Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по расчетно-графической работе №3

По дисциплине «Линейная геометрия» (второй семестр)

Группа:
МАТБАЗ 1.5

Студенты:
Андриянова Софья
Беляев Михаил
Билошицкий Михаил
Дениченко Александр
Разинкин Александр

Лектор:
Правдин Константин Владимирович

Практик:
Правдин Константин Владимирович

Санкт-Петербург
2023 г.

1 Линейный оператор и спектральный анализ

A)

Задание: Дано пространство геометрических векторов $\mathbb{R}^3$, его подпространства L_1 и L_2 и линейный оператор $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. $\mathcal{A}$ – оператор проектирования пространства $\mathbb{R}^3$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, где L_1 определено уравнением x $= 0$, L_2 – уравнениями $2x = 2y = -z$

Решение:

1) Изобразим пространства L_1, L_2:

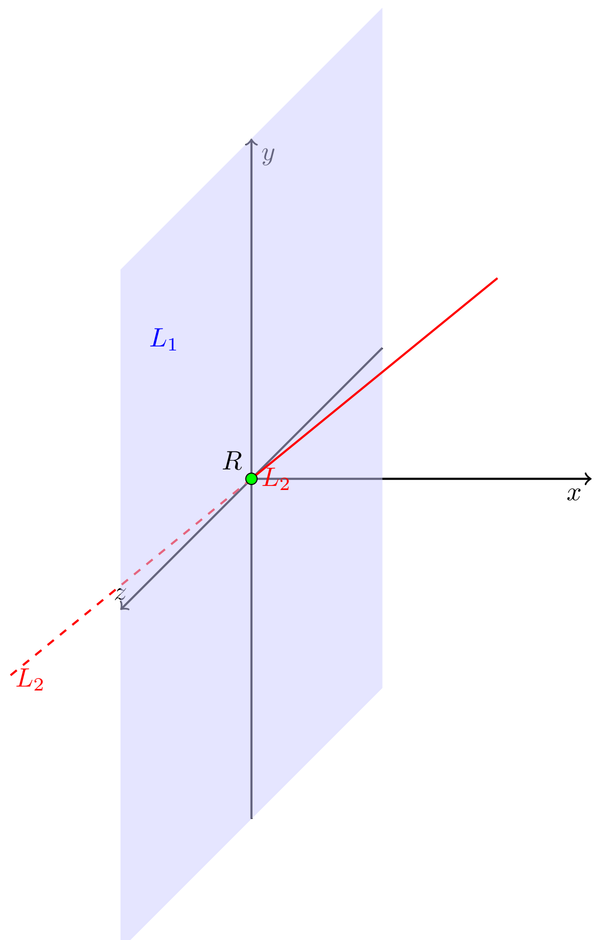

Рис. 1: Пространства

2) Методами векторной алгебры составим формулу для линейного оператора:
Покажем графически:

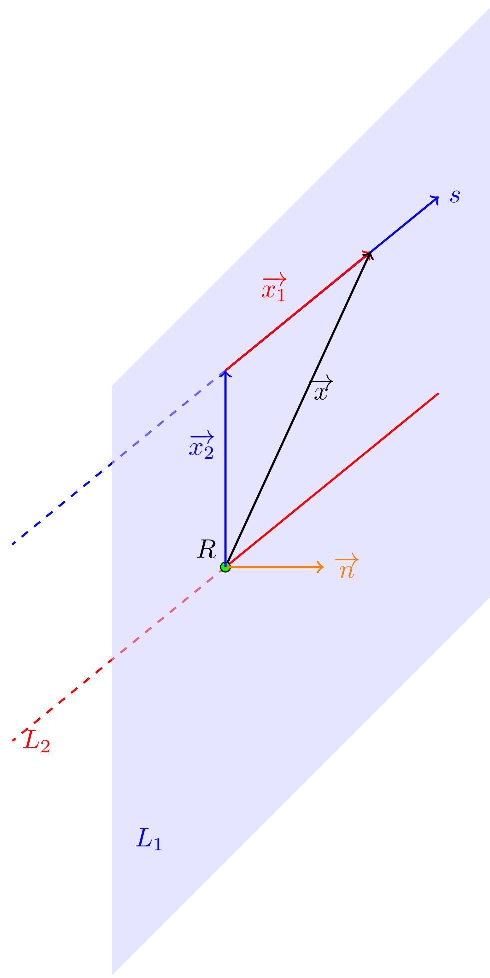

Рис. 2: Вспомогательные построения

Получим формулу для линейного оператора.

$$\overline{x} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

$$\overline{x_2} = \overline{x} - \overline{x_1} = \overline{x} - \frac{< \overline{x}, \overline{s} >}{||\overline{s}||^2} \cdot \overline{s}$$

