МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
“ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ“
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ
СІКОРСЬКОГО“
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА №1

з теорії ймовірності

на тему: «Випадкові вектори»

Варіант 7

Виконав студент 2 курсу групи КА-06
Вергелюк Олександр Андрійович
Перевірив:
Ільєнко А. Б.

Київ – 2021

1 ЗАВДАННЯ 1

Нехай дискретний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ задано таблицею розподілу (Таблиця 1.1).

Таблиця 1.1 — Таблиця розподілу вектора $\vec{\xi}$

ξ_1 \ ξ_2	-9	2	7	8
-2	0.17	0.01	0.07	0.06
1	0.13	0.08	0.04	0.08
2	0.12	0.02	0.07	0.15

1.1 Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Для ξ_1 використаємо формулу: $p_i = \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$.

Таблиця 1.2 — Ряд розподілу ξ_1

x_i	-2	1	2
p_i	0.31	0.33	0.36

Перевірка:

$$0.31 + 0.33 + 0.36 = 1$$

Аналогічно для ξ_2: $p_j = \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$.

Таблиця 1.3 — Ряд розподілу ξ_2

y_i	-9	2	7	8
p_i	0.42	0.11	0.18	0.29

Перевірка:

$$0.42 + 0.11 + 0.18 + 0.29 = 1$$

1.2 Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ і $F_{\xi_2}(y)$ та їх графіки

Для координати ξ_1:

$$F_{\xi_1} = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ 0.31 & -2 < x \le 1 \\ 0.64 & 1 < x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

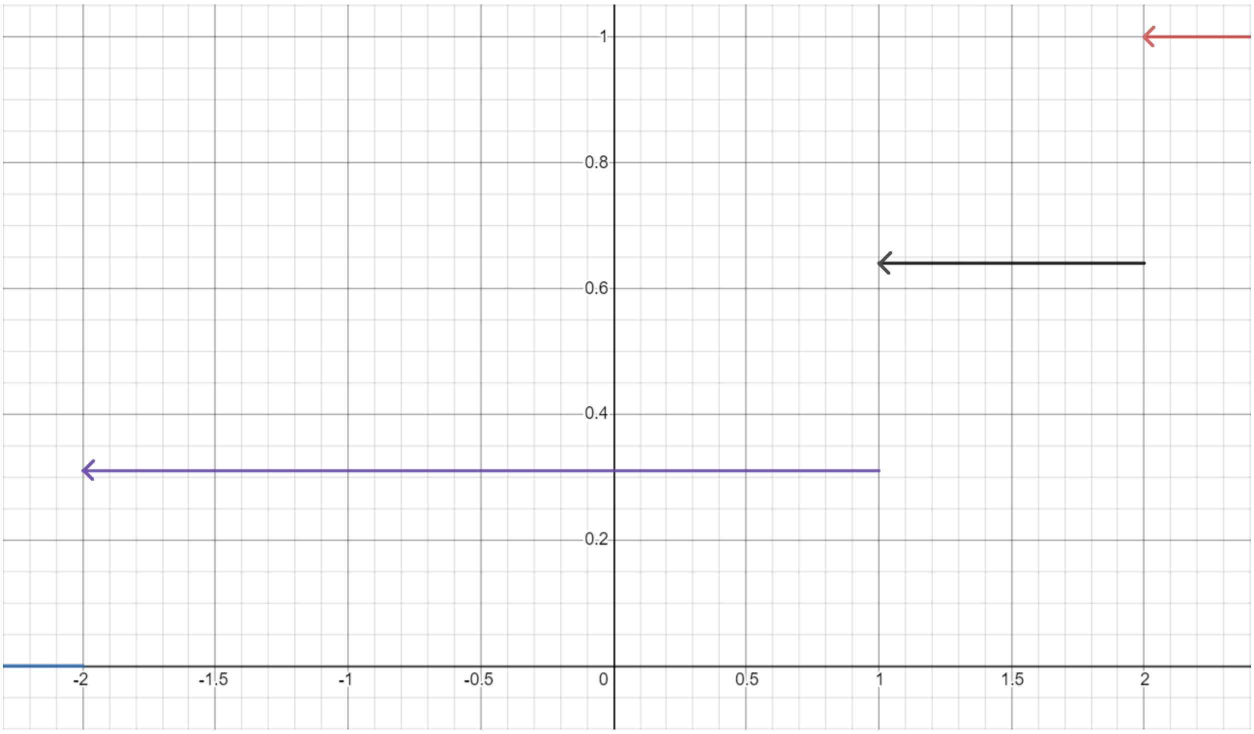

Рисунок 1.1 — Функція розподілу $F_{\xi_1}(x)$

Для координати ξ_2:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -9 \\ 0.42 & -9 < y \le 2 \\ 0.53 & 2 < y \le 7 \\ 0.71 & 7 < y \le 8 \\ 1 & 8 < y \end{cases}$$

