

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС  
“ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ”  
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ  
СІКОРСЬКОГО”  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

## РОЗРАХУНКОВА РОБОТА №1

з теорії ймовірності  
на тему: «Випадкові вектори»  
Варіант 7

Виконав студент 2  
курсу групи КА-06  
Вергелюк Олександр  
Андрійович  
Перевірів:  
Ільєнко А. Б.

Київ – 2021

# 1 ЗАВДАННЯ 1

Нехай дискретний випадковий вектор  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$  задано таблицею розподілу (Таблиця 1.1).

Таблиця 1.1 — Таблиця розподілу вектора  $\vec{\xi}$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	2	7	8
-2	0.17	0.01	0.07	0.06
1	0.13	0.08	0.04	0.08
2	0.12	0.02	0.07	0.15

## 1.1 Ряди розподілу координат $\xi_1$ та $\xi_2$

Для  $\xi_1$  використаємо формулу:  $p_i = \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\} = \sum_{j=1}^n p_{ij}$ .

Таблиця 1.2 — Ряд розподілу  $\xi_1$

$x_i$	-2	1	2
$p_i$	0.31	0.33	0.36

Перевірка:

$$0.31 + 0.33 + 0.36 = 1$$

Аналогічно для  $\xi_2$ :  $p_j = \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\} = \sum_{i=1}^m p_{ij}$ .

Таблиця 1.3 — Ряд розподілу  $\xi_2$

$y_i$	-9	2	7	8
$p_i$	0.42	0.11	0.18	0.29

Перевірка:

$$0.42 + 0.11 + 0.18 + 0.29 = 1$$

1.2 Функції розподілу  $F_{\xi_1}(x)$  і  $F_{\xi_2}(y)$  та їх графіки

Для координати  $\xi_1$ :

$$F_{\xi_1} = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ 0.31 & -2 < x \leq 1 \\ 0.64 & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

