Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение города Москвы "Московский колледж управления, гостиничного бизнеса и информационных технологий "Царицыно" Отделение управления и информационных технологий.

Теория вероятностей и математическая статистика Индивидуальный проект по теме 3:

Построение графиков функций

непрерывных статистических распределений

Студент: Уколов Алексей

Группа: П2-3

Преподаватель: к.ф.-м.н. Мещеряков В.В.

Москва 2019

Аннотация:

По курсу “Теории вероятностей и математической статистики” были изучены различные примеры модельных и опытных данных. С анализированием было выявлено ,что эмпирические распределения данных , кроме некоторых общих свойст, также обладают свойствами для создания теоретических-статистических распределений.

В этом пособии будут рассмотрены решения задач по темам теоретических непрерывных и дискретных распределений, в которых ограничимся нормальным, логнормальным и экспоненциальным распределениями, распределением Пуассона и биномиальным распределением. Решения этих задач определяют стиль анализа произвольного статистического распределения в среде MATLAB .

Оглавление:

Оглавление

1 Статистические распределения случайных переменных ... 4
1.1 Плотность Вероятности ... 4
1.2 Кумулятивное распределение ... 11
1.3 Обратное кумулятивное распределение ... 13
2. Экспоненциальное распределение ... 15
3.Логнормальное распределение ... 17
Заключение ... 20
Литература и интернет источники ... 21

1 Статистические распределения случайных переменных

1.1 Плотность Вероятности

Если задана функция плотности вероятности $f(x|a, b, \ldots.)$, где $x -$ случайная переменная , принимающая непрерывный ряд значений . a,b,… - параметры распределения .
То функция кумулятивного распределения.

$$F(x|a, b, \ldots) = \int_{-\infty}^{x} f(t|a, b, \ldots) dt$$

Определяет вероятность того , что случайная переменная , принимает значение меньше x. Аналогично определяются вероятности того , что случайная переменная принимает значение больше x и значение , находящееся в интервале (x1,x2).В краткой форме все три вероятности записываются вот так:

$$P(y \leq x) = F(x). P(y > x) = 1 - F(x). P(x1 < y \leq x2) = F(x2) - F(x1).$$

Дифференцирование функции кумулятивного распределения приводит к функции плотности вероятности

$$f(x|a, b, \ldots) = \frac{d}{dx} F(x|a, b, \ldots)$$

Нормировка плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{-\infty} f(x|a, b, \ldots) dx = 1$$

Функции обратного кумулятивного распределения

$$x = F^{-1}(p|a, b, \ldots.), \text{где } p = F(x|a, b, ..)$$

Обратное кумулятивное распределение используется для оценок такого значения xq случайной переменной, при котором функция кумулятивного распределения принимает значение, равное q, т.е.

$$F\left(x_q \middle| a, b, \ldots.\right) = \int_{-\infty}^{x_q} f(x|a, b, \ldots.) dx = q.$$

Из этого уравнения следует, что величина уровня $q = P\ (x \leq xq)$ определяет вероятность того, что случайная переменная примет значение меньшее или равное xq. Величину xq называют “квантиль” . Для вычисления квантилей решают интегральное уравнение

$$x_q = F^{-1}(q|a, b, \dots.)$$

Нормальное (гауссово) распределение(1.2)

Базовая роль нормального распределения N (μ,σ) в анализе статистических данных связана с тем, что если результаты наблюдений определяются большим числом факторов, влияние каждого из которых пренебрежимо мало, то распределение такого массива данных хорошо аппроксимируется нормальным распределением с соответствующим образом подобранными величинами среднего и стандартного отклонения.

Нормальное распределение находит применение в анализе результатов большинства физических измерений, финансово-экономических данных и маркетинговых исследованиях, данных, полученных в результате исследования технологических, социальных, экологических и других процессов.

Задача №1.

Построить графики функций плотностей нормальных распределений

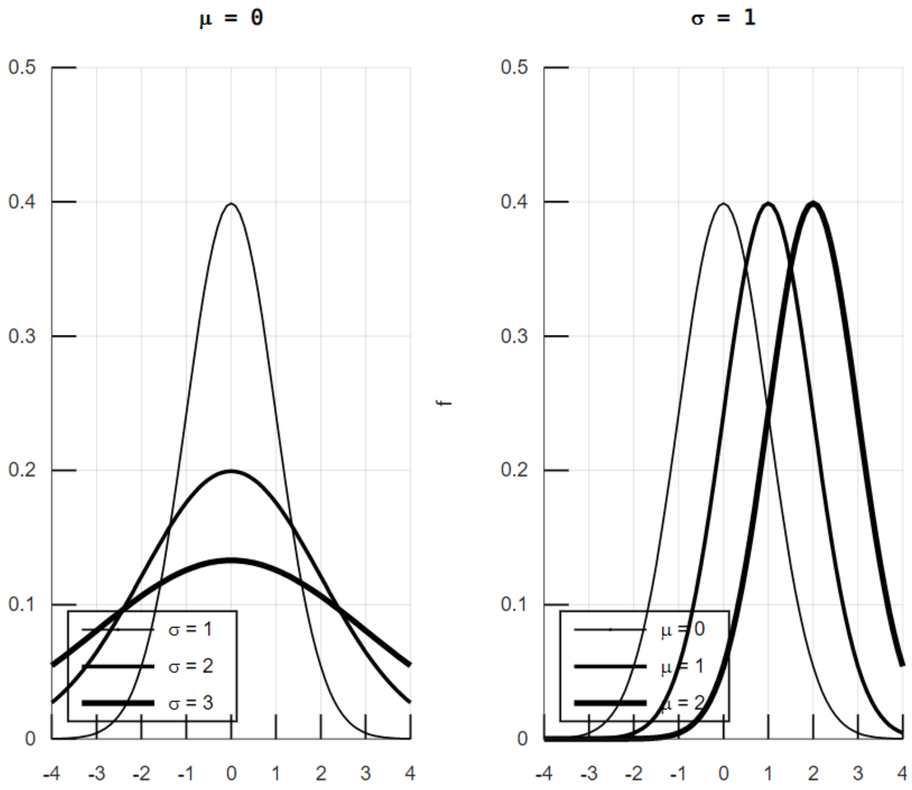
· со средним значением μ = 0 и стандартными отклонениями σ = 1,2,3,

· со средними значениями μ = 0,1,2 и стандартным отклонением σ = 1.

