M2 Androide - Sorbonne Université

Module MAOA:
Modèles et Applications en Ordonnancement et optimisation combinAtoire

Projet 2023-2024

Autour du tracé d'un métro circulaire

On s'intéresse au problème du tracé d'une ligne de transport public circulaire (cela peut être un bus, un tramway ou un RER: toute ressemblance avec les métros du grand Paris serait parfaitement fortuite).

Problèmatique du métro circulaire:
On dispose d'un ensemble de points sur une carte correspondant à des centres de zones à fort peuplement où peuvent être installées potentiellement des stations des cette ligne. On souhaite dessiner le tracé de la ligne passant par seulement p de ces points: les usagers des zones alentour iront à pieds rejoindre la station la plus proche. L'objectif est de minimiser la longueur des trajets à pieds et en transport pour les usagers de la ligne.

1 La problématique des transports publics

1.1 Introduction

Il est à noter que d'autres paramètres et d'autres fonctions objectives pourraient être choisis avec pertinence pour le tracé d'une ligne de transports publics. En effet, les agglomérations réfléchissent régulièrement à construire ou reconstruire les services de transports publics. Il s'agit de tracer des lignes de transports (bus, métro, tramway,...), de fixer le nombre de véhicules sur les lignes, les horaires à ces lignes, l'affectation des conducteurs etc.

La conception d'un plan de transport pour une agglomération se doit de respecter certains principes, parmi lesquelles:

- couverture: elles doivent couvrir au mieux l'agglomération.
- connexité: elles doivent proposer un ensemble connexe, permettant d'aller d'un point à l'autre du réseau.
- interconnection: elles doivent posséder de nombreuses interconnexions, c'est-à-dire des points où deux (ou plus) de lignes se croisent. D'autre part, les horaires doivent être compatibles pour éviter les attentes.
- équité: elles doivent être plus nombreuses et fréquentes dans les zones de forts passages (lieux de vie, travail).
- lisibilité: les lignes doivent rester lisibles pour les usagers: pas trop courtes, pas trop longues, transversales pour l'agglomération...

Le problème considéré ici n'est donc qu'un aspect réduit de cette vaste problématique.

1.2 Critères à optimiser

La pertinence d'un réseau de transport est à évaluer sur de nombreux critères, souvent contradictoires. Il est parfois même difficile de juger d'un critère en construisant la solution tellement ce critère est complexe à manipuler. On différencie ainsi les critères explicites, c'est-à-dire ceux qu'on peut directement optimiser; des critères implicites: ceux que l'on ne peut pas peut pas considérer pendant la recherche d'une solution. Ces derniers peuvent par contre se constater a posteriori par une méthode plus ou moins coûteuse (par exemple le calcul d'un critère à partir d'une solution peut être lui-même NP-complet!). Il est à noter que la frontière entre critères explicites et implicites n'est pas figée: un des buts de la recherche étant justement de faire tomber ce genre de frontières.

En ce qui concerne les transports et ce problème du métro circulaire, on peut dicerner plusieurs critères:

- **Coût** le coût nécessaire à l'établissement du métro: on peut considérer qu'ilest proportionnel au nombre de stations et à la longueur total des tronçons de métro à construire
- **Temps** le temps de trajet d'un point à l'autre: il prend en compte un temps de trajet à pied et un temps en métro. On peut considérer que l'on souhaiter minimiser le pire des cas, mais cela semble un peu exagéré. On considérera plutôt Une valeur moyenne sur tous les trajets possible semble intéressant
- **Ratio** le ratio moyen entre marche à pied et trajet en métro sur l'ensemble des trajets.

On peut noter que les deux derniers critères sont assez liés car le temps de trajet est, entre autre, ralentit par le temps de marche. On peut ainsi piloter l'un des critères par l'autre et vice-versa.
Le critère Coût a un impact complexe sur les deux autres critères: un coût faible avec un métro au centre de l'agglomération va entraîner un temps de trajet important avec beaucoup de marche à pieds; mais un coût important avec des stations et un tracé long de métro va également entraîner un temps de trajet long car le métro va avoir un temps important de trajet!

2 Instances et critères du problème de Métro Circulaire

2.1 Librairie d'instances

Nous ne disposons d'instances directement adaptées à ce problème, mais nous allons utiliser les instances provenant d'une librairie d'instances réalistes dédiées au problème du voyageur de commerce, la TSPlib: `http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95`: une partie de ces instances peut être trouvé dans le répertoire instance du Tutorial CPlex.

