

2M310 - Équations différentielles :
éléments d'analyse et approximation numérique

Table des matières

1	Introduction et motivation	3
1.1	Définition et premiers exemples	3
1.2	Exemples de bilans entre t et $t + dt$	6
1.3	Difficultés et enjeux	8
1.4	Quelques notions sur les courbes paramétrées	8
1.4.1	Généralités	8
1.4.2	Exemple de tracé en coordonnées cartésiennes	13
1.4.3	Courbes en coordonnées polaires	16
1.5	Lien avec les équations différentielles	20
1.5.1	Un peu de vocabulaire	20
1.5.2	Mécanique du point, portrait de phase	21
2	Systèmes d'équations différentielles linéaires	23
2.1	Rappels sur les équations différentielles linéaires d'ordre un	23
2.1.1	Première introduction aux schémas d'Euler	27
2.2	Équation différentielle linéaire d'ordre 2	30
2.3	Systèmes d'ordre un à coefficients constants : exponentielle de matrice	33
2.3.1	Le cas homogène : définition de l'exponentielle d'une matrice et conséquences	34
2.3.2	Le cas non homogène	40
2.4	Calculs d'exponentielle de matrice	42
2.4.1	Quelques exemples	42
2.4.2	Cas général	44
2.5	Lien entre les deux méthodes	47
2.6	Tracé des trajectoires de solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants	49
2.6.1	Quelques cas simples importants	49
2.6.2	Cas général	56
2.6.3	Que lit-on sur les portraits de phase ? Quelques notions de stabilité des équations différentielles	57
2.7	Analyse numérique	61
2.7.1	Schémas d'Euler	61
2.7.2	Notion de convergence d'un schéma numérique	63
2.7.3	Perte de périodicité dans les schémas d'Euler	66
3	Théorie générale pour les équations différentielles	67
3.1	Théorème de Cauchy-Lipschitz : énoncé et conséquences	67
3.2	Quelques résultats plus avancés	73
3.3	Recollements	77
3.4	Équations à variables séparées	80

3.5	Analyse numérique	85
3.6	Exemples	85
3.6.1	Le système de Lotka-Volterra	85
3.6.2	Portrait de phase du pendule simple	91

Chapitre 1

Introduction et motivation

1.1 Définition et premiers exemples

Définition 1.1.1. Une **équation différentielle ordinaire** est une équation reliant une variable réelle t , une fonction inconnue x dépendant de la variable t et à valeurs dans \mathbb{R}^m (dans ce cours on prendra $m = 1$ - EDO scalaires ou $m = 2$ - EDO vectorielles), ainsi que ses dérivées jusqu'à un ordre $n \geq 1$, c'est à dire $x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)$. Le plus souvent, ces équations sont écrites sous la forme

$$x^{(n)}(t) = f(t, x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \quad (1.1)$$

où la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est donnée. Autrement dit, la dérivée n -ième de x au point t est fonction de t et des valeurs des dérivées de x d'ordre strictement inférieur en ce même point t . L'entier n est appelé **ordre de l'équation**.

Ces équations peuvent être munies de certaines **conditions initiales**, ou de **conditions au bord** : par exemple, les valeurs des dérivées de x jusqu'à l'ordre $n - 1$ sont prescrites en un point particulier t_0 :

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Plusieurs types de questions peuvent se poser :

- On peut chercher, pour x_0, \dots, x_{n-1} donnés, à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1.1) ;
- On peut essayer de calculer explicitement ces solutions ;
- On peut chercher à comprendre le comportement qualitatif des solutions de (1.1) : ces solutions sont-elles définies sur tout \mathbb{R} ou sur un sous-intervalle ? Sont-elles périodiques ? Explosent-elles ? (c'est-à-dire : tendent-elles vers $\pm\infty$ au bord de leur intervalle de définition ?)
- Si on ne sait pas calculer explicitement les solutions, on peut essayer de calculer des solutions approchées.

On reviendra sur ces différentes notions au cours du chapitre.

Un peu d'histoire...

Le calcul différentiel naît à la fin du XVIIe siècle, à la suite des travaux de Leibniz et Newton (1671). Assez naturellement, la question de résoudre des équations différentielles se pose. À cette époque, les modèles étudiés viennent principalement de la mécanique (en particulier de la mécanique céleste) et de la géométrie. Des exemples multiples d'équations

différentielles sont fournis par le principe fondamental de la dynamique, ou deuxième loi de Newton, qui s'écrit

$$F = mx''(t),$$

où x est le centre de masse d'un système, m sa masse, et F la résultante des forces s'appliquant sur le système. Notons que cette dernière équation est une équation différentielle pourvu que F puisse s'écrire comme une fonction de la position $x(t)$ et de la vitesse $x'(t)$.

Un autre problème célèbre est celui de la chaînette, c'est-à-dire la question de savoir quelle forme prend une chaîne, suspendue aux deux extrémités, sous l'action de son propre poids. Ce problème a été résolu simultanément par Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens (1691). À cette époque, deux méthodes de "résolution" étaient utilisées : soit on intégrait directement l'équation différentielle, c'est-à-dire qu'on disposait d'une formule explicite pour la solution, soit on en calculait un développement en série entière. Un siècle plus tard, en 1769, Euler entreprend la classification de toutes les équations différentielles pour lesquelles on dispose de formules explicites.

Au XIX^e siècle, Liouville démontre que certaines équations ne peuvent être résolues analytiquement : la solution existe, mais ne peut être exprimée comme une combinaison de fonctions usuelles. C'est le cas par exemple de l'équation

$$x'(t) = t + x^2(t).$$

Dès lors, il apparaît crucial de disposer d'autres outils que le calcul explicite. Deux voies (complémentaires) sont possibles :

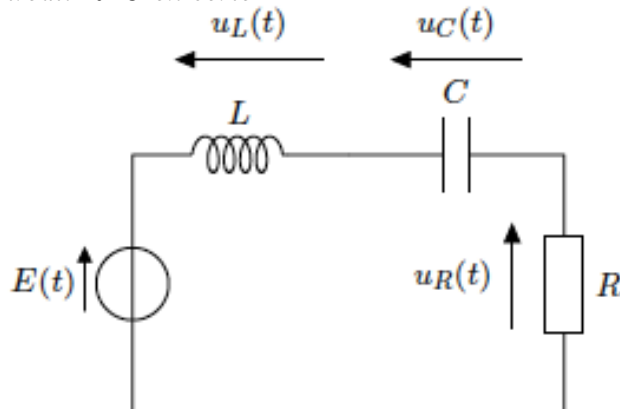
- l'analyse théorique, dont le but est de montrer l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles à l'aide d'outils généraux ;
- l'analyse numérique, dont le but est de calculer des solutions approchées de ces solutions, avec la meilleure précision possible.

Vers 1870 Fuchs, puis Poincaré, cherchent ainsi à déduire de l'examen a priori de l'équation, les propriétés des solutions.

Parallèlement aux progrès mathématiques dans ce domaine, l'utilisation des équations différentielles se développe dans toutes les disciplines : la chimie (cinétique des réactions chimiques), les sciences du vivant (épidémies, modèles de populations)...

Quelques exemples connus

▷ *Circuit RLC en série :*



Soit $i(t)$ l'intensité qui circule dans le circuit. D'après la loi des mailles, on a

$$E(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t).$$

Par ailleurs, on a les relations suivantes pour les tensions u_L, u_C, u_R :

- D'après la loi d'Ohm, $u_R(t) = Ri(t)$;
- La charge aux bornes du condensateur est $Q(t) = Cu_C(t)$, et donc $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$;
- La tension aux bornes de la bobine est $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$.

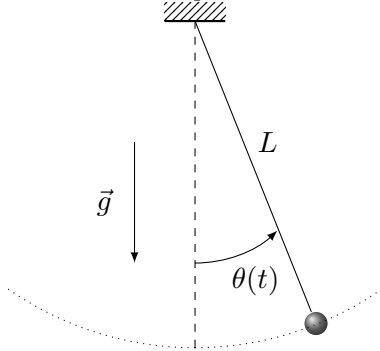
On obtient donc finalement

$$LCu_C''(t) + RCu_C'(t) + u_C(t) = E(t).$$

L'équation ci-dessus est une équation linéaire d'ordre deux, à coefficients constants. On verra plus tard comment la résoudre en général.

Remarque 1.1.2. Dans ce cours, on notera systématiquement la dérivée d'une fonction x comme x' , et jamais comme \dot{x} , par souci d'homogénéité.

▷ Pendule simple :



Le pendule, de masse m , est soumis à deux forces :

- Son poids $m\vec{g}$;
- La tension du fil, orientée selon l'axe du fil.

Ainsi si on projette le principe fondamental de la dynamique suivant la normale au fil, on obtient, puisque le mouvement est circulaire de rayon L :

$$mL\theta'' = -mg \sin \theta,$$

soit

$$\theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0. \quad (1.2)$$

Remarquons que cette équation est non linéaire : si θ_1, θ_2 sont deux solutions de (1.2), en général $\theta_1 + \theta_2$ n'est pas solution. De façon générale, il est impossible de connaître explicitement les solutions d'équations non linéaires. On calcule donc souvent des solutions exactes d'une équation approchée de (1.2)¹ pour de petites oscillations en linéarisant le sinus autour de zéro : en effet, $\sin \theta \sim \theta$ pour $\theta \ll 1$. Pour la version linéarisée de l'équation, qui n'est valable que pour les petites oscillations, on a

$$\theta'' + \frac{g}{L} \theta = 0. \quad (1.3)$$

Les solutions sont des combinaisons linéaires de $\sin(\omega_0 t)$ et de $\cos(\omega_0 t)$, où $\omega_0 = \sqrt{g/L}$.

1. Ce qui n'est pas la même chose que de calculer des solutions approchées de l'équation exacte !

1.2 Exemples de bilans entre t et $t + dt$

▷ *Modèles de Malthus (1798) et de Verhulst (1836) :*

On considère une population d'individus dont l'effectif au cours du temps est représenté par une fonction à valeurs réelles $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Dans un premier temps on suppose que le taux instantané de naissances (resp. de décès) dans la population est constant et égal à b (resp. d). On considère la variation de la population entre t et $t + dt$. On a

$$N(t + dt) - N(t) = \text{nombre de naissances} - \text{nombre de décès entre } t \text{ et } t + dt,$$

et donc

$$N(t + dt) - N(t) = bN(t)dt - dN(t)dt.$$

On arrive donc à l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = rN(t), \tag{1.4}$$

où $r = b - d$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $N_0 \exp(rt)$. En particulier :

- Si $b > d$ ($r > 0$), autrement dit s'il y a plus de naissances que de décès, la population croît exponentiellement ;
- Si $b < d$ ($r < 0$), la population s'éteint avec une vitesse exponentielle ;
- Si $b = d$ ($r = 0$), on a une situation d'équilibre : la population est constante.

Le défaut principal de ce modèle est qu'il est peu réaliste qu'une population croisse indéfiniment à vitesse exponentielle. En effet, il faut tenir compte des ressources dont dispose cette population, qui vont rapidement s'épuiser si la population croît. Pour pallier ce problème, on peut modifier l'équation de Malthus (1.4) en ajoutant un terme proposé par Verhulst :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right). \tag{1.5}$$

Ainsi, lorsque $N(t) > K$, $N'(t) < 0$: la population diminue lorsqu'elle dépasse la taille critique K .

Le paramètre K est appelé "charge utile de l'environnement". Il est fonction de la capacité du milieu en nourriture.

Lemme 1.2.1. *L'unique solution de l'équation (1.5) avec pour donnée initiale $N(t = 0) = N_0$ est*

$$N(t) = N_0 \frac{Ke^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}.$$

Démonstration. Posons

$$\bar{N}(t) = N_0 \frac{Ke^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}.$$

On vérifie que l'on a bien $\bar{N}(0) = N(0) = N_0$. Par ailleurs,

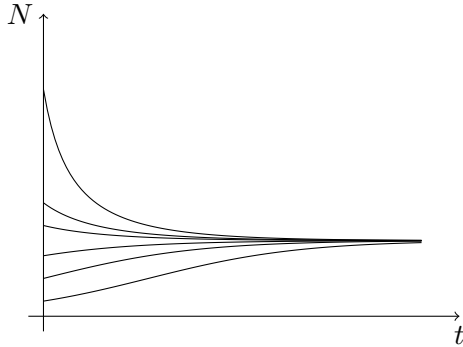
$$\begin{aligned}
\bar{N}'(t) &= N_0 \frac{(K + N_0(e^{rt} - 1))Kre^{rt} - Ke^{rt}N_0re^{rt}}{(K + N_0(e^{rt} - 1))^2} \\
&= N_0 \frac{K^2re^{rt} - N_0Kre^{rt}}{(K + N_0(e^{rt} - 1))^2} \\
&= r\bar{N}(t) \frac{K - N_0}{K + N_0(e^{rt} - 1)} \\
&= r\bar{N}(t) \frac{K + N_0e^{rt} - N_0 - N_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)} \\
&= r\bar{N}(t) \left(1 - \frac{\bar{N}(t)}{K}\right).
\end{aligned}$$

Donc \bar{N} est solution de l'équation (1.5).

On verra au chapitre 3 un théorème d'unicité pour les solutions de l'équation (1.5). On en déduit que $N(t) = \bar{N}(t)$. □

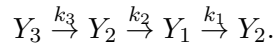
On vérifie aisément sur la formule que $N(t) \rightarrow K$ quand $t \rightarrow \infty$ quelle que soit la valeur de N_0 .

Regardons l'allure des solutions de (1.5) en fonction de la donnée initiale : en prenant comme paramètres $r = K = 1$, on a la figure suivante



▷ *Cinétique chimique :*

Considérons une réaction chimique sur trois espèces :



Notons c_i la concentration de l'espèce Y_i .

Entre t et $t + dt$, on a donc le bilan suivant :

$$\begin{aligned}
c_3(t + dt) - c_3(t) &= -k_3c_3(t)dt, \\
c_2(t + dt) - c_2(t) &= (k_3c_3(t) - k_2c_2(t) + k_1c_1(t))dt, \\
c_1(t + dt) - c_1(t) &= (k_2c_2(t) - k_1c_1(t))dt.
\end{aligned}$$

On est conduit au système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}
c_3'(t) &= -k_3c_3(t), \\
c_2'(t) &= k_3c_3(t) - k_2c_2(t) + k_1c_1(t), \\
c_1'(t) &= k_2c_2(t) - k_1c_1(t).
\end{aligned}$$

Ce système est un système d'équations linéaires à coefficients constants. On verra plus tard comment en obtenir une solution explicite.

1.3 Difficultés et enjeux

Comme on l'a déjà expliqué plusieurs fois, il est souvent difficile, voire impossible, d'obtenir des formules explicites pour les solutions d'une équation différentielle. En fait, les seuls cas pour lesquels on sait systématiquement donner une formule pour les solutions sont les équations linéaires à coefficients constants de n'importe quel ordre, ainsi que les équations linéaires d'ordre un. On connaît également des formules pour quelques équations non-linéaires remarquables (comme par exemple l'équation logistique (1.5), ou l'équation de Ricatti), mais ces cas sont l'exception plutôt que la règle.

Dès lors se pose la question de savoir comment calculer (à l'aide d'un ordinateur) les solutions d'équations différentielles. Comme on l'a vu, ces équations interviennent dans de nombreux domaines, allant de la physique et de la chimie aux sciences humaines, et comprendre comment calculer précisément les solutions est donc un enjeu crucial. L'idée clé est que l'on ne calcule quasiment jamais, numériquement, de solution exacte des équations, mais plutôt des solutions approchées (ou des suites de solutions approchées).

Une suite de solutions approchées est une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur \mathbb{R} (ou sur le même intervalle I de \mathbb{R} que la solution x de l'équation (1.1)), et telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_n(t) \rightarrow x(t) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Ces fonctions doivent être calculables explicitement et relativement facilement. En revanche, on n'exige pas qu'elles soient des solutions de l'équation (1.1), et en général, elles ne le sont pas.

Un autre enjeu est de démontrer des comportements qualitatifs sans nécessairement savoir calculer la solution x de (1.1). Autrement dit, on cherchera à démontrer, sur la solution x de (1.1) dont on connaît l'existence et l'unicité grâce à un théorème abstrait, des propriétés du type² :

- x est périodique ;
- x est croissante/décroissante ;
- l'intervalle de définition de x est \mathbb{R} (on dit dans ce cas que la solution est globale) ;
- il existe un temps $T^* \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow T^*$ (explosion) ;
- dans le cas où la solution est globale, $x(t)$ tend vers une constante quand $t \rightarrow \infty$.

1.4 Quelques notions sur les courbes paramétrées

Afin de représenter les trajectoires des solutions d'équations différentielles, on a besoin d'introduire la notion de courbe paramétrée. Le but de ce paragraphe est de présenter les idées majeures d'une telle représentation, en se concentrant sur les notions qui seront utilisées dans le reste du cours. D'autres résultats annexes, mais qui ne sont pas nécessaires pour la compréhension de ce cours, sont donnés en Appendice.

1.4.1 Généralités

Définition 1.4.1. Une **courbe paramétrée** \mathcal{C} est un ensemble de points de \mathbb{R}^2 de la forme

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \exists t \in I, x = f(t) \text{ et } y = g(t)\},$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions à valeurs réelles. En particulier

$$\mathcal{C} = \{(f(t), g(t)); t \in I\}.$$

2. attention, certaines de ces propriétés sont incompatibles !

La variable $t \in I$ est appelée **paramètre** de la courbe associé au **paramétrage** de la courbe $((f(t), g(t)))$.

Remarque 1.4.2. On parle également de courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes, pour souligner le fait que les fonctions f et g donnent les coordonnées cartésiennes d'un point de la courbe. On parlera plus loin de courbes paramétrées en coordonnées polaires.

Exemple 1.4.3. 1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Alors le graphe représentatif de h , c'est-à-dire l'ensemble des points

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = h(x) \text{ et } x \in I\}$$

est une courbe paramétrée : il suffit de prendre dans la définition $f = \text{id}$ (i.e. $x = t$) et $g = h$.

2. Le cercle unité

$$\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$$

est une courbe paramétrée : en effet, on a aussi

$$\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}, x = \cos t \text{ et } y = \sin t\}.$$

Remarque 1.4.4. 1. Le paramétrage n'est pas unique : pour le cercle unité \mathcal{C}_0 , on peut aussi prendre

$$\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}, x = \sin t \text{ et } y = \cos t\}$$

ou encore

$$\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}, x = \cos(2t) \text{ et } y = \sin(2t)\}.$$

De façon générale, il suffit de dilater/translater l'intervalle de définition I (en modifiant les fonctions f et g de façon ad hoc) pour que cela modifie le paramétrage.

2. Physiquement, on peut interpréter le paramètre t comme un temps, et une courbe paramétrée comme la trajectoire d'un point en fonction du temps : à tout temps t correspond une position $(f(t), g(t))$.

Étude des branches infinies

Soit

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \exists t \in I, x = f(t) \text{ et } y = g(t)\},$$

une courbe paramétrée (avec les notations du paragraphe précédent), et soit $a \in \bar{I}$.

Définition 1.4.5. On dit que \mathcal{C} possède une **branche infinie** au voisinage de a si f et g admettent des limites (finies ou infinies) en a et si

$$\lim_{t \rightarrow a, t \in I} |f(t)| + |g(t)| = +\infty.$$

Plusieurs cas sont possibles :

1. Premier cas : seule l'une des deux limites $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$ ou $\lim_{t \rightarrow a} g(t)$ est infinie (l'autre est finie).
2. Deuxième cas : les deux limites $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow a} g(t)$ sont infinies.
1. Dans le premier cas, la courbe admet une asymptote horizontale ou verticale. Plus précisément :

- (a) Si $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = m \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow a} |g(t)| = +\infty$, la droite d'équation $x = m$ est appelée asymptote de \mathcal{C} en a .
 - (b) Si $\lim_{t \rightarrow a} |f(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = m \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = m$ est appelée asymptote de \mathcal{C} en a .
2. Dans le deuxième cas, il faut distinguer suivant la limite du rapport $g(t)/f(t)$ (si elle existe !)
- (a) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{g(t)}{f(t)} = 0$, on dit que \mathcal{C} possède une branche parabolique dans la direction (Ox) .
 - (b) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{g(t)}{f(t)} = \pm\infty$, on dit que \mathcal{C} possède une branche parabolique dans la direction (Oy) .
 - (c) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{g(t)}{f(t)} = m \in \mathbb{R}^*$, il faut regarder la limite de la quantité $g(t) - mf(t)$:
 - i. Si $\lim_{t \rightarrow a} g(t) - mf(t) = \pm\infty$, on dit que \mathcal{C} possède une branche parabolique dans la direction $y = mx$.
 - ii. Si $\lim_{t \rightarrow a} g(t) - mf(t) = p \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = mx + p$ est appelée asymptote de \mathcal{C} en a .

Étude des tangentes

On reprend les notations de la définition 1.4.1.

Proposition 1.4.6. *Soit $a \in I$, avec I intervalle ouvert de \mathbb{R} . On suppose que les fonctions f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur I .*

Si $(f'(a), g'(a)) \neq (0, 0)$, alors la tangente à la courbe \mathcal{C} au point de paramètre a est la droite qui passe par le point de coordonnées $(f(a), g(a))$ de vecteur directeur $(f'(a), g'(a))$. En particulier :

- *Si $g'(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$, alors il y a une tangente horizontale à la courbe au point de coordonnées $(f(a), g(a))$.*
- *Si $g'(a) \neq 0$ et $f'(a) = 0$, alors il y a une tangente verticale à la courbe au point de coordonnées $(f(a), g(a))$.*

Démonstration. On se place dans un voisinage du point $a \in I$.

- *Premier cas :* On suppose que $f'(a) \neq 0$. Nous allons "défaire" la paramétrisation $f(t)$ de la première coordonnée des points de \mathcal{C} autour du point a .

On utilise alors le théorème d'inversion locale pour représenter \mathcal{C} comme le graphe d'une fonction \mathcal{C}^1 au voisinage de a . Plus précisément, comme f est de classe \mathcal{C}^1 et que $f'(a) \neq 0$, il existe un voisinage $V \subset I$ de a tel que f est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de V sur $f(V)$. On note $\varphi : f(V) \rightarrow V$ l'inverse de la fonction $f|_V$, c'est-à-dire que pour tout $t \in V$, pour tout $x \in f(V)$,

$$x = f(t) \iff t = \varphi(x).$$

Il s'ensuit que pour $t \in V$, $x \in f(V)$ on a

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t) \end{cases} \iff y = g \circ \varphi(x),$$

et la fonction $g \circ \varphi$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $f(V)$. La portion de \mathcal{C} correspondant au voisinage V de a est donc le graphe de $g \circ \varphi$ au voisinage du point $f(a)$. On sait alors

que la tangente à \mathcal{C} au point de coordonnées $(f(a), g \circ \varphi(f(a))) = (f(a), g(a))$ est la droite passant par $(f(a), g(a))$ et de coefficient directeur $(g \circ \varphi)'(f(a))$. Or

$$(g \circ \varphi)'(f(a)) = g'(\varphi(f(a))) \varphi'(f(a)) = g'(a) \frac{1}{f'(a)}.$$

On en déduit que la tangente à la courbe \mathcal{C} au point de paramètre a est la droite qui passe par le point de coordonnées $(f(a), g(a))$ de vecteur directeur $(f'(a), g'(a))$. En particulier si $g'(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$, alors il y a une tangente horizontale à la courbe au point de coordonnées $(f(a), g(a))$; il s'agit de la droite horizontale d'équation $y = g(a)$.

- *Deuxième cas* : On suppose que $f'(a) = 0$. Dans ce cas $g'(a) \neq 0$, et on peut se réduire au cas précédent en regardant la courbe symétrique à \mathcal{C} par rapport à la première bissectrice : $\mathcal{C}_* = \{(g(t), f(t)), t \in I\}$.

□

Remarque 1.4.7. Si elle existe, la droite tangente à une courbe paramétrée en un point de cette courbe ne dépend pas du paramétrage choisi pour la décrire. Le vecteur tangent en ce même point dépend totalement du paramétrage. C'est la vitesse instantanée d'un point mobile se déplaçant sur la courbe selon le paramétrage choisi : il peut aller plus ou moins vite, ce qui modifie la norme, éventuellement l'orientation, mais pas la direction du vecteur tangent d'un paramétrage à l'autre.

Définition 1.4.8. Soit \mathcal{C} une courbe paramétrée de paramétrage (f, g) avec $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$. Soit $a \in I$. Si $f'(a) = g'(a) = 0$, on dit que le point de paramètre a est un **point stationnaire**.

Il reste donc à comprendre ce qui se passe pour les points stationnaires. L'étude est alors plus compliquée. S'il existe deux entiers $m, n \geq 2$ avec $m \neq n$ tels que les vecteurs $(f^{(m)}(a), g^{(m)}(a))$ et $(f^{(n)}(a), g^{(n)}(a))$ sont non nuls et linéairement indépendants, alors l'analyse au voisinage du point de paramètre a est donnée dans la Proposition 1.4.10 en fin de cette section. Néanmoins, cette situation ne sera pas rencontrée dans la suite du cours. En revanche, on rencontrera à plusieurs reprises le cas de figure suivant : pour un point $a \in \bar{I}$ tel que $(f(t), g(t))$ admet une limite quand $t \rightarrow a$ avec $t \in I$, on a

$$\lim_{t \rightarrow a} f^{(n)}(t) = \lim_{t \rightarrow a} g^{(n)}(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

C'est par exemple le cas pour la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = e^{-t}, \quad g(t) = te^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

avec $a = +\infty \in \bar{\mathbb{R}}$. On pourra alors utiliser les propriétés suivantes :

Proposition 1.4.9. On pose $(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow a} (f(t), g(t))$. Si $f(t) \neq x_0$ pour $t \in I$, on considère le taux d'accroissement

$$\rho(t) := \frac{g(t) - y_0}{f(t) - x_0}.$$

On note $\bar{\mathcal{C}}$ la courbe définie par $\bar{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \cup \{(x_0, y_0)\}$.

On a alors les résultats suivants :

1. Si $\rho(t)$ est bien défini dans un voisinage de a et si $\rho(t) \rightarrow \pm\infty$ quand $t \rightarrow a$, alors la courbe $\bar{\mathcal{C}}$ admet une tangente verticale en (x_0, y_0) .

2. Si $\rho(t)$ est bien défini dans un voisinage de a et si $\rho(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow a$, alors la courbe \bar{C} admet une tangente horizontale en (x_0, y_0) .
3. Si $\rho(t)$ est bien défini dans un voisinage de a et si $\rho(t) \rightarrow l \in \mathbb{R}^*$ quand $t \rightarrow a$, alors la courbe \bar{C} admet une tangente de pente l en (x_0, y_0) .

Démonstration. Les trois propriétés sont des conséquences du fait que la droite passant par les points $M(t) = (f(t), g(t))$ et (x_0, y_0) a pour pente $\rho(t)$. Par conséquent, si $\rho(t)$ a une limite l quand $t \rightarrow a$, cette valeur l est la pente de la tangente en (x_0, y_0) (avec la convention qu'une droite de pente infinie est verticale). Par ailleurs, si f et g admettent des dérivées en a et $f'(a) \neq 0$ nous retrouvons les résultats de la Proposition 1.4.6. \square

Dans le cas de l'exemple (1.6), on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0,$$

donc $a = +\infty$ et $(x_0, y_0) = (0, 0)$. De plus

$$\rho(t) = \frac{g(t) - 0}{f(t) - 0} = t.$$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = +\infty$: la courbe \bar{C} admet une tangente verticale en $(0, 0)$.

Nous allons finir cette section par une proposition assez générale, qui englobe certains des cas précédents, et dont la démonstration repart de la définition de la tangente en un point $M(a)$ comme étant la droite de vecteur directeur la limite, si elle existe, des vecteurs normalisés $\frac{M(t) - M(a)}{\|M(t) - M(a)\|}$.

Proposition 1.4.10. Soit f et g de classe C^∞ , de sorte que l'on peut écrire un développement limité de f et g à tout ordre au voisinage d'un point a . Notons $M(t)$ le point de C de paramètre t , c'est-à-dire le point de coordonnées $(f(t), g(t))$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M(t) = M_0 + \sum_{k=1}^n M_k (t - a)^k + o((t - a)^n),$$

où M_k est le vecteur de coordonnées $(f^{(k)}, g^{(k)})(a)/k!$. Soit $1 \leq m < n$ les plus petits entiers (strictement positifs) tels que les vecteurs M_m et M_n sont indépendants (s'ils existent!).

La courbe admet alors en $M(a)$ une tangente de vecteur directeur M_m .

De plus, on a les cas suivants :

- m impair, n pair (par exemple : $m = 1, n = 2$) : la courbe reste du même côté de sa tangente au voisinage de $M(a)$: il s'agit d'un **point ordinaire** ;
- m impair, n impair (par exemple : $m = 1, n = 3$) : la courbe admet un **point d'inflexion** en $M(a)$;
- m pair, n impair (par exemple : $m = 2, n = 3$) : la courbe admet un **point de rebroussement de première espèce** ;
- m pair, n pair (par exemple : $m = 2, n = 4$) : la courbe admet un **point de rebroussement de deuxième espèce**.

Dans ce cours, on appellera **points réguliers** les points ordinaires et les points d'inflexion, et **points singuliers** ceux de rebroussement.

Démonstration. Tout d'abord, m est le plus petit entier strictement positif tel que M_m est non nul. On a donc

$$M(t) - M(a) = M(t) - M_0 = M_m (t - a)^m + o(|t - a|^m).$$

Par conséquent,

$$\|M(t) - M(a)\| \sim \|M_m\| |t - a|^m,$$

et

$$\frac{M(t) - M(a)}{\|M(t) - M(a)\|} = \frac{M_m}{\|M_m\|} \left(\frac{t - a}{|t - a|} \right)^m + o(1).$$

On en déduit que M_m est un vecteur tangent à la courbe en M_a .

Pour déterminer l'allure de la courbe au voisinage de $M(a)$, il faut étudier le signe de $(M(t) - M(a)) \cdot M_m$ d'une part, et de $(M(t) - M(a)) \cdot M_m^\perp$ d'autre part, où M_m^\perp est un vecteur orthogonal au vecteur M_m , autrement dit un vecteur normal à la courbe.

- Si $(M(t) - M(a)) \cdot M_m$ est de signe constant au voisinage de a , cela signifie que la courbe est entièrement incluse dans un demi-plan affine passant par $M(a)$ et de vecteur normal M_m . Par conséquent, la courbe admet un point de rebroussement en M_m .
- Si $(M(t) - M(a)) \cdot M_m$ change de signe au voisinage de a , alors la courbe traverse la droite passant par $M(a)$ et de vecteur normal M_m . On est donc dans un cas régulier (pas de point de rebroussement).
- Si $(M(t) - M(a)) \cdot M_m^\perp$ est de signe constant au voisinage de a , cela signifie que la courbe est entièrement incluse dans un demi-plan affine passant par $M(a)$ et de vecteur normal M_m^\perp . Autrement dit, la courbe ne traverse pas sa tangente en $M(a)$.
- Si $(M(t) - M(a)) \cdot M_m^\perp$ change de signe au voisinage de a , cela signifie que la courbe se situe de part et d'autre de sa tangente en a . S'il y a un point de rebroussement, c'est un point de rebroussement de première espèce. Si on est dans un cas régulier, la courbe admet un point d'inflexion en $M(a)$.

Enfin, pour étudier les signes de $(M(t) - M(a)) \cdot M_m$ et de $(M(t) - M(a)) \cdot M_m^\perp$, il suffit d'examiner les parités de m et n . Plus précisément, $(M(t) - M(a)) \cdot M_m \sim \|M_m\|^2 (t - a)^m$, et par conséquent :

- Si m est impair, $(M(t) - M(a)) \cdot M_m$ change de signe : on a un point régulier.
- Si m est pair, $(M(t) - M(a)) \cdot M_m$ change de signe : on a un point de rebroussement.

