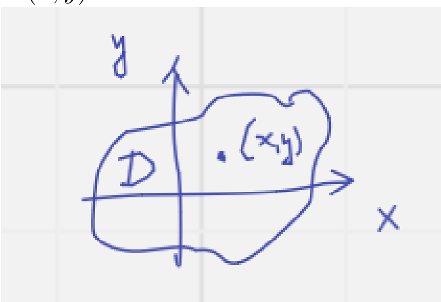
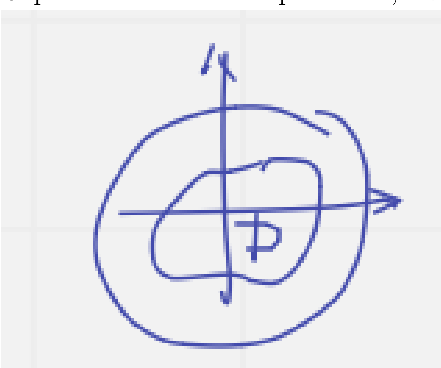
1 ФНП и скалярное поле П.1 Основные понятия

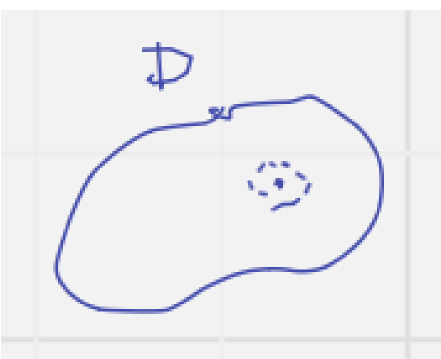
$\mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R}...x\mathbb{R} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, .., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1...n\}$
$\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$
$n = 2(x, y)$



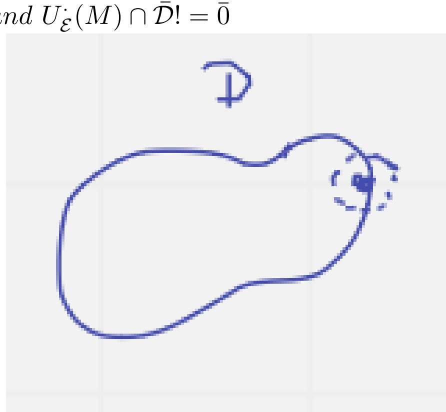
Ограниченность $\mathbb{D}$ - ограничена, если существует M>0 Для любых $(x, y) \in \mathbb{D}\sqrt{x^2 + y^2} \in\leq \delta(M, O) \leq M$



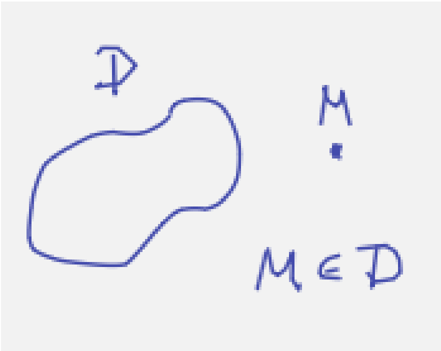
Внутренняя точка (IntD) M(x, y) - внутренняя, если существует $\mathcal{E} > 0 : U_{\mathcal{E}}(M) \in D == \{(x', y') : \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')} < \mathcal{E}\}$



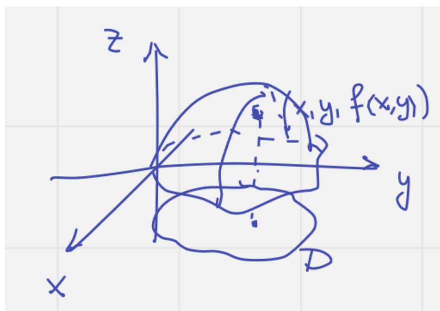
Граничная точка (знак частных производных)$\mathcal{D}$): M(x, y) - граничная точка, если существует $\mathcal{E} > 0 : U_{\dot{\mathcal{E}}}(M) \cap \mathcal{D}! = \bar{0}$ and $U_{\dot{\mathcal{E}}}(M) \cap \bar{\mathcal{D}}! = \bar{0}$



