

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
“ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ”
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ
СІКОРСЬКОГО”
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА №1

з теорії ймовірності
на тему: «Випадкові вектори»
Варіант 7

Виконав студент 2 курсу
групи КА-06
Вергелюк Олександр
Андрійович
Перевірів:
Ільєнко А. Б.

Київ – 2021

1 ЗАВДАННЯ 1

Нехай дискретний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ задано таблицею розподілу (Таблиця 1.1).

Таблиця 1.1 — Таблиця розподілу вектора $\vec{\xi}$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	2	7	8
-2	0.17	0.01	0.07	0.06
1	0.13	0.08	0.04	0.08
2	0.12	0.02	0.07	0.15

1.1 Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Для ξ_1 використаємо формулу: $p_i = \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\} = \sum_{j=1}^n p_{ij}$.

Таблиця 1.2 — Ряд розподілу ξ_1

x_i	-2	1	2
p_i	0.31	0.33	0.36

Перевірка:

$$0.31 + 0.33 + 0.36 = 1$$

Аналогічно для ξ_2 : $p_j = \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\} = \sum_{i=1}^m p_{ij}$.

Таблиця 1.3 — Ряд розподілу ξ_2

y_i	-9	2	7	8
p_i	0.42	0.11	0.18	0.29

Перевірка:

$$0.42 + 0.11 + 0.18 + 0.29 = 1$$

1.2 Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ і $F_{\xi_2}(y)$ та їх графіки

Для координати ξ_1 :

$$F_{\xi_1} = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ 0.31 & -2 < x \leq 1 \\ 0.64 & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

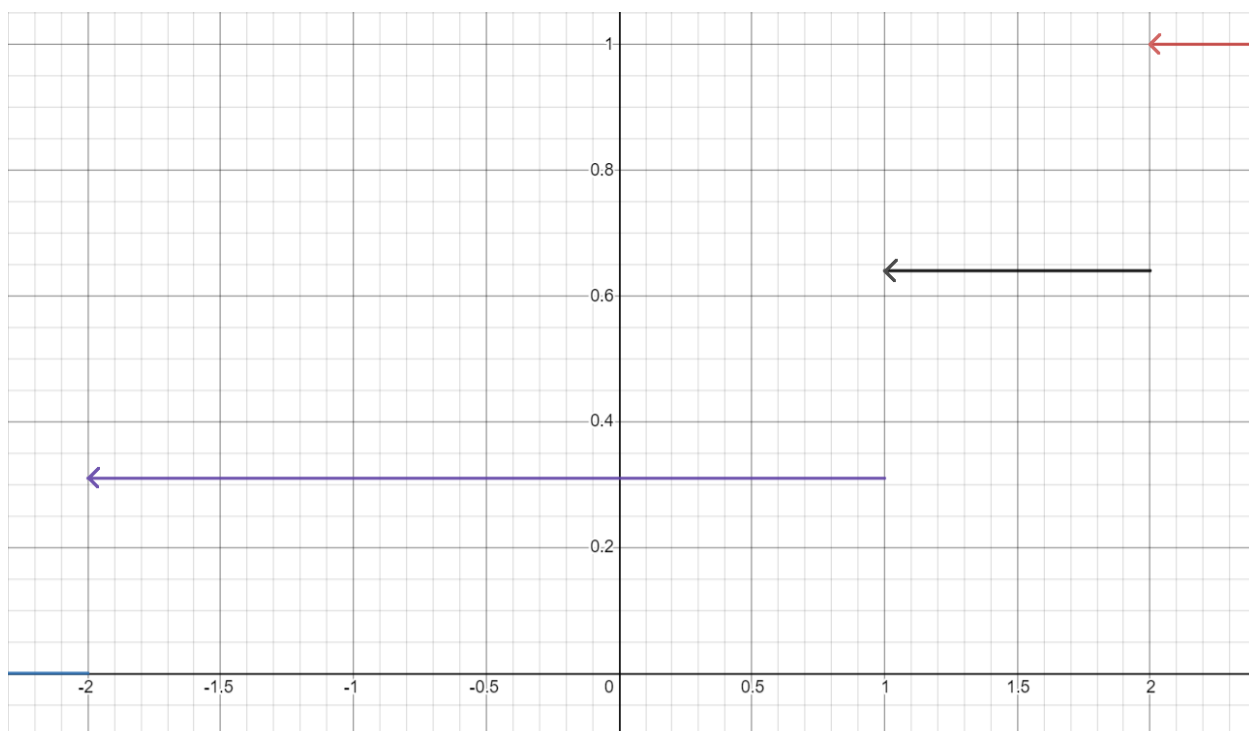


Рисунок 1.1 — Функція розподілу $F_{\xi_1}(x)$

Для координати ξ_2 :

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -9 \\ 0.42 & -9 < y \leq 2 \\ 0.53 & 2 < y \leq 7 \\ 0.71 & 7 < y \leq 8 \\ 1 & 8 < y \end{cases}$$

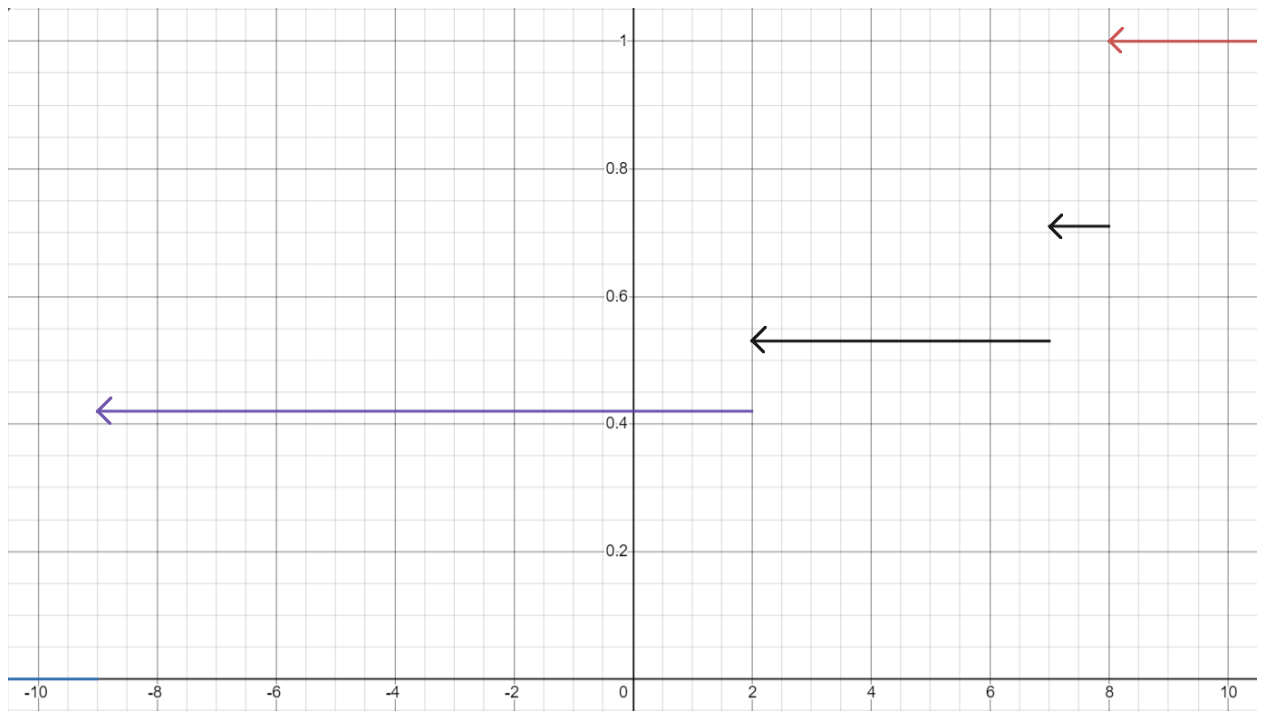


Рисунок 1.2 — Функція розподілу $F_{\xi_2}(y)$

1.3 Функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора

Зобразимо в декартовій системі координат всі точки, що відповідають значенню вектора $\vec{\xi}$ (рис. 1.3).