Par ailleurs, on rappelle que les vecteurs M_k pour $m \leq k < n$ sont tous colinéaires à M_m , et donc

$$(M(t) - M(a)) \cdot M_m^\perp = M_n \cdot M_m^\perp (t - a)^n + o((t - a)^n).$$

Comme M_n et M_m sont linéairement indépendants, $M_n \cdot M_m^\perp \neq 0$ (en effet, si $M_n \cdot M_m^\perp$ était nul, M_n serait orthogonal à M_m^\perp , donc colinéaire à M_m , ce qui est exclus.)

Ainsi $(M(t) - M(a)) \cdot M_m^\perp$ change de signe si et seulement si n est impair. On en déduit donc le résultat de la proposition. □

1.4.2 Exemple de tracé en coordonnées cartésiennes

Méthode générale

1. Déterminer l'ensemble de définition : c'est l'intersection des ensembles de définition de f et de g . Préciser aussi les dérivabilités de f et g ;
2. Rechercher les périodicités et les symétries éventuelles pour réduire le domaine d'étude :
 - Si $\begin{cases} f(-t) = -f(t) \\ g(-t) = g(t) \end{cases}$ alors le point $M(-t)$ peut se déduire de $M(t)$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

- Si $\begin{cases} f(-t) = f(t) \\ g(-t) = -g(t) \end{cases}$ alors le point $M(-t)$ peut se déduire de $M(t)$ par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
 - Si $\begin{cases} f(-t) = -f(t) \\ g(-t) = -g(t) \end{cases}$ alors le point $M(-t)$ peut se déduire de $M(t)$ par symétrie par rapport à l'origine.
 - Si $\begin{cases} f(-t) = g(t) \\ g(-t) = f(t) \end{cases}$ alors le point $M(-t)$ peut se déduire de $M(t)$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.
3. Établir le tableau de variation avec les lignes : t, f', f, g', g . Pour cela il faut calculer les dérivées et étudier leur signe ;
 4. Placer sur la courbe les points à tangente verticale ($f' = 0$) ou horizontale ($g' = 0$), qui apparaissent sur le tableau ;
 5. Étudier les points stationnaires ;
 6. Étudier la tangente aux “points limites”, c'est-à-dire aux points $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $a \notin I$ tel que $\lim_{t \rightarrow a, t \in I} (f(t), g(t)) = (x_0, y_0)$.
 7. Étudier les branches infinies, tracer les asymptotes éventuelles ;
 8. Tracer la courbe (et rétablir les symétries trouvées en 2) ;
 9. Éventuellement, pour préciser le tracé, déterminer les points multiples (i.e. les points tels qu'il existe $t \neq t'$ avec $M(t) = M(t')$, les intersections de la courbe avec les axes de coordonnées et les points d'inflexion.

Exemple

On considère la courbe paramétrée \mathcal{C} définie par

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \exists t \in \mathbb{R}, x = \frac{t^2}{t-1} \text{ et } y = \frac{t}{t^2-1}\}.$$

1. Domaine de définition : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
2. Pas de symétrie évidente ;
3. Tableau de variations :

Soit

$$\begin{aligned} f : t \in D &\mapsto \frac{t^2}{t-1}, \\ g : t \in D &\mapsto \frac{t}{t^2-1}. \end{aligned}$$

Les fonctions f et g sont dérivables sur D . Pour tout $t \in D$, on a

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, \\ g'(t) &= -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}, \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(t)$	+ + 0 -			- 0 +		
$f(t)$	$-\infty$ \nearrow 0 \searrow $-\infty$			$+\infty$ \searrow 4 \nearrow $+\infty$		
$g'(t)$	-		- -		- -	
$g(t)$	0 \searrow $-\infty$		$+\infty$ \searrow $-\infty$		$+\infty$ \searrow 0	

4. On voit sur le tableau de variations qu'il y a des tangentes verticales aux points de paramètres $t = 0$ et $t = 2$, qui ont respectivement pour coordonnées $(0, 0)$ et $(4, 2/3)$. Il n'y a pas de point à tangente horizontale.

5. Branches infinies :

- $t \rightarrow -\infty$: $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 0^-$. Par conséquent la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe quand $x \rightarrow -\infty$, et la courbe est en dessous de son asymptote.
- $t \rightarrow -1$: on a $f(-1) = -1/2$. Par conséquent la droite d'équation $x = -1/2$ est asymptote à la courbe. Pour $t \rightarrow -1^-$, on a $y = g(t) \rightarrow -\infty$ et $x = f(t) \rightarrow -1/2^-$: la courbe est à gauche de son asymptote quand $y \rightarrow -\infty$. Pour $t \rightarrow -1^+$, on a $y = g(t) \rightarrow +\infty$ et $x = f(t) \rightarrow -1/2^+$: la courbe est à droite de son asymptote quand $y \rightarrow +\infty$.
- $t \rightarrow 1$: on a $|f(t)| \rightarrow +\infty$ et $|g(t)| \rightarrow +\infty$. On étudie donc le rapport $g(t)/f(t)$. Pour $t \neq \pm 1$, on a

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{t}{t^2 - 1} \cdot \frac{t - 1}{t^2} = \frac{1}{t(t + 1)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{quand } t \rightarrow 1.$$

On étudie à présent le comportement de la quantité $g(t) - \frac{1}{2}f(t)$. On a

$$g(t) - \frac{1}{2}f(t) = \frac{-\frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t}{t^2 - 1} = \frac{-\frac{1}{2}t(t - 1)(t + 2)}{t^2 - 1} = -\frac{t(t + 2)}{2(t + 1)} \rightarrow -\frac{3}{4} \quad \text{quand } t \rightarrow 1.$$

Par conséquent la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ est asymptote à la courbe quand $x \rightarrow \pm\infty$. De plus

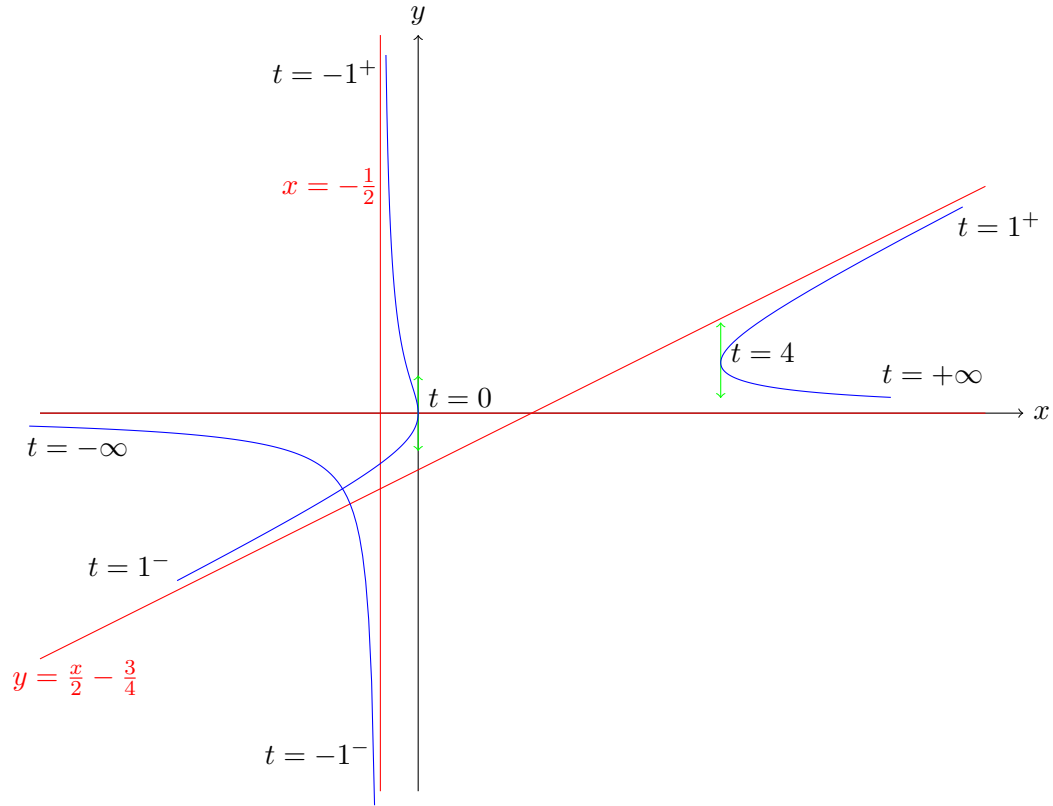
$$g(t) - \frac{1}{2}f(t) + \frac{3}{4} = -\frac{(2t + 3)(t - 1)}{4(t + 1)},$$

donc la courbe est au-dessus de son asymptote lorsque $t \rightarrow 1^-$ et en dessous lorsque $t \rightarrow 1^+$.

- $t \rightarrow +\infty$: $f(t) \rightarrow +\infty$ et $g(t) \rightarrow 0^+$. Par conséquent la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe quand $x \rightarrow +\infty$, et la courbe est au-dessus de son asymptote.

6. Intersections avec les axes des coordonnées : on vérifie facilement sur le tableau de variations que la courbe n'intersecte pas les axes de coordonnées quand le paramètre t appartient aux intervalles $] -\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$. Sur l'intervalle $] -1, 1[$, la seule intersection se produit pour le point de paramètre $t = 0$, et la courbe passe alors par le point $(0, 0)$ où elle admet une tangente verticale.

7. Tracé :



1.4.3 Courbes en coordonnées polaires

Définition 1.4.11. Pour tout point $M = (x, y) \neq (0, 0)$ du plan \mathbb{R}^2 , il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

Le couple (r, θ) forme les **coordonnées polaires** du point M .

Remarque 1.4.12. On a, par définition,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

L'angle θ est donc uniquement déterminé (modulo 2π) en fonction des coordonnées cartésiennes par

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Plus généralement, on peut associer à un couple (r, θ) de réels le point de coordonnées

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

On ne suppose alors plus que r est positif. On identifie alors le point associé au couple $(-r, \theta)$ avec $r > 0$ au point de coordonnées polaires $(r, \theta + \pi)$.

Exemples

1. Soit $\alpha_0 \in [0, 2\pi[$ fixé. L'ensemble des points

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}, x = t \cos \alpha_0, y = t \sin \alpha_0\}$$

est la droite passant par l'origine et faisant un angle α_0 avec l'axe des abscisses.

2. Soit $r_0 > 0$. L'ensemble des points

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in [0, 2\pi[, x = r_0 \cos t, y = r_0 \sin t\}$$

est le cercle de centre 0 et de rayon r_0 .

Définition 1.4.13. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

La courbe définie par

$$\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists \theta \in I, x = \rho(\theta) \cos \theta, y = \rho(\theta) \sin \theta\}$$

est une **courbe paramétrée en coordonnées polaires**. On dit que l'équation polaire de cette courbe est

$$r = \rho(\theta).$$

Analyse des courbes paramétrées définies par une équation polaire

Comme dans le cas général, on commence par chercher le domaine d'étude de la fonction ρ et ses symétries éventuelles. On a en particulier les propriétés suivantes :

- Si ρ est paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses ;
- Si ρ est impaire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- Si ρ est définie sur \mathbb{R} et périodique de période 2π , on peut se contenter d'étudier la courbe sur l'intervalle $[0, 2\pi]$;
- S'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\rho(\theta_0 - \theta) = \rho(\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à la droite définie par $\theta = \theta_0/2 \pmod{\pi}$, et on peut restreindre le domaine d'étude à $[\theta_0/2, +\infty[$ puis appliquer la symétrie ;
- S'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\rho(\theta_0 - \theta) = -\rho(\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à la droite définie par $\theta = (\theta_0 + \pi)/2 \pmod{\pi}$, et on peut restreindre le domaine d'étude à $[\theta_0/2, +\infty[$ puis appliquer la symétrie.

Il faut également tracer le tableau de variations de ρ , même si celui-ci n'est pas aussi parlant que pour les courbes en coordonnées cartésiennes, dans la mesure où on ne peut rien déduire directement des annulations de ρ' en ce qui concerne les pentes des tangentes. En revanche, il est nécessaire, pour tracer la courbe, de connaître le signe de ρ partout.

▷ *Branches infinies :*

- Au voisinage de $\theta_0 \in \mathbb{R}$: si $\rho(\theta) \rightarrow +\infty$ quand $\theta \rightarrow \theta_0^\pm$, alors la courbe admet une branche asymptotique de direction la droite D_{θ_0} d'angle polaire $\theta = \theta_0$. On vérifie alors que la distance du point $M(\theta)$ à D_{θ_0} est $|\rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)|$. Notons $d(\theta)$ cette quantité.
 - Si $d(\theta)$ tend vers une limite finie \bar{d} quand $\theta \rightarrow \theta_0^\pm$, alors la droite parallèle à D_{θ_0} et à une distance $\pm \bar{d}$ de celle-ci est asymptote à la courbe.
 - Si $d(\theta) \rightarrow +\infty$, alors la courbe admet une branche parabolique dans la direction D_{θ_0} .
- Au voisinage de ∞ : on distingue plusieurs cas :

- Si $\rho(\theta) \rightarrow \pm\infty$, alors la courbe présente une branche infinie en forme de spirale (qui s'écarte de plus en plus de l'origine).
- Si $\rho(\theta) \rightarrow a \neq 0$, alors la courbe est une spirale qui s'enroule autour du cercle de centre O et de rayon $|a|$, appelé cercle asymptote de la courbe \mathcal{C} .
- Si $\rho(\theta) \rightarrow 0$, alors la courbe se présente comme une spirale qui s'enroule autour du point O, qui est aussi appelé point asymptote.

▷ *Points stationnaires :*

Sur les formules $x = \rho(\theta) \cos \theta$, $y = \rho(\theta) \sin \theta$, on voit que si le point de paramètre θ est un point stationnaire, alors nécessairement

$$\begin{aligned}\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta &= 0, \\ \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta &= 0.\end{aligned}$$

En multipliant la première équation par $\sin \theta$, la seconde par $\cos \theta$ et en soustrayant, on en déduit que $\rho(\theta) = 0$, puis que $\rho'(\theta) = 0$.

▷ *Direction du vecteur tangent :*

Si le point de paramètre θ n'est pas un point stationnaire, alors un vecteur tangent à la courbe est

$$\vec{T}(\theta) = \begin{pmatrix} \rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta \\ \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Si $\rho(\theta) = 0$, on en déduit que le vecteur $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ est un vecteur tangent à la courbe. Si $\rho(\theta) \neq 0$, alors

$$\vec{T}(\theta) = \frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)} O\vec{M} + O\vec{M}^\perp,$$

où

$$O\vec{M}^\perp = \begin{pmatrix} -\rho(\theta) \sin \theta \\ \rho(\theta) \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Comme $O\vec{M}$ et $O\vec{M}^\perp$ sont orthogonaux, on voit sur la formule précédente que $\vec{T}(\theta)$ fait un angle α avec le vecteur $O\vec{M}$ tel que

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} \quad \text{si } \rho'(\theta) \neq 0, \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} \quad \text{sinon.}\end{aligned}$$

Exemple : tracé de la courbe d'équation polaire $r = \cos(2\theta)$

1. Réduction du domaine d'étude :

Soit $\rho : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \cos(2\theta)$. La fonction ρ est de classe \mathcal{C}^∞ , elle est 2π périodique, paire et elle vérifie

$$\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta).$$

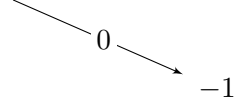
La courbe d'équation $r = \cos(2\theta)$ est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc se contenter de tracer la courbe sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, puis déduire le reste de la courbe par symétrie.

2. Variations de la fonction ρ :

On a

$$\rho'(\theta) = -2 \sin(2\theta),$$

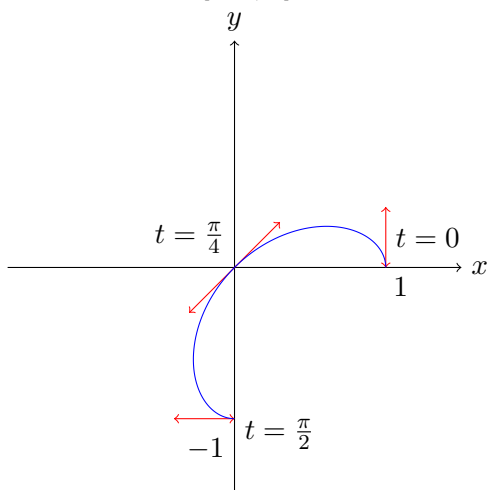
ce qui donne le tableau de variations suivant pour ρ :

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$\rho'(\theta)$	0	—	0
ρ	1		

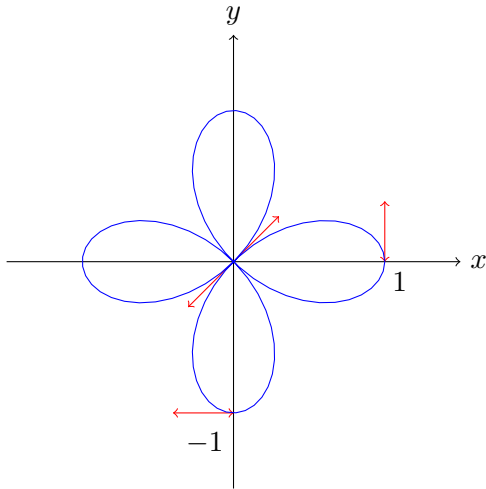
En particulier, sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, on a $\rho(\theta) > 0$ si $\theta \in [0, \pi/4[$, $\rho(\theta) < 0$ si $\theta \in]\pi/4, \pi/2]$.

3. Il n'y a pas de branches infinies.
4. On n'a jamais d'annulation simultanée de $\rho(\theta)$ et de $\rho'(\theta)$, donc il n'y a pas de point stationnaire.
5. Pente de la tangente :
 - En $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$, on a $\rho'(\theta) = 0$, donc la tangente fait un angle droit avec la droite $(OM(\theta))$. Ainsi la courbe admet une tangente verticale en $\theta = 0$ et une tangente horizontale en $\theta = \pi/2$.
 - En $\theta = \pi/4$, on a $\rho(\theta) = 0$, et donc le vecteur $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$ est un vecteur tangent à la courbe.
 - Pour $\theta \in]0, \pi/2[$ et $\theta \neq \pi/4$, on a $\rho'(\theta) \neq 0$, $\rho(\theta) \neq 0$, donc la tangente fait un angle $\alpha = -\arctan \frac{\cos(2\theta)}{2\sin(2\theta)}$ avec la droite $(OM(\theta))$.

Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, on en déduit que la courbe a l'allure suivante :



Par symétrie, on en déduit l'allure de la courbe sur l'ensemble de l'intervalle $[0, \pi]$:



1.5 Lien avec les équations différentielles

Supposons que le couple (f, g) de fonctions intervenant dans la courbe paramétrée

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in I, x = f(t), y = g(t)\}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$X'(t) = b(t, X(t)),$$

où $X(t) = (f(t), g(t))$, $b : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Les propositions vues au paragraphe précédent ont des conséquences immédiates :

Corollaire 1.5.1. *Soit $a \in I$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que :*

- $(x_0, y_0) = (f(a), g(a))$;
- $b(a, (x_0, y_0)) \neq 0$.

Alors $b(a, (x_0, y_0))$ est un vecteur tangent à la courbe en (x_0, y_0) .

En particulier, si b est indépendant du temps, c'est-à-dire s'il existe une fonction $\bar{b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$b(t, X) = \bar{b}(X) \quad \forall t \in I, \forall X \in \mathbb{R}^2,$$

alors en tout point $M \in \mathcal{C}$ tel que $\bar{b}(M) \neq 0$, $\bar{b}(M)$ est un vecteur tangent à la courbe.

1.5.1 Un peu de vocabulaire

Définition 1.5.2. *On dit qu'une équation différentielle est autonome lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme*

$$x^{(n)}(t) = f(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)),$$

avec $f : \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Autrement dit, la fonction f intervenant dans l'équation différentielle ne dépend pas explicitement du temps.

Exemple 1.5.3. *Donner ici des exemples dans lesquels on identifie la fonction f : cas autonomes et non autonomes.*

Définition 1.5.4. *Un champ de vecteurs de régularité \mathcal{C}^k est une application $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe \mathcal{C}^k , définie par ses m composantes*

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix}.$$

Si $m = 2$ (et éventuellement si $m = 3$), on peut représenter un champ de vecteurs en traçant, en un nombre fini mais élevé de points (x_1, x_2) (ou (x_1, x_2, x_3)), le vecteur de coordonnées $(F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$.

Par ailleurs, si $m = 2$, on peut aussi s'intéresser à l'équation différentielle autonome

$$X'(t) = F(X(t)).$$

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(X_0) \neq 0$. Soit X une solution de l'équation différentielle précédente telle que $X(t_0) = X_0$ pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$. Il découle du paragraphe précédent que le vecteur $F(X_0)$ est un vecteur tangent à la courbe paramétrée $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}, (x, y) = X(t)\}$. Ainsi la représentation du champ de vecteurs F évoquée ci-dessus donne une idée de l'allure des courbes représentant les solutions de l'équation différentielle : il s'agit en réalité de tracer les tangentes à la courbe.

Définition 1.5.5. *Les solutions de l'équation différentielle $X'(t) = F(X(t))$ sont appelées courbes intégrales du champ de vecteurs F .*

1.5.2 Mécanique du point, portrait de phase

La mécanique du point est l'étude du mouvement des points matériels (ou des solides pouvant être décrits comme des points matériels). Le point de départ est le principe fondamental de la dynamique : le produit de la masse par l'accélération (c'est-à-dire la dérivée seconde de la position) est égal à la somme totale des forces s'exerçant sur le solide :

$$F = mx''(t).$$

Supposons que le mouvement se fasse sur une droite (ou ne dépende que d'un paramètre : autrement dit, $x(t) \in \mathbb{R}$) et que la force F puisse s'écrire comme une fonction de la position et de la vitesse : $F = \varphi(x(t), x'(t))$. On peut alors réécrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ \frac{1}{m}\varphi(x(t), x'(t)) \end{pmatrix} = b(x(t), x'(t)), \quad (1.7)$$

où

$$b(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m}\varphi(x, v) \end{pmatrix}.$$

On obtient donc un système différentiel du premier ordre dans \mathbb{R}^2 . Comme cela a été expliqué au paragraphe précédent, on peut tracer les courbes représentatives des solutions dans le plan cartésien comme des courbes paramétrées, en mettant $x(t)$ en abscisse et $v = x'(t)$ en ordonnée. Une telle représentation graphique s'appelle un **portrait de phase**. À chaque paire de conditions initiales (x_0, v_0) correspond en général une courbe paramétrée (sous réserve qu'on ait existence et unicité des solutions de l'équation différentielle (1.7) pour chaque donnée initiale).

Exemple 1.5.6 (L'oscillateur harmonique). *Soit $\omega_0 > 0$. On considère l'équation différentielle*

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (1.8)$$

muni des conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

On sait alors que la forme générale des solutions de (1.8) est

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

où A et B sont déterminés par les conditions initiales. Plus précisément, on a

$$x(0) = x_0 = A,$$

et comme

$$x'(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t),$$

on en déduit que

$$x'(0) = v_0 = \omega_0 B.$$

Pour tracer le portrait de phase associé à l'équation (1.8), il faut donc, pour chaque couple $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, étudier la courbe paramétrée \mathcal{C}_{x_0, v_0} d'équation cartésienne

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$y = v_0 \cos(\omega_0 t) - \omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t),$$

Si $\omega_0 = 1$, on reconnaît facilement l'équation d'un cercle de centre zéro et de rayon $\sqrt{x_0^2 + v_0^2}$. Plus généralement, si ω_0 est quelconque, on vérifie facilement que

$$(x, y) \in \mathcal{C}_{x_0, v_0} \iff x^2 + \frac{y^2}{\omega_0^2} = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}.$$

La courbe \mathcal{C}_{x_0, v_0} est donc une ellipse. On peut trouver son grand axe et son petit axe en mettant l'équation sous la forme canonique

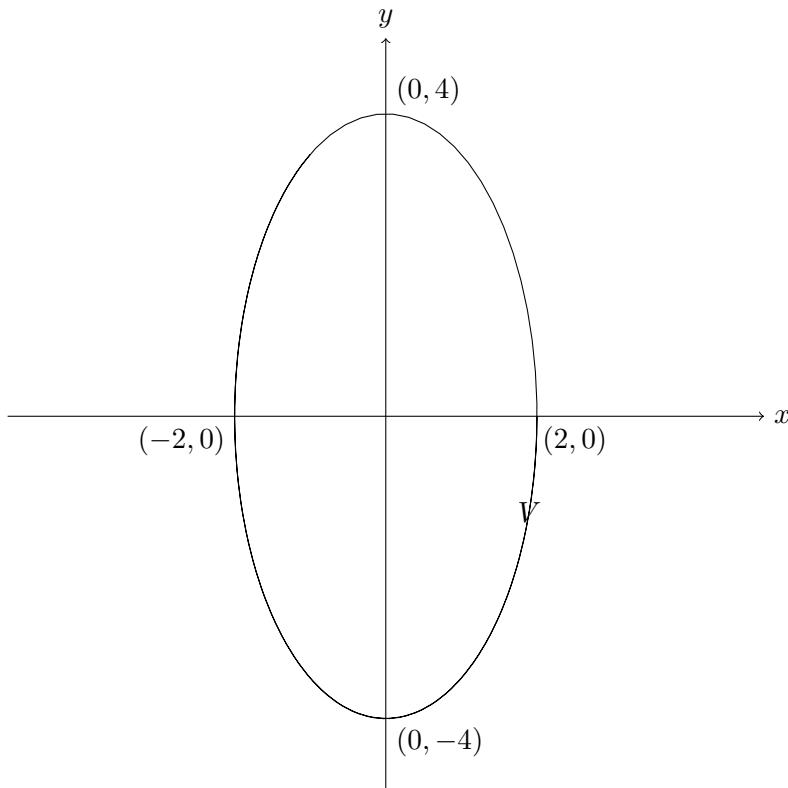
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad b = \omega_0 a = \sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}.$$

En particulier, si $\omega_0 > 1$, on a $b > a$, et par conséquent le grand axe de l'ellipse est suivant (Oy) . Si $\omega_0 < 1$, alors $b < a$, et le grand axe de l'ellipse est suivant (Ox) .

Dessin dans le cas $\omega_0 = 2, x_0 = 2, v_0 = 0$:



Chapitre 2

Systèmes d'équations différentielles linéaires

Un **système d'équations différentielles linéaire** est une équation du type

$$X^{(n)}(t) = A_0(t)X(t) + A_1(t)X'(t) + \cdots + A_{n-1}(t)X^{(n-1)}(t),$$

où $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est l'inconnue, et $A_0, \dots, A_{n-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ sont données.

Le cas où $m = n = 1$ a déjà été étudié en L1, et on commence ce chapitre par un rappel des principaux résultats dans ce cadre. On se concentre ensuite sur les cas $n = 2$ et $m = 1$ et $n = 1$ et $m = 2$, en gardant en tête que les cas n, m quelconques se traitent de façon analogue. On expliquera en particulier comment calculer des solutions exactes dans le cas où A_0, \dots, A_{n-1} ne dépendent pas de t , et on présentera dans ce cas simple des exemples de calculs de solutions approchées.

2.1 Rappels sur les équations différentielles linéaires d'ordre un

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère l'**équation non-homogène**

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \quad (2.1)$$

ainsi que sa version **homogène**

$$x'(t) = a(t)x(t). \quad (2.2)$$

Le terme "homogène" reflète ici le fait que la fonction nulle soit solution : on parle également d'**équation sans second membre**. En effet on écrit souvent (2.1) sous la forme

$$x'(t) - a(t)x(t) = b(t).$$

Théorème 2.1.1. *Soit $t_0 \in I$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.*

L'équation homogène (2.2) munie de la condition initiale $x(t_0) = x_0$ admet une unique solution, donnée par

$$x(t) = x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right).$$

En particulier toute solution de (2.2) est de la forme

$$x(t) = C \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right), C \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. — Existence : Posons

$$\tilde{x}(t) = x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right).$$

On vérifie immédiatement que $\tilde{x}(t_0) = x_0 \exp(0) = x_0$.

Montrons maintenant que \tilde{x} est bien solution de l'équation (2.2). On a

$$\tilde{x}'(t) = x_0 a(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right) = a(t) \tilde{x}(t).$$

Donc \tilde{x} est solution de (2.2).

— Unicité : soit x une solution quelconque de (2.2). On remarque que x est nécessairement de classe \mathcal{C}^1 . On pose

$$C(t) = x(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t a(t') dt' \right)$$

Alors la fonction C est de classe \mathcal{C}^1 et

$$C'(t) = x'(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t a(t') dt' \right) - x(t) a(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t a(t') dt' \right) = 0.$$

Donc la fonction C est constante sur l'intervalle I et vaut $C(t_0) = x(t_0) = x_0$. Donc

$$x(t) = C(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right) = x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right).$$

□

Exemple 2.1.2. — On prend $I = \mathbb{R}$, $a(t) = r \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors les solutions de l'équation (2.2) sont données par

$$x(t) = x_0 \exp(r(t - t_0)).$$

— On prend $I = \mathbb{R}_+^*$, $a(t) = k/t$ pour $k \in \mathbb{R}^*$. Alors les solutions de l'équation (2.2) sont données par

$$x(t) = x_0 \exp \left(k \ln \frac{t}{t_0} \right) = x_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^k.$$

— On déduit en particulier du Théorème 2.1.1 que si $x_0 = 0$, alors la solution de (2.2) est identiquement nulle.

On en déduit immédiatement le Corollaire suivant :

Corollaire 2.1.3. Soit $t_0 \in I$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'équation (2.1) munie de la condition initiale $x(t_0) = x_0$ admet au plus une solution.

Démonstration. Soit x et y deux solutions de (2.1) telles que $x(t_0) = y(t_0) = x_0$. Alors on vérifie immédiatement que $z := x - y$ est solution de (2.2) avec $z(t_0) = 0$. Par conséquent $z = 0$. □

On cherche à présent à montrer l'existence des solutions de l'équation non-homogène (2.1), ainsi qu'une méthode pour calculer les solutions.

Résolution de l'équation (2.1) par la méthode de variation de la constante

Pour la solution de l'équation non-homogène (2.1), il n'y a pas de formule générale à retenir, mais plutôt une méthode. L'idée est d'utiliser le calcul fait dans le cas homogène pour changer de fonction inconnue et enlever ainsi le terme d'ordre zéro (c'est-à-dire $a(t)x(t)$) dans l'équation. Plus précisément, supposons que x est une solution de (2.1) et posons

$$C(t) = x(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t a(t') dt' \right),$$

ce qui revient à dire

$$x(t) = C(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right).$$

On a alors

$$x'(t) = (C'(t) + a(t)C(t)) \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right),$$

et comme

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) = a(t)C(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right) + b(t),$$

on en déduit que

$$C'(t) = b(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t a(t') dt' \right).$$

Comme précédemment, on suppose que $C(t_0) = x(t_0) = x_0$. On a alors

$$C(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s) \exp \left(- \int_{t_0}^s a(t') dt' \right) ds.$$

Réciproquement, posons

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(s) \exp \left(- \int_{t_0}^s a(t') dt' \right) ds \right) \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right) \\ &= x_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right) + \int_{t_0}^t b(s) \exp \left(- \int_s^t a(t') dt' \right) ds. \end{aligned}$$

En reprenant le calcul ci-dessus, on vérifie facilement que x est solution de (2.1). On vient donc de montrer l'existence des solutions de (2.1), et de proposer une méthode pour calculer ces solutions. Cette méthode marche aussi en prenant une autre primitive et donnée initiale dans la définition de $C(t)$,

$$C(t) = x(t) \exp \left(- \int_{t_1}^t a(t') dt' \right), C(t_1) = C,$$

le choix de t_1 pouvant simplifier les calculs intermédiaires de la fonction $C(t)$; ensuite ce n'est qu'à la fin que l'on choisit C de façon à ce que la condition initiale en $t_0 > 0$ pour $x(t)$ soit vérifiée. Enfin, on remarque que le premier terme dans l'expression de $x(t)$ est solution de l'équation homogène (2.2) et le deuxième terme est solution de l'équation non-homogène (2.1).