Изолированная точка: существует $\mathcal{E} > 0 : U_{\dot{\mathcal{E}}}(M) \cap \mathcal{D} = \bar{0}$



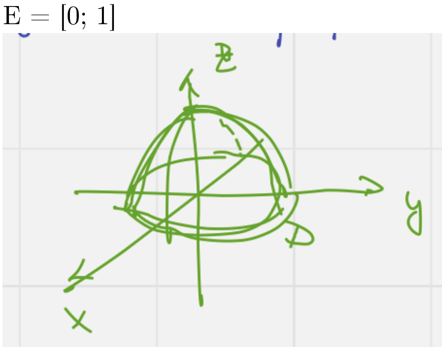
$\mathcal{F} : \mathcal{D} -> \mathbb{R}\ \forall (x,y) \in \mathcal{D}\ and\ \forall (x,y) \in \mathcal{D}\ => !z \in \mathbb{R} : z = f(x,y)$
$\mathcal{D}$ - облать определения
E -множество точек



$\Gamma = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \mathcal{D}\}$ -график
Пример: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
$\mathcal{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

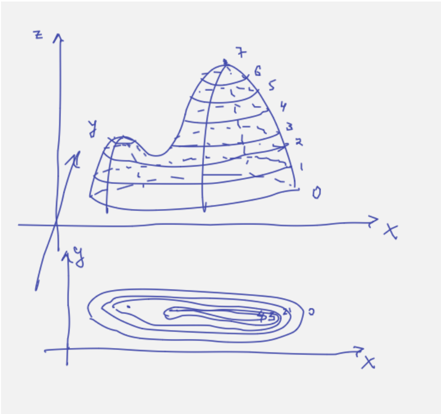
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

E = [0; 1]



2 П.2 Линии и поверхности уровня

n = 2 $f : \mathcal{D} -> \mathbb{R}$
$L_c = \{(x,y) : f(x, y = c)\}$
$S_c = \{(x,y,z) : f(x, y, z = c)\}$



3 п.3 Частное и полное приращение

$f : \mathcal{D} -> \mathbb{R}$, n=2

z = f(x, y)

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

полное приращение

$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$

частное приращение по переменной x

$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$

частное приращение по переменной y

$\Delta z ! = \Delta_x z + \Delta_y z$

Пример:

S = xy

x=1 $\Delta x = 0,1$

y=2 $\Delta y = 0,2$

$\Delta S = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y = 0,42$

$\Delta_x S + \Delta_y S = (x + \Delta x)y - xy + (y + \Delta y)x - xy = \Delta x \cdot y + \Delta y \cdot x$

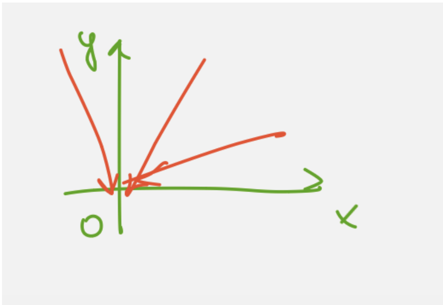
4 п.4 Предел и непрерывность

$\lim_{x->x_0} f(x) = A \ <=> \ \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta_{\mathcal{E}} > 0 : \forall x \in \dot{U_\delta}(x_0) \cap \mathcal{D}_f => f(x) \in U_{\mathcal{E}}(A)$

$\lim_{M->M_0} f(M) = A \ <=> \ \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta_{\mathcal{E}} > 0 : \forall M \in \dot{U_\delta}(M_0) \cap \mathcal{D}_f => f(M) \in U_{\mathcal{E}}(A)$

$M(x, y), M(x_1, y_1)$

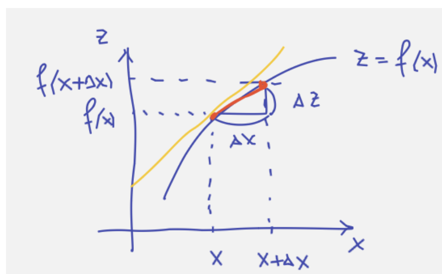
1) $z = x^2 + y^2 \mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \Delta z = (x_0 + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 + 2y_0 \Delta y + \Delta y^2 - (\Delta x -> 0, \Delta y -> 0) -> 0$
z - непрерывная на $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$
$\lim_{(x,y)->0}(\frac{2xy}{x^2+y^2}) = |y = kx| = \lim_{(x,y)->0}(\frac{2xkx}{x^2+(kx)^2}) = \frac{2k}{1+k^2}$