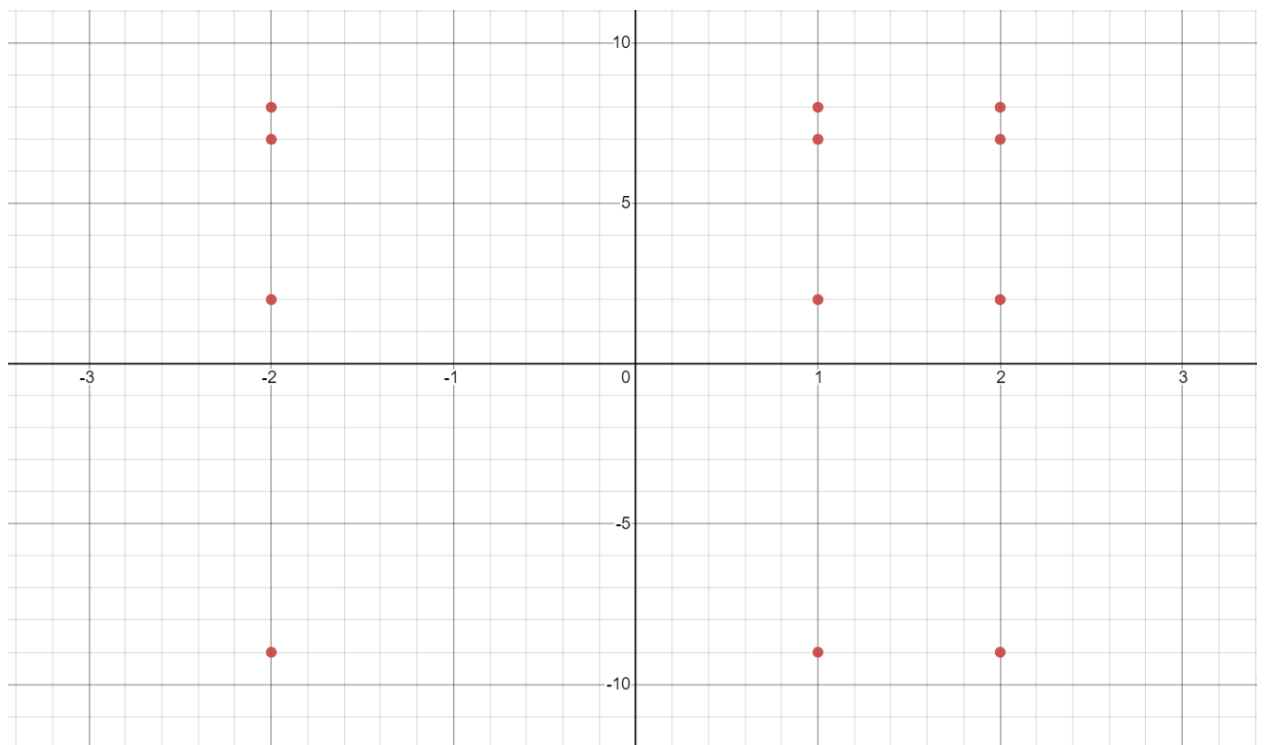


Рисунок 1.3 — Значення вектора $\vec{\xi}$ в декартовій системі координат

Розіб'ємо координатну площину на області, в яких сумісна функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ набуває однакові значення (рис. 1.4).

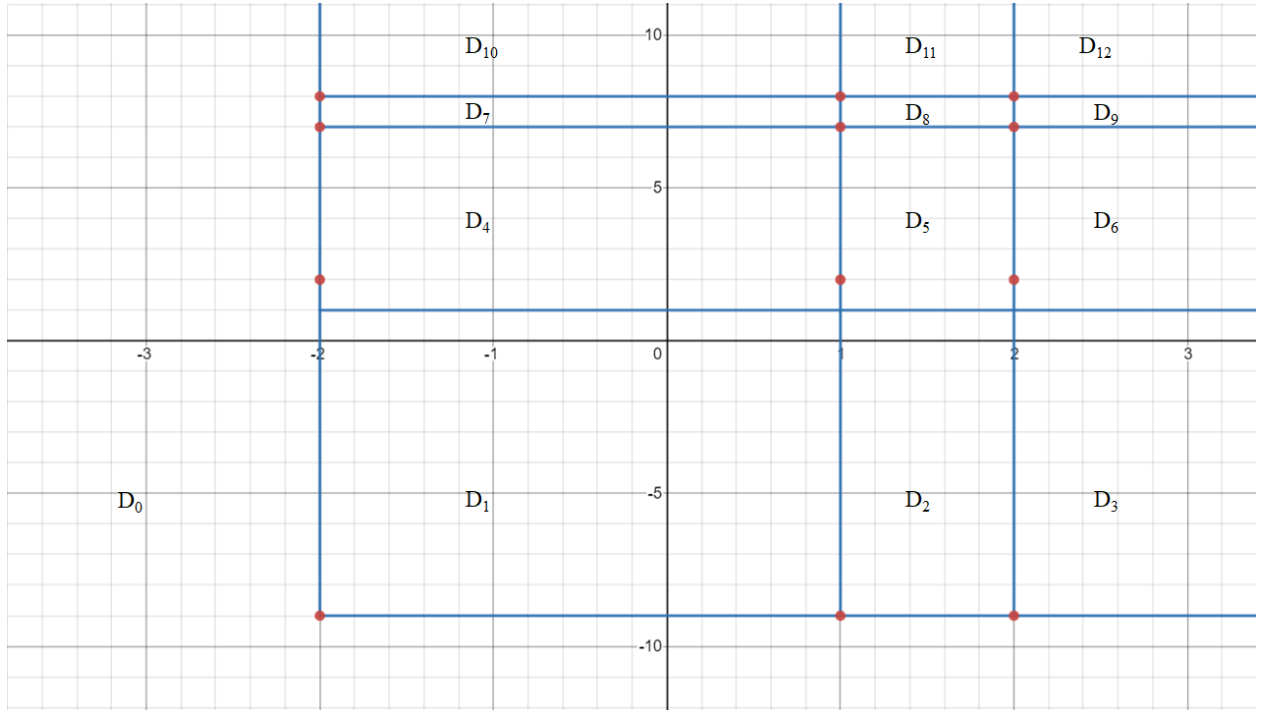


Рисунок 1.4 — Області, в яких сумісна функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ набуває однакові значення

Використаємо формулу:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\} = \sum_{i: x_i < x} \sum_{j: y_j < y} p_{ij}$$

- a) $(x, y) \in D_0 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$
- b) $(x, y) \in D_1 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.17$
- c) $(x, y) \in D_2 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.3$
- d) $(x, y) \in D_3 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.42$
- e) $(x, y) \in D_4 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.18$
- f) $(x, y) \in D_5 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.39$
- g) $(x, y) \in D_6 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.53$
- h) $(x, y) \in D_7 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.25$
- i) $(x, y) \in D_8 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.5$
- j) $(x, y) \in D_9 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.71$
- k) $(x, y) \in D_{10} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.31$
- l) $(x, y) \in D_{11} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.64$

$$m) (x, y) \in D_1 \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 1$$

Запишемо функцію розподілу у вигляді таблиці:

Таблиця 1.4 — Сумісна функція розподілу $F_{\xi}(x, y)$

$x \backslash y$	$y \leq -9$	$-9 < y \leq 2$	$2 < y \leq 7$	$7 < y \leq 8$	$8 < y$
$x \leq -2$	0	0	0	0	0
$-2 < x \leq 1$	0	0.17	0.18	0.25	0.31
$1 < x \leq 2$	0	0.3	0.39	0.5	0.64
$2 < x$	0	0.42	0.53	0.71	1

Перевірка (властивість узгодження):

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi}(x, y) = F_{\xi_1}(x) \text{ виконується, оскільки останній стовпчик — це } F_{\xi_1}(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi}(x, y) = F_{\xi_2}(y) \text{ виконується, оскільки останній рядок — це } F_{\xi_2}(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi}(x, y) = 1 \text{ виконується, оскільки } (x, y) \in D_1 \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 1$$

$$y \rightarrow \infty$$

1.4 Математичні сподівання координат та кореляційна матриця

Знайдемо математичне сподівання координати ξ_1 :

$$\mathbb{E}\xi_1 = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = (-2) \cdot 0.31 + 1 \cdot 0.33 + 2 \cdot 0.36 = 0.43$$

Аналогічно для координати ξ_2 :

$$\mathbb{E}\xi_2 = \sum_{j=1}^4 x_j p_j = (-9) \cdot 0.42 + 2 \cdot 0.11 + 7 \cdot 0.18 + 8 \cdot 0.29 = 0.02$$

Центр розсіювання вектора $\vec{\xi}$ — точка $(0.43, 0.02)$.

Дисперсія координати ξ_1 :

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)^2 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = (-2)^2 \cdot 0.31 + 1^2 \cdot 0.33 + 2^2 \cdot 0.36 = 3.01$$

Дисперсія координати ξ_2 :

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)^2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = (-9)^2 \cdot 0.42 + 2^2 \cdot 0.11 + 7^2 \cdot 0.18 + 8^2 \cdot 0.29 = 61.84$$

Для побудови коваріаційної матриці скористаємося формулами:

$$\text{cov}(\xi_1\xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2$$

$$\text{cov}(\xi_1\xi_1) = \mathbb{D}\xi_1$$

$$\text{cov}(\xi_2\xi_2) = \mathbb{D}\xi_2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_1\xi_2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_i y_j p_{ij} = (-2) \cdot (-9) \cdot 0.17 + (-2) \cdot 2 \cdot 0.01 + \\ &(-2) \cdot 7 \cdot 0.07 + (-2) \cdot 8 \cdot 0.06 + 1 \cdot (-9) \cdot 0.13 + 1 \cdot 2 \cdot 0.08 + \\ &+ 1 \cdot 7 \cdot 0.04 + 1 \cdot 8 \cdot 0.08 + 2 \cdot (-9) \cdot 0.12 + 2 \cdot 2 \cdot 0.02 + \\ &+ 2 \cdot 7 \cdot 0.07 + 2 \cdot 8 \cdot 0.15 = 2.29 \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi_1\xi_2) = 2.29 - 0.43 \cdot 0.02 = 2.2814$$

Тоді коваріаційна матриця:

$$C_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & \text{cov}(\xi_1\xi_2) \\ \text{cov}(\xi_1\xi_2) & \mathbb{D}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.01 & 2.2814 \\ 2.2814 & 61.84 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\text{cov}(\xi_1\xi_2) \neq 0$, то випадкові величини ξ_1 та ξ_2 корельовані та залежні.