Exemple 2.1.4. On prend $I = \mathbb{R}_+^*$, et on considère l'équation

$$x'(t) - \frac{x(t)}{t} = t^2.$$

D'après la méthode de variation de la constante, on pose

$$x(t) = C(t) \exp \left(\int_1^t \frac{1}{t'} dt' \right) = tx(t),$$

et donc C est solution de

$$C'(t) = \frac{t^2}{t} = t,$$

d'où $C(t) = \frac{t^2}{2} + C$. On obtient finalement

$$x(t) = \frac{t^3}{2} + Ct.$$

Il faut ensuite choisir la constante C de façon à ce que la condition initiale en $t_0 > 0$ soit vérifiée.

Résolution de l'équation (2.1) à l'aide d'une solution particulière

Dans les cas où le calcul explicite précédent n'est pas concluant, on dispose d'une autre méthode pour calculer les solutions de l'équation (2.1), qui est résumée dans le théorème suivant :

Théorème 2.1.5. Soit $t_0 \in I$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$.

Soit $\bar{x} : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que \bar{x} est une solution de l'équation (2.1) et $\bar{x}(t_0) = x_1$.

Alors l'unique solution de (2.1) telle que $x(t_0) = x_0$ est donnée par

$$x(t) = \bar{x}(t) + (x_0 - x_1) \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right).$$

En particulier toute solution de (2.1) est de la forme

$$x(t) = \bar{x}(t) + C \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right), C \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. L'unicité est assurée grâce au Corollaire 2.1.3. Il s'agit donc de montrer que la fonction $\tilde{x} : t \mapsto \bar{x}(t) + (x_0 - x_1) \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right)$ est bien solution de l'équation. On a

$$\tilde{x}(t_0) = \bar{x}(t_0) + (x_0 - x_1) = x_1 + x_0 - x_1 = x_0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) &= \bar{x}'(t) + (x_0 - x_1) a(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right) \\ &= a(t) \bar{x}(t) + b(t) + (x_0 - x_1) a(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(t') dt' \right) \\ &= a(t) \tilde{x}(t) + b(t). \end{aligned}$$

Donc \tilde{x} est solution de (2.1) et $\tilde{x}(t_0) = x_0$. □

Exemple 2.1.6. On prend $I = \mathbb{R}$, et on considère l'équation

$$x'(t) + tx(t) = t^2 + 1.$$

On vérifie qu'une solution particulière de cette équation est $\bar{x}(t) = t$. La solution générale de l'équation est donc donnée par

$$x(t) = t + C \exp(-t^2/2),$$

où la constante C est choisie de telle sorte que la condition initiale soit vérifiée.

2.1.1 Première introduction aux schémas d'Euler

On vient de voir une formule donnant explicitement les solutions des équations linéaires d'ordre un. Néanmoins, comme on l'a souligné dans le premier chapitre, de telles formules n'existent pas toujours. On peut donc adopter un point de vue légèrement différent : comment faire pour calculer, avec une précision arbitrairement grande, des valeurs approchées des valeurs prises par les solutions d'équations différentielles ?

Notion de solution approchée

Dans toute la suite, on utilisera la notion suivante (valable pour des fonctions à valeurs vectorielles, et pas seulement scalaires) :

Définition 2.1.7. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $X : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ la solution d'une équation différentielle.

Une suite de **solutions approchées** est une suite de fonctions $(X^{[p]})_{p \in \mathbb{N}}$, avec $X^{(p)} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ pour tout p , et telle qu'on a la convergence uniforme

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} \|X^{[p]}(t) - X(t)\| = 0.$$

La démarche générale des schémas numériques qui seront vus dans ce cours est la suivante. On suppose que l'intervalle I est de la forme $I = [t_0, t_1]$. On commence par **discrétiser** l'intervalle : on découpe l'intervalle I en p sous-intervalles, et on ne va finalement s'intéresser qu'aux valeurs prises par la fonction X aux bornes de ces sous-intervalles.

Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, on pose

$$h_p = \frac{t_1 - t_0}{p}, \quad t_{k,p} = T_0 + kh_p \text{ pour } 0 \leq k \leq p. \quad (2.3)$$

On remarque que l'on a $t_{0,p} = t_0$, $t_{p,p} = t_1$. Les points $t_{k,p}$ sont appelés **points de discrétisation**.

L'idée est de définir chaque fonction $X^{(p)}$ en prescrivant les valeurs prises en $t_{k,p}$ pour $k \in \{0, \dots, p\}$ et en ne travaillant qu'avec des fonctions affines par morceaux. Il suffit donc de connaître $X^{[p]}(t_{0,p})$, $X^{[p]}(t_{1,p})$, \dots , $X^{[p]}(t_{p,p})$ pour connaître la fonction $X^{(p)}$ sur l'ensemble de l'intervalle $[t_0, t_1]$. Par ailleurs, les valeurs de $X^{[p]}(t_{0,p})$, $X^{[p]}(t_{1,p})$, \dots , $X^{[p]}(t_{p,p})$ sont calculées par récurrence :

— on prend en général

$$X^{[p]}(t_0) = X^{[p]p}(t_{0,p}) = X(t_0),$$

la quantité $X(t_0)$ étant par ailleurs donnée par la **condition initiale** prescrite avec l'équation différentielle étudiée ;

— $X^{[p]}(t_{k+1,p})$ est calculé en fonction de $X^{[p]}(t_{k,p})$. La formule reliant $X^{[p]}(t_{k+1,p})$ et $X^{[p]}(t_{k,p})$ détermine l'**algorithme** utilisé.

Récapitulons :

1. $X^{[p]}(t_0)$ est donné par la condition initiale de l'équation différentielle ;
2. $X^{[p]}(t_{k+1,p})$ et $X^{[p]}(t_{k,p})$ sont reliés par une formule de récurrence ;
3. pour $t \in]t_{k,p}, t_{k+1,p}[$, on prend

$$X^{[p]}(t) = \frac{t - t_{k,p}}{h_p} (X^{[p]}(t_{k+1,p}) - X^{[p]}(t_{k,p})) + X^{[p]}(t_{k,p})$$

Il y a plusieurs choses à vérifier :

- La première étape est de vérifier que $X^{[p]}$ est bien définie pour tout p . Compte tenu de la définition de $X^{(p)}$ ci-dessus, cela revient à montrer que la formule de récurrence reliant $X^{[p]}(t_{k+1,p})$ et $X^{[p]}(t_{k,p})$ permet bien de déterminer $X^{[p]}(t_{k+1,p})$ de façon unique.
- Ensuite il faut vérifier que la suite $(X^{[p]})_{p \geq 1}$ forme bien une suite de solutions approchées de X . Pour cela on peut commencer par montrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup_k \|X(t_{k,p}) - X^{[p]}(t_{k,p})\| = 0,$$

puis montrer par exemple que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup_k \sup_{t \in [t_{k,p}, t_{k+1,p}]} \left(\|X(t_{k,p}) - X(t)\| + \|X^{[p]}(t_{k,p}) - X^{[p]}(t)\| \right) = 0.$$

La première des deux conditions ci-dessus permet d'estimer la convergence de $X^{[p]}$ vers X aux points de discrétisation $t_{k,p}$. La seconde condition examine ce qui se passe entre $t_{k,p}$ et $t_{k+1,p}$, pour la fonction X et pour la fonction $X^{[p]}$. L'idée est que comme l'intervalle $[t_{k,p}, t_{k+1,p}]$ a une longueur h_p , avec $\lim_{p \rightarrow \infty} h_p \rightarrow 0$, si les fonctions X et $X^{[p]}$ sont régulières (par exemple si leur dérivée sur l'intervalle $]t_{k,p}, t_{k+1,p}[$ est uniformément bornée), la seconde condition sera réalisée.

Dans la pratique, dans l'étude des équations différentielles et pour les schémas qui y sont associés, la dernière condition est vérifiée de façon quasi-automatique. Par exemple, pour une équation du type

$$X'(t) = b(t, X(t)),$$

il suffit que la fonction b soit bornée.

Le schéma numérique en tant que tel ne s'intéresse donc qu'aux nombres $X^{[p]}(t_{k,p})$, pour $0 \leq k \leq p$. Pour alléger un peu les notations, on notera ces nombres X_k , $0 \leq k \leq p$, en omettant donc la dépendance par rapport à p . Il est cependant nécessaire que le lecteur la garde à l'esprit.

Remarque 2.1.8. La suite $(X_k)_{0 \leq k \leq p}$ est une **approximation** de la suite $(X(t_{k,p}))_{0 \leq k \leq p}$. Elle correspond aux valeurs prises par la suite de solutions approchées $X^{[p]}$ aux points de discrétisation $t_{k,p}$. Attention donc à **ne pas confondre** X_k et $X(t_{k,p})$!

Définition 2.1.9. Un schéma numérique est la donnée d'une **relation de récurrence** permettant de définir la suite $(X_k)_{0 \leq k \leq p}$.

Schémas d'Euler pour les équations linéaires d'ordre un

On considère maintenant l'équation (2.1) munie de la donnée initiale $x(t_0) = x_{ini}$, pour laquelle on cherche à définir un (ou des) schéma(s) numérique(s). Pour cela, on écrit l'équation en $t = t_k$, pour $0 \leq k \leq p$:

$$x'(t_k) = a(t_k)x(t_k) + b(t_k).$$

Il y a deux idées principales pour construire les schémas numériques qui seront vus dans le cadre de ce cours :

- On remplace $x'(t_{k,p})$ par un taux d'accroissement de la fonction x entre deux instants voisins de $t_{k,p}$. Par exemple, on peut écrire

$$x'(t_{k,p}) \simeq \frac{x(t_{k+1,p}) - x(t_{k,p})}{h_p} \quad (2.4)$$

ou encore

$$x'(t_{k,p}) \simeq \frac{x(t_{k,p}) - x(t_{k-1,p})}{h_p}. \quad (2.5)$$

— On remplace chaque occurrence de $x(t_{k,p})$ par x_k .

Les deux choix (2.4) et (2.5) donnent lieu à deux équations de récurrence différentes sur la suite $(x_k)_{0 \leq k \leq p}$:

1. **Choix (2.4) : schéma d'Euler explicite :**

On obtient l'équation de récurrence

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h_p} = a(t_{k,p})x_k + b(t_{k,p}),$$

ce qui donne, pour $0 \leq k \leq p-1$,

$$x_{k+1} = (1 + h_p a(t_{k,p}))x_k + h_p b(t_{k,p}). \quad (2.6)$$

L'initialisation de la récurrence est faite en prenant

$$x_0 = x_{ini}.$$

2. **Choix (2.5) : schéma d'Euler implicite :**

On obtient l'équation de récurrence

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{h_p} = a(t_{k,p})x_k + b(t_{k,p}),$$

ce qui s'écrit encore

$$(1 - h_p a(t_{k,p}))x_k = x_{k-1} + h_p b(t_{k,p}).$$

Cette équation est dite *implicite* car la formule ne donne pas directement x_k en fonction de x_{k-1} : il faut d'abord diviser par $(1 - h_p a(t_{k,p}))$. Mais ici, si a est une fonction continue, elle reste bornée sur l'intervalle $[t_0, t_1]$: on pose

$$M = \sup_{t \in [t_0, t_1]} |a(t)|.$$

Alors si p est suffisamment grand, $Mh_p \leq 1/2$ et

$$1 - h_p a(t_{k,p}) \geq \frac{1}{2} > 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, p\}.$$

Par conséquent, en écrivant l'équation de récurrence au rang $k+1$, on obtient,

$$x_{k+1} = (1 - h_p a(t_{k+1,p}))^{-1} x_k + h_p (1 - h_p a(t_{k+1,p}))^{-1} b(t_{k+1,p}). \quad (2.7)$$

Examinons à présent le cas homogène à coefficients constants, c'est-à-dire $b = 0$ et $a(t) = a_0$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$, afin de comparer les schémas numériques avec la solution réelle. Les formules des paragraphes précédents donnent dans ce cas

$$x(t) = x_{ini} \exp(a_0(t - t_0)).$$

L'équation de récurrence du schéma d'Euler explicite (2.6) devient quant à elle

$$x_{k+1} = (1 + h_p a_0)x_k.$$

la suite $(x_k)_{0 \leq k \leq p}$ est donc une suite géométrique de raison $1 + h_p a_0$. On a donc

$$x_k = (1 + h_p a_0)^k x_{ini} \quad \forall k \in \{0, \dots, p\}.$$

Vérifions maintenant que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq k \leq p} |x(t_{k,p}) - x_k| = 0. \quad (2.8)$$

Compte tenu des formules ci-dessus, on a, pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$,

$$\begin{aligned} x(t_{k,p}) - x_k &= \left(\exp(a_0(t_{k,p} - t_0)) - (1 + h_p a_0)^k \right) x_{ini} \\ &= \left(\exp(a_0 k h_p) - \exp(k \ln(1 + h_p a_0)) \right) x_{ini}. \end{aligned}$$

Or

$$h_p a_0 - \frac{h_p^2 a_0^2}{2} \leq \ln(1 + h_p a_0) \leq h_p a_0$$

Par conséquent,

$$a_0 k h_p - a_0^2 \frac{h_p^2 k}{2} \leq k \ln(1 + h_p a_0) \leq a_0 k h_p$$

et on en déduit que

$$|x(t_{k,p}) - x_k| \leq |x_{ini}| |\exp(a_0 k h_p)| \left| 1 - \exp\left(-a_0^2 \frac{h_p^2 k}{2}\right) \right|.$$

On obtient donc une majoration uniforme en k :

$$\sup_{0 \leq k \leq p} |x(t_{k,p}) - x_k| \leq |x_{ini}| e^{|a_0|(t_1 - t_0)} \left| 1 - \exp\left(-a_0^2 \frac{h_p(t_1 - t_0)}{2}\right) \right|.$$

Le membre de droite tend vers zéro quand $p \rightarrow \infty$ car $h_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$. On a donc bien (2.8). La convergence pour le schéma d'Euler implicite se démontre de façon analogue.

2.2 Équation différentielle linéaire d'ordre 2

On considère dans ce paragraphe des équations de la forme

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = h(t), \quad (2.9)$$

où $a, b, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Le résultat suivant découle d'un théorème qui sera vu au Chapitre 3 :

Théorème 2.2.1. *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, et soit $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution de (2.11) telle que*

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1. \quad (2.10)$$

Cette solution est définie sur \mathbb{R} .

Dans la quasi-totalité de ce chapitre, on se concentre sur le cas où les fonctions a et b de (2.9) sont constantes.

Cas d'une équation à coefficients constants

On considère tout d'abord des équations de la forme

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, \quad (2.11)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. L'enjeu est donc ici de trouver une expression explicite pour la solution de (2.11) munie de la condition (2.10) : en effet, si on arrive à trouver une solution particulière de (2.11) vérifiant les bonnes conditions initiales en $t = t_0$, le théorème ci-dessus assure que cette solution particulière est en réalité l'unique solution.

L'idée est de chercher des solutions comme des combinaisons linéaires de $\exp(\lambda t)$.

Théorème 2.2.2. *Soit $a, b, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. On note x la solution de l'équation (2.11) munie des conditions initiales (2.10).*

Soit $\Delta := a^2 - 4b$. On considère l'équation suivante, appelée équation caractéristique de (2.11) :

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (2.12)$$

— *Premier cas : $\Delta \neq 0$: on note λ_1, λ_2 les deux racines distinctes de l'équation (2.12). Si les racines sont réelles alors il existe $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tels que*

$$x(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t).$$

Si les racines sont complexes, alors il existe $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$x(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t),$$

et si on note $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, alors il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$x(t) = e^{t\alpha}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

— *Deuxième cas : $\Delta = 0$: soit λ_0 l'unique racine réelle de (2.12) (il s'agit d'une racine double). Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que*

$$x(t) = (At + B) \exp(\lambda_0 t).$$

Démonstration. Première étape : les fonctions de la forme $A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t)$ (si $\Delta \neq 0$) ou $(At + B) \exp(\lambda_0 t)$ (si $\Delta = 0$) sont solutions de (2.11).

On pose

$$h(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \text{ si } \Delta \neq 0,$$

et

$$h(t) = (At + B) \exp(\lambda_0 t) \text{ si } \Delta = 0.$$

La fonction h ainsi définie est de classe \mathcal{C}^∞ . Dans le premier cas ($\Delta \neq 0$), on vérifie que

$$\begin{aligned} & h''(t) + ah'(t) + bh(t) \\ &= \left(A_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} \right) + a \left(A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \right) + b \left(A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \right) \\ &= A_1 e^{\lambda_1 t} (\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) + A_2 e^{\lambda_2 t} (\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque λ_1, λ_2 sont solutions de l'équation caractéristique.

Dans le second cas ($\Delta = 0$),

$$\begin{aligned} h'(t) &= (\lambda_0 At + \lambda_0 B + A) \exp(\lambda_0 t), \\ h''(t) &= (\lambda_0^2 At + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A) \exp(\lambda_0 t), \end{aligned}$$

et donc en utilisant le fait que $\lambda_0 = -a/2$,

$$\begin{aligned} & h''(t) + ah'(t) + bh(t) \\ &= \exp(\lambda_0 t) [\lambda_0^2 At + \lambda_0^2 B + 2\lambda_0 A + a(\lambda_0 At + \lambda_0 B + A) + b(At + B)] \\ &= \exp(\lambda_0 t) [At(\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b) + B(\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b) + A(2\lambda_0 + a)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Deuxième étape : on peut choisir les coefficients A_1, A_2 (cas $\Delta \neq 0$) ou A, B (cas $\Delta = 0$) pour que les conditions en $t = 0$ soient vérifiées.

Il s'agit de montrer que les systèmes linéaires

$$\begin{aligned} A_1 \exp(\lambda_1 t_0) + A_2 \exp(\lambda_2 t_0) &= x_0, \\ A_1 \lambda_1 \exp(\lambda_1 t_0) + A_2 \lambda_2 \exp(\lambda_2 t_0) &= x_1 \end{aligned} \tag{2.13}$$

dans le cas $\Delta \neq 0$, ou

$$\begin{aligned} (At_0 + B) \exp(\lambda_0 t_0) &= x_0, \\ (\lambda_0 At_0 + \lambda_0 B + A) \exp(\lambda_0 t_0) &= x_1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

dans le cas $\Delta = 0$ admettent une unique solution dans \mathbb{C}^2 .

Le déterminant du système (2.13) est $(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t_0}$, qui est donc non nul puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Celui du système (2.14) (qui a pour inconnues A et B) est $-e^{2\lambda_0 t_0}$, qui est également non nul. Chacun des deux systèmes ci-dessus admet une unique solution dans \mathbb{C}^2 .

À ce stade, on a montré que l'on peut choisir des coefficients A_1, A_2, A, B de telle sorte que h soit une solution de (2.11) munie de la condition initiale (2.10). Il reste à montrer que la fonction h est à valeurs réelles.

Troisième étape : les coefficients A_1, A_2, A, B définis ci-dessus sont tels que la solution trouvée est à valeurs réelles.

Tout d'abord, si $\Delta > 0$ (resp. si $\Delta = 0$), les racines λ_1, λ_2 sont réelles (resp. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$), donc la solution de (2.13) (resp. de (2.14)) est dans \mathbb{R}^2 . Dans ces cas il est donc clair que $h(t) \in \mathbb{R}$ pour tout t .

Il reste à examiner le cas $\Delta < 0$. Dans ce cas les deux racines λ_1, λ_2 appartiennent à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et sont des nombres complexes conjugués. En prenant le conjugué du système (2.13) et en utilisant le fait que

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_2, \overline{e^{\lambda_1 t_0}} = e^{\lambda_2 t_0},$$

on en déduit que (\bar{A}_2, \bar{A}_1) est solution du même système que (A_1, A_2) . Par unicité des solutions du système (2.13), on obtient $A_2 = \bar{A}_1$, et donc

$$h(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) = 2\Re(A_1 \exp(\lambda_1 t)).$$

En particulier on peut réécrire $h(t)$ en utilisant la notation $\lambda_1 = \alpha + i\beta$:

$$h(t) = e^{t\alpha}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)),$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Quatrième étape : conclusion.

Ainsi $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution réelle de (2.11) qui vérifie (2.10). D'après le théorème 2.2.1, $x = h$. \square

Passage à un système d'équations d'ordre un

On considère à présent une solution $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (2.9). On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

On vérifie alors que

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Posons

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice A et le vecteur F sont des données du problème. La fonction $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est solution de

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t). \quad (2.15)$$

On s'est donc ramené d'une équation différentielle scalaire (c'est-à-dire dont l'inconnue est à valeurs réelles) d'ordre 2 à un système de deux équations différentielles d'ordre un.

Réciproquement, soit X une solution de (2.15). On note (x_1, x_2) les coordonnées de X . On a alors

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

En particulier, $x_1'(t) = x_2(t)$ et

$$x_2'(t) = -b(t)x_1(t) - a(t)x_2(t) + h(t).$$

Donc x_1 est solution de (2.9). On a donc démontré le résultat suivant :

Proposition 2.2.3. *Soit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Soit $X : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Alors*

$$x \text{ est solution de (2.9)} \Leftrightarrow X \text{ est solution de (2.15)}.$$

Remarque 2.2.4. *De façon générale, et avec la même méthode, on peut montrer qu'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n se ramène à un système linéaire de n équations différentielles d'ordre un, et qu'un système linéaire de m équations d'ordre n se ramène à un système linéaire de $m \times n$ équations différentielles d'ordre un.*

Cette méthode permet, dans le cas linéaire, de restreindre l'étude au cas des systèmes d'ordre un. Aussi, dans la suite de cette partie, on étudiera uniquement des systèmes de deux équations linéaires d'ordre un (cas $m = 2, n = 1$).

2.3 Systèmes d'ordre un à coefficients constants : exponentielle de matrice

Les paragraphes qui viennent sont dédiés à l'étude de systèmes d'équations différentielles du type

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

avec $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

On parle de système à coefficients constants pour souligner le fait que la matrice A ne dépend pas de t . Si $B = 0$, le système est dit homogène, et son étude fait l'objet du paragraphe suivant. Si $B \neq 0$, le système est non-homogène, et son étude fera l'objet du paragraphe 2.3.2.

2.3.1 Le cas homogène : définition de l'exponentielle d'une matrice et conséquences

Dans la suite de ce paragraphe, on se concentre donc sur le cas $B = 0$.

On rappelle que si $a \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation

$$y'(t) = ay(t)$$

sont de la forme $y(t) = y_0 \exp(at)$. L'idée est ici de généraliser la définition de l'exponentielle aux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour cela, on s'appuie sur le développement en série entière de l'exponentielle : on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et que

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Théorème 2.3.1 (Exponentielle de matrice). *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit*

$$M_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

(a) *On pose $C_0 = 2 \max(|\alpha_1|, |\beta_1|, |\gamma_1|, |\delta_1|)$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\max(|\alpha_k|, |\beta_k|, |\gamma_k|, |\delta_k|) \leq C_0^k. \quad (2.16)$$

(b) *Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. On note $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ leurs limites respectives. On définit l'exponentielle de la matrice A , et on note $\exp(A)$ ou e^A , la matrice définie par*

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.3.2. *Ce théorème, ainsi que l'ensemble des résultats qui suivent concernant l'exponentielle de matrice, peuvent se généraliser pour des matrices de dimension quelconque (et donc à des équations différentielles à coefficients constants d'ordre arbitrairement grand).*

Démonstration. Montrons tout d'abord l'inégalité (2.16) par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

— Initialisation : si $k = 0$ l'inégalité est clairement vérifiée par définition de C_0 .

— Récurrence : soit $k \geq 1$ quelconque. Supposons l'inégalité vérifiée au rang $k-1$.
On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix} = A^k &= AA^{k-1} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k-1} & \beta_{k-1} \\ \gamma_{k-1} & \delta_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_{k-1} + \beta_1\gamma_{k-1} & \alpha_1\beta_{k-1} + \beta_1\delta_{k-1} \\ \gamma_1\alpha_{k-1} + \delta_1\gamma_{k-1} & \gamma_1\beta_{k-1} + \delta_1\delta_{k-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc par exemple

$$|\alpha_k| \leq |\alpha_1| |\alpha_{k-1}| + |\beta_1| |\gamma_{k-1}|.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$|\alpha_k| \leq |\alpha_1| C_0^{k-1} + |\beta_1| C_0^{k-1} \leq 2 \max(|\alpha_1|, |\beta_1|) C_0^{k-1} \leq C_0^k.$$

L'inégalité est donc vérifiée au rang k .

Par récurrence, l'inégalité (2.16) est vérifiée pour tout $k \geq 0$.

Montrons à présent que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy : par définition, on a

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!}.$$

Par conséquent, si $n \geq p \geq 0$,

$$|a_n - a_p| \leq \sum_{k=p+1}^n \frac{|\alpha_k|}{k!},$$

et d'après l'inégalité (2.16),

$$|a_n - a_p| \leq \sum_{k=p+1}^n \frac{C_0^k}{k!}, \quad \forall n \geq p \geq 0.$$

La série $\sum \frac{C_0^k}{k!}$ est une série à termes positifs, convergente (sa somme est e^{C_0}). On en déduit que la suite $(\sum_{k=0}^n C_0^k/k!)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, et par conséquent la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

On montre de même que les suites $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy.

Comme \mathbb{R} est complet, les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, ce qui conclut la preuve du théorème. □

Notation. Dans toute la suite, on adoptera souvent la notation abrégée suivante : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i,j \leq 2}$, et si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{i,j}^{(n)} = a_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq 2$. Ainsi

$$\exp A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}.$$

Il est clair que si $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$, alors

$$AB = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n, \quad A + B = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n).$$

Proposition 2.3.3 (Propriétés de l'exponentielle de matrice). *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On note $0_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice nulle, I_2 la matrice identité.*

- (a) $\exp(0_2) = I_2$;
- (b) $Ae^A = e^A A$;
- (c) $\exp(\lambda A) \exp(\mu A) = \exp((\lambda + \mu)A) = \exp(\mu A) \exp(\lambda A)$;
- (d) $\exp(A) \exp(-A) = I_2$;
- (e) $\exp({}^t A) = {}^t(\exp(A))$

Démonstration. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{0_2^k}{k!} = I_2.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient la première propriété.

(b) Notons que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A \cdot A^k = A^k \cdot A = A^{k+1}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{A^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} A.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on en déduit que

$$A \exp(A) = \exp(A) A.$$

(c) On a

$$\begin{aligned} \exp(\lambda A) \exp(\mu A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=0}^n \frac{(\lambda A)^l}{l!} \right) \left(\sum_{m=0}^n \frac{(\mu A)^m}{m!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq l, m \leq n} \frac{\lambda^l \mu^m A^{l+m}}{l! m!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n A^k \sum_{\substack{0 \leq l, m \\ l+m=k}} \frac{\lambda^l \mu^m}{l! m!} + \sum_{k=n+1}^{2n} A^k \sum_{\substack{0 \leq l, m \leq n \\ l+m=k}} \frac{\lambda^l \mu^m}{l! m!} \right]. \end{aligned}$$

On a donc décomposé la sommation entre exposants de A "petits" et "grands". La première partie est égale à la n -ième somme partielle de l'exponentielle de A , car pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme de Newton, on retrouve

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq l, m \\ l+m=k}} \frac{\lambda^l \mu^m}{l! m!} &= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{0 \leq l, m \\ l+m=k}} \frac{k!}{l! m!} \lambda^l \mu^m \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l! (k-l)!} \lambda^l \mu^{k-l} \\ &= \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}. \end{aligned}$$

On considère maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de reste R_n définie par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{2n} A^k \sum_{\substack{0 \leq l, m \leq n \\ l+m=k}} \frac{\lambda^l \mu^m}{l! m!}.$$

D'après le Théorème 2.3.1, chacun des coefficients de la matrice R_n est majoré en module par

$$\sum_{k=n+1}^{2n} C_0^k \sum_{\substack{0 \leq l, m \leq n \\ l+m=k}} \frac{|\lambda|^l |\mu|^m}{l! m!} < \sum_{k=n+1}^{2n} C_0^k \sum_{\substack{0 \leq l, m \\ l+m=k}} \frac{|\lambda|^l |\mu|^m}{l! m!} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(C_0(|\lambda| + |\mu|))^k}{k!}.$$

Or la série $\sum \frac{(C_0(|\lambda| + |\mu|))^k}{k!}$ est une série à termes positifs convergente, sa somme étant $\exp(C_0(|\lambda| + |\mu|))$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(C_0(|\lambda| + |\mu|))^k}{k!} = 0.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0_2$.

En revenant à l'expression initiale, on en déduit

$$\begin{aligned} \exp(\lambda A) \exp(\mu A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(\lambda + \mu)^k A^k}{k!} + R_n \right] \\ &= \exp((\lambda + \mu)A). \end{aligned}$$

Comme

$$\exp((\lambda + \mu)A) = \exp((\mu + \lambda)A),$$

on obtient finalement l'identité voulue.

- (d) La propriété découle de la première et de la troisième avec $\lambda = -\mu = 1$.
- (e) La propriété découle de la formule

$${}^t(A^k) = ({}^t A)^k$$

pour tout k .

□

Remarque 2.3.4. *Attention ! En général on n'a PAS*

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B).$$

Cette propriété n'est vraie que si les matrices A et B commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$.

Un contre-exemple : on prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = {}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors aisément que $A^2 = B^2 = 0$. Par suite $A^k = B^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. On obtient donc

$$\exp(A) = I_2 + A, \quad \exp(B) = I_2 + B.$$

D'autre part

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\exp(A) \exp(B) = I_2 + A + B + AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\exp(B) \exp(A) = I_2 + A + B + BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc déjà $\exp(A) \exp(B) \neq \exp(B) \exp(A)$, ce qui implique que l'égalité $\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B)$ ne peut être vraie.

Calculons néanmoins $\exp(A + B)$ pour en avoir le cœur net : on a

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A + B)^2 = I_2.$$

On en déduit que

$$(A + B)^k = \begin{cases} A + B & \text{si } k \text{ est impair,} \\ I_2 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

On obtient donc finalement

$$\exp(A + B) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \right) (A + B).$$

La matrice $\exp(A + B)$ est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

où $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$, $\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$. On a donc bien

$$\exp(A) \exp(B) \neq \exp(A + B).$$

En utilisant les propriétés précédentes, on arrive finalement au résultat qui va permettre de trouver les solutions de l'équation $y'(t) = Ay(t)$.

Lemme 2.3.5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors l'application

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$$

est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, et

$$\frac{d \exp(tA)}{dt} = A \exp(tA) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R} \setminus 0$. On écrit, à l'aide de la proposition précédente,

$$\frac{\exp((t+h)A) - \exp(tA)}{h} = \exp(tA) \frac{\exp(hA) - I_2}{h}.$$

Or

$$\frac{\exp(hA) - I_2}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{h^k A^{k+1}}{(k+1)!},$$

1. Cela signifie que toutes les applications $t \in \mathbb{R} \mapsto (\exp(tA))_{ij}$, pour $1 \leq i, j \leq 2$, sont de classe \mathcal{C}^1 .

et donc

$$\frac{\exp(hA) - I_2}{h} = A + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{(k+1)!} \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} & \beta_{k+1} \\ \gamma_{k+1} & \delta_{k+1} \end{pmatrix},$$

en reprenant les notations de la preuve du Théorème 2.3.1. D'après le théorème 2.3.1, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{(k+1)!} \alpha_{k+1} \right| &\leq \sum_{k=1}^n \frac{|h|^k}{(k+1)!} C_0^{k+1} \\ &\leq |h| C_0^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(|h| C_0)^k}{(k+2)!} \\ &\leq |h| C_0^2 \exp(|h| C_0). \end{aligned}$$

La même inégalité est vraie si on remplace α_k par $\beta_k, \gamma_k, \delta_k$. Si on suppose de surcroît que h appartient à un voisinage de zéro, par exemple $|h| \leq 1$, on obtient finalement

$$\frac{\exp((t+h)A) - \exp(tA)}{h} = \exp(tA)(A + O(h)).$$

On en déduit que l'application

$$t \mapsto \exp(tA)$$

est dérivable sur \mathbb{R} (donc continue), et que sa dérivée $t \mapsto A \exp(tA)$ est également continue. L'application considérée est donc de classe \mathcal{C}^1 . \square

On arrive donc finalement au résultat suivant :

Théorème 2.3.6. *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^2$.*

Le système différentiel muni de condition initiale :

$$X'(t) = AX(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t_0) = X_0 \tag{2.17}$$

admet une unique solution, donnée par

$$X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Le point remarquable ici est que l'on va montrer l'unicité des solutions sans avoir recours au chapitre 3.