Код графиков на рисунке (1.1)

```
subplot(1,2,1), hold on, grid on,
mu = 0; sigma = 1:3; LWidth = [1,2,3]; x = -4:0.1:4;
for j = 1:3
f = normpdf(x,mu,sigma(j));
plot(x,f,'k','LineWidth',LWidth(j)),end
axis([-4 4 0 0.5]), title('\mu = 0'), xlabel('x'), ylabel('f'),
legend('\sigma = 1','\sigma = 2','\sigma = 3',2)
```

рисунок 1.1



Увеличение стандартного отклонения приводит к расплыванию плотности распределения случайной переменной.

Следующее решение получается исполнением скрипта ко второму графику

```
subplot(1,2,2), hold on, grid on,
mu = 0:2; sigma = 1; x=-4:0.1:4;
for j = 1:3
      f = normpdf(x,mu(j),sigma);
     plot(x,f,'k','LineWidth',LWidth(j)),
end
 axis([-4 4 0 0.5]), xlabel('x'), ylabel('f'),
legend('\mu = 0','\mu = 1','\mu = 2',2),
title('\sigma = 1'),
```

Задача №2

Вычислить среднее значение, дисперсию, 3-ий и 4-ый моменты, коэффициенты асимметрии и эксцесса нормального распределения, заданного параметрами μ и σ.

Найдем решение методами компьютерной алгебры, используя символьные переменные x, mu и sigma.

```
syms x mu sigma pi
f = 1/2*exp(-1/2*(x-mu)^2/sigma^2)/sigma*2^(1/2)/pi^(1/2);
mu = int(x*f,x,-inf,inf),
D = int((x-mu)^2*f,x,-inf,inf)
M3 = int((x-mu)^3*f,x,-inf,inf),
A = M3/sigma^3
```

```
M4 = int((x-mu)^4*f,x,-inf,inf),
E = M4/sigma^4-3
```

Command Window

```
mu=2
d=1
M3=0
A=0
M4=3
E=0
```

Задача №3

Найти вероятности $P1$ ($x < 0$), $P2$ ($-\infty < x < \infty$), $P3$ ($1 \leq x < 2$) попадания значений случайной переменной с распределением N (μ, σ) в интервалы значений ($-\infty$; 0), ($-\infty$; $+\infty$) и [1; 2).

Код

```
mu = 0; sigma=1; syms x pi
f = 1/2*exp(-1/2*(x-mu)^2/sigma^2)/sigma*2^(1/2)/pi^(1/2);
P1 = int(f,x,-inf,0), P2 = int(f,x,-inf,inf),
P3 = int(f,x,1,2), P3 = double(P3)
```

Command window

P1=1/2

P2=1

P3=$-\frac{\mathrm{erf}(\frac{\sqrt{2}}{2})}{2} + \frac{efr(\sqrt{2})}{2}$

P4=0.13591

задача №4

Показать, что вероятность попадания случайной величины с распределением N ($\mu = 5$, $\sigma = 1$) в симметричный интервал [$\mu - \varepsilon$; $\mu + \varepsilon$), где $\varepsilon = 1$, равна

$$P\,(\mu-\varepsilon\le x<\mu+\varepsilon)=1-2P\,(\mu+\varepsilon\le x<\infty).$$

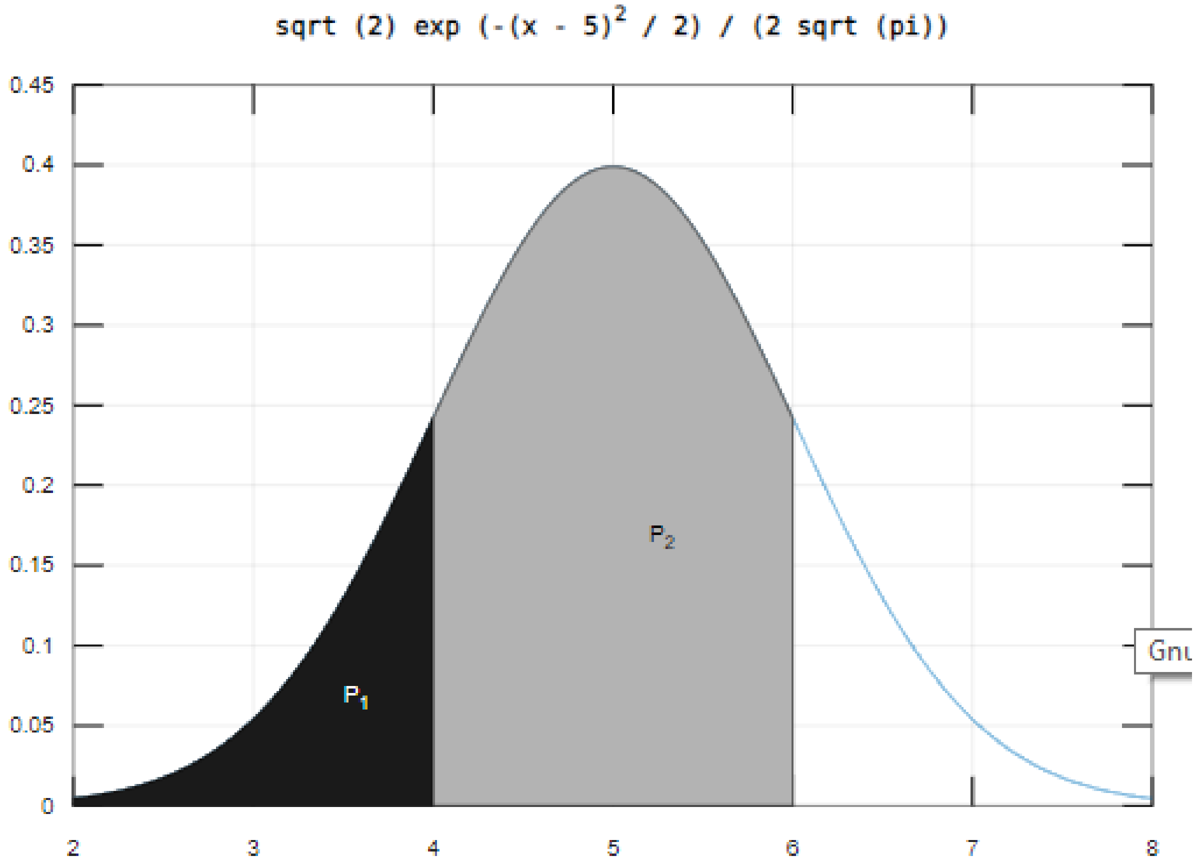
Код

```
mu = 5; sigma = 1; epsilon = 1; syms x pi,
f = 1/2*exp(-1/2*(x-mu)^2/sigma^2)/sigma*2^(1/2)/pi^(1/2);
P1 = int(f,x,-inf,mu-epsilon); P1 = simplify(P1), P1 =
double(P1)
P2 = int(f,x,mu-epsilon,mu+epsilon);
P2 = simplify(P2), P2 = double(P2)
P3 = int(f,x,mu+epsilon,inf); P3 = simplify(P3), P3 = double(P3)
P = P1+P2+P3, % P = int(f,x,-inf,inf)
Command Windows
P=1
P=1.234
P1=0.15866
P1=0.15867
P2=0.68269
P2=0.68499
P3=0.15866
P3=0.15868
```