1.5 Умовні ряди розподілу

Знайдемо умовні ряди розподілу для ξ_1 за $\xi_2 = y_j$.

$$\mathbb{P}(\xi_1 = x_i | \xi_2 = y_j) = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^m p_{ij}}$$

Таблиця 1.5 — Умовні ряди розподілу для ξ_1 за $\xi_2 = y_j$

$\xi_1 \backslash x$	-2	1	2
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot \xi_2 = -9\}$	$\frac{17}{42}$	$\frac{13}{42}$	$\frac{12}{42}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot \xi_2 = 2\}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{11}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot \xi_2 = 7\}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot \xi_2 = 8\}$	$\frac{6}{29}$	$\frac{8}{29}$	$\frac{15}{29}$

Перевірка:

$$\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = -9\} = \frac{17}{42} + \frac{13}{42} + \frac{12}{42} = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = 2\} = \frac{1}{11} + \frac{8}{11} + \frac{2}{11} = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = 7\} = \frac{7}{18} + \frac{4}{18} + \frac{7}{18} = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = 8\} = \frac{6}{29} + \frac{8}{29} + \frac{15}{29} = 1$$

Аналогічно для ξ_1 за $\xi_2 = y_j$.

$$\mathbb{P}(\xi_2 = y_j | \xi_2 = x_i) = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}}$$

Таблиця 1.6 — Умовні ряди розподілу для ξ_2 за $\xi_1 = x_i$

$\xi_2 \backslash y$	-9	2	7	8
$\mathbb{P}\{\xi_2 = \cdot \xi_1 = -2\}$	$\frac{17}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{6}{31}$
$\mathbb{P}\{\xi_2 = \cdot \xi_1 = 1\}$	$\frac{13}{33}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{8}{33}$
$\mathbb{P}\{\xi_2 = \cdot \xi_1 = 2\}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{15}{36}$

Перевірка:

$$\sum_{j=1}^4 \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = -2\} = \frac{17}{31} + \frac{1}{31} + \frac{7}{31} + \frac{6}{31} = 1$$

$$\sum_{j=1}^4 \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = 1\} = \frac{13}{33} + \frac{8}{33} + \frac{4}{33} + \frac{8}{33} = 1$$

$$\sum_{j=1}^4 \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = 2\} = \frac{12}{36} + \frac{2}{36} + \frac{7}{36} + \frac{15}{36} = 1$$

1.6 Умовні математичні сподівання

Для пошуку умовного математичного сподівання ξ_1 за $\xi_2 = y_j$ застосуємо формулу:

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = y_j) = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = -9) = (-2) \cdot \frac{17}{42} + 1 \cdot \frac{13}{42} + 2 \cdot \frac{12}{42} = \frac{3}{42}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = 2) = (-2) \cdot \frac{1}{11} + 1 \cdot \frac{8}{11} + 2 \cdot \frac{2}{11} = \frac{10}{11}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = 7) = (-2) \cdot \frac{7}{18} + 1 \cdot \frac{4}{18} + 2 \cdot \frac{7}{18} = \frac{4}{18}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = 8) = (-2) \cdot \frac{6}{29} + 1 \cdot \frac{8}{29} + 2 \cdot \frac{15}{29} = \frac{26}{29}$$

Наведемо ряд умовного математичного сподівання $\xi_1|\xi_2$ у вигляді таблиці.

Таблиця 1.7 — Умовне математичне сподівання $\xi_1|\xi_2 = y_j$

$\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2)$	$\frac{3}{42}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{26}{29}$
\mathbb{P}	0.42	0.11	0.18	0.29

Перевірка:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) = \frac{3}{42} \cdot 0.42 + \frac{10}{11} \cdot 0.11 + \frac{4}{18} \cdot 0.18 + \frac{26}{29} \cdot 0.29 = 0.43 = \mathbb{E}\xi_1$$

Аналогічно умовне математичне сподівання ξ_2 за $\xi_1 = x_i$:

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^4 y_j \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|x_{i_1} = -2) = (-9) \cdot \frac{17}{31} + 2 \cdot \frac{1}{31} + 7 \cdot \frac{7}{31} + 8 \cdot \frac{6}{31} = -\frac{54}{31} = -1\frac{23}{31}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|x_{i_1} = -2) = (-9) \cdot \frac{13}{33} + 2 \cdot \frac{8}{33} + 7 \cdot \frac{4}{33} + 8 \cdot \frac{8}{33} = -\frac{9}{33} = -\frac{9}{33}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|x_{i_1} = -2) = (-9) \cdot \frac{12}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} + 7 \cdot \frac{7}{36} + 8 \cdot \frac{15}{36} = \frac{65}{36} = 1\frac{29}{36}$$

Наведемо ряд умовного математичного сподівання $\xi_2|\xi_1$ у вигляді таблиці.

Таблиця 1.8 — Умовне математичне сподівання $\xi_2|\xi_1 = x_i$

$\mathbb{E}(\xi_2 \xi_1)$	$-1\frac{23}{31}$	$-\frac{9}{33}$	$1\frac{29}{36}$
\mathbb{P}	0.31	0.33	0.36

Перевірка:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)) = (-1\frac{23}{31}) \cdot 0.31 + (-\frac{9}{33}) \cdot 0.33 + 1\frac{29}{36} \cdot 0.36 = 0.02 = \mathbb{E}\xi_2$$

2 ЗАВДАННЯ 2

Двовимірний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ рівномірно розподілений в області D , яка наведена на рис. 2.1.

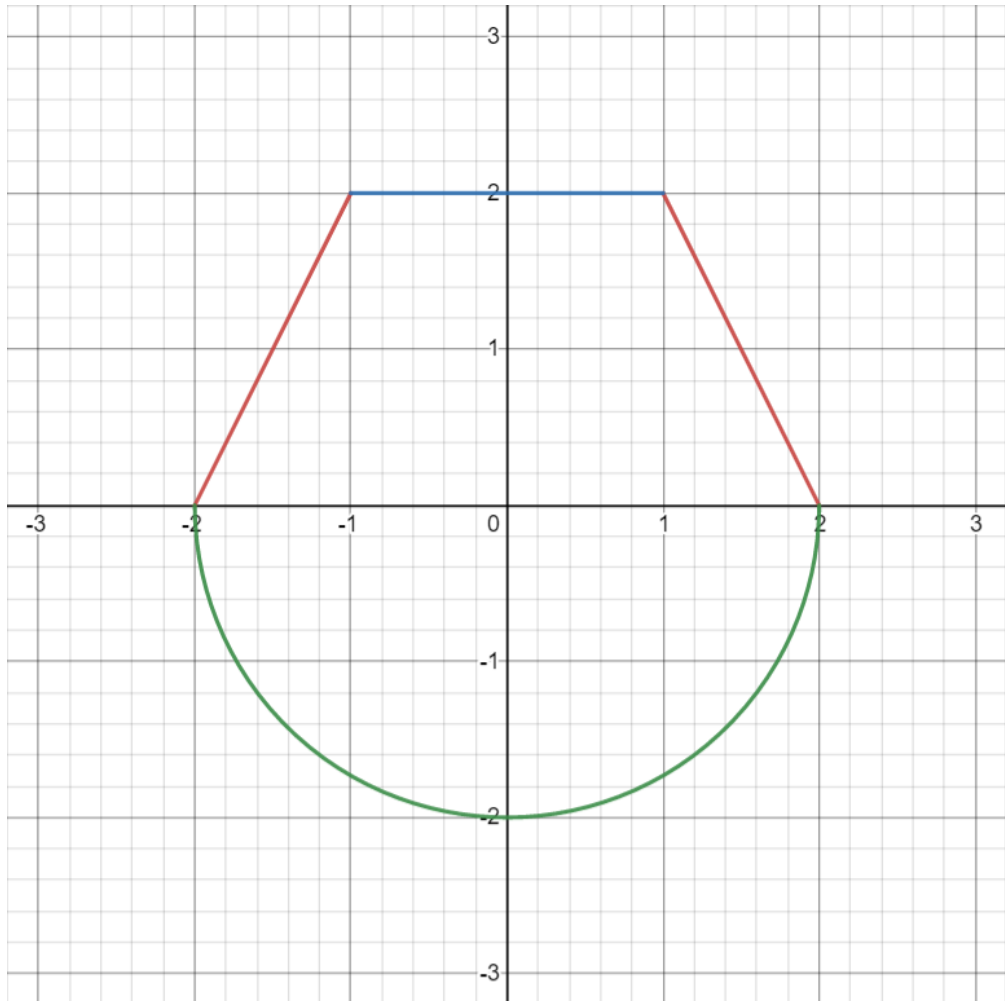


Рисунок 2.1 — Область, в якій розподілено $\vec{\xi}$

Рівняння ліній, що обмежують область D :

$$\begin{cases} y = 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ y = -2x + 4 & 1 \leq x \leq 2 \\ y = -\sqrt{4 - x^2} & -2 \leq x \leq 2 \\ y = 2x + 4 & -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

2.1 Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Знайдемо щільність розподілу за формулою:

$$f_{\vec{\xi}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_D &= \iint_D dx dy = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2x+4} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^2 dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-2x+4} dy = \\ &= \int_{-2}^{-1} (2x+4+\sqrt{4-x^2}) dx + \int_{-1}^1 (2+\sqrt{4-x^2}) dx + \int_1^2 (4-2x+\sqrt{4-x^2}) dx = \\ &= \int_{-2}^{-1} (2x+4) dx + \int_{-1}^1 2 dx + \int_1^2 (4-2x) dx + \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \\ &= (x^2+4x)|_{-2}^{-1} + 2x|_{-1}^1 + (4x-x^2)|_1^2 - 4 \int_{\pi}^0 \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= 1+4+1+2 \int_0^{\pi} (1-\cos 2\varphi) d\varphi = 6 + (2\varphi - \sin 2\varphi)|_0^{\pi} = \\ &= 6 + 2\pi \end{aligned}$$

В подальшому для обчислення інтегралу $\int \sqrt{4-x^2} dx$ користуватимемось загальною формулою, яка наведена у додатку А.

