Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по лабораторной работе №5

По дисциплине «Методы оптимизации» (4 семестр)

Студент:
Дениченко Александр P3212
Практик:
Селина Елена Георгиевна

Санкт-Петербург
2024 г.

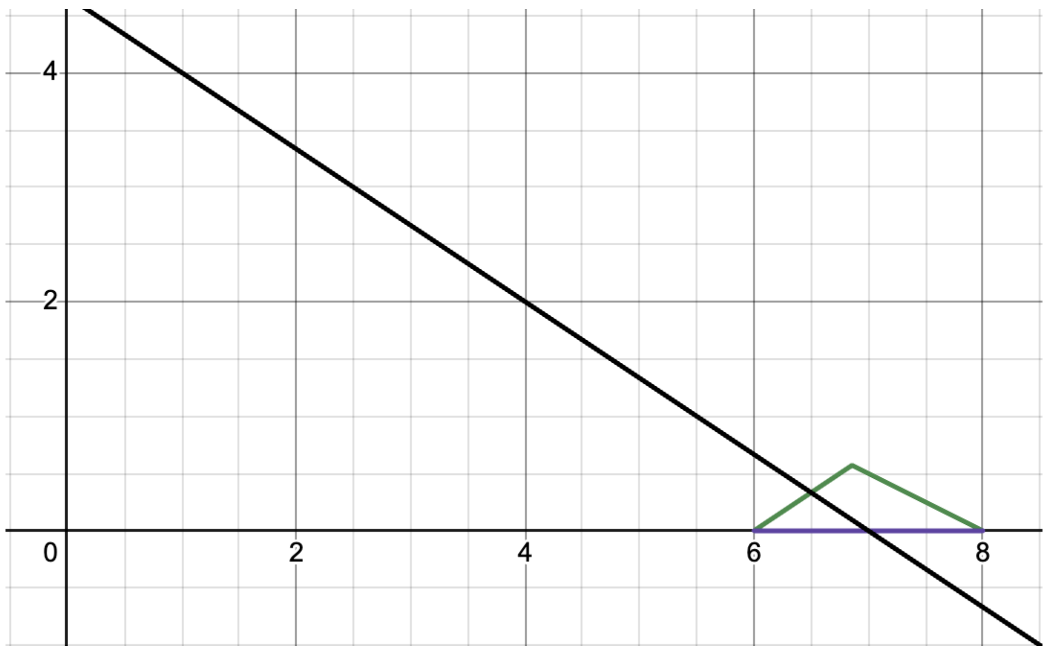
Задание 1

Данные

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 -> min, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 24, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

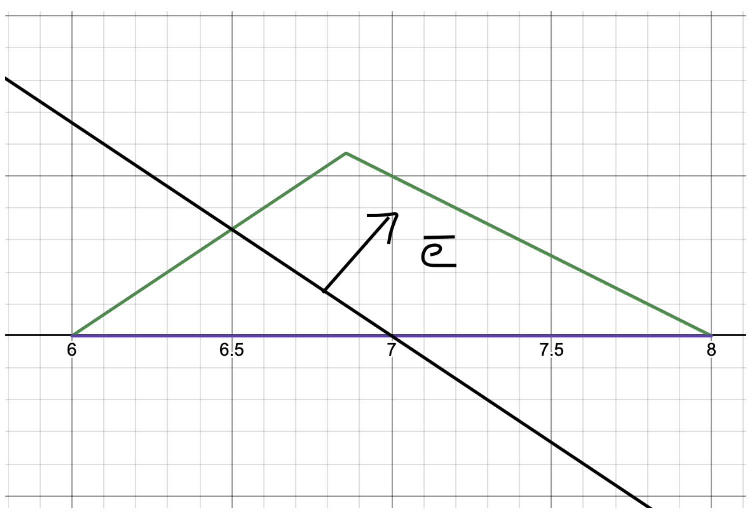
Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Изобразим на плоскости допустимое множество X данной задачи (треугольник) и одну из линий уровня целевой функции (чёрный цвет, где функция задана: $-2x_1 - 3x_2 = -14$).