3) Составим матрицу оператора в базисе $\{i, j, k\}$ в $\mathbb{R}^3$

Пусть $\overline{s}$ имеет координаты $(1; 1; -2)^T$, исходя из данного по условию уравнения $2x = 2y = -z$. Возьмём точку $A(1; 0; 0)$ и скажем, что новый вектор проходит через эту точку

При помощи канонического уравнения прямой мы можем получить следующее:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{-2},\ x - 1 = y = \frac{z}{-2},\ -2x + 2 = -2y = z$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -2x + 2 = -2y \\ -2y = z \\ -2x + 2 = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Мы получили действие оператором на базисный вектор i.

$$\mathcal{A}i = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathcal{A}j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Диагонализуем полученную матрицу.

$$det(A - \lambda I)$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

$\lambda_1 = 0$(кр 1):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0| & 1 \\ 0 & 1| & -2 \end{pmatrix}, \ x_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$(кр 2):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0| & 0 \end{pmatrix}, \ x_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итоговая диагонализованная матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Базис в котором матрица оператора имеет диагонаольный вид:

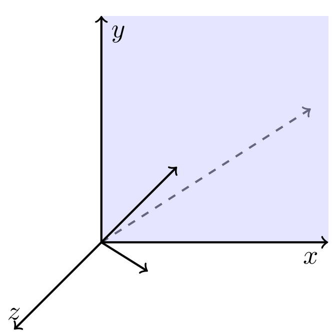

Рис. 3: Базис

Б)

Задание: Дано множество функций L и отображение $\mathcal{A} : L \to L$. L - множество функций вида $y = a\ cos2t + b\ sin2t + c\ tcos2t + d\ tsin2t$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{D}^2 + 4\mathcal{I}$, $\mathcal{D}$- дифференцирование, т.е. $\mathcal{D}(y(t)) = \frac{dy}{dt}$.

Решение:

1) Проверим, что множество функций данное по условию является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$

Давайте проверим каждую из аксиом для данного множества функций:

1. Закон сложения:

Закон коммутативности: Проверим $f(t) + g(t) = g(t) + f(t)$:

$$f(t) + g(t) = (a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t)) + (a'\cos(2t) + b'\sin(2t) + c't\cos(2t) + d't\sin(2t)) =$$

$$= (a + a')\cos(2t) + (b + b')\sin(2t) + (c + c')t\cos(2t) + (d + d')t\sin(2t)$$

Проверка показывает, что $f(t) + g(t) = g(t) + f(t)$, что соответствует закону коммутативности.

Закон ассоциативности: Проверим $(f(t) + g(t)) + h(t) = f(t) + (g(t) + h(t))$:

$(f(t)+g(t))+h(t) = ((a\cos(2t)+b\sin(2t)+ct\cos(2t)+dt\sin(2t))+(a'\cos(2t)+b'\sin(2t)+c't\cos(2t)+d't\sin(2t)))+(a''\cos(2t)+$

$+b''\sin(2t) + c''t\cos(2t) + d''t\sin(2t)) = (a + a' + a'')\cos(2t) + (b + b' + b'')\sin(2t) + (c + c' + c'')t\cos(2t) + (d + d' + d'')t\sin(2t)$

и

$f(t)+(g(t)+h(t)) = (a\cos(2t)+b\sin(2t)+ct\cos(2t)+dt\sin(2t))+((a'\cos(2t)+b'\sin(2t)+c't\cos(2t)+d't\sin(2t))+(a''\cos(2t)+b''\sin(2t)+$

$$+c''t\cos(2t) + d''t\sin(2t))) = (a + a' + a'')\cos(2t) + (b + b' + b'')\sin(2t) + (c + c' + c'')t\cos(2t) + (d + d' + d'')t\sin(2t)$$

Проверка показывает, что $(f(t) + g(t)) + h(t) = f(t) + (g(t) + h(t))$, что соответствует закону ассоциативности.

Существование нулевого элемента: Найдем значения коэффициентов a, b, c, d такие, чтобы функция $0(t) = 0$ для любого t. Это означает, что все коэффициенты должны быть равны нулю. Если мы положим $a = b = c = d = 0$, то получим $y = 0$ для всех t, что соответствует нулевой функции.

Существование противоположного элемента: Для каждого коэффициента a, b, c, d найдем противоположные значения, так чтобы сумма функций равнялась нулевой функции. Например, если у нас есть функция $y = a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t)$, то противоположная функция будет иметь коэффициенты $-a, -b, -c, -d$ и будет выглядеть как $-a\cos(2t) - b\sin(2t) - ct\cos(2t) - dt\sin(2t)$.