Графическая иллюстрация решения, представленная на рис. 1.2, получена следующим программным кодом.

```
octave:39> xLim = 3*sigma; k = 10^-3; ezplot(f,[mu-xLim,mu+xLim]); hold
on,
axis([mu-xLim,mu+xLim,0,0.45]), xlabel('x'), ylabel('f'), grid on,
x = mu-xLim:2*epsilon*k:mu-epsilon; F = normpdf(x,mu,sigma);
xp = [x,mu-epsilon,mu-xLim]; C = [.1,.1,.1];
fp = [F,0,0]; patch(xp,fp,C); alpha(.5),
text(3.5,0.07,'P_1','Color','w'),
x = mu-epsilon:2*epsilon*k:mu+epsilon; F = normpdf(x,mu,sigma);
xp = [x,mu+epsilon,mu-epsilon]; C = [.7,.7,.7];
fp = [F,0,0]; patch(xp,fp,C); text(5.2,0.17,'P_2'), alpha(.5)
x = mu+epsilon:2*epsilon*k:mu+xLim; F = normpdf(x,mu,sigma);
xp = [x,mu+xLim,mu+epsilon]; fp = [F,0,0]; patch(xp,fp,C);
alpha(.5), text(6.3,0.07,'P_3','Color','w'),
```

рисунок 1.2



Задача 5. Построить М-функцию для графической иллюстрации и оценок вероятностей попадания значений случайной переменной, подчиняющейся нормальному распределению N (μ, σ), в интервал значений от $x1$ до $x2$. Используя М-функцию найти:

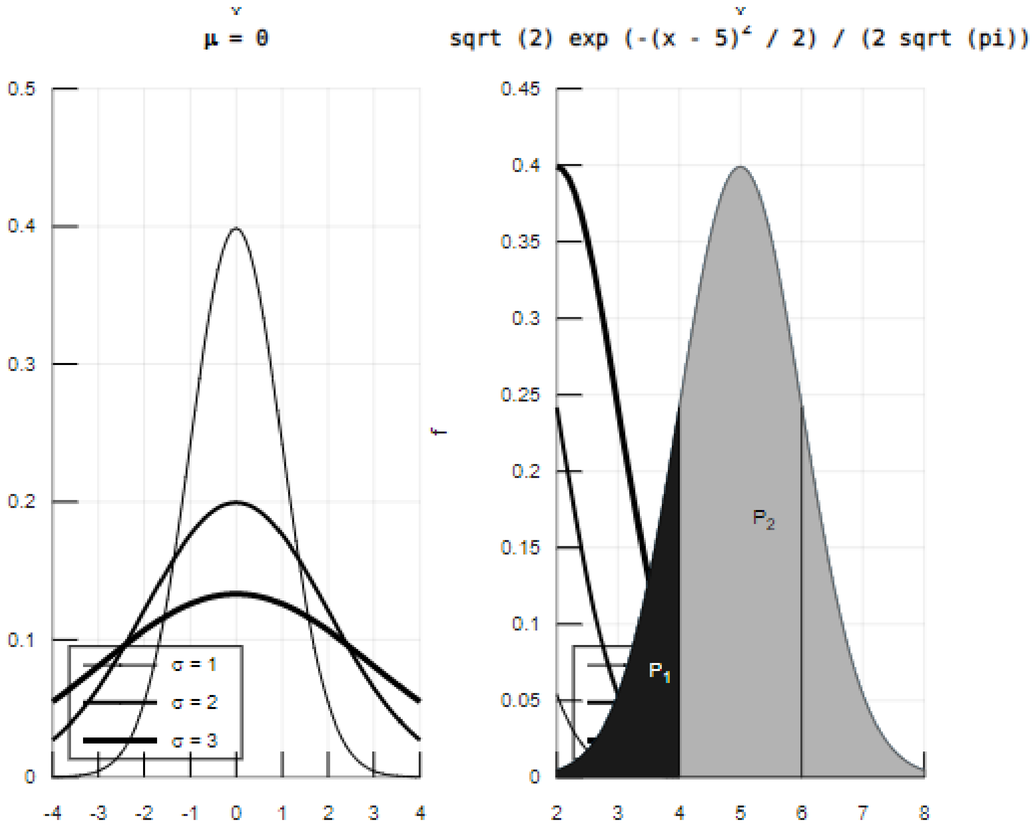
1) вероятность попадания случайной переменной с распределением N (μ = 0, σ = 1) в интервал значений от $x1$ = −1 до $x2$ = 2,

2) вероятность попадания случайной переменной с распределением N (μ = 2, σ = 1) в интервал от $x1 = \mu - 3\sigma = -1$ до $x2 = \mu + 3\sigma = 5$. Для решения задачи построим М-функцию.

