Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по лабораторной работе №5

По дисциплине «Методы оптимизации» (4 семестр)

Студент:
Дениченко Александр P3212
Практик:
Селина Елена Георгиевна

Санкт-Петербург
2024 г.

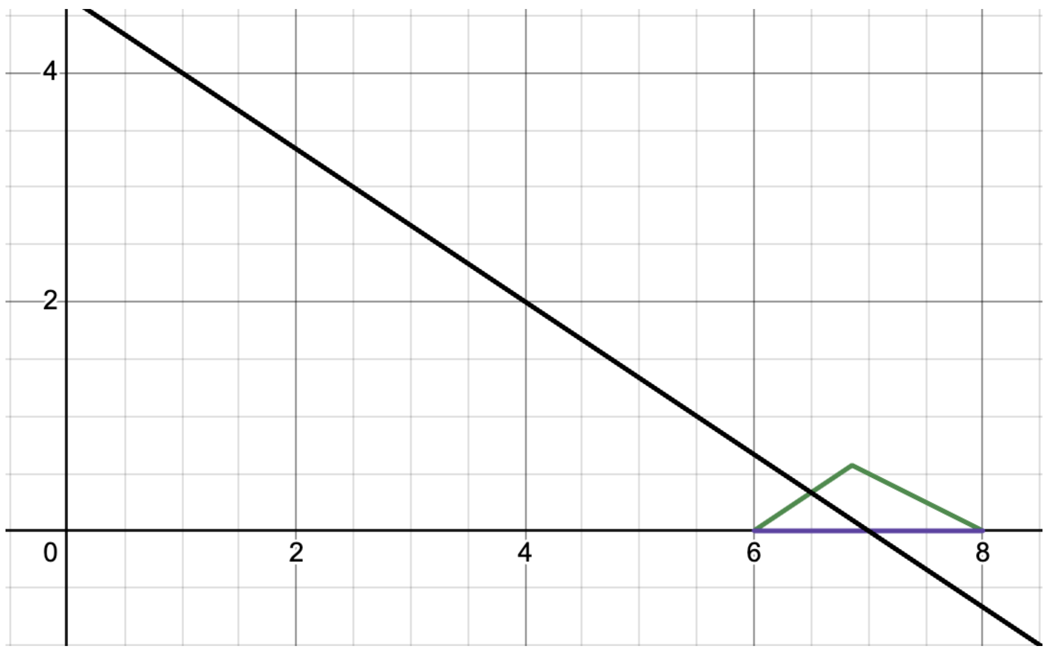
Задание 1

Данные

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 -> min, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 24, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

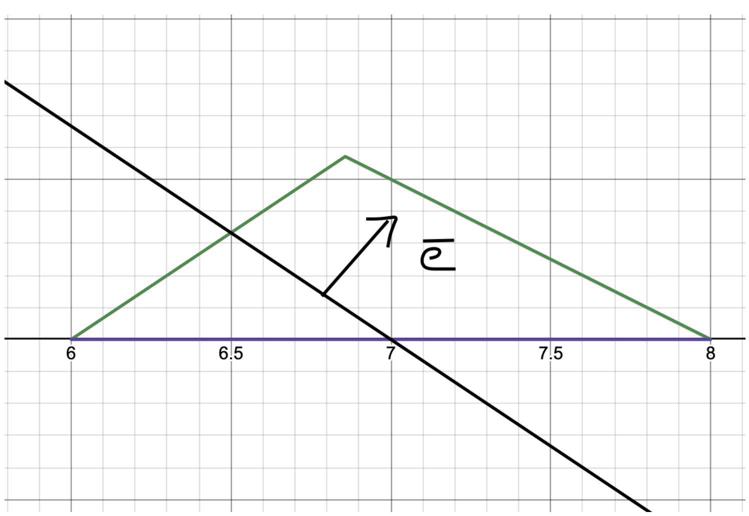
Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Изобразим на плоскости допустимое множество X данной задачи (треугольник) и одну из линий уровня целевой функции (чёрный цвет, где функция задана: $-2x_1 - 3x_2 = -14$).

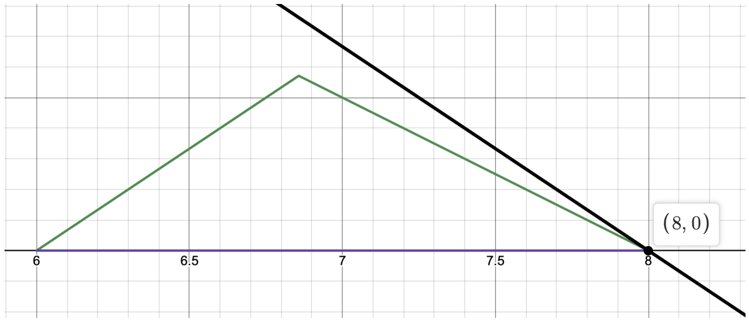


Антиградиент

$$-\nabla f(x) = (2, 3) = \bar{e}$$



указывает направление убывания функции. Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль напрвления находим её крайнее положение.