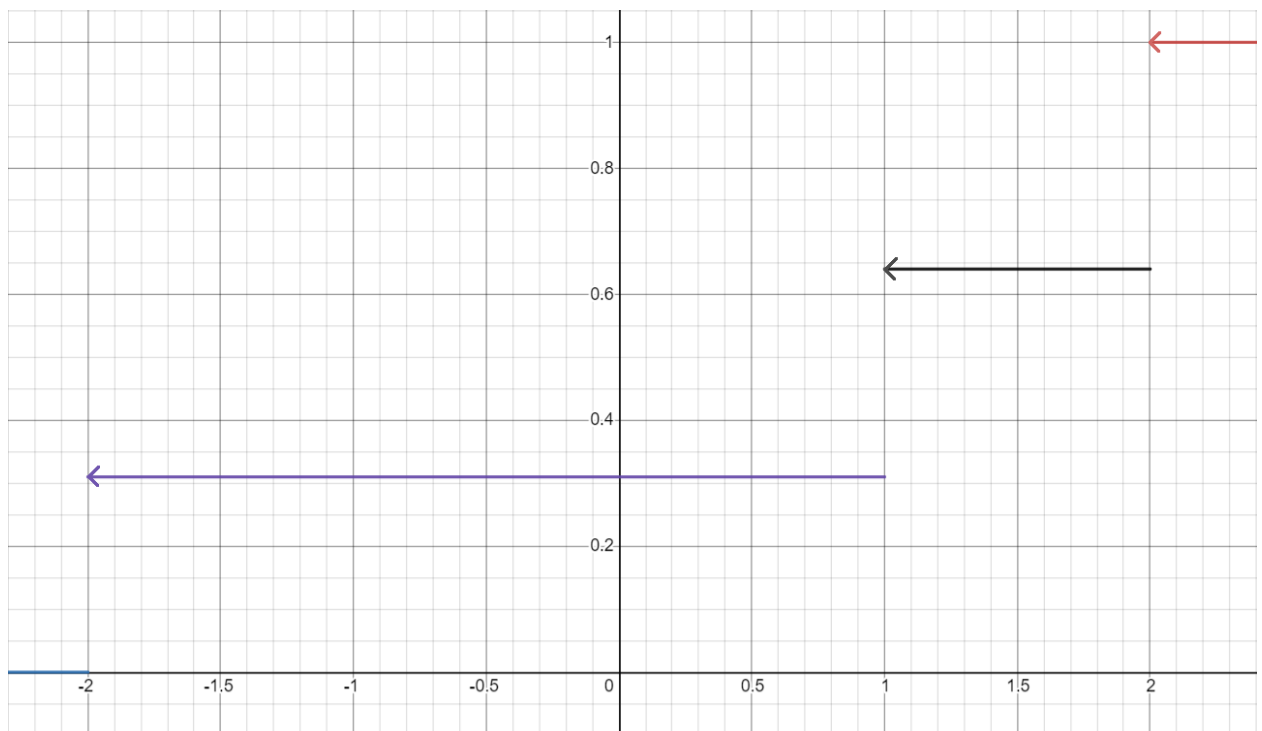


Рисунок 1.1 — Функція розподілу  $F_{\xi_1}(x)$

Для координати  $\xi_2$ :

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -9 \\ 0.42 & -9 < y \leq 2 \\ 0.53 & 2 < y \leq 7 \\ 0.71 & 7 < y \leq 8 \\ 1 & 8 < y \end{cases}$$

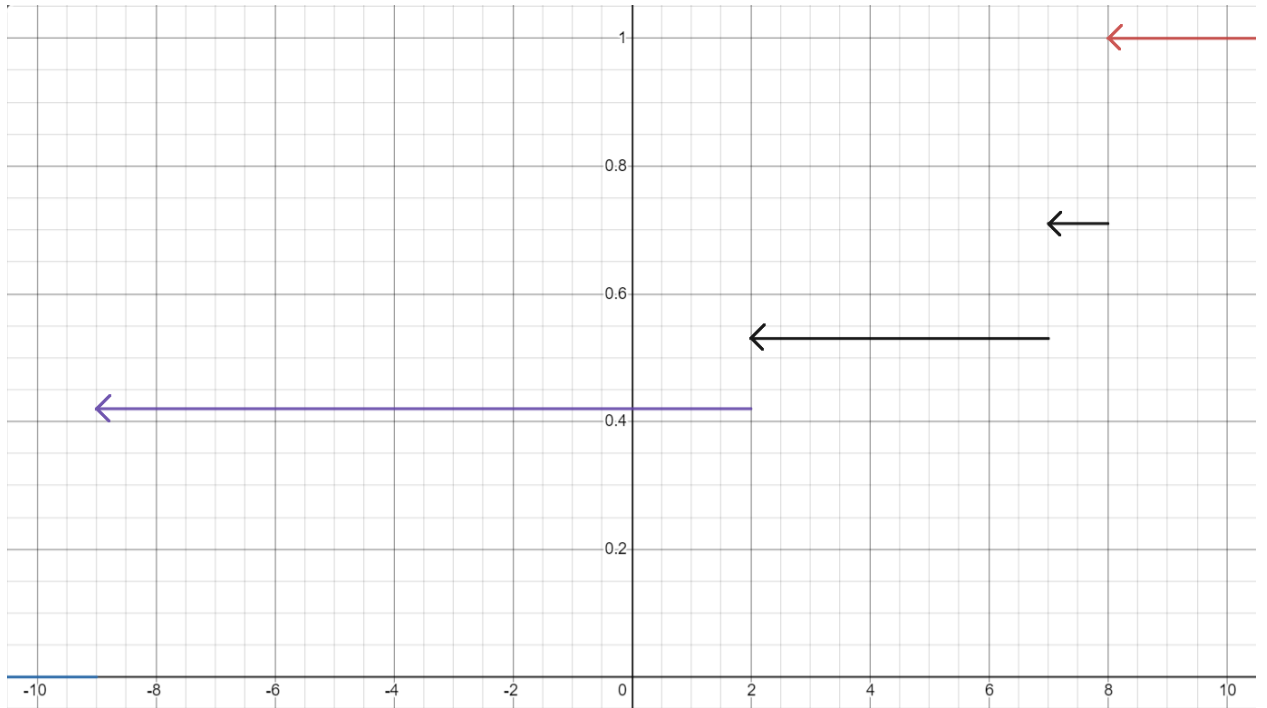


Рисунок 1.2 — Функція розподілу  $F_{\xi_2}(y)$

### 1.3 Функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора

Зобразимо в декартовій системі координат всі точки, що відповідають значенню вектора  $\vec{\xi}$  (рис. 1.3).

