Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по расчетно-графической работе №4

По дисциплине «Математический анализ» (второй семестр)

Группа:
МАТБАЗ 1.5

Студенты:
Андриянова Софья
Беляев Михаил
Билошицкий Михаил
Дениченко Александр
Разинкин Александр

Лектор:
Правдин Константин Владимирович

Практик:
Правдин Константин Владимирович

Санкт-Петербург
2023 г.

1 Ряд Тейлора

а)

Задание: Некоторую функцию разложили в ряд Маклорена и, придав аргументу x определённое значение, получили данный числовой ряд. Найдите его сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3^n}(2n-1)}$$

Решение:
Перейдём к функциональному ряду, где агрумент возьмём за x.

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

Имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)}$$

Заметим, что формула a_n очень похожа на формулу $\widetilde{a_n}$ при стандартном разложении в ряд Маклорена функции $arctg\ x$

$$x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)} = arctg(x) \cdot x;$$

Данное разложение справедливо только при $\forall x \in [-1; 1]$

Сделаем обратную замену, где $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \Longrightarrow \underline{S = \frac{arctg(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})}{\sqrt[4]{3}}}$ (сумма ряда)

б)

Задание: Найдите первообразную данной функции в виде ряда, используя стандартные разложения степенных рядов, а также свойства их сложения и умножения.

$$f(x) = \frac{sinx}{x}$$

Решение:
Разложим функцию $sin(x)$, применяя стандартные разложения в ряд Маклорена:

$$sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Теперь мы можем разделить ряд на x и предствить функцию в виде $f(x) = (F(x))'$

$$\frac{sin(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}\right)' =^{?} \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}\right)'$$

Для равносильного перехода от суммы производных к производной суммы нам потребудется доказать, что ряд, который образует сумма, сходится равномерно. Для этого подберём мажорирующий ряд, который будет работать в определённой области:

$$\frac{|x^{2n-1}|}{(2n-1)!(2n-1)} \leq \frac{1}{(2n-1)!(2n-1)}$$

Докажем сходимость мажорирующего ряда по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!(2n-1)}{(2(n+1)-1)!(2(n+1)-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!(2n-1)}{(2n+1)!(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)}{2n(2n+1)^2} = 0 \Rightarrow CX$$

Из сходимости мажорирующего ряда следует равномерная и абсолютная сходимость изначального ряда, а это значит, что мы можем перейти от суммы производных к производной суммы.

$$(F(x))' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} + C\right)'$$

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}+C$$

в)

Задание: Найдите первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях. Изобразите на графике.

$$y'=\frac{x}{\sqrt{y}}+2,\ y(0)=1,\ k=5$$

Решение:

Для разложения в ряд Маклорена воспользуемся формулой:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

Первый член разложения в ряд Маклорена:

$$y(0)=1$$

Производная для второго члена член разложения в ряд Маклорена:

$$y'=\frac{x}{\sqrt{y}}+2$$

$$y'(0)=2$$

Производная для тертьего члена разложения в ряд Маклорена:

$$y''=(\frac{x}{\sqrt{y}}+2)'=\frac{\sqrt{y}+x(\sqrt{y})'}{y}=\frac{\sqrt{y}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'}{y}$$

$$y''(0)=\frac{1}{1}=1$$

Производная для четвёртого члена разложения в ряд Маклорена:

$$y'''=\frac{\frac{2\sqrt{y}y'+2\sqrt{y}xy''-\frac{xy'}{\sqrt{y}}}{4y}}{y}-\frac{y'\cdot\frac{2\sqrt{y}y'+2\sqrt{y}xy''-\frac{xy'}{\sqrt{y}}}{4y}}{y^2}$$

$$y'''(0)=-\frac{5}{4}$$

Производная для пятого члена разложения в ряд Маклорена:

$$y^{IV}=\frac{\left(\frac{y'^2}{\sqrt{y}}+\sqrt{y}y''+\frac{xy'y''}{\sqrt{y}}+2\sqrt{y}y''+2\sqrt{y}xy'''-\frac{\sqrt{y}y'^2+\sqrt{y}x2y'y''-\frac{xy'^3}{2\sqrt{y}}}{y}\right)4y^2-\left(2\sqrt{y}y'+2\sqrt{y}xy''-\frac{xy'^2}{\sqrt{y}}\right)8yy'}{16y^4}-$$

$$-\frac{\left(\frac{y'^2}{\sqrt{y}}+4\sqrt{y}y''y'''+\frac{y'^2xy'}{\sqrt{y}}+2\sqrt{y}y''y'+2\sqrt{y}y'y'''+2\sqrt{y}y''^2-\frac{\sqrt{y}y'^3+3\sqrt{y}xy'^2y''-\frac{xy'^4}{2\sqrt{y}}}{y}\right)4y^3-\left(2\sqrt{y}y'^2+2\sqrt{y}xy''y'-\frac{xy'^3}{\sqrt{y}}\right)12y^2y'}{16y^9}$$

$$y^{IV}(0)=\frac{15}{2}$$

Ряд будет выглядеть следующим образом:

$$f(x)=1+\frac{2}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{-\frac{5}{4}}{3!}x^3+\frac{\frac{15}{2}}{4!}x^4$$

Покажем на графике:

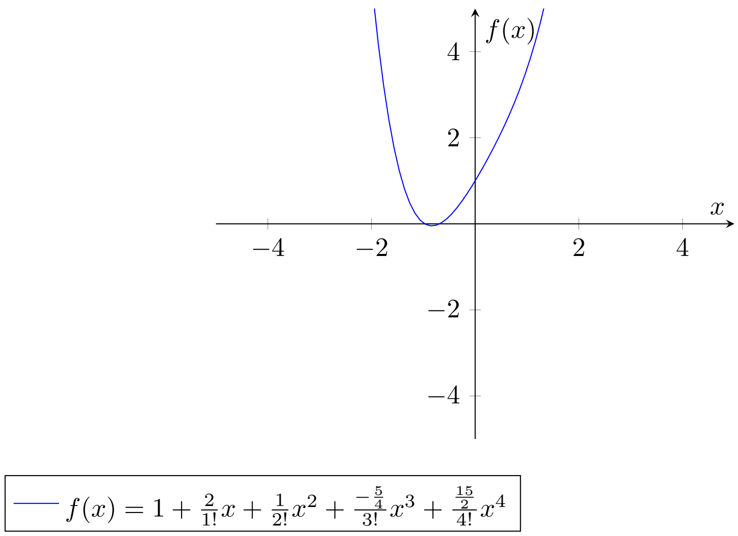

Рис. 1: Вспомогательные построения

2 Ряд Фурье

Задание: С помощью разложения в ряд Фурье данной функции в интервале $(-\pi;\pi)$ найдите сумму указанного числового ряда.

$$f(x) = |x|,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Решение:

1)Представим функцию её рядом Фурье.

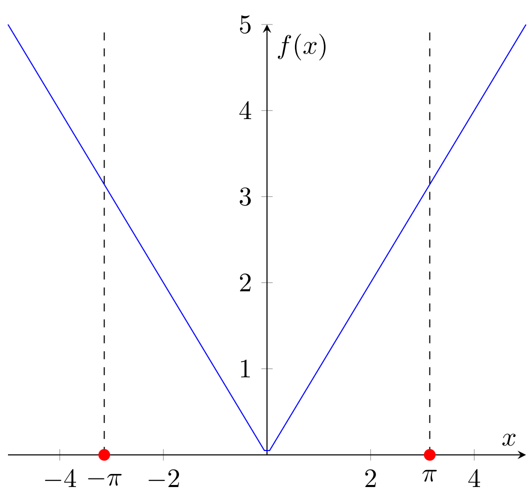

Рис. 2: Функция данная по условию

Если мы рассматриваем фиксированный отрезок $[-\pi,\pi]$, то коэффициенты ряда Фурье для тригонометрической формы могут быть вычислены следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