В этом положении прямая проходит через вершину с координатами (8, 0). Поэтому целевая функция f(x) принимает единственное значение в точке x = (8, 0).

$$f^* = -2 \cdot 8 - 3 \cdot 0 = -16$$

Задание 2

Даны матрица A и векторы c и b. Решить каноническую задачу линейного программирования

$$f(x) = cx -> max$$

при ограничениях

$$Ax = b,\ x \geq 0$$

с помощью симплекс-метода.

$$c = (0, 1, -6, 1, -3),\ b = (9, 14, 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Перепишем в удобный вид

$$f(x) = x_2 - 6x_3 + x_4 - 3x_5$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ -x_1 - x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0,\ x_i = 1, ..., 5 \end{cases}$$

Ищем начальное базисное решение: Столбец 2 является частью единичной матрицы. Переменная пусть x2 входит в начальный базис.

Таблица 1: Начальная симплекс-таблица

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	6	1	1	2	1	9
?	-1	0	-3	7	8	14
?	1	0	2	1	1	3

В качестве ещё одной базисной переменной берём x1.

Таблица 2: Добавление в базис x1

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	6	1	1	2	1	9
x_1	-1	0	-3	7	8	14
?	1	0	2	1	1	3

Преобразование: Делим строку 2 на -1. Из строк 1, 3 вычитаем строку 2, умноженную на соответствующий элемент в столбце 1.

Таблица 3: Преобразование для x1

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	-17	44	49	93
x_1	1	0	3	-7	-8	-14
x_3	0	0	-1	8	9	17

В качестве ещё одной базисной переменной берём x3.

Таблица 4: Добавление в базис x3

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	-17	44	49	93
x_1	1	0	3	-7	-8	-14
x_3	0	0	-1	8	9	17

Преобразование: Делим строку 3 на -1. Из строк 1, 2 вычитаем строку 3, умноженную на соответствующий элемент в столбце 3.

Таблица 5: Преобразование для x3

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	0	-92	-104	-196
x_1	1	0	0	17	19	37
x_3	0	0	1	-8	-9	-17

В столбце b присутствуют отрицательные значения. Максимальное по модулю $|b|_{max} = 196$ находится в строке 1. Максимальный по модулю элемент в 1 строке -104 находится в столбце 5. Тогда в качестве базисной переменной x2 берём x5.

Преобразование: Делим строку 1 на -104. Из строк 2, 3 вычитаем строку 1, умноженную на соответствующий элемент в столбце 5.

Таблица 6: Преобразование для x5

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_5	0	-$\frac{1}{104}$	0	$\frac{23}{26}$	1	$\frac{49}{26}$
x_1	1	$\frac{19}{104}$	0	$\frac{5}{26}$	0	$\frac{31}{26}$
x_3	0	-$\frac{9}{104}$	1	-$\frac{1}{26}$	0	-$\frac{1}{26}$

В столбце b присутствуют отрицательные значения. Максимальное по модулю $|b|_{max} = |-\frac{1}{26}|$ находится в строке 3. Максимальный по модулю элемент в 3 строке $-\frac{9}{104}$ находится в столбце 2. Выберем в качестве базисной переменной x3 - x2.

Преобразование: Делим строку 3 на $-\frac{9}{104}$. Из строк 1, 2 вычитаем строку 3, умноженную на соответствующий элемент в столбце 2.

Таблица 7: Преобразование для x2

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_5	0	0	-$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	1	$\frac{17}{9}$
x_1	1	0	$\frac{19}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{10}{9}$
x_2	0	1	-$\frac{104}{9}$	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$

Восстановим функцию:

$$f(x) = x_2 - 6x_3 + x_4 - 3x_5$$

$$f(x) = (\frac{104}{9}x_3 - \frac{4}{9}x_4 + \frac{4}{9}) - 6x_3 + x_4 - 3 \cdot (\frac{1}{9}x_3 - \frac{8}{9}x_4 + \frac{17}{9}) = \frac{47}{9}x_3 + \frac{29}{9}x_4 - \frac{47}{9}$$

Симплекс таблица:

Таблица 8: Расчёт строки f

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_5	0	0	-$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	1	$\frac{17}{9}$
x_1	1	0	$\frac{19}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{10}{9}$
x_2	0	1	-$\frac{104}{9}$	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
f	-	-	$\frac{47}{9}$	$\frac{29}{9}$	-	$-\frac{47}{9}$

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 \quad => \quad \text{критерий оптимальности не выполнен}$$