5 П.5 Частные производные

Обычные случаи

$$z = f(x) \ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x -> 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$



Случай с частной производной

$$z = f(x, y) \ \Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y); \ \ \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x -> 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

Частная производная функции z по y в точке M(x, y)

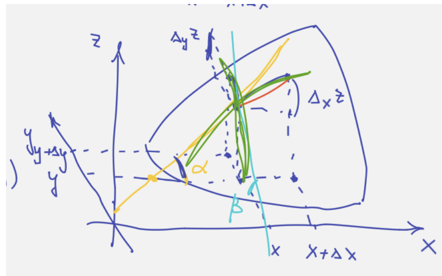
$$\Delta x - fiks \ \ => \ \ \Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y); \ \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x -> 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

Частная производная функции y по y в точке M(x, y)

$$\Delta y - fiks \ \ => \ \ \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y); \ \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y -> 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

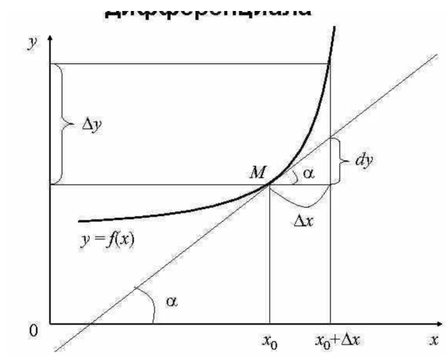
$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l -> 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$$

Частная производная функции y по направлению в точке M(x, y)



6 П.6 Дифферинциал

$$z = f(x);\ \Delta z = A \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x = f'(x) + \Delta x = \mathrm{d}z + o(\Delta x)$$



Полный Дифферинциал функции двух переменных

$$z = f(x, y);\ \Delta z = A \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y;\ A, B \in \mathbb{R}$$

Теорема(о дифферинциале):

$$z = f(x, y)\ M(x, y)$$
$$=> \mathrm{d}z = z'_x \mathrm{d}x + z'_y \mathrm{d}y$$
$$\Delta z = \mathrm{d}z + o(\Delta\rho)$$

Доказательство:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$
$$\Delta z_1 = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = |x - fiks;\ f(x, y) = \psi(y)| = \psi(y + \Delta y) - \psi(y) =$$
$$= |\psi(y) - \text{непрерывная; по т. Лагранжа} : \exists \overline{y} : \psi(y + \Delta y) - \psi(y) = \psi'_y(\overline{y}\Delta y)| =$$
$$= \psi'_y(\overline{y}\Delta y) = f'_y(x, \overline{y})\Delta y$$

$$\Delta z_2 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y + \Delta y) = |y + \Delta y - fiks;\ f(x, \Delta y + y) = \phi(x)| = \phi(x + \Delta x) =$$

$$= f'_x(\overline{x}, y + \Delta y) \cdot \Delta x$$

$$=> \Delta z = \Delta z_2 + \Delta z_1 = f'_x(\overline{x}, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, \overline{y})\Delta y$$

$$\measuredangle \lim_{\Delta x -> 0, \Delta y -> 0} f'_x(\overline{x}, y + \Delta y) = f'_x(x, y)$$

по т. о функции, её предел и бмф:

$$f'_x(\overline{x}, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta\rho)$$

$$\measuredangle \lim_{\Delta y -> 0} f'_y(x, \overline{y}) = f'_y(x, y) \;\; => \;\; f'_y(x, \overline{y}) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta\rho)$$

$$= f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta\rho)\Delta x + \beta(\Delta\rho)\Delta y = \mathrm{d}z + o(\Delta\rho)$$

$$\mathrm{d}z = f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y$$

Доказано

7 П.7 Производная сложной функции, полная производная, полный Дифферинциал

$$z = z(u, v), \;\; u = u(x, y), \;\; v = v(x, y) \tag{1}$$

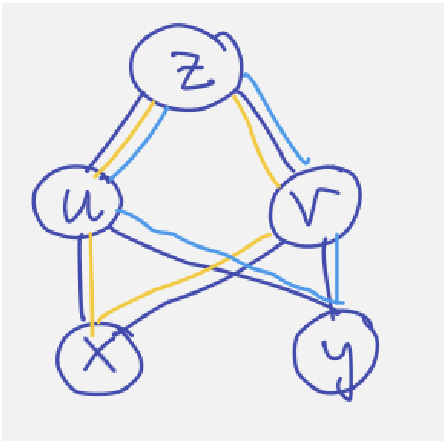
$$z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y) \tag{2}$$