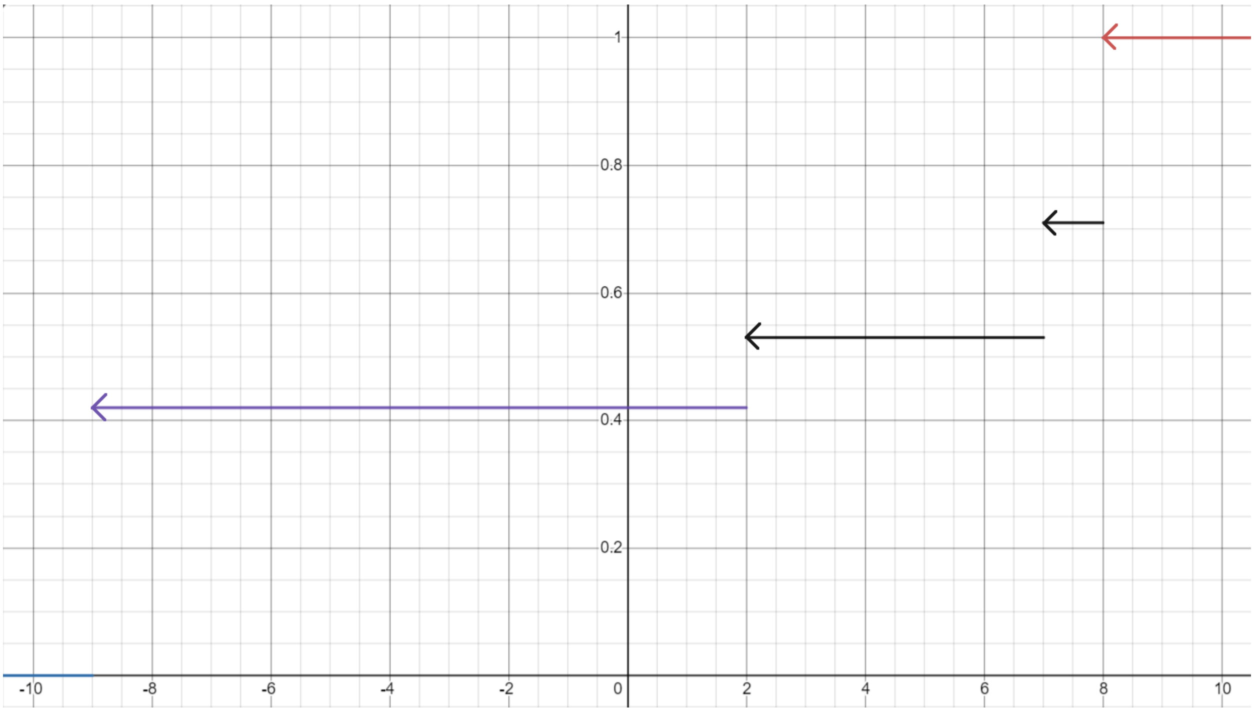

Рисунок 1.2 — Функція розподілу $F_{\xi_2}(y)$

1.3 Функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора

Зобразимо в декартовій системі координат всі точки, що відповідають значенню вектора $\vec{\xi}$ (рис. 1.3).

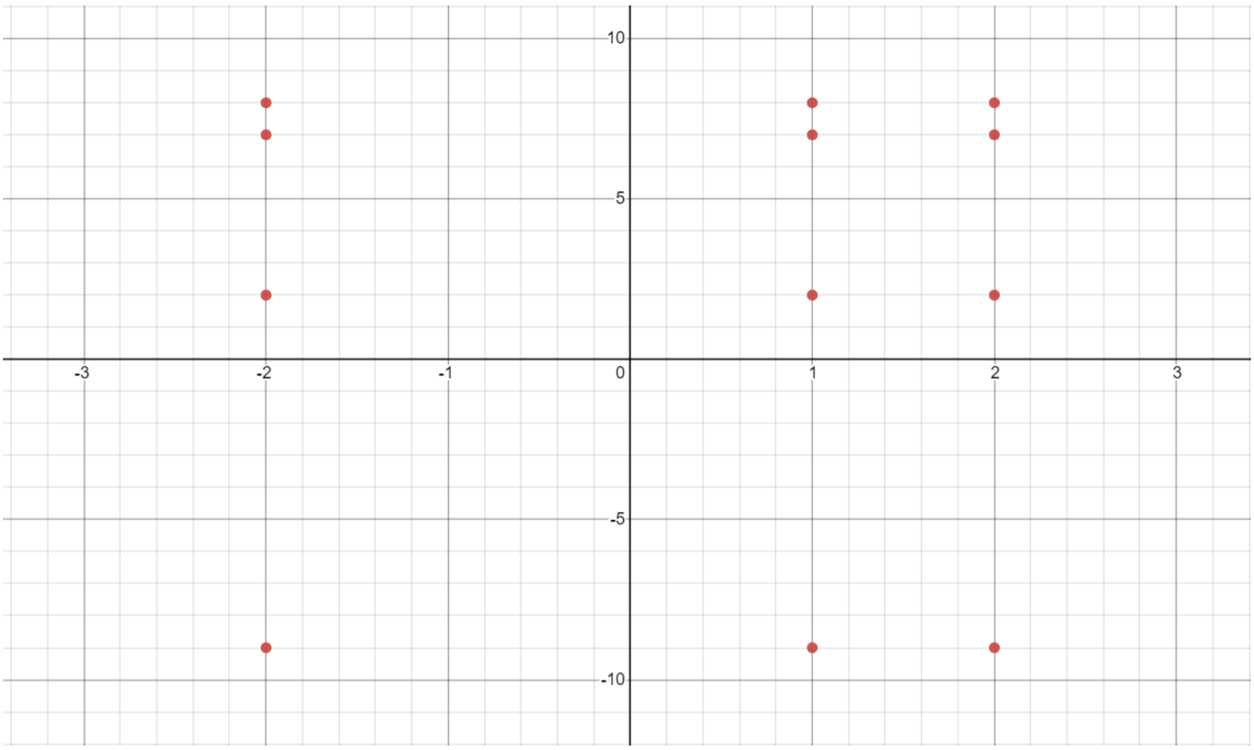

Рисунок 1.3 — Значення вектора $\vec{\xi}$ в декартовій системі координат

Розіб'ємо координатну площину на області, в яких сумісна функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ набуває однакові значення (рис. 1.4).