Код

```
xLim = 3*sigma; k = 10^-3; ezplot(f,[mu-xLim,mu+xLim]); hold on,
axis([mu-xLim,mu+xLim,0,0.45]), xlabel('x'), ylabel('f'), grid
on,
x = mu-xLim:2*epsilon*k:mu-epsilon; F = normpdf(x,mu,sigma);
xp = [x,mu-epsilon,mu-xLim]; C = [.1,.1,.1];
fp = [F,0,0]; patch(xp,fp,C); alpha(.5),
text(3.5,0.07,'P_1','Color','w'),
x = mu-epsilon:2*epsilon*k:mu+epsilon; F = normpdf(x,mu,sigma);
xp = [x,mu+epsilon,mu-epsilon]; C = [.7,.7,.7];
fp = [F,0,0]; patch(xp,fp,C); text(5.2,0.17,'P_2'), alpha(.5)
x = mu+epsilon:2*epsilon*k:mu+xLim; F = normpdf(x,mu,sigma);
xp = [x,mu+xLim,mu+epsilon]; fp = [F,0,0]; patch(xp,fp,C);
alpha(.5), text(6.3,0.07,'P_3','Color','w'),
```

Рис. 1.2. Вероятность попадания в симметричный интервал.



Задача №6

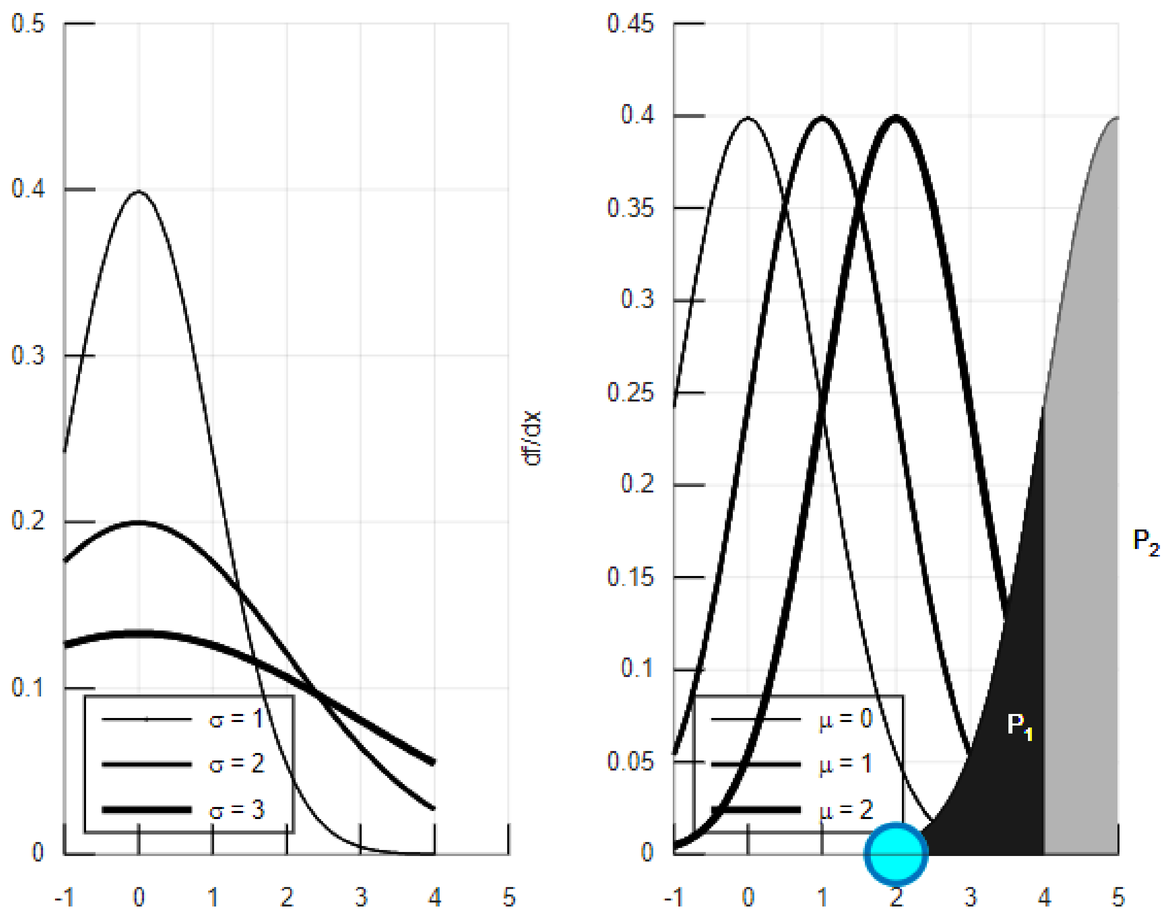
Вычислить моду нормального распределения с параметрами $\mu = 2$ и $\sigma = 1$.