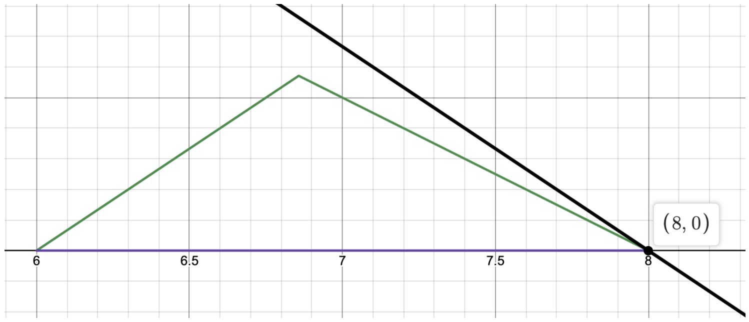


Антиградиент

$$-\nabla f(x) = (2, 3) = \overline{e}$$



указывает направление убывания функции. Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль напрвления находим её крайнее положение.



В этом положении прямая проходит через вершину с координатами (8, 0). Поэтому целевая функция f(x) принимает единственное значение в точке x = (8, 0).

$$f^* = -2 \cdot 8 - 3 \cdot 0 = -16$$

Задание 2

Даны матрица A и векторы c и b. Решить каноническую задачу линейного программирования

$$f(x) = cx -> max$$

при ограничениях

$$Ax = b,\ x \geq 0$$

с помощью симплекс-метода.

$$c = (0, 1, -6, 1, -3),\ b = (9, 14, 3)$$
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Перепишем в удобный вид

$$f(x) = x_2 - 6x_3 + x_4 - 3x_5$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ -x_1 - x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0,\ x_i = 1, ..., 5 \end{cases}$$

Ищем начальное базисное решение: Столбец 2 является частью единичной матрицы. Переменная пусть x2 входит в начальный базис.

Таблица 1: Начальная симплекс-таблица

базис	x_1	x_3	x_4	x_5	b
x_2	6	1	2	1	9
?	-1	-1	7	8	14
?	1	2	1	1	3

В качестве ещё одной базисной переменной берём x1.

Таблица 2: Добавление в базис x1

базис	x_1	x_3	x_4	x_5	b
x_2	6	1	2	1	9
x_1	-1	-3	7	8	14
?	1	2	1	1	3

Преобразование: Делим строку 2 на -1. Из строк 1, 3 вычитаем строку 2, умноженную на соответствующий элемент в столбце 1.

Таблица 3: Преобразование для x1

базис	x_3	x_4	x_5	b
x_2	-5	44	49	93
x_1	1	-7	-8	-14
?	1	8	9	17

В качестве ещё одной базисной переменной берём x3.

Таблица 4: Добавление в базис x3

базис	x_3	x_4	x_5	b
x_2	-5	44	49	93
x_1	1	-7	-8	-14
x_3	1	8	9	17

Преобразование: Делим строку 3 на -1. Из строк 1, 2 вычитаем строку 3, умноженную на соответствующий элемент в столбце 3.

Таблица 5: Преобразование для x3

базис	x_4	x_5	b
x_2	84	94	178
x_1	-15	-17	-31
x_3	8	9	17

В столбце b присутствуют отрицательные значения. Максимальное по модулю $|b|_{max} = 31$ находится в строке 2. Максимальный по модулю элемент в 2 строке 17 находится в столбце 5. Тогда в качестве базисной переменной x1 берём x5.

Преобразование: Делим строку 2 на -17. Из строк 1, 3 вычитаем строку 2, умноженную на соответствующий элемент в столбце 5.