2. Закон умножения на скаляр:

- Закон ассоциативности: $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f(t) \in \mathcal{F}$

$$\alpha(\beta f(t)) = (\alpha\beta)f(t)$$

- Закон дистрибутивности по скаляру: $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f(t), g(t) \in \mathcal{F}$

$$(\alpha + \beta)f(t) = \alpha f(t) + \beta f(t)$$

Закон ассоциативности:
Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t)$.
Тогда $\alpha(\beta f(t))$ будет равно:

$$\alpha(\beta f(t)) = \alpha\left(\beta(a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t))\right)$$

$$= (\alpha\beta)(a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t))$$

$$= (\alpha\beta)f(t)$$

Таким образом, закон ассоциативности выполняется.
Закон дистрибутивности по скаляру:
Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f(t), g(t) \in \mathcal{F}$, где $f(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t)$ и $g(t) = p\cos(2t) + q\sin(2t) + rt\cos(2t) + st\sin(2t)$.
Тогда $(\alpha + \beta)f(t)$ будет равно:

$$(\alpha + \beta)f(t) = (\alpha + \beta)(a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t))$$

$$= \alpha(a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t)) + \beta(a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t))$$

$$= \alpha f(t) + \beta f(t)$$

Таким образом, мы проверили, что Закон умножения на скаляр выполняется для множества функций $y = a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t)$, и можем сделать вывод, что данное множество является линейным пространством над полем вещественных чисел.

2) Выберем базис пространства.

$$\{cos(2t); sin(2t); t \cdot cos(2t); t \cdot sin(2t)\}$$

Получим матрицу оператора $\mathcal{A}$. Для начала исследуем действие оператора $\mathcal{D}$ на наш базис.

$$(cos(2t))' = -2sin(2t)$$
$$(sin(2t))' = 2cos(2t)$$
$$(tcos(2t))' = cos(2t) - 2tsin(2t)$$
$$(tsin(2t))' = sin(2t) + 2tcos(2t)$$

Матрица $\mathcal{D}$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathcal{A}$ тогда будет выглядеть:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Проверим линейность оператора.

Для проверки линейности оператора, представленного матрицей, мы должны проверить два условия:

1. Сохранение сложения: Для любых функций $f(t)$ и $g(t)$ должно выполняться $T(f(t) + g(t)) = T(f(t)) + T(g(t))$.

2. Сохранение умножения на скаляр: Для любой функции $f(t)$ и любого скаляра α должно выполняться $T(\alpha f(t)) = \alpha T(f(t))$.

Проверим оба этих условия для данного оператора с матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Сохранение сложения: Пусть $f(t)$ и $g(t)$ являются произвольными функциями. Тогда

$$\begin{aligned}
T(f(t)+g(t)) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+a_1)\cos(2t) + (b+b_1)\sin(2t) + (c+c_1)t\cos(2t) + (d+d_1)t\sin(2t) \\ (e+e_1)\cos(2t) + (f+f_1)\sin(2t) + (g+g_1)t\cos(2t) + (h+h_1)t\sin(2t) \\ (j+j_1)\cos(2t) + (k+k_1)\sin(2t) + (l+l_1)t\cos(2t) + (m+m_1)t\sin(2t) \\ (n+n_1)\cos(2t) + (p+p_1)\sin(2t) + (q+q_1)t\cos(2t) + (r+r_1)t\sin(2t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4(n+n_1)\cos(2t) + 4(p+p_1)\sin(2t) + 4(q+q_1)t\cos(2t) + 4(r+r_1)t\sin(2t) \\ -4(j+j_1)\cos(2t) - 4(k+k_1)\sin(2t) - 4(l+l_1)t\cos(2t) - 4(m+m_1)t\sin(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4(n)\cos(2t) + 4(p)\sin(2t) + 4(q)t\cos(2t) + 4(r)t\sin(2t) \\ -4(j)\cos(2t) - 4(k)\sin(2t) - 4(l)t\cos(2t) - 4(m)t\sin(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} 4(n_1)\cos(2t) + 4(p_1)\sin(2t) + 4(q_1)t\cos(2t) + 4(r_1)t\sin(2t) \\ -4(j_1)\cos(2t) - 4(k_1)\sin(2t) - 4(l_1)t\cos(2t) - 4(m_1)t\sin(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= T(f(t)) + T(g(t))
\end{aligned}$$

Таким образом, условие сохранения сложения выполняется.

