

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

### **Отчёт по лабораторной работе №2**

По дисциплине «Математическая статистика» (четвёртый семестр)  
Построение оценки параметров законов распределения и оценки функции  
распределения и плотности вероятности.

**Студент:**

Дениченко Александр  
Разинкин Александр  
Соколов Анатолий

**Практик:**

Милованович Екатерина Воиславовна

Санкт-Петербург  
2024 г.

## Цель работы

Цель данной работы состоит в том, чтобы на основании опытных данных, используя метод моментов, построить оценки параметров законов распределения и оценки функции распределения и плотности вероятности.

## Данные

Закон: равномерный закон распределения

Выборка: 1.85 3.91 6.13 2.17 4.05 2.83 6.97 2.17 4.27 3.00 5.53 4.54 4.64 6.29 2.93 4.72 3.41 7.31 3.13

## 1 Вариационный ряд

1.85 2.17 2.17 2.83 2.93 3.00 3.13 3.41 3.91 4.05 4.27 4.54 4.64 4.72 5.53 6.13 6.29 6.97 7.31

## 2 Точечная оценка математического ожидания

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \approx 4.20$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{m})^2 \approx 2.69$$

## 3 Построение оценки

Используя метод метод моментов, построим оценки параметров равномерного закона распределения, где равномерный закон распределения имеет следующий вид:

Случайная величина имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке [a, b], если её плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b ; \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b ; \\ 1, & x > b \end{cases}$$

## 4 Метод моментов

Выразим числовые параметры теоретического распределения через моменты распределения, оцененные по выборки. Число моментов соответствует числу неизвестных параметров распределения - 2.

Начальный момент для непрерывных случайных величин.

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^b \frac{x}{b-a} dx + \int_b^{\infty} 0 dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Центральный момент:

$$\mu_k = M((x-m)^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xm + m^2) f(x) dx = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - 2m \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx + m^2 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b dx + \int_b^{\infty} 0 dx = \\
&= \frac{1}{b-a} \left( \frac{x^3}{3} \Big|_a^b - mx^2 \Big|_a^b + \frac{m^2}{b-a} x \Big|_a^b \right) = \frac{1}{b-a} \left( \frac{b^3 - a^3}{3} - m(b^2 - a^2) + m^2 \right) = \\
&= \frac{1}{b-a} \left( \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)(b^2 - a^2)}{2} + \frac{(a+b)^2}{4} \right) = \frac{1}{b-a} \left( \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3} - \frac{(a+b)^2(b-a)}{2} + \frac{(a+b)^2}{4} \right) = \\
&= \frac{4(a^2 + ab + b^2) - 6(a+b)^2 + 3(a+b)^2}{12} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

Получим:

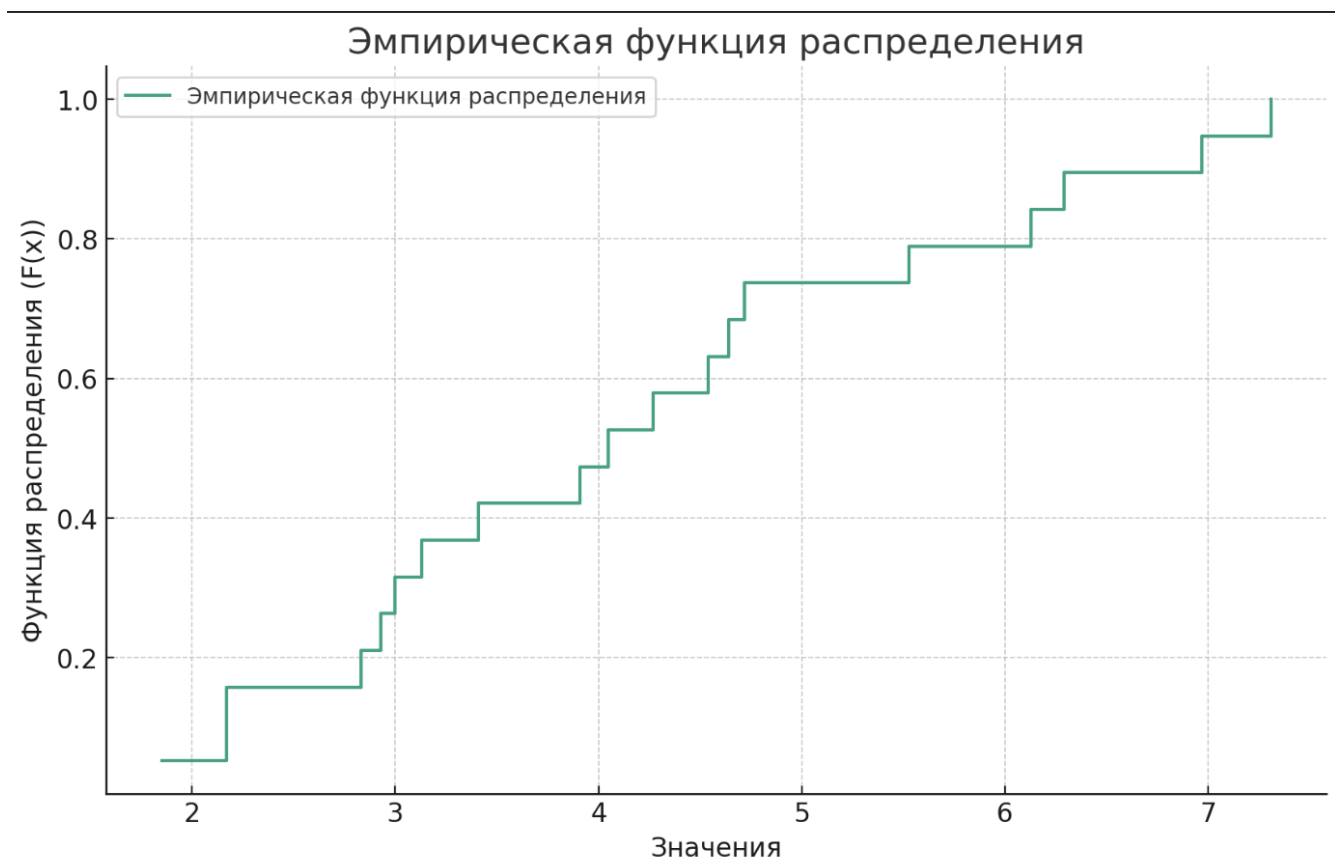
$$\begin{aligned}
\begin{cases} m = \frac{a+b}{2} \\ \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases} &=> \begin{cases} a+b = 2m \\ (b-a)^2 = 12\sigma^2 \end{cases} &=> \begin{cases} a+b = 2m \\ b-a = 2\sqrt{3}\sigma \end{cases} \\
&a = 2m - b \\
&b - (2m - b) = 2\sqrt{3}\sigma \\
&2b - 2m = 2\sqrt{3}\sigma \\
&b = m + \sqrt{3}\sigma \\
&\begin{cases} a = m - \sqrt{3}\sigma \\ b = m + \sqrt{3}\sigma \end{cases}
\end{aligned}$$