Решение получим, исполняя следующий скрипт

```
mu0 = 2; sigma0 = 1; syms x mu sigma pi
f = 1/2*exp(-1/2*(x-mu)^2/sigma^2)/sigma*2^(1/2)/pi^(1/2);
diff_f = diff(f,x), mode = solve(diff_f)
subplot(1,2,1) f = subs(f,{mu,sigma},{mu0,sigma0}),
hh = ezplot(f); set(hh,'LineWidth',2), hold
on fm = subs(f,x,mu0)
 plot([mu0 mu0],[0,fm],'LineWidth',2,'Marker',...
'o','MarkerSize',8,'MarkerFaceColor','c') set(gca,'XLim',[-1 5]),
xlabel('x'), ylabel('f'), subplot(1,2,2)
diff_f = subs(diff_f,{'mu','sigma'},{2,1}), hh = ezplot(diff_f);
set(hh,'LineWidth',2), hold on plot(mu0,0,'LineWidth',2,'Marker',...
'o','MarkerSize',8,'MarkerFaceColor','c')
set(gca,'XLim',[-1 5]), xlabel('x'), ylabel('df/dx'),

Command Window
diff_f = -1 / 2*(x-mu)/sigma^3*exp(-1/2 * (x-mu)^2 / sigma^2)
* 2^(1/2)/pi^(1/2)
mode = mu
f = 1/2*exp(-1/2*(x-2)^2)*2^(1/2)/pi^(1/2) diff_f = -1/2*(x-
2)*exp(-1/2*(x-2)^2)*2^(1/2)/pi^(1/2)
```

Рис. 1.4. Вычисление моды нормального распределения




```
mu = 2;
sigma = 1;
 x=-3*sigma:0.1:3*sigma;
f = normpdf(x,mu,sigma);
[fmax,k] = max(f), mode = x(k)

Command Window
fmax = 0.4123
k = 51
mode = 2
```

1.2 Кумулятивное распределение

Задача 7.

Построить графики функций кумулятивного нормального распределения со средним значением μ = 0 и стандартными отклонениями σ = 1, 2, 3,

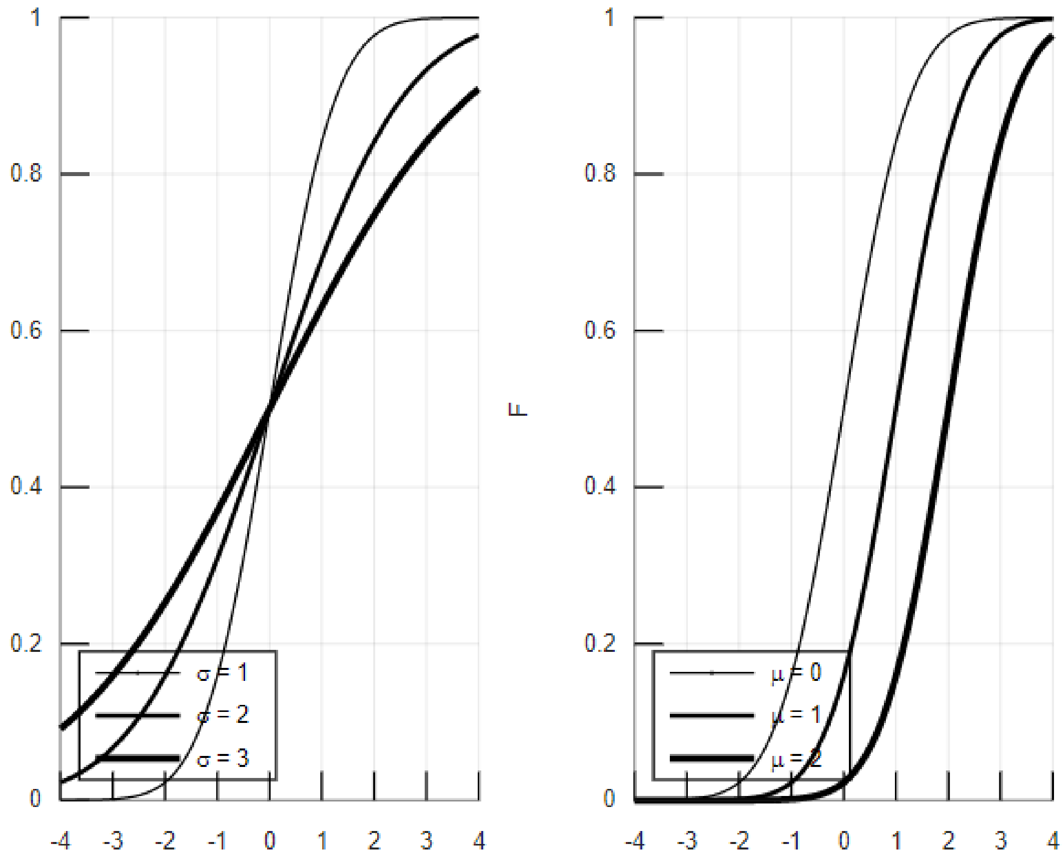
2) со средними значениями μ = 0, 1, 2 и стандартным отклонением σ = 1. Результат исполнения следующей программы показан на рис. 1.5.