Позначимо $S_D = 6 + 2\pi$.

Отже, щільність розподілу:

$$f_{\vec{\xi}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6+2\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Тепер знайдемо маргінальні щільності координат вектора.

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{\xi}}(x, y) dy = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \frac{1}{S_D} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2x+4} dy & -2 < x \leq -1 \\ \frac{1}{S_D} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^2 dy & -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{S_D} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-2x+4} dy & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \frac{2x + 4 + \sqrt{4 - x^2}}{6 + 2\pi} & -2 < x \leq -1 \\ \frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{6 + 2\pi} & -1 < x \leq 1 \\ \frac{4 - 2x + \sqrt{4 - x^2}}{6 + 2\pi} & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$

Перевірка умови нормування: $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x)dx = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x)dx &= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(\int_{-2}^{-1} (2x + 4 + \sqrt{4 - x^2})dx + \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{4 - x^2})dx \right) + \\ &\quad + \frac{1}{6 + 2\pi} \int_1^2 (4 - 2x + \sqrt{4 - x^2})dx = \\ &= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(\int_{-2}^{-1} (2x + 4)dx + \int_{-1}^1 2dx + \int_1^2 (4 - 2x)dx + \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}dx \right) = \\ &= \frac{1}{6 + 2\pi} \left((x^2 + 4x)|_{-2}^{-1} + 2x|_{-1}^1 + (4x - x^2)|_1^2 - 4 \int_{\pi}^0 \sin^2 \varphi d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(1 + 4 + 1 + 2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi)d\varphi = 6 + (2\varphi - \sin 2\varphi)|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{6 + 2\pi}{6 + 2\pi} = 1 \end{aligned}$$

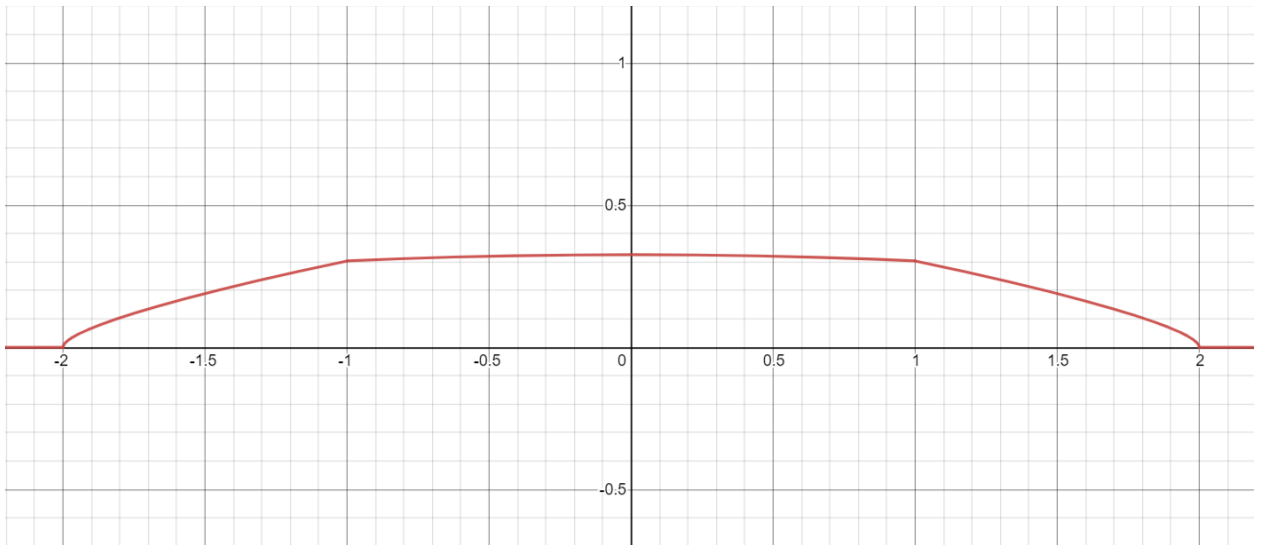


Рисунок 2.2 — Щільність координати $\xi_1(x)$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x, y) dx = \begin{cases} 0 & y \leq -2 \\ \frac{1}{S_D} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx & -2 < y \leq 0 \\ \frac{1}{S_D} \int_{0.5y-2}^{-0.5y+2} dx & 0 < y \leq 2 \\ 0 & 2 < y \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -2 \\ \frac{2\sqrt{4-y^2}}{6+2\pi} & -2 < y \leq 0 \\ \frac{4-y}{6+2\pi} & 0 < y \leq 2 \\ 0 & 2 < y \end{cases}$$

Перевірка умови нормування: $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(y) dy = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(y) dy &= \frac{1}{6+2\pi} \left(2 \int_{-2}^0 \sqrt{4-y^2} dy + \int_0^2 (4-y) dy \right) = \\ &= \frac{1}{6+2\pi} \left(8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \varphi d\varphi + \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^2 \right) = \\ &= \frac{1}{6+2\pi} \left(4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 + \cos 2\varphi) d\varphi + 6 \right) = \\ &= \frac{1}{6+2\pi} \left((4\varphi + 2 \sin 2\varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + 6 \right) = \frac{6+2\pi}{6+2\pi} = 1 \end{aligned}$$

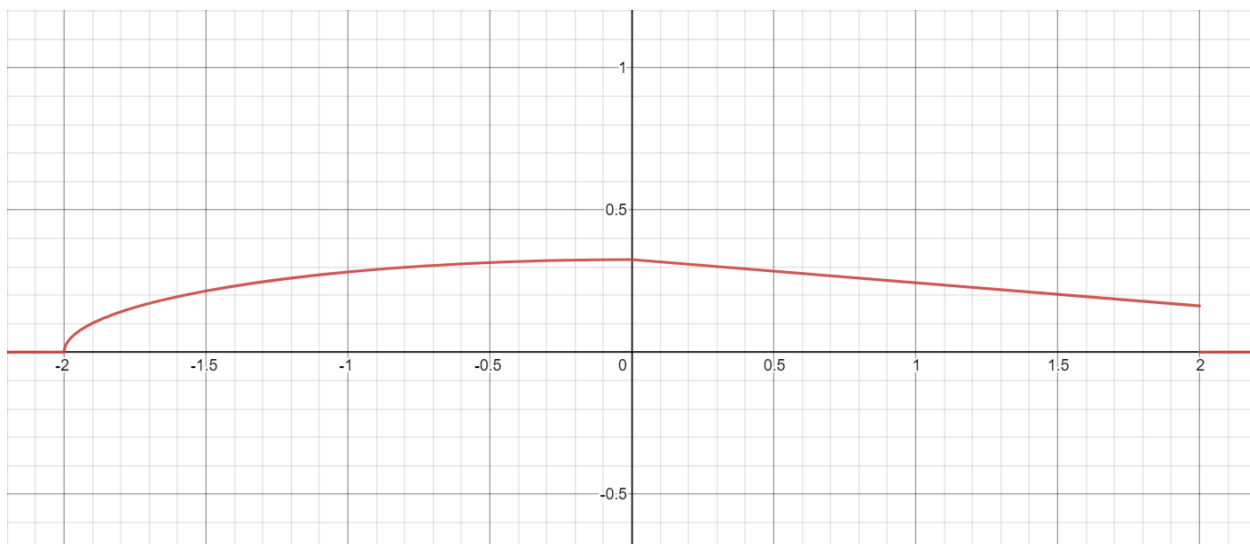


Рисунок 2.3 — Щільність координати $\xi_2(y)$

2.2 Функції розподілу координати ξ_1 та ξ_2

Обчислимо функцію розподілу $F_{\xi_1}(x)$ координати ξ_1 .

$$F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi_1}(x) dx$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \frac{1}{6+2\pi} \int_{-2}^x (2s+4+\sqrt{4-s^2}) ds & -2 < x \leq -1 \\ F_{\xi_1}(-1) + \frac{1}{6+2\pi} \int_{-1}^x (2+\sqrt{4-s^2}) ds & -1 < x \leq 1 \\ F_{\xi_1}(1) + \frac{1}{6+2\pi} \int_1^x (4-2s+\sqrt{4-s^2}) ds & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \frac{x^2+4x+2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+4+\pi}{6+2\pi} & -2 < x \leq -1 \\ \frac{2x+2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+3+\pi}{6+2\pi} & -1 < x \leq 1 \\ \frac{4x-x^2+2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2+\pi}{6+2\pi} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