— Existence : on vérifie que la fonction \tilde{X} définie par

$$\tilde{X}(t) = \exp((t - t_0)A)X_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

est solution de (2.17). Cela découle immédiatement de la Proposition 2.3.3 (b) et (c) et du Lemme 2.3.5.

— Unicité : soit X une solution de (2.17). On pose

$$C(t) = \exp(-tA)X(t).$$

Alors C est dérivable et

$$\frac{dC(t)}{dt} = -A \exp(-tA)X(t) + \exp(-At)X'(t) = -\exp(-tA)AX(t) + \exp(-tA)AX(t),$$

puisque A et $\exp(-tA)$ commutent et que $X'(t) = AX(t)$. On obtient donc $C'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc C est une fonction constante : $C(t) = C(t_0) = \exp(-t_0A)X_0$. En revenant à la définition de C , cela implique

$$\exp(-tA)X(t) = \exp(-t_0A)X_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On applique $\exp(tA)$ aux deux membres de l'équation et on obtient

$$X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0.$$

□

Remarque 2.3.7. *Attention : pour un système linéaire à coefficients dépendant du temps, c'est-à-dire dans le cas d'une équation du type*

$$X'(t) = A(t)X(t),$$

avec $X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$, $A : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il est en général FAUX de dire

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right) X_0.$$

Cette égalité n'est vraie que si les matrices $A(s)$ et $A(t)$ commutent pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.

2.3.2 Le cas non homogène

Lorsque le second membre n'est pas homogène, l'idée est la même que pour les équations différentielles scalaires du premier ordre (cas $m = n = 1$). On peut utiliser la méthode de variation des constantes pour démontrer l'existence de solutions, et éventuellement les calculer. On peut aussi utiliser une solution particulière de l'équation non-homogène, si on arrive à en trouver une.

Méthode de variation des constantes

Soit X la solution de l'équation

$$\begin{aligned} X'(t) &= AX(t) + B(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned}$$

On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$C(t) = \exp(-tA)X(t),$$

qui vérifie

$$C'(t) = -A \exp(-tA)X(t) + \exp(-tA)X'(t) = \exp(-tA)B(t).$$

Il "suffit" donc de trouver une primitive de $\exp(-At)B(t)$ pour connaître explicitement $C(t)$. On obtient alors X par la formule

$$X(t) = \exp(tA)C(t).$$

Remarque 2.3.8. *La présentation est faite ici pour des matrices carrées de taille 2, mais se généralise à des matrices carrées de taille quelconques, et donc à des systèmes linéaires à coefficients constants de m équations et d'ordre n avec n, m quelconques.*

On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.3.9. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, I un intervalle de \mathbb{R} , $B : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue. Soit $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^2$.

Alors le système différentiel

$$\begin{aligned} X'(t) &= AX(t) + B(t), \quad t \in I, \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

admet une unique solution de classe \mathcal{C}^1 .

Démonstration. Existence. On utilise la méthode de variation des constantes : on considère

$$C(t) = \exp(-t_0 A)X_0 + \int_{t_0}^t \exp(-sA)B(s) ds.$$

Alors les calculs ci-dessus montrent que $X : t \mapsto \exp(tA)C(t)$ est bien une solution du système différentiel étudié.

Unicité. Comme dans le cas des équations scalaires, si X_1, X_2 sont deux solutions de classe \mathcal{C}^1 , alors $Y = X_1 - X_2$ est solution du système homogène et $Y(t_0) = 0$. Donc $Y = 0$. □

Utilisation d'une solution particulière

Soit \tilde{X} une solution particulière de

$$\tilde{X}'(t) = A\tilde{X}(t) + B(t),$$

et soit $X_1 = \tilde{X}(t_0)$.

Soit X l'unique solution de (2.18). Alors $Y = X - \tilde{X}$ est solution de l'équation homogène

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(t_0) = X_0 - X_1.$$

Par conséquent, $Y(t) = \exp((t - t_0)A)(X_0 - X_1)$. On en déduit que

$$X(t) = \tilde{X}(t) + \exp((t - t_0)A)(X_0 - X_1).$$

Autrement dit, la solution générale de (2.18) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système différentiel homogène associé.

Application. Cette méthode est aussi utile dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants. En effet, soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On considère l'équation différentielle

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = f(t). \tag{2.19}$$

On rappelle que cette équation peut être mise sous la forme d'un système d'ordre un en posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Alors u est solution de (2.19) si et seulement si X est solution de (2.18), avec $X_0 = \begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \end{pmatrix}$. On peut donc appliquer ce qui précède pour trouver des solutions de (2.19). En particulier :

- On peut toujours mettre (2.19) sous la forme d'un système du type (2.18), et appliquer la méthode de variation des constantes. Néanmoins, les calculs peuvent rapidement s'avérer fastidieux.
- Supposons que l'on arrive à identifier une solution particulière \tilde{u} de (2.19). En particulier $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{u}'(t) \end{pmatrix}$ est une solution particulière du système différentiel et nous avons vu que la solution générale de (2.18) est la somme de \tilde{X} et de la solution générale du système différentiel homogène associé. On en déduit que la solution générale de (2.19) est la somme de \tilde{u} et de la solution générale de l'équation différentielle homogène

$$v''(t) + av'(t) + bv(t) = 0,$$

c'est-à-dire $u(t) = \tilde{u}(t) + v(t)$.

Si on parvient à identifier une solution particulière, cette deuxième méthode est à privilégier car les calculs sont nettement plus faciles.

Remarque 2.3.10. Dans la pratique, pour chercher une solution particulière de (2.19), on pourra chercher une fonction \tilde{u} “du même type” que f , c'est-à-dire :

- Si f est un polynôme, on cherche \tilde{u} comme un polynôme ;
- Si f est une fonction trigonométrique ($f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$), on cherche \tilde{u} sous la forme

$$\tilde{u}(t) = A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t);$$

- Si f est une exponentielle, on cherche u comme une exponentielle, etc.

2.4 Calculs d'exponentielle de matrice

2.4.1 Quelques exemples

Commençons par quelques exemples simples :

- **Matrice diagonale :**

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, et soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Alors $\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) \end{pmatrix}$.

En effet : on montre facilement par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

- **Matrice nilpotente :**

Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que $N^2 = 0$. Par suite, $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. On obtient donc

$$\exp(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} N^k = I_2 + N = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— **Matrices semblables :**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telles que

$$B = PAP^{-1}.$$

Alors

$$\exp(B) = P \exp(A) P^{-1}.$$

En effet, on vérifie facilement (par exemple par récurrence) que si $k \in \mathbb{N}$,

$$B^k = PA^kP^{-1}.$$

On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right) P^{-1}.$$

La propriété s'ensuit.

— **Matrices diagonalisables :**

Il découle des propriétés précédentes que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable A se calcule facilement. En effet, si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tels que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En ce cas,

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

— **Un cas particulier de matrice réelle diagonalisable avec valeurs propres non-réelles :** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

qui est une matrice réelle diagonalisable avec valeurs propres non-réelles $\alpha \pm i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ ². En calculant les vecteurs propres associés aux valeurs propres on conclut que

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

D'après l'expression de l'exponentielle pour les matrices semblables

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\exp(\alpha + i\beta)} & 0 \\ 0 & \exp(\alpha - i\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \\ &= \exp(\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) + i \sin(\beta) & 0 \\ 0 & \cos(\beta) - i \sin(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \\ &= \exp(\alpha) \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. On peut aussi calculer $\exp(A)$ en remarquant que $A = \alpha I_2 + \beta N$. On utilise alors la formule $\exp(M_1) \exp(M_2) = \exp(M_1 + M_2)$ valable si les matrices M_1, M_2 commutent, et dont la démonstration est proche de celle de la Proposition 2.3.3 (c). On a donc $\exp(A) = \exp(\alpha I_2) \exp(\beta N) = \exp(\alpha) \exp(N)$ et on calcule $\exp(\beta N) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$ sachant que les puissances de N sont : $N^{2k} = (-1)^k I_2, N^{2k+1} = (-1)^k N$.

Résumons dans un tableau les propriétés obtenues jusqu'à présent :

Type	Formule	Exponentielle
Matrice diagonale	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) \end{pmatrix}$
Un cas de matrice nilpotente	$\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Un cas de matrice réelle diagonalisable avec valeur propres non-réelles	$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$	$\exp(\alpha) \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$
Matrices semblables	$A = PBP^{-1}$	$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$

Pour traiter le cas général, on a besoin d'un résultat d'algèbre linéaire supplémentaire, comme suit.

2.4.2 Cas général

Théorème 2.4.1 (Décomposition de Dunford). *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ quelconque. Alors l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

(a) *A est diagonalisable, i.e. il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tels que*

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(b) *A n'est pas diagonalisable et dans ce cas A est trigonalisable : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$, $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tels que*

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Démonstration. On rappelle que les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(A - XI_2) \in \mathbb{C}[X]$. De plus, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_A est scindé et admet donc exactement deux racines complexes distinctes ou confondues. On distingue donc deux cas :

• Premier cas : χ_A admet deux racines distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

En ce cas $\dim \ker(A - \lambda_1 I_2) \in \{1, 2\}$, $\dim \ker(A - \lambda_2 I_2) \in \{1, 2\}$, et comme

$$\dim \ker(A - \lambda_1 I_2) + \dim \ker(A - \lambda_2 I_2) \leq 2,$$

on en déduit que $\dim \ker(A - \lambda_1 I_2) = \dim \ker(A - \lambda_2 I_2) = 1$. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $v_i \in \ker(A - \lambda_i I_2) \setminus \{0\}$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, v_1 et v_2 sont des vecteurs libres. Ils forment donc une base de \mathbb{C}^2 . Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2) . On a alors

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On est donc dans le premier cas énoncé dans le théorème.

• Deuxième cas : χ_A admet une seule racine $\lambda \in \mathbb{C}$:

Autrement dit, $\chi_A(X) = (X - \lambda)^2$.

On a de nouveau $\dim \ker(A - \lambda I_2) \in \{1, 2\}$. Si $\dim \ker(A - \lambda I_2) = 2 = \dim \mathbb{C}^2$, alors $A = \lambda I_2$: on est de nouveau dans le premier cas énoncé dans le théorème, avec $P = I_2$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Il reste donc à examiner le cas où $\dim \ker(A - \lambda I_2) = 1$. Soit $v_1 \in \mathbb{C}^2$ tel que $\ker(A - \lambda I_2) = \mathbb{C}v_1$. On prend $v_2 \in \mathbb{C}^2 \setminus \ker(A - \lambda I_2)$. Alors les vecteurs v_1 et v_2 sont non nuls et non colinéaires. Ils sont donc libres et forment une base de \mathbb{C}^2 . En particulier il existe $\gamma, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $Av_2 = \gamma v_1 + \mu v_2$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2) . Comme $Av_1 = \lambda v_1$, on a

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1},$$

où $\gamma, \mu \in \mathbb{C}$. Le polynôme caractéristique est invariant par similitude, donc

$$\chi_A(X) = (X - \lambda)^2 = (X - \lambda)(X - \mu).$$

On en déduit que $\lambda = \mu$. Aussi $\gamma \neq 0$ car sinon cela impliquerait $Av_2 = \lambda v_2$ donc $\dim \ker(A - \lambda I_2) = 2$. On est donc dans le deuxième cas énoncé dans le théorème.

□

Maintenant on peut calculer l'exponentielle d'une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à l'aide du théorème précédent. Si la matrice A est diagonalisable alors on est dans le premier cas du théorème, et l'exponentielle d'une telle matrice a déjà été traité dans les remarques qui précèdent le théorème. Si la matrice A est non-diagonalisable nous sommes dans le deuxième cas du théorème et remarquons que

$$A = P(\lambda I_2 + N)P^{-1},$$

que $I_2 N = N I_2 = N$ et que $N^k = 0_2, \forall k \geq 2$ ³. Par conséquent, pour tout $k \geq 0$,

$$(\lambda I_2 + N)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j \lambda^j N^{k-j} = \lambda^k I_2 + k \lambda^{k-1} N = \begin{pmatrix} \lambda^k & \gamma k \lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

On obtient donc, pour tout $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} & \gamma \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on arrive finalement à

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^\lambda & \gamma e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pour une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a donc deux possibilités :

Type	Formule	Exponentielle
Matrice diagonalisable	$P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$	$P \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) \end{pmatrix} P^{-1}$
Matrice trigonalisable (mais pas diagonalisable)	$P \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$	$P \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & \gamma \exp(\lambda) \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix} P^{-1}$

3. On peut aussi calculer $\exp(A)$ en utilisant alors la formule $\exp(M_1)\exp(M_2) = \exp(M_1 + M_2)$ valable si les matrices M_1, M_2 commutent, et on obtient $e^A = P \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & \gamma \exp(\lambda) \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$

En pratique, nous allons devoir souvent calculer des exponentielles de matrices réelles $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour calculer son exponentielle, on considère A comme une matrice complexe. Notons que $\exp(A)$ sera malgré tout une matrice réelle, comme on peut le voir sur la formule

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}.$$

De plus, si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a pour valeurs propres complexes λ_1, λ_2 , on a deux possibilités :

- (a) $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$; dans ce cas les vecteurs propres peuvent être choisis réels et A est diagonalisable ou trigonalisable sur \mathbb{R} (autrement dit, dans le théorème 2.4.1, on a $P \in GL_2(\mathbb{R})$, $\gamma \in \mathbb{R}$).
- (b) $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; dans ce cas λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes conjugués $\alpha \pm i\beta$. De plus, comme $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$, on ne peut pas avoir $\lambda_1 = \lambda_2$ (sinon $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$). Donc les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont nécessairement distinctes, et A est diagonalisable sur \mathbb{C} . Il existe donc $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On écrit alors

$$A = P(\alpha I_2 + \beta \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}) P^{-1} = \alpha I_2 + \beta P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ceci implique que $P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'autre part, cette matrice a comme valeurs propres $\pm i$, tout comme la matrice réelle $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit donc de deux matrices réelles semblables dans \mathbb{C} . Or on a le lemme suivant, que l'on démontre à la fin de cette section :

Lemme 2.4.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $M, \tilde{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M et \tilde{M} sont semblables dans \mathbb{C} : il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $M = S\tilde{M}S^{-1}$.*

Alors M et \tilde{M} sont semblables dans \mathbb{R} : il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = P\tilde{M}P^{-1}$.

Dans le cas présent on déduit donc l'existence de $R \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1} = R \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R^{-1}.$$

On obtient alors

$$A = \alpha I_2 + \beta R \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R^{-1} = R(\alpha I_2 + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) R^{-1} = R \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} R^{-1},$$

donc

$$\exp(A) = R \exp(\alpha) \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} R^{-1}.$$

Résumons les formules obtenues pour les exponentielles de matrices réelles :

Type	Formule	Exponentielle
Matrice diagonalisable avec valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distinctes ou confondues	$P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$	$P \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) \end{pmatrix} P^{-1}$
Matrice diagonalisable avec valeurs propres non-réelles $\alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$	$P \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$	$P \exp(\alpha) \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} P^{-1}$
Matrice non-diagonalisable avec une valeur propre double $\lambda \in \mathbb{R}$	$P \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \gamma \in \mathbb{R}^*$	$P \exp(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Enfin, voici la preuve du Lemme 2.4.2 : On décompose S en sa partie réelle et sa partie imaginaire,

$$S = S_1 + iS_2, \quad S_1, S_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de l'identité $MS = S\tilde{M}$, on obtient

$$MS_1 = S_1\tilde{M} \quad \text{et} \quad MS_2 = S_2\tilde{M}.$$

Attention : en général les matrices S_1 et S_2 ne sont pas inversibles !

Pour $x \in \mathbb{C}$, on considère la matrice $T(x) = S_1 + xS_2$ et son déterminant $p(x) = \det(T(x))$. On fait alors les observations suivantes :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $MT(x) = T(x)\tilde{M}$;
- p est un polynôme,
- Si $x = i$, on a $T(i) = S_1 + iS_2 = S$, et donc $p(i) \neq 0$.

On déduit des deux dernières propriétés que p n'est pas le polynôme nul. Par conséquent, p s'annule au plus un nombre fini de fois sur \mathbb{R} . Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $p(x_0) \neq 0$. Ceci implique que la matrice $T(x_0)$ est inversible et à coefficients réels. En choisissant $P = T(x_0)$, on a bien $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $MP = P\tilde{M}$. Donc M et \tilde{M} sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.5 Lien entre les deux méthodes

Pour calculer les solutions des équations linéaires à coefficients constants du type

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1 \quad (2.20)$$

on a donc vu deux méthodes différentes :

- (a) Première méthode : recherche de solutions comme des combinaisons linéaires d'exponentielles en résolvant sur \mathbb{C} l'équation caractéristique $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. On note λ_1, λ_2 ses racines.

- (i) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distinctes, la solution est de la forme

$$x(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t), \quad \text{avec } A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

- (ii) Si les racines sont non-réelles $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$, alors la solution est de la forme

$$x(t) = e^{t\alpha}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- (iii) Si il y a une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors la solution est de la forme

$$x(t) = (A_1 t + A_2) \exp(\lambda t), \text{ avec } A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

- (b) Deuxième méthode : on se ramène à l'étude d'un système d'équations d'ordre 1 en posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$X(t) = \exp(tA)X_0,$$

où $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$

Vérifions que les deux formules donnent le même résultat. Tout d'abord, remarquons que le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda(-a - \lambda) + b = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

Autrement dit, les racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (2.20) sont exactement les valeurs propres de A . Notons comme au dessus λ_1, λ_2 les racines complexes distinctes ou confondues de χ_A .

On va vérifier que la formule donnée par la deuxième méthode donne bien le même résultat que la première méthode, en utilisant les formules du tableau précédent.

- (i) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distinctes il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

et on a

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

Notons

$$P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$x(t) = a_1 \exp(\lambda_1 t) y_1 + a_2 \exp(\lambda_2 t) y_2,$$

et on retrouve le résultat de la première méthode.

- (ii) Si les racines sont non-réelles $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$ il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} P^{-1},$$

et on a

$$X(t) = P \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

On en déduit que

$$x(t) = a_1 \exp(\alpha t) \cos(\beta t) y_1 - a_2 \exp(\alpha t) \sin(\beta t) y_2,$$

et on retrouve le résultat de la première méthode.

- (iii) Si il y a une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ alors, la matrice A n'étant pas de la forme λI_2 , elle n'est pas diagonalisable, donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$, $\gamma \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1},$$

de sorte que

$$X(t) = P \exp(\lambda t) \begin{pmatrix} 1 & \gamma t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on obtient

$$x(t) = \exp(\lambda t) [(a_1 y_1 + a_2 y_2) + a_1 y_2 \gamma t],$$

et ici encore on retrouve la formule de la première méthode.

2.6 Tracé des trajectoires de solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

L'objet de tout ce paragraphe est de tracer les courbes paramétrées définies par $\{(x(t), x'(t)), t \in \mathbb{R}\}$, où x est solution de l'équation scalaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1,$$

et plus généralement tracer les courbes paramétrées définies par $\{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}\}$, où $X(t) = (x(t), y(t))$ est solution du système d'équations d'ordre 1 à coefficients constants

$$X'(t) = AX(t), \quad X(0) = (x_0, y_0).$$

Il s'agit donc de tracer des courbes paramétrées définies par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(At) X_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

2.6.1 Quelques cas simples importants

Avant de comprendre le cas général, on commence par des cas simples : matrice diagonale, un cas "modèle" correspondant à une matrice diagonalisable dans \mathbb{C} mais pas dans \mathbb{R} , et enfin le cas d'une matrice non-diagonalisable de type triangulaire supérieure. On donnera également un lemme permettant de comprendre le lien entre :

- d'une part la similitude de deux matrices A et \tilde{A} ;
- d'autre part le tracé des courbes paramétrées associées à $X(t) = \exp(tA)X_0$, $Y(t) = \exp(t\tilde{A})Y_0$.

(a) Tracé de la courbe paramétrée d'équation $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)X_0$, avec A diagonale :

On a

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On étudie donc la courbe paramétrée \mathcal{C}_{A, X_0} définie par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \exp(\lambda_1 t), \\ y(t) = y_0 \exp(\lambda_2 t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le domaine d'étude est \mathbb{R} , et pour $X_0 \in \mathbb{R}^2$ fixé, les courbes n'ont pas de symétrie évidente. Cependant on peut remarquer que la courbe relative à la condition initiale $(-x_0, y_0)$ (resp. $(x_0, -y_0)$) se déduit de celle relative à la condition initiale (x_0, y_0) par une symétrie par rapport l'axe des ordonnées (resp. par rapport à l'axe des abscisses). On peut donc se contenter d'étudier le cas où $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$ et en déduire les autres cas par symétrie.

On traite d'abord le cas $x_0 = 0$ (resp. $y_0 = 0$). On a alors $\exp(\lambda_1 t)x_0 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (resp. $\exp(\lambda_2 t)y_0 = 0$ pour tout t). Si $\lambda_2 = 0$ (resp. $\lambda_1 = 0$) la trajectoire est le point $(0, y_0)$ (resp. $(x_0, 0)$). Sinon on voit facilement que la trajectoire est le demi-axe des ordonnées positives si $y_0 > 0$ (resp. le demi-axe des abscisses positives si $x_0 > 0$), et le point $(0, 0)$ si $y_0 = 0$ (resp. $x_0 = 0$).

On se concentre donc à présent sur le cas où $x_0 > 0, y_0 > 0$. Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ la trajectoire est le point (x_0, y_0) . Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ la trajectoire est la demi-droite d'équation $x = x_0, y > 0$. On se place dans le dernier cas restant, $\lambda_1 \neq 0$. On remarque alors que $x(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. On fait alors le changement de paramétrage

$$x(t) = s \iff t = \frac{1}{\lambda_1} \log \frac{s}{x_0},$$

ce qui implique

$$y(t) = y_0 \exp\left(\lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} \log \frac{s}{x_0}\right)\right) = \frac{y_0}{x_0^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} s^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

La courbe \mathcal{C}_{A, X_0} est donc la courbe \mathcal{C}_0 du graphe de la fonction

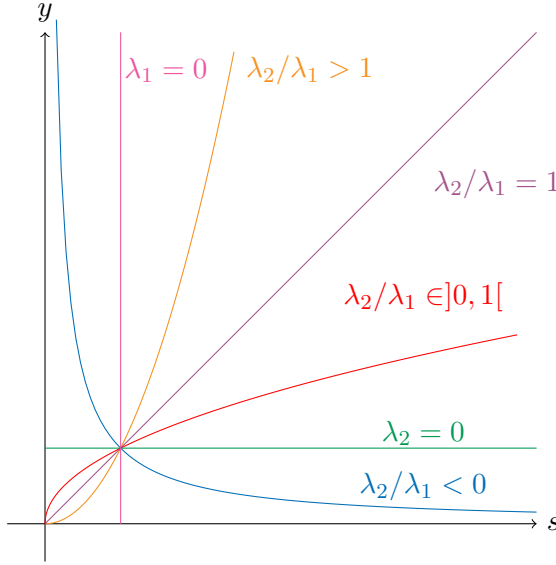
$$h(s) = \frac{y_0}{x_0^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} s^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

pour $s \in \mathbb{R}_+^*$. En vue du changement de paramétrage fait ci-dessus, si $\lambda_1 > 0$ le sens de parcours de la courbe \mathcal{C}_{A, X_0} lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$ est le même que celui de \mathcal{C}_0 lorsque s varie de 0^+ à $+\infty$, et si $\lambda_1 < 0$ c'est le sens opposé. L'allure de la courbe \mathcal{C}_0 dépend de la valeur de $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$:

- (i) Si $\lambda_2/\lambda_1 < 0$, la fonction $s \in \mathbb{R}_+^* \mapsto s^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ est strictement décroissante, tend vers $+\infty$ en 0^+ et vers 0 en $+\infty$. En particulier la courbe \mathcal{C}_0 admet en $s = 0^+$ une asymptote à l'axe des ordonnées, et en $s = +\infty$ une asymptote à l'axe des abscisses.
- (ii) Si $\lambda_2/\lambda_1 = 0$, la courbe \mathcal{C}_0 est la demi-droite d'équation $y = y_0, s > 0$.
- (iii) Si $\lambda_2/\lambda_1 \in]0, 1[$, la fonction $s \in \mathbb{R}_+^* \mapsto s^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ est strictement croissante, tend vers 0 en 0^+ et vers $+\infty$ en $+\infty$. De plus la courbe \mathcal{C}_0 admet une tangente verticale au voisinage du point $(0, 0)$ et une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses quand $s \rightarrow +\infty$.
- (iv) Si $\lambda_2/\lambda_1 = 1$, la courbe \mathcal{C}_0 est la demi-droite d'équation $y = \frac{y_0}{x_0} s, s > 0$.

- (v) Si $\lambda_2/\lambda_1 > 1$, la fonction $s \in \mathbb{R}_+^* \mapsto s^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ est strictement croissante, tend vers 0 en 0^+ et vers $+\infty$ en $+\infty$. De plus la courbe \mathcal{C}_0 admet une tangente horizontale au voisinage du point $(0,0)$ et une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées quand $s \rightarrow +\infty$.

L'allure des courbes est donc la suivante (avec ici $x_0 = y_0 = 1$) :



(b) **Tracé de la courbe paramétrée d'équation** $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)X_0$, avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}^* :$$

Il s'agit d'une matrice réelles ayant deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, dont on a déjà vu la forme de l'exponentielle :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{cases} x(t) = \exp(\alpha t)(\cos(\beta t)x_0 - \sin(\beta t)y_0), \\ y(t) = \exp(\alpha t)(\cos(\beta t)y_0 + \sin(\beta t)x_0), \end{cases}$$

Nous allons privilégier un passage en coordonnées polaires. Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et la trajectoire est réduite à un point. Sinon notons $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ l'unique couple tel que

$$x_0 = r_0 \cos \theta_0, \quad y_0 = r_0 \sin \theta_0.$$

Alors

$$\begin{cases} x(t) = r_0 \exp(\alpha t)(\cos(\beta t) \cos(\theta_0) - \sin(\beta t) \sin(\theta_0)) = r_0 \exp(\alpha t) \cos(\beta t + \theta_0), \\ y(t) = r_0 \exp(\alpha t)(\cos(\beta t) \sin(\theta_0) + \sin(\beta t) \cos(\theta_0)) = r_0 \exp(\alpha t) \sin(\beta t + \theta_0). \end{cases}$$

On remarque immédiatement que si $\alpha = 0$, la courbe est le cercle de rayon r_0 . On suppose donc dans toute la suite que $\alpha \neq 0$.

Nous allons tracer l'allure de la courbe \mathcal{C}_{A, X_0} pour $\theta_0 = 0$ et $\alpha, \beta > 0$ car le cas $\theta_0 \neq 0$ s'obtient en faisant une rotation d'angle θ_0 , le cas $\beta < 0$ s'obtient en faisant une symétrie par rapport à l'axe $(0x)$, et le cas $\alpha < 0$ s'obtient, en changeant la paramétrisation en $s = -t$, en changeant le sens de parcours de la courbe et en faisant une symétrie par rapport à l'axe $(0x)$.

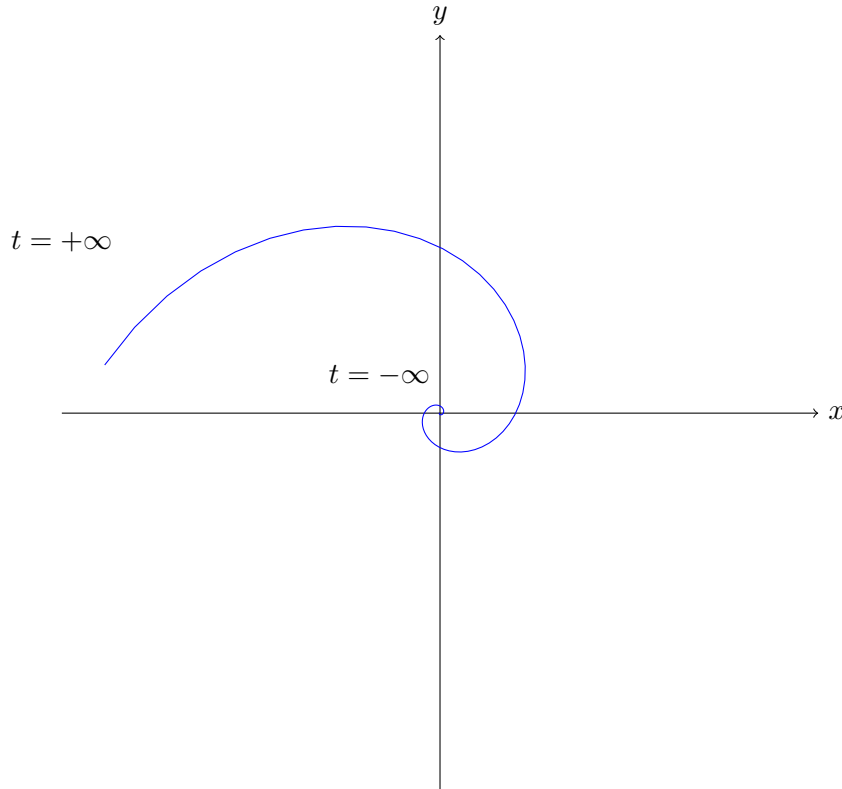
En faisant le changement de paramétrage $s = \beta t$ on obtient que \mathcal{C}_{A,X_0} est la courbe

$$\{(r_0 \exp(\frac{\alpha}{\beta}s) \cos(s), r_0 \exp(\frac{\alpha}{\beta}s) \sin(s)), s \in \mathbb{R}\},$$

d'équation polaire

$$r(s) = r_0 \exp(\frac{\alpha}{\beta}s).$$

On a $r'(s) = r_0 \frac{\lambda}{\exp}(\frac{\alpha}{\beta}s) > 0$, donc $r(s)$ croît de $\lim_{s \rightarrow -\infty} r(s) = 0$ à $\lim_{s \rightarrow +\infty} r(s) = +\infty$. On obtient une spirale qui s'enroule autour de l'origine quand $t \rightarrow -\infty$ et qui part vers l'infini quand $t \rightarrow +\infty$.



(c) Tracé de la courbe paramétrée d'équation $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)X_0$, avec A non-diagonalisable triangulaire supérieure :

On prend à présent A de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$. On étudie donc la courbe paramétrée \mathcal{C}_{A,X_0} définie par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \exp(\lambda t) \begin{pmatrix} 1 & \gamma t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0 + \gamma t y_0) \exp(\lambda t) \\ y_0 \exp(\lambda t) \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = 0$, on a donc $g(t) = y_0$ pour tout t . On vérifie facilement que dans ce cas \mathcal{C}_{A,X_0} est la droite d'équation $y = y_0$ si $y_0 \neq 0$ et elle est réduite au point (x_0, y_0) si $y_0 = 0$. De même si $y_0 = 0$, $x_0 > 0$ (resp. $x_0 < 0$) \mathcal{C}_{A,X_0} est la demi-droite d'équation $y = 0$, $x > 0$ (resp. $x < 0$). Enfin si $y_0 = x_0 = 0$ la trajectoire est réduite au point $(0, 0)$.

On suppose donc à présent $\lambda \neq 0, y_0 \neq 0$. Comme les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ n'ont pas de symétrie évidente, on passe à l'analyse de leurs variations.

Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables sur \mathbb{R} et on a

$$\begin{aligned}x'(t) &= \exp(\lambda t)(\lambda x_0 + \lambda \gamma y_0 t + \gamma y_0), \\y'(t) &= \lambda y_0 \exp(\lambda t).\end{aligned}$$

Ainsi $y'(t)$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} et a le signe de λy_0 . La fonction $x'(t)$ s'annule en un unique point t_0 défini par

$$t_0 = -\frac{\lambda x_0 + \gamma y_0}{\lambda \gamma y_0} = -\frac{1}{\lambda} - \frac{x_0}{\gamma y_0}.$$

On a plusieurs cas de figure possibles suivant les signes de $\lambda, \lambda y_0, \lambda \gamma y_0$. Notons néanmoins que :

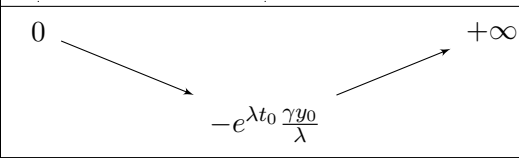

- On a toujours $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$ quand $\lambda t \rightarrow -\infty$ (c.à.d. $t \rightarrow -\text{sgn}(\lambda)\infty$), et de plus $y(t)/x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow -\text{sgn}(\lambda)\infty$: il y a une tangente horizontale au voisinage du point $(0, 0)$.
- On a toujours $y(t) \rightarrow \text{sgn}(\lambda y_0)\infty, x(t) \rightarrow \text{sgn}(\gamma y_0)\infty$ quand $\lambda t \rightarrow +\infty$ (c.à.d. $t \rightarrow \text{sgn}(\lambda)\infty$). De plus $y(t)/x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \text{sgn}(\lambda)\infty$: il y a une branche parabolique dans la direction $(0x)$.
- $y(t)$ garde un signe constant (celui de λy_0).
- Il y a une tangente verticale au point de paramètre t_0 , qui a pour coordonnées $\exp(\lambda t_0)(-\frac{\gamma y_0}{\lambda}, y_0)$.
- La courbe croise l'axe des ordonnées en un unique point, qui a pour paramètre $t_1 = -x_0/(\gamma y_0)$. Notons que $t_1 = t_0 + \frac{1}{\lambda}$. Le point de paramètre t_1 est donc “le plus proche de la branche infinie”.

L'allure de la courbe est donc toujours la même, modulo des symétries par rapport aux axes (Ox) et (Oy) . Plus précisément :

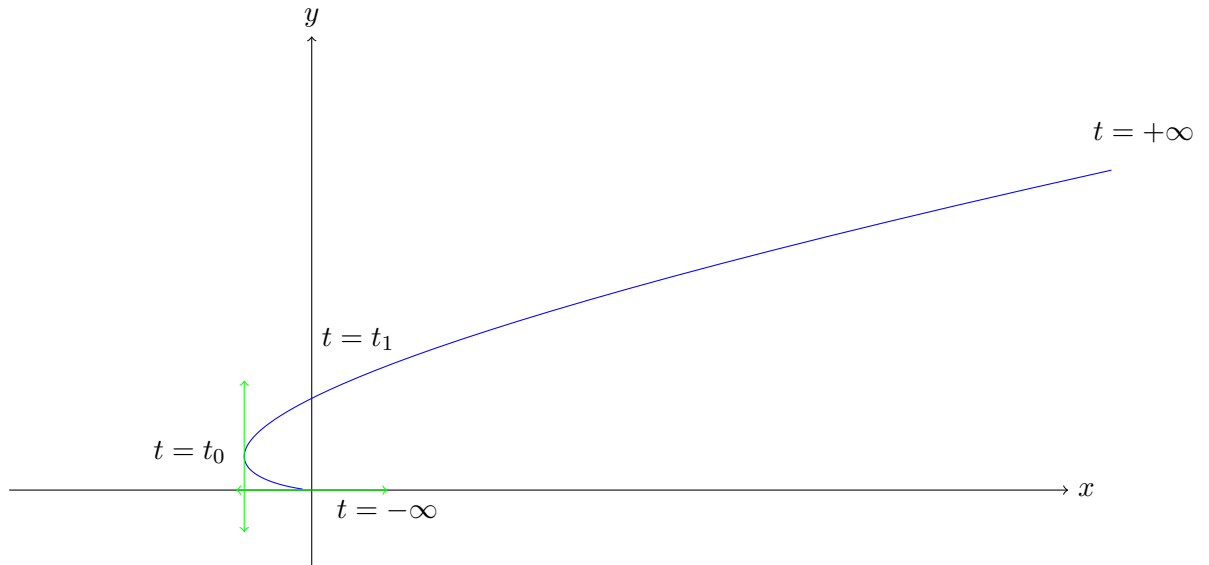
- Le signe de y_0 détermine le demi-plan dans lequel la courbe est incluse ($y > 0$ ou $y < 0$) ;
- Le signe de $\lambda \gamma y_0$ (ou de $\frac{\gamma y_0}{\lambda}$) détermine la position du point de tangente verticale par rapport à l'axe des ordonnées ;
- Le signe de λ détermine le sens dans lequel la courbe est parcourue (de 0 vers $+\infty$ ou le contraire).

On trace donc ci-dessous un exemple dans le cas $\gamma, \lambda, y_0 > 0$. Les autres cas sont laissés au lecteur et se traitent de façon rigoureusement analogue.

Dans ce cas le tableau de variations est

t	$-\infty$		t_0		$+\infty$
$x'(t)$	0	—	0	+	
$x(t)$	0				$+\infty$
$y(t)$	0				$+\infty$
$y'(t)$	0	+		+	

On obtient une courbe qui a l'allure suivante :



Nous résumons dans le tableau suivant les tracé type obtenues pour les trajectoires des solutions de $X'(t) = AX(t)$, et rapellons que le sens de parcours des trajectoires est inversé lorsque l'on change le signe de $\lambda_1, \alpha, \beta, \lambda, \gamma$.

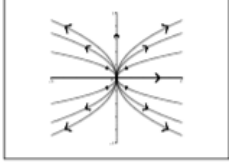
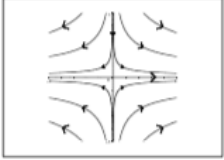
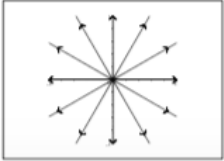
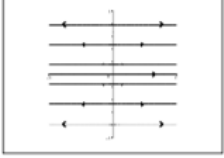
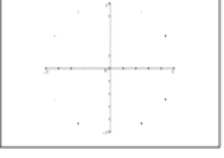
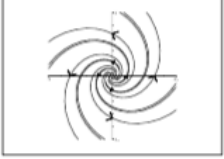
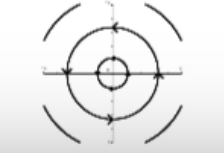
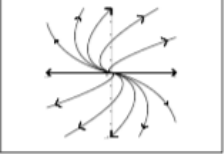
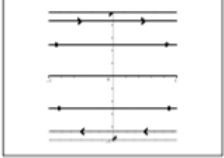
Enfin, voici quelques remarques :

- en vue de la formule explicite des solutions, les trajectoires du système avec matrice $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, s'obtiennent de celles du système avec matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ par une symétrie par rapport à la droite $y = x$. Ceci s'explique aussi par le fait que la matrice de passage entre ces deux matrices est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc comme on le verra dans le prochain lemme, la trajectoire de la première en repère canonique Oxy est celle de deuxième en repère inversé,
- lorsque la matrice du système est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distincts, la direction des vecteurs propres de la valeur propre λ_1 est celle de l'axe des abscisses, et la direction des vecteurs propres de la valeur propre λ_2 est celle de l'axe des ordonnées,
- les trajectoires issues d'un vecteur propre réel v d'une valeur propre λ restent sur la direction du vecteur propre car

$$e^{tA}v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!}v = e^{t\lambda}v;$$

en effet, $e^{t\lambda}v$ est bien une solution car $(e^{t\lambda}v)' = e^{t\lambda}\lambda v = e^{t\lambda}Av = Ae^{t\lambda}v$,

- deux trajectoires non-confondues ne peuvent pas se croiser, car on a unicité des solutions,
- toujours grâce à l'unicité des solutions, la trajectoires issue de X_0 coïncide avec celle issues de $X(t_0)$ quel que soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

Type	Sous-type	Trajectoires
Matrice diagonalisable avec valeurs propres dis- tinctes ou confondues $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, de forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	valeurs propres de même signe, $\lambda_1 > 0$	
	valeurs propres de signes opposés, $\lambda_1 > 0$	
	valeur propre double, $\lambda_1 > 0$	
	$\lambda_2 = 0, \lambda_1 > 0$	
	$\lambda_2 = 0 = \lambda_1$	
Matrice diagonalisable avec valeurs propres non-réelles $\alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$, de forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$	$\alpha > 0$	
	$\alpha = 0, \beta < 0$	
Matrice non- diagonalisable, de forme $\begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	valeur propre double $\lambda > 0$	
	valeur propre double $\lambda = 0$	

2.6.2 Cas général

Les cas étudiés ci-dessus permettent en fait de comprendre le tracé des solutions dans le cas général d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour cela, on utilise le résultat suivant :

Lemme 2.6.1. *Soit $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux applications telles qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que*

$$X(t) = PY(t) \quad \forall t \in I.$$

On note $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$, v_1, v_2 les vecteurs colonnes de la matrice P , $\mathcal{R}_P = (O, v_1, v_2)$ le repère dont les vecteurs de base sont v_1 et v_2 . Soit \mathcal{C} la courbe paramétrée définie dans le repère canonique (Oxy) par $\{(x_1(t), x_2(t)), t \in I\}$.

Alors la courbe \mathcal{C} est définie dans le repère \mathcal{R}_P par $\{(y_1(t), y_2(t)), t \in I\}$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule habituelle de changement de coordonnées : soit $M(t)$ le point de \mathcal{C} de paramètre t . Ce point a pour coordonnées $(x_1(t), x_2(t))$. Par hypothèse, on a

$$X(t) = PY(t) = (v_1 v_2) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2.$$

On lit donc immédiatement sur la formule ci-dessus que les coordonnées de $M(t)$ dans le repère \mathcal{R}_P sont $y_1(t)$ et $y_2(t)$. \square

On va déduire du paragraphe précédent l'allure de la courbe paramétrée \mathcal{C}_{A, X_0} définie par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(At)X_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

avec $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque. Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que

$$A = P\tilde{A}P^{-1},$$

avec

- $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ si A est diagonalisable avec valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distinctes ou confondues,
- $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ si A est diagonalisable avec valeurs propres non-réelles $\alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$,
- $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si A est non-diagonalisable avec une valeur propre double $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nous avons donc que la courbe \mathcal{C}_{A, X_0} est définie dans le repère canonique (Oxy) par les points de coordonnées

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P(\exp(t\tilde{A})P^{-1}X_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

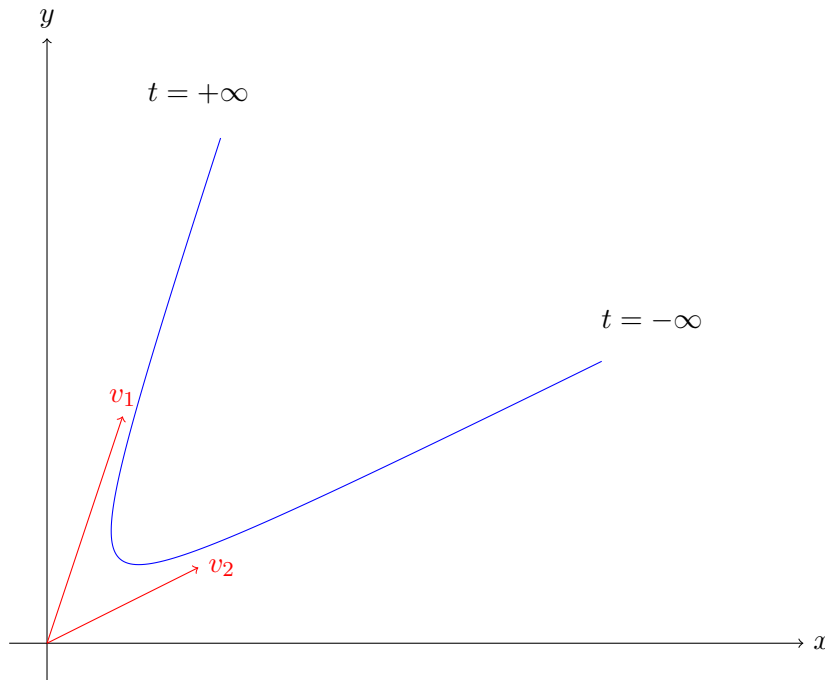
En vue du Lemme 2.6.1 on obtient que la courbe \mathcal{C}_{A, X_0} est définie dans le repère \mathcal{R}_P par les points de coordonnées

$$\exp(t\tilde{A})(P^{-1}X_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Notons aussi que le point de coordonnées $P^{-1}X_0$ dans \mathcal{R}_P a pour coordonnées X_0 dans le repère (Oxy) .

On trace donc la courbe dans le repère \mathcal{R}_P en utilisant l'analyse faite au paragraphe précédent. Il faut cependant garder en tête qu'en général, le repère \mathcal{R}_P n'est pas orthonormé, ni même orthogonal. La courbe a donc une allure déformée par ce changement de repère : la direction des abscisses (resp. ordonnées) devient la direction de v_1 , le premier vecteur colonne de la matrice de passage P (resp. la direction de v_2 , le deuxième vecteur colonne de la matrice de passage P).

On trace ci-dessous un exemple de courbe pour une matrice A diagonalisable avec valeurs propres réelles, lorsque $\lambda_2/\lambda_1 < 0$, $\lambda_1 > 0$ et $y_1, y_2 > 0$:



Rapellons aussi que si $\lambda_1 < 0$ le sens de parcours de la courbe est inversé.

2.6.3 Que lit-on sur les portraits de phase ? Quelques notions de stabilité des équations différentielles

Les portraits de phase peuvent être utilisés pour comprendre les notions de **stabilité**. On s'intéresse à la partie des trajectoires des solutions pour laquelle $t \rightarrow +\infty$. De façon générale, les notions de stabilité s'intéressent au comportement d'un système au voisinage d'un point d'équilibre. Ici, comme le système est linéaire, les points d'équilibre X_0 sont caractérisés par la propriété $X_0 \in \ker A$ (en effet, si X_0 est un point d'équilibre, on a $X(t) = X_0$ pour tout t , donc $X'(t) = 0 = AX_0$).

Ici $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\ker A$ est de dimension 0 (si 0 n'est pas valeur propre de A et dans ce cas $\ker A = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$), 1 (si 0 est valeur propre simple de A , ou si 0 est valeur propre double de A mais A n'est pas diagonalisable), ou 2 (si A est la matrice nulle). On écarte le cas où A est la matrice nulle, qui n'a pas beaucoup d'intérêt (dans ce cas, les trajectoires sont toutes réduites à des points). On distingue au moins deux notions de stabilité :

— **Stabilité orbitale, ou stabilité au sens de Lyapunov :**

Définition 2.6.2. On dit que $X_0 \in \ker A$ est un point d'équilibre stable au sens

de Lyapunov si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall Y_0 \in \mathbb{R}^2, \|Y_0 - X_0\| \leq \delta \Rightarrow \sup_{t \geq 0} \|\exp(At)Y_0 - X_0\| \leq \epsilon.$$

Autrement dit, un point d'équilibre est stable au sens de Lyapunov si la propriété suivante est vérifiée : si on part d'une position initiale proche de la position d'équilibre, alors on reste proche de cette position d'équilibre pour tout $t \geq 0$ (attention ici à la “direction” du temps : on ne repart pas en arrière, c'est à dire qu'on ne considère pas la portion de trajectoire qui correspond à $t < 0$).

— **Stabilité asymptotique :**

Définition 2.6.3. On dit que $X_0 \in \ker A$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall Y_0 \in \mathbb{R}^2, \|Y_0 - X_0\| \leq \epsilon_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\exp(At)Y_0 - X_0\| = 0.$$

Autrement dit, un point d'équilibre est asymptotiquement stable si la propriété suivante est vérifiée : si on part d'une position initiale suffisamment proche de la position d'équilibre, alors on converge en temps grand vers la position d'équilibre.

Interprétations graphiques, à comprendre sur le tableau page 55 :

- La stabilité orbitale signifie que les courbes du portrait de phase, si elles passent près de la position d'équilibre à un instant donné, restent ensuite toujours près de cette position d'équilibre. Intuitivement, cela veut dire qu'on ne s'éloigne pas trop de la position d'équilibre.
- La stabilité asymptotique signifie que toutes les courbes du portrait de phase qui passent près de la position d'équilibre convergent en temps grand vers cette position d'équilibre. Cela veut dire que l'on se rapproche de la position d'équilibre en temps grand.

Ainsi pour étudier la stabilité, il suffit d'examiner les trois cas décrits en “préliminaires”, puisque le passage au cas général correspond simplement à une déformation des courbes par changement des axes de coordonnées.

Examinons à présent quelques cas décrits plus haut, en distinguant suivant la forme de la matrice A

(a) Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

- Tout d'abord, si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, seul $(0,0)$ est point d'équilibre. On n'étudie donc la stabilité qu'autour du point $(0,0)$. À partir des formules

$$\begin{aligned} x &= \exp(\lambda_1 t)x_0, \\ y &= \exp(\lambda_2 t)y_0, \end{aligned}$$

on vérifie facilement que le point $(0,0)$ est orbitalement ou asymptotiquement stable si et seulement si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ (par conséquent $\lambda_2/\lambda_1 > 0$). Sur le portrait de phase page 51, cela correspond aux courbes jaune, violette et rouge, parcourues dans le sens “infini vers zéro”. La courbe bleue, qui correspond à $\lambda_2/\lambda_1 < 0$, est écartée : on vérifie bien que sur cette courbe, quel que soit le sens de parcours, on finit par s'éloigner infiniment de l'origine.

— Il reste à examiner le cas $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ (le cas $\lambda_2 = 0$ se traite de façon similaire.) Dans ce cas les positions d'équilibre sont de la forme $(\alpha, 0)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Autrement dit l'ensemble des états d'équilibre est l'axe des abscisses tout entier.

D'un autre côté, les trajectoires du portrait de phase sont des demi-droites verticales (en rose sur le dessin page 51). Le signe de λ_2 détermine le sens de parcours de ces demi-droites. Si $\lambda_2 > 0$, on a

$$\exp(\lambda_2 t)y_0 \rightarrow \operatorname{sgn}(y_0)\infty \quad \text{quand } t \rightarrow \infty,$$

et donc il n'y a pas de stabilité orbitale, ni de stabilité asymptotique.

On se concentre donc maintenant sur le cas $\lambda_2 < 0$. Dans ce cas les demi-droites sont parcourues dans le sens "haut vers bas" si $y_0 > 0$, "bas vers haut" si $y_0 < 0$. Autrement dit, si on part d'un point (x_0, y_0) , on converge vers la position d'équilibre $(x_0, 0)$.

On voit alors que les points d'équilibre sont tous orbitalement stables, mais pas asymptotiquement stables : en effet, si (x_0, y_0) est dans un voisinage de $(\alpha, 0)$ la trajectoire va rester dans un voisinage de $(\alpha, 0)$. En revanche, si $x_0 \neq \alpha$, aussi près soit-il de α , la trajectoire ne converge jamais vers $(\alpha, 0)$, et on n'a donc pas de stabilité asymptotique.

(b) Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$:

Seul $(0, 0)$ est état d'équilibre.

Si $\alpha = 0$, les trajectoires sont des courbes fermées. On a donc stabilité orbitale, mais pas stabilité asymptotique.

Si $\alpha \neq 0$, les trajectoires sont des spirales qui s'entourent autour de l'origine, et le signe de α détermine le sens de parcours de la spirale. On retrouve une fois de plus qu'on a stabilité orbitale et asymptotique si $\alpha < 0$, et ni stabilité orbitale ni stabilité asymptotique si $\alpha > 0$.

(c) Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$:

Si $\lambda \neq 0$, le portrait de phase a l'allure dessinée page 54. Le signe de λ détermine le sens de parcours de la courbe. On voit immédiatement qu'on a stabilité asymptotique (resp. stabilité orbitale) si et seulement si $\lambda < 0$.

Examinons maintenant le cas $\lambda = 0$. Dans ce cas les états d'équilibre sont de la forme $(r, 0)$ avec $r \in \mathbb{R}$. Par ailleurs

$$\exp(At)X_0 = X_0 + \gamma t \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi si $y_0 \neq 0$, $\|\exp(At)X_0\| \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$. On ne peut donc pas avoir de stabilité asymptotique ni de stabilité orbitale.

On résume ces propriétés, qui se transmettent aussi aux matrices semblables, dans le tableau suivant :

A diagonalisable, avec valeurs propres distinctes ou confondues $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$		$\lambda_1 < 0$	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 > 0$
	$\lambda_2 < 0$	Stabilité orbitale et asymptotique		
	$\lambda_2 = 0$	Stabilité orbitale mais pas asymptotique		
	$\lambda_2 > 0$	Pas de stabilité orbitale, ni asymptotique		
A diagonalisable, avec valeurs propres $\alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$		$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
		Stabilité orbitale et asymptotique	Stab. orbitale, mais pas asymptotique	Pas de stabilité orbitale, ni asymptotique
A non diagonalisable, donc avec valeur propre double $\lambda \in \mathbb{R}$		$\lambda < 0$	$\lambda = 0$	$\lambda > 0$
		Stabilité orbitale et asymptotique	Pas de stabilité orbitale, ni asymptotique	

Notons que si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles strictement négatives, alors les points d'équilibre sont asymptotiquement et orbitalement stables. Aussi, si l'une des valeurs propres de A a une partie réelle strictement positive, alors les points d'équilibre ne sont pas stables (ni asymptotiquement, ni orbitalement). Enfin, dans tous les cas de stabilité asymptotique on a aussi la stabilité orbitale. En général pour des équations plus compliquées la stabilité asymptotique n'implique automatiquement qu'une notion de stabilité orbitale plus faible que celle ci-dessus.

Remarque 2.6.4. Cette méthode est souvent utilisée en pratique pour déterminer la stabilité d'un état d'équilibre, même en dehors du cadre linéaire. En effet, supposons que X soit solution de l'équation autonome

$$X'(t) = b(X(t)),$$

et supposons qu'il existe $X_{eq} \in \mathbb{R}^2$ tel que $b(X_{eq}) = 0$. On part d'une position initiale dans un voisinage de X_{eq} . Alors tant que $X(t)$ est proche de X_{eq} , on a

$$b(X(t)) \approx Db(X_{eq})(X(t) - X_{eq}),$$

où Db est la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} & \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} & \frac{\partial b_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

En notant $A = Db(X_{eq})$, $Y(t) = X(t) - X_{eq}$, on en déduit que tant que $X(t)$ est dans un voisinage de X_{eq} , et donc tant que $Y(t)$ est petit, l'évolution est pilotée par l'équation

$$Y'(t) = AY(t).$$

En examinant les valeurs propres de la matrice A , on peut savoir si on a un espoir que le point d'équilibre X_{eq} soit stable. On peut démontrer (mais c'est difficile !) que si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles strictement négatives, alors X_{eq} est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système non linéaire de départ. Si l'une des valeurs propres de A a une partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre n'est pas stable (ni asymptotiquement, ni orbitalement). Dans les autres cas (valeurs propres avec parties réelles négatives ou nulles, mais pas toutes strictement négatives), on ne peut pas conclure en général.

Le raisonnement mené ci-dessus s'appelle une **linéarisation** de l'équation près du point d'équilibre. Il peut se généraliser à des cas plus complexes (étude d'équations aux dérivées partielles, qui peuvent s'apparenter à des systèmes d'équations différentielles en dimension infinie...) Le résultat cité précédemment, qui fait le lien entre les valeurs propres de $D_b(X_{eq})$ et la stabilité du point d'équilibre correspondant, justifie a posteriori que l'on étudie les systèmes linéaires à coefficients constants de façon aussi approfondie.

2.7 Analyse numérique

On revient dans ce paragraphe sur les schémas d'Euler introduits en (2.6) et (2.7) pour les équations linéaires d'ordre un.

2.7.1 Schémas d'Euler

On considère dans ce paragraphe une équation différentielle du type

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

avec $A : I \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, et $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, où $I = [a, b]$ est un intervalle de \mathbb{R} . On munit cette équation différentielle d'une condition initiale

$$X(a) = X_{ini},$$

et on cherche à calculer des solutions approchées de l'équation différentielle. Comme expliqué au paragraphe précédent, on choisit des points de discrétisation définis par (2.3). Pour définir le schéma numérique, on commence par considérer l'équation différentielle aux points de discrétisation :

$$X'(t_{k,p}) = A(t_{k,p})X(t_{k,p}) + B(t_{k,p}).$$

Dans ce cadre vectoriel, le schéma d'Euler explicite devient

$$\frac{X_{k+1} - X_k}{h_p} = A(t_{k,p})X_k + B(t_{k,p}),$$

ce qui donne, pour $0 \leq k \leq p-1$,

$$X_{k+1} = (I_2 + h_p A(t_{k,p}))X_k + h_p B(t_{k,p}). \quad (2.21)$$

L'initialisation de la récurrence est faite en prenant

$$X_0 = X_{ini}.$$

Le schéma d'Euler implicite devient

$$\frac{X_k - X_{k-1}}{h_p} = A(t_{k,p})X_k + B(t_{k,p}),$$

ce qui s'écrit encore

$$(I_2 - h_p A(t_{k,p}))X_k = X_{k-1} + h_p B(t_{k,p}).$$

Cette équation est dite *implicite* car la formule ne donne pas directement X_k en fonction de X_{k-1} : il faut d'abord inverser la matrice $I_2 - h_p A(t_{k,p})$ (après avoir montré que cette matrice est bien inversible!). En écrivant l'équation de récurrence au rang $k+1$, on obtient, si $I_2 - h_p A(t_{k+1,p})$ est inversible,

$$X_{k+1} = (I_2 - h_p A(t_{k+1,p}))^{-1} X_k + h_p (I_2 - h_p A(t_{k+1,p}))^{-1} B(t_{k+1,p}). \quad (2.22)$$

Lemme 2.7.1. *Pour tout $t \in I$, on écrit*

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

On suppose qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\sup_{t \in I} \max(|a(t)|, |b(t)|, |c(t)|, |d(t)|) \leq C_0.$$

Alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$, pour tout $t \in I$, la matrice $I_2 - h_p A(t)$ est inversible.

L'hypothèse

$$\exists C_0 > 0, \quad \sup_{t \in I} \max(|a(t)|, |b(t)|, |c(t)|, |d(t)|) \leq C_0$$

est vérifiée dès que A est continue, puisque l'intervalle I est ici compact. Par conséquent, pour tout $p \geq p_0$, le schéma d'Euler implicite donné par l'équation de récurrence (2.7) est bien défini.

Démonstration. Pour tout $t \in I$, $p \in \mathbb{N}^*$, la matrice $I_2 - h_p A(t)$ s'écrit

$$I_2 - h_p A(t) = \begin{pmatrix} 1 - h_p a(t) & -h_p b(t) \\ -h_p c(t) & 1 - h_p d(t) \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \det(I_2 - h_p A(t)) &= (1 - h_p a(t))(1 - h_p d(t)) - h_p^2 b(t)c(t) \\ &= 1 - h_p(a(t) + d(t)) + h_p^2(a(t)d(t) - b(t)c(t)). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$|\det(I_2 - h_p A(t)) - 1| \leq 2h_p C_0 + 2h_p^2 C_0^2.$$

On rappelle que $h_p = (b - a)/p$, de sorte que le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro lorsque p tend vers l'infini. Soit $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq p_0 \Rightarrow 2h_p C_0 + 2h_p^2 C_0^2 \leq \frac{1}{2}.$$

On en déduit que si $p \geq p_0$, alors pour tout $t \in I$,

$$\frac{1}{2} \leq \det(I_2 - h_p A(t)) \leq \frac{3}{2}.$$

En particulier $\det(I_2 - h_p A(t)) \neq 0$ pour tout $t \in I$ et pour tout $p \geq p_0$, et la matrice $(I_2 - h_p A(t))$ est donc inversible. □

Remarque 2.7.2. *On peut aussi faire d'autres choix que (2.4) et (2.5). Par exemple, on peut aussi écrire*

$$X'(t_{k,p}) \simeq \frac{X(t_{k+1,p}) - X(t_{k-1,p})}{2h_p}.$$

Le lecteur pourra s'entraîner à écrire la relation de récurrence correspondante sur $(X_k)_{0 \leq k \leq p}$ et vérifier qu'il s'agit d'une suite récurrente d'ordre deux. On se concentre dans ce cours uniquement sur les schémas (2.6) et (2.7), mais il faut bien garder en tête qu'il en existe une multitude d'autres.

2.7.2 Notion de convergence d'un schéma numérique

Définition 2.7.3. On considère une équation différentielle du type

$$X'(t) = b(t, X(t)),$$

avec $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $b : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. On munit cette équation différentielle d'une donnée initiale $X(a) = X_{ini}$.

On considère un schéma numérique associé à cette équation différentielle ; ce schéma permet de construire, pour tout p suffisamment grand, une suite $(X_k)_{0 \leq k \leq p}$ définie par $X_0 = X_{ini}$ et par une relation de récurrence.

On dit que ce schéma numérique est **convergent** si pour tout $X_{ini} \in \mathbb{R}^m$, on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq k \leq p} \|X(t_{k,p}) - X_k\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq k \leq p} \|X(t_{k,p}) - X^{(p)}(t_{k,p})\| = 0.$$

On a montré précédemment que les schémas d'Euler étaient convergents dans le cas d'une équation linéaire homogène d'ordre un à coefficients constants. Cette preuve peut se généraliser au cas vectoriel, comme on va le voir. Supposons que

$$A(t) = A_0 \text{ et } B(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

1. Schéma d'Euler explicite : la relation de récurrence (2.21) devient

$$X_{k+1} = (I_2 + h_p A_0) X_k \quad \forall k \in \{0, \dots, p-1\}.$$

On en déduit que

$$X_k = (I_2 + h_p A_0)^k X_{ini}$$

pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$. On va utiliser le résultat suivant :

Lemme 2.7.4. Soit $R > 0$. Il existe une constante C_R telle que la propriété suivante est vérifiée :

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\max_{1 \leq i,j \leq 2} |a_{i,j}| \leq R,$$

et pour tout h dans un voisinage de zéro (dépendant de R), il existe une matrice $\tilde{A}(h) = (\tilde{a}(h)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$, telle que

$$\max_{1 \leq i,j \leq 2} |\tilde{a}(h)_{i,j}| \leq C_R h^2$$

et telle que

$$I_2 + hA = \exp(hA + \tilde{A}(h)).$$

De surcroît, les matrices A et $\tilde{A}(h)$ commutent pour tout h dans un voisinage de zéro. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $h > 0$,

$$(I_2 + hA)^k = \exp(khA + k\tilde{A}(h)).$$

Démonstration. ⁴ Si A est diagonalisable, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible tels que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

4. On peut aussi démontrer le lemme en considérant l'application matricielle définie pour h dans un voisinage de zéro par $M(h) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(hA)^n}{n}$. Pour h assez petit on a $\|hA\| < 1$ et donc $M(h)$ est bien définie. On calcule $\partial_h M(h) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} h^{n-1} A^n = A \sum_{k \geq 0} (-1)^k (hA)^k$. Puisque $\|hA\| < 1$ on déduit que $(I + hA) \partial_h M(h) = A = \partial_h (I + hA)$. Ceci implique, en multipliant par $e^{-M(h)}$, que $\partial_h ((I + hA) e^{-M(h)}) = 0$ donc on a $(I + hA) e^{-M(h)} = (I + 0 \cdot A) e^{-M(0)} = I$. On conclut donc que $I + hA = e^{M(h)} = e^{hA + \tilde{A}(h)}$, où $\tilde{A}(h) = \sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} \frac{(hA)^n}{n}$. Nous avons la majoration $\|\tilde{A}(h)\| \leq Ch^2$ et $\tilde{A}(h)$ commute avec A car les sommes partielles de la définition de $\tilde{A}(h)$ commutent avec A .

