МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
"ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ"
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА №1

з теорії ймовірності

на тему: «Випадкові вектори»

Варіант 7

Виконав студент 2 курсу групи КА-06
Вергелюк Олександр Андрійович
Перевірив:
Ільєнко А. Б.

Київ – 2021

1 ЗАВДАННЯ 1

Нехай дискретний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ задано таблицею розподілу (Таблиця 1.1).

Таблиця 1.1 — Таблиця розподілу вектора $\vec{\xi}$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	2	7	8
-2	0.17	0.01	0.07	0.06
1	0.13	0.08	0.04	0.08
2	0.12	0.02	0.07	0.15

1.1 Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Для ξ_1 використаємо формулу: $p_i = \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$.

Таблиця 1.2 — Ряд розподілу ξ_1

x_i	-2	1	2
p_i	0.31	0.33	0.36

Перевірка:

$$0.31 + 0.33 + 0.36 = 1$$

Аналогічно для ξ_2: $p_j = \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$.

Таблиця 1.3 — Ряд розподілу ξ_2

y_i	-9	2	7	8
p_i	0.42	0.11	0.18	0.29

Перевірка:

$$0.42 + 0.11 + 0.18 + 0.29 = 1$$

1.2 Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ і $F_{\xi_2}(y)$ та їх графіки

Для координати ξ_1:

$$F_{\xi_1} = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ 0.31 & -2 < x \le 1 \\ 0.64 & 1 < x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

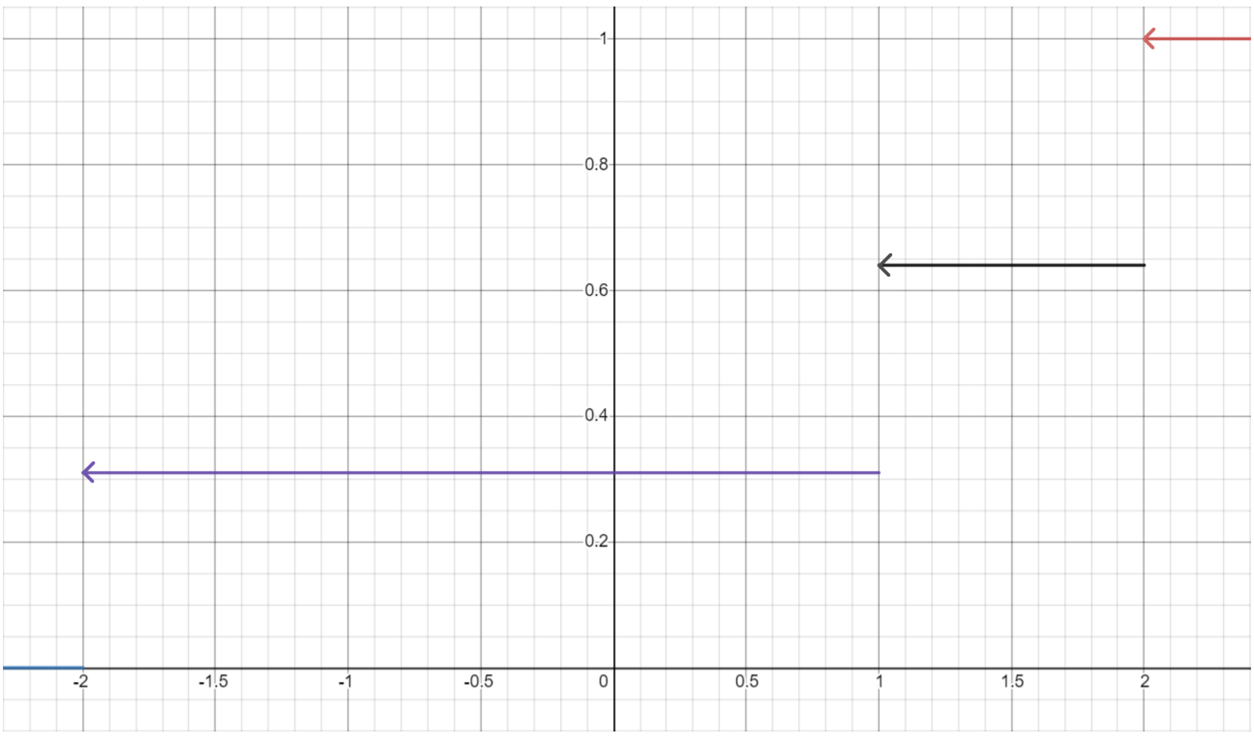

Рисунок 1.1 — Функція розподілу $F_{\xi_1}(x)$

Для координати ξ_2:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -9 \\ 0.42 & -9 < y \le 2 \\ 0.53 & 2 < y \le 7 \\ 0.71 & 7 < y \le 8 \\ 1 & 8 < y \end{cases}$$

