Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по лабораторной работе №3

По дисциплине «Математическая статистика» (4 семестр)

Студент:
Дениченко Александр P3212
Практик:
Наумова Надежда Александровна

Санкт-Петербург
2024 г.

1 Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуе- мой точностью различными численными методами.

Вариант – 8

2 Вычислительная часть

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при n = 6.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n = 10 .
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.
6. В отчете отразить последовательные вычисления.

Интеграл по варианту:

$$\int_2^3 3x^3 - 2x^2 - 7x - 8$$

Точное вычисление интеграла:

$$\int_2^3 3x^3 - 2x^2 - 7x - 8 = \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} - 8x \right) \Bigg|_2^3 = \frac{243}{4} - \frac{301}{6} = \frac{127}{12} \approx 10.583$$

Вычисление по формуле Ньютона – Котеса:

Берём n=6, тогда коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов:

$$c_6^0 = c_6^6 = \frac{42(b-a)}{840}$$

$$c_6^1 = c_6^5 = \frac{216(b-a)}{840}$$

$$c_6^2 = c_6^4 = \frac{27(b-a)}{840}$$

$$c_6^3 = \frac{272(b-a)}{840}$$

Границы известны a=2; b=3:

$$c_6^0 = c_6^6 = \frac{42}{840}$$

$$c_6^1 = c_6^5 = \frac{216}{840}$$

$$c_6^2 = c_6^4 = \frac{27}{840}$$

$$c_6^3 = \frac{272}{840}$$

Найдём шаг разбиения:

$$h = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

Запишем определенный интеграл в виде:

$$\int_2^3 3x^3 - 2x^2 - 7x - 8 = c_6^0 \cdot f(a) + c_6^1 \cdot f(a + \frac{1}{6}) + c_6^2 \cdot f(a + \frac{2}{6}) + c_6^3 \cdot f(a + \frac{3}{6}) + c_6^4 \cdot f(a + \frac{4}{6}) + c_6^5 \cdot f(a + \frac{5}{6}) + c_6^6 \cdot f(b) =$$

$$= \frac{42}{840} \cdot f(2) + \frac{216}{840} \cdot f(2 + \frac{1}{6}) + \frac{27}{840} \cdot f(2 + \frac{2}{6}) + \frac{272}{840} \cdot f(2 + \frac{3}{6}) + \frac{27}{840} \cdot f(2 + \frac{4}{6}) + \frac{216}{840} \cdot f(2 + \frac{5}{6}) + \frac{42}{840} \cdot f(3) \approx 10.617$$

Относительная погрешность:

$$\epsilon = \frac{|10.617 - 10.583|}{10.583} \cdot 100 = 0.32\%$$

Вычисление по формуле прямоугольников со средними высотами:

По условия дано n = 10, тогда делим отрезок интегрирования на 10 равных частей по формуле:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{10} = 0.1$$

По формуле средних прямоугольников:

$$I = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}}$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
y_i	-6	-3.737	-1.136	1.821	5.152	8.875	13.008	17.569	22.576	28.047	34
$x_{i-1/2}$		2.05	2.15	2.25	2.35	2.45	2.55	2.65	2.75	2.85	2.95
$y_{i-1/2}$		-4.9096	-2.4799	0.2969	3.4386	6.9634	10.8891	15.2339	20.0156	25.2524	30.9621

Таблица 1: Приближенное вычисление интеграла методом средних прямоугольников

Подсчёт:

$$I = 0.1 \cdot (-4.9096 - 2.4799 + 0.2969 + 3.4386 + 6.9634 + 10.8891 + 15.2339 + 20.0156 + 25.2524 + 30.9621) = 10.8737$$

Относительная погрешность:

$$\epsilon = \frac{|10.8737 - 10.583|}{10.583} \cdot 100 = 2.75\%$$

Вычисление методом трапеций:

По условия дано n = 10, тогда делим отрезок интегрирования на 10 равных частей по формуле:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{10} = 0.1$$

По формуле трапеций:

$$I = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
y_i	-6	-3.737	-1.136	1.821	5.152	8.875	13.008	17.569	22.576	28.047	34

Таблица 2: Приближенное вычисление интеграла методом трапеций

Подсчёт:

$$I = 0.1 \cdot \left(\frac{-6+43}{2} + (-6 - 3.737 - 1.136 + 1.821 + 5.152 + 8.875 + 13.008 + 17.569 + 22.576 + 28.047)\right) = 10.0175$$

Относительная погрешность:

$$\epsilon = \frac{|10.0175 - 10.583|}{10.583} \cdot 100 = 5.34\%$$

Вычисление методом Симпсона:

По условия дано n = 10, тогда делим отрезок интегрирования на 10 равных частей по формуле:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{10} = 0.1$$

По формуле Симпсона:

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4 \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + y_{10}) =$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
y_i	-6	-3.737	-1.136	1.821	5.152	8.875	13.008	17.569	22.576	28.047	34

Таблица 3: Приближенное вычисление интеграла методом Симпсона

$$= \frac{0.1}{3}(-6 + 4 \cdot (-3.737 + 1.821 + 8.875 + 17.569 + 28.047) + 2(-1.136 + 5.152 + 13.008 + 22.576) + 34) = 10.5833$$

Относительная погрешность:

$$\epsilon = \frac{|10.5833 - 10.583|}{10.583} \cdot 100 = 0.0028\%$$