Теорема о производной сложной ф

$$z(u, v), \;\; u(x, y) \; v(x, y) \tag{3}$$

$$=> \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \tag{5}$$



докажем

$$\measuredangle \frac{\partial z}{\partial x} : \tag{6}$$

$$\Delta x - > \Delta_x u, \Delta_x v - > \Delta z; \;\; y - fiks \tag{7}$$

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha(\Delta_x u)\Delta_x u + \beta(\Delta_x v)\Delta_x v \quad | : \Delta x \tag{8}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha(\Delta_x u)\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta(\Delta_x v)\frac{\Delta_y v}{\Delta x} \tag{9}$$

$$\lim_{\Delta x -> 0} : \Delta - > 0 => \text{непрерывна} : \Delta_x u - > 0, \Delta_x v - > 0 => \alpha, \beta - > 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \tag{11}$$

для $\frac{\partial z}{\partial y}$ по аналогии
Доказано

8 Производная от функций, заданной неявно

$$y = y(x),\ F(x,y) = 0,\ y'$$

Первый способ решения

$$e^y - e^x + xy = 0\ (e^y - e^x + xy)'_x = 0,\ y = y(x)$$

$$e^y \cdot y' - e^y + y + xy' = 0,\ (e^y + x)y' = e^x - y,\ y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}$$

Второй способ решения

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{12}$$

$$F'_x(x,y) = -e^x + y$$

$$F'_y(x,y) = e^y + x$$

$$y' = \frac{-e^x + y}{e^y + x}$$

Теорема о производной функции заданной неявно

$$y = y(x) - \text{непрерывна},\ F(x,y) = 0,\ (F, F'_x, F'_y - \text{непрерывны в окр (x,y)})$$

$$=>\ y' = \frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)};\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{13}$$

Доказательство

$$x;\ y(x);\ F(x,y) = 0$$

-

$$\Delta x;\ \Delta y(x);\ F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$$

=

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x; y + \Delta y) - F(x; y) = 0$$

$$\Delta F(x) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta\rho)\Delta x + \beta(\Delta\rho)\Delta y = 0 \mid : \Delta x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta\rho) + \beta(\Delta\rho)\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

$$(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta(\Delta\rho))\frac{\Delta y}{\Delta x} = -(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha(\Delta\rho))$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha(\Delta\rho)}{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta(\Delta\rho)};\ \Delta x - > 0\ \ => \Delta y - > 0,\ \Delta\rho - > 0\ \ =>\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d} - \frac{F}{x}}{\mathrm{d}\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Доказано

$$z = z(x,y)\ F(x,y,z) = 0\ z = z(x,y)\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y} - ?$$

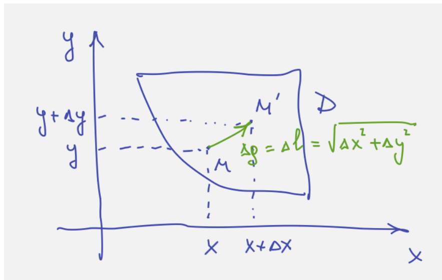
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\ and\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

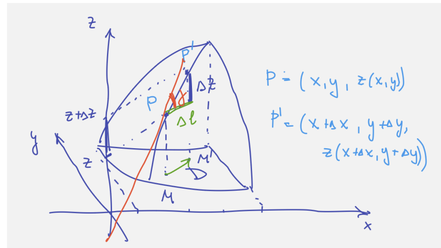
$$z = z(x,y)\text{непрерывная}, F,\ F'_x,\ F'_y,\ F'_z -\ \text{непрерывная}\ and\ F'_z! = 0$$

