**Анализ на задача**

**Обобщен Фибоначи**

Пресмятане на *n*-тия член на редицата може да се прави по различни начини. Най-неефективният от тях е да се използва директната рекурсия, заради многократното изчисляване на вече изчислени елементи (O(1.6)n). По-добре е да се запомнят елементите в масив – линейно, но паметоемко. Без загуба на такива ресурси е алгоритъмът, при който всеки елемент се получава като сума от двата предишни, след което по-малкият от предишните номера вече не е нужен, неговото място се заема от по-големия предишен, а мястото на предишния се заема от току-що изчисления. Тези изчисления могат да се извършват и в *p*-ична бройна система, но това не е толкова ефективно, колкото ако входните данни се превърнат в десетична бройна система (реално машината ще работи в двоична), всичко се извършва със стандартните типове и накрая резултатът се върне обратно в *p*-ична бройна система.

Сравнително лесно може да се съобрази, че не е нужно да се пазят всички цифри на членовете: резултатът, който трябва да се изведе, позволява запомнянето само на последните две цифри от записите на *f*i, следователно всички изчисления могат да се извършват по модул *p*2.

Това са наивните идеи за решаване. В зависимост от реализацията, за тях са предвидени не повече от 30% от точките.

Известен е алгоритъмът със сложност O(log(*n*)) за намирането на *n*-тия член на редицата на Фибоначи, основан на т. нар. „бързо повдигане на степен“. Наистина, ако се започне от матрицата и се извършва стандартно умножение на матрици с , получаваме . След като пресметнем третия член на обобщената редица на Фибоначи *f*3 = *f*1 + *f*2, можем да започнем изчислителния процес от . Тогава ще имаме . Търсеният член на редицата ще бъде в горния ляв ъгъл на матрицата, получена при умножението на *F*2 с *n*-3-тата степен на матрицата *E*. Разбира се, всички изчисления се извършват по модул *p*2. За реализации, свързани само с тази идея, са предвидени до 70% от точките. Допълнително определяне на цикличност на *E*s по модул *p*2 може да доведе тази идея и до пълно решение.

Предлагаме идея, която може да реши задачата в максималните граници, без да ползва такива познания. Тя е свързана със съобразяването, че търсената цифра (по-точно – двойка цифри: предпоследната и последната) няма как да не е циклична. Наистина, за последните две цифри в редицата няма повече от *p*2 възможности (всъщност, някои от тях може да не се реализират). Тогава в първия момент, в който и двата члена на редицата, пораждащи следващия, имат същите остатъци при деление на *p*2 (в същия ред), които са имали на някой предишен етап, цикълът ще започне отново. Тъй като редицата е линейно разширяема надолу, със сигурност ще се повтори именно началният етап. По принципа на Дирихле, този цикъл няма как да е по-дълъг от *p*4. Алгоритъмът се състои в определяне на дължината *d* на такъв цикъл за зададените *p*, *f*1 и *f*2, намиране на остатъка *m* от делението на входното *n* на *d*, определяне на остатъка *r* от делението съответния член на редицата с *p*2 и извеждане на старшата цифра на *r* в *p*-ична бройна система (нула, ако *r* се записва само с една *p*-ична цифра).

*Автор: Павлин Пеев*