Код

```
LWidth = [1,2,3];
```

```
subplot(1,2,1), hold on,
mu = 0; sigma = 1:3;
x = -4:0.1:4;
 for j = 1:3
f = normcdf(x,mu,sigma(j));
 plot(x,f,'k','LineWidth',LWidth(j))
 end
grid on, xlabel('x'), ylabel('F'),
axis([-4 4 0 1.0]) title('\mu = 0'), legend('\sigma = 1',... '\sigma = 
2','\sigma = 3',2)
subplot(1,2,2),
hold on,
 mu = 0:2;
sigma = 1; x=-4:0.1:4;
 for j = 1:3 f = normcdf(x,mu(j),sigma);
plot(x,f,'k','LineWidth',LWidth(j)) end grid on, xlabel('x'),
ylabel('F'), axis([-4 4 0 1.0])
title('\sigma = 1'), legend('\mu = 0','\mu = 1','\mu = 2',2)
```

Рисунок 1.5 функция комулятивного нормального распределения

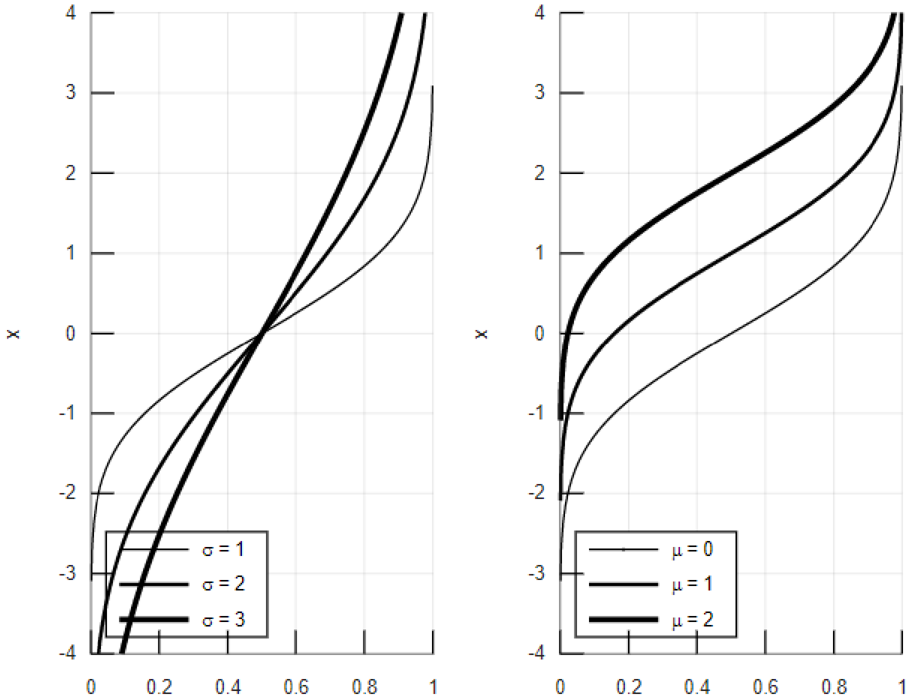


1.3 Обратное кумулятивное распределение

Задача 8. Построить графики функций обратных кумулятивных нормальных распределений

- со средним значением $\mu = 0$ и стандартными отклонениями $\sigma = 1, 2, 3,$
- со средними значениями $\mu = 0, 1, 2$ и стандартным отклонением $\sigma = 1.$

(рисунок 1.6)



Код графика 1.6

```
LWidth = [1,2,3]; mu = 0; sigma = 1:3; F = 0:1e-3:1;
subplot(1,2,1), hold on,
 for j = 1:3
             x  = norminv(F,mu,sigma(j));
             plot(F,x,'k','LineWidth',LWidth(j)),
end
 grid on, title('\mu = 0')
axis([0 1 -4 4]), xlabel('F'), ylabel('x')
legend('\sigma = 1','\sigma = 2','\sigma = 3',2)
subplot(1,2,2), hold on, mu = 0:2; sigma = 1;
for j = 1:3
            x = norminv(F,mu(j),sigma);
            plot(F,x,'k','LineWidth',LWidth(j)),
end
 grid on, title('\sigma = 1')
axis([0 1 -4 4]), xlabel('F'), ylabel('x')
 legend('\mu = 0','\mu = 1','\mu = 2',2)
```

2. Экспоненциальное распределение

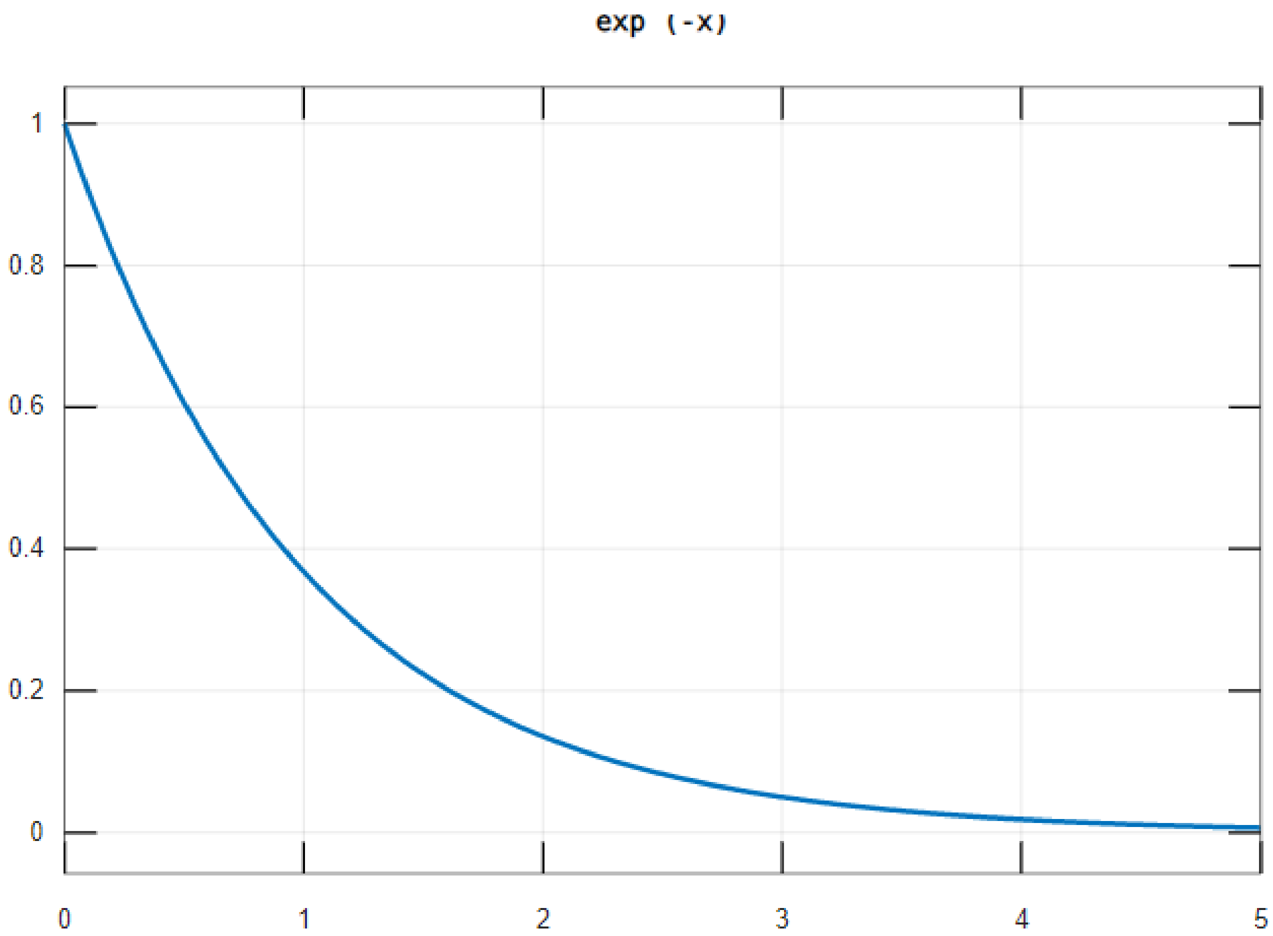
Задача 9.