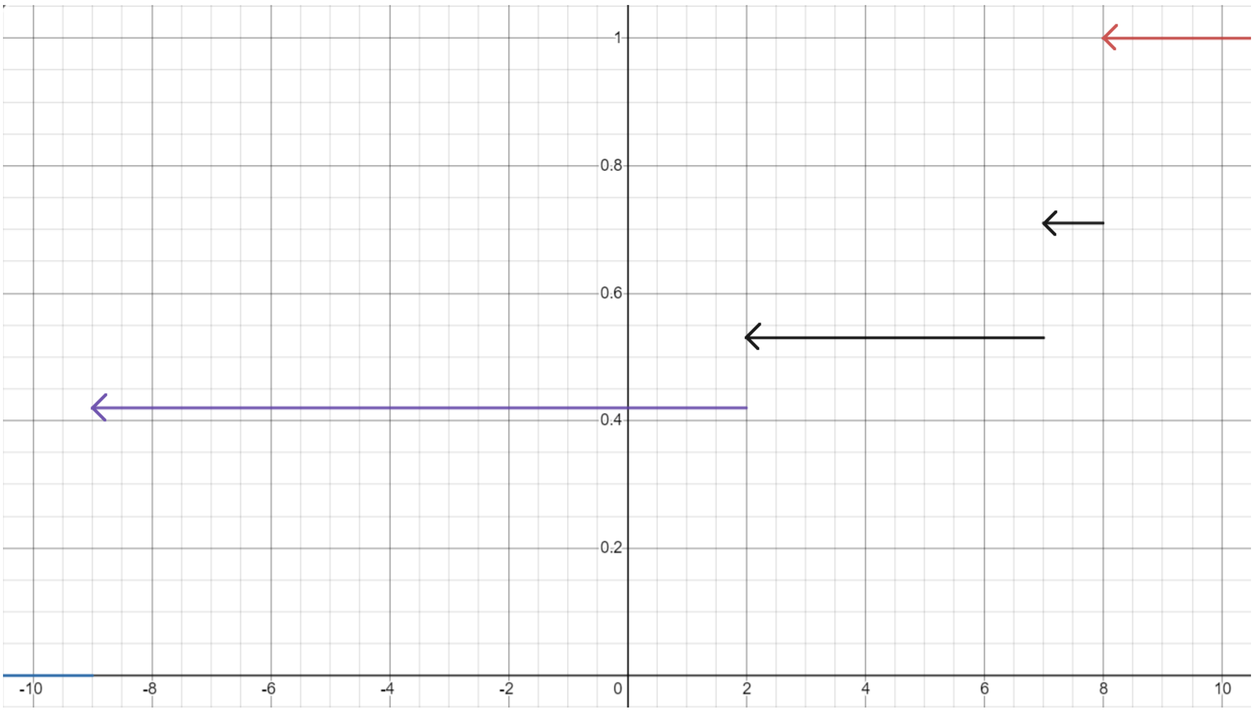

Рисунок 1.2 — Функція розподілу $F_{\xi_2}(y)$

1.3 Функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора

Зобразимо в декартовій системі координат всі точки, що відповідають значенню вектора $\vec{\xi}$ (рис. 1.3).

Розіб'ємо координатну площину на області, в яких сумісна функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ набуває однакові значення (рис. 1.4).

Використаємо формулу:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\} = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j = y} p_{ij}$$