Dans cette librairie d'instances, nous nous intéressons aux instances symétriques et parmi elles aux instances données simplement par un nuage de points et leur coordonnées, comme par exemple att48 qui correspond aux 48 capitales des états connexes des Etats-Unis (on ne considère pas les instances qui sont d'un autre format).

La distance entre deux points est donnée par la distance euclidienne entre deux points, repérées par leurs coordonnées dans le plan.

On va supposer que les points de l'intances représent le cœur d'un quartier et que ce sont ces points qu'il faut utiliser pour décider du tracé du métro. Certains seront des stations et d'autres des points à partir desquels les usagers marchent pour rejoindre le métro.

2.2 Calcul des trois critères

Afin de différencier les temps de trajet à pieds, de ceux du métro, on décide ici que le temps pour relier deux stations est **10 fois plus rapide en métro qu'à pied**. Bien sur, ce facteur est discutable, mais on le tiendra comme une donnée des instances pour ce projet.

Le calcul du critères coût est la somme des distances entre deux stations, plus la somme des temps de marche à pied en utilisant le facteur 10 pour différencier marche à pied et métro.

Le calcul des deux coûts Temps moyen et Ratio Moyen sera fait, à partir de la solution, en calculant, pour chaque paire de stations, le temps (selon le facteur marche/métro ci-dessus) ou le ratio, puis en faisant la moyenne de ces valeurs sur toutes ces paires-là.

2.3 Visualisation

La visualisation de ces instances se limite ainsi à celle du nuage de points.

Une solution sera donnée par la liste des points qui sont choisies comme station, ainsi que la liste des tronçons reliant les stations deux à deux (de manière à former un unique cycle reliant les stations). En effet, l'affectation indiquant où vont les usagers partant d'un point non-stations pour rejoindre un point station s'obtient en déterminant la station la plus proche! Pour visualiser cela, on peut ne rien indiquer, ou alors des droites partant des stations vers les points qui lui sont affectés "en étoiles".

2.4 Formalisation des critères

Il apparait rapidement que le Coût est un critère explicite et facile à manipuler. Les deux autres Temps (temps moyen de trajet) et Ratio (ratio moyen marche/métro) sont plutôt explicites: il semble que la littérature scientifique ne soit pas arrivée à les prendre en compte explicitement.

Dans le cas des instances données par un nuage de points et d'une solution connu, une méthode a posteriori pour calculer les critères Temps et Ratio est de prendre deux à deux chaque paire de points et de calculer le temps de trajet marche ou métro entre les deux: puis de faire la moyenne des temps de trajet ou de ratio sur l'ensemble des paires. Ceci est clairement polynomial.

Ainsi une fois obtenu une solution, on peut afficher les trois critères pour juger de la qualité de la décision. Il n'est pas de notre ressort de décider clairement quelle est la bonne solution. Par contre, à budget maximal fixé, on peut regarder quelle est la meilleure solution sur les deux autres critères! Et inversement.

3 Etat de l'art

Ce problème de conception d'une ligne de métro circulaire peut être vu comme un problème d'optimisation combinatoire proche des problèmes suivants:

- le problème du p-médian pour la détermination des stations
- les problèmes dit de k-partition (ou de clustering)
- le problème du voyageur de commerce pour la détermination de l'ordre de visite des stations
- le problème de l'anneau-étoile (qui rassemble les deux précédents)
- le problème du "generalized TSP"

Des informations tirées de papiers de recheche peuvent être trouvées dans la suite du document.

Ces 4 problèmes se préoccupent chacun d'optimiser la somme totale de distances: on reparle dans la section finale du problème des critères implicites.

3.1 Problème du p-médian

Le problème du p-median a pour instance un ensemble de n points rassemblés dans V et des distances d_{ij} entre les points. Il consiste à sélectioner, parmi les n points, p points qui seront appelés les médians (ou centres); ainsi que déterminer des affectations des points non médians aux médians de manière à minimiser la somme totale des distances des affectations.
Il est à noter que si les distances d_{ij} sont euclidiennes, les affectations des points non-médians aux médians est en fait d'affecter un point non-médian au médian le plus proche.

Résolution heuristique du problème du médian

▶ *Heuristique gloutonne:*
Voici une idée pour une méthode gloutonne produisant une solution de bonne valeur en cas de points répartis assez uniformément.