Перевірка неперервності функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ в точках склейки.

$$\lim_{-2-0} F_{\xi_1}(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{-2+0} F_{\xi_1}(x) &= \lim_{-2+0} \left(\frac{x^2 + 4x + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 4 + \pi}{6 + 2\pi} \right) = \\ &= \frac{(-2)^2 + 4(-2) + 2 \arcsin \frac{(-2)}{2} + \frac{(-2)}{2} \sqrt{4 - (-2)^2} + 4 + \pi}{6 + 2\pi} = \\ &= \frac{4 - 8 - \pi + 4 + \pi}{6 + 2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{-1-0} F_{\xi_1}(x) &= \lim_{-1-0} \left(\frac{x^2 + 4x + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 4 + \pi}{6 + 2\pi} \right) = \\ &= \frac{(-1)^2 + 4(-1) + 2 \arcsin \frac{(-1)}{2} + \frac{(-1)}{2} \sqrt{4 - (-1)^2} + 4 + \pi}{6 + 2\pi} = \\ &= \frac{1 - 4 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 + \pi}{6 + 2\pi} = \frac{1 + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{6 + 2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{-1+0} F_{\xi_1}(x) &= \lim_{-1+0} \left(\frac{2x + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 3 + \pi}{6 + 2\pi} \right) = \\ &= \frac{2(-1) + 2 \arcsin \frac{(-1)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4 - (-1)^2} + 3 + \pi}{6 + 2\pi} = \\ &= \frac{-2 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + \pi}{6 + 2\pi} = \frac{1 + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{6 + 2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{1-0} F_{\xi_1}(x) &= \lim_{1-0} \left(\frac{2x + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 3 + \pi}{6 + 2\pi} \right) = \\ &= \frac{2 + 2 \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4 - 1^2} + 3 + \pi}{6 + 2\pi} = \\ &= \frac{2 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + \pi}{6 + 2\pi} = \frac{5 + \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{6 + 2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{1+0} F_{\xi_1}(x) &= \lim_{1+0} \left(\frac{4x - x^2 + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 2 + \pi}{6 + 2\pi} \right) = \\ &= \frac{4 - 1^2 + 2 \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4 - 1^2} + 2 + \pi}{6 + 2\pi} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 - 1 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + \pi}{6 + 2\pi} = \frac{5 + \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{6 + 2\pi} \\
\lim_{2-0} F_{\xi_1}(x) &= \lim_{2-0} \left(\frac{4x - x^2 + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 2 + \pi}{6 + 2\pi} \right) = \\
&= \frac{4(2) - 2^2 + 2 \arcsin \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \sqrt{4 - 2^2} + 2 + \pi}{6 + 2\pi} = \\
&= \frac{8 - 4 + \pi + 2 + \pi}{6 + 2\pi} = \frac{6 + 2\pi}{6 + 2\pi} = 1 \\
\lim_{2+0} F_{\xi_1}(x) &= 1
\end{aligned}$$

Як видно, в точках склейки значення функції розподілу збігається, отже $F_{\xi_1}(x)$ – неперервна (це також видно з графіку наведеного на рис.2.4).

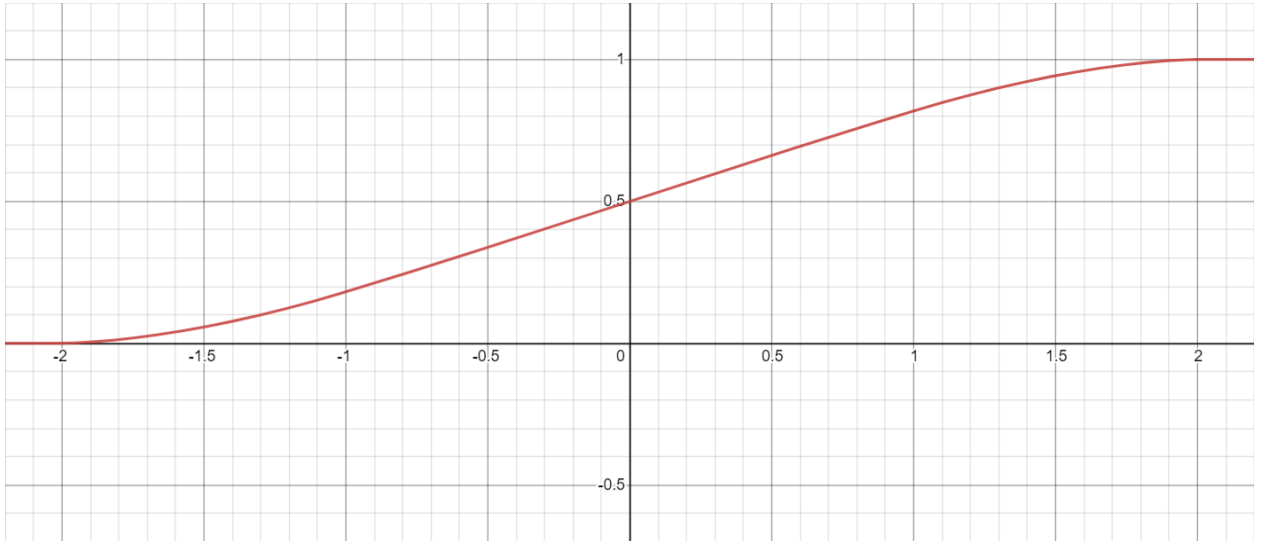


Рисунок 2.4 — Функція розподілу $F_{\xi_1}(x)$

Аналогічно обчислимо функцію розподілу $F_{\xi_2}(y)$ координати ξ_2 .

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \frac{2}{6 + 2\pi} \int_{-2}^y \sqrt{4 - y^2} dy & -2 \leq y \leq 0 \\ \frac{1}{6 + 2\pi} \left(F_{\xi_2}(0) + \int_0^y (4 - y) dy \right) & 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & 2 < y \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \frac{2 \arcsin \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} + \pi}{3 + \pi} & -2 \leq y \leq 0 \\ \frac{4y - \frac{y^2}{2} + 2\pi}{6 + 2\pi} & 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & 2 < y \end{cases}$$

Перевірка неперервності функції розподілу $F_{\xi_2}(y)$ в точках склейки.

$$\begin{aligned} \lim_{-2-0} F_{\xi_2}(y) &= 0 \\ \lim_{-2+0} F_{\xi_2}(y) &= \lim_{-2+0} \left(\frac{2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + \pi}{3 + \pi} \right) = \\ &= \frac{2 \arcsin \frac{(-2)}{2} + \frac{(-2)}{2} \sqrt{4 - (-2)^2} + \pi}{3 + \pi} = \frac{-\pi + \pi}{3 + \pi} = 0 \\ \lim_{0-0} F_{\xi_2}(y) &= \lim_{0-0} \left(\frac{2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + \pi}{3 + \pi} \right) = \\ &= \frac{2 \arcsin \frac{0}{2} + \frac{0}{2} \sqrt{4 - 0^2} + \pi}{3 + \pi} = \frac{0 + 0 + \pi}{3 + \pi} = \frac{\pi}{3 + \pi} \\ \lim_{0+0} F_{\xi_2}(y) &= \lim_{0+0} \left(\frac{4y - \frac{y^2}{2} + 2\pi}{6 + 2\pi} \right) = \\ &= \frac{4(0) - \frac{0^2}{2} + 2\pi}{6 + 2\pi} = \frac{0 - 0 + 2\pi}{6 + 2\pi} = \frac{2\pi}{6 + 2\pi} = \frac{\pi}{3 + \pi} \\ \lim_{2-0} F_{\xi_2}(y) &= \lim_{2-0} \left(\frac{4(2) - \frac{2^2}{2} + 2\pi}{6 + 2\pi} \right) = \\ &= \frac{8 - \frac{4}{2} + 2\pi}{6 + 2\pi} = \frac{8 - 2 + 2\pi}{6 + 2\pi} = \frac{6 + 2\pi}{6 + 2\pi} = 1 \\ \lim_{2+0} F_{\xi_2}(y) &= 1 \end{aligned}$$

Як видно, в точках склейки значення функції розподілу збігається, отже $F_{\xi_2}(y)$ – неперервна (це також видно з графіку наведеного на рис.2.5).