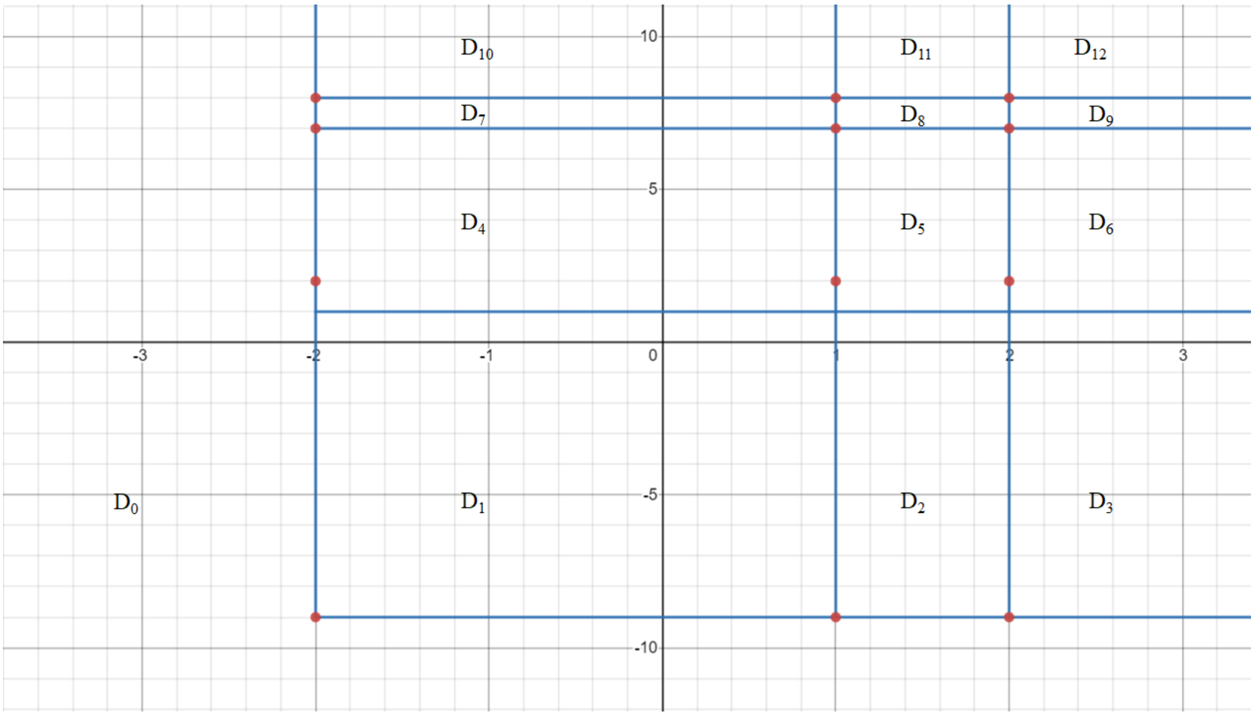

Рисунок 1.4 — Області, в яких сумісна функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ набуває однакові значення

Використаємо формулу:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\} = \sum_{i:x_i<x} \sum_{j:y_j=y} p_{ij}$$

a) $(x, y) \in D_0 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$
b) $(x, y) \in D_1 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.17$
c) $(x, y) \in D_2 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.3$
d) $(x, y) \in D_3 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.42$
e) $(x, y) \in D_4 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.18$
f) $(x, y) \in D_5 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.39$
g) $(x, y) \in D_6 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.53$
h) $(x, y) \in D_7 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.25$
i) $(x, y) \in D_8 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.5$
j) $(x, y) \in D_9 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.71$
k) $(x, y) \in D_10 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.31$
l) $(x, y) \in D_11 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.64$

m) $(x, y) \in D_12 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 1$

Запишемо функцію розподілу у вигляді таблиці:

Таблиця 1.4 — Сумісна функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$

$x \backslash y$	$y \leq -9$	$-9 < y \leq 2$	$2 < y \leq 7$	$7 < y \leq 8$	$8 <$ y
$x \leq -2$	0	0	0	0	0
$-2 < x \leq 1$	0	0.17	0.18	0.25	0.31
$1 < x \leq 2$	0	0.3	0.39	0.5	0.64
$2 < x$	0	0.42	0.53	0.71	1

Перевірка (властивість узгодження):

$\lim\limits_{y\to\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$ виконується, оскільки останній стовпчик – це $F_{\xi_1}(x)$

$\lim\limits_{x\to\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_2}(y)$ виконується, оскільки останній рядок – це $F_{\xi_2}(y)$

$\lim F_{\vec{\xi}}(x,y) = 1$ виконується, оскільки $(x, y) \in D_12 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 1$

$x \to \infty$

$y \to \infty$

1.4 Математичні сподівання координат та кореляційна матриця

Знайдемо математичне сподівання координати ξ_1:

$$\mathbb{E}\xi_1 = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = (-2) \cdot 0.31 + 1 \cdot 0.33 + 2 \cdot 0.36 = 0.43$$

Аналогічно для координати ξ_2:

$$\mathbb{E}\xi_2 = \sum_{j=1}^{4} x_j p_j = (-9) \cdot 0.42 + 2 \cdot 0.11 + 7 \cdot 0.18 + 8 \cdot 0.29 = 0.02$$

Центр розсіювання вектора $\vec{\xi}$ – точка (0.43, 0.02).

Дисперсія координати ξ_1:

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)^2 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = (-2)^2 \cdot 0.31 + 1^2 \cdot 0.33 + 2^2 \cdot 0.36 = 3.01$$

Дисперсія координати ξ_2:

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)^2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = (-9)^2 \cdot 0.42 + 2^2 \cdot 0.11 + 7^2 \cdot 0.18 + 8^2 \cdot 0.29 = 61.84$$

Для побудови коваріаційної матриці скористаємося формулами:
$cov(\xi_1\xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2$
$cov(\xi_1\xi_1) = \mathbb{D}\xi_1$
$cov(\xi_2\xi_2) = \mathbb{D}\xi_2$

$$\mathbb{E}\xi_1\xi_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_i y_j p_{ij} = (-2)\cdot(-9)\cdot 0.17 + (-2)\cdot 2\cdot 0.01 +$$

$$(-2)\cdot 7\cdot 0.07 + (-2)\cdot 8\cdot 0.06 + 1\cdot(-9)\cdot 0.13 + 1\cdot 2\cdot 0.08 +$$

$$+1\cdot 7\cdot 0.04 + 1\cdot 8\cdot 0.08 + 2\cdot(-9)\cdot 0.12 + 2\cdot 2\cdot 0.02 +$$

$$+2\cdot 7\cdot 0.07 + 2\cdot 8\cdot 0.15 = 2.29$$

$$cov(\xi_1\xi_2) = 2.29 - 0.43\cdot 0.02 = 2.2814$$

Тоді коваріаційна матриця:

$$C\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1\xi_2) \\ cov(\xi_1\xi_2) & \mathbb{D}\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.01 & 2.2814 \\ 2.2814 & 61.84 \end{pmatrix}$$

Оскільки $cov(\xi_1\xi_2)$, то випадкові величини ξ_1 та ξ_2 корельовані та залежні.

1.5 Умовні ряди розподілу

Знайдемо умовні ряди розподілу для ξ_1 за $\xi_2 = y_j$.

$$\mathbb{P}(\xi_1 = x_i|\xi_2 = y_j) = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} p_{ij}}$$

Таблиця 1.5 — Умовні ряди розподілу для ξ_1 за $\xi_2 = y_j$

x / ξ_1	-2	1	2
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot \mid \xi_2 = -9\}$	$\frac{17}{42}$	$\frac{13}{42}$	$\frac{12}{42}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot \mid \xi_2 = 2\}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{11}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot \mid \xi_2 = 7\}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = \cdot \mid \xi_2 = 8\}$	$\frac{6}{29}$	$\frac{8}{29}$	$\frac{15}{29}$

Перевірка:

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \mid \xi_2 = -9\} = \frac{17}{45} + \frac{13}{42} + \frac{12}{42} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \mid \xi_2 = 2\} = \frac{1}{11} + \frac{8}{11} + \frac{2}{11} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \mid \xi_2 = 7\} = \frac{7}{18} + \frac{4}{18} + \frac{7}{18} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \mid \xi_2 = 8\} = \frac{6}{29} + \frac{8}{29} + \frac{15}{29} = 1$$

Аналогічно для ξ_1 за $\xi_2 = y_j$.

$$\mathbb{P}(\xi_2 = y_j \mid \xi_2 = x_i) = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij}}$$

