résoudre (P) par l'algorithme du simplexe à 2 phases.

Il n'y a pas de solution réalisable évidente; c'est-à-dire que l'on ne peut pas débuter l'algorithme du simplexe avec toutes les variables de décision nulles $x_1 = x_2 = 0$ car dans ce cas les variables d'écart de la première et de la seconde contraintes seraient négatives. On applique alors la méthode du simplexe à deux phases. La première phase consiste à trouver une solution réalisable; pour cela on définit le problème auxiliaire suivant avec x_0 comme variable auxiliaire :

$$(P_{aux})\left\{\begin{array}{rcccccccl} \text{Maximiser} & \multicolumn{8}{l}{z = -x_0} \\ & x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_0 & = 6 \\ \text{s.c.} & x_1 & & & -x_4 & & +x_0 & = 4 \\ & & x_2 & & & +x_5 & & = 3 \\ & \multicolumn{8}{l}{x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0} \end{array}\right.$$

Initialisation : Trouver un dictionnaire réalisable

$\mathbf{x_0} = (6,0,0,0,2,3)$ (car $x_0 = \max(6;4)$, variables de décision nulles $x_1 = x_2 = 0$) avec $z = -6$ est une solution réalisable évidente.

$$(D_0)\left\{\begin{array}{rlllll} x_0 = & 6 & -x_1 & -x_2 & +x_3 \\ x_4 = & 2 & & -x_2 & +x_3 \\ x_5 = & 3 & & -x_2 & \\ z = & -6 & +x_1 & +x_2 & -x_3 \end{array}\right.$$ est le dictionnaire associé

Itération 1 : Variables entrantes candidates :

$\Rightarrow$ x_1 et x_2 peuvent entrer avec le même coût réduit ($= 1$), on fait entrer x_1.

Variables sortantes candidates :

- x_0 avec $x_0 = 6 - x_1 \geqslant 0 \Longrightarrow x_1 \leqslant 6$
- x_1 n'intervient pas dans le définition de x_4 et x_5, donc elles ne peuvent pas sortir.

$\Rightarrow$ x_0 sort

On effectue le pivotage, donc : $x_1 = 6 - x_0 - x_2 + x_3$

et le nouveau dictionnaire est : $$(D_1)\left\{\begin{array}{rllll} x_1 = & 6 & -x_0 & -x_2 & +x_3 \\ x_4 = & 2 & & -x_2 & +x_3 \\ x_5 = & 3 & & -x_2 & \\ z = & & -x_0 & & \end{array}\right.$$

La solution du dictionnaire est : $\mathbf{x_1} = (0,6,0,0,2,3)$ avec $z = 0$.

Itération 2 : Variables entrantes candidates : aucunes, tous les coûts réduits des variables hors base sont négatifs. On ne peut plus améliorer la solution courante, $\mathbf{x_1}$ est la solution optimale de (P_{aux}).

$\Rightarrow$ Étant donné que $z = -x_0 = 0$, $(6,0,0,2,3)$ est une solution réalisable de (P); c'est $\mathbf{x_1}$ sans la variable x_0.

On peut appliquer le simplexe à (P) en partant de cette solution (c'est ce que l'on appelle la phase II).

Initialisation : On reprend l'ancien dictionnaire sans x_0 et on ajoute la vrai fonction objectif $z = 5x_1 + 7x_2$.

$$(D_0)\left\{\begin{array}{rlll} x_1 = & 6 & -x_2 & +x_3 \\ x_4 = & 2 & -x_2 & +x_3 \\ x_5 = & 3 & -x_2 & \\ z = & 30 & +2x_2 & +5x_3 \end{array}\right.$$

La solution du dictionnaire est $\mathbf{x_0} = (6,0,0,2,3)$ avec $z = 30$.

Itération 1 : Variables entrantes candidates :

- x_2 avec un coût réduit égale à 2.
- x_3 avec un coût réduit égale à 5.

$\Rightarrow$ x_3 entrante en base.

Variables sortantes candidates :

- x_1 avec $x_1 = 6 + x_3 \geqslant 0 \Longrightarrow x_3 \geqslant -6$: non contraignant
- x_4 avec $x_4 = 2 + x_3 \geqslant 0 \Longrightarrow x_3 \geqslant -2$: non contraignant
- x_3 n'intervient pas dans le définition de x_5 : x_5 ne peut pas sortir.