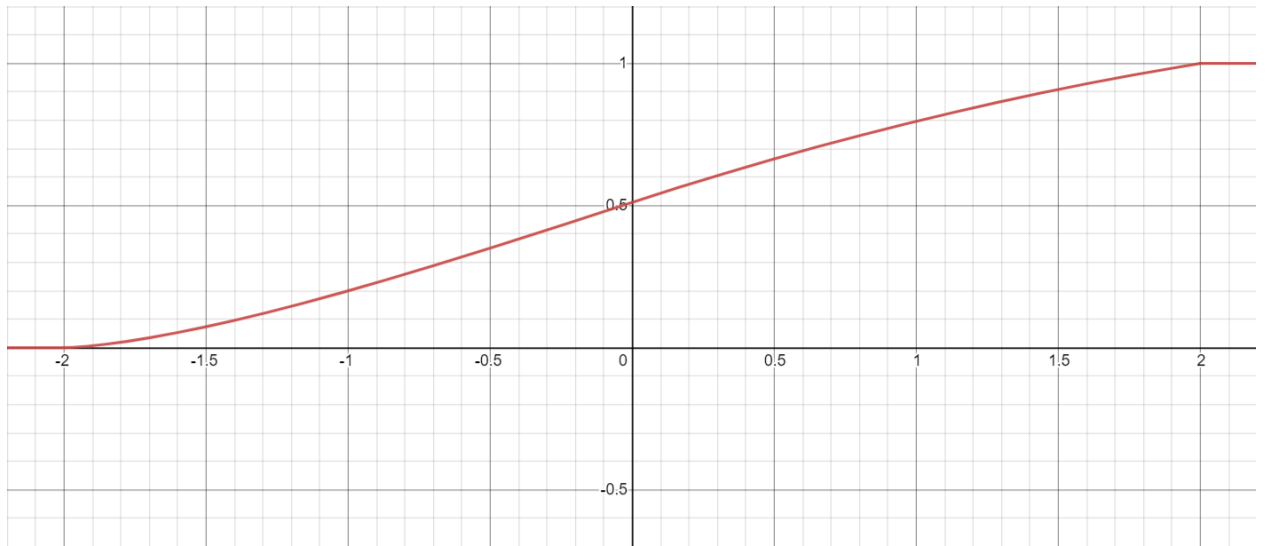


Рисунок 2.5 — Функція розподілу $F_{\xi_2}(y)$

2.3 Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$

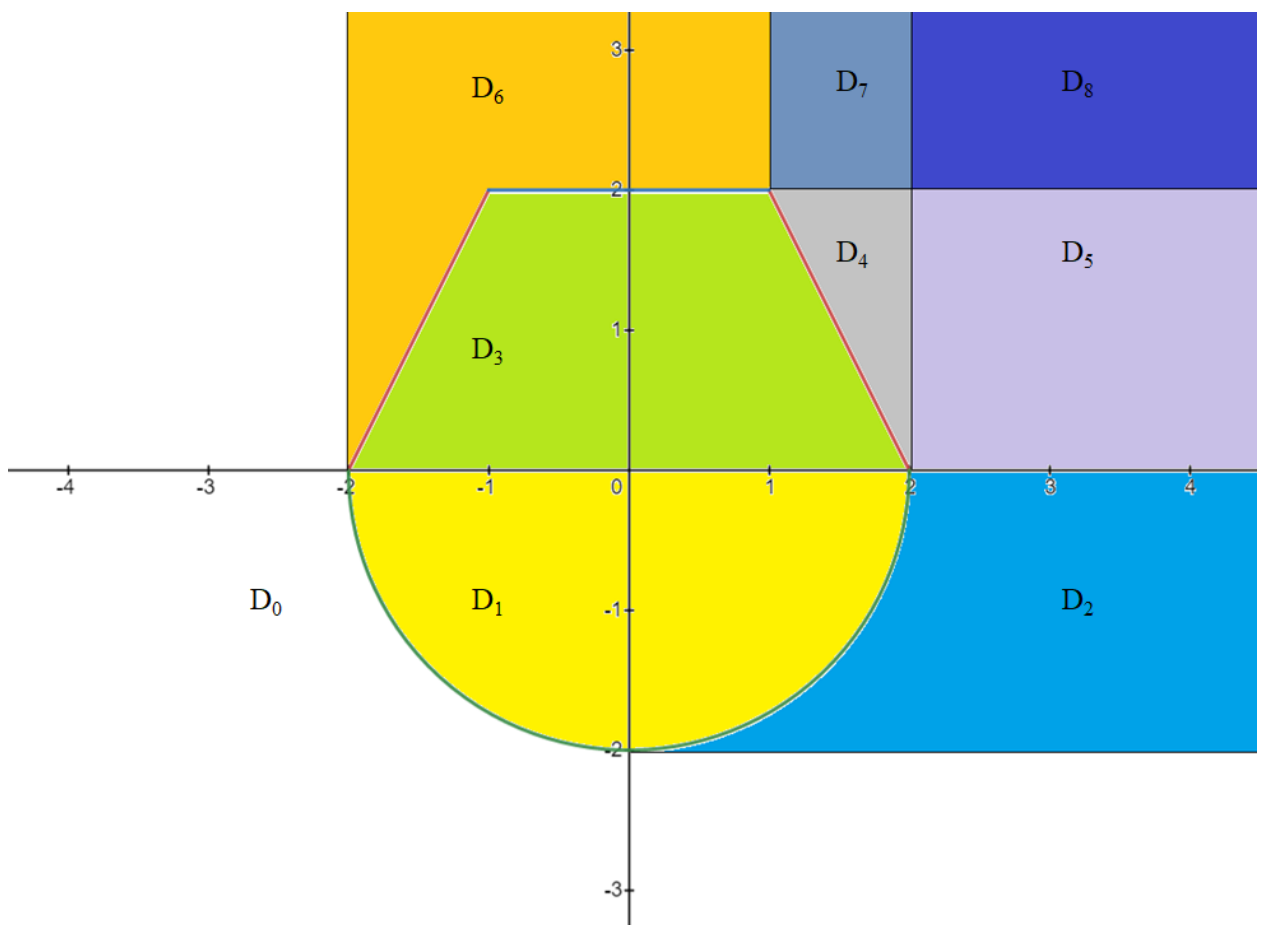


Рисунок 2.6 — Розбиття на області

Список областей:

$$\begin{aligned}
D_0 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} | (x \leq -2) \vee (y \leq -2) \vee ()\} \\
D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} | (-2 < x \leq 2) \wedge (-\sqrt{4-x^2} < y \leq 0)\} \\
D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} | (-2 < y \leq 0) \wedge (\sqrt{4-y^2} \leq x)\} \\
D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} | (|y+2x| < 4) \wedge (0 < y \leq 2)\} \\
D_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} | ((-2 < x \leq -1) \wedge (2x+4 < y)) \vee ((-1 < x \leq 1) \wedge (2 < y))\} \\
D_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} | (1 < x \leq 2) \wedge (4-2x < y \leq 2)\} \\
D_6 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} | (2 < x) \wedge (0 < y \leq 2)\} \\
D_7 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} | (1 < x \leq 2) \wedge (2 < y)\} \\
D_8 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} | (2 < x) \wedge (2 < y)\}
\end{aligned}$$

2.3.1 $(x, y) \in D_0$

$$F_{\vec{\xi}}^{(D_0)} = 0$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\vec{\xi}}^{(D_0)}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 0}{\partial x \partial y} = 0 = f_{\vec{\xi}}$$

1) $(x, y) \in D_1$

$$\begin{aligned}
F_{\vec{\xi}}^{(D_1)} &= \frac{1}{6+2\pi} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^x ds \int_{-\sqrt{4-s^2}}^y dt = \frac{1}{6+2\pi} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^x (y + \sqrt{4-s^2}) ds = \\
&= \frac{1}{6+2\pi} \left(ys + 2 \arcsin \frac{s}{2} + \frac{s}{2} \sqrt{4-s^2} \right) \Big|_{-\sqrt{4-y^2}}^x = \\
&= \frac{yx + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + y \sqrt{4-y^2} - 2 \arcsin \left(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{4-y^2}}{2} y}{6+2\pi} = \\
&= \frac{yx + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + \frac{y}{2} \sqrt{4-y^2} - 2 \arcsin \left(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2} \right)}{6+2\pi}
\end{aligned}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\vec{\xi}}^{(D_1)}}{\partial x \partial y} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{yx + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + \frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} - 2 \arcsin \left(-\frac{\sqrt{4 - y^2}}{2} \right)}{6 + 2\pi} \right) = \\
&= \frac{1}{6 + 2\pi} = f_{\vec{\xi}}
\end{aligned}$$

Перевірка стику областей D_0 та D_1 : $y = -\sqrt{4 - x^2}$

$$\begin{aligned}
&F_{\vec{\xi}}^{(D_1)}(x, -\sqrt{4 - x^2}) = \\
&= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(-x\sqrt{4 - x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + \right. \\
&+ \frac{-\sqrt{4 - x^2}}{2} \sqrt{4 - \left(-\sqrt{4 - x^2} \right)^2} - 2 \arcsin \left(-\frac{\sqrt{4 - \left(-\sqrt{4 - x^2} \right)^2}}{2} \right) \Bigg) = \\
&= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(-x\sqrt{4 - x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + \right. \\
&+ \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} - 2 \arcsin \frac{x}{2} \Bigg) = 0 = F_{\vec{\xi}}^{(D_0)}(x, -\sqrt{4 - x^2})
\end{aligned}$$

2.3.2 $(x, y) \in D_2$

$$\begin{aligned}
&F_{\vec{\xi}}^{(D_2)}(x, y) = F_{\vec{\xi}}^{(D_1)}(\sqrt{4 - y^2}, y) = \\
&= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(\sqrt{4 - y^2} + 2 \arcsin \frac{\sqrt{4 - y^2}}{2} + \frac{\sqrt{4 - y^2}}{2} \sqrt{4 - (\sqrt{4 - y^2})^2} + \right. \\
&+ \frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} - 2 \arcsin \left(-\frac{\sqrt{4 - y^2}}{2} \right) \Bigg) = \\
&= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(y\sqrt{4 - y^2} + 2 \arcsin \frac{\sqrt{4 - y^2}}{2} - \frac{\sqrt{4 - y^2}}{2} y + \right. \\
&+ \frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} + 2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{4 - y^2}}{2} \right) \Bigg) = \\
&= \frac{\frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} + 2 \arcsin \frac{\sqrt{4 - y^2}}{2}}{3 + \pi} =
\end{aligned}$$

Використаємо формулу зведення для $\arcsin x + \arcsin y$ в зворотньому порядку:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\left(\arcsin \frac{y}{2} + \arcsin 1\right)}{3 + \pi} = \\
&= \frac{\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin \frac{y}{2} + \pi}{3 + \pi} = F_{\xi_2}(y)
\end{aligned}$$

Отримали маргінальну функцію розподілу $F_{\xi_2}(y)$ при $y \in [-2; 0]$, як і має бути.