Таблиця 1.6 — Умовні ряди розподілу для ξ_2 за $\xi_1 = x_i$

y / ξ_2	-9	2	7	8
$\mathbb{P}\{\xi_2 = \cdot \| \xi_1 = -2\}$	$\frac{17}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{6}{31}$
$\mathbb{P}\{\xi_2 = \cdot \| \xi_1 = 1\}$	$\frac{13}{33}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{8}{33}$
$\mathbb{P}\{\xi_2 = \cdot \| \xi_1 = 2\}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{15}{36}$

Перевірка:

$$\sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = -2\} = \frac{17}{31} + \frac{1}{31} + \frac{7}{31} + \frac{6}{31} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = 1\} = \frac{13}{33} + \frac{8}{33} + \frac{4}{33} + \frac{8}{33} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = 2\} = \frac{12}{36} + \frac{2}{36} + \frac{7}{36} + \frac{15}{36} = 1$$

1.6 Умовні математичні сподівання

Для пошуку умовного математичного сподівання ξ_1 за $\xi_2 = y_j$ застосуємо формулу:

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = y_j) = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = -9) = (-2) \cdot \frac{17}{42} + 1 \cdot \frac{13}{42} + 2 \cdot \frac{12}{42} = \frac{3}{42}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = 2) = (-2) \cdot \frac{1}{11} + 1 \cdot \frac{8}{11} + 2 \cdot \frac{2}{11} = \frac{10}{11}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = 7) = (-2) \cdot \frac{7}{18} + 1 \cdot \frac{4}{18} + 2 \cdot \frac{7}{18} = \frac{4}{18}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = 8) = (-2) \cdot \frac{6}{29} + 1 \cdot \frac{8}{29} + 2 \cdot \frac{15}{29} = \frac{26}{29}$$

Наведемо ряд умовного математичного сподівання $\xi_1|\xi_2$ у вигляді таблиці.

Таблиця 1.7 — Умовне математичне сподівання $\xi_1|\xi_2 = y_j$

$\mathbb{E}(\xi_1\|\xi_2)$	$\frac{3}{42}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{26}{29}$
$\mathbb{P}$	0.42	0.11	0.18	0.29

Перевірка:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) = \frac{3}{42} \cdot 0.42 + \frac{10}{11} \cdot 0.11 + \frac{4}{18} \cdot 0.18 + \frac{26}{29} * 0.29 = 0.43 = \mathbb{E}\xi_1$$

Аналогічно умовне математичне сподівання ξ_2 за $\xi_1 = x_i$:

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^{4} y_j \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|xi_1 = -2) = (-9) \cdot \frac{17}{31} + 2 \cdot \frac{1}{31} + 7 \cdot \frac{7}{31} + 8 \cdot \frac{6}{31} = -\frac{54}{31} = -1\frac{23}{31}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|xi_1 = -2) = (-9) \cdot \frac{13}{33} + 2 \cdot \frac{8}{33} + 7 \cdot \frac{4}{33} + 8 \cdot \frac{8}{33} = -\frac{9}{33} = -\frac{9}{33}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|xi_1 = -2) = (-9) \cdot \frac{12}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} + 7 \cdot \frac{7}{36} + 8 \cdot \frac{15}{36} = \frac{65}{36} = 1\frac{29}{36}$$

Наведемо ряд умовного математичного сподівання $\xi_2|\xi_1$ у вигляді таблиці.

Таблиця 1.8 — Умовне математичне сподівання $\xi_2|\xi_1 = x_i$

$\mathbb{E}(\xi_2\|\xi_1)$	$-1\frac{23}{31}$	-$\frac{9}{33}$	$1\frac{29}{36}$
$\mathbb{P}$	0.31	0.33	0.36

Перевірка:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)) = (-1\frac{23}{31}) \cdot 0.31 + (-\frac{9}{33}) \cdot 0.33 + 1\frac{29}{36} \cdot 0.36 = 0.02 = \mathbb{E}\xi_2$$

2 ЗАВДАННЯ 2

Двовимірний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ рівномірно розподілений в області D, яка наведена на рис. 2.1.

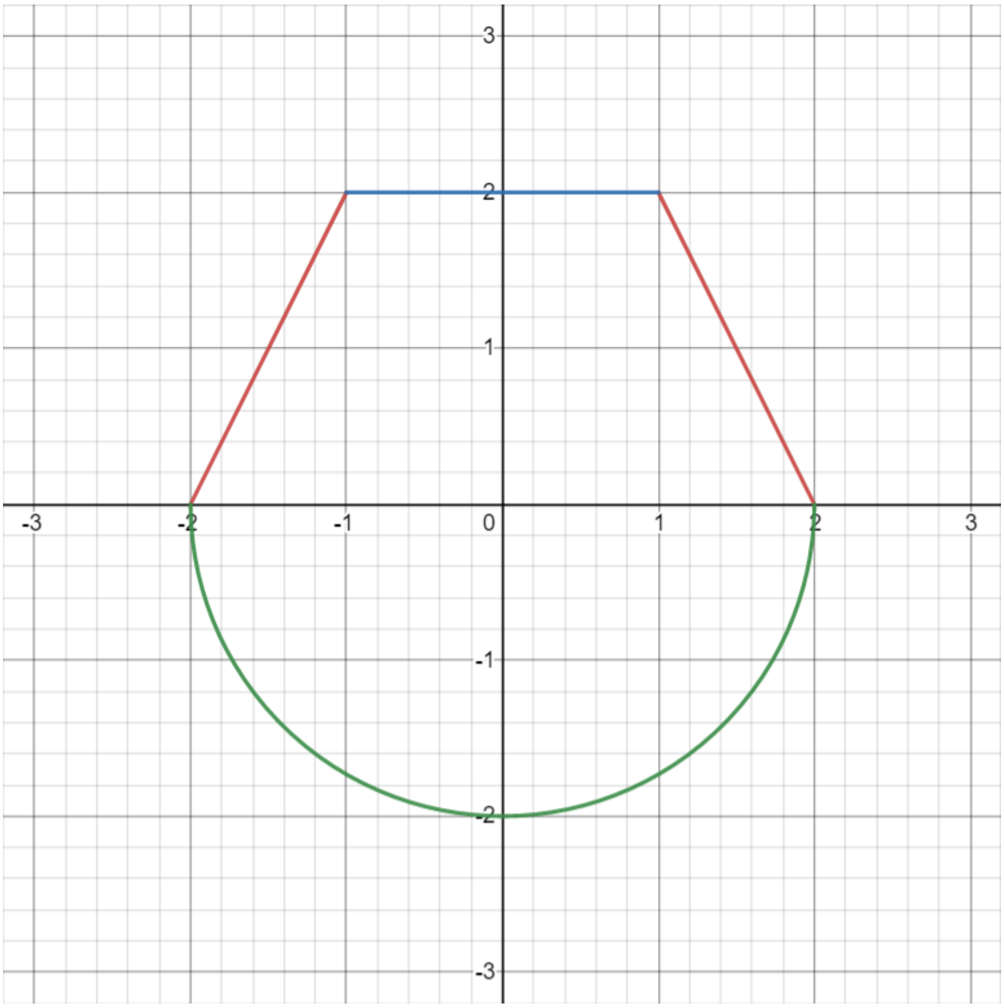

Рисунок 2.1 — Область, в якій розподілено $\vec{\xi}$

Рівняння ліній, що обмежують область D:

$$\begin{cases} y = 2 & -1 \le x \le 1 \\ y = -2x + 4 & 1 \le x \le 2 \\ y = -\sqrt{4 - x^2} & -2 \le x \le 2 \\ y = 2x + 4 & -2 \le x \le -1 \end{cases}$$

2.1 Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Знайдемо щільність розподілу за формулою:

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2x+4} dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2} dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-2x+4} dy =$$

$$= \int_{-2}^{-1} (2x+4+\sqrt{4-x^2})dx + \int_{-1}^{1} (2+\sqrt{4-x^2})dx + \int_{1}^{2} (4-2x+\sqrt{4-x^2})dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} (2x+4)dx + \int_{-1}^{1} 2dx + \int_{1}^{2} (4-2x)dx + \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx =$$

$$= \left(x^2+4x\right)\Big|_{-2}^{-1} + 2x\Big|_{-1}^{1} + \left(4x-x^2\right)\Big|_{1}^{2} - 4\int_{\pi}^{0} \sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 1+4+1+2\int_{0}^{\pi} (1-\cos 2\varphi)d\varphi = 6 + (2\varphi - \sin 2\varphi)\big|_0^{\pi} =$$

$$= 6 + 2\pi$$

В подальшому для обчислення інтегралу $\int \sqrt{4-x^2}dx$ користуватимемось загальною формулою, яка наведена у додатку А.

Позначимо $S_D = 6 + 2\pi$.

Отже, щільність розподілу:

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6+2\pi} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Тепер знайдемо маргінальні щільності координат вектора.

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \dfrac{1}{S_D}\displaystyle\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2x+4} dy & -2 < x \le -1 \\ \dfrac{1}{S_D}\displaystyle\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{2} dy & -1 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{S_D}\displaystyle\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-2x+4} dy & 1 < x \le 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{\xi}}(x,y)dy = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \dfrac{2x+4+\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi} & -2 < x \le -1 \\ \dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi} & -1 < x \le 1 \\ \dfrac{4-2x+\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi} & 1 < x \le 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$

Перевірка умови нормування: $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x)dx = \frac{1}{6+2\pi}\left(\int_{-2}^{-1}(2x+4+\sqrt{4-x^2})dx + \int_{-1}^{1}(2+\sqrt{4-x^2})dx\right) +$$
$$+\frac{1}{6+2\pi}\int_{1}^{2}(4-2x+\sqrt{4-x^2})dx =$$
$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(\int_{-2}^{-1}(2x+4)dx + \int_{-1}^{1}2dx + \int_{1}^{2}(4-2x)dx + \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx\right) =$$
$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(\left(x^2+4x\right)\Big|_{-2}^{-1} + 2x\Big|_{-1}^{1} + \left(4x-x^2\right)\Big|_{1}^{2} - 4\int_{\pi}^{0}\sin^2\varphi d\varphi\right) =$$
$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(1+4+1+2\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = 6 + (2\varphi - \sin 2\varphi)\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$
$$= \frac{6+2\pi}{6+2\pi} = 1$$

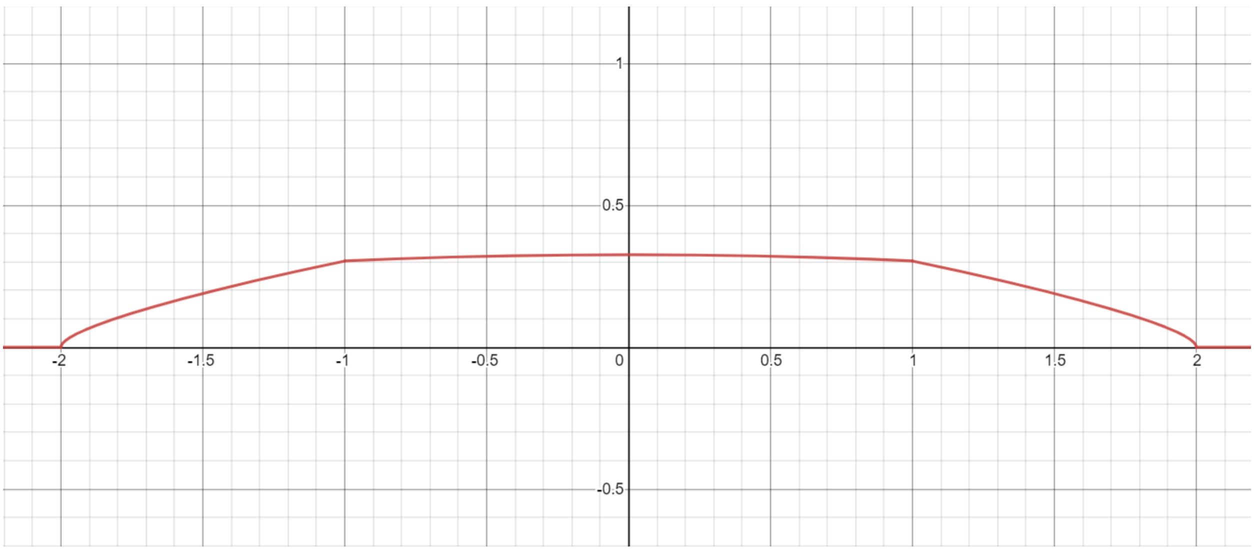

Рисунок 2.2 — Щільність координати $\xi_1(x)$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dx = \begin{cases} 0 & y \le -2 \\ \dfrac{1}{S_D}\displaystyle\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx & -2 < y \le 0 \\ \dfrac{1}{S_D}\displaystyle\int_{0.5y-2}^{-0.5y+2} dx & 0 < y \le 2 \\ 0 & 2 < y \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -2 \\ \dfrac{2\sqrt{4-y^2}}{6+2\pi} & -2 < y \le 0 \\ \dfrac{4-y}{6+2\pi} & 0 < y \le 2 \\ 0 & 2 < y \end{cases}$$