- On repère les dimensions max et min des points sur les 2 axes du plan.
- On pose $q = \lceil \sqrt{p} \rceil$ et on divise le plan en $q \times q$ rectangles de même taille.
- Pour chaque rectangle, on liste tous les points contenus dans le rectangle et on en cherche le point le plus proche du centre du rectangle.
- On regroupe des paires de points proches pour avoir exactement p médians.
- Affecter les points non-médian aux médians le plus proche.

Attention, si les points sont mal répartis, des rectangles peuvent être vides et l'heuristique produit moins de p médians.

▶ *Heuristique randomisée*
Une autre heuristique plus simple mais pouvant produire une très mauvaise valeur est la suivante:

- Tirer au sort p points parmi les n points.
- Affecter les points non-médian aux médians le plus proche.

Il est possible de réitérer cette heuristique un certains nombre de fois et de conserver le meilleur tirage.

Notez qu'il est possible de cumuler les deux heuristiques précédentes pour être certains de produire toujours une solution.

▶ *Métaheuristique itérative*
Il est très utile d'améliorer une solution heuristique en utilisant une méta-heuristique. Dans le cas du problème du p-médian avec distance euclidienne, on peut noter qu'un encodage possible est de considérer un ensemble de p médians (par exemple codé à la fois comme un vecteur binaire sur les n points, plus une liste chaînée des p médians). Avec un tel encodage, une méthode itérative (descente stochastique itérée, recuit simulé, tabou) peut être facilement implémentée sur la base d'un voisinage qui échange un point médian et un point non médian.

▶ *Formulation PLNE compact pour le problème du p-médian:*

On considère les variables binaires y_{ij} pour tout couple i, j de points dans V:

- y_{ii} vaut 1 si i est un median et 0 sinon
- y_{ij} vaut 1 si le point j est un médian, i n'est pas un médian et i est affecté à j.

Le programme linéaire en nombres entiers suivant est équivalement au problème du p-median:

$$
(P)\left\{\begin{array}{llll}
Min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in V\times V} d_{ij}y_{ij} & & \\
& \displaystyle\sum_{i\in V} y_{ii} = p & & (1) \\
& \displaystyle\sum_{j\in V} y_{ij} = 1 & \forall i\in V & (2) \\
& y_{ij} \leq y_{jj} & \forall (i,j)\in V\setminus\{j\}\times V & (3) \\
& y_{ij} \geq 0 & \forall (i,j)\in V\times V & \\
& y_{ij} \text{ entier} & \forall (i,j)\in V\times V &
\end{array}\right.
$$

Cette équivalence peut être prouvée par les arguments suivants. Considérons une solution entière x du PLNE: les variables y_{ii} donne par l'inégalité (1) p points que l'on peut considérer comme les p médians. Par (3), si un point n'est pas médian alors aucun point ne lui est affecté. Enfin, par (2) on peut voir que si un point est médian, il n'est pas affecté à un autre point; et qui s'il n'est pas médian, il est affecté à exactement un point qui par (1) est autre que lui-même et qui par (3) ne peut donc qu'être un médian. Donc x décrit bien une solution du p-median. Inversement, toute solution du médian est clairement solution du PLNE et les fonctions objectives coïncident.

Cette formulation est compacte avec $O(n^2)$ variables binaires et $O(n^2)$ variables. Elle peut être confiée à un solveur entier pour être résolue. La littérature rapporte que les solveurs sont capables de résoudre de tailles d'instances assez importantes (autour de la centaine de sommets).

3.2 Problème du voyageur de commerce symétrique (TSP

Ce problème est vu en cours.

▶ *Résolution heuristique et méta-heuristique*

Des algorithmes gloutons heuristiques sont bien connus. Certains vous sont fournis dans le tutoriel: il s'agit de l'heurisique du plus proche voisin qui consiste à partir de 1 et de choisir itérativement parmi les autres points celui qui est le plus proche.

A la suite d'une méthode gloutonne, on peut améliorer la solution par une méthode itérative mettant en œuvre le voisinage 2-OPT par exemple.

