POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

PHS4700
Physique pour les applications multimédia
Automne 2015

PAGE COUVERTURE **OBLIGATOIRE** POUR TOUS LES DEVOIRS

Numéro de devoir : 01

Numéro de l'équipe : 14

Nom: Rose	Prénom : Alexandre	matricule: 1580973
Signature :		
Nom: Mainville	Prénom : David	matricule: 1636075
Signature :		
Nom: Gosselin	Prénom : Antoine	matricule: 1588443
Signature :		
Nom: Farvacque	Prénom : Dylan	matricule: 1684271
Signature :		

Table des matières

Description du problème

Dans ce devoir, nous avons pour tâche de créer une simulation du comportement d'un patineur dont les différents membres du corps seront représentés par des cylindres et dont la tête sera représentée par une sphère.

Nous étudierons deux configurations en particulier. Dans un premier temps le patineur aura les bras allongés le long de son corps et donc parallèles à ses jambes ainsi qu'à son tronc. Dans un deuxième temps, le patineur aura le bras droit toujours allongé le long de son corps, mais son bras gauche sera perpendiculaire aux jambes et à son tronc.

Dans les deux configurations précédentes, il est à noter que le patineur peut soit être totalement vertical ou alors incliné vers sa gauche de 10° par rapport à la verticale.

Notre simulation devra donc d'abord déterminer le centre de masse du patineur suivant toutes les conditions données dans l'énoncé. Par la suite, il faudra déterminer son moment d'inertie par rapport à son centre de masse. Enfin, il faudra déterminer la vitesse angulaire du patineur si celui-ci est initialement au repos ou en mouvement et qu'il subit une force à un endroit précis de son corps.

Dans le présent rapport, un bref rappel des équations nécessaires à la simulation sera fait. Ensuite, notre simulation développée sur MATLAB sera présentée. Aussi, nous présenterons nos résultats et en ferons une analyse détaillée. Enfin, nous conclurons par une discussion sur les problèmes que nous avons dû surmonter au cours du devoir en ce qui a trait à la programmation et aux simulations.

Équations importantes

Le centre de masse d'un solide est donné par l'équation 1. On fait donc la sommation des solides composants le solide global en fonction de leur contribution à la masse totale et à leur position par rapport au centre de masse ($\vec{r}_{c,n}$).

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_{c,n}$$

Équation 1

L'équation 2 permet de calculer le moment de force d'un solide de position $\vec{r}_c$ sur lequel on applique une force $\vec{F}$ au point $\vec{r}(t)$.

$$\vec{\tau}(t) = (\vec{r}(t) - \vec{r}_c) \times \vec{F}(t)$$

Équation 2

L'accélération angulaire d'un solide est donnée par la relation suivante dans laquelle I est le moment d'inertie, $\vec{L}$ est le moment cinétique (voir Équation 4), $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire et $\vec{\tau}(t)$ le moment de force.

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} &= (\boldsymbol{I})^{-1} [\vec{\tau}(t) - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{I} \vec{\omega}] \\ &= (\boldsymbol{I})^{-1} \left[\vec{\tau}(t) + \vec{L}(t) \times \vec{\omega}(t)\right] \end{aligned}$$

Équation 3

Le moment cinétique $\vec{L}$ est calculé en multipliant le moment d'inertie avec la vitesse angulaire.

$$\vec{L}_c = \boldsymbol{I}_c \vec{\omega}$$

Équation 4

Le moment d'inertie d'un cylindre plein est donné par les équations suivantes. Celles-ci spécifient le moment par rapport à l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z. Le moment d'inertie I_c du cylindre est défini par sa masse m et sa géométrie : son rayon r et sa longueur l.

$$I_{c,zz} = \frac{m}{2} r^2$$
$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = \frac{m}{4} r^2 + \frac{m}{12} l^2$$

Équation 5

La sphère pleine, quant à elle, a un moment d'inertie égal selon tous ses axes et défini par sa masse m et son rayon r tel que présenté dans l'équation 6.