9 Производная по направлению

$$z = z(x, y),\ \ M(x; y),\ \ \bar{l}(l_x;\ l_y)$$

$$\Delta x,\ \ \Delta y \text{ вдоль } \bar{l} => M'(x + \Delta x; y + \Delta y);\quad \frac{\Delta_l z}{\Delta l} -> \frac{\partial z}{\partial l}\ (\Delta l -> 0)$$





Теорема (о производной функции по направлению)

$$z = z(x, y),\ \ z, z'_x, z'_y - \text{непрерывна} \ \ => \ \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} cos\beta, (cos\alpha; cos\beta) = \overline{l^o} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} \tag{14}$$

Доказательство

$$\Delta_l z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta l)\Delta x + \beta(\Delta l)\Delta y \mid : \Delta x$$

$$\frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \alpha(\Delta l)\frac{\Delta x}{\Delta l} + \beta(\Delta l)\frac{\Delta y}{\Delta l} \mid : \Delta l$$

$$\frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot cos\beta + \alpha(\Delta l) \cdot cos\alpha + \beta(\Delta l)\frac{\Delta y}{\Delta l} \mid : \Delta l$$

$$\Delta l -> 0 \ \ => \ \ \Delta x -> 0,\ \ \Delta y -> 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot cos(\alpha) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot cos\beta$$

$$\measuredangle \bar{l} = \bar{i} = (1; 0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot 0 = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$u = u(x; y; z)\ \bar{l} = (l_x, l_y, l_z)\ \overline{l^o} = (cos\alpha; cos\beta; cos\gamma)$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} cos\gamma$$

10 Частные производные высших порядков

$$z = z(x; y);\ \ \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x(x; y);\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y(x; y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} = (z'_x)'_x = z''_{xx}(x; y)$$

Теорема (о смешаных производных)

$$z = z(x; y),\ \ z, z'_x, z'_y, z''_x y, z''_y x \ - \ \text{непрерывны} \ \ => \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \tag{15}$$

11 Дифферинциалы высших порядков

$$z = z(x; y) \tag{16}$$

Первого порядка

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) z$$

Второго порядка

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right) z$$

$$d^nz = d(dz) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n}{\partial x^{n \cdot k} \partial y^k} dx^{n-k}dy^k\right) z$$

Функция о трёх переменных

$$u = u(x; y; z) \tag{17}$$

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right) u$$

12 Экстремумы функции нескольких функций

$$z = z(x, y);\ M_0\ \ z(x, y)\ \text{ екстремум, если}$$

$$z(x, y) \leq z(x_0, y_0) <=> \Delta z(x_0, y_0) \leq 0\ max$$

$$z(x, y) \geq z(x_0, y_0) <=> \Delta z(x_0, y_0) \geq 0\ min$$

M_0 - точка экстремума

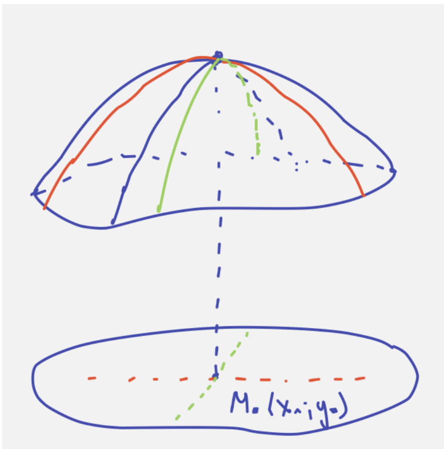
M_0 - Критическая для функции z, если для неё все частные производные первого порядка $==$ 0 или не существуют

M_0 - стационарная точка для функции z, если для неё все частные производные $==$ 0

Теорема(необходимое условие экстремума)

$$M_0(x_0; y_0) - point\ extremum\ for\ z(x; y)\ \ => M_0 -\ \text{Критическая}$$

Досказательство



$$1)y = y_0\ (fixed)$$

$$z_0(x, y_0) = \phi(x)$$

$$x_0 -\ \ \text{точка экстремума функции } \phi(x)$$

$$x_0 - \text{ критическая для } \phi(x) : \phi'(x_0) = 0$$

$$=> z'_x(x; y_0) = 0$$

$$2) x = x_0 - \ fixed$$

$$z = (x_0; y) = \psi(y)$$

$$y_0 - \text{точка критическая для } \psi(y)$$

$$=> y_0 - \text{точка критическая для } \psi(y) : \psi'(y_0) = 0 \ => z'_y(x_0; y_0) = 0$$

