Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

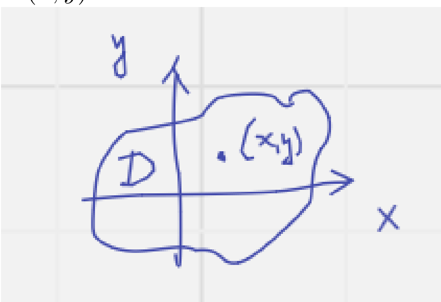
Отчёт по лабораторной работе №3
По дисциплине «Базы данных» (второй семестр)

Студент:
Дениченко Александр Р3112
Практик:
Лисицина В.В

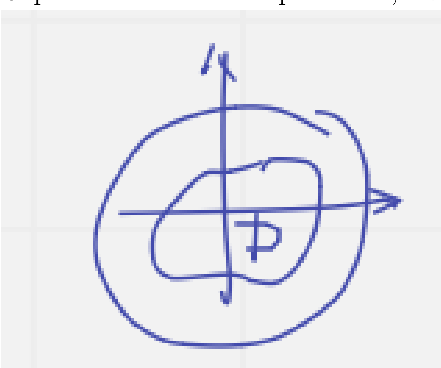
Санкт-Петербург
2023 г.

1 ФНП и скалярное поле П.1 Основные понятия

$\mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R}...x\mathbb{R} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, .., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1...n\}$
$\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$
$n = 2(x, y)$

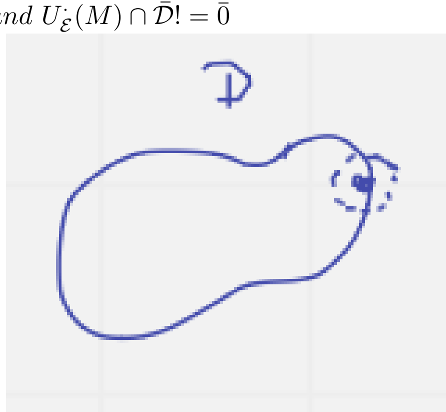


Ограниченность $\mathbb{D}$ - ограничена, если существует M>0 Для любых $(x, y) \in \mathbb{D}\sqrt{x^2 + y^2} \in\leq \delta(M, O) \leq M$

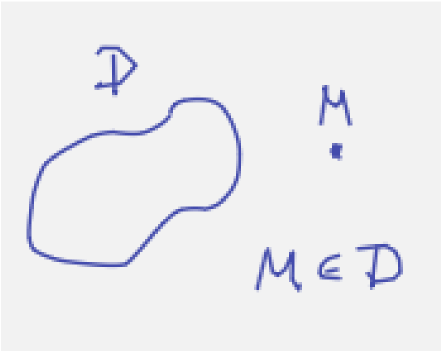


Внутренняя точка (IntD) M(x, y) - внутренняя, если существует $\mathcal{E} > 0 : U_{\mathcal{E}}(M) \in D == \{(x', y') : \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')} < \mathcal{E}\}$

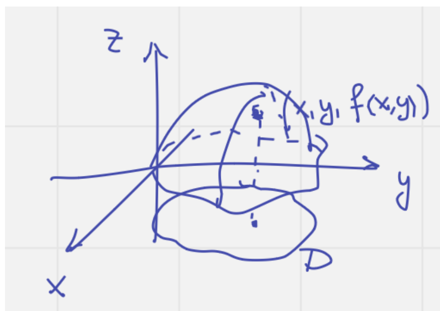
Граничная точка (знак частных производных)$\mathcal{D}$): M(x, y) - граничная точка, если существует $\mathcal{E} > 0 : U_{\dot{\mathcal{E}}}(M) \cap \mathcal{D}! = \bar{0}$ and $U_{\dot{\mathcal{E}}}(M) \cap \bar{\mathcal{D}}! = \bar{0}$



Изолированная точка: существует $\mathcal{E} > 0 : U_{\dot{\mathcal{E}}}(M) \cap \mathcal{D} = \bar{0}$



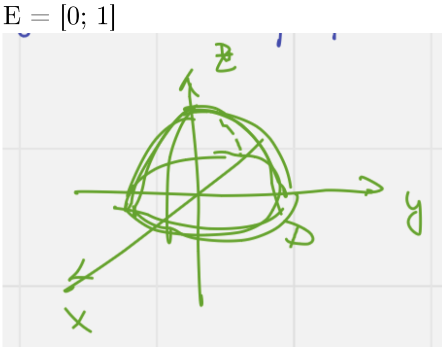
$\mathcal{F} : \mathcal{D} -> \mathbb{R}\ \forall (x, y) \in \mathcal{D}\ and\ \forall (x, y) \in \mathcal{D}\ \ => !z \in \mathbb{R} : z = f(x, y)$
$\mathcal{D}$ - облать определения
E -множество точек