Таблица 6: Преобразование для x5

базис	x_1	x_4	b
x_2	$\frac{94}{17}$	$\frac{18}{17}$	$\frac{112}{17}$
x_5	-$\frac{1}{17}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{31}{17}$
x_3	$\frac{9}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{10}{17}$

Восстановим функцию:

$$f(x) = x_2 - 6x_3 + x_4 - 3x_5$$

$$f(x) = (-\frac{94}{17}x_1 - \frac{18}{17}x_4 + \frac{112}{17}) - 6(-\frac{9}{17}x_1 - \frac{1}{17}x_4 + \frac{10}{17}) + x_4 - 3(\frac{1}{17}x_1 - \frac{15}{17}x_4 + \frac{31}{17}) = -\frac{43}{17}x_1 + \frac{50}{17}x_4 - \frac{41}{17}$$

Симплекс таблица:

Таблица 7: Добавление f

базис	x_1	x_4	b
x_2	$-\frac{94}{17}$	$-\frac{18}{17}$	$\frac{112}{17}$
x_5	$\frac{1}{17}$	$-\frac{15}{17}$	$\frac{31}{17}$
x_3	$-\frac{9}{17}$	$-\frac{1}{17}$	$\frac{10}{17}$
f	$-\frac{43}{17}$	$\frac{50}{17}$	$-\frac{41}{17}$

Критерий оптимальности не выполнен.

$$min\{\frac{112}{18}, \frac{31}{15}, 10\} = \frac{31}{15}$$

Тогда x_4 попадает в свободные, а x_5 в базисные.

$$x_5 = \frac{1}{17}x_1 - \frac{15}{17}x_4 + \frac{31}{17}$$

$$x_4 = \frac{1}{15}x_1 - \frac{17}{15}x_5 + \frac{31}{15}$$

$$x_2 = -\frac{94}{17}x_1 - \frac{18}{17}(\frac{1}{15}x_1 - \frac{17}{15}x_5 + \frac{31}{15}) + \frac{112}{17} = -\frac{28}{5}x_1 + \frac{6}{5}x_5 + \frac{22}{5}$$

$$x_3 = -\frac{9}{17}x_1 - \frac{1}{17}(\frac{1}{15}x_1 - \frac{17}{15}x_5 + \frac{31}{15}) + \frac{10}{17} = -\frac{8}{15}x_1 + \frac{1}{15}x_5 + \frac{7}{15}$$

$$f = (-\frac{28}{5}x_1 + \frac{6}{5}x_5 + \frac{22}{5}) - 6(-\frac{8}{15}x_1 + \frac{1}{15}x_5 + \frac{7}{15}) + (\frac{1}{15}x_1 - \frac{17}{15}x_5 + \frac{31}{15}) - 3x_5 = -\frac{7}{3}x_1 - \frac{10}{3}x_5 + \frac{11}{3}$$

Таблица 8: Формирование нового базиса

базис	x_1	x_5	b
x_2	$-\frac{28}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{22}{5}$
x_4	$\frac{1}{15}$	$-\frac{17}{15}$	$\frac{31}{15}$
x_3	$-\frac{8}{15}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{15}$
f	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{11}{3}$

Критерий выполнен, ответ получен.

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{22}{5},\ x_3 = \frac{7}{15},\ x_4 = \frac{31}{15},\ x_5 = 0,\ f = \frac{11}{3}$$

Задание 3

Данные:

$$C = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$$

$$b = (-3, -1, -5)$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Прямая задача:

$$max(CX|AX = b^T,\ x \geq 0)$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_5 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 -> \ max$$

Построим двойственную задачу:

$$min(b\lambda|A^T\lambda \geq c^T,\ \lambda \geq 0)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Двойственная задача имеет вид:

$$g(\lambda) = -3\lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3 -> \ min$$

$$\begin{cases} -4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \geq -\frac{1}{3} \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 \geq -\frac{1}{2} \\ 2\lambda_2 \geq 0 \\ 2\lambda_3 \geq 0 \\ 2\lambda_1 \geq 0 \end{cases} \quad -> \quad \begin{cases} -4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \geq -\frac{1}{3} \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 \geq -\frac{1}{2} \\ \lambda_{1,\ldots,3} \geq 0 \end{cases}$$

$$min(-3\lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3) = -max(3\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3)$$