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = I_{c,zz} = \frac{2m}{5} r^2$$

Équation 6

Par ailleurs, afin de trouver le moment d'inertie par rapport à un point $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$, on doit appliquer la formule 7 pour lequel I_c est le moment d'inertie par rapport au centre de masse.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_d &= \boldsymbol{I}_c + m \begin{pmatrix} (d_{c,y}^2 + d_{c,z}^2) & -d_{c,x} d_{c,y} & -d_{c,x} d_{c,z} \\ -d_{c,y} d_{c,x} & (d_{c,x}^2 + d_{c,z}^2) & -d_{c,y} d_{c,z} \\ -d_{c,z} d_{c,x} & -d_{c,z} d_{c,y} & (d_{c,x}^2 + d_{c,y}^2) \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{I}_c + m\boldsymbol{T}(\vec{d}_c) \end{aligned}$$

Équation 7

L'équation 7 est spécifiée par l'équation 8. En effet, le vecteur position du point d par rapport au centre de masse est donné par l'équation ci-dessous.

$$\vec{d}_c = (d_{c,x}, d_{c,y}, d_{c,z}) = \vec{d} - \vec{r}_c$$

Équation 8

La matrice de rotation ${}^{G}R^{L}$ permet de transformer le vecteur $\vec{v}$ du référentiel L vers le référentiel G.

$$\vec{v}^{G} = {}^{G}\boldsymbol{R}^{L}\vec{v}^{L}$$

Équation 9

La rotation des axes du moment d'inertie se fait avec l'équation 10 où R est la matrice de rotation et I le moment d'inertie dans un référentiel L.

$$\boldsymbol{I}_{G} = {}^{G}\boldsymbol{R}^{L}\boldsymbol{I}^{L}\left({}^{G}\boldsymbol{R}^{L}\right)^{T}$$

Équation 10

Description du logiciel

La simulation de la situation présentée précédemment est programmée avec le logiciel MATLAB. Le fonctionnement de celui-ci est détaillé ci-dessous.

D'abord, on initialise tous les membres du patineur avec les données fournies dans l'énoncé. Il y a deux fichiers de valeurs initiales : un pour la configuration initiale du patineur et un autre pour la configuration dont le bras gauche est élevé à la perpendiculaire par rapport au tronc. La solution permet de créer des classes afin de profiter de la réutilisabilité du code. En effet, chaque solide décrit se calcule de la même façon et possède les mêmes attributs. Pour chacun des membres, on calcule le volume et la masse. Ensuite, avec les centres de masse et la masse calculée des membres, on calcule le centre de masse global du patineur. Dans le cas où le patineur est incliné de 10° sur sa gauche, on procède à une rotation du centre de masse avec une matrice de rotation sur le centre de masse global.

Pour répondre à la question B, on doit calculer le moment d'inertie de chacun des membres du patineur par rapport au centre de masse global et les additionner ensemble. Cette opération se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on calcule le moment d'inertie de la forme par rapport à l'origine. Dans un deuxième temps, on doit ajuster ce moment d'inertie calculé par rapport au centre de masse du patineur afin d'obtenir le moment d'inertie réel de la forme. Ces étapes sont effectuées pour chacune des formes représentant les membres.

Pour la question C, on doit d'abord représenter la position du point d'application de la force pour ensuite calculer le moment de force induit par la force de 200 N. Ensuite, avec la formule de l'accélération angulaire présentée à la section précédente, on trouve l'accélération. La question D est faite de la même façon en ajoutant cependant une vitesse angulaire initiale au patineur.

Afin d'avoir tous les résultats pour les quatre configurations possibles, on doit faire varier la variable booléenne `incline` et modifier le fichier de déclarations utilisé entre declarations1.m et declarations2.m.

Résultats obtenus

Les résultats obtenus lors des quatre différentes simulations sont regroupés dans le tableau suivant. Les deux premières configurations correspondent au patineur non incliné par rapport à l'axe des z et dont l'une est avec les bars le long du corps tandis que l'autre est lorsque le bras gauche est à 90° par rapport au tronc. Les deux autres configurations sont lorsque le patineur est incliné de 10° par rapport à l'axe des z et pour des positions des bras identiques.

Inclinaison	Config.\ Question	A	B	C	D
		Centre de masse	**Moment d'inertie**	**Acc. angulaire (rad/s^2)**	**Acc. angulaire (rad/s^2)**
0°	**Bras // au tronc**	0 0 0,9598	12,6083 0 0 0 12,9313 0 0 0 0,9057	10,9484 0 0	10,9484 0 0
	Bras gauche ⊥ au tronc	-0,0103 0 0,9702	13,0432 0 0,4848 0 13,9008 0 0,4848 0 1,4404	10,6108 0 -5,0082	10,6108 -3,4873 -5,0082
10°	**Bras // au tronc**	-0,1667 0 0,9452	12,2554 0 2,0013 0 12,9313 0 2,0013 0 1,2586	10,7820 0 1,9012	10,7820 0 1,9012
	Bras gauche ⊥ au tronc	-0,1787 0 0,9536	12,5275 0 2,4397 0 13,9008 0 2,4397 0 1,9560	11,3192 0 -3,0896	11,3192 -3,4873 -3,0896

Analyse des résultats obtenus

Après l'exécution des simulations, nous avons obtenu des résultats pour quatre scénarios différents, soit le patineur avec les bras le long du corps, le patineur avec le bras gauche étendu et la répétition de ces derniers, mais incliné de dix degrés vers sa gauche.