Перевірка умови нормування: $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(y)dy = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(y)dy = \frac{1}{6+2\pi}\left(2\int_{-2}^{0}\sqrt{4-y^2}dy + \int_{0}^{2}(4-y)dy\right) =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\varphi d\varphi + (4y - \frac{y^2}{2})\Big|_0^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1 + cos2\varphi)d\varphi + 6\right) =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left((4\varphi + 2\sin 2\varphi)|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + 6\right) = \frac{6+2\pi}{6+2\pi} = 1$$

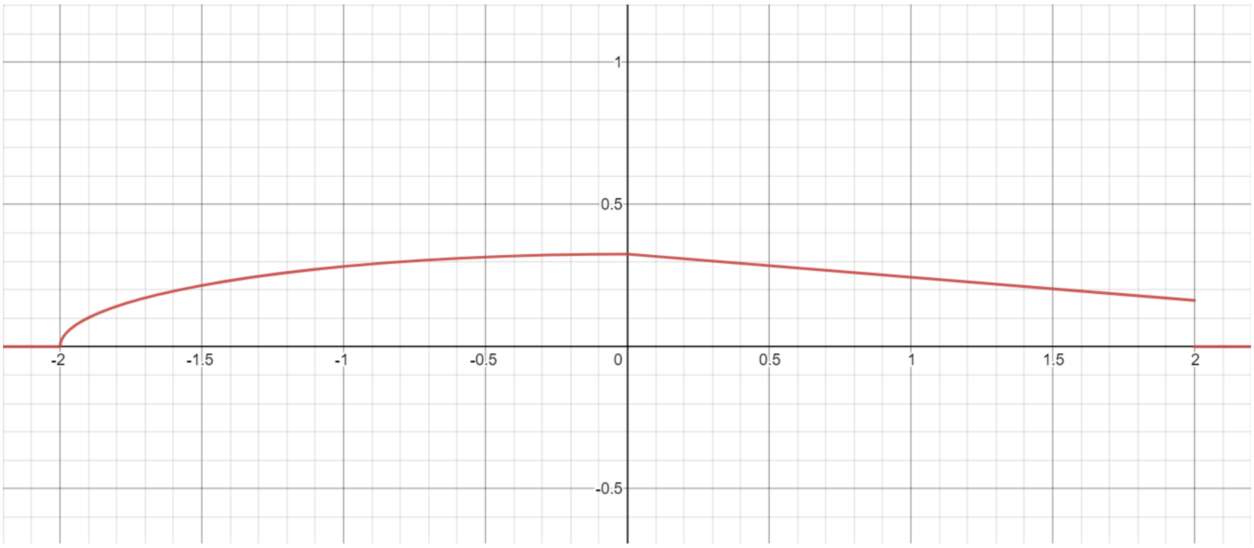

Рисунок 2.3 — Щільність координати $\xi_2(y)$

2.2 Функції розподілу координати ξ_1 та ξ_2

Обчислимо функцію розподілу $F_{\xi_1}(x)$ координати ξ_1.

$$F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(x)dx$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \dfrac{1}{6+2\pi} \displaystyle\int_{-2}^{x} (2s + 4 + \sqrt{4-s^2})ds & -2 < x \le -1 \\ F_{\xi_1}(-1) + \dfrac{1}{6+2\pi} \displaystyle\int_{-1}^{x} (2 + \sqrt{4-s^2})ds & -1 < x \le 1 \\ F_{\xi_1}(1) + \dfrac{1}{6+2\pi} \displaystyle\int_{1}^{x} (4 - 2s + \sqrt{4-s^2})ds & 1 < x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \dfrac{x^2 + 4x + 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 4 + \pi}{6+2\pi} & -2 < x \le -1 \\ \dfrac{2x + 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 3 + \pi}{6+2\pi} & -1 < x \le 1 \\ \dfrac{4x - x^2 + 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2 + \pi}{6+2\pi} & 1 < x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

Перевірка неперервності функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ в точках склейки.

$$\lim_{-2-0} F_{\xi_1}(x) = 0$$

$$\lim_{-2+0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{-2+0}\left(\frac{x^2+4x+2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+4+\pi}{6+2\pi}\right) =$$

$$= \frac{(-2)^2+4(-2)+2\arcsin\frac{(-2)}{2}+\frac{(-2)}{2}\sqrt{4-(-2)^2}+4+\pi}{6+2\pi} =$$

$$= \frac{4-8-\pi+4+\pi}{6+2\pi} = 0$$

$$\lim_{-1-0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{-1-0}\left(\frac{x^2+4x+2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+4+\pi}{6+2\pi}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^2+4(-1)+2\arcsin\frac{(-1)}{2}+\frac{(-1)}{2}\sqrt{4-(-1)^2}+4+\pi}{6+2\pi} =$$

$$= \frac{1-4-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+4+\pi}{6+2\pi} = \frac{1+\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{6+2\pi}$$

$$\lim_{-1+0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{-1+0}\left(\frac{2x+2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+3+\pi}{6+2\pi}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)+2\arcsin\frac{(-1)}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4-(-1)^2}+3+\pi}{6+2\pi} =$$

$$\frac{-2-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+3+\pi}{6+2\pi} = \frac{1+\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{6+2\pi}$$

$$\lim_{1-0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{1-0}\left(\frac{2x+2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+3+\pi}{6+2\pi}\right) =$$

$$= \frac{2+2\arcsin\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4-1^2}+3+\pi}{6+2\pi} =$$

$$= \frac{2+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+3+\pi}{6+2\pi} = \frac{5+\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{6+2\pi}$$

$$\lim_{1+0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{1+0}\left(\frac{4x-x^2+2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2+\pi}{6+2\pi}\right) =$$

$$= \frac{4-1^2+2\arcsin\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4-1^2}+2+\pi}{6+2\pi} =$$

$$= \frac{4 - 1 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + \pi}{6 + 2\pi} = \frac{5 + \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{6 + 2\pi}$$

$$\lim_{2-0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{2-0} \left(\frac{4x - x^2 + 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2 + \pi}{6 + 2\pi} \right) =$$

$$= \frac{4(2) - 2^2 + 2\arcsin\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\sqrt{4 - 2^2} + 2 + \pi}{6 + 2\pi} =$$

$$= \frac{8 - 4 + \pi + 2 + \pi}{6 + 2\pi} = \frac{6 + 2\pi}{6 + 2\pi} = 1$$

$$\lim_{2+0} F_{\xi_1}(x) = 1$$

Як видно, в точках склейки значення функції розподілу збігається, отже $F_{\xi_1}(x)$ – неперервна (це також видно з графіку наведеного на рис.2.4).