1+2 => $M_0(x_0; y_0)$ - точка критическая для z(x;y)

Теорема(достаточные условия экстремума для стационарной точки)

$$z(x; y) \ M_0 - ctachionarnaya$$

Пусть z и её частные производные до 2-го порядка включены непрерывно в окрестность M_0

$$z''_{xx}(M_0) = A, \ z''_{xy}(M_0) = B, \ z''_{yy}(M_0) = C$$

$$D = AC - B^2 = \begin{cases} A & B \\ B & C \end{cases}$$

$$D > 0 \ and \ A < 0 \ => \ M_0 - \ max$$

$$D > 0 \ and \ A > 0 \ => \ M_0 - \ min$$

$$D < 0, \ M_0 - \text{седловая}$$

$$D = 0, \ ?\text{требуются доп исследования}$$

Доказательство

$$z(x + \Delta x; y + \Delta y) = z(x; y) + \frac{dz(x; y)}{1!} + \frac{d^2 z(x; y)}{2!} + 0(\Delta\rho^2) \ \ Teylor$$

$$= z(x; y) + (z'_x(x; y)\Delta x + z'_y(x; y)\Delta) + \frac{1}{2!}(z''_{xx}(x; y)(\Delta x)^2 + 2 \cdot z''_{xy}(x; y)\Delta x\Delta y + z''_{yy}(x; y)(\Delta y)^2) + o((\Delta\rho)^2)$$

M_0 - стационарная => dz(M_0)=0

$$\Delta z(M_0) = \frac{1}{2!}(A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2) + o((\Delta\rho)^2)$$

$$\Delta x = \Delta\rho \cdot cos\phi \ \ and\Delta y = \Delta\rho \cdot sin\phi$$

(**)

$$= \frac{(\Delta\rho)^2}{2}(A \cdot cos^2\phi + 2B \cdot cos\phi \cdot sin\phi + C \cdot sin^2\phi + \frac{o(\Delta\rho^2)}{\Delta\rho^2})$$

$$(A^2 \cdot cos^2\phi + 2AB \cdot cos\phi \cdot sin\phi + B^2 sin^2\phi) + (AC - B^2)sin^2\phi$$

(*)

$$\frac{1}{A}(((A \cdot cos\phi + B \cdot sin\phi)^2) + (AC - B^2)sin^2\phi)$$

$$1)(AC - B^2) = D > 0 \ \ A < 0 \ \ => \Delta z(M_0) \leq 0 \ \ \Delta\rho - > 0\,\text{max}$$

$$2)(AC - B^2) = D > 0 \ \ A > 0 \ \ => \Delta z(M_0) \geq 0 \ \ \Delta\rho - > 0\,\text{min}$$

$$3)(AC - B^2) = D < 0$$

$$3.1)(AC - B^2) = D < 0 \ \ A > 0 \ \ \phi : sin\phi = 0 \ \ (*) = \frac{A^2}{A} = A \ \ > 0 \ \ \ => \Delta z(M_0) \geq 0$$

$$\phi : tg\phi = -\frac{A}{B} \ \ (*) = \frac{1}{A}(AC - B^2) \cdot sin^2\phi \ \ \ => \ \Delta(M_0) \leq 0$$

no extremum

$$3.2) \ A < 0$$

no extremum

$$3.3) A = 0 : (**) = sin\phi(2b \cdot cos\phi + c \cdot sin\phi);\ \phi > 0 \text{знак как B};\ \phi < 0 \text{знак как -B}$$

$$4) D = 0 :\ \Delta z(M_0) = \frac{(\Delta\rho)^2}{2}(\frac{(Acos\phi + Bsin\phi)^2}{A} + o(1))$$

$$\phi : tg\phi = -\frac{A}{B}\ \ => \Delta z(M_0) = (\Delta\rho)^2 \cdot o(1) = o(\Delta\rho^2)$$

нужны доп исследования