Centre de masse

D'abord, pour ce qui est des valeurs de centres de masses, les valeurs obtenues correspondent aux valeurs attendues, c'est-à-dire à un centre de masse sur le plan $y = 0$. Ensuite, le centre de masse se déplace horizontalement (sur l'axe des x) lorsque le bras gauche est étendu. La valeur en x du centre de masse devient donc négative. Lorsque le bras gauche est étendu, on voit la valeur en z du centre de masse augmenter légèrement. Ce résultat est aussi attendu, car le centre de masse du bras en question est maintenant plus haut en z puisque la rotation s'effectue autour de l'extrémité attachée au tronc.

Dans les cas du patineur incliné, on s'attend à ce que le centre de masse se déplace suivant une trajectoire circulaire de rayon r_c. Ainsi, une rotation -10° devrait diminuer la valeur en x à $r_c \cos 10°$ et la valeur en y à $r_c \sin 10°$. C'est en effet le résultat obtenu pour chacune des quatre simulations.

Moment d'inertie

Le moment d'inertie quant à lui prend aussi une valeur attendue. Dans le cas du patineur droit avec les bras le long tu corps, la matrice du moment d'inertie est diagonale puisque les termes non diagonaux de chacune des composantes sont nuls. Ceci est un résultat attendu puisque chaque partie qui compose le patineur est alignée avec l'axe des z et que les bras et les jambes sont symétriquement positionnés par rapport à l'axe des z. Dans le cas du bras gauche allongé, on s'attend à retrouver une composante $I_{c,xz}$ non nulle, puisque la symétrie est brisée.

Dans la simulation du patineur incliné, on observe que la matrice du moment d'inertie a subi une rotation, ce qui dans notre cas défait la symétrie par rapport à l'axe des z et donc crée des composantes d'inertie $I_{c,xz}$.

Accélération angulaire

Avec un vecteur force de 200N vers les y négatifs appliqué sur la tête tu patineur, on s'attend à un mouvement de rotation dominant sur l'axe des *x* positifs autour du centre de masse. Pour le cas du patineur droit avec les bras alignés, c'est exactement ce qu'on observe. Lorsque le bras est étendu, on s'attend à ce qu'il résiste au mouvement et induise un mouvement de rotation sur l'axe des *z*. Dans nos résultats, on observe une valeur négative de l'accélération angulaire en *z*, ce qui signifie une rotation dans le sens horaire et qui correspond au phénomène physique du moment d'inertie, ou de distribution de la masse autour d'un axe de rotation, par lequel un corps au repos « s'oppose » à sa mise en rotation.

Accélération angulaire en fonction de la vitesse de rotation initiale

Les résultats de cette simulation se séparent en deux catégories, soit avec les bras parallèles et avec un bras étendu. D'abord avec les bras parallèles au tronc et avec une vitesse de rotation initiale de 10 rad/s autour de l'axe des *z*, on n'observe aucun changement de l'accélération angulaire, puisque la rotation s'effectue autour du centre de masse du patineur qui lui se situe sur son axe de symétrie.

Dans le cas du patineur avec un bras étendu, on observe une augmentation de la valeur de l'accélération en *z*, donc un ralentissement de l'accélération vers les *z* négatifs et une valeur négative d'accélération en *y* apparaît. Ceci signifie que le patineur commencera à vaciller sur les trois axes de rotation autour de son centre de masse.

Discussions sur le devoir

Bien entendu, ce travail pratique ne s'est pas fait sans rencontrer quelques embûches. D'abord, dans le but de profiter qu'il y avait beaucoup d'instructions qui se répétaient et des attributs communs, nous avons pris la décision de créer des classes et de faire de l'héritage. Cependant, MATLAB n'est pas l'outil le plus efficace ni agréable pour faire de la programmation orientée objet. Cela, par contre, permet de clarifier le code et d'en rendre la lecture plus facile.

De plus, dès le départ, nous avons oublié de faire la conversion des unités dans le même référentiel. Ceci donnait des résultats erronés et physiquement impossibles puisqu'ils étaient multipliés par un certain facteur. Nous avons ensuite tout mis en mètres lorsque nous nous en sommes aperçus.

Enfin, nous avons aussi fait face à un problème quant à l'interprétation de la validité des résultats obtenus. En effet, il nous était difficile de décider si les résultats d'accélération angulaire et de moment d'inertie étaient plausibles. Nous avons donc procédé à des vérifications incrémentales avec des problèmes triviaux d'abord pour ensuite vérifier nos propres résultats de simulation.