где: - $f(x)$ - функция, определенная на отрезке $[-\pi, \pi]$ - n - порядок гармоники - a_0 - коэффициент постоянной составляющей (среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$) - a_n - коэффициенты косинусной гармоники - b_n - коэффициенты синусной гармоники

Полученные коэффициенты могут быть использованы для записи ряда Фурье в виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$$

В данном случае, ряд Фурье представляет функцию $f(x)$ в виде суммы косинусов и синусов с различными частотами, где каждый член в сумме соответствует гармонике с определенной частотой и амплитудой. Заметим, что функция является чётной, а значит элемент b_n будет равен нулю по одному из свойств ряда Фурье, а также мы будем рассматривать удвоенные интегралы по промежутку $(0;\pi)$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{2\pi}x^2|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} xd(\sin(nx)) = \frac{2}{\pi n}\left(x\cdot sin(nx)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} sin(nx)dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(0 - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} sin(nx)d(nx)\right) = \frac{2}{\pi n^2}(-1)^n - \frac{2}{\pi n^2} = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$$

Представим разложенную функцию:

$$y = |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)cos(nx) = \left| n = 0, 2, 4, ... \sum = 0;\ n = 1, 3, 5, ... \sum = -2 \right| =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cdot(-2)\cdot cos((2k-1)x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cdot cos((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^2}$$

Положим, что $x = 0$, тогда:

$$y(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

Сравним с числовым рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \left(\frac{\pi}{2} - y(0)\right)\cdot\frac{\pi}{4}$$

Так как при $x = 0$ $f(0) = |0|$, тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \left(\frac{\pi}{2} - y(0)\right)\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}$$

Покажем в системе координат функцию и её разложение в ряд Фурье:

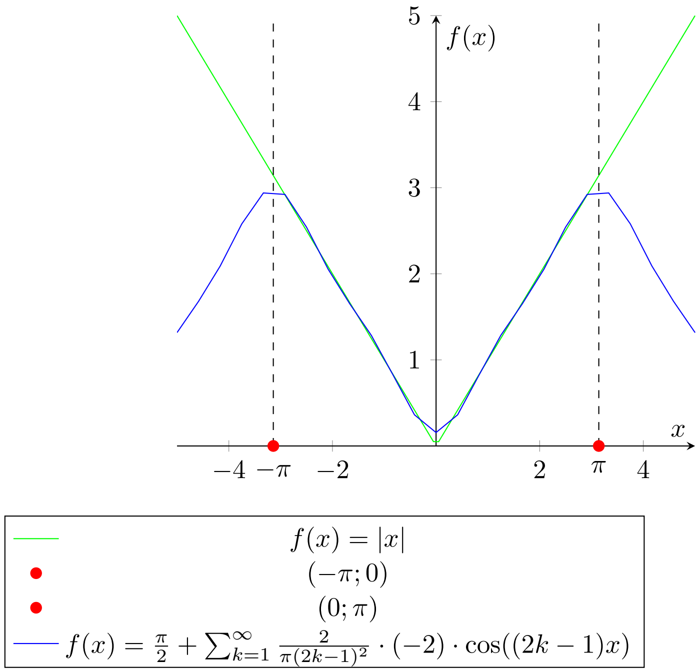

Рис. 3: Разложение до k=3

3 Приближение ряда Фурье конечной суммой

Задание: В трёх однотипных опытах радиолюбителей на вход цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) был подан короткий цифровой сигнал формы, изображённой на рисунке.