$\Gamma = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{D}\}$ -график
Пример: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
$\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

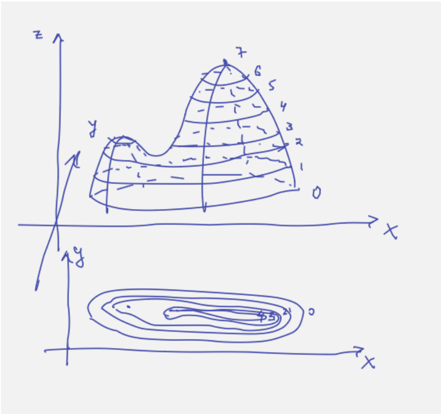
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

E = [0; 1]



2 П.2 Линии и поверхности уровня

n = 2 $f : \mathcal{D} -> \mathbb{R}$
$L_c = \{(x, y) : f(x, y = c)\}$
$S_c = \{(x, y, z) : f(x, y, z = c)\}$



3 п.3 Частное и полное приращение

$f : \mathcal{D} -> \mathbb{R}$, n=2
z = f(x, y)
$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$
полное приращение
$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$
частное приращение по переменной x
$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$
частное приращение по переменной y

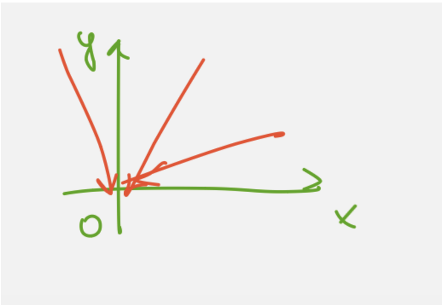
$\Delta z != \Delta_x z + \Delta_y z$
Пример:
S = xy
x=1 $\Delta x = 0,1$
y=2 $\Delta y = 0,2$
$\Delta S = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = 0,42$
$\Delta_x S + \Delta_y S = (x + \Delta x)y - xy + (y + \Delta y)x - xy = \Delta x \cdot y + \Delta y \cdot x$

4 п.4 Предел и непрерывность

$\lim_{x->x_0} f(x) = A \ <=> \ \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta_{\mathcal{E}} > 0 : \forall x \in \dot{U_\delta}(x_0) \cap \mathcal{D}_f => f(x) \in U_{\mathcal{E}}(A)$
$\lim_{M->M_0} f(M) = A \ <=> \ \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta_{\mathcal{E}} > 0 : \forall M \in \dot{U_\delta}(M_0) \cap \mathcal{D}_f => f(M) \in U_{\mathcal{E}}(A)$

$M(x,y), M(x_1,y_1)$

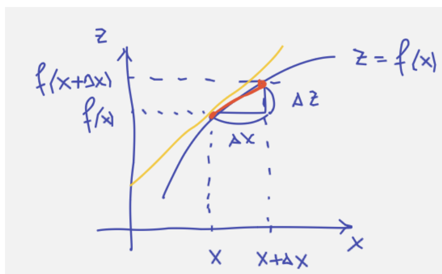
1) $z = x^2+y^2 \mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \Delta z = (x_0+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + 2y_0\Delta y + \Delta y^2 - (\Delta x->0, \Delta y->0)->0$
z - непрерывная на $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$
$\lim_{(x,y)->0}(\frac{2xy}{x^2+y^2}) = |y=kx| = \lim_{(x,y)->0}(\frac{2xkx}{x^2+(kx)^2}) = \frac{2k}{1+k^2}$



5 П.5 Частные производные

Обычные случаи

$$z = f(x)\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x->0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$



Случай с частной производной

$$z = f(x,y)\ \Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y);\ \ \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x->0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

Частная производная функции z по y в точке M(x, y)

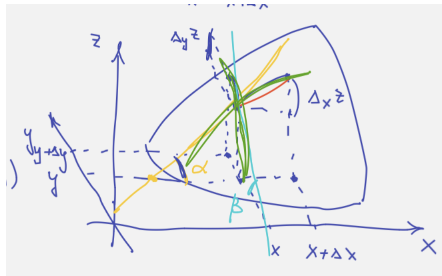
$$\Delta x - fiks\ \ => \ \ \Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y);\ \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x->0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

Частная производная функции y по y в точке M(x, y)

$$\Delta y - fiks\ \ => \ \ \Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y);\ \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y->0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