Розіб'ємо координатну площину на області, в яких сумісна функція розподілу  $F_{\vec{\xi}}(x, y)$  набуває однакові значення (рис. 1.4).

Використаємо формулу:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\} = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}$$

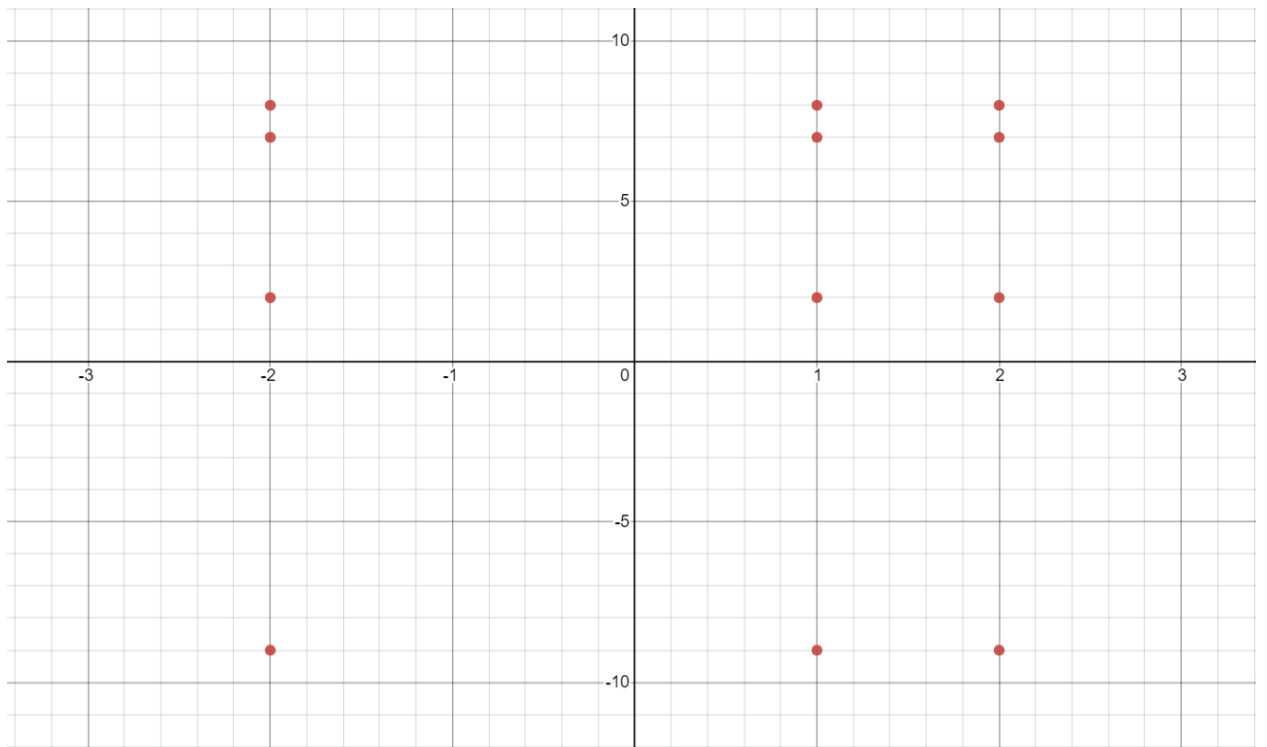


Рисунок 1.3 — Значення вектора  $\vec{\xi}$  в декартовій системі координат

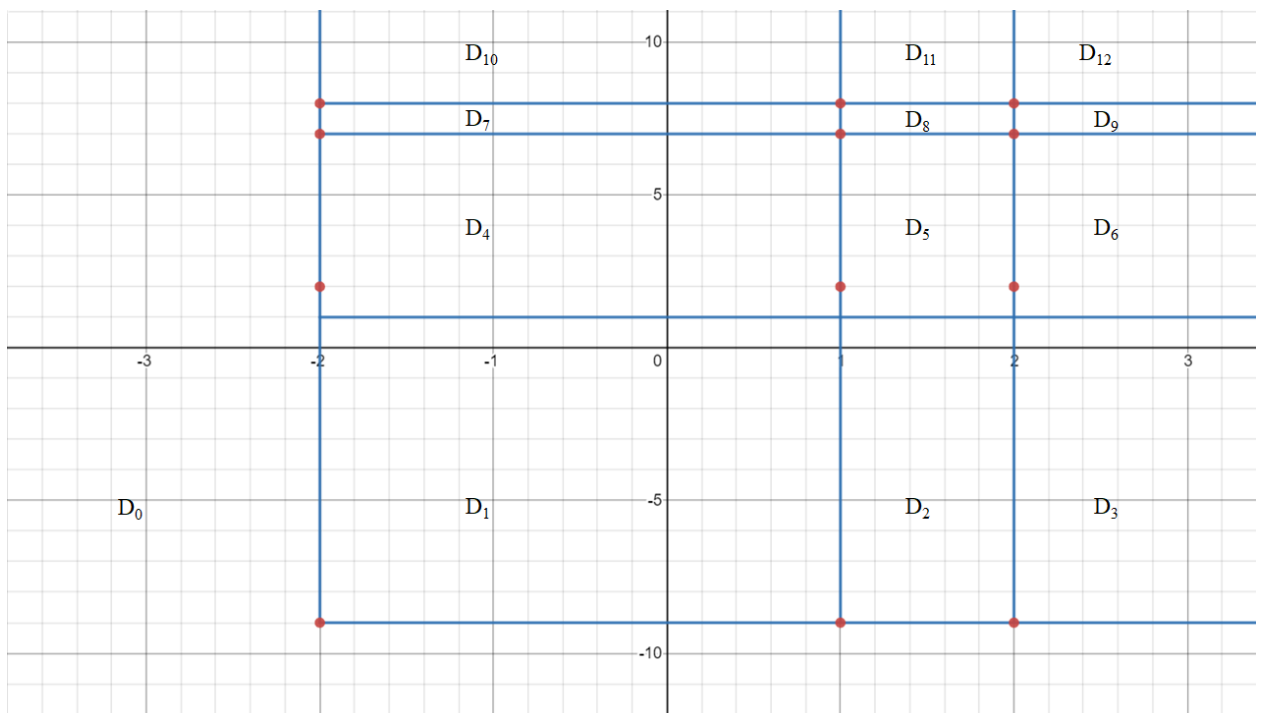


Рисунок 1.4 — Області, в яких сумісна функція розподілу  $F_{\vec{\xi}}(x, y)$  набуває однакові значення

- a)  $(x, y) \in D_0 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$
- b)  $(x, y) \in D_1 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.17$
- c)  $(x, y) \in D_2 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.3$

- d)  $(x, y) \in D_3 \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 0.42$
- e)  $(x, y) \in D_4 \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 0.18$
- f)  $(x, y) \in D_5 \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 0.39$
- g)  $(x, y) \in D_6 \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 0.53$
- h)  $(x, y) \in D_7 \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 0.25$