▶ *Formulations PLNE compactes et non-compactes pour le problème du voyageur de commerce*:

Le cours MAOA propose plusieurs formulations pour le problème du voyagueur de commerce (symétrique ou assymétrique):

- 3 formulations compactes: une basée sur les contraintes MTZ, une dite de flot agrégé et une dite de flot désagrégée.
- 1 formulation à nombre exponentiel d'inégalité (version assymétrique et symétrique)

La formulation MTZ est battue par la formulation de flot agrégé. La formulation non-compacte exponentielle est beaucoup plus efficace que les deux premières formulations compactes. La formulation à flot désagrégée, bien que compacte, contient un nombre très important d'inégalités qui bloquent sa résolution. On privilégie alors plutot la formulation à flot agrégé si l'on désire une formulation compacte, ou sinon la formulation non-compacte.

▶ *Outil PLNE exact etlibre "Concorde"pour le TSP*:

Il est à rappeler que l'implémentation toujours inégalée de résolution du TSP est disponible librement: `https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html`. Il s'agit de la formulation exponentielle citée précédemment mais renforcée par de nombreuses inégalités supplémentaires.

3.3 Les problèmes de k-partition (ou clustering)

Il existe de nombreuses définitions du problème de k-partition, appelé aussi k-clustering. Globalement, il s'agit de partitionner un ensemble V de points en k clusters $C_1, \ldots, C_k$ de façon à ce que chaque cluster soit "compact". Ce mot compact change de sens suivant la définition qu'on donne à la fonction objectif:

- tels que la somme des distances entre deux points au sein de chaque C_i soient maximale. On peut noter que c'est le même objectif que minimiser la somme des distances entre deux points appartenannt à deux clusters différents.
- On peut même dire que le problème du p-médian est un problème de p-clustering avec une fonction objective déterminant un centre et donnant la somme des arêtes reliant le centre aux autres points.
- Il y a aussi le problème du k-means qui est très utilisé en apprentissage (Machine Learnin).

Une abondante littérature existe autour de cette question, autant heuristique qu'exacte.

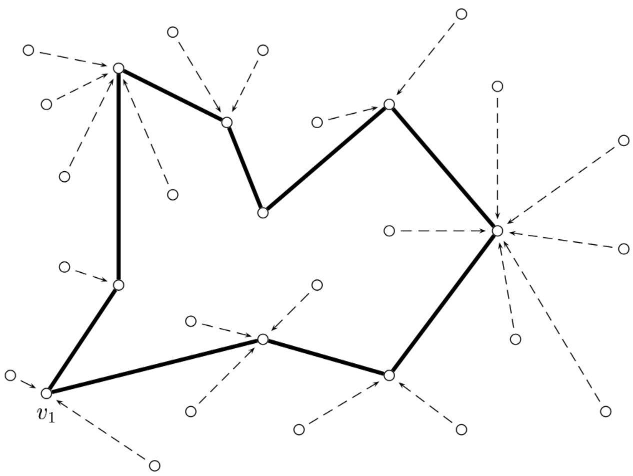
3.4 Le problème de l'anneau étoile

On considère n points, rassemblés dans un ensemble V, dans une agglomération où chaque point est repéré par des coordonnées latitude-longitude $(l_i, L_i), i \in \{1, ..., n\}$. Ces points représentent des zones bien délimitées de l'agglomération (quartier, zones industrielles,...). Le calcul de la distance euclidienne $d_{ij} = \sqrt{(l_i - l_j)^2 + (L_i - L_j)^2)}$ entre deux points $i, j \in \{1, ..., n\}$ fournit une estimation de la longueur d'un trajet à pied ou en transport entre i et j. On considère le graphe planaire complet K_n induit par les n points. La ligne que l'on désire tracer passera par certains des points qui seront alors appelés *stations*. Notez que pour ce problème, $n \geq p \geq 3$.

On définit un anneau-étoile (Ring-Star, en anglais) comme étant la donnée de

- p points parmi les n points qui seront les stations
- un affectation de chacun des points qui ne sont pas stations à l'une des stations
- un ensemble d'arêtes reliant les p stations en formant un cycle

L'illustration suivante est empruntée à l'article [1]. Sur cette illustration les stations sont les points où passent le métro circulaire représenté par des arêtes en gras. Les affectations d'un point à une station (qui sont les déplacements à pieds des usagers vers les stations) sont représentés par des arcs en pointillés.



Le *problème de l'anneau-étoile* (the Ring-Star problem, en anglais) consiste à déterminer un anneau-étoile tel que la sommet des distances euclidienne des arêtes de l'anneau plus des distances des arcs des affectations soient minimales. Compte-tenu de cette définition, il est à noter que les choix d'affectations des points aux stations se feront toujours à la station la plus proche.