2. Сохранение умножения на скаляр: Пусть $f(t)$ является произвольной функцией, и α является произвольным скаляром. Тогда

$$\begin{aligned}
T(\alpha f(t)) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(a\cos(2t) + b\sin(2t) + ct\cos(2t) + dt\sin(2t)) \\ \alpha(e\cos(2t) + f\sin(2t) + gt\cos(2t) + ht\sin(2t)) \\ \alpha(j\cos(2t) + k\sin(2t) + lt\cos(2t) + mt\sin(2t)) \\ \alpha(n\cos(2t) + p\sin(2t) + qt\cos(2t) + rt\sin(2t)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha 4(n\cos(2t) + p\sin(2t) + qt\cos(2t) + rt\sin(2t)) \\ -\alpha 4(j\cos(2t) + k\sin(2t) + lt\cos(2t) + mt\sin(2t)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} 4(n\cos(2t) + p\sin(2t) + qt\cos(2t) + rt\sin(2t)) \\ -4(j\cos(2t) + k\sin(2t) + lt\cos(2t) + mt\sin(2t)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \alpha T(f(t))
\end{aligned}$$

Таким образом, условие сохранения умножения на скаляр также выполняется.

Исходя из результатов проверки обоих условий, мы можем заключить, что данный оператор является линейным оператором.

4) Найдём размерности ядра и образа оператора.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$dim\ Ker(L) = 2;\ dim\ Im(L) = dim(L) - dim\ Ker(L) = 4 - 2 = 2$$

5) Диагонализуем матрицу оператора.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -\lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^4$$

$\lambda = 0$(кр. $= 4$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$X_1 = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нам нужно присоединить 2 вектора, так как кратности не совпадают.
Присоединим первый вектор к составляющей X_1 с коэфицентом C_1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$X_1^{(1)} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + C_2^{(1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нам нужно присоединить второй вектор, так как кратности попрежнему не совпадают.
Присоединим второй вектор к составляющей X_1 с коэфицентом C_2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4| & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0| & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1| & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0| & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$X_1^{(2)} = C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2^{(3)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2^{(4)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Кратности совпали, теперь можно записать диагонализованную матрицу в Жордановом базисе:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) Выберем произвольно и нетривиально функцию. Найдём её образ умножением на матрицу оператора.

$$\vartheta(x) = 1 \cdot \cos(2t) + 2 \cdot \sin(2t) + 3 \cdot t\cos(2t) + 4 \cdot t\sin(2t)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Действием оператора получили следующую функцию:

$$\psi(x) = 16 \cdot \cos(2t) - 12 \cdot \sin(2t)$$

Найдём непосредственными вычислениями образ:

$$\mathcal{D}(\vartheta) : \vartheta'(x) = -6\,t\,\sin(2\,t) + 2\,\sin(2\,t) + 8\,t\,\cos(2\,t) + 7\,\cos(2\,t)$$

$$\mathcal{D}(\vartheta') : \vartheta''(x) = -16\,t\,\sin(2\,t) - 20\,\sin(2\,t) - 12\,t\,\cos(2\,t) + 12\,\cos(2\,t)$$

$$4\mathcal{I} : 4 \cdot \vartheta(x) = 4 \cdot \cos(2t) + 8 \cdot \sin(2t) + 12 \cdot t\cos(2t) + 16 \cdot t\sin(2t)$$

$$\zeta(x) = \vartheta''(x) - 4 \cdot \vartheta(x) = -16\,t\,\sin(2\,t) - 20\,\sin(2\,t) - 12\,t\,\cos(2\,t) + 12\,\cos(2\,t) + 4 \cdot \cos(2t) + 8 \cdot \sin(2t) + 12 \cdot t\cos(2t) + 16 \cdot t\sin(2t) =$$

$$= 16 \cdot \cos(2t) - 12 \cdot \sin(2t) = \psi(x)$$

Вычисления сошлись, удобнее было вычислять через матрицу оператора.

2 Евклидовы пространства функций

А)

Задание: Дано пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определенных на отрезке [– 1; 1]. $P_3(t) = t^3 + 2t^2 - 2t + 1$

Решение:

1)Проверим, что система векторов $B = 1, t, t^2, t^3$ является базисом этого пространства.
Составим матрицу Грама и посчитаем её опердлитель:

$$det\left(\begin{pmatrix}\int_{-1}^{1}1dt & \int_{-1}^{1}tdt & \int_{-1}^{1}t^2dt & \int_{-1}^{1}t^3dt\\ \int_{-1}^{1}tdt & \int_{-1}^{1}t^2dt & \int_{-1}^{1}t^3dt & \int_{-1}^{1}t^4dt\\ \int_{-1}^{1}t^2dt & \int_{-1}^{1}t^3dt & \int_{-1}^{1}t^4dt & \int_{-1}^{1}t^5dt\\ \int_{-1}^{1}t^3dt & \int_{-1}^{1}t^4dt & \int_{-1}^{1}t^5dt & \int_{-1}^{1}t^6dt\end{pmatrix}\right)$$