Приведём к каноническому виду, введя дополнительные перменные $\lambda_4,\ \lambda_5$:

$$\begin{cases} -4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 = -\frac{1}{3} \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_5 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_{1,\ldots,3} \geq 0 \end{cases} \quad -> \quad \begin{cases} 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = \frac{1}{3} \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_5 = \frac{1}{2} \\ \lambda_{1,\ldots,3} \geq 0 \end{cases}$$

$$\lambda_4 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + \frac{1}{3}$$

$$\lambda_5 = 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 + \frac{1}{2}$$

$$g'(\lambda) = 3\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3$$

Таблица 9: Построение начальной симплекс таблицы

	λ_1	λ_2	λ_3	β
λ_4	-4	2	-2	$\frac{1}{3}$
λ_5	2	-4	-2	$\frac{1}{2}$
g'	3	1	5	0

Критерий оптимальности не выполнен

$$min(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}$$

λ_3 попадает в базисные, а λ_4 попадает в свободные перменные.

$$\lambda_4 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + \frac{1}{3}$$

$$\lambda_3 = -2\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_4 + \frac{1}{6}$$

$$\lambda_5 = 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2(-2\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_4 + \frac{1}{6}) + \frac{1}{2} = 6\lambda_1 - 6\lambda_2 + \lambda_4 + \frac{1}{6}$$

$$g'(\lambda) = 3\lambda_1 + \lambda_2 + 5(-2\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_4 + \frac{1}{6}) = -7\lambda_1 + 6\lambda_2 - \frac{5}{2}\lambda_4 + \frac{5}{6}$$

Таблица 10: Симплекс таблица после смены базиса

	λ_1	λ_2	λ_4	β
λ_3	-2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
λ_5	6	-6	1	$\frac{1}{6}$
g'	-7	6	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$

Критерий оптимальности не выполнен

$$min(\frac{1}{36}, -) = \frac{1}{36}$$

λ_2 попадает в базисные, а λ_5 попадает в свободные перменные.

$$\lambda_5 = 6\lambda_1 - 6\lambda_2 + \lambda_4 + \frac{1}{6}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_4 - \frac{1}{6}\lambda_5 + \frac{1}{36}$$

$$\lambda_3 = -2\lambda_1 + (\lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_4 - \frac{1}{6}\lambda_5 + \frac{1}{36}) - \frac{1}{2}\lambda_4 + \frac{1}{6} = -\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_4 - \frac{1}{6}\lambda_5 + \frac{7}{36}$$

$$g' = -7\lambda_1 + 6(\lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_4 - \frac{1}{6}\lambda_5 + \frac{1}{36}) - \frac{5}{2}\lambda_4 + \frac{5}{6} = -\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_4 - \lambda_5 + 1$$

Таблица 11: Симплекс таблица после смены базиса

	λ_1	λ_4	λ_5	β
λ_2	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
λ_3	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{36}$
g'	-1	$-\frac{3}{2}$	-1	1

Критерий выполнен.

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \frac{1}{36}; \quad \lambda_3 = \frac{7}{36}; \quad \lambda_4 = 0; \quad \lambda_5 = 0 \quad g(\lambda) = -1$$

$$f(x) = g(\lambda) = -1$$

Перейдём к x.

$$X(A^T\lambda - C) = 0$$

$$A^T\lambda - C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{36} \\ \frac{7}{36} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -0.5 \\ \frac{1}{18} \\ \frac{7}{18} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{18} \\ \frac{7}{18} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX - B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 + 2x_5 + 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{36}x_1 - \frac{4}{36}x_2 + \frac{2}{36}x_3 + \frac{1}{36} = 0 \\ -\frac{14}{36}x_1 - \frac{14}{36}x_2 + \frac{14}{36}x_4 + \frac{35}{36} = 0 \\ x_3,\ x_4 = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \frac{2}{36}x_1 - \frac{4}{36}x_2 + \frac{1}{36} = 0 \\ -\frac{14}{36}x_1 - \frac{14}{36}x_2 + \frac{35}{36} = 0 \\ x_3,\ x_4 = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3,\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$-4x_1 + 2x_2 + 2x_5 = -3$$

$$x_5 = 2x_1 - x_2 - \frac{3}{2} = 3 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 = -1$$

Ответ:

$$x_1 = \frac{3}{2};\ x_2 = 1;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = \frac{1}{2};\ f_{max} = -1$$