Pour $j \in \{1, 2\}$ on définit la fonction $\tilde{\lambda}_j(h)$ par la relation

$$1 + h\lambda_j = \exp(\ln(1 + h\lambda_j)) = \exp(h\lambda_j + \tilde{\lambda}_j(h)).$$

On a $\tilde{\lambda}_j(h) = O(h^2)$. On calcule ensuite

$$\begin{aligned} I_2 + hA &= P \begin{pmatrix} 1 + h\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 + h\lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \exp(h\lambda_1 + \tilde{\lambda}_1(h)) & 0 \\ 0 & \exp(h\lambda_2 + \tilde{\lambda}_2(h)) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \exp \left(P \begin{pmatrix} h\lambda_1 + \tilde{\lambda}_1(h) & 0 \\ 0 & h\lambda_2 + \tilde{\lambda}_2(h) \end{pmatrix} P^{-1} \right) = \exp(hA + \tilde{A}(h)), \end{aligned}$$

où

$$A\tilde{A}(h) = P \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1(h) & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2(h) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Les matrices A et $\tilde{A}(h)$ commutent :

$$\begin{aligned} A\tilde{A}(h) &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1(h) & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2(h) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1(h) & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2(h) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1(h) & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1(h) & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2(h) \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} = \tilde{A}(h)A. \end{aligned}$$

Si A n'est pas diagonalisable, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}^*, P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible tels que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On définit comme avant une fonction $\tilde{\lambda}(h)$ par la relation

$$1 + h\lambda = \exp(\ln(1 + h\lambda)) = \exp(h\lambda + \tilde{\lambda}(h)),$$

et une fonction $\tilde{\gamma}(h)$ par la relation, pour h assez petit,

$$(1 + h\lambda)(h\gamma + \tilde{\gamma}(h)) = h\gamma \iff \tilde{\gamma}(h) = -\frac{h^2\lambda\gamma}{1 + h\lambda}.$$

On a $\tilde{\lambda}(h) = O(h^2)$ et $\tilde{\gamma}(h) = O(h^2)$. On calcule ensuite

$$\begin{aligned} I_2 + hA &= P \begin{pmatrix} 1 + h\lambda & h\gamma \\ 0 & 1 + h\lambda \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 + h\lambda & (1 + h\lambda)(h\gamma + \tilde{\gamma}(h)) \\ 0 & 1 + h\lambda \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \exp(h\lambda + \tilde{\lambda}(h)) \begin{pmatrix} 1 & h\gamma + \tilde{\gamma}(h) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \exp \left(P \begin{pmatrix} h\lambda + \tilde{\lambda}(h) & h\gamma + \tilde{\gamma}(h) \\ 0 & h\lambda + \tilde{\lambda}(h) \end{pmatrix} P^{-1} \right) = \exp(hA + \tilde{A}(h)), \end{aligned}$$

où

$$\tilde{A}(h) = P \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}(h) & \tilde{\gamma}(h) \\ 0 & \tilde{\lambda}(h) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On montre que A et $\tilde{A}(h)$ commutent similairement au cas diagonalisable. \square

On déduit du Lemme 2.7.4 la convergence du schéma d'Euler explicite. En effet,

$$X_k = (I_2 + h_p A_0)^k X_{ini} = \exp(kh_p A_0 + k\tilde{A}_0(h_p)) X_{ini}.$$

D'autre part la solution exacte aux temps de discrétisation est

$$X(t_{k,p}) = \exp((t_{k,p} - a)A_0) X_{ini} = \exp(kh_p A_0) X_{ini}.$$

On a alors, comme A_0 et $\tilde{A}_0(h_p)$ commutent,

$$\begin{aligned} \|X_k - X(t_{k,p})\| &\leq \|\exp(k\tilde{A}_0(h_p)) - I_2\| \|\exp(kh_p A_0) X_{ini}\| \\ &\leq \|\exp(k\tilde{A}_0(h_p)) - I_2\| \|\exp(kh_p A_0)\| \|X_{ini}\|. \end{aligned}$$

On majore

$$\begin{aligned} \|\exp(k\tilde{A}_0(h_p)) - I_2\| &= \left\| \sum_{n \geq 1} \frac{(k\tilde{A}_0(h_p))^n}{n!} \right\| \leq kh_p^2 \left\| \sum_{n \geq 1} \frac{(\frac{1}{h_p^2} \tilde{A}_0(h_p))^n}{n!} \right\| \\ &\leq \frac{b-a}{p} (1 + \|\exp(\frac{1}{h_p^2} \tilde{A}_0(h_p))\|) \leq \frac{C_1}{p}, \end{aligned}$$

et

$$\|\exp(kh_p A_0)\| = \left\| \sum_{n \geq 0} \frac{(kh_p A_0)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{((b-a)\|A_0\|)^n}{n!} \leq C_2,$$

où les constantes ne dépendent ni de k ni de p . Il s'ensuit que

$$\sup_{0 \leq k \leq p} \|X_k - X(t_{k,p})\| \leq \frac{C}{p}.$$

Par conséquent, le schéma d'Euler explicite est convergent.

2. Schéma d'Euler implicite : le raisonnement est similaire. On prend p suffisamment grand pour que la matrice $I_2 - h_p A_0$ soit inversible. On a alors

$$X_k = (I_2 - h_p A_0)^{-k} X_{ini}$$

où $B^{-k} = (B^{-1})^k$ pour $B \in GL_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$.

En utilisant de nouveau le lemme 2.7.4, on a, pour tout h dans un voisinage de zéro,

$$I_2 - hA_0 = \exp(-hA_0 + \tilde{A}_0(-h)),$$

et donc

$$(I_2 - hA_0)^{-1} = \left(\exp(-hA_0 + \tilde{A}_0(-h)) \right)^{-1} = \exp(-(-hA_0 + \tilde{A}_0(-h))) = \exp(hA_0 - \tilde{A}_0(-h)).$$

La preuve de la convergence du schéma est ensuite identique à celle du schéma d'Euler explicite, en remplaçant $\tilde{A}_0(h)$ par $-\tilde{A}_0(-h)$.

On en déduit que le schéma d'Euler implicite est également convergent.

2.7.3 Perte de périodicité dans les schémas d'Euler

On se place dans le même cas qu'au paragraphe précédent, avec

$$A_0 = P \begin{pmatrix} i\mu & 0 \\ 0 & -i\mu \end{pmatrix} P^{-1}$$

pour $\mu \in \mathbb{R}^*$ et $P \in GL_2(\mathbb{C})$. On a vu que dans ce cas,

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \exp(i\mu(t-a)) & 0 \\ 0 & \exp(-i\mu(t-a)) \end{pmatrix} P^{-1} X_{ini}$$

Les trajectoires sont donc périodiques de période $2\pi/\mu$, de forme ellipsoïdale.

On peut maintenant voir ce qu'il en est pour les schémas d'Euler : prenons $b = a + \frac{2\pi}{\mu}$. A-t-on $X_p = X_{ini}$?

La réponse est non : en effet, pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, on a (dans le cas du schéma d'Euler explicite)

$$X_k = (I_2 + h_p A_0)^k X_{ini} = P \begin{pmatrix} (1 + ih_p \mu)^k & 0 \\ 0 & (1 - ih_p \mu)^k \end{pmatrix} P^{-1} X_{ini}.$$

Il s'agit donc de déterminer si on a

$$\begin{pmatrix} (1 + ih_p \mu)^p & 0 \\ 0 & (1 - ih_p \mu)^p \end{pmatrix} = I_2$$

donc si

$$(1 + i\mu)^p = 1.$$

Or

$$|(1 + ih_p \mu)^p| = |1 + ih_p \mu|^p = (1 + h_p^2 \mu^2)^{p/2} > 1.$$

Les trajectoires du schéma d'Euler explicite ne sont donc pas périodiques. Elles forment des spirales qui s'éloignent de l'origine.

On peut également s'en convaincre en prenant un exemple explicite de matrice A_0 , par exemple

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que les trajectoires $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ sont des cercles centrés en l'origine. Pour le schéma d'Euler, en posant $X_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$, on obtient, puisque $X_{k+1} = (I_2 + h_p A_0) X_k$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - h_p \mu y_k, \\ y_{k+1} &= y_k + h_p \mu x_k, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\|X_{k+1}\|^2 = x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = (1 + h_p^2 \mu^2)(x_k^2 + y_k^2) = (1 + h_p^2 \mu^2) \|X_k\|^2 :$$

la distance à l'origine augmente à chaque itération, on ne reste pas sur le cercle centré en zéro et passant par X_{ini} .

Pour le schéma d'Euler implicite, le phénomène est similaire mais inversé : la distance à l'origine diminue à chaque itération. En reprenant les calculs de la seconde méthode, on a par exemple

$$X_{k+1} = (I_2 - h_p A_0)^{-1} X_k = \frac{1}{1 + h_p^2 \mu^2} \begin{pmatrix} 1 & -h_p \mu \\ h_p \mu & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\|X_{k+1}\|^2 = \frac{1}{1 + h_p^2 \mu^2} \|X_k\|^2.$$

Chapitre 3

Théorie générale pour les équations différentielles

3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz : énoncé et conséquences

On commence par un théorème d'existence et d'unicité assez puissant pour les équations différentielles d'ordre un en dimension quelconque (on a vu dans le chapitre précédent que toutes les équations différentielles peuvent se ramener à ce cas). On va en énoncer ici une version simplifiée, dont la preuve est admise.

Pour préciser les idées, on définit tout d'abord ce qu'est la solution d'une équation différentielle.

Définition 3.1.1. • Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , U un ouvert de \mathbb{R}^m , et soit $t_0 \in I$, $X_0 \in U$. Soit $b : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$

On considère l'équation différentielle

$$\begin{aligned} X'(t) &= b(t, X(t)), \quad t \in I, \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Une solution de (3.1) est une fonction X définie sur un intervalle I_X contenant t_0 , à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$, dérivable sur I_X , et vérifiant les deux conditions de (3.1).

• Le système (3.1) est aussi appelé “problème de Cauchy” (équation différentielle ET donnée initiale). Résoudre le problème de Cauchy consiste à trouver l'ensemble des solutions de (3.1) ainsi que l'intervalle sur lequel elles sont définies.

Exemple 3.1.2. — Système de Lotka-Volterra : les équations de Lotka-Volterra s'écrivent

$$\begin{aligned} N'(t) &= aN(t) - bN(t)P(t), \\ P'(t) &= cN(t)P(t) - dP(t). \end{aligned}$$

Dans ce cas, $m = 2$, $X = \begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix}$, et

$$b : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cxy - dy \end{pmatrix}.$$

C'est un système autonome : le champ de vecteurs b ne dépend pas de t .

— *Pendule simple* : on rappelle que l'équation régissant l'évolution du pendule simple s'écrit

$$\theta''(t) + \omega_0^2 \sin \theta(t) = 0,$$

que l'on munit des conditions initiales

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = v_0.$$

On met ce système sous forme vectorielle en posant $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$. On vérifie alors que l'équation du pendule simple peut se mettre sous la forme (3.1) en posant

$$b : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \\ y \\ -\omega_0^2 \sin x \end{pmatrix},$$

et $X_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Il s'agit de nouveau d'un système autonome.

Remarque 3.1.3. Dans la définition ci-dessus, on ne suppose pas que t_0 appartient à l'intérieur de I_X (ni que l'intervalle I_X est ouvert) : ce peut être une extrémité de l'intervalle.

Théorème 3.1.4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz local - première version). Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , U un ouvert de \mathbb{R}^m , et soit $t_0 \in I$, $X_0 \in U$.

Soit $b : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction \mathcal{C}^1 (c'est-à-dire que les dérivées partielles de b par rapport à toutes les variables existent et sont continues.)

Alors il existe $\tau > 0$ tel que (3.1) admet une solution X de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

De plus, on a la propriété suivante : si Y est une autre solution de (3.1) définie sur un intervalle I_Y , X et Y coïncident sur $I_Y \cap [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

Remarque 3.1.5. Ce résultat assure que les courbes paramétrées définies à partir des solutions de certaines équations différentielles (système de Lotka-Volterra, pendule simple...) sont bien définies, au moins localement en temps (c'est-à-dire sur un petit intervalle autour de t_0). On verra plus tard des conditions pour que les solutions d'équations différentielles soient globales, c'est-à-dire définies pour tout temps.

Remarque 3.1.6. La condition $b \in \mathcal{C}^1$ peut être légèrement relaxée : il suffit que la fonction b soit lipschitzienne sur tout compact. Mais en général, on peut pas faire "mieux" (dans le sens : "on ne peut pas supposer moins") que le caractère Lipschitz, comme le montre l'exemple suivant.

On considère l'équation

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2\sqrt{x(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

On vérifie facilement que la fonction constante égale à zéro est solution de l'équation. On va montrer qu'il existe une infinité d'autres solutions : pour $T > 0$, on pose

$$x_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T, \\ (t - T)^2 & \text{si } t \geq T. \end{cases}$$

On vérifie facilement que x_T est également solution de l'équation différentielle (3.2) pour tout $T > 0$. Il n'y a donc pas unicité. Ce défaut d'unicité vient de ce que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de zéro.

Corollaire 3.1.7. *Soit X et Y deux solutions de (3.1) définies sur des intervalles I_X et I_Y respectivement. Alors X et Y coïncident sur $I_X \cap I_Y$.*

Démonstration. On note X_{CL} la solution de (3.1) donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz 3.1.4, définie sur un intervalle $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, avec $\tau > 0$. Alors d'après le théorème 3.1.4, la fonction X (resp. Y) coïncide avec X_{CL} sur $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \cap I_X$ (resp. $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \cap I_Y$). Par conséquent X et Y coïncident sur $I_X \cap I_Y \cap [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $t_1 \in I_X \cap I_Y$ tel que $X(t_1) \neq Y(t_1)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $t_1 > t_0$. En particulier $[t_0, t_1] \subset I_X \cap I_Y$. Aussi, cela implique que l'ensemble

$$A = \{t \in I_X \cap I_Y, t > t_0, X(t) \neq Y(t)\},$$

n'est pas vide, donc $t_+ = \inf A$ est un élément de \mathbb{R} . D'après ce qui précède, on obtient aussi $t_0 < t_0 + \tau \leq t_+ \leq t_1$. Pour t dans l'intervalle non-vide $[t_0, t_+]$ on a $X(t) = Y(t)$, donc en passant à la limite quand $t \rightarrow t_+$, on obtient $X(t_+) = Y(t_+)$. Ceci implique $t_+ < t_1$. On pose $X_+ = X(t_+)$, et on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz au point t_+ , avec la donnée initiale X_+ . Le résultat d'unicité assure que X et Y coïncident sur un petit intervalle $[t_+ - \tau_+, t_+ + \tau_+] \cap I_X \cap I_Y$ avec $\tau_+ > 0$. En prenant $r_+ = \min\{\frac{t_1 - t_+}{2}, \tau_+\}$ on a $t_+ < t_+ + r_+ < t_1$ et on en déduit que $X(t) = Y(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_+ + r_+]$. Par conséquent, par définition de l'inf,

$$t_+ \geq t_+ + r_+,$$

ce qui est en contradiction avec $t_+ < t_+ + r_+$. Donc $X(t) = Y(t)$ pour tout $t \in I_X \cap I_Y$. \square

On va à présent définir la notion de solution maximale d'une équation différentielle. Pour cela, on introduit une relation d'ordre sur les solutions de l'équation différentielle (3.1) :

Définition 3.1.8. *Soit X, Y deux solutions de (3.1), définies respectivement sur des intervalles I et J contenant t_0 . On dit que $X \prec Y$ si et seulement si $I \subset J$ et $X(t) = Y(t)$ pour tout $t \in I$.*

Soit X_{max} une solution de (3.1). On dit que X_{max} est une solution maximale de (3.1) si pour toute solution X de (3.1),

$$X_{max} \prec X \Rightarrow X = X_{max}$$

Remarque 3.1.9. *On vérifie facilement que \prec est une relation d'ordre (pas total) sur les solutions de (3.1), et que les solutions maximales sont précisément les éléments maximaux pour cette relation d'ordre.*

Proposition 3.1.10 (Théorème de Cauchy-Lipschitz local - deuxième version). *Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , U un ouvert de \mathbb{R}^m , et soit $t_0 \in I$, $X_0 \in U$.*

Soit $b : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction \mathcal{C}^1 .

Alors il existe une solution maximale de l'équation (3.1), définie sur un intervalle ouvert $I_{max} \subset I$. Cette solution maximale est l'élément maximum (plus grand élément) pour la relation d'ordre \prec . Par conséquent, elle est unique.

Démonstration. On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (3.1). D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'ensemble \mathcal{S} est non vide. On définit alors l'ensemble

$$I_{max} = \bigcup_{X \in \mathcal{S}} I_X,$$

où I_X est l'intervalle de définition d'une solution X de (3.1). On va montrer que I_{max} est un intervalle, et que l'on peut définir une solution X_{max} de (3.1) sur I_{max} . Il restera alors à démontrer que cette solution est une solution maximale.

Première étape : I_{max} est un intervalle.

Il suffit de montrer que pour tout $t_1, t_2 \in I_{max}$, on a $[t_1, t_2] \subset I_{max}$ ¹. Soit t_1, t_2 quelconques dans I_{max} . Il existe X_1, X_2 solutions de (3.1) tels que $t_1 \in I_{X_1}, t_2 \in I_{X_2}$. Or I_{X_1}, I_{X_2} sont des intervalles, et $t_0 \in I_X$ pour tout $X \in \mathcal{S}$. On en déduit que

$$[t_0, t_1] \subset I_{X_1}, \quad [t_0, t_2] \subset I_{X_2},$$

et par conséquent

$$[t_0, t_1] \cup [t_0, t_2] \subset I_{X_1} \cup I_{X_2} \subset I_{max}.$$

Or $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_1] \cup [t_0, t_2]$. (Cette propriété se montre facilement en distinguant le cas où $t_0 \in [t_1, t_2]$ et le cas où $t_0 \notin [t_1, t_2]$.) Donc $[t_1, t_2] \subset I_{max}$.

Deuxième étape : Définition de X_{max} .

Soit $X, Y \in \mathcal{S}$. On a alors

$$X(t) = Y(t) \quad \forall t \in I_X \cap I_Y,$$

d'après le corollaire 3.1.7. On définit donc X_{max} de la façon suivante : soit $t \in I_{max}$ quelconque. Soit X une solution de (3.1) telle que $t \in I_X$. On pose

$$X_{max}(t) = X(t).$$

D'après la remarque ci-dessus, la définition de X_{max} ne dépend pas du choix de la solution X telle que $t \in I_X$. X_{max} est donc définie de façon univoque.

Troisième étape : I_{max} est un intervalle ouvert et X_{max} est solution de (3.1).

On va montrer que pour tout $\tilde{t} \in I_{max}$ quelconque il existe un voisinage de \tilde{t} inclut dans I_{max} sur lequel X_{max} vérifie l'équation. Comme de plus on a $X_{max}(t_0) = x_0$ par définition de X_{max} (toujours en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz), on en déduit aussi que X_{max} est bien solution de (3.1).

Si $\tilde{t} = t_0$ on a la propriété ci-dessus grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz.

Si $\tilde{t} \neq t_0$ on note $X_{\tilde{t}} = X_{max}(\tilde{t})$. Par définition de I_{max}, X_{max} , il existe une solution X de (3.1) telle que $\tilde{t} \in I_X$ et $X = X_{max}$ sur I_X . En particulier $[t_0, \tilde{t}] \subset I_X$ et $X(\tilde{t}) = X_{\tilde{t}}$.

D'autre part, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (3.1.4), il existe $\tilde{\tau} > 0$ tel que l'équation

$$X'(t) = b(t, X(t)), \quad X(\tilde{t}) = X_{\tilde{t}}$$

possède une unique solution \tilde{X}_{CL} sur $[\tilde{t} - \tilde{\tau}, \tilde{t} + \tilde{\tau}]$. Ainsi, on a nécessairement $X = \tilde{X}_{CL}$ sur $I_X \cap [\tilde{t} - \tilde{\tau}, \tilde{t} + \tilde{\tau}]$, et en particulier sur $[t_0, \tilde{t}] \cap [\tilde{t} - \tilde{\tau}, \tilde{t} + \tilde{\tau}]$. On définit à présent, sur $[t_0, \tilde{t}] \cup [\tilde{t} - \tilde{\tau}, \tilde{t} + \tilde{\tau}]$,

$$\tilde{X}(t) = \begin{cases} X(t) & \text{si } t \in [t_0, \tilde{t}], \\ \tilde{X}_{CL}(t) & \text{si } t \in [\tilde{t} - \tilde{\tau}, \tilde{t} + \tilde{\tau}]. \end{cases}$$

On vérifie aisément, à l'aide de ce qui précède, que la fonction \tilde{X} est bien définie et qu'elle est solution de (3.1). Donc $\tilde{X} \in \mathcal{S}$. En particulier,

$$[\tilde{t} - \tilde{\tau}, \tilde{t} + \tilde{\tau}] \subset [t_0, \tilde{t}] \cup [\tilde{t} - \tilde{\tau}, \tilde{t} + \tilde{\tau}] \subset I_{max}. \quad (3.3)$$

1. Les intervalles sont ici définis au sens large : si $a \geq b$, l'intervalle $[a, b]$ est égal à l'intervalle $[b, a]$

Aussi, on obtient $X_{max}(t) = \tilde{X}(t)$ pour tout $t \in [\tilde{t} - \tilde{\tau}, \tilde{t} + \tilde{\tau}]$, et donc X_{max} est solution de l'équation

$$X'(t) = b(t, X(t))$$

sur l'intervalle $[\tilde{t} - \tilde{\tau}, \tilde{t} + \tilde{\tau}]$. On a donc bien obtenu l'existence d'un voisinage de \tilde{t} inclut dans I_{max} sur lequel X_{max} vérifie l'équation.

Quatrième étape : X_{max} est une solution maximale.

On observe que si $X \in \mathcal{S}$, alors $I_X \subset I_{max}$ par définition de I_{max} , et $X = X_{max}$ sur I_X par définition de X_{max} . Par conséquent, $X \prec X_{max}$ pour tout $X \in \mathcal{S}$. Donc X_{max} est le plus grand élément de \mathcal{S} pour la relation d'ordre \mathcal{S} . Si $Y \in \mathcal{S}$ est aussi une solution maximale, alors puisque c'est une solution on a $Y \prec X_{max}$, et puisqu'elle est maximale, par définition on obtient $Y = X_{max}$. Donc X_{max} est l'unique solution maximale. \square

On s'intéresse à présent à des solutions maximales uniquement, et à leur intervalle d'existence. On va montrer qu'il y a deux cas de figure possible : soit les solutions sont *globales*, c'est-à-dire qu'elles sont définies sur \mathbb{R} tout entier, soit elles explosent quand elles approchent du bord de leur intervalle de définition.

On commence pour cela par un lemme très utile :

Lemme 3.1.11. *On suppose que les hypothèses du théorème 3.1.4 sont vérifiées avec $I = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^m$, et on considère une solution maximale X_{max} de (3.1), définie sur un intervalle I_{max} . On suppose que X_{max} est bornée sur un voisinage à gauche de $\sup I_{max}$. Alors*

$$\sup I_{max} = +\infty.$$

Démonstration. Soit V un voisinage de $\sup I_{max}$ sur lequel X_{max} est bornée, et soit $R = \sup_{t \in V} \|X_{max}(t)\|$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sup I_{max} < \infty$ et on note $t_{max} = \sup I_{max}$. Il existe donc un intervalle compact \bar{V} contenant V .

On pose alors

$$C_0 = \sup_{t \in \bar{V}, \|Z\| \leq R} \|b(t, Z)\|.$$

Comme b est de classe \mathcal{C}^1 et \bar{V} est compact, il s'ensuit que C_0 est fini. Puisque X_{max} est solution de (3.1), on en déduit que

$$\|X'_{max}(t)\| \leq C_0 \quad \forall t \in V.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $t, t' \in V$, on a

$$\|X_{max}(t) - X_{max}(t')\| \leq C_0 |t - t'|.$$

On en déduit que si $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite quelconque de I_{max} tendant vers t_{max} , alors la suite $(X_{max}(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R}^m , donc elle est convergente. De surcroît cette limite ne dépend pas de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie : en effet, si $(\tilde{t}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite de I_{max} tendant vers t_{max} , on pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_n = \begin{cases} t_k & \text{si } n = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ \tilde{t}_k & \text{si } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On voit alors que $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également une suite de I_{max} tendant vers t_{max} . Par conséquent $(X(\tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente, et toutes les suites extraites de $(X(\tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{max}(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} X_{max}(\tilde{t}_k).$$

Soit $X_{t_{max}} \in \mathbb{R}^m$ la limite commune de toutes les suites $(X_{max}(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses précédentes. On voit aisément que

$$\lim_{t \rightarrow t_{max}^-} X_{max}(t) = X_{t_{max}}.$$

On considère alors le problème de Cauchy en t_{max} , avec $X_{t_{max}}$ comme condition initiale. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe $\tau > 0$ et une solution X_{CL} de l'équation différentielle sur un voisinage ouvert de $[t_{max} - \tau, t_{max} + \tau]$. Par unicité cette solution coïncide avec X_{max} sur $[t_{max} - \tau, t_{max}[\cap I_{max}$. On peut donc prolonger X_{max} au delà de t_{max} par

$$\tilde{X}_{max}(t) = \begin{cases} X_{max}(t) & \text{si } t \in I_{max}, \\ X_{CL}(t) & \text{si } t \in [t_{max} - \tau, t_{max} + \tau]. \end{cases}$$

Cette fonction est une solution qui contredit le fait que X_{max} est une solution maximale. \square

On déduit de ce lemme le résultat suivant :

Proposition 3.1.12 (Dichotomie existence globale/explosion). *On suppose que les hypothèses du théorème 3.1.4 sont vérifiées avec $I = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^m$, et on considère une solution maximale X_{max} de (3.1), définie sur un intervalle I_{max} .*

Alors l'une et l'autre des deux propriétés suivantes est vérifiée :

- (i) soit $\sup I_{max} = +\infty$;
- (ii) soit $\sup I_{max} < \infty$ et il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I_{max} telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \sup I_{max}$ et telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_{max}(t_n)\| = \infty.$$

Démonstration. Si X_{max} est bornée au voisinage de $\sup I_{max}$ alors le lemme précédent nous assure que $\sup I_{max} = +\infty$, donc on est dans le cas (i).

Sinon, nous sommes dans la situation où X_{max} n'est pas bornée au voisinage de $\sup I_{max}$. On distingue deux sous-cas. Si $\sup I_{max} = +\infty$ alors on est à nouveau dans le cas (i). Sinon $\sup I_{max} < +\infty$. Pour finir d'analyser ce dernier sous-cas, on remarque que le fait que X_{max} n'est pas bornée au voisinage de $\sup I_{max}$ s'écrit

$$\neg (\exists M > 0, \exists V \text{ voisinage de } \sup I_{max}, \forall t \in V \cap I_{max}, \|X(t)\| < M)$$

$$\iff \forall M > 0, \forall V \text{ voisinage de } \sup I_{max}, \exists t \in V \cap I_{max}, \|X(t)\| \geq M.$$

En prenant $M = n$ et $V = [\sup I_{max} - \frac{1}{n}, \sup I_{max} + \frac{1}{n}]$ on obtient une suite $t_n \in [\sup I_{max} - \frac{1}{n}, \sup I_{max} + \frac{1}{n}] \cap I_{max}$ telle que $\|X(t_n)\| \geq n$. En particulier, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de I_{max} telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \sup I_{max}$ et telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_{max}(t_n)\| = \infty$. Nous sommes donc dans le cas (ii) de l'énoncé. \square

Exemple 3.1.13. *On considère l'équation différentielle*

$$x'(t) = x^2(t), \quad x(0) = 1.$$

C'est un problème de Cauchy de la forme (3.1) avec $m = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ et autonome avec $b(y) = y^2$. Comme b est une fonction C^1 sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et obtenir une solution maximale x_{max} du problème de Cauchy ci-dessus, définie sur un intervalle ouvert I_{max} .

On remarque que la fonction constante égale à zéro sur \mathbb{R} est solution de $x'(t) = x^2(t)$. Par conséquent, la solution maximale x_{max} ne s'annule pas sur son intervalle de définition

I_{max} . Effectivement, s'il existait $t_1 \in I_{max}$ tel que $x_{max}(t_1) = 0$ alors d'après le corollaire (3.1.7) appliqué au problème de Cauchy avec donnée initiale égale à 0 en t_1 on obtiendrait que x_{max} coïncide avec la fonction nulle sur I_{max} , donc en particulier en t_0 , ce qui n'est pas le cas puisque $x_{max}(0) = 1$.

Pour tout $t \in I_{max}$, on a donc

$$\frac{x'}{x^2}(t) = 1,$$

et en intégrant entre 0 et t

$$1 - \frac{1}{x(t)} = t \quad \forall t \in I_{max},$$

ce qui nous donne l'information $1 \notin I_{max}$ et

$$x(t) = \frac{1}{1-t} \quad \forall t \in I_{max}.$$

Comme I_{max} est un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant 0 mais pas 1, et comme la fonction $\frac{1}{1-t}$ est bornée au voisinage de tout point de $]-\infty, 1[$ on conclut par la proposition précédente que $\inf I_{max} = -\infty$ et que $\sup I_{max} = 1$, donc

$$I_{max} =]-\infty, 1[.$$

3.2 Quelques résultats plus avancés

Dans le cas des équations autonomes, le théorème de Cauchy-Lipschitz a plusieurs conséquences frappantes. Un premier exemple est une propriété de périodicité en temps, qui sera utilisée plus tard dans les exemples du pendule simple et du système de Lotka-Volterra.

Proposition 3.2.1. Soit $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathbb{R}^m$. On considère l'équation différentielle

$$\begin{aligned} X'(t) &= b(X(t)), \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Soit X la solution maximale de (3.4), et soit I_{max} son intervalle (ouvert) de définition. On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que $t_0 + T \in I_{max}$ et tel que

$$X(t_0 + T) = X_0.$$

Alors $I_{max} = \mathbb{R}$ et X est périodique de période $|T|$.

Démonstration. Notons $I_{max} =]a, b[$. On définit

$$\tilde{X}(t) = X(t + T), \quad \forall t \in]a - T, b - T[.$$

Alors \tilde{X} est une fonction \mathcal{C}^1 , $\tilde{X}(t_0) = X(t_0 + T) = X_0$, et

$$\tilde{X}'(t) = X'(t + T) = b(X(t + T)) = b(\tilde{X}(t)).$$

Donc \tilde{X} est solution de (3.4). Comme X est la solution maximale, on en déduit que

$$\begin{aligned} &]a - T, b - T[\subset]a, b[, \\ \tilde{X}(t) &= X(t) \quad \forall t \in]a - T, b - T[. \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, à ce stade, supposons $T > 0$ (le raisonnement est strictement analogue si $T < 0$). D'après la première propriété nécessairement $\inf I_{max} = -\infty$ et I est de la forme $] -\infty, b[$. On déduit de la deuxième propriété que

$$X(t) = X(t + T) \quad \forall t \in] -\infty, b - T[,$$

ce qui s'écrit encore

$$X(t - T) = X(t) \quad \forall t \in] -\infty, b[.$$

En vertu du lemme 3.1.11, on voit que nécessairement $b = +\infty$: en effet, si on a $b < +\infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow b^-} X(t) = X(b - T) \in \mathbb{R}^m,$$

donc X reste borné dans un voisinage à gauche de b : donc $b = +\infty$: absurde.

Donc $I_{max} = \mathbb{R}$ et X est T -périodique.

□

Pour des solutions à valeurs réelles, l'unicité des solutions a une autre conséquence remarquable : le non-croisement de solutions, ou encore le fait que les solutions sont ordonnées.

Proposition 3.2.2 (Non-croisement des solutions). *Soit $b : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , $t_0 \in I$, et $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$.*

On considère les solutions maximales X_0, X_1 de l'équation différentielle

$$X'(t) = b(t, X(t)),$$

relatives aux conditions initiales $X_0(t_0) = x_0$, $X_1(t_0) = x_1$ respectivement. On note I_0, I_1 les intervalles de définition de X_0, X_1 .