Для вычисления определителя матрицы, можно использовать различные методы, например, метод разложения по определённой строке или столбцу, метод Гаусса и т.д. В данном случае, определитель может быть вычислен с помощью разложения по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix}\int_{-1}^{1}1dt & \int_{-1}^{1}tdt & \int_{-1}^{1}t^2dt & \int_{-1}^{1}t^3dt\\ \int_{-1}^{1}tdt & \int_{-1}^{1}t^2dt & \int_{-1}^{1}t^3dt & \int_{-1}^{1}t^4dt\\ \int_{-1}^{1}t^2dt & \int_{-1}^{1}t^3dt & \int_{-1}^{1}t^4dt & \int_{-1}^{1}t^5dt\\ \int_{-1}^{1}t^3dt & \int_{-1}^{1}t^4dt & \int_{-1}^{1}t^5dt & \int_{-1}^{1}t^6dt\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7}\end{vmatrix} = \frac{256}{23625}$$

Если определитель матрицы Грама не равен нулю, то это означает, что векторы образуют базис.

Для ортогонализации системы функций $1, t, t^2, t^3$ на отрезке $[-1, 1]$ методом Грама-Шмидта, мы последовательно вычислим ортогональные функции:

1: Первая ортогональная функция $f_1(t)$ остается равной исходной функции 1.

2: Вторая ортогональная функция $f_2(t)$ будет равна разности второй функции и проекции второй функции на первую функцию:

$$f_2(t) = t - \frac{\langle t, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle}\cdot f_1(t) = t - \frac{\int_{-1}^{1} t\cdot 1\,dt}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dt}\cdot 1 = t - \frac{0}{2} = t$$

3: Третья ортогональная функция $f_3(t)$ будет равна разности третьей функции и проекции третьей функции на первую и вторую функции:

$$f_3(t) = t^2 - \frac{\langle t^2, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle}\cdot f_1(t) - \frac{\langle t^2, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle}\cdot f_2(t) = t^2 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2\cdot 1\,dt}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dt}\cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2\cdot t\,dt}{\int_{-1}^{1} t\cdot t\,dt}\cdot t = t^2 - \frac{2}{6}$$

4: Четвертая ортогональная функция $f_4(t)$ будет равна разности четвертой функции и проекции четвертой функции на первую, вторую и третью функции:

$$f_4(t) = t^3 - \frac{\langle t^3, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle}\cdot f_1(t) - \frac{\langle t^3, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle}\cdot f_2(t) - \frac{\langle t^3, f_3\rangle}{\langle f_3, f_3\rangle}\cdot f_3(t) = t^3 - \frac{\int_{-1}^{1} t^3\cdot 1\,dt}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dt}\cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} t^3\cdot t\,dt}{\int_{-1}^{1} t\cdot t\,dt}\cdot t - \frac{\int_{-1}^{1} t^3\cdot (t^2-\frac{2}{6})\,dt}{\int_{-1}^{1}(t^2-\frac{2}{6})\cdot(t^2-\frac{2}{6})\,dt}\cdot(t^2-\frac{2}{6}) = t^3 - \frac{2}{5}t$$

Таким образом, получаем ортогональную систему функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ на отрезке $[-1, 1]$

2)Выпишем первые четыре многочлена Лежандра:
Многочлены Лежандра $P_n(x)$ ещё определяются рекурсивной формулой:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)}{n}$$

Таким образом, первые четыре многочлена Лежандра равны: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$.

3) Чтобы найти координаты многочленов в заданном базисе, нужно разложить каждый многочлен по базисным функциям и выразить их коэффициенты. В данном случае базис состоит из $1, t, t^2 - \frac{2}{6}, t^3 - \frac{2}{5}t$. Для многочлена $P_0(x) = 1$:

$$P_0(x) = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot\left(t^2 - \frac{2}{6}\right) + 0\cdot\left(t^3 - \frac{2}{5}t\right)$$

Координаты многочлена $P_0(x)$ в данном базисе равны (1, 0, 0, 0).

Для многочлена $P_1(x) = x$:

$$P_1(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot \left(t^2 - \frac{2}{6}\right) + 0 \cdot \left(t^3 - \frac{2}{5}t\right)$$

Координаты многочлена $P_1(x)$ в данном базисе равны (0, 1, 0, 0).

Для многочлена $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$:

$$P_2(x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \frac{3}{2} \cdot \left(t^2 - \frac{2}{6}\right) + 0 \cdot \left(t^3 - \frac{2}{5}t\right)$$

Координаты многочлена $P_2(x)$ в данном базисе равны (0, 0, $\frac{3}{2}$, 0).

