Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по лабораторной работе №2
По дисциплине «Математическая статистика» (четвёртый семестр)
Построение оценки параметров законов распределения и оценки функции распределения и плотности вероятности.

Студент:
Дениченко Александр
Разинкин Александр
Соколов Анатолий
Практик:
Милованович Екатерина Воиславовна

Санкт-Петербург
2024 г.

Цель работы

Цель данной работы состоит в том, чтобы на основании опытных данных, используя метод моментов, построить оценки параметров законов распределения и оценки функции респределения и плотности вероятности.

Данные

Закон: равномерный закон распределения
Выборка: 1.85 3.91 6.13 2.17 4.05 2.83 6.97 2.17 4.27 3.00 5.53 4.54 4.64 6.29 2.93 4.72 3.41 7.31 3.13

1 Вариационный ряд

1.85 2.17 2.17 2.83 2.93 3.00 3.13 3.41 3.91 4.05 4.27 4.54 4.64 4.72 5.53 6.13 6.29 6.97 7.31

2 Точечная оценка математического ожидания

$$\overline{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx 4.20$$

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{m})^2 \approx 2.69$$

3 Построение оценки

Используя метод метод моментов, построим оценки параметров равномерного закона распределения, где равномерный закон распределения имеет следующий вид:

Случайная величина имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке [a, b], если её плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < a \\ \frac{1}{b-a}, \ a \le x \le b \\ 0, \ x > b \end{cases};$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, \ a \le x \le b \\ 1, \ x > b \end{cases};$$

4 Метод моментов

Выразим числовые параметры теоретического распределения через моменты распределения, оцененные по выборки. Число моментов соответствовует числу неизвестных параметров распределения - 2.
Начальный момент для непрерывных случайних величин.

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx + \int_{b}^{\infty} 0dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Центральный момент:

$$\mu_k = M((x-m)^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k f(x)dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(x^2-2xm+m^2)f(x)dx = \int_{-\infty}^{a}0dx+\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx-2m\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx+m^2\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b dx+\int_b^{\infty}0dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b - mx^2\bigg|_a^b + \frac{m^2}{b-a}x\bigg|_a^b\right) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3} - m(b^2-a^2) + m^2\right) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2} + \frac{(a+b)^2}{4}\right) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3} - \frac{(a+b)^2(b-a)}{2} + \frac{(a+b)^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{4(a^2+ab+b^2)-6(a+b)^2+3(a+b)^2}{12} = \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Получим:

$$\begin{cases} m = \frac{a+b}{2} \\ \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} a+b = 2m \\ (b-a)^2 = 12\sigma^2 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} a+b = 2m \\ b-a = 2\sqrt{3}\sigma \end{cases}$$

$$a = 2m - b$$

$$b - (2m-b) = 2\sqrt{3}\sigma$$

$$2b - 2m = 2\sqrt{3}\sigma$$

$$b = m + \sqrt{3}\sigma$$

$$\begin{cases} a = m - \sqrt{3}\sigma \\ b = m + \sqrt{3}\sigma \end{cases}$$

Подставим a, b:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < a \\ \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}, \ a \le x \le b \\ 0, \ x > b \end{cases};$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < a \\ \frac{x-m+\sqrt{3}\sigma}{2\sqrt{3}\sigma}, \ a \le x \le b \\ 1, \ x > b \end{cases};$$

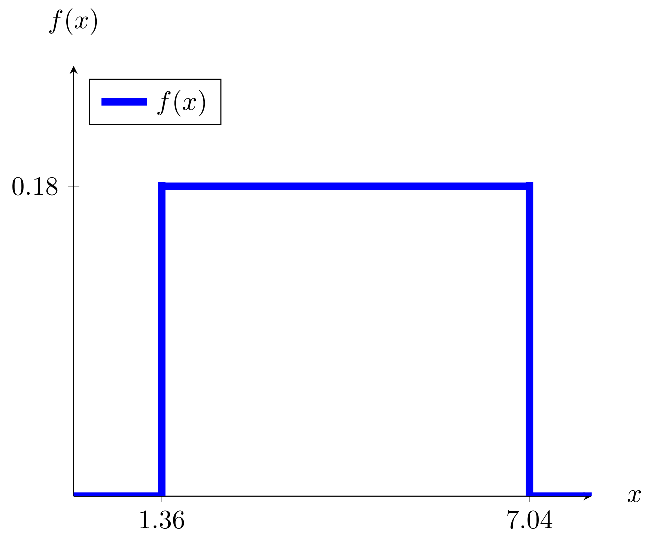
Подставим m, σ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 1.36 \\ 0.18, \ 1.36 \le x \le 7.04 \\ 0, \ x > 7.04 \end{cases};$$

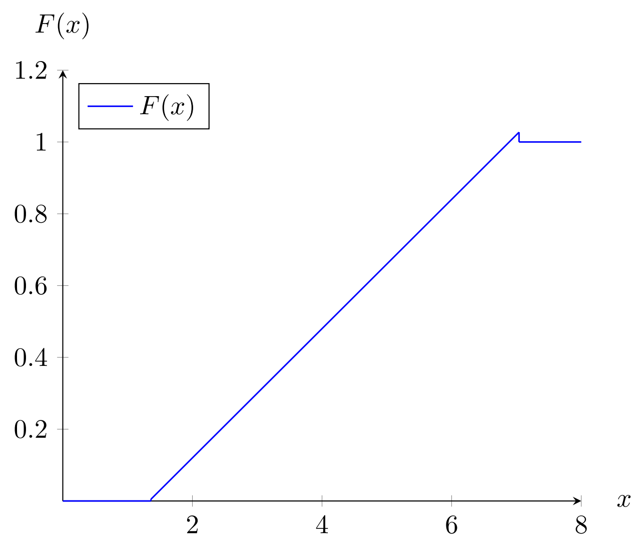
$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 1.36 \\ 0.18 \cdot x - 0.24, \ 1.36 \le x \le 7.04 \\ 1, \ x > 7.04 \end{cases};$$

5 Построение оценок

Построение графика плотности случайной величины:



Построение графика функции распределения:



Вывод

На основании опытных данных нашли при помощи метода моментов параметры равномерного закона распределения, а также построили функцию распределения и плотность вероятности.