On suppose que $x_0 < x_1$. Alors

$$X_0(t) < X_1(t) \quad \forall t \in I_0 \cap I_1.$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\tau \in I_1 \cap I_0$ tel que

$$X_0(\tau) \geq X_1(\tau).$$

De deux choses l'une : soit $X_0(\tau) = X_1(\tau)$, soit $X_0(\tau) > X_1(\tau)$, et dans ce cas il existe $\tau' \in]t_0, \tau[$ tel que $X_0(\tau') = X_1(\tau')$, grâce au théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $X_0(t) - X_1(t)$. Dans tous les cas, on obtient l'existence de $\tau_0 \in I_0 \cap I_1$ tel que $X_0(\tau_0) = X_1(\tau_0) =: x_2$.

On note X_{max} la solution maximale de la même équation différentielle avec donnée initiale $X_{max}(\tau_0) = x_2$, et on note également I_{max} son intervalle de définition. Comme X_{max} est une solution maximale, nécessairement

$$I_0 \subset I_{max}, \quad I_1 \subset I_{max}, \\ X_0(t) = X_{max}(t) \quad \forall t \in I_0, \quad X_1(t) = X_{max}(t) \quad \forall t \in I_1.$$

Donc

$$X_0(t) = X_1(t) = X_{max}(t) \quad \forall t \in I_0 \cap I_1.$$

Or par définition, $t_0 \in I_1 \cap I_0$. Donc $x_0 = x_1$: absurde.

□

On va à présent donner quelques conditions pour que les solutions de l'équation (3.1) soient globales, c'est-à-dire définies sur \mathbb{R} . Pour cela, il convient de considérer des champs de vecteurs b tels que b est défini sur $\mathbb{R} \times U$, avec U ouvert de \mathbb{R}^m (autrement l'équation n'a pas de sens!). Remarquons que l'on sait déjà que si une solution est bornée, alors elle est globale (cf. Lemme 3.1.11). Ce lemme se généralise de la façon suivante :

Lemme 3.2.3. *Soit $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , $t_0 \in \mathbb{R}$, et $X_0 \in \mathbb{R}^m$. On considère la solution maximale X_{max} de l'équation (3.1), définie sur un intervalle I_{max} .*

On suppose qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, continue, telle que

$$\|X(t)\| \leq f(t) \quad \forall t \in I_{max}.$$

Alors $I_{max} = \mathbb{R}$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sup I_{max} \in \mathbb{R}$. On pose

$$K = [t_0, \sup I_{max}].$$

K est un intervalle compact et un voisinage de $\sup I_{max}$. Comme f est continue sur \mathbb{R} , f est bornée sur K .

En utilisant l'hypothèse du lemme, on en déduit que X est bornée sur K . D'après le lemme 3.1.11, $\sup I_{max} = +\infty$: absurde.

De même, on montre que $\inf I_{max} = -\infty$. □

On va ensuite utiliser des propriétés structurelles de l'équation (ou plus spécifiquement, du champ de vecteurs b) qui assurent que l'on a une solution globale. Pour cela on utilise le résultat suivant :

Lemme 3.2.4 (Lemme de Gronwall - forme différentielle). *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions telles que φ est de classe \mathcal{C}^1 et ψ est continue. On suppose qu'il existe une constante C telle que*

$$\varphi'(t) \leq \psi(t)(C + \varphi(t)) \quad \forall t \in I.$$

Alors pour tout $t \geq t'$ dans I , on a

$$\varphi(t) \leq \varphi(t') \exp \left(\int_{t'}^t \psi(s) ds \right) + C \left(\exp \left(\int_{t'}^t \psi(s) ds \right) - 1 \right).$$

Démonstration. On remarque que pour tout $t \in I$, on a

$$\varphi'(t) - \psi(t)\varphi(t) \leq C\psi(t).$$

On multiplie cette inégalité par $\exp \left(- \int_{t'}^t \psi(s) ds \right)$ (on remarque que cette quantité est toujours positive). On obtient alors

$$\frac{d}{dt} \left(\varphi(t) \exp \left(- \int_{t'}^t \psi(s) ds \right) \right) \leq C \frac{d}{dt} \left(- \exp \left(- \int_{t'}^t \psi(s) ds \right) \right) \quad \forall t \in I. \quad (3.5)$$

On intègre cette inégalité entre t' et t :

$$\varphi(t) \exp \left(- \int_{t'}^t \psi(s) ds \right) - \varphi(t') \leq C \left(- \exp \left(- \int_{t'}^t \psi(s) ds \right) + 1 \right).$$

En multipliant de nouveau par $\exp \left(\int_{t'}^t \psi(s) ds \right)$, on obtient l'estimation annoncée.² □

2. On peut aussi remarquer que la fonction $x(t) = \varphi(t') \exp \left(\int_{t'}^t \psi(s) ds \right) + C \left(\exp \left(\int_{t'}^t \psi(s) ds \right) - 1 \right)$ vérifie $x'(t) = \psi(t)(C + x(t))$ avec $x(t') = \varphi(t')$. Comme $(\varphi - x)' \leq \psi(\varphi - x)$ on a que la fonction $(\varphi(t) - x(t)) \exp^{-\int_{t'}^t \psi(s) ds}$ est décroissante et vaut 0 en t' , donc on conclut que $\varphi(t) \leq x(t)$ pour tout $t \geq t'$.

Corollaire 3.2.5. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions telles que φ est de classe \mathcal{C}^1 et ψ est continue. On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$|\varphi'(t)| \leq \psi(t)(C + \varphi(t)) \quad \forall t \in I.$$

Alors pour tout t, t' dans I , on a

$$\varphi(t) \leq \varphi(t') \exp \left(\int_{\min\{t, t'\}}^{\max\{t, t'\}} \psi(s) ds \right) + C \left(\exp \left(\int_{\min\{t, t'\}}^{\max\{t, t'\}} \psi(s) ds \right) - 1 \right).$$

Démonstration. Pour $t \geq t'$ l'inégalité voulue est exactement celle de Gronwall. Pour $t \leq t'$ on applique aussi Gronwall aux fonctions $-\varphi, -\psi$ avec la constante $-C$ car on a

$$-\varphi(t) \leq \psi(t)(C + \varphi(t)) = -\psi(t)(-C - \varphi(t)) \quad \forall t \in I.$$

On obtient ainsi, pour $t' \geq t$

$$-\varphi(t') \leq -\varphi(t) \exp \left(\int_t^{t'} (-\psi(s)) ds \right) - C \left(\exp \left(\int_t^{t'} (-\psi(s)) ds \right) - 1 \right),$$

ce qui nous donne, en multipliant par $\exp \left(\int_t^{t'} \psi(s) ds \right)$, l'inégalité de l'énoncé. □

On arrive finalement au résultat suivant :

Proposition 3.2.6 (Théorème de Cauchy-Lipschitz global). Soit $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose qu'il existe une fonction continue $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\|b(t, X)\| \leq \psi(t)(1 + \|X\|) \quad \forall X \in \mathbb{R}^m.$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}, X_0 \in \mathbb{R}^m$, et soit X_{max} la solution maximale de l'équation (3.1), définie sur un intervalle I_{max} . Alors $I_{max} = \mathbb{R}$.

Démonstration. Quitte à modifier la fonction ψ en la multipliant par une constante, on peut toujours supposer que $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. On pose alors

$$\varphi(t) = \|X_{max}(t)\|^2.$$

La fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur I_{max} , et pour tout $t \in I_{max}$, on a, en utilisant l'équation puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\varphi'(t) = 2X'_{max}(t) \cdot X_{max}(t) = 2b(t, X_{max}(t)) \cdot X_{max}(t) \quad (3.6)$$

$$|\varphi'(t)| \leq 2\psi(t)(1 + \|X_{max}(t)\|)\|X_{max}(t)\|. \quad (3.7)$$

En utilisant l'inégalité

$$a \leq \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

on obtient finalement, pour tout $t \in I_{max}$,

$$\varphi'(t) \leq 2\psi(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varphi(t) \right) = 3\psi(t) \left(\frac{1}{3} + \varphi(t) \right).$$

En utilisant le Corollaire du Lemme de Gronwall, on déduit

$$\|X(t)\| = \sqrt{\varphi(t)} \leq f(t) \quad \forall t \in I_{max},$$

avec

$$f(t) = \left(\varphi(t_0) \exp \left(\int_{\min\{t_0, t\}}^{\max\{t_0, t\}} 3\psi(s) ds \right) + \frac{1}{3} \left(\exp \left(\int_{\min\{t_0, t\}}^{\max\{t_0, t\}} 3\psi(s) ds \right) - 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme f est continue sur \mathbb{R} , en utilisant le Lemme 3.2.3, on en déduit que $I_{max} = \mathbb{R}$. □

3.3 Recollements

Toutes les équations différentielles étudiées jusqu'ici étaient de la forme

$$X'(t) = b(t, X(t)).$$

C'est le cadre pour lequel on dispose de théorèmes d'existence et d'unicité généraux.

Néanmoins, il se peut qu'on rencontre des équations différentielles qui ne puissent être mises sous cette forme de façon immédiate. L'exemple le plus simple est celui d'une équation différentielle de la forme

$$f(t)X'(t) = g(t, X(t)),$$

où la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 , et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est aussi de classe \mathcal{C}^1 , mais f peut s'annuler sur \mathbb{R} . Dans ce cas il n'y a *pas de théorie générale* assurant l'existence ou l'unicité de solutions. La stratégie est alors la suivante :

- On identifie les points d'annulation de f , et, par suite, les intervalles sur lesquels f ne s'annule pas ;
- Sur chacun des intervalles sur lequel f ne s'annule pas, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. On cherche alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur cet intervalle (pour n'importe quelle valeur de la donnée initiale). Attention, pour pouvoir appliquer le point suivant, il faut que ces solutions soient définies (et bornées) dans un voisinage du point auquel on souhaite raccorder ;
- Il faut ensuite raccorder, ou recoller : par exemple, si f s'annule en $t_0 \in \mathbb{R}$, et que l'on a trouvé des solutions sur $] - \infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, il faut construire une fonction continue (et même \mathcal{C}^1 , si possible) X telle que

$$X(t) = \begin{cases} X_-(t) & \text{si } t < t_0, \\ X_+(t) & \text{si } t > t_0, \end{cases}$$

où X_- et X_+ sont des solutions sur $] - \infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$ respectivement.

Suivant l'allure des fonctions X_- et X_+ , parfois il n'y aura aucune solution continue de l'équation, parfois il y en aura une unique, et parfois une infinité : tous les cas de figure sont possibles. Il convient également de remarquer que les problèmes de recollement ne sont pas associés à une condition initiale en général : en quelque sorte, le fait de devoir recoller en un point joue le rôle de condition initiale. On donne ci-dessous quelques exemples.

Exemple 1

On considère l'équation

$$(1 - t^2)u'(t) - 2tu(t) = 1.$$

La fonction $t \mapsto 1 - t^2$ s'annule en -1 et en 1 . On résout donc l'équation sur les intervalles $I_1 =] - \infty, -1[$, $I_2 =] - 1, 1[$, $I_3 =]1, +\infty[$.

Sur chacun des intervalles I_j , $j = \{1, 2, 3\}$, on a

$$u'(t) - \frac{2t}{1 - t^2}u(t) = \frac{1}{1 - t^2}.$$

Les solutions générales de l'équation homogène associée sont de la forme

$$\bar{u}(t) = C \exp \left(\int^t \frac{2s}{1 - s^2} ds \right) = \frac{C}{|1 - t^2|}.$$

Pour trouver la solution générale de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante. On cherche des solutions sous la forme

$$u(t) = \frac{C(t)}{|1 - t^2|}.$$

Il vient alors

$$\frac{C'(t)}{|1 - t^2|} = \frac{1}{1 - t^2},$$

et donc $C(t) = t \operatorname{sgn}(1 - t^2) + C_j$.

Bilan : sur chacun des intervalles I_j , la solution est de la forme

$$u_j(t) = \frac{\operatorname{sgn}(1 - t^2)t + C_j}{1 - t^2} = \frac{\operatorname{sgn}(1 - t^2)t + C_j}{(1 - t)(1 + t)}.$$

On cherche maintenant à raccorder aux points -1 et 1 . Pour cela, il faut que les fonctions u_1 et u_2 admettent une limite en -1 , et que u_2 et u_3 admettent une limite en 1 . Or :

- u_1 admet une limite finie en -1^- si et seulement si $C_1 = 1$;
- u_2 admet une limite finie en -1^+ si et seulement si $C_2 = 1$;
- u_2 admet une limite finie en 1^- si et seulement si $C_2 = -1$;
- u_3 admet une limite finie en 1^+ si et seulement si $C_3 = -1$.

On voit donc que u_2 ne peut pas avoir simultanément des limites finies en -1^+ et en 1^- . Le problème n'a donc pas de solution. **On ne peut pas recoller.**

Exemple 2

On considère une variante de l'équation "explosive" ,

$$tu'(t) = u(t)^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comme la fonction $t \mapsto t$ s'annule en zéro uniquement, on résout cette équation sur \mathbb{R}_\pm^* .

Tout d'abord, sur chacun de ces intervalles, on remarque que la fonction nulle est solution. On cherche à présent les solutions qui ne sont pas identiquement nulles. Soit u_\pm une solution de l'équation

$$u'(t) = \frac{1}{t}u(t)^2$$

sur \mathbb{R}_\pm^* , définie sur un intervalle $I_\pm \subset \mathbb{R}_\pm^*$, et soit $t_\pm \in I_\pm$ tel que $u(t_\pm) \neq 0$. On pose $a_\pm = u_\pm(t_\pm)$. D'après la Proposition 3.2.2, u_\pm ne s'annule pas et garde un signe constant sur I_\pm . On a donc

$$\frac{u'_\pm(t)}{u_\pm(t)^2} = \frac{1}{t} \quad \forall t \in I_\pm.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{a_\pm} - \frac{1}{u_\pm(t)} = \ln \left| \frac{t}{t_\pm} \right|,$$

et donc

$$u_\pm(t) = \frac{1}{\frac{1}{a_\pm} - \ln \left| \frac{t}{t_\pm} \right|}.$$

La fonction u_\pm est donc définie tant que la quantité

$$\frac{1}{a_\pm} - \ln \left| \frac{t}{t_\pm} \right|$$

reste non nulle et du même signe que a_{\pm} , autrement dit tant que

$$a_{\pm} \left(\frac{1}{a_{\pm}} - \ln \left| \frac{t}{t_{\pm}} \right| \right) = 1 - a_{\pm} \ln \left| \frac{t}{t_{\pm}} \right| > 0.$$

Par conséquent, si on veut que u_{\pm} soit définie au voisinage de zéro, il faut que $a_{\pm} > 0$ nécessairement. Dans ce cas l'intervalle de définition de u_{\pm} est

$$I_+ =]0, t_+ \exp \left(\frac{1}{a_+} \right) [, \quad I_- =]t_- \exp \left(\frac{1}{a_-}, 0 \right) [.$$

On vérifie de surcroît que les fonctions u_{\pm} ainsi définies ont toutes pour limite zéro quand $t \rightarrow 0^{\pm}$. On peut donc raccorder par continuité quelles que soient les valeurs de t_{\pm}, a_{\pm} . Autrement dit, la fonction u définie par

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{a_+} - \ln \left(\frac{t}{t_+} \right)} & \text{si } t > 0, \\ \frac{1}{\frac{1}{a_-} - \ln \left(\frac{t}{t_-} \right)} & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

avec $a_+, a_-, t_+ > 0, t_- < 0$ quelconques, se prolonge par continuité en zéro en posant $u(0) = 0$, et est solution de l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

Néanmoins le raccord ne sera jamais de classe \mathcal{C}^1 : en effet la fonction u_{\pm} a pour dérivée

$$u'_{\pm}(t) = \frac{1}{t \left(\frac{1}{a_{\pm}} - \ln \left| \frac{t}{t_{\pm}} \right| \right)^2} \quad \forall t \in I_{\pm},$$

qui a pour limite $\pm\infty$ quand $t \rightarrow 0^{\pm}$. Le raccord n'est donc pas \mathcal{C}^1 (on peut montrer qu'il n'est pas non plus dérivable en zéro).

Exemple 3

On considère l'équation

$$|t|u'(t) - u(t) = t^2.$$

Comme pour les exemples précédents, on commence par résoudre cette équation sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* .

Sur $I = \mathbb{R}_-^*$ ou \mathbb{R}_+^* , on a

$$u'(t) - \frac{1}{|t|}u(t) = |t|.$$

La solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto C_+ t$ sur \mathbb{R}_+^* , et $t \mapsto \frac{C_-}{t}$ sur \mathbb{R}_-^* . On applique ensuite la méthode de variation de la constante : on cherche u_+, u_- sous la forme

$$u_+(t) = C_+(t)t, \quad u_-(t) = \frac{C_-(t)}{t}.$$

On obtient

$$C'_+(t) = 1, \quad C'_-(t) = -t^2,$$

d'où

$$C_+(t) = t + c_+, \quad C_-(t) = -\frac{t^3}{3} + c_-,$$

avec $c_+, c_- \in \mathbb{R}$. Finalement, les solutions sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* sont de la forme

$$\begin{aligned} u_-(t) &= -\frac{t^2}{3} + \frac{c_-}{t}, & t < 0, \\ u_+(t) &= t^2 + c_+t, & t > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, u_- et u_+ ont des limites finies en zéro si et seulement si $c_- = 0$. Dans ce cas, la fonction définie par

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{3} & \text{si } t \leq 0, \\ t^2 + c_+t & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

est continue sur \mathbb{R} et solution de l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* pour toutes les valeurs de $c_+ \in \mathbb{R}$.

Il reste à voir la question de la dérivabilité en zéro. On a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} u'(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u'(t) &= c_+. \end{aligned}$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, u admet des demi-dérivées à gauche et à droite en zéro. Elle est dérivable si et seulement si $c_+ = 0$. Dans ce cas, la fonction est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Conclusion : l'unique solution de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} de l'équation $|t|u'(t) - u(t) = t^2$ est

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{3} & \text{si } t \leq 0, \\ t^2 & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

3.4 Équations à variables séparées

Le but est de résoudre des équations du type

$$y'(t) = g(y(t))f(t), \tag{3.8}$$

où $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . On munit cette équation d'une donnée initiale $y(t_0) = y_0$.

On va commencer par faire un raisonnement manquant un peu de rigueur, mais qui donne l'intuition du résultat, puis on démontrera ce résultat rigoureusement à l'aide des théorèmes des paragraphes précédents.

On remarque immédiatement que si $g(y_0) = 0$, alors la fonction constante $t \mapsto y_0$ est solution de l'équation (3.8). D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz et ses corollaires, c'est l'unique solution de donnée initiale $y(t_0) = y_0$.

On suppose donc à présent que $g(y_0) \neq 0$. Alors si y est une solution de (3.8), comme la fonction $g \circ y$ est continue (puisque'elle est de classe \mathcal{C}^1), elle ne s'annule pas sur un voisinage de t_0 . Tant que $g \circ y$ ne s'annule pas, on a

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t).$$

Soit F une primitive de f , et soit H une primitive de $1/g$ sur un intervalle contenant y_0 et sur lequel g ne s'annule pas. On obtient

$$H(y(t)) = F(t) + C,$$

où C est une constante arbitraire. Encore une fois, cette formule reste vraie tant que $g \circ y$ ne s'annule pas. Si on arrive à inverser la fonction H , on a donc obtenu une formule permettant d'obtenir y en fonction de t .

Remarque 3.4.1. *Ce type d'équation se rencontre souvent en physique. Les physiciens ont l'habitude d'écrire alors*

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = g(y)f(t),$$

et par suite

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)dt.$$

Cette identité mène de nouveau à

$$H(y) = F(t) + C$$

On dit que l'on "sépare" les variables y et t , d'où le nom attribué à ces équations.

Remarque 3.4.2. *Attention, la méthode ci-dessus n'est valable que pour un champ de vecteur $b(t, y)$ s'écrivant*

$$b(t, y) = g(y)f(t).$$

Si on a $b(t, y) = g(y) + f(t)$, cette méthode échoue.

On peut justifier les calculs menés ci-dessus de façon rigoureuse, en montrant en particulier que la fonction $g \circ y$ ne s'annule jamais sur l'intervalle (maximal) de définition de y , et que la fonction H est toujours inversible. On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 3.4.3. *Soit I, U deux intervalles ouverts de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 .*

Soit $E = \{z \in U, g(z) = 0\}$.

Soit $t_0 \in I, y_0 \in U$.

On considère la solution maximale y du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t)g(y(t)), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

et on note $J \subset I$ l'intervalle ouvert sur lequel elle est définie.

On a alors les propriétés suivantes :

- *Si $y_0 \in E$, alors $J = I$ et $y(t) = y_0$ pour tout $t \in I$;*
- *Si $y_0 \notin E$: soit*

$$U_0 = \bigcup_{\substack{\text{Ointervalle,} \\ y_0 \in O, \\ O \subset E^c}} O.$$

Alors $U_0 \neq \emptyset$, U_0 est ouvert, et U_0 est le plus grand intervalle contenant y_0 et inclus dans E^c . Soit H une primitive de $1/g$ sur U_0 , F une primitive de f sur I . On a :

- *$y(t) \in U_0$ pour tout $t \in J$;*
- *Il existe une constante C telle que*

$$H(y(t)) = F(t) + C \quad \forall t \in J;$$

- *La fonction H est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de U_0 sur $H(U_0)$.*

Démonstration. On a déjà justifié que si $g(y_0) = 0$ (i.e. $y_0 \in E$), alors $y(t) = y_0$ pour tout t . On s'intéresse donc au cas où $y_0 \notin E$.

Remarquons que $E = g^{-1}(\{0\})$, et g est continue; l'ensemble E est donc fermé (au sens de la "topologie induite" : $E = U \cap F$ où F est un fermé de \mathbb{R}), et E^c est un ouvert. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\subset E^c$.

On remarque que

- U_0 est non vide (puisque $]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\subset U_0$);
- U_0 est un intervalle contenant y_0 puisque c'est une union d'intervalles contenant y_0 ;
- $U_0 \subset E^c$;
- Si O est un intervalle contenant y_0 et inclus dans E^c , alors $O \subset U_0$ par définition de U_0 .

L'ensemble U_0 est donc le plus grand intervalle contenant y_0 et inclus dans E^c . De plus, si $z \in U_0$, d'une part il existe $O \subset E^c$ intervalle contenant y_0 et z , et d'autre part, puisque $z \in E^c$, il existe $\delta' > 0$ tel que $[z - \delta', z + \delta'] \subset E^c$. Alors $O \cup [z - \delta', z + \delta']$ est un intervalle contenant y_0 et inclus dans E^c , donc

$$[z - \delta', z + \delta'] \subset O \cup [z - \delta', z + \delta'] \subset U_0.$$

Par conséquent U_0 est ouvert.

Montrons à présent que $y(J) \subset U_0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $y(J)$ est un intervalle. De plus $y(J)$ contient y_0 . Montrons que $y(J) \subset E^c$: on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $y_1 \in E, t_1 \in J$ tel que $y(t_1) = y_1$. D'après l'unicité pour le problème de Cauchy en $t = t_1$, on en déduit que $y(t) = y_1$ pour tout $t \in J$. En particulier $y_0 = y(t_0) = y_1 \in E$: absurde. Donc $y(J) \subset E^c$.

Par définition de U_0 , on en déduit que $y(J) \subset U_0$. Puisque $y(J) \subset E^c$, $g \circ y$ ne s'annule pas sur J et on peut écrire

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t) \quad \forall t \in J.$$

Cette égalité s'écrit encore

$$\frac{dH(y(t))}{dt} = f(t).$$

On en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$H(y(t)) = F(t) + C \quad \forall t \in J.$$

Enfin, la fonction H est de classe C^1 sur U_0 , et sa dérivée $1/g$ ne s'annule pas sur U_0 . Par conséquent H est un C^1 difféomorphisme de U_0 sur $H(U_0)$. □

Remarque 3.4.4. En pratique la constante C est déterminée par la relation

$$H(y_0) = F(t_0) + C.$$

Exemple 1

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = \frac{1}{y(t)},$$

avec $y(t_0) = y_0 \neq 0$.

On a ici $g : z \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{z}$. On prend donc $U = \mathbb{R}_+^*$ si $y_0 > 0$, \mathbb{R}_-^* si $y_0 < 0$. On remarque alors que $E = \emptyset$, et donc $U_0 = U$. Soit y la solution maximale du problème de Cauchy, définie sur un intervalle ouvert J contenant t_0 . En particulier $y(t) \neq 0$ sur I_{\max} donc $\text{sgn}(y(t)) = \text{sgn}(y_0)$.

Pour $t \in J$, on a

$$y'(t)y(t) = 1,$$

soit

$$\frac{1}{2} \frac{dy(t)^2}{dt} = 1.$$

On obtient donc

$$y(t)^2 - y_0^2 = 2t - 2t_0,$$

et

$$\forall t \in J, \quad y(t)^2 = y_0^2 + 2t - 2t_0.$$

On en déduit avec les arguments habituels que

$$J = \left] t_0 - \frac{y_0^2}{2}, +\infty \right[.$$

Puisque $y(t) \in U$ pour tout $t \in J$, on a

$$y(t) = \text{sgn}(y_0) \sqrt{y_0^2 + 2t - 2t_0} \quad \forall t \in J.$$

Exemple 2

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = y(t) - y(t)^2,$$

avec $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

La fonction $g : z \in \mathbb{R} \mapsto z - z^2$ s'annule en 0 et en 1. Ainsi, si $y_0 \in \{0, 1\}$, la fonction y est constante et égale à y_0 . On se concentre donc à présent sur les cas où $y_0 \notin \{0, 1\}$.

On a alors $U_0 = \mathbb{R}_-^*$ si $y_0 < 0$, $U_0 =]0, 1[$ si $y_0 \in]0, 1[$, $U_0 =]1, \infty[$ si $y_0 > 1$.

Avec les notations de la Proposition, pour tout $t \in J$, on a $y(t) \in U_0$, et

$$\frac{y'(t)}{y(t) - y(t)^2} = 1.$$

Pour appliquer la méthode, il faut calculer une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z - z^2}$ sur U_0 . Pour cela, on décompose la fraction en éléments simples : on écrit que pour $z \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{z - z^2} = \frac{1}{z(1 - z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z},$$

dont une primitive sur chacun des intervalles \mathbb{R}_-^* , $]0, 1[$, $]1, \infty[$ est

$$z \mapsto \ln |z| - \ln |1 - z| = \ln \left| \frac{z}{1 - z} \right|.$$

1. Premier cas : $y_0 < 0$: une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z - z^2}$ sur \mathbb{R}_-^* est

$$z \mapsto \ln \frac{-z}{1 - z} = \ln \left(1 - \frac{1}{1 - z} \right).$$

On obtient donc, pour tout $t \in J$,

$$\ln \left(1 - \frac{1}{1 - y(t)} \right) = t + C,$$

où

$$C = -t_0 + \ln \left(1 - \frac{1}{1 - y_0} \right) < -t_0.$$

En inversant la fonction du membre de gauche, on obtient finalement

$$y(t) = -\frac{e^{t+C}}{1 - e^{t+C}} \quad \forall t \in J,$$

d'où l'on déduit finalement que $J =]-\infty, -C[=]-\infty, t_0 - \ln \left(1 - \frac{1}{1 - y_0} \right) [$.

2. Deuxième cas : $y_0 \in]0, 1[$: une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z - z^2}$ sur $]0, 1[$ est

$$z \mapsto \ln \frac{z}{1 - z} = \ln \left(\frac{1}{1 - z} - 1 \right).$$

On obtient donc, pour tout $t \in J$,

$$\ln \left(\frac{1}{1 - y(t)} - 1 \right) = t + C,$$

où

$$C = -t_0 + \ln \left(\frac{y_0}{1 - y_0} \right) \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas on obtient

$$y(t) = \frac{e^{t+C}}{1 + e^{t+C}} \quad \forall t \in J,$$

et donc finalement $J = \mathbb{R}$.

3. Troisième cas : $y_0 > 1$: une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z - z^2}$ sur $]1, \infty[$ est

$$z \mapsto \ln \frac{z}{z - 1} = \ln \left(1 + \frac{1}{z - 1} \right).$$

On en déduit que pour tout $t \in J$,

$$\ln \left(1 + \frac{1}{y(t) - 1} \right) = t + C, \quad \text{où } C = -t_0 + \ln \left(1 + \frac{1}{y_0 - 1} \right) > -t_0.$$

En inversant une nouvelle fois la formule, on arrive à

$$y(t) = \frac{e^{t+C}}{e^{t+C} - 1} \quad \forall t \in J,$$

et donc $J =]-C, +\infty[=]t_0 - \ln \left(1 + \frac{1}{y_0 - 1} \right), +\infty[$.

3.5 Analyse numérique

Les schémas d'Euler qui ont été définis au chapitre précédent peuvent évidemment être généralisés à un cadre non linéaire pour une équation de la forme

$$X'(t) = b(t, X(t)).$$

On définit ainsi le schéma d'Euler explicite par la formule de récurrence

$$X_{k+1} = X_k + hb(t_k, X_k),$$

et le schéma d'Euler implicite par la formule (implicite!)

$$X_{k+1} = X_k + hb(t_{k+1}, X_{k+1}).$$

L'analyse générale du caractère bien défini de ces schémas et de leur convergence sort du cadre de ce cours.

3.6 Exemples

3.6.1 Le système de Lotka-Volterra

Les équations de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de "modèle proie-prédateur", sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent. Elles ont été proposées indépendamment par Alfred James Lotka en 1925 et Vito Volterra en 1926. Le but de Volterra était de trouver un modèle pour la dynamique des populations de sardines et de requins en mer Adriatique, afin notamment d'expliquer pourquoi les quantités de sardines pêchées après l'interruption due à la guerre n'étaient plus aussi importantes que précédemment et pourquoi à la reprise de la pêche la proportion observée de requins avait augmenté.

Obtention des équations

On considère une population de proies $N(t)$, et une population de prédateurs $P(t)$. les hypothèses de modélisation sont les suivantes :

- Les proies sont supposées avoir une source illimitée de nourriture et se reproduire exponentiellement si elles ne sont soumises à aucune prédation ;
- Le taux de prédation sur les proies est supposé proportionnel à la fréquence de rencontre entre les prédateurs et les proies. Cette fréquence de rencontre est elle-même proportionnelle au produit du nombre de prédateurs par le nombre de proies ;
- En l'absence de proies, la population de prédateurs s'éteint exponentiellement ;
- La vitesse d'accroissement de la population des prédateurs due à la prédation est proportionnelle au taux de prédation.

En effectuant un bilan entre t et $t + dt$ comme au premier chapitre, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN(t) - bN(t)P(t), \\ \frac{dP}{dt} = cN(t)P(t) - dP(t), \end{cases} \quad (3.9)$$

où a, b, c, d sont des paramètres positifs.

La fonction

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (ax - bxy, cxy - dy) \in \mathbb{R}^2$$

est de classe \mathcal{C}^∞ (donc en particulier \mathcal{C}^1) car ses composantes sont polynomiales en x, y . Soit $(N_0, P_0) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. On considère l'équation (3.9) munie des conditions initiales $N(t=0) = N_0, P(t=0) = P_0$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz 3.1.4, ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale (N, P) définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

Remarque 3.6.1. *L'intervalle d'existence I est défini de part et d'autre de zéro. Cependant, comme ici on s'intéresse à l'évolution d'un système après avoir prescrit une donnée initiale, on ne considère ici que la famille $\{N(t), P(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+ \cap I}$.*

Positivité

- Soit $N_1 \in \mathbb{R}$ quelconque. On observe alors que le couple (\bar{N}, \bar{P}) défini par

$$\bar{N}(t) = N_1 e^{at}, \quad \bar{P}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

est solution de (3.9).

De même, pour $P_1 \in \mathbb{R}$ quelconque, le couple $(\underline{N}, \underline{P})$ défini par

$$\underline{N}(t) = 0, \quad \underline{P}(t) = P_1 e^{-dt} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

est solution de (3.9).