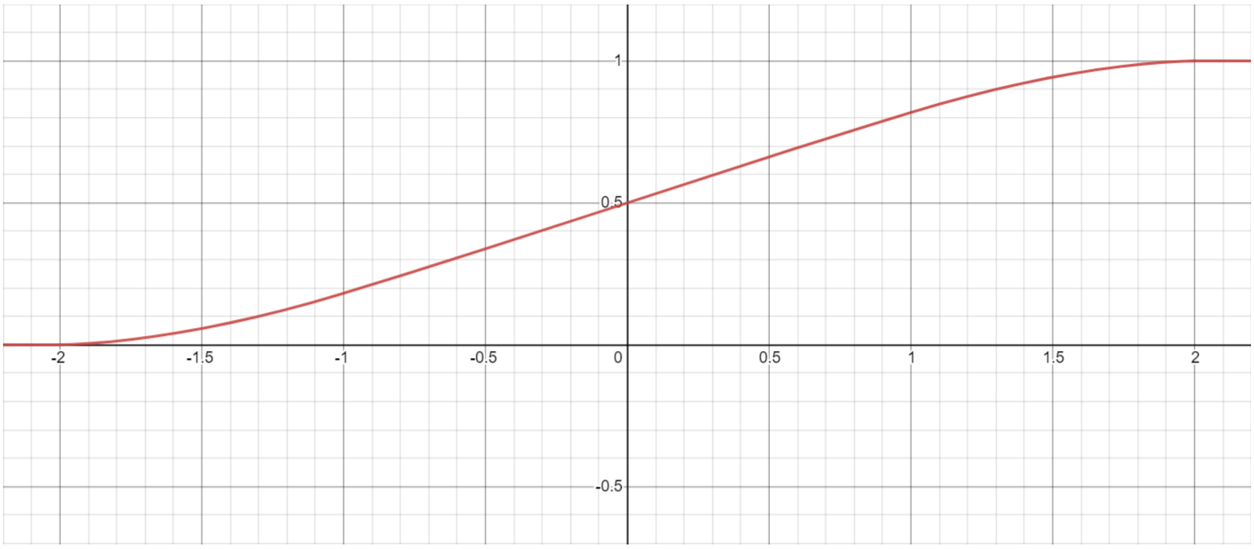

Рисунок 2.4 — Функція розподілу $F_{\xi_1}(x)$

Аналогічно обчислимо функцію розподілу $F_{\xi_2}(y)$ координати ξ_2.

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \dfrac{2}{6 + 2\pi} \displaystyle\int_{-2}^{y} \sqrt{4 - y^2}dy & -2 \leq y \leq 0 \\ \dfrac{1}{6 + 2\pi} \left(F_{\xi_2}(0) + \displaystyle\int_{0}^{y} (4 - y)dy \right) & 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & 2 < y \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \dfrac{2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \pi}{3+\pi} & -2 \le y \le 0 \\ \dfrac{4y - \frac{y^2}{2} + 2\pi}{6+2\pi} & 0 \le y \le 2 \\ 1 & 2 < y \end{cases}$$

Перевірка неперервності функції розподілу $F_{\xi_2}(y)$ в точках склейки.

$$\lim_{-2-0} F_{\xi_2}(y) = 0$$

$$\lim_{-2+0} F_{\xi_2}(y) = \lim_{-2+0} \left(\frac{2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \pi}{3+\pi} \right) =$$

$$= \frac{2\arcsin\frac{(-2)}{2} + \frac{(-2)}{2}\sqrt{4-(-2)^2} + \pi}{3+\pi} = \frac{-\pi+\pi}{3+\pi} = 0$$

$$\lim_{0-0} F_{\xi_2}(y) = \lim_{0-0} \left(\frac{2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \pi}{3+\pi} \right) =$$

$$= \frac{2\arcsin\frac{0}{2} + \frac{0}{2}\sqrt{4-0^2} + \pi}{3+\pi} = \frac{0+0+\pi}{3+\pi} = \frac{\pi}{3+\pi}$$

$$\lim_{0+0} F_{\xi_2}(y) = \lim_{0-0} \left(\frac{4y - \frac{y^2}{2} + 2\pi}{6+2\pi} \right) =$$

$$= \frac{4(0) - \frac{0^2}{2} + 2\pi}{6+2\pi} = \frac{0-0+2\pi}{6+2\pi} = \frac{2\pi}{6+2\pi} = \frac{\pi}{3+\pi}$$

$$\lim_{2-0} F_{\xi_2}(y) = \lim_{2-0} \left(\frac{4(2) - \frac{2^2}{2} + 2\pi}{6+2\pi} \right) =$$

$$= \frac{8 - \frac{4}{2} + 2\pi}{6+2\pi} = \frac{8-2+2\pi}{6+2\pi} = \frac{6+2\pi}{6+2\pi} = 1$$

$$\lim_{2+0} F_{\xi_2}(y) = 1$$

Як видно, в точках склейки значення функції розподілу збігається, отже $F_{\xi_2}(y)$ – неперервна (це також видно з графіку наведеного на рис.2.5).