Ce problème est ainsi mono-critère car on somme toutes les distances. Il est à noter que la nature des longueurs des arêtes (distance inter-stations) et celles des arcs (longueur des trajets à pieds) ne sont peut-être pas à mettre sur un même plan. Il est envisageable de prendre en considération un paramètre $0 \leq \alpha \leq 10$ multiplicateur des distances inter-stations pour témoigner de l'importance relative des deux termes de la somme.

Remarque: Dans le cas où $p = n$, le problème de l'anneau-étoile est le problème du voyageur de commerce.
Dane le cas où $\alpha = 0$, le problème est le problème du p-médian.

▶ *Heuristique pour le problème de l'année-étoile*

Très clairement, on peut imaginer une heuristique gloutonne comme:

- l'enchaînement d'une heuristique pour le p-médian (pour un nombre p fixé), puis d'une heuristique du TSP pour les stations déterminées par l'étape précédente.
- on peut même enchaîner une résolution exact du p-médian, puis une résolution exact du TSP. Il est bien à noter que cette idée est bien heuristique!

Une idée méta-heuristique est de réitérer l'enchaînement des deux étapes p-médian/TSP en tentant d'améliorer itérativement la solution.

Une autre idée méta-heuristique plus classique est de construire une méthode itérative mêlant les voisinages du p-median et du TSP pour améliorer une première solution itérativement.

▶ *Formulation pour le problème de l'anneau-étoile*

Pour simplifier les écritures suivantes, **le sommet 1 est toujours une station**: les formulations peuvent être modifiées en cas de besoin.

- **Formulation compacte**

On s'intéresse à la formulation compacte suivante.
Les variables y sont similaires aux variables d'affectation du p-médian: les valeurs $y_{ii} = 1$ désignent les p stations.
Les variables x sont similaires aux variables déterminant les arêtes à prendre pour le problème du voyageur de commerce: on voit que tous les sommets passant par une station seront de degré 2: ainsi toute station appartient à une cycle.
Les variables z sont des variables, dites de flots, où un flot de valeur $p-1$ part du sommet 1 et se trouve décrémentée à chaque passage par une station (repérée par un sommet où $y_{ii} = 1$. Le flot ne circule que sur des arcs où $x_{ij} = 1$. Les contraintes de flot empêche l'existence d'un cycle qui ne passe pas par le sommet 1.

$$
\begin{array}{lll}
Min \sum_{ij \in E} d_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in V \times V} d_{ij} y_{ij} & & \\
\sum_{i \in V} y_{ii} = p & & (1) \\
\sum_{j \in V} y_{ij} = 1 & \forall i \in V & (2) \\
y_{ij} \leq y_{jj} & \forall (i,j) \in V \setminus \{j\} \times V & (3) \\
\sum_{ij \in \delta(i)} x_{ij} = 2 y_{ii} & \forall i \in V & (4) \\
\sum_{j \in V \setminus \{1\}} z_{1j} = p - 1 & & (5) \\
\sum_{j \in V \setminus \{i\}} z_{ji} = \sum_{j \in V \setminus \{1,i\}} z_{ij} + y_{ii} & \forall i \in V \setminus \{1\}, & (6) \\
z_{ij} + z_{ji} \leq (p-1) x_{ij} & \forall i \in V, j \in V \setminus \{1, i\} & (7) \\
x_{ij} \in \{0,1\} & \forall ij \in E & \\
y_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in V \times V & \\
z_{ij} \in [0, p-1] & \forall (i,j) \in V \times V \setminus \{1, i\} & \\
y_{11} = 1 & & \\
y_{1j} = 0 & \forall j \in V \setminus \{1\} &
\end{array}
$$

- **Formulation non-compacte**

Dans cette formulation, on retrouve les variables x et y précédentes.
L'inégalité (4) force la connexité entre le sommet 1 et tout sommet j qui n'est pas un médian.