$\Rightarrow$ Il n'y a pas de variables sortantes : le problème est non borné.

On peut vérifier sur la figure suivante :

Exercice 4 Compréhension

Considérons de nouveau le problème (P) de l'exercice A2.4.

$$(P)\left\{\begin{array}{rl} \text{Maximiser} & 5x_1 + 7x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ & x_1 - x_4 = 4 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ \text{et} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Une solution réalisable est $\mathbf{x_0} = (5,1)$.

1. Que valent les variables d'écart au point $\mathbf{x_0}$?
   $x_3 = 0$ et $x_4 = 1$ et $x_5 = 2$

2. $\mathbf{x_0}$ est-elle une solution de base ? Peut-on définir un dictionnaire dont $\mathbf{x_0}$ serait la solution de base ?
   Non, $\mathbf{x_0}$ n'est pas une solution de base, c'est-à-dire un sommet du polytope. Il n'est donc pas possible de définir un dictionnaire dont $\mathbf{x_0}$ serait la solution de base.

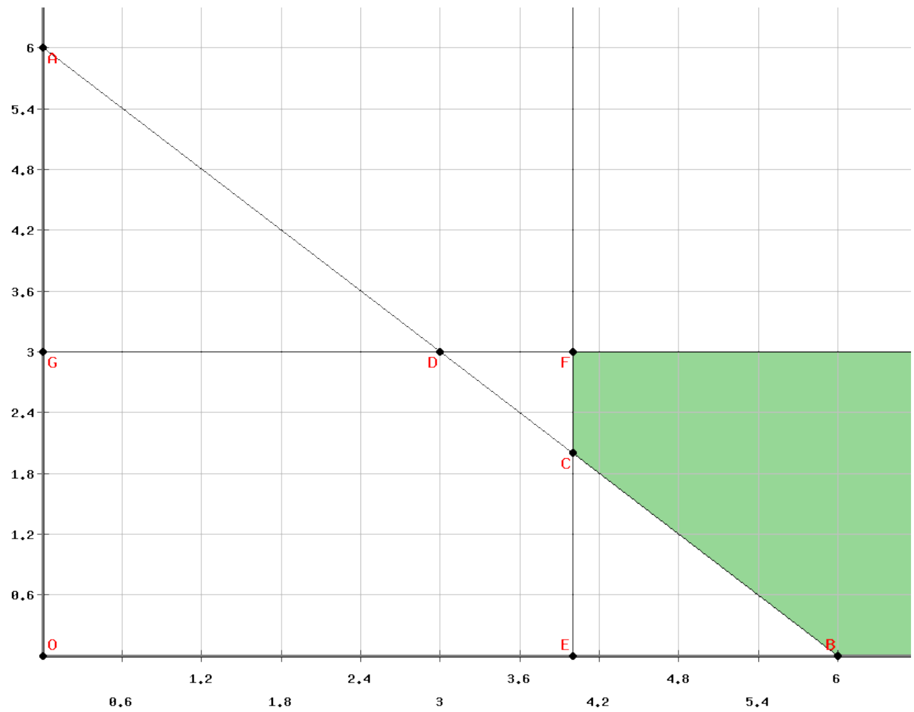


Figure 1: Le problème est non borné, on peut augmenter arbitrairement la valeur de x_1.

3. Peut-on appliquer l'algorithme du simplexe en débutant de cette solution ?
   Non, l'algorithme du simplexe doit débuter avec une solution de base.

4. Que proposez vous donc, si vous souhaitez utiliser cette solution ?
   $\mathbf{x_0}$ n'est pas une solution de base mais elle est réalisable, elle est donc à l'intérieur du polytope, elle sature même une contrainte (la première); on peut la modifier pour la rapprocher du sommet du polytope. La première contrainte est déjà saturé donc $x_1 + x_2 = 6$, on peut déplacer ce point sur cette contrainte, par exemple en diminuant la valeur de x_2 jusqu'à zéro, x_1 est alors égale à 6 et la point $(6, 0)$ est un sommet polytope donc une solution de base (cf. figure 1).