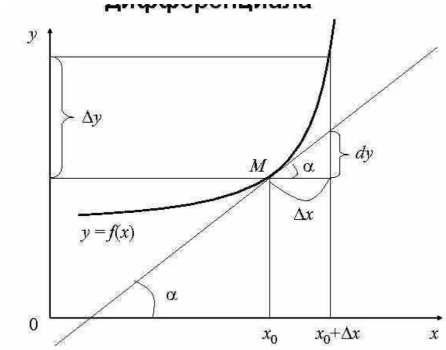
$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l->0}\frac{\Delta_l z}{\Delta l}$$

Частная производная функции y по направлению в точке M(x, y)



6 П.6 Дифферинциал

$$z = f(x);\ \Delta z = A \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x = f'(x) + \Delta x = \mathrm{d}z + o(\Delta x)$$



Полный Дифферинциал функции двух переменных

$$z = f(x, y);\ \Delta z = A \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y;\ A, B \in \mathbb{R}$$

Теорема(о дифферинциале):

$$z = f(x, y)\ M(x, y)$$
$$=> \mathrm{d}z = z'_x \mathrm{d}x + z'_y \mathrm{d}y$$
$$\Delta z = \mathrm{d}z + o(\Delta\rho)$$

Доказательство:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$
$$\Delta z_1 = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = |x - fiks;\ f(x, y) = \psi(y)| = \psi(y + \Delta y) - \psi(y) =$$
$$= |\psi(y) - \text{непрерывная; по т. Лагранжа} : \exists \overline{y} : \psi(y + \Delta y) - \psi(y) = \psi'_y(\overline{y}\Delta y)| =$$
$$= \psi'_y(\overline{y}\Delta y) = f'_y(x, \overline{y})\Delta y$$

$$\Delta z_2 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y + \Delta y) = |y + \Delta y - fiks;\ f(x, \Delta y + y) = \phi(x)| = \phi(x + \Delta x) =$$

$$= f'_x(\overline{x}, y + \Delta y) \cdot \Delta x$$

$$=> \Delta z = \Delta z_2 + \Delta z_1 = f'_x(\overline{x}, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, \overline{y})\Delta y$$

$$\measuredangle \lim_{\Delta x -> 0, \Delta y -> 0} f'_x(\overline{x}, y + \Delta y) = f'_x(x, y)$$

по т. о функции, её предел и бмф:

$$f'_x(\overline{x}, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta\rho)$$

$$\measuredangle \lim_{\Delta y -> 0} f'_y(x, \overline{y}) = f'_y(x, y) \;\; => \;\; f'_y(x, \overline{y}) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta\rho)$$

$$= f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta\rho)\Delta x + \beta(\Delta\rho)\Delta y = \mathrm{d}z + o(\Delta\rho)$$

$$\mathrm{d}z = f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y$$

Доказано

7 П.7 Производная сложной функции, полная производная, полный Дифферинциал

$$z = z(u, v), \;\; u = u(x, y), \;\; v = v(x, y) \tag{1}$$

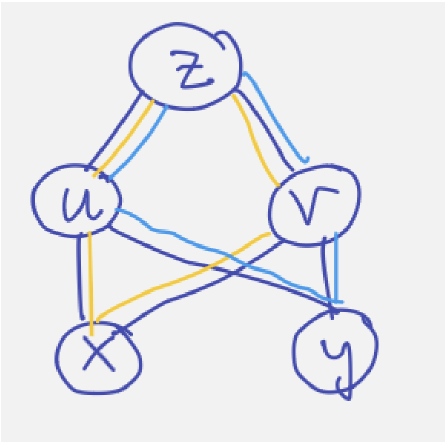
$$z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y) \tag{2}$$

Теорема о производной сложной ф

$$z(u, v), \;\; u(x, y) \; v(x, y) \tag{3}$$

$$=> \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \tag{5}$$



докажем

$$\measuredangle \frac{\partial z}{\partial x} : \tag{6}$$

$$\Delta x -> \Delta_x u, \Delta_x v -> \Delta z; \;\; y - fiks \tag{7}$$

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha(\Delta_x u)\Delta_x u + \beta(\Delta_x v)\Delta_x v \quad | : \Delta x \tag{8}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha(\Delta_x u)\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta(\Delta_x v)\frac{\Delta_y v}{\Delta x} \tag{9}$$

$$\lim_{\Delta x -> 0} : \Delta -> 0 => \text{непрерывна} : \Delta_x u -> 0, \Delta_x v -> 0 => \alpha, \beta -> 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \tag{11}$$

для $\frac{\partial z}{\partial y}$ по аналогии
Доказано