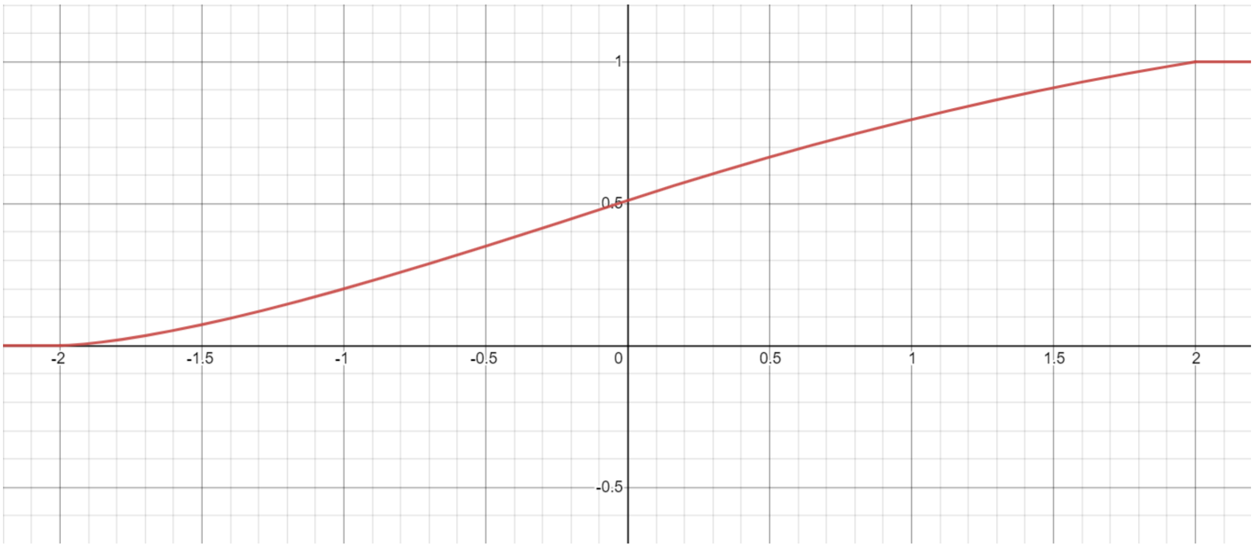

Рисунок 2.5 — Функція розподілу $F_{\xi_2}(y)$

2.3 Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$

2.4 Математичні сподівання координат. Коваріаційна матриця

Математичне сподівання ξ_1:

$$\mathbb{E}\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi_1}(x)dx = \int_{-2}^{-1} \frac{2x^2+4x+x\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi}dx +$$

$$+\int_{-1}^{1} \frac{2x+x\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi}dx + \int_{1}^{2} \frac{4x-2x^2+x\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi}dx =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(\left(\frac{2x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_{-2}^{-1} + x^2\Big|_{-1}^{1} + \left(2x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{1}^{2} -\right.$$

$$\left. - \int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} d(4-x^2)\right) = \frac{1}{6+2\pi}\left(\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+0+\frac{8}{3}-\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3}\Big|_{-2}^{2}\right) =$$

$$= \frac{0-0}{6+2\pi} = 0$$

$\mathbb{E}\xi_1 = 0$, як і очікувалось, оскільки область D симетрична відносно осі OY.

Математичне сподівання ξ_2:

$$\mathbb{E}\xi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\xi_2}(y)dy = \frac{1}{6+2\pi}\left(\int_{-2}^{0} 2y\sqrt{4-y^2}dy + \int_{0}^{2}(4y-y^2)dy\right) =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(-\int_{-2}^{0}\sqrt{4-y^2}d(4-y^2) + \left(2y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2\right) =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(\left(-\frac{2\sqrt{(4-y^2)^3}}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{16}{3}\right) = \frac{1}{6+2\pi}\left(-\frac{16}{3}+\frac{16}{3}\right) = 0$$

Отже, центр розсіювання $\mathbb{E}\vec{\xi} = (\mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\xi_2)^T = (0,0)^T$.

Знайдемо дисперсії.

$$\mathbb{E}\xi_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx = \int_{-2}^{-1}\frac{2x^3+4x^2+x^2\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi}dx +$$

$$+\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x^2\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi}dx + \int_{1}^{2}\frac{4x^2-2x^3+x^2\sqrt{4-x^2}}{6+2\pi}dx =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(\left(\frac{x^4}{2}+\frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \frac{2x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{4x^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} -\right.$$

$$\left. - \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx\right) = \left| \begin{array}{c} x = 2\sin t \\ t = \arcsin\frac{x}{2} \\ dx = 2\cos t dt \\ x=-2 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{6+2\pi}\left(-\frac{5}{6}+\frac{8}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{3}-\frac{5}{6}+16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t dt\right) = \frac{1}{6+2\pi}\left(5+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt\right) =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(5+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt\right) = \frac{1}{6+2\pi}\left(5+\left(2t+\frac{\sin 4t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}(5+\pi+\pi+0) = \frac{5+2\pi}{6+2\pi}$$

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \frac{5+2\pi}{6+2\pi}$$

$$\mathbb{E}\xi_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{\xi_2}(y)dy = \frac{1}{6+2\pi}\left(\int_{-2}^{0}2y^2\sqrt{4-y^2}dy + \int_0^2(4y^2-y^3)dy\right) =$$

При обчисленні $2\int_{-2}^{0} y^2\sqrt{4-y^2}dy$ підставимо одразу кінцеву формулу, яка була знайдена в минулому прикладі.

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left((4t+\sin 4t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left(\frac{4y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2}\right) = \frac{1}{6+2\pi}\left(2\pi+\frac{32}{3}-4\right) =$$

$$= \frac{2\pi+\frac{20}{3}}{6+2\pi}$$

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = \frac{\frac{20}{3}+2\pi}{6+2\pi}$$

Для побудови коваріаційної матриці знайдемо коваріацію:
$cov(\xi_1,\xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2$

$$\mathbb{E}\xi_1\xi_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(\int_{-2}^{0}dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} yxdx + \int_{0}^{2}dy\int_{0.5y-2}^{2-0.5y} yxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(\int_{-2}^{0} y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy + \int_{0}^{2} y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0.5y-2}^{2-0.5y} dy\right) =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(\int_{-2}^{0} y\left(\frac{4-y^2-4+y^2}{2}\right)dy + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{2} y\left(\frac{4-2y+0.25y-0.25y+2y-4}{2}\right)dy\right) =$$

$$= \frac{1}{6+2\pi}\left(\int_{-2}^{2} y(0)dy\right) = 0$$

$$cov(\xi_1,\xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2 = 0 - 0 = 0$$

$cov(\xi_1,\xi_2) = 0$, як і має бути, оскільки область D симетрична відносно осі OY. Звідси можна зробити висновок, що величини ξ_1 та ξ_2 некорельовані, відповідно $r(\xi_1,\xi_2) = 0$. Тоді коваріаційна матриця буде:

$$C_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} \frac{5+2\pi}{6+2\pi} & 0 \\ 0 & \frac{\frac{20}{3}+2\pi}{6+2\pi} \end{pmatrix}$$

Зробимо перевірку невід'ємної визначеності матриці:

$$\det C_{\vec{\xi}} = \frac{5+2\pi}{6+2\pi} \cdot \frac{\frac{20}{3}+2\pi}{6+2\pi} = \frac{\frac{100}{3}+\frac{70\pi}{3}+4\pi^2}{36+24\pi+2\pi^2} > 0$$

2.5 Умовні щільності розподілу для кожної координати

ДОДАТОК А

Обчислення інтеграла $\int \sqrt{4-x^2}dx$

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2\int \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x}{2} = \sin t \\ t = \arcsin\frac{x}{2} \\ dx = 2\cos t dt \end{array} \right| = 4\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= 4\int \cos^2 t dt = 2\int (1+\cos 2t)dt = 2t + sin 2t + C =$$

$$= 2t + 2\sin t\cos t + C = 2t + 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$$