Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH1102 - Calcul II
Automne 2015

Devoir 1

Nom : Rose **Prénom :** Alexandre

Matricule : 1580973 **Section :** 1

Q1	Q2	Q3	Q4	Total
				/10

Une seule question sera corrigée.

Question 1

Sachant que lorsque $m \leq f(x,y) \leq M$ pour tout $(x,y) \in D$, alors

$$mA(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)\ \mathrm{d}A \leq MA(D) \tag{1}$$

Dans l'énoncé, $mA(D) = 0$ et $MA(D) = 1 \times 10^{-3}$ et le domaine D est borné par $y = \frac{1}{2} - x$, $y = \frac{1}{2} + x$ et $y = 0$

Donc $A(D) = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

D'où $m = 0$ et $M = 4 \times 10^{-3}$

Pour être valide, $0 \leq \sin^4(x^3 + y^3) \leq 1 \times 10^{-3}$ pour tout $(x,y) \in D$
Le maximum de la fonction $|x^3 + y^3|$ dans le domaine D est $\frac{1}{8}$ pour les points de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, 0)$. Le maximum de la fonction $f(x,y) = \sin^4(x^3 + y^3)$ est donc $(\pm\frac{1}{8})^4 = 2,4 \times 10^{-4}$.
Le minimum de la fonction est arbitraire puisque $y^4 \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$.
L'équation (1) est donc respectée en tout point du domaine D, par conséquent l'hypothèse est vérifiée

$$0 \leq \iint\limits_D \sin^4(x^3 + y^3)\ \mathrm{d}A \leq 1 \times 10^{-3}$$

Question 2

Pour évaluer l'intégrale $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y\mathrm{e}^{\frac{x^2}{3}}}{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, il faut inverser l'ordre d'intégration.
On trouve les limites du domaine borné par

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y &= 4 \\ x &= \sqrt{y} \Leftrightarrow x^2 = y \\ x &= 2 \end{aligned}$$

On se retrouve alors à intégrer :

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} \frac{y\mathrm{e}^{\frac{x^2}{3}}}{x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \frac{y\mathrm{e}^{\frac{x^2}{3}}}{x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ J &= \int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{3}}}{x^3} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} \mathrm{d}x \\ J &= \int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{3}}}{x^3} \left[\frac{x^4}{2} - \frac{0}{2}\right] \mathrm{d}x \\ J &= \int_0^2 \frac{x^4\mathrm{e}^{\frac{x^2}{3}}}{2x^3}\,\mathrm{d}x \\ J &= \frac{1}{2}\int_0^2 x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{3}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On pose le changement de variable $u = x^2, \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{e}^{\frac{u}{3}}\,\mathrm{d}u \\ J &= \frac{1}{2}\left[3\mathrm{e}^{\frac{u}{3}}\right]_0^2 \\ J &= \frac{1}{2}\left[3\mathrm{e}^{\frac{x^2}{3}}\right]_0^2 \\ J &= \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^0 \\ J &= \frac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} - 1\right) \end{aligned}$$

Question 3

Pour cette question nous calculerons le volume de la section se trouvant dans le solide E et respectant $z \geq 4 - 2y$. Avec les cylindres paraboliques $z = x^2, z = 4 - y^2, z = 4 - 2y$ les bornes d'intégration sont :