- i)  $(x, y) \in D_8 \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 0.5$
- j)  $(x, y) \in D_9 \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 0.71$
- k)  $(x, y) \in D_{10} \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 0.31$
- l)  $(x, y) \in D_{11} \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 0.64$
- m)  $(x, y) \in D_{12} \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 1$

Запишемо функцію розподілу у вигляді таблиці:

Таблиця 1.4 — Сумісна функція розподілу  $F_{\xi}(x, y)$

$x \backslash y$	$y \leq -9$	$-9 < y \leq 2$	$2 < y \leq 7$	$7 < y \leq 8$	$8 < y$
$x \leq -2$	0	0	0	0	0
$-2 < x \leq 1$	0	0.17	0.18	0.25	0.31
$1 < x \leq 2$	0	0.3	0.39	0.5	0.64
$2 < x$	0	0.42	0.53	0.71	1

Перевірка (властивість узгодження):

$\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi}(x, y) = F_{\xi_1}(x)$  виконується, оскільки останній стовпчик – це  $F_{\xi_1}(x)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi}(x, y) = F_{\xi_2}(y)$  виконується, оскільки останній рядок – це  $F_{\xi_2}(y)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi}(x, y) = 1$  виконується, оскільки  $(x, y) \in D_{12} \Rightarrow F_{\xi}(x, y) = 1$