Продолжим поиск. Берём максимально положительный столбец с $f = \frac{47}{9}$.

$$min\left(-\frac{\frac{17}{9}}{-\frac{1}{9}}, -\frac{\frac{10}{9}}{\frac{19}{9}}, -\frac{\frac{4}{9}}{-\frac{104}{9}}\right) = (17, -\frac{10}{19}, \frac{1}{26}) = -\frac{10}{19}$$

$$x_1 = \frac{19}{9}x_3 + \frac{1}{9}x_4 + \frac{10}{9}$$

В базис идёт x3 вместо x1.

$$x_3 = \frac{9}{19}x_1 - \frac{1}{19}x_4 - \frac{10}{19}$$

$$x_5 = -\frac{1}{9} \cdot (\frac{9}{19}x_1 - \frac{1}{19}x_4 - \frac{10}{19}) + \frac{8}{9}x_4 + \frac{17}{9} = -\frac{1}{19}x_1 + \frac{17}{19}x_4 + \frac{37}{19}$$

$$x_2 = -\frac{104}{9} \cdot (\frac{9}{19}x_1 - \frac{1}{19}x_4 - \frac{10}{19}) + \frac{4}{9}x_4 + \frac{4}{9} = -\frac{109}{19}x_1 + \frac{20}{19}x_4 + \frac{124}{19}$$

Подсчитаем функцию:

$$f(x) = (-\frac{109}{19}x_1 + \frac{20}{19}x_4 + \frac{124}{19}) - 6 \cdot (\frac{9}{19}x_1 - \frac{1}{19}x_4 - \frac{10}{19}) + x_4 - 3 \cdot (-\frac{1}{19}x_1 + \frac{17}{19}x_4 + \frac{37}{19}) =$$

$$= -\frac{160}{19}x_1 - \frac{6}{19}x_4 + \frac{73}{19}$$

Таблица 9: Замена x1 на x3

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_5	$-\frac{1}{19}$	0	0	$\frac{17}{19}$	1	$\frac{37}{19}$
x_3	$\frac{9}{19}$	0	1	$-\frac{1}{19}$	0	$-\frac{10}{19}$
x_2	$-\frac{109}{19}$	1	0	$\frac{20}{19}$	0	$\frac{124}{19}$
f	$-\frac{160}{19}$	-	-	$-\frac{6}{19}$	-	$\frac{73}{19}$

Критерий оптимальности выполнен. Ответ:

$$x_2 = \frac{124}{19}$$

$$x_3 = -\frac{10}{19}$$

$$x_5 = \frac{37}{19}$$

$$f_{max} = \frac{73}{19}$$

Задание 3

Данные:

$$C = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$$

$$b = (-3, -1, -5)$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Прямая задача:

$$max(CX|AX = b^T,\ x \geq 0)$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_5 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 -> \ max$$

Построим двойственную задачу:

$$min(b\lambda|A^T\lambda \geq c^T,\ \lambda \geq 0)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Двойственная задача имеет вид:

$$g(\lambda) = -3\lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3 -> \ min$$

$$\begin{cases}-4\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3 \geq -\frac{1}{3}\\ 2\lambda_1-4\lambda_2-2\lambda_3 \geq -\frac{1}{2}\\ 2\lambda_2 \geq 0\\ 2\lambda_3 \geq 0\\ 2\lambda_1 \geq 0\end{cases} \quad -> \quad \begin{cases}-4\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3 \geq -\frac{1}{3}\\ 2\lambda_1-4\lambda_2-2\lambda_3 \geq -\frac{1}{2}\\ \lambda_{1,\ldots,3} \geq 0\end{cases}$$

$$min(-3\lambda_1-\lambda_2-5\lambda_3) = -max(3\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3)$$

Приведём к каноническому виду, введя дополнительные перменные $\lambda_4,\ \lambda_5$:

$$\begin{cases}-4\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3-\lambda_4 = -\frac{1}{3}\\ 2\lambda_1-4\lambda_2-2\lambda_3-\lambda_5 = -\frac{1}{2}\\ \lambda_{1,\ldots,3} \geq 0\end{cases} \quad -> \quad \begin{cases}4\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4 = \frac{1}{3}\\ -2\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_5 = \frac{1}{2}\\ \lambda_{1,\ldots,3} \geq 0\end{cases}$$

$$\lambda_4 = -4\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3+\frac{1}{3}$$

$$\lambda_5 = 2\lambda_1-4\lambda_2-2\lambda_3+\frac{1}{2}$$

$$g'(\lambda) = 3\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3$$

Таблица 10: Построение начальной симплекс таблицы

	λ_1	λ_2	λ_3	β
λ_4	-4	2	-2	$\frac{1}{3}$
λ_5	2	-4	-2	$\frac{1}{2}$
g'	3	1	5	0

Критерий оптимальности не выполнен

$$min(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$$

λ_3 попадает в базисные, а λ_5 попадает в свободные перменные.