Une première formulation

$$
\begin{array}{lll}
Min \sum_{ij \in E} d_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j) \in V \times V} d_{ij}y_{ij} & & \\
\sum_{i \in V} y_{ii} = p & & (1) \\
\sum_{j \in V} y_{ij} = 1 & \forall i \in V & (2) \\
y_{ij} \leq y_{jj} & \forall (i,j) \in V \setminus \{j\} \times V & (3) \\
\sum_{ij \in \delta(i)} x_{ij} = 2y_{ii} & \forall i \in V & (4) \\
\sum_{e \in \delta(S)} x(e) \geq 2y_{ii} & \forall S \subset V, 1 \notin S, i \in S & (8) \\
x_{ij} \in \{0,1\} & \forall ij \in E & \\
y_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in V \times V & \\
y_{11} = 1 & & \\
y_{1j} = 0 & \forall j \in V \setminus \{1\} &
\end{array}
$$

Les inégalités (8) étant en nombre exponentiel, il est nécessaire de réfléchir à des algorithmes de séparation.

Ajouts de certaines inégalités de manière compacte

On peut remarquer que les inégalités (8) pour $|S| = 2$, donc $S = \{i, j\}$ avec $i \neq 1$ s'écrivent également $2y_{jj} \geq x_{ij}$ qui est elle-même dominée par

$$y_{jj} \geq x_{ij} \quad \forall i \in V \setminus \{1\}, j \in V, \quad (9)$$

On peut donc ajouter les inégalités (9) dès le départ parmi les inégalités "en dur".

Séparation entière

Etant donné un vecteur (x, y) entier, la séparation des inégalités (8) revient à:
- repérer les p points médians (tels que $y_{ii} = 1$)
- si les p points sont reliés par un unique cycle formé par les arêtes telles que $x_{ij} = 1$: alors (x, y) vérifient toutes les inégalités (8).
- sinon les sommets formant un cycle ne passant pas par 1 forment un ensemble S correspondant à une inégalité violée (8).

Séparation fractionnaire

Voici la **séparation exacte** des inégalités (8) quand (x, y) est fractionnaire.
Etant donné un vecteur (x, y) fractionnaire, la séparation des inégalités (8) revient à:
- Rechercher l'arbre de Gomory-Hu pour les arêtes valuées par x
- Pour tout sommet i différent de 1
  Rechercher si la coupe min C séparant i et 1 est inférieure à $2y_{ii} - \epsilon$, $\epsilon = 0.001$
  Dans ce cas, l'ensemble S contenant i qui engendre C correspond à une inégalite (8) violée

Si aucune inégalité n'a été produite, toutes les inégalités (8) sont vérifiées par (x, y).

La recherche de l'arbre de Gomory-Hu est donnée par une fonction de l'outil Lemon de complexité $O(n^4)$.
L'arbre de Gomory-Hu est un arbre sur l'ensemble des sommets du graphe, mais il peut contenir des arêtees qui sont pas dans le graphe. Il a la propriété que la coupe de capacité minimale séparant deux sommets i et j dans le graphe est égale à la valeur minimale portée par une arête sur le chemin de l'arbre reliant i et j. De plus, en ôtant cette arête dans l'arbre, on obtient une partition des sommets en deux ensembles S_i (resp. S_j) contenant i (resp. j) tels que la coupe sortant de S_i (qui est la même que celle sortant de S_j dans le graphe est exactement la coupe minimale séparant i ety j.

Il est à noter qu'on peut, dans le cas où la séparation entière a été implémentée, se "contenter" d'une **séparation heuristique**. Une séparation heuristique consiste alors à rechercher heurstiquement un ensemble S qui correspond à une inégalité (8) violée: cela peut se faire de manière gloutone. Par exemple, pour tout sommet $i \neq 1$ de valeur $y_{ii} > 0$, on part de $S = \{i\}$ et on ajoute peu à peu des sommets dans S tant que l'inégalité n'est pas violée. On peut noter que cette heuristique ne répond que partiellement au problème de séparation car il peut échouer sans prouver qu'il reste des inégalités non violées. En revanche, il est bien plus rapide que la séparation exacte.

Mise en œuvre
Il est à noter que la séparation entière (à placer dans un callback Lazy) est suffisante pour rendre valide la formulation.
Ceci rend possible l'utilisation de la séparation heuristique pour le cas fractionnaire (à placer dans un callback UserCut).
La séparation exacte du cas fractionnaire n'est à utiliser que si la version heuristique échoue.