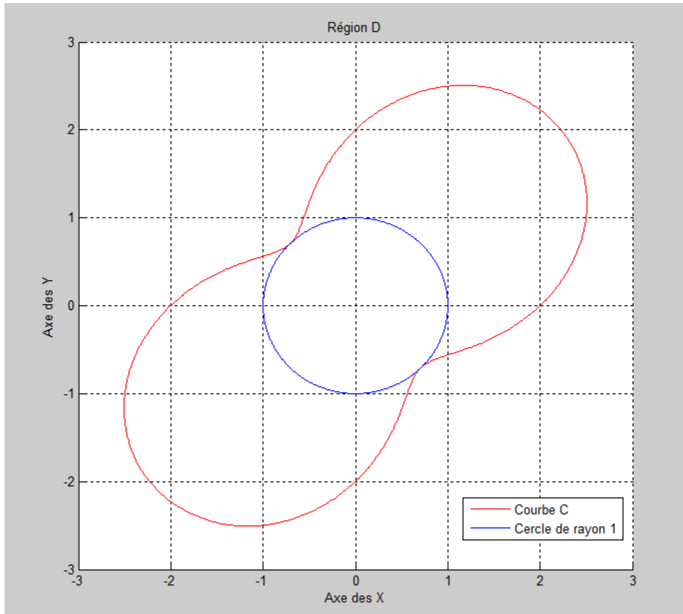
$$\begin{aligned}
-\sqrt{z} \leq x \leq \sqrt{z} \\
-\frac{z}{2} + 2 \leq y \leq \sqrt{z} \\
0 \leq z \leq 4
\end{aligned}$$

et le volume V

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^4 \int_{-\frac{z}{2}+2}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
V &= \int_0^4 \int_{-\frac{z}{2}+2}^{\sqrt{z}} [x]_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
V &= \int_0^4 \int_{-\frac{z}{2}+2}^{\sqrt{z}} \left[\sqrt{z} + \sqrt{z}\right] \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
V &= \int_0^4 \int_{-\frac{z}{2}+2}^{\sqrt{z}} 2\sqrt{z} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
V &= \int_0^4 2\sqrt{z} \, [y]_{-\frac{z}{2}+2}^{\sqrt{z}} \, \mathrm{d}z \\
V &= \int_0^4 2\sqrt{z} \left[\sqrt{z} - \left(-\frac{z}{2} + 2\right)\right] \mathrm{d}z \\
V &= \int_0^4 2\sqrt{z} \left[\sqrt{z} + \frac{z}{2} - 2\right] \mathrm{d}z \\
V &= \int_0^4 2z + z^{\frac{3}{2}} - 4\sqrt{z} \, \mathrm{d}z \\
V &= \left[z^2 + \frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{8z^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4 \\
V &= \left[4^2 + \frac{2 \times 4^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{8 \times 4^{\frac{3}{2}}}{3}\right] - \left[0\right] \\
V &= \frac{112}{15}
\end{aligned}$$

Question 4

a) Esquissez la région D



b) Aire de D

On sait que l'aire de D est $A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\theta$ avec $r = 2\sin(2\theta)$ En remplaçant on obtient

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(2+\sin(2\theta))^2 \, \mathrm{d}\theta \\ A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2+\sin(2\theta))^2 \, \mathrm{d}\theta \\ A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4+4\sin(2\theta)+\sin^2(2\theta)) \, \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Avec l'identitée trigonométrique $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4+4\sin(2\theta)+\frac{1}{2}(1-\cos(4\theta)) \, \mathrm{d}\theta \\ A &= \frac{1}{2}\left[(4\theta - 2\cos(2\theta) + \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(4\theta)}{8}\right]_0^{2\pi} \\ A &= \frac{1}{2}[(8\pi - 2 + \pi) - (-2)] \\ A &= \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

c) Équation cartésienne

En utilisant l'identité trigonométrique $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, l'équation de C définie par $r = 2+\sin(2\theta)$ devient :

$$r = 2 + 2\sin(\theta)\cos(\theta) \tag{3}$$

Or nous savons que

$$x = r\cos(\theta) \tag{4}$$

$$y = r\sin(\theta) \tag{5}$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{6}$$

ainsi en remplaçant dans (3) on obtient :

$$\begin{aligned}
r &= 2 + 2\frac{x}{r}\frac{y}{r} \\
r &= 2 + 2\frac{xy}{r^2} \\
\text{avec (6)} & \\
r &= 2 + 2\frac{xy}{x^2+y^2} \\
\text{en prenant la racine de (6)} & \\
\sqrt{x^2+y^2} &= 2 + 2\frac{xy}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Finalement

$$f(x,y) = 2 + 2\frac{xy}{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+y^2}$$