Для многочлена $P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$:

$$P_3(x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot \left(t^2 - \frac{2}{6}\right) + \frac{5}{2} \cdot \left(t^3 - \frac{2}{5}t\right)$$

Координаты многочлена $P_3(x)$ в данном базисе равны (0, 0, 0, $\frac{5}{2}$).

Таким образом, координаты многочленов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ в базисе $1, t, t^2 - \frac{2}{6}, t^3 - \frac{2}{5}t$ соответственно равны

$$(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0),\ (0, 0, \tfrac{3}{2}, 0),\ (0, 0, 0, \tfrac{5}{2}).$$

Для проверки ортогональности системы векторов в новом базисе, мы должны вычислить их скалярные произведения и убедиться, что они равны нулю.

Пусть система векторов в новом базисе задана как $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ соответственно, где $v_0 = (1, 0, 0, 0)$, $v_1 = (0, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, \frac{3}{2}, 0)$, $v_3 = (0, 0, 0, \frac{5}{2})$.

Вычислим скалярные произведения между парами векторов:

$$\begin{aligned}
v_0 \cdot v_1 &= (1, 0, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0 \\
v_0 \cdot v_2 &= (1, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, \frac{3}{2}, 0) = 0 \\
v_0 \cdot v_3 &= (1, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, 0, \frac{5}{2}) = 0 \\
v_1 \cdot v_2 &= (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, \frac{3}{2}, 0) = 0 \\
v_1 \cdot v_3 &= (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 0, \frac{5}{2}) = 0 \\
v_2 \cdot v_3 &= (0, 0, \frac{3}{2}, 0) \cdot (0, 0, 0, \frac{5}{2}) = 0
\end{aligned}$$

Все скалярные произведения равны нулю. Это означает, что система векторов $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ ортогональна в новом базисе.

Таким образом, система многочленов $\{1, t, t^2 - \frac{2}{6}, t^3 - \frac{2}{5}t\}$ является ортогональной.

4)Для разложения многочлена $P_3(t) = t^3 + 2t^2 - 2t + 1$ по системе векторов $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, где
$v_0 = (1, 0, 0, 0)$
$v_1 = (0, 1, 0, 0)$
$v_2 = (0, 0, \frac{3}{2}, 0)$
$v_3 = (0, 0, 0, \frac{5}{2})$,
мы можем представить систему векторов в виде матрицы V и вычислить коэффициенты разложения, используя матричную алгебру.

Сначала составим матрицу V из векторов системы:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Затем вычислим обратную матрицу V^{-1}:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Теперь вычислим коэффициенты разложения путем умножения матрицы V^{-1} на вектор многочлена $P_3(t)$:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Выполняя умножение матриц, получаем:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Таким образом, разложение многочлена $P_3(t)$ по системе векторов $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ имеет вид:
$P_3(t) = 1 \cdot v_0 + 2 \cdot v_1 - \frac{4}{3} \cdot v_2 + \frac{4}{5} \cdot v_3$ или $P_3(t) = v_0 + 2v_1 - \frac{4}{3}v_2 + \frac{4}{5}v_3$

Б)

Задание: Дано пространство R функций, непрерывных (или имеющих конечный разрыв) на отрезке $[-\pi; \pi]$, со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ и длиной вектора $||f|| = \sqrt{(f, f)}$. Тригонометрические многочлены $P_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 cos(t) + b_1 sin(t) + ... + a_n cos(nt) + b_n sin(nt)$, где a_k, b_k - вещественные коэффициенты, образуют подпространство P пространства R. Требуется найти многочлен $P_n(t)$ в пространстве P, минимально отличающийся от функции $f(t)$ - вектора пространства R.

Решение:

1) Для начала проверим ортогональность системы функций $\{1, \cos(t), \sin(t), ..., \cos(nt), \sin(nt)\}$ в пространстве R с заданным скалярным произведением $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

Рассмотрим произведение двух функций $f_i(t)$ и $f_j(t)$, где $f_i(t)$ соответствует i-й функции из системы, а $f_j(t)$ соответствует j-й функции из системы:

$$(f_i, f_j) = \int_{-\pi}^{\pi} f_i(t) f_j(t) dt.$$

Проверим ортогональность для всех пар функций. Если $(f_i, f_j) = 0$, то функции $f_i(t)$ и $f_j(t)$ ортогональны.

$$\begin{aligned} (f_0, f_1) &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(t) dt = 0 \\ (f_0, f_2) &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(t) dt = 0 \\ (f_1, f_2) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \cdot \sin(t) dt = 0 \\ &\vdots \\ (f_{n-1}, f_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-1)t) \cdot \sin(nt) dt = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, все пары функций из системы ортогональны.