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\vec{\xi}}^{(D_1)}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin \frac{y}{2} + \pi}{3 + \pi} \right) = 0 = f_{\vec{\xi}}$$

Перевірка стику областей D_1 та $D_2 : x = \sqrt{4-y^2}$ можна не робити, оскільки $F_{\vec{\xi}}^{(D_2)}(x, y)$ отримана за допомогою відповідної підстановки з $F_{\vec{\xi}}^{(D_1)}(\sqrt{4-y^2}, y)$. Натомість свідченням того, що все зроблено вірно є те, що сумісна функція розподілу співпала із маргінальною $F_{\xi_2}(y)$ при $y \in [-2; 0]$.

2.3.3 $(x, y) \in D_3$

$$\begin{aligned}
F_{\vec{\xi}}^{(D_3)}(x, y) &= F_{\vec{\xi}}^{(D_1)}(x, 0) + \frac{1}{6 + 2\pi} \left(\int_{-2}^{0.5y-2} ds \int_0^{2s+4} dt + \int_{0.5y-2}^x ds \int_0^y dt \right) = \\
&= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(2\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \pi + \int_{-2}^{0.5y-2} (2s+4)ds + \int_{0.5y-2}^x yds \right) = \\
&= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(2\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \pi + (s^2 + 4s) \Big|_{-2}^{0.5y-2} + ys \Big|_{0.5y-2}^x \right) = \\
&= \frac{2\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \pi + 0.25y^2 - 2y + 4 + 2y - 8 - 4 + 8 + xy - 0.5y^2 + 2y}{6 + 2\pi} = \\
&= \frac{xy + 2\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} - 0.25y^2 + 2y + \pi}{6 + 2\pi}
\end{aligned}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\vec{\xi}}^{(D_3)}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{xy + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} - 0.25y^2 + 2y + \pi}{6 + 2\pi} \right) = 0 = f_{\vec{\xi}}$$

Перевірка стику областей D_1 та $D_3 : y = 0$

$$\begin{aligned} F_{\vec{\xi}}^{(D_1)}(x, 0) &= \frac{0x + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + \frac{0}{2} \sqrt{4 - 0^2} - 2 \arcsin \left(-\frac{\sqrt{4 - 0^2}}{2} \right)}{6 + 2\pi} = \\ &= \frac{2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + \pi}{6 + 2\pi} \\ F_{\vec{\xi}}^{(D_3)}(x, 0) &= \frac{x0 + 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} - 0.25(0)^2 + 2(0) + \pi}{6 + 2\pi} = \\ &= \frac{2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + \pi}{6 + 2\pi} \end{aligned}$$

Отже:

$$F_{\vec{\xi}}^{(D_1)}(x, 0) = F_{\vec{\xi}}^{(D_3)}(x, 0) =$$

2.3.4 $(x, y) \in D_4$

$$F_{\vec{\xi}}^{(D_4)}(x, y) = F_{\vec{\xi}}^{(D_1)}(x, 0) + \frac{1}{6 + 2\pi} \left(\int_{-2}^{0.5y-2} ds \int_0^{2s+4} dt + \int_{0.5y-2}^x ds \int_0^y dt \right) =$$

2.4 Математичні сподівання координат. Коваріаційна матриця

Математичне сподівання ξ_1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi_1}(x) dx = \int_{-2}^{-1} \frac{2x^2 + 4x + x\sqrt{4 - x^2}}{6 + 2\pi} dx + \\ &+ \int_{-1}^1 \frac{2x + x\sqrt{4 - x^2}}{6 + 2\pi} dx + \int_1^2 \frac{4x - 2x^2 + x\sqrt{4 - x^2}}{6 + 2\pi} dx = \\ &= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(\left(\frac{2x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_{-2}^{-1} + x^2 \Big|_{-1}^1 + \left(2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_1^2 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-2}^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} d(4-x^2) \Bigg) = \frac{1}{6+2\pi} \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 0 + \frac{8}{3} - \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3} \Bigg|_{-2}^2 \right) = \\
& = \frac{0-0}{6+2\pi} = 0
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}\xi_1 = 0$, як і очікувалось, оскільки область D симетрична відносно осі OY .

Математичне сподівання ξ_2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\xi_2}(y) dy = \frac{1}{6+2\pi} \left(\int_{-2}^0 2y\sqrt{4-y^2} dy + \int_0^2 (4y-y^2) dy \right) = \\
&= \frac{1}{6+2\pi} \left(- \int_{-2}^0 \sqrt{4-y^2} d(4-y^2) + \left(2y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 \right) = \\
&= \frac{1}{6+2\pi} \left(\left(-\frac{2\sqrt{(4-y^2)^3}}{3} \right) \Big|_{-2}^0 + \frac{16}{3} \right) = \frac{1}{6+2\pi} \left(-\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right) = 0
\end{aligned}$$

Отже, центр розсіювання $\vec{\mathbb{E}\xi} = (\mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\xi_2)^T = (0, 0)^T$.

Знайдемо дисперсії.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi_1}(x) dx = \int_{-2}^{-1} \frac{2x^3 + 4x^2 + x^2\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi} dx + \\
&+ \int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x^2\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi} dx + \int_1^2 \frac{4x^2 - 2x^3 + x^2\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi} dx = \\
&= \frac{1}{6+2\pi} \left(\left(\frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^{-1} + \frac{2x^3}{3} \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_1^2 - \right. \\
&- \int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx \Bigg) = \left(\begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ t = \arcsin \frac{x}{2} \\ dx = 2 \cos t dt \\ x = -2 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right) = \frac{1}{6+2\pi} \left(-\frac{5}{6} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \right. \\
&+ \frac{8}{3} - \frac{5}{6} + 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt \Bigg) = \frac{1}{6+2\pi} \left(5 + 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6+2\pi} \left(5 + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt \right) = \frac{1}{6+2\pi} \left(5 + \left(2t + \frac{\sin 4t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= \frac{1}{6+2\pi} (5 + \pi + \pi + 0) = \frac{5+2\pi}{6+2\pi}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \frac{5+2\pi}{6+2\pi}$$

$$\mathbb{E}\xi_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{\xi_2}(y) dy = \frac{1}{6+2\pi} \left(\int_{-2}^0 2y^2 \sqrt{4-y^2} dy + \int_0^2 (4y^2 - y^3) dy \right) =$$

При обчисленні $2 \int_{-2}^0 y^2 \sqrt{4-y^2} dy$ підставимо одразу кінцеву формулу, яка була знайдена в минулому прикладі.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6+2\pi} \left((4t + \sin 4t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left(\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 \right) = \frac{1}{6+2\pi} \left(2\pi + \frac{32}{3} - 4 \right) = \\
&= \frac{2\pi + \frac{20}{3}}{6+2\pi}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = \frac{\frac{20}{3} + 2\pi}{6+2\pi}$$

Для побудови коваріаційної матриці знайдемо коваріацію:

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_1\xi_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy = \\
&= \frac{1}{6+2\pi} \left(\int_{-2}^0 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} yx dx + \int_0^2 dy \int_{0.5y-2}^{2-0.5y} yx dx \right) = \\
&= \frac{1}{6+2\pi} \left(\int_{-2}^0 y \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy + \int_0^2 y \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{0.5y-2}^{2-0.5y} dy \right) = \\
&= \frac{1}{6+2\pi} \left(\int_{-2}^0 y \left(\frac{4-y^2-4+y^2}{2} \right) dy + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^2 y \left(\frac{4-2y+0.25y-0.25y+2y-4}{2} \right) dy \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6 + 2\pi} \left(\int_{-2}^2 y(0) dy \right) = 0$$

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2 = 0 - 0 = 0$$

$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$, як і має бути, оскільки область D симетрична відносно осі OY . Звідси можна зробити висновок, що величини ξ_1 та ξ_2 некорельовані, відповідно $r(\xi_1, \xi_2) = 0$. Тоді коваріаційна матриця буде:

$$C_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} \frac{5 + 2\pi}{6 + 2\pi} & 0 \\ 0 & \frac{\frac{20}{3} + 2\pi}{6 + 2\pi} \end{pmatrix}$$