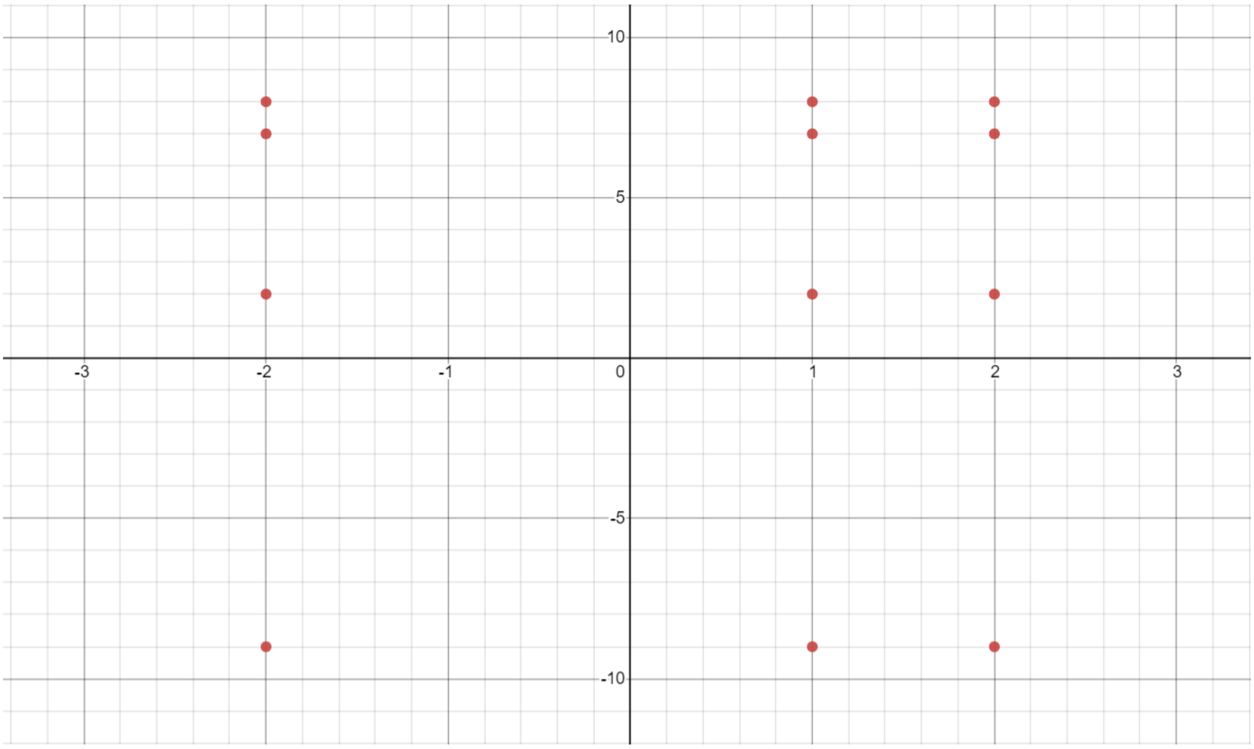

Рисунок 1.3 — Значення вектора $\vec{\xi}$ в декартовій системі координат

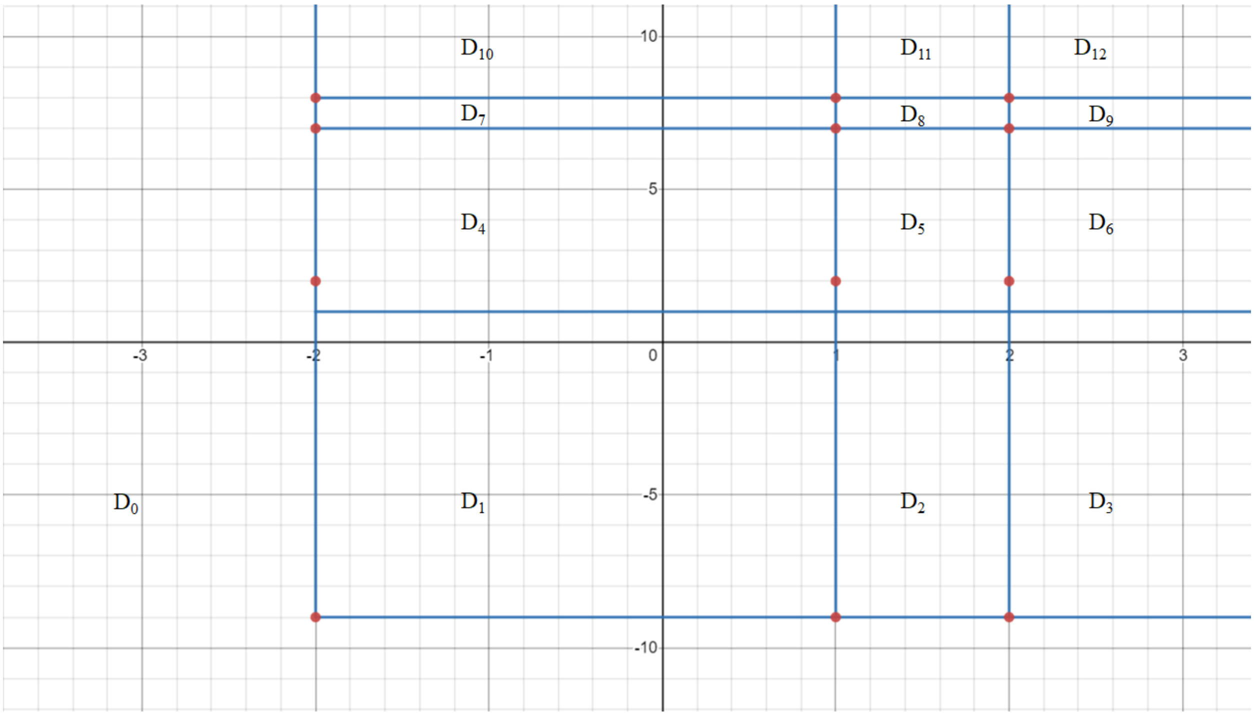

Рисунок 1.4 — Області, в яких сумісна функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ набуває однакові значення