$y \rightarrow \infty$

## 1.4 Математичні сподівання координат та кореляційна матриця

Знайдемо математичне сподівання координати  $\xi_1$ :

$$\mathbb{E}\xi_1 = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = (-2) \cdot 0.31 + 1 \cdot 0.33 + 2 \cdot 0.36 = 0.43$$

Аналогічно для координати  $\xi_2$ :

$$\mathbb{E}\xi_2 = \sum_{j=1}^4 x_j p_j = (-9) \cdot 0.42 + 2 \cdot 0.11 + 7 \cdot 0.18 + 8 \cdot 0.29 = 0.02$$

Центр розсіювання вектора  $\vec{\xi}$  – точка  $(0.43, 0.02)$ .

Дисперсія координати  $\xi_1$ :

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)^2 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = (-2)^2 \cdot 0.31 + 1^2 \cdot 0.33 + 2^2 \cdot 0.36 = 3.01$$

Дисперсія координати  $\xi_2$ :

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)^2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = (-9)^2 \cdot 0.42 + 2^2 \cdot 0.11 + 7^2 \cdot 0.18 + 8^2 \cdot 0.29 = 61.84$$

Для побудови коваріаційної матриці скористаємося формулами:

$$\text{cov}(\xi_1 \xi_2) = \mathbb{E}\xi_1 \xi_2 - \mathbb{E}\xi_1 \mathbb{E}\xi_2$$

$$\text{cov}(\xi_1 \xi_1) = \mathbb{D}\xi_1$$

$$\text{cov}(\xi_2 \xi_2) = \mathbb{D}\xi_2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_1 \xi_2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_i y_j p_{ij} = (-2) \cdot (-9) \cdot 0.17 + (-2) \cdot 2 \cdot 0.01 + \\ &(-2) \cdot 7 \cdot 0.07 + (-2) \cdot 8 \cdot 0.06 + 1 \cdot (-9) \cdot 0.13 + 1 \cdot 2 \cdot 0.08 + \\ &+ 1 \cdot 7 \cdot 0.04 + 1 \cdot 8 \cdot 0.08 + 2 \cdot (-9) \cdot 0.12 + 2 \cdot 2 \cdot 0.02 + \\ &+ 2 \cdot 7 \cdot 0.07 + 2 \cdot 8 \cdot 0.15 = 2.29 \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\xi_1 \xi_2) = 2.29 - 0.43 \cdot 0.02 = 2.2814$$

Тоді коваріаційна матриця:

$$C_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1\xi_2) \\ cov(\xi_1\xi_2) & \mathbb{D}\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.01 & 2.2814 \\ 2.2814 & 61.84 \end{pmatrix}$$

Оскільки  $cov(\xi_1\xi_2) \neq 0$ , то випадкові величини  $\xi_1$  та  $\xi_2$  корельовані та залежні.

### 1.5 Умовні ряди розподілу

Знайдемо умовні ряди розподілу для  $\xi_1$  за  $\xi_2 = y_j$ .

$$\mathbb{P}(\xi_1 = x_i | \xi_2 = y_j) = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^m p_{ij}}$$

Таблиця 1.5 — Умовні ряди розподілу для  $\xi_1$  за  $\xi_2 = y_j$

$\xi_1 \backslash x$	-2	1	2
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot   \xi_2 = -9\}$	$\frac{17}{42}$	$\frac{13}{42}$	$\frac{12}{42}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot   \xi_2 = 2\}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{11}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot   \xi_2 = 7\}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot   \xi_2 = 8\}$	$\frac{6}{29}$	$\frac{8}{29}$	$\frac{15}{29}$

Перевірка:

$$\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = -9\} = \frac{17}{42} + \frac{13}{42} + \frac{12}{42} = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = 2\} = \frac{1}{11} + \frac{8}{11} + \frac{2}{11} = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = 7\} = \frac{7}{18} + \frac{4}{18} + \frac{7}{18} = 1$$



$$\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = 8\} = \frac{6}{29} + \frac{8}{29} + \frac{15}{29} = 1$$

Аналогічно для  $\xi_1$  за  $\xi_2 = y_j$ .