Теперь нормируем систему функций. Для этого найдем длину каждой функции $f_i(t)$, определенную как $||f_i|| = \sqrt{(f_i, f_i)}$:

$$||f_0|| = \sqrt{(f_0, f_0)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dt} = \sqrt{2\pi}$$

$$||f_1|| = \sqrt{(f_1, f_1)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t) dt} = \sqrt{\pi}$$

$$||f_2|| = \sqrt{(f_2, f_2)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t) dt} = \sqrt{\pi}$$

$$\vdots$$

$$||f_{n-1}|| = \sqrt{(f_{n-1}, f_{n-1})} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2((n-1)t) dt} = \sqrt{\frac{2\pi(n-1) + sin(2\pi(n-1))}{2(n-1)}} = \sqrt{\pi}$$

$$||f_n|| = \sqrt{(f_n, f_n)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) dt} = \sqrt{\frac{2\pi n - sin(2\pi n)}{2n}} = \sqrt{\pi}$$

Теперь нормируем каждую функцию, разделив ее на длину:

$$\frac{1}{||f_0||} f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{1}{||f_1||} f_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(t)$$

$$\frac{1}{||f_2||} f_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{||f_{n-1}||} f_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt)$$

$$\frac{1}{||f_n||} f_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin((n-1)t)$$

Таким образом, мы получили ортогональный и нормированный базис системы функций в пространстве R. Система функций $\{1, \cos(t), \sin(t), ..., \cos(nt), \sin(nt)\}$ является ортогональным базисом подпространства P в пространстве R со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ и нормой $||f|| = \sqrt{(f, f)}$.

2) Найдём проекции вектора $f(t) = 0,5 \cdot t$ на векторы полученного ортонормированного базиса. При нормированных векторах базиса можно упростить вычисление проекций. Проекция вектора $f(t) = 0.5 \cdot t$ на каждый из нормированных векторов базиса будет равна скалярному произведению между $f(t)$ и соответствующим вектором базиса, умноженному на базисный вектор.

$$\mathcal{P}_e^{\perp e}(x) = (x, e) \cdot e$$

Проекция вектора $f(t) = 0.5t$ на вектор $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$:

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}^{\perp \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}(0.5t) = \left(0.5t, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Выполним вычисления:

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}^{\perp \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}(0.5t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 0.5t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt$$

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}^{\perp \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}(0.5t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt$$

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}^{\perp \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}(0.5t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\mathcal{P}^{\perp \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}(0.5t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} \right)$$

$$\mathcal{P}^{\perp \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}(0.5t) = 0$$

Проекция вектора $f(t) = 0.5t$ на вектор $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt)$:

$$\mathcal{P}^{\perp \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt)}_{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt)}(0.5t) = \left(0.5t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt)$$

Выполним вычисления:

$$\mathcal{P}^{\perp \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt)}_{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt)}(0.5t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 0.5t \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt)dt = 0$$

Продолжим с вычислением проекции вектора $f(t) = 0.5t$ на вектор $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt)$:

$$\mathcal{P}^{\perp \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt)}_{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt)}(0.5t) = \left(0.5t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt)$$

Выполним вычисления:

$$\mathcal{P}^{\perp \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt)}_{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt)}(0.5t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 0.5t \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt)dt =$$

$$= \frac{(sin(\pi n) - \pi n cos(\pi n)) \cdot sin(nt)}{\pi n^2} = -\frac{(-1)^n \cdot sin(nt)}{n}$$

3) Запишем минимально отстоящий многочлен $P_n(t)$ с найденными коэффициентами (тригонометрический многочлен Фурье для данной функции).

$$P_n^{min}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^n \cdot sin(nt)}{n} \right)$$