Une deuxième formulation

Il a été prouvé par l'étude du polyèdre de l'anneau réalisé dans [1] que les inégalités (3) et (8) pouvaient être remplacées par les inégalités suivantes.

$$\sum_{e \in \delta(W)} x(e) \geq 2 \sum_{j \in W} y_{ij} \qquad \forall W \subset V, 1 \notin W, i \in W \qquad (10)$$

Les inégalités (10) définissent, sous certaines conditions, des facettes du polyèdre: elles sont ainsi plus fortes pour renforcer la valeur de relaxation et amener à davantage de cas où les relaxations linéaires fournissent des solutions entières. De plus, la séparation des inégalités (10) est plus efficace en terme de complexité que celles des inégalités (8) grâce à une astuce de réécriture: cette procédure est également décrite dans [1].

4 Le problème du TSP généralisé

On considère en entrée n points dans un ensemble V et une partition de V en q clusters $C_1, \ldots, C_q$. Le problème du voyageur de commerce généralisé consiste à déterminer pour chaque cluster C_i un unique point p_i et une tournée passant par tous les points p_i, $i \in \{1, \ldots, q\}$, de manière à déterminer la plus courte tournée parmi tous les choix de points possible.

Il important de noter que les clusters C_i sont bien une entrée de ce problème. Pour considérer un tel problème pour résoudre notre problème de métro circulaire, il faut donc déterminer les clusters avant de résoudre le TSP généralisé.

► *Résolution heuristique*
Vous pouvez trouver des informations dans [2].

Comme pour le problème de l'anneau-étoile, on peut imaginer enchaîner trois étapes dont l'une est la détermination des clusters, ensuite du choix d'un sommet dans chaque cluster, puis de la résolution du TSP. Néanmoins, cette heuristique peut fournir des solutions loin de l'optimum.

► *Formulations TSP*
Vous pouvez trouver des informations dans [3].

5 Travail démandé pour ce projet

L'idée générale est la suivante:
"Pour répondre à la problématque du métro circulaire, vous allez rechercher une façon de déterminer un trajet du métro en l'évaluant sur les trois critères coûts, temps moyen de trajet et ratio marche/métro. Pour cela, vous pouvez utiliser différentes méthodes qui marcheront différement selon les instances et surtout leur taille."

Pour ce projet, **il est demandé:**

- une visualisation des données et des solutions
- une heuristique et méta-heuristique
- une formulation compacte
- une formulation non-compacte
- de comparer les résultats obtenus pour les 3 méthodes: temps de calcul et durée d'exécution
- de tester les méthodes sur un lot suffisant d'instances de tailles croissantes: déterminant ainsi les tailles maximales pouvant être résolues versus la qualité des solutions.
- un rendu sous forme d'un mini-rapport décrivant vos idées, vos expérimentations (tableaux, courbes) avec une analyse critique
- un rendu des archives de votre code
- une mini-soutenance en janvier pour présenter vos idées et résultats (quelques slides issus de votre rapport pendant 5 à 10 min).

L'évaluation de ce projet sera sur plusieurs bases d'évaluation:
- la quantité de travail fait dans la liste ci-dessus
- la qualité des solutions obtenues
- la taille des instances résolues
- mais aussi l'originalité de la méthode proposée, l'investissement en lecture d'articles etc.

Il est à noter qu'il n'y a pas de méthodes imposées dans ce projet, car il s'agit d'une question de recherche: en effet, les différents critères à mesurer demande de tester différentes méthodes pour savoir lesquelles amènent à de bons résultats sur ces critères implicites que sont le Temps et le Ratio. On peut par exemple se donner un budget donné ou fixer un nombre de stations, puis rechercher sur ce budget la meilleure solution sur le critère coût ou un équilibre sur les coûts marche et métro...
Ainsi, un objectif plus global de l'ensemble des projets du groupe est de répondre de différentes façons à cette problématique du métro circulaire. C'est pourquoi une démarche originale (mais basée sur une réflexion construite) sera valorisée dans ce projet.

References

[1] M. Labbé, G. Laporte, I.R. Martin et J.J. S. González. The ring star problem: Polyhedral analysis and exact algorithm. *Networks* 43:3, 177–189 (2004).

[2] Petrica C. Pop and Ovidiu Cosma and Cosmin Sabo and Corina Pop Sitar. A comprehensive survey on the generalized traveling salesman problem. *European Journal of Operational Research* (2023).

[3] Yuan Yuan, Diego Cattaruzza, Maxime Ogier, Frédéric Semet. A branch-and-cut algorithm for the generalized traveling salesman problem with time windows. *European Journal of Operational Research* 286(3) (2020).