$$\mathbb{P}(\xi_2 = y_j | \xi_2 = x_i) = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}}$$

Таблиця 1.6 — Умовні ряди розподілу для  $\xi_2$  за  $\xi_1 = x_i$

$\xi_2 \backslash y$	-9	2	7	8
$\mathbb{P}\{\xi_2 = \cdot   \xi_1 = -2\}$	$\frac{17}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{6}{31}$
$\mathbb{P}\{\xi_2 = \cdot   \xi_1 = 1\}$	$\frac{13}{33}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{8}{33}$
$\mathbb{P}\{\xi_2 = \cdot   \xi_1 = 2\}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{15}{36}$

Перевірка:

$$\sum_{j=1}^4 \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = -2\} = \frac{17}{31} + \frac{1}{31} + \frac{7}{31} + \frac{6}{31} = 1$$

$$\sum_{j=1}^4 \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = 1\} = \frac{13}{33} + \frac{8}{33} + \frac{4}{33} + \frac{8}{33} = 1$$

$$\sum_{j=1}^4 \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = 2\} = \frac{12}{36} + \frac{2}{36} + \frac{7}{36} + \frac{15}{36} = 1$$

## 1.6 Умовні математичні сподівання

Для пошуку умовного математичного сподівання  $\xi_1$  за  $\xi_2 = y_j$  застосуємо формулу:

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y_j) = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = -9) = (-2) \cdot \frac{17}{42} + 1 \cdot \frac{13}{42} + 2 \cdot \frac{12}{42} = \frac{3}{42}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = 2) = (-2) \cdot \frac{1}{11} + 1 \cdot \frac{8}{11} + 2 \cdot \frac{2}{11} = \frac{10}{11}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = 7) = (-2) \cdot \frac{7}{18} + 1 \cdot \frac{4}{18} + 2 \cdot \frac{7}{18} = \frac{4}{18}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = 8) = (-2) \cdot \frac{6}{29} + 1 \cdot \frac{8}{29} + 2 \cdot \frac{15}{29} = \frac{26}{29}$$

Наведемо ряд умовного математичного сподівання  $\xi_1|\xi_2$  у вигляді таблиці.

Таблиця 1.7 — Умовне математичне сподівання  $\xi_1|\xi_2 = y_j$

$\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2)$	$\frac{3}{42}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{26}{29}$
$\mathbb{P}$	0.42	0.11	0.18	0.29

Перевірка:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) = \frac{3}{42} \cdot 0.42 + \frac{10}{11} \cdot 0.11 + \frac{4}{18} \cdot 0.18 + \frac{26}{29} \cdot 0.29 = 0.43 = \mathbb{E}\xi_1$$

Аналогічно умовне математичне сподівання  $\xi_2$  за  $\xi_1 = x_i$ :

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^4 y_j \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|x_{i1} = -2) = (-9) \cdot \frac{17}{31} + 2 \cdot \frac{1}{31} + 7 \cdot \frac{7}{31} + 8 \cdot \frac{6}{31} = -\frac{54}{31} = -1\frac{23}{31}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|x_{i1} = -2) = (-9) \cdot \frac{13}{33} + 2 \cdot \frac{8}{33} + 7 \cdot \frac{4}{33} + 8 \cdot \frac{8}{33} = -\frac{9}{33} = -\frac{9}{33}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|x_{i1} = -2) = (-9) \cdot \frac{12}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} + 7 \cdot \frac{7}{36} + 8 \cdot \frac{15}{36} = \frac{65}{36} = 1\frac{29}{36}$$

Наведемо ряд умовного математичного сподівання  $\xi_2|\xi_1$  у вигляді таблиці.

Таблиця 1.8 — Умовне математичне сподівання  $\xi_2|\xi_1 = x_i$

$\mathbb{E}(\xi_2 \xi_1)$	$-1\frac{23}{31}$	$-\frac{9}{33}$	$1\frac{29}{36}$
$\mathbb{P}$	0.31	0.33	0.36

Перевірка:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)) = (-1\frac{23}{31}) \cdot 0.31 + (-\frac{9}{33}) \cdot 0.33 + 1\frac{29}{36} \cdot 0.36 = 0.02 = \mathbb{E}\xi_2$$

## 2 ЗАВДАННЯ 2