a) $(x, y) \in D_0 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$

b) $(x, y) \in D_1 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.17$

c) $(x, y) \in D_2 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.3$

d) $(x, y) \in D_3 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.42$

e) $(x, y) \in D_4 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.18$

f) $(x, y) \in D_5 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.39$

g) $(x, y) \in D_6 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.53$

h) $(x, y) \in D_7 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.25$

i) $(x, y) \in D_8 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.5$

j) $(x, y) \in D_9 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.71$

k) $(x, y) \in D_10 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.31$

l) $(x, y) \in D_11 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0.64$

m) $(x, y) \in D_12 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 1$

Запишемо функцію розподілу у вигляді таблиці:

Таблиця 1.4 — Сумісна функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$

$x \backslash y$	$y \leq -9$	$-9 < y \leq 2$	$2 < y \leq 7$	$7 < y \leq 8$	$8 <$ y
$x \leq -2$	0	0	0	0	0
$-2 < x \leq 1$	0	0.17	0.18	0.25	0.31
$1 < x \leq 2$	0	0.3	0.39	0.5	0.64
$2 < x$	0	0.42	0.53	0.71	1

Перевірка (властивість узгодження):

$\lim\limits_{y\to\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$ виконується, оскільки останній стовпчик – це $F_{\xi_1}(x)$

$\lim\limits_{x\to\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_2}(y)$ виконується, оскільки останній рядок – це $F_{\xi_2}(y)$

$\lim F_{\vec{\xi}}(x,y) = 1$ виконується, оскільки $(x, y) \in D_12 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 1$

$x \to \infty$

$y \to \infty$

1.4 Математичні сподівання координат та кореляційна матриця

Знайдемо математичне сподівання координати ξ_1:

$$\mathbb{E}\xi_1 = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = (-2) \cdot 0.31 + 1 \cdot 0.33 + 2 \cdot 0.36 = 0.43$$

Аналогічно для координати ξ_2:

$$\mathbb{E}\xi_2 = \sum_{j=1}^{4} x_j p_j = (-9) \cdot 0.42 + 2 \cdot 0.11 + 7 \cdot 0.18 + 8 \cdot 0.29 = 0.02$$

Центр розсіювання вектора $\vec{\xi}$ – точка (0.43, 0.02).

Дисперсія координати ξ_1:

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)^2 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = (-2)^2 \cdot 0.31 + 1^2 \cdot 0.33 + 2^2 \cdot 0.36 = 3.01$$

Дисперсія координати ξ_2:

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)^2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = (-9)^2 \cdot 0.42 + 2^2 \cdot 0.11 + 7^2 \cdot 0.18 + 8^2 \cdot 0.29 = 61.84$$

Для побудови коваріаційної матриці скористаємося формулами:

$cov(\xi_1 \xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2$

$cov(\xi_1 \xi_1) = \mathbb{D}\xi_1$

$cov(\xi_2 \xi_2) = \mathbb{D}\xi_2$

$$\mathbb{E}\xi_1\xi_2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} x_i y_j p_{ij} = (-2) \cdot (-9) \cdot 0.17 + (-2) \cdot 2 \cdot 0.01 +$$

$$(-2) \cdot 7 \cdot 0.07 + (-2) \cdot 8 \cdot 0.06 + 1 \cdot (-9) \cdot 0.13 + 1 \cdot 2 \cdot 0.08 +$$

$$+1 \cdot 7 \cdot 0.04 + 1 \cdot 8 \cdot 0.08 + 2 \cdot (-9) \cdot 0.12 + 2 \cdot 2 \cdot 0.02 +$$

$$+2 \cdot 7 \cdot 0.07 + 2 \cdot 8 \cdot 0.15 =$$

$$cov(\xi_1 \xi_2) = -0.43 \cdot 0.02 =$$

Тоді коваріаційна матриця:

$$C\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1\xi_2) \\ cov(\xi_1\xi_2) & \mathbb{D}\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.01 & \\ & 61.84 \end{pmatrix}$$

Оскільки, $\det C\vec{\xi} \neq 0$, то випадкові величини ξ_1 та ξ_2 корельовані та залежні.

1.5 Умовні ряди розподілу