$$\lambda_5 = 2\lambda_1-4\lambda_2-2\lambda_3+\frac{1}{2}$$

$$\lambda_3 = \lambda_1-2\lambda_2-\frac{1}{2}\lambda_5+\frac{1}{4}$$

$$\lambda_4 = -4\lambda_1+2\lambda_2-2\cdot(\lambda_1-2\lambda_2-\frac{1}{2}\lambda_5+\frac{1}{4})+\frac{1}{2} = -6\lambda_1+6\lambda_2+\lambda_5$$

$$g'(\lambda) = 3\lambda_1+\lambda_2+5\cdot(\lambda_1-2\lambda_2-\frac{1}{2}\lambda_5+\frac{1}{4}) = 8\lambda_1-9\lambda_2-\frac{5}{2}\lambda_5+\frac{5}{4}$$

Таблица 11: Симплекс таблица после смены базиса с λ_3

	λ_1	λ_2	λ_5	β
λ_4	-6	6	1	0
λ_3	1	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
g'	8	-9	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$

Критерий оптимальности не выполнен

$$min(0, -\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$$

λ_1 попадает в базисные, а λ_3 попадает в свободные перменные.

$$\lambda_3 = \lambda_1 - 2\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_5 + \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1 = 2\lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_5 - \frac{1}{4}$$

$$\lambda_4 = -6 \cdot (2\lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_5 - \frac{1}{4}) + 6\lambda_2 + \lambda_5 = -6\lambda_2 - 6\lambda_3 - 2\lambda_5 + \frac{3}{2}$$

$$g'(\lambda) = 3 \cdot (2\lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_5 - \frac{1}{4}) + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 7\lambda_2 + 8\lambda_3 + \frac{3}{2}\lambda_5 - \frac{3}{4}$$

Таблица 12: Симплекс таблица после смены базиса с λ_1

	λ_2	λ_3	λ_5	β
λ_4	-6	-6	-2	$\frac{3}{2}$
λ_1	2	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
g'	7	8	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$

Критерий оптимальности не выполнен

$$min(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$$

λ_2 попадает в базисные, а λ_4 попадает в свободные перменные.

$$\lambda_4 = -6\lambda_2 - 6\lambda_3 - 2\lambda_5 + \frac{3}{2}$$

$$\lambda_2 = -\lambda_3 - \frac{1}{6}\lambda_4 - \frac{1}{3}\lambda_5 + \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1 = 2(-\lambda_3 - \frac{1}{6}\lambda_4 - \frac{1}{3}\lambda_5 + \frac{1}{4}) + \lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_5 - \frac{1}{4} = -\lambda_3 - \frac{1}{3}\lambda_4 - \frac{1}{6}\lambda_5 + \frac{1}{4}$$

$$g'(\lambda) = 7 \cdot (-\lambda_3 - \frac{1}{6}\lambda_4 - \frac{1}{3}\lambda_5 + \frac{1}{4}) + 8\lambda_3 + \frac{3}{2}\lambda_5 - \frac{3}{4} = \lambda_3 - \frac{7}{6}\lambda_4 - \frac{5}{6}\lambda_5 + 1$$

Таблица 13: Симплекс таблица после смены базиса с λ_2

	λ_3	λ_4	λ_5	β
λ_2	-1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
λ_1	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
g'	1	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{5}{6}$	1

Критерий оптимальности не выполнен

$$min(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$$

λ_3 попадает в базисные, а λ_1 попадает в свободные перменные.

$$\lambda_1 = -\lambda_3 - \frac{1}{3}\lambda_4 - \frac{1}{6}\lambda_5 + \frac{1}{4}$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_4 - \frac{1}{6}\lambda_5 + \frac{1}{4}$$

$$\lambda_2 = -(-\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_4 - \frac{1}{6}\lambda_5 + \frac{1}{4}) - \frac{1}{6}\lambda_4 - \frac{1}{3}\lambda_5 + \frac{1}{4} = \lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_4 - \frac{1}{6}\lambda_5$$

$$g'(\lambda) = (-\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_4 - \frac{1}{6}\lambda_5 + \frac{1}{4}) - \frac{7}{6}\lambda_4 - \frac{5}{6}\lambda_5 + 1 = -\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_4 - \lambda_5 + \frac{5}{4}$$

Таблица 14: Симплекс таблица после смены базиса с λ_3

	λ_1	λ_4	λ_5	β
λ_2	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0
λ_3	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
g'	-1	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{5}{4}$

Критерий выполнен.
Ответ:

$$\lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = \frac{1}{4}; \quad g(\lambda) = \frac{5}{4}$$