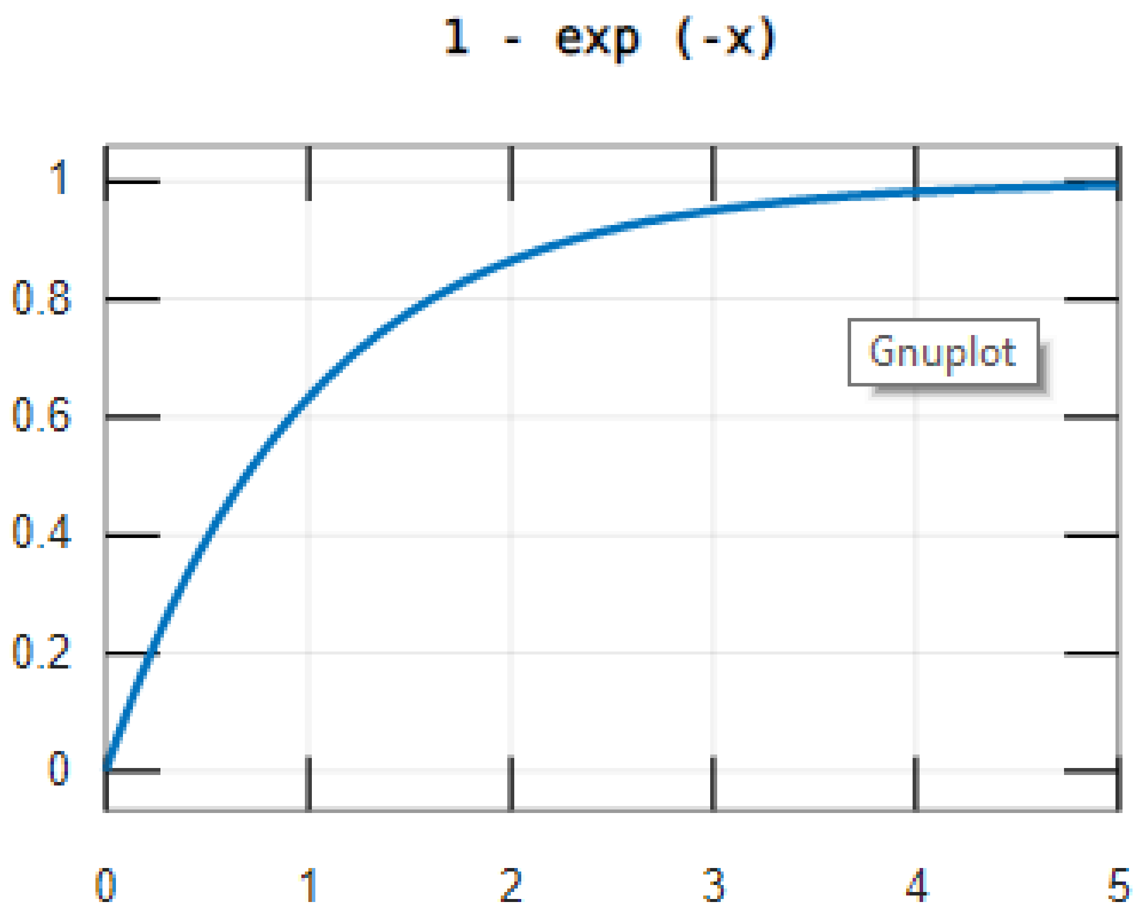
Экспоненциальное распределение — абсолютно непрерывное распределение, моделирующее время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

Листинг функций кумулятивного и обратного кумулятивного экспоненциального распределения:

```
syms x mu p subplot(4,7,[1:4 8:11])
f = 1/mu*exp(-x/mu); f = subs(f,'mu',1);
h = ezplot(f,[0,5]); set(h,'LineWidth',2), grid on,
ylabel('f')
subplot(4,7,[15:18 22:25])
F = 1-exp(-x/mu); F = subs(F,'mu',1);
h = ezplot(F,[0,5]); set(h,'LineWidth',2)
grid on, xlabel('x'), ylabel('F'),
```

Рис. 1.7. График функций кумулятивного и обратного кумулятивного экспоненциального распределения.


exp (-x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5



3.Логнормальное распределение

Функция кумулятивного логарифмически-нормального (или, кратко, логнормального) распределения.