Решение:

1)

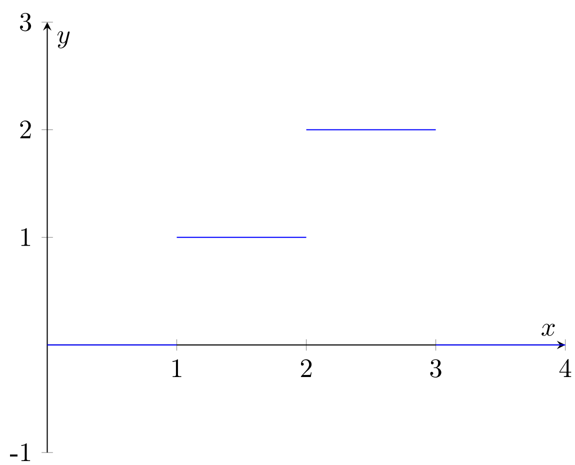

Рис. 4: Исходный график

Выпишем функцию, заданную кусочно:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0;1) \cup [3;4) \\ 1, x \in [1;2) \\ 2, x \in [2;3) \end{cases}, \quad T = 4 \implies l = 2$$

Вычислим коэффиценты для разложения в ряд Фурье

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}(\int_0^1 0dx + \int_1^2 1dx + \int_2^3 2dx + \int_3^4 0dx) = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 0cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) + \int_1^2 1cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) + \int_2^3 2cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) + \int_3^4 0cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_1^2 \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\, dx + \int_2^3 2\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\, dx\right) = \left(\frac{2}{\pi n}sin(\frac{3\pi}{2}n) - \frac{1}{\pi n}sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \frac{1}{\pi n}sin\left(\pi n\right)\right)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)sin\left(\frac{\pi}{2}nx\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 0sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) + \int_1^2 1sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) + \int_2^3 2sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) + \int_3^4 0sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_1^2 \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\, dx + \int_2^3 2\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\, dx\right) = \left(\frac{1}{\pi n}cos(\pi n) + \frac{1}{\pi n}cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \frac{2}{\pi n}cos\left(\frac{3\pi}{2}n\right)\right)$$

Представим разложенную функцию:

$$f(x) = y = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{k}(\left(-\frac{1}{\pi n}\sin\pi n - \frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}n\right)\right)\cos\frac{nx\pi}{2} +$$

$$+\left(\frac{1}{\pi n}\cos\pi n + \frac{1}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{3\pi}{2}n\right)\right)\sin\left(\frac{nx\pi}{2}\right))$$

Графики опытов:

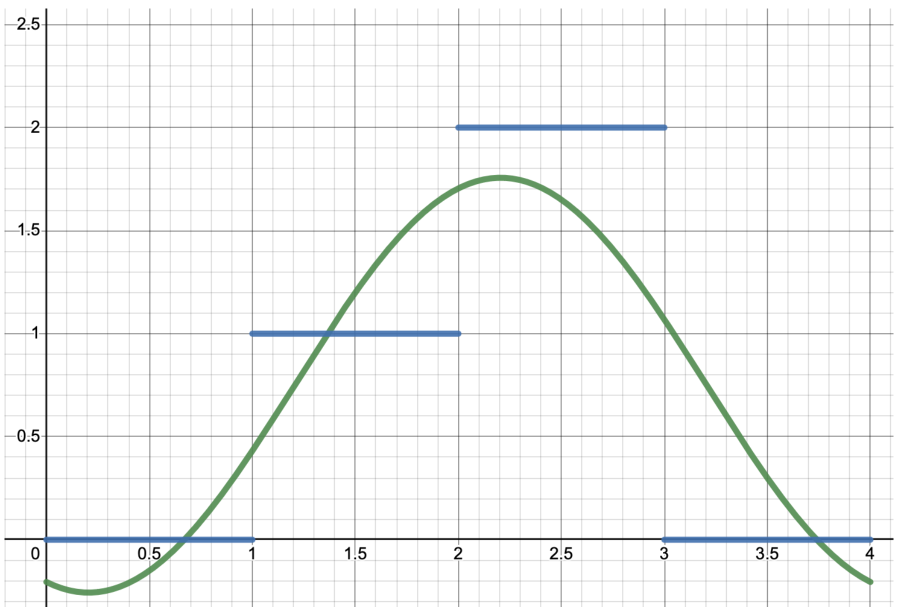

Рис. 5: Опыт первый

Максимальная ошибка ЦАП - 1.062

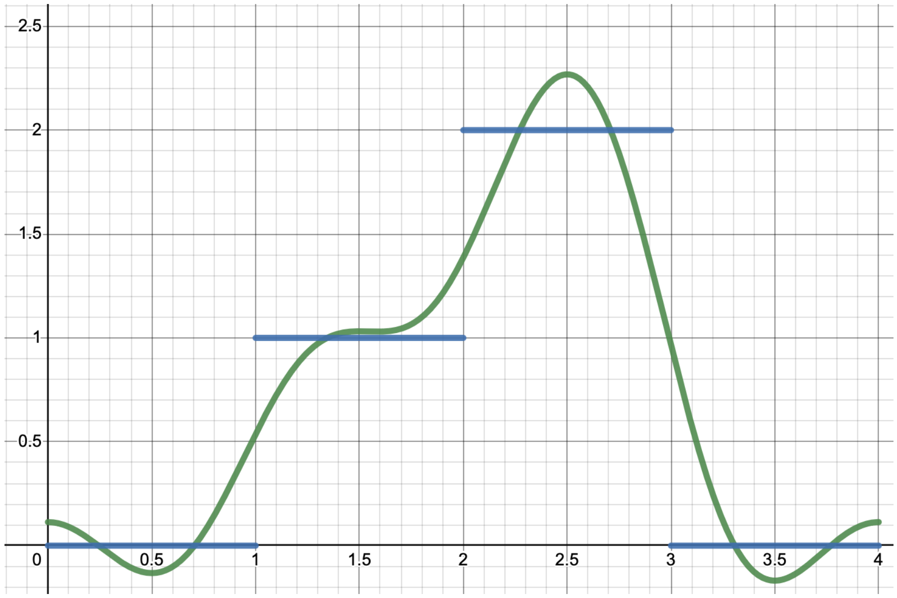

Рис. 6: Опыт второй

Максимальная ошибка ЦАП - 1.04

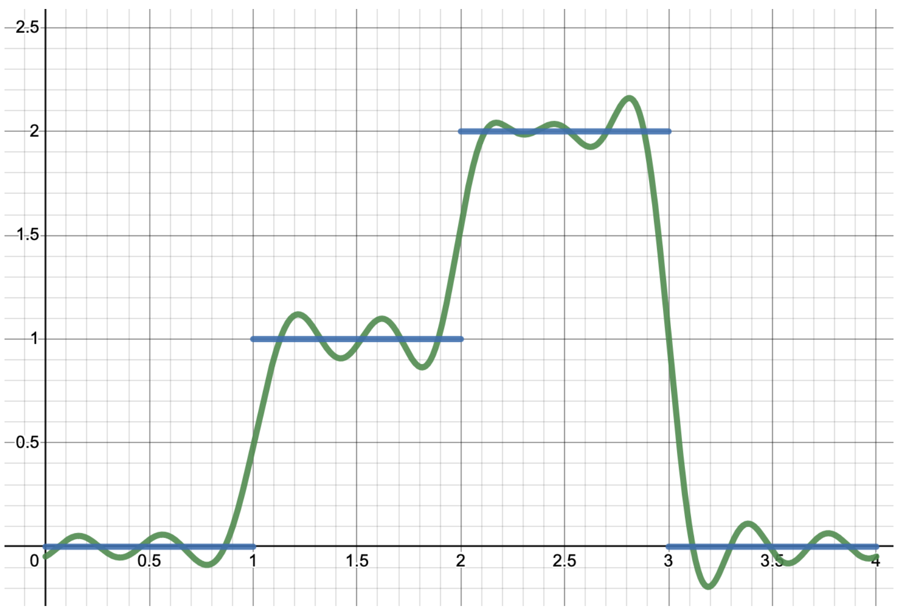

Рис. 7: Опыт третий

Максимальная ошибка ЦАП - 1.0105

При росте гармоники, ошибка ЦАП уменьшается.