Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по лабораторной работе №3

По дисциплине «Методы оптимизации» (4 семестр)

Студент:
Дениченко Александр P3212
Практик:
Селина Елена Георгиевна

Санкт-Петербург
2024 г.

Задание

Найти экстремум функции функции на отрезке методом квадратичной апроксимации. Три итерации метода выполнить вручную + написать программу на одном из языков программирования.

$$f(x) = \frac{1}{7}x^7 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x; \quad [a,\ b] = [1,\ 1.5]; \quad \varepsilon = 0.0001$$

1 Выполнение расчётов

Зададим начальную точку:

$$x_1 = 1$$

и величину шага по оси ох $\Delta x = 0.25$. Вычислим вторую точку:

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 1.25$$

Вычислим значение функции в этих точках:

$$f(x_1) = -1.3571; \quad f(x_2) = -1.7407$$

Сравним значения функции в данных точках, если $f(x_1) > f(x_2) \ => \ x_3 = x_1 + 2\Delta x$, иначе $x_3 = x_1 - \Delta x$:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Положим, что $x_3 = x_1 + 2\Delta x$:

$$x_3 = 1 + 2 \cdot 0.25 = 1.5$$

Расчитаем значение функции в этой точке:

$$f(x_3) = -1.3092$$

Найдём минимум среди значений функций:

$$F_{min} = min\{f_1, f_2, f_3\},\ x_{min} = x_i$$

$$F_{min} = f_2 = -1.7407,\ x_{min} = x_2 = 1.25$$

Вычислим точку минимума $\overline{x}$ квадратичного интерполяционного полинома:

$$\overline{x} = \frac{1}{2}\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3}$$

$$\overline{x} = 1.24263$$

$$f(\overline{x}) = -1.73577$$

Проверим выполнение условий окончания расчёта:

$$\left|\frac{F_{min} - f(\overline{x})}{f(\overline{x})}\right| < \varepsilon,\ \left|\frac{x_{min} - \overline{x}}{\overline{x}}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-1.7407 + 1.73577}{-1.7357}\right| > 0.0001,\ \left|\frac{1.25 - 1.24263}{1.24263}\right| > 0.0001$$

Оба условия не выполняются, поэтому проверим принадлежность $\overline{x}$ к интервалу $[x_1,\ x_2]$ и если он принадлежит этому интервалу, то выберем наименьшую точку из $x_{min}; \ \ \overline{x}$, так же две точки по обе стороны от неё и обозначим эти точки в обычном порядке, перейдём к подсчёту минимального аргумента и функции. Иначе если $\overline{x}$ не принадлежит к интервалу, то положим точку $x_1 = \overline{x}$ и перейдём к вычислению x_2.
У нас $\overline{x}$ принадлежит интервалу, тогда наименьшая точка будет $\overline{x} = 1.24263$
Тогда выберем окаймляющие точки и подсчитаем в них функции:

$$x_1 = 1;\ f(x_1) = -1.3571$$

$$x_2 = 1.24263;\ f(x_2) = -1.73577$$

$$x_3 = 1.5;\ f(x_3) = -1.3092$$

Минимальная функция и аргумент очевидны, поэтому подсчитаем нового кандидата на локальный минимум:

$$\overline{x} = 1.24254$$

$$f(\overline{x}) = -1.73571$$

Проверим условия:

$$\left|\frac{-1.73577 + 1.73571}{-1.73571}\right| < 0.0001,\ \left|\frac{1.24263 - 1.24254}{1.24254}\right| < 0.0001$$

Условия выполнились, поэтому принимаем экстремум в точке:

$$(1.24254,\ -1.73571)$$