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2a^2}}$$

Плотность распределения случайной переменной y определяется дифференцированием функции распределения:

$$f(y|\mu,\sigma) = \frac{d}{dy} F(y|\mu,\sigma)$$

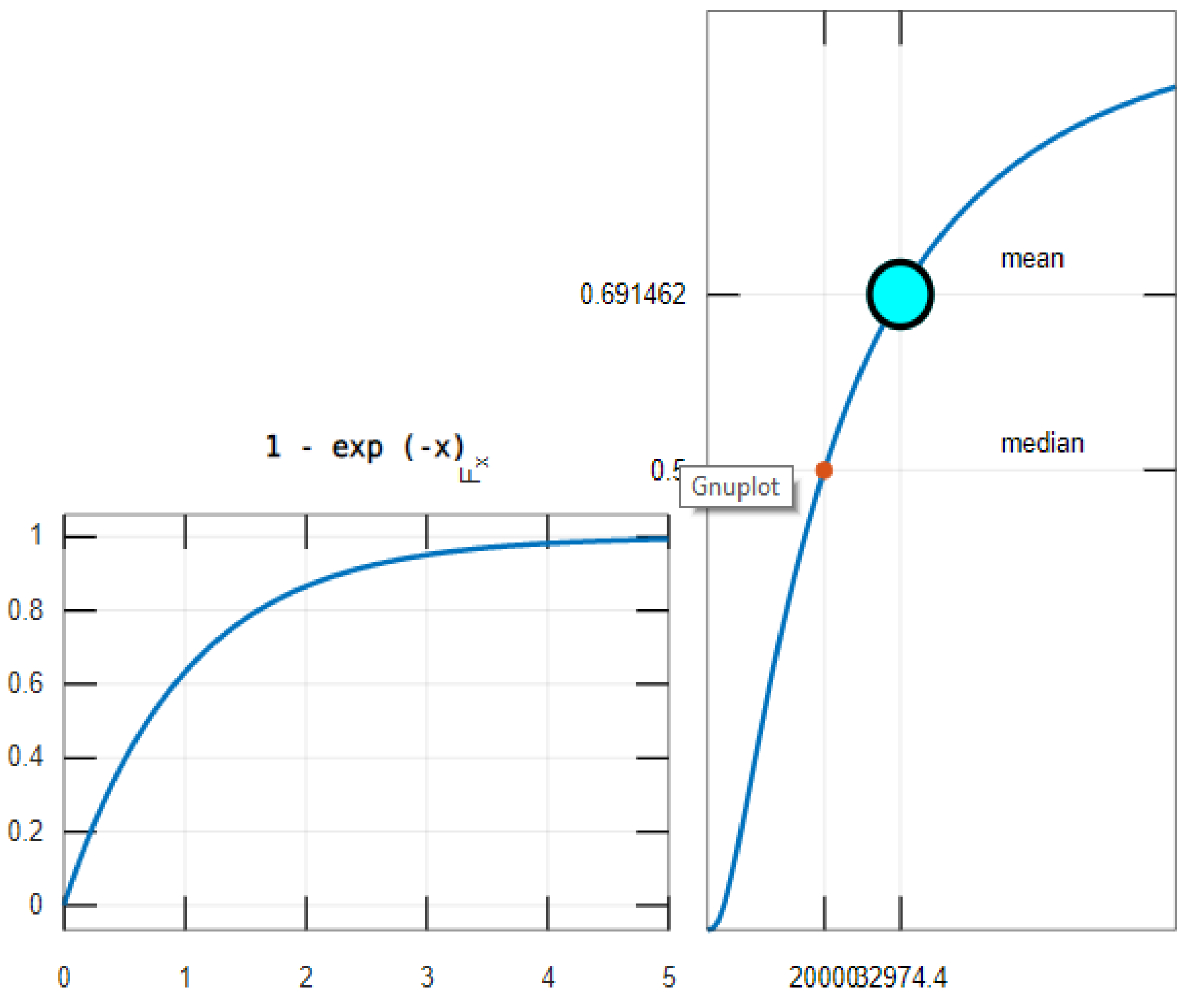
Логнормально распределены, например, доходы населения, банковские вклады, заработная плата, посевные площади и т.д.

Задача 10.

Построить график плотности логнормального распределения log N (μ = log (20000), σ = 1) дохода на семью из 4 человек в США. Найти средний и медианный доход.

Следующий программный код строит график функции плотности вероятности, показанный в левом подокне рисунка.

Рисунок 1.8



Код к графикам 1.8

```
subplot(1,2,2), x = 0:1000:120000; mu = log(20000); sigma
= 1;
F = logncdf(x,mu,sigma); plot(x,F,'LineWidth',2), hold on
xmean = exp(mu+1/2*sigma^2); xmedian = exp(mu);
Fmedian = logncdf(xmedian,mu,sigma);
Fmean = logncdf(xmean,mu,sigma);
plot(xmedian,Fmedian,xmean,Fmean,'k.',...
'Marker','o','MarkerSize',8,'MarkerFaceColor','c')
text(5*1e4,.53,'median'), text(5*1e4,.73,'mean')
set(gca,'XTick',[xmedian,xmean]),
set(gca,'YTick',[Fmedian,Fmean])
grid on, axis([0,80000,0,1]), xlabel('x, $'),
ylabel('F_x')
```

Заключение

Написан и отлажен программный код статистические распределения случайных переменных.

Литература и интернет источники

1 https://ru.wikipedia.org/wiki/Заглавная_страница

2 https://ru.wikipedia.org/wiki/MATLAB

3 https://sites.google.com/view/meshcher/главная

4 https://www.mathworks.com

5 https://github.com

6 https://www.matburo.ru/ex_tv.php?p1=tvexp

7 https://excel2.ru/articles/lognormalnoe-raspredelenie-nepreryvnye-raspredeleniya-v-ms-excel

8 https://studfiles.net/preview/6796793/page:7/