Подставим а, b:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}, & a \leq x \leq b ; \\ 0, & x > b \end{cases} \\
F(x) &= \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-m+\sqrt{3}\sigma}{2\sqrt{3}\sigma}, & a \leq x \leq b ; \\ 1, & x > b \end{cases}
\end{aligned}$$

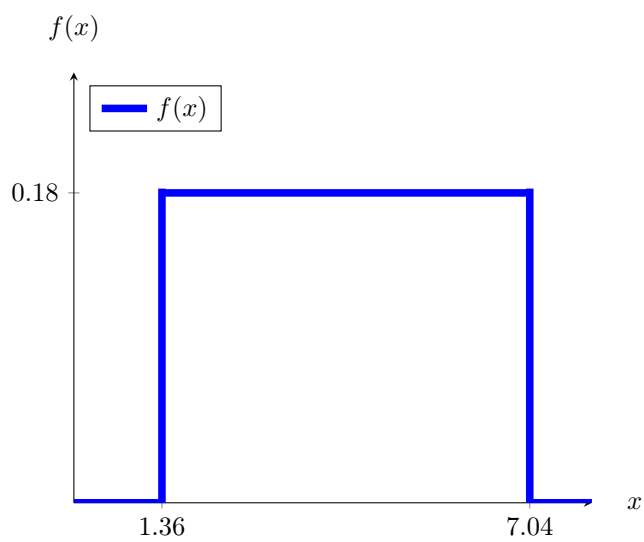
Подставим  $m, \sigma$  :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} 0, & x < 1.36 \\ 0.18, & 1.36 \leq x \leq 7.04 ; \\ 0, & x > 7.04 \end{cases} \\
F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 1.36 \\ 0.18 \cdot x - 0.24, & 1.36 \leq x \leq 7.04 ; \\ 1, & x > 7.04 \end{cases}
\end{aligned}$$

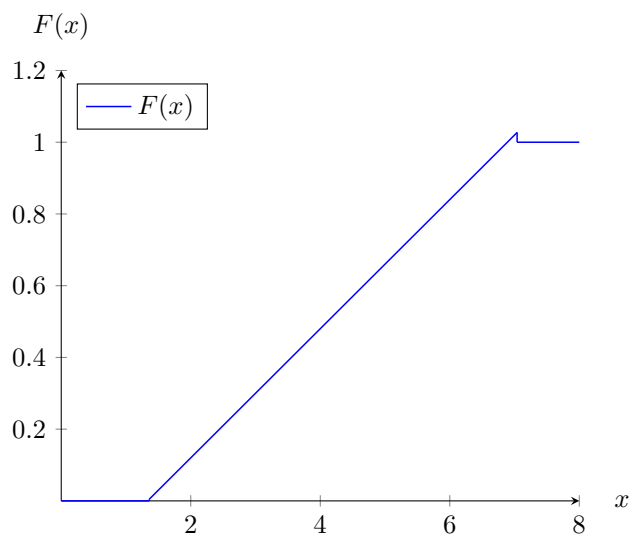


## 5 Построение оценок

Построение графика плотности случайной величины:



Построение графика функции распределения:



## Вывод

На основании опытных данных нашли при помощи метода моментов параметры равномерного закона распределения, а также построили функцию распределения и плотность вероятности.