Зробимо перевірку невід'ємної визначеності матриці:

$$\det C_{\vec{\xi}} = \frac{5 + 2\pi}{6 + 2\pi} \cdot \frac{\frac{20}{3} + 2\pi}{6 + 2\pi} = \frac{\frac{100}{3} + \frac{70\pi}{3} + 4\pi^2}{36 + 24\pi + 2\pi^2} > 0$$

2.5 Умовні щільності розподілу для кожної координати

$$f_{\xi_1}(x|y) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x, y)}{f_{\xi_2}(y)}$$

$$f_{\xi_2}(y|x) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x, y)}{f_{\xi_1}(x)}$$

$$f_{\vec{\xi}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6 + 2\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{\xi}}(x, y) dy = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \frac{2x + 4 + \sqrt{4 - x^2}}{6 + 2\pi} & -2 < x \leq -1 \\ \frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{6 + 2\pi} & -1 < x \leq 1 \\ \frac{4 - 2x + \sqrt{4 - x^2}}{6 + 2\pi} & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -2 \\ \frac{2\sqrt{4-y^2}}{6+2\pi} & -2 < y \leq 0 \\ \frac{4-y}{6+2\pi} & 0 < y \leq 2 \\ 0 & 2 < y \end{cases}$$

Знайдемо спочатку $f_{\xi_1}(x|y)$:

$$f_{\xi_1}(x|y) = \begin{cases} \text{не визначено} & y \leq -2 \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{4-y^2}} & x \in [-\sqrt{4-y^2}; \sqrt{4-y^2}] \\ 0 & x \notin [-\sqrt{4-y^2}; \sqrt{4-y^2}] \end{cases} & -2 < y \leq 0 \\ \begin{cases} \frac{1}{4-y} & x \in \left[\frac{y}{2}-2; 2-\frac{y}{2}\right] \\ 0 & x \notin \left[\frac{y}{2}-2; 2-\frac{y}{2}\right] \end{cases} & 0 < y \leq 2 \\ \text{не визначено} & 2 < y \end{cases}$$

Аналогічно:

$$f_{\xi_2}(y|x) = \begin{cases} \text{не визначено} & x \leq -2 \\ \begin{cases} \frac{1}{2x+4+\sqrt{4-x^2}} & y \in [-\sqrt{4-x^2}; 2x+4] \\ 0 & y \notin [-\sqrt{4-x^2}; 2x+4] \end{cases} & -2 < x \leq -1 \\ \begin{cases} \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} & y \in [-\sqrt{4-x^2}; 2] \\ 0 & y \notin [-\sqrt{4-x^2}; 2] \end{cases} & -1 < x \leq -1 \\ \begin{cases} \frac{1}{4-2x+\sqrt{4-x^2}} & y \in [-\sqrt{4-x^2}; 4-2x] \\ 0 & y \notin [-\sqrt{4-x^2}; 4-2x] \end{cases} & 1 < x \leq 2 \\ \text{не визначено} & 2 < x \end{cases}$$

2.6 Умовні математичні сподівання для кожної координати

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi_1}(x|y) dx = \\
&= \begin{cases} \text{не визначено} & y \leq -2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x dx \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{4-y^2}} & x \in [-\sqrt{4-y^2}; \sqrt{4-y^2}] \\ 0 & x \notin [-\sqrt{4-y^2}; \sqrt{4-y^2}] \end{cases} & -2 < y \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x dx \begin{cases} \frac{1}{4-y} & x \in \left[\frac{y}{2}-2; 2-\frac{y}{2}\right] \\ 0 & x \notin \left[\frac{y}{2}-2; 2-\frac{y}{2}\right] \end{cases} & 0 < y \leq 2 \\ \text{не визначено} & 2 < y \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{не визначено} & y \leq -2 \\ \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{2\sqrt{4-y^2}} dx & -2 < y \leq 0 \\ \int_{\frac{y}{2}-2}^{2-\frac{y}{2}} \frac{x}{4-y} dx & 0 < y \leq 2 \\ \text{не визначено} & 2 < y \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{не визначено} & y \leq -2 \\ \frac{4-y^2-4+y^2}{4\sqrt{4-y^2}} dx & -2 < y \leq 0 \\ \frac{\frac{y^2}{4}-2y+4-4+2y-\frac{y^2}{4}}{2(4-y)} dx & 0 < y \leq 2 \\ \text{не визначено} & 2 < y \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{не визначено} & y \leq -2 \\ 0 & -2 < y \leq 0 \\ 0 & 0 < y \leq 2 \\ \text{не визначено} & 2 < y \end{cases}
\end{aligned}$$

Перевірка ($\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) = \mathbb{E}\xi_1$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_1|\xi_2) f_{\xi_2}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0 f_{\xi_2}(y) dy = 0 = \mathbb{E}\xi_1$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\xi_2}(y|x) dy = \\
&= \begin{cases} \text{не визначено} & x \leq -2 \\
\int_{-\infty}^{\infty} y dy \begin{cases} \frac{1}{2x+4+\sqrt{4-x^2}} & y \in [-\sqrt{4-x^2}; 2x+4] \\
0 & y \notin [-\sqrt{4-x^2}; 2x+4] \end{cases} & -2 < x \leq -1 \\
\int_{-\infty}^{\infty} y dy \begin{cases} \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} & y \in [-\sqrt{4-x^2}; 2] \\
0 & y \notin [-\sqrt{4-x^2}; 2] \end{cases} & -1 < x \leq -1 \\
\int_{-\infty}^{\infty} y dy \begin{cases} \frac{1}{4-2x+\sqrt{4-x^2}} & y \in [-\sqrt{4-x^2}; 4-2x] \\
0 & y \notin [-\sqrt{4-x^2}; 4-2x] \end{cases} & 1 < x \leq 2 \\
\text{не визначено} & 2 < x \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{не визначено} & x \leq -2 \\
\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2x+4} \frac{y}{2x+4+\sqrt{4-x^2}} dy & -2 < x \leq -1 \\
\int_{-\sqrt{4-x^2}}^2 \frac{y}{2+\sqrt{4-x^2}} dy & -1 < x \leq -1 \\
\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-2x} \frac{y}{4-2x+\sqrt{4-x^2}} dy & 1 < x \leq 2 \\
\text{не визначено} & 2 < x \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{не визначено} & x \leq -2 \\
\frac{4x^2 + 16x + 16 - 4 + x^2}{2(2x+4+\sqrt{4-x^2})} dy & -2 < x \leq -1 \\
\frac{4 - 4 + x^2}{2(2+\sqrt{4-x^2})} dy & -1 < x \leq -1 \\
\frac{16 - 16x + 4x^2 - 4 + x^2}{2(4-2x+\sqrt{4-x^2})} dy & 1 < x \leq 2 \\
\text{не визначено} & 2 < x \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \text{не визначено} & x \leq -2 \\ \frac{5x^2 + 16x + 12}{2(2x + 4 + \sqrt{4 - x^2})} dy & -2 < x \leq -1 \\ \frac{x^2}{2(2 + \sqrt{4 - x^2})} dy & -1 < x \leq 1 \\ \frac{5x^2 - 16x + 12}{2(4 - 2x + \sqrt{4 - x^2})} dy & 1 < x \leq 2 \\ \text{не визначено} & 2 < x \end{cases}$$

Перевірка $(\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1))) = \mathbb{E}\xi_2$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1) f_{\xi_1}(x) dx = \\ &= \int_{-2}^{-1} \frac{5x^2 + 16x + 12}{2(6 + 2\pi)} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2(6 + 2\pi)} dx + \int_1^2 \frac{5x^2 - 16x + 12}{2(6 + 2\pi)} dx = \\ &= \frac{1}{12 + 4\pi} \left(\left(\frac{5x^3}{3} + 8x^2 + 12x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{5x^3}{3} - 8x^2 + 12x \right) \Big|_1^2 \right) = \\ &= \frac{1}{12 + 4\pi} \left(\left(\frac{5x^3}{3} + 8x^2 + 12x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{5x^3}{3} - 8x^2 + 12x \right) \Big|_1^2 \right) = \\ &= \frac{1}{12 + 4\pi} \left(\left(-\frac{5}{3} + 8 - 12 \right) - \left(-\frac{40}{3} + 32 - 24 \right) + \frac{1}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} + \left(\frac{40}{3} - 32 + 24 \right) - \left(\frac{5}{3} - 8 + 12 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{12 + 4\pi} \left(-\frac{17}{3} + \frac{16}{3} + \frac{2}{3} + \frac{16}{3} - \frac{17}{3} \right) = 0 = \mathbb{E}\xi_2 \end{aligned}$$

ДОДАТОК А

Обчислення інтеграла $\int \sqrt{4-x^2}dx$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-x^2}dx &= 2 \int \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2} = \sin t \\ t = \arcsin \frac{x}{2} \\ dx = 2 \cos t dt \end{array} \right| = 4 \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ &= 4 \int \cos^2 t dt = 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + C = \\ &= 2t + 2 \sin t \cos t + C = 2t + 2 \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} + C = \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C\end{aligned}$$