- Soit $N_0 > 0, P_0 > 0$. Considérons à présent la solution maximale du système (3.9) muni de la condition initiale $N(t=0) = N_0, P(t=0) = P_0$. On cherche à montrer que $N(t) > 0$ et $P(t) > 0$ pour tout $t \in I$. On raisonne par l'absurde et on suppose par exemple qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $N(t_1) = 0$. On pose $P_1 = P(t_1)e^{dt_1}$. On a alors $(N, P)(t_1) = (\underline{N}, \underline{P})(t_1)$, et donc d'après l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, $(N, P)(t) = (\underline{N}, \underline{P})(t)$ pour tout $t \in I$. En particulier, $N_0 = N(0) = \underline{N}(0) = 0$: absurde. Par conséquent, N ne s'annule pas sur I . Comme N est une fonction continue et que I est un intervalle, N garde un signe constant sur I . Donc $N(t) > 0$ pour tout $t \in I$. De même, $P(t) > 0$ pour tout $t \in I$.

“Énergie” du système

On a la propriété suivante, qui permet de mieux comprendre le comportement des solutions et de tracer les trajectoires :

Proposition 3.6.2. *On définit la fonction*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^{*2} &\rightarrow \mathbb{R} \\ H : (x, y) &\mapsto by + cx - a \ln y - d \ln x. \end{aligned}$$

Alors pour toute solution (N, P) de (3.9) telle que $N(0) = N_0 > 0, P(0) = P_0 > 0$, on a, pour tout $t \in I$

$$H(N(t), P(t)) = H(N_0, P_0).$$

Démonstration. On dérive par rapport à t la quantité $H(N(t), P(t))$: cette manipulation est autorisée puisque (N, P) est de classe \mathcal{C}^1 et que H est \mathcal{C}^∞ . Notons également que $H(N(t), P(t))$ est bien défini d'après ce qui précède puisque $(N(t), P(t)) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

En utilisant l'équation (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(N(t), P(t)) &= b\frac{dP}{dt} + c\frac{dN}{dt} - a\frac{P'(t)}{P(t)} - d\frac{N'(t)}{N(t)} \\
&= bcP(t)N(t) - bdP(t) + caN(t) - bcP(t)N(t) - acN(t) + ad - da + dbP(t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que la quantité $H(N(t), P(t))$ reste constante le long de chaque trajectoire. \square

Corollaire 3.6.3. *On suppose $N_0 > 0, P_0 > 0$. Alors il existe x_-, x_+, y_-, y_+ tels que*

$$\begin{aligned}
0 < x_- &\leq \frac{d}{c} \leq x_+, \\
0 < y_- &\leq \frac{a}{b} \leq y_+
\end{aligned}$$

et tels que pour tout $t \in I$,

$$x_- \leq N(t) \leq x_+, \quad y_- \leq P(t) \leq y_+.$$

Par conséquent, $I = \mathbb{R}$.

Démonstration. On définit les fonctions $\varphi_{b,a}, \varphi_{c,d}$ par

$$\begin{aligned}
\varphi_{b,a} : x \in \mathbb{R}_+^* &\mapsto bx - a \ln x, \\
\varphi_{c,d} : x \in \mathbb{R}_+^* &\mapsto cx - d \ln x,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

de sorte que

$$H(x, y) = \varphi_{b,a}(y) + \varphi_{c,d}(x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

Le tableau de variations de $\varphi_{c,d}$ est

x	0	$\frac{d}{c}$	$+\infty$
$\varphi'_{c,d}(x)$	—	0	+
$\varphi_{c,d}(x)$	$+\infty$	$d(1 - \ln \frac{d}{c})$	$+\infty$

Celui de $\varphi_{b,a}$ est analogue.

On en déduit en particulier que

$$\begin{aligned}
\varphi_{c,d}(x) &\geq d(1 - \ln \frac{d}{c}) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \\
\varphi_{b,a}(y) &\geq a(1 - \ln \frac{a}{b}) \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t \in I$,

$$\varphi_{c,d}(N(t)) = H(N_0, P_0) - \varphi_{b,a}(P(t)) \leq H(N_0, P_0) - a(1 - \ln \frac{a}{b}).$$

Ainsi

$$\sup_{t \in I} \varphi_{c,d}(N(t)) \leq H(N_0, P_0) - a(1 - \ln \frac{a}{b}),$$

et de même

$$\sup_{t \in I} \varphi_{b,a}(P(t)) \leq H(N_0, P_0) - d(1 - \ln \frac{d}{c}).$$

On déduit des tableaux de variations de $\varphi_{c,d}$ et $\varphi_{b,a}$ qu'il existe x_{\pm}, y_{\pm} tels que

$$\begin{aligned} 0 < x_- \leq \frac{d}{c} \leq x_+, \\ 0 < y_- \leq \frac{a}{b} \leq y_+ \end{aligned}$$

et tels que

$$\varphi_{c,d}(x_{\pm}) = H(N_0, P_0) - a(1 - \ln \frac{a}{b}), \quad \varphi_{b,a}(y_{\pm}) = H(N_0, P_0) - d(1 - \ln \frac{d}{c}). \quad (3.11)$$

Par conséquent,

$$N(t) \in [x_-, x_+], \quad P(t) \in [y_-, y_+] \quad \forall t \in I.$$

Les solutions de (3.9) restent donc bornées sur leur intervalle maximal d'existence. La Proposition 3.1.12 implique alors que $I = \mathbb{R}$. □

Tracé des courbes

Traçons à présent quelques courbes paramétrées

$$\mathcal{C}_{N_0, P_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}_+, x = N(t), y = P(t)\},$$

où (N, P) est la solution de (3.9) de donnée initiale (N_0, P_0) .

D'après la proposition 3.6.2, ces courbes paramétrées sont incluses dans des lignes de niveau de la fonction H , c'est-à-dire des courbes d'équation $H(x, y) = \text{constante} = H(N_0, P_0)$. Par ailleurs, les fonctions N et P sont définies pour tout t et ne possèdent pas de symétrie évidente.

Notons \mathcal{D}_{H_0} la courbe d'équation

$$H(x, y) = H_0.$$

On a $\mathcal{C}_{N_0, P_0} \subset \mathcal{D}_{H(N_0, P_0)}$. Il faut donc d'une part tracer les courbes \mathcal{D}_{H_0} pour différentes valeurs de H_0 , et d'autre part montrer que $\mathcal{C}_{N_0, P_0} = \mathcal{D}_{H(N_0, P_0)}$, autrement dit que les solutions $(N(t), P(t))$ parcourent toute la courbe $\mathcal{D}_{H(N_0, P_0)}$.

▷ Tracé des courbes \mathcal{D}_{H_0} :

Tout d'abord, on observe que si

$$H_0 < \inf \varphi_{b,a} + \inf \varphi_{c,d},$$

la courbe \mathcal{D}_{H_0} est vide. Si

$$H_0 = \inf \varphi_{b,a} + \inf \varphi_{c,d} = a \left(1 - \ln \frac{a}{b}\right) + d \left(1 - \ln \frac{d}{c}\right),$$

la courbe est réduite au point $(a/b, d/c)$. Dans toute la suite, on étudie donc le cas où

$$H_0 > \inf \varphi_{b,a} + \inf \varphi_{c,d}.$$

On trace alors la courbe \mathcal{D}_{H_0} en séparant ses deux branches $y \in [y_-, a/b]$ et $y \in [a/b, y_+]$, où y_-, y_+ sont définis par (3.11).

On observe alors que $\varphi_{c,d}$ (resp. $\varphi_{b,a}$) est une bijection de $]0, d/c]$ sur $[d(1 - \ln \frac{d}{c}), +\infty[$ (resp. de $]0, a/b]$ sur $[a(1 - \ln \frac{a}{b}), +\infty[$), et également de $[d/c, +\infty[$ sur $[d(1 - \ln \frac{d}{c}), +\infty[$ (resp. de $[a/b, +\infty[$ sur $[a(1 - \ln \frac{a}{b}), +\infty[$). On définit les bijections réciproques ψ_-, ψ_+ de $\varphi_{b,a}$ restreinte aux intervalles $]0, a/b]$ et $[a/b, +\infty[$. Les fonctions ψ_-, ψ_+ sont toutes deux définies sur $[a(1 - \ln \frac{a}{b}), +\infty[$. Si $y \in [y_-, a/b]$, on a

$$(x, y) \in \mathcal{D}_{H_0} \Leftrightarrow y = \psi_-(H_0 - \varphi_{c,d}(x)),$$

et pour $y \in [a/b, y_+]$, on a

$$(x, y) \in \mathcal{D}_{H_0} \Leftrightarrow y = \psi_+(H_0 - \varphi_{c,d}(x)).$$

On est donc ramené à tracer les graphes des fonctions

$$f_{\pm} : x \mapsto \psi_{\pm}(H_0 - \varphi_{c,d}(x))$$

sur l'intervalle $[x_-, x_+]$. Notons que si $x \in [x_-, x_+]$, par définition de x_{\pm} , on a

$$\varphi_{c,d}(x) \leq H_0 - a \left(1 - \ln \frac{a}{b}\right)$$

et donc les fonctions f_+, f_- sont bien définies sur $[x_-, x_+]$.

La fonction ψ_- (resp. ψ_+) est décroissante (resp. croissante) sur $[a(1 - \ln a/b), +\infty[$, dérivable sur $]a(1 - \ln a/b), +\infty[$, et sa dérivée est

$$\psi'_{\pm} = \frac{1}{\varphi_{b,a} \circ \psi_{\pm}}.$$

Par conséquent les fonctions f_+ et f_- sont dérivables sur $]x_-, x_+[$, de dérivée

$$f'_{\pm}(x) = -\varphi'_{c,d}(x) \frac{1}{\varphi_{b,a} \circ f_{\pm}(x)}.$$

On observe que

$$\lim_{x \rightarrow x_-} f'_{\pm}(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_+} f'_{\pm}(x) = \mp\infty.$$

On en déduit les tableaux de variations suivants :

x	x_-	$\frac{d}{c}$	x_+
$f'_-(x)$	$-$	0	$+$
$f_-(x)$	$\frac{a}{b}$	y_-	$\frac{a}{b}$
$f'_+(x)$	$+$	0	$-$
$f_+(x)$	$\frac{a}{b}$	y_+	$\frac{a}{b}$

La courbe possède donc des tangentes horizontales aux points $(d/c, y_-)$ et $(d/c, y_+)$ et des tangentes verticales aux points $(x_-, a/b)$ et $(x_+, a/b)$.

Enfin, on observe que y_- et x_- sont décroissants en H_0 , tandis que y_+ et x_+ sont croissants en H_0 . En considérant plusieurs valeurs de H_0 , on obtient donc une série de courbes qui ont l'allure représentée sur la figure 3.1. En particulier, on observe que les courbes d'équation $H(x, y) = H_0$ sont des **courbes fermées**.

▷ Description des trajectoires $(N(t), P(t))$ pour $t \geq 0$:

Remarquons tout d'abord que si $(N_0, P_0) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$, alors on a

$$H(N_0, P_0) = \min_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} H = d(1 - \ln \frac{d}{c}) + a(1 - \ln \frac{a}{b}).$$

En particulier

$$H(N(t), P(t)) = \min_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} H \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et donc $(N(t), P(t)) = (N_0, P_0)$ pour tout t : le point $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ est un point d'équilibre du système, et la courbe \mathcal{C}_{N_0, P_0} est un point.

Dans toute la suite, on suppose donc $N_0 > 0, P_0 > 0$, et $(N_0, P_0) \neq (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$. On sait déjà que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(N(t), P(t)) \in \mathcal{D}_{H_0}$ avec $H_0 = H(N_0, P_0)$. La première question est de savoir dans quel sens la courbe va être parcourue. Or comme les fonctions N et P sont définies par une équation différentielle, il est assez facile de déterminer les signes de $N'(t)$ et $P'(t)$. On a

$$\begin{aligned} N'(t) > 0 &\iff P(t) < \frac{a}{b}, \\ P'(t) > 0 &\iff N(t) > \frac{d}{c}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que la courbe \mathcal{D}_{H_0} est parcourue dans le sens trigonométrique. En particulier, si on repère la position $(N(t), P(t))$ en fonction de son abscisse curviligne $s(t)$ sur la courbe \mathcal{D}_{H_0} , on voit que s est une fonction croissante du temps (en augmentant s de la longueur de la courbe à chaque fois que l'on fait un tour complet).

Il y a donc deux possibilités : soit s admet une limite finie en $+\infty$, et en ce cas il existe $(\bar{N}, \bar{P}) \in \mathcal{D}_{H_0}$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (N(t), P(t)) = (\bar{N}, \bar{P}),$$

soit $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = +\infty$, et dans ce cas il existe $T > 0$ tel que $s(T) = s(0) + L$, c'est-à-dire $(N(T), P(T)) = (N_0, P_0)$.

Supposons que $(N_0, P_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \setminus \{(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})\}$. On va à présent montrer que la première possibilité ne peut pas se produire. Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (N(t), P(t)) = (\bar{N}, \bar{P}),$$

Alors nécessairement, on a aussi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (N'(t), P'(t)) = (a\bar{N} - b\bar{N}\bar{P}, c\bar{N}\bar{P} - d\bar{P}) = (c_1, c_2).$$

Si $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, alors on a nécessairement $\lim_{t \rightarrow \infty} |N(t)| = +\infty$ ou $\lim_{t \rightarrow \infty} |P(t)| = +\infty$: absurde. Donc $c_1 = c_2 = 0$, ce qui implique

$$(\bar{N}, \bar{P}) \in \left\{ (0, 0), \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right\}.$$

Or par conservation de l'énergie et continuité de H , on a aussi $H(\bar{N}, \bar{P}) = H(N_0, P_0) > \min H = H(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ et $H(\bar{N}, \bar{P}) < +\infty$: on aboutit à une contradiction.

On en déduit que si $(N_0, P_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{ \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right\}$, alors il existe $T > 0$ tel que $(N(T), P(T)) = (N_0, P_0)$. D'après la proposition 3.2.1, les trajectoires sont périodiques de période T .

Remarque 3.6.4. La propriété importante utilisée ici est que si les trajectoires sont portées par des courbes fermées, et que la vitesse ne s'annule pas, alors le mouvement est périodique.

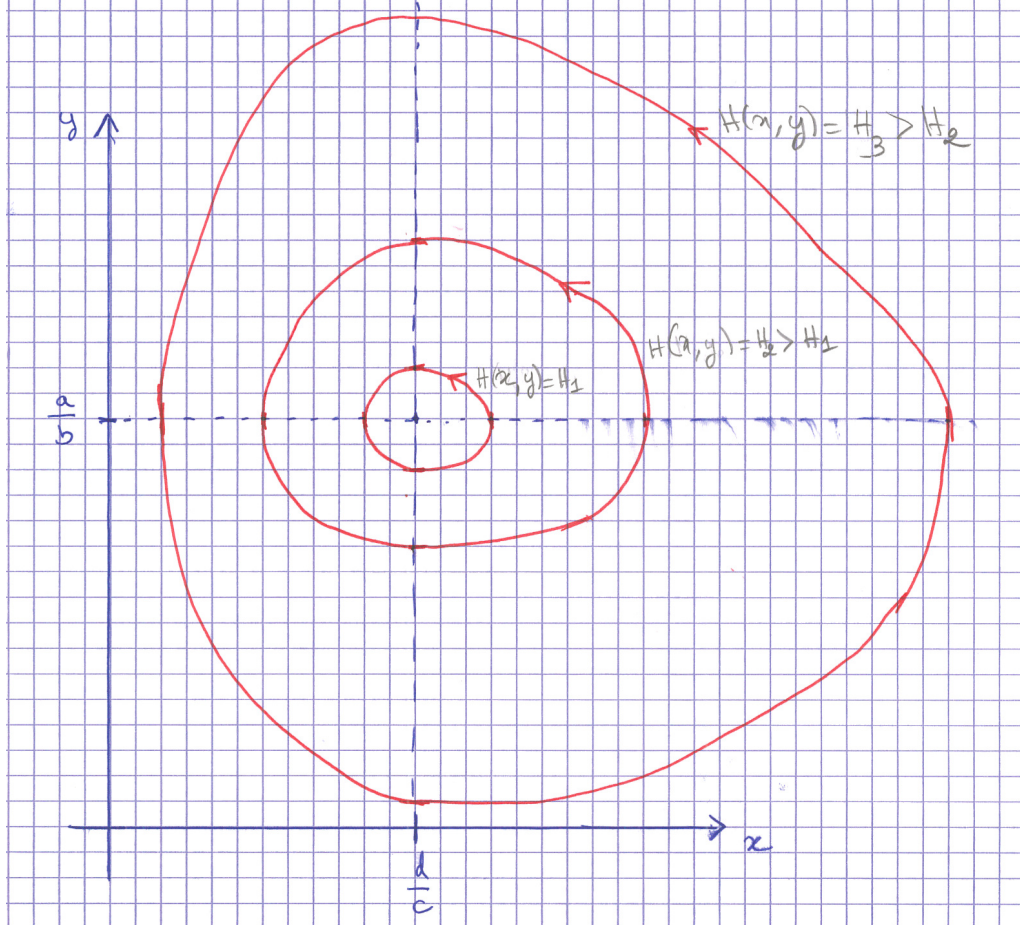


FIGURE 3.1 – Tracé de quelques trajectoires du système de Lotka-Volterra

3.6.2 Portrait de phase du pendule simple

On considère les solutions de l'équation (1.2)

$$\theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0. \quad (3.12)$$

Pour simplifier les calculs, on prendra dans tout ce paragraphe $\omega_0 = \sqrt{g/L} = 1$. On cherche à représenter, pour différentes valeurs des paramètres θ_0, v_0 , les courbes paramétrées

$$\mathcal{C}_{\theta_0, v_0} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}, x = \theta_{\theta_0, v_0}(t), y = \theta'_{\theta_0, v_0}(t)\},$$

où θ_{θ_0, v_0} est la solution de l'équation (1.2) telle que $\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = v_0$.

Dans la suite, pour alléger les notations, on omet les indices θ_0, v_0 ; il faut cependant bien garder en tête que les trajectoires $\{\theta(t)\}_{t \geq 0}$ dépendent des données initiales.

▷ *Énergie du système :*

En multipliant (3.12) par $\theta'(t)$, on obtient

$$\theta'(t)\theta''(t) + \theta'(t)\sin\theta(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

soit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{(\theta'(t))^2}{2} - \cos\theta(t) \right) = 0.$$

On en déduit que l'énergie est conservée au cours du mouvement :

$$\frac{(\theta'(t))^2}{2} - \cos\theta(t) = \text{cste} = \frac{v_0^2}{2} - \cos\theta_0 \quad \forall t.$$

On pose

$$E_0 = \frac{v_0^2}{2} - \cos\theta_0.$$

Notons que $E_0 \geq -\cos\theta_0 \geq -1$. La courbe paramétrée $\mathcal{C}_{\theta_0, v_0}$ est portée par la courbe d'équation $y^2/2 - \cos x = E_0$. Chacune de ces courbes est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à celui des ordonnées. Il suffit donc de tracer les courbes sur le domaine $x \geq 0, y \geq 0$ et d'en déduire l'ensemble de la courbe par symétrie.

Ce cas est en fait un peu plus simple que celui du système de Lotka-Volterra car sur le domaine $x \geq 0, y \geq 0$, l'équation de la courbe relative à l'énergie E_0 est

$$y = \sqrt{2(E_0 + \cos x)}. \quad (3.13)$$

On a donc une équation cartésienne explicite pour chaque courbe. On va commencer par tracer les courbes d'équation (3.13) en distinguant les cas $E_0 < 1, E_0 = 1$ et $E_0 > 1$. On verra ensuite comment comprendre la trajectoire suivie par le pendule sur chacune des courbes.

Soit ϕ_{E_0} la fonction $\phi_{E_0} : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{2(E_0 + \cos x)}$.

La fonction ϕ_{E_0} est définie sur \mathbb{R} si $E_0 \geq 1$, et sur $[-\arccos(-E_0), \arccos(-E_0)]$ si $E_0 < 1$. Elle est paire, continue sur son ensemble de définition et dérivable sur \mathbb{R} si $E_0 > 1$, sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ si $E_0 = 1$, et sur $] -\arccos(-E_0), \arccos(-E_0)[$ si $E_0 < 1$. Sur l'ensemble de dérivabilité de ϕ_{E_0} , on a

$$\phi'_{E_0}(x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{2(E_0 + \cos x)}}.$$

On a donc deux types de tableaux de variations :

- Premier cas : $E_0 \geq 1$: dans ce cas la fonction ϕ_{E_0} est définie sur \mathbb{R} et périodique de période 2π , donc il suffit de tracer son tableau de variations sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		0		π
$\phi'_{E_0}(x)$	0	+	0	-	0
ϕ_{E_0}	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $\sqrt{2(E_0 - 1)}$ </div> <div style="text-align: center;"> $\sqrt{2(E_0 + 1)}$ </div> <div style="text-align: center;"> $\sqrt{2(E_0 - 1)}$ </div> </div>				

Si $E_0 > 1$, la courbe admet des tangentes horizontales en $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Si $E_0 = 1$, la courbe admet une tangente horizontale en $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Calculons la pente de la tangente en $x = \pi^\pm$: on pose $x = \pi + h$ avec $|h| \ll 1$ et $h \neq 0$. Alors

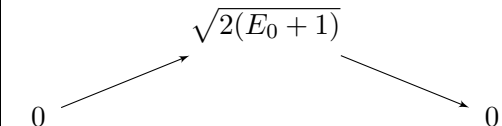
$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(\pi + h) = -\sin h = -h + O(h^3), \\ 1 + \cos x &= 1 + \cos(\pi + h) = 1 - \cos h = \frac{h^2}{2} + O(h^4).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\phi_1'(x) \sim \frac{h}{|h|}.$$

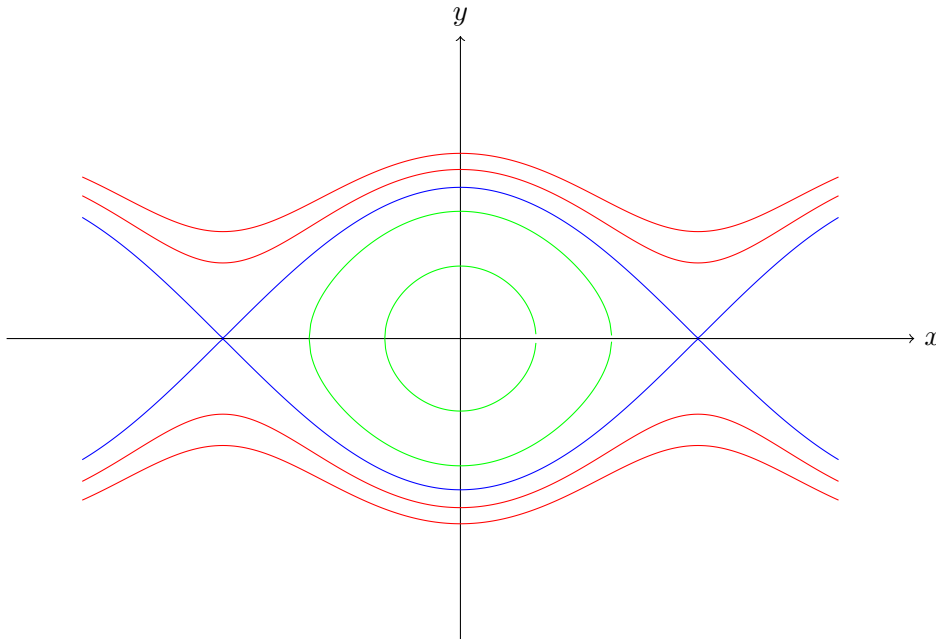
Ainsi la courbe représentative de ϕ_1 admet une tangente à gauche de pente -1 et une tangente à droite de pente 1 en $x = \pi$.

- Deuxième cas : $E_0 < 1$: on a alors le tableau de variations suivant, où l'on a posé $x_0 = \arccos(-E_0)$

x	$-x_0$	0	x_0
$\phi_{E_0}'(x)$		+	0
ϕ_{E_0}	$\sqrt{2(E_0 + 1)}$ 		

La courbe admet une tangente horizontale en $x = k\pi$ et deux tangentes verticales en $x = \pm \arccos(-E_0)$.

Les courbes d'équation $y^2/2 - \cos x = E_0$ ont donc l'allure suivante :



En vert : deux courbes d'équation $y^2/2 - \cos x = E_0$ avec $E_0 < 1$. En bleu, la “séparatrice”, avec $E_0 = 1$. En rouge, deux courbes avec $E_0 > 1$.

À présent que les courbes des trajectoires sont connues, voyons dans quel sens celles-ci sont parcourues :

▷ *Premier cas : $E_0 < 1$:*

Ce cas correspond à un pendule qui oscille (car lancé avec une énergie inférieure à l'énergie nécessaire pour faire un tour complet).

Si $E_0 < 1$, on a

$$-\cos \theta(t) = E_0 - \frac{(\theta'(t))^2}{2} \leq E_0,$$

et donc $\cos \theta(t) \geq -E_0$ pour tout t . Ainsi $\theta(t) \in [-\arccos(-E_0), \arccos(-E_0)] \bmod 2\pi$ pour tout t . Comme par ailleurs la fonction θ est continue (car dérivable), et que $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$, on en déduit que $\theta(t) \in [-\arccos(-E_0), \arccos(-E_0)]$ pour tout t .

On pose par ailleurs $v_{max} = \sqrt{2(E_0 + 1)}$. Notons qu'on a $|\theta'(t)| \leq v_{max}$ pour tout t .

On peut alors mener le même type d'analyse que pour le système de Lotka-Volterra. De nouveau, pour $E_0 = -1$, on a $\theta(t) = 0$ pour tout t : la position $\theta = 0$ est un point d'équilibre. Si $E_0 \in]-1, 1[$, la courbe d'équation

$$\frac{y^2}{2} - \cos x = E_0$$

est une courbe fermée. On peut définir l'abscisse curviligne s le long de la courbe, que l'on oriente par exemple dans le sens trigonométrique. On montre alors que s est strictement décroissante en t . En appliquant le même raisonnement que pour le système de Lotka-Volterra, on en déduit que les trajectoires sont périodiques.

Les courbes du portrait de phase correspondant à une énergie $E_0 < 1$ sont donc parcourues dans le sens des aiguilles d'une montre. On voit que pour chacune des trajectoires, le pendule parcourt toute la courbe d'équation $y^2/2 - \cos x = E_0$.

Les points $\theta = \pm \arccos(-E_0)$ correspondent aux extrémités des oscillations du pendule. Les points en lesquels $\theta = 0$ et $\theta' = \pm v_{max}$, correspondent aux passages du pendule par la position verticale. Une oscillation complète correspond au parcours de l'intégralité d'une courbe d'équation $y^2/2 - \cos x = E_0$.

▷ *Deuxième cas : $E_0 > 1$*

Dans ce cas θ' ne peut pas s'annuler (sinon on aurait $-\cos \theta = E_0 > 1$: impossible). Comme θ'' existe et est continue d'après l'équation (1.2), θ' est également continue. Donc θ' garde un signe constant, celui de v_0 . Ainsi

$$\theta'(t) = \operatorname{sgn}(v_0) \sqrt{2(E_0 + \cos \theta(t))}.$$

Par conséquent, pour une trajectoire donnée, on reste uniquement sur une branche de la courbe d'équation $y^2/2 - \cos x = E_0$. La branche de la courbe qui correspond au signe opposé de v_0 n'est jamais visitée (évidemment, elle le sera pour d'autres données initiales !)

De plus θ est strictement monotone (croissante si $v_0 < 0$, décroissante sinon). Le pendule parcourt uniquement une demi-branche de la courbe d'équation $y^2/2 - \cos x = E_0$.

Par ailleurs, on rappelle que les courbes d'équation

$$y = \pm \sqrt{2(E_0 + \cos x)}$$

sont périodiques de période 2π . Supposons que le pendule parte d'un angle θ_0 avec une vitesse $v_0 > 0$ telle que $E_0 > 1$. Alors θ est strictement croissante au cours du temps et on lit sur le portrait de phase qu'il existe un temps $T > 0$ tel que

$$\theta(T) = \theta_0 + 2\pi, \quad \theta'(T) = v_0.$$

Cela signifie que le pendule a fait un tour complet et est revenu à sa position initiale. Là encore, le mouvement est périodique, mais le pendule ne s'arrête jamais.

Les points de la courbe de coordonnées $x = 2k\pi, y = \sqrt{2(E_0 + 1)}$ correspondent aux passages du pendule par la position verticale en bas, et ceux de coordonnées $x = \pi + 2k\pi, y = \sqrt{2(E_0 - 1)}$ aux passages du pendule par la position verticale en haut.

▷ *Troisième cas* : $E_0 = 1$

On suppose dans tout ce paragraphe que $(\theta_0, v_0) \notin \{(\pi, 0), (-\pi, 0)\}$. En effet, si $(\theta_0, v_0) = (\pm\pi, 0)$, alors on a $\theta(t) = \pm\pi$ pour tout t : le point $\theta = \pi$ est une position d'équilibre. On se concentre donc sur les cas où $v_0^2/2 - \cos\theta_0 = 1$ avec $v_0 \neq 0$.

Ce dernier cas est un peu particulier : le pendule a tout juste assez d'énergie pour arriver au sommet. La question est de savoir s'il parcourt l'ensemble de la courbe, c'est à dire si la bille redescend après être passée par le maximum.

La réponse est non : le pendule ne parcourt qu'une branche de la courbe. En effet, on peut montrer qu'il met un temps infini à arriver à la position d'équilibre (instable) $\theta = \pi$, qui correspond au point d'altitude maximal de la bille. Pour voir cela, il y a deux preuves possibles :

- La première possibilité est de raisonner par l'absurde et de supposer qu'il existe un temps $T > 0$ tel que

$$\theta(T) = \pm\pi, \quad \theta'(T) = 0.$$

On vérifie alors aisément que $\tilde{\theta}(t) = \text{constante} = \pm\pi$ est solution de l'équation (1.2), avec $\tilde{\theta}(T) = \theta(T)$, $\tilde{\theta}'(T) = \theta'(T)$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $\tilde{\theta} = \theta$, et donc en particulier $\theta(0) = \pm\pi$: absurde.

- L'autre possibilité est de calculer à la main le temps mis par le pendule pour parvenir au sommet. Pour cela, on peut utiliser le fait que θ' ne s'annule pas avant d'atteindre le sommet et donc garde un signe constant sur cet intervalle. Supposons pour fixer les idées que $v_0 > 0$. Soit $T_0 \in]0, +\infty]$ le temps auquel le sommet est atteint. On en déduit que $\theta|_{[0, T_0[} : [0, T_0[\rightarrow [\theta_0, \pi[$ est une bijection. D'après la formule de changement de variables, on a donc

$$\begin{aligned} T_0 &= \int_0^{T_0} dt \\ &= \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta'} \\ &= \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2(1 + \cos\theta)}}. \end{aligned}$$

Or pour $\theta = \pi - h$ avec $h > 0$, $h \ll 1$, on a

$$1 + \cos\theta = 1 + \cos(\pi - h) = \frac{h^2}{2} + O(h^4),$$

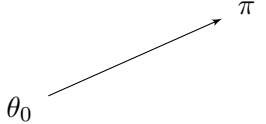
et donc

$$\frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos\theta)}} \sim \frac{1}{\pi - \theta},$$

qui n'est pas intégrable au voisinage de $\theta = \pi$. Donc $T_0 = \infty$.

On en déduit que le pendule met un temps infini à atteindre la position d'équilibre $\theta = \pm\pi$. Par conséquent θ' ne s'annule pas sur \mathbb{R} et donc θ est strictement monotone (croissante si $v_0 > 0$, décroissante si $v_0 < 0$).

On obtient ainsi le tableau de variations suivant si $v_0 > 0$:

t	0	$+\infty$
$\theta'(t)$	+	
$\theta(t)$		

Si $v_0 < 0$, le tableau de variations est analogue :

t	0	$+\infty$
$\theta'(t)$	-	
$\theta(t)$	