4) Изобразим графики $f(t)$ и многочлена Фурье различных порядков n

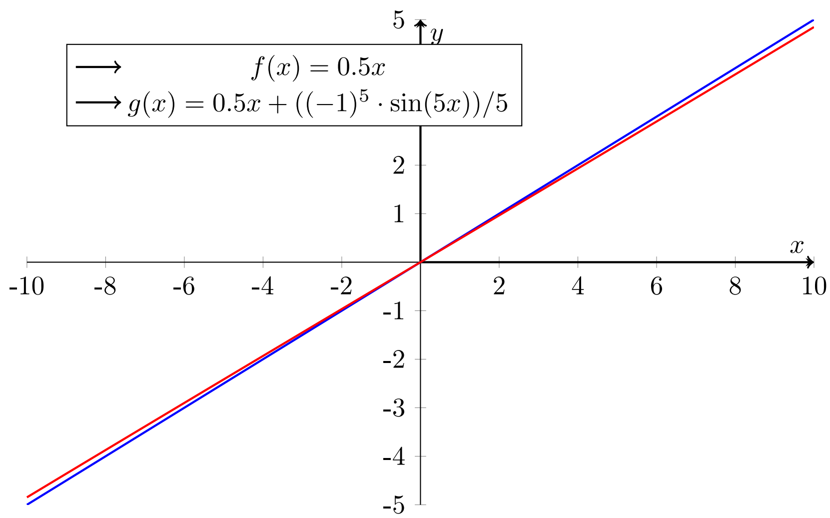

Рис. 4: n=5

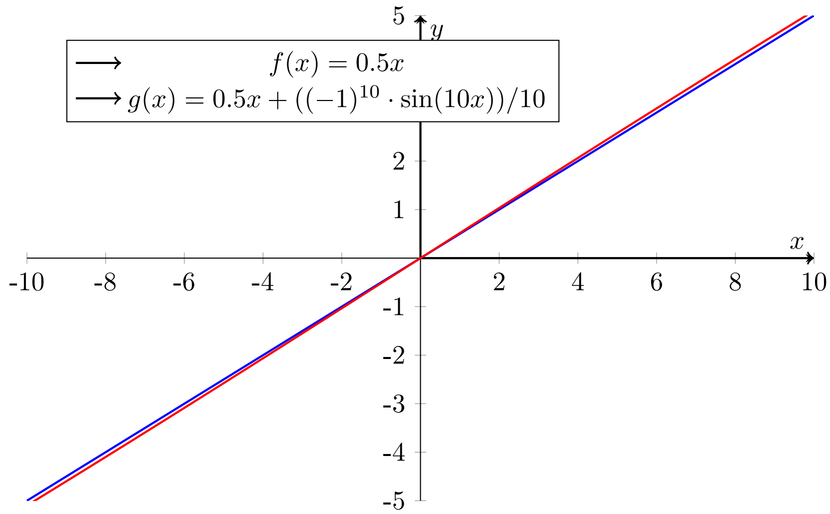

Рис. 5: n=10

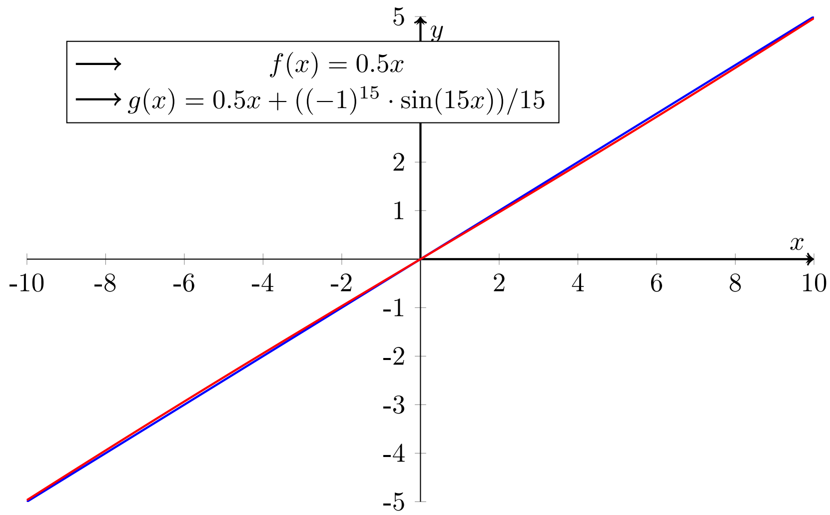

Рис. 6: n=15

5) При росте порядка многочлена Фурье мы приближаемся и исходной функции $f(x) = 0.5 \cdot x$ и при стремлении n к бесконечности многочлен совпадёт с функцией.

3 Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду

Задание: Дано уравнение поверхности 2-го порядка: $3x^2 - 2yz = 0$. Привести к каноническому виду данное уравнение.

Решение:

1) Матрица поверхности второго порядка 3x3 обычно задается следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы соответствует коэффициенту при соответствующем члене поверхности второго порядка. Общий вид уравнения поверхности второго порядка может быть записан как:

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{21}x + 2a_{31}z + 2a_{32}y + a_{00}$$

Здесь a_{00} представляет свободный член и обычно не включается в матрицу, поскольку он не соответствует элементу матрицы. Он определяет базовый уровень поверхности без учета влияния переменных. В контексте геометрической интерпретации, свободный член может соответствовать смещению поверхности относительно начала координат.

Для данного уравнения $3x^2 - 2yz = 0$ мы можем составить матрицу следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Приведём к каноническому виду уравнение при помощи метода Лагранжа.

$$3x^2 - 2yz = \begin{vmatrix} x = \frac{1}{\sqrt{3}}p_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 - p_3) \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 + p_3) \end{vmatrix} = {p_1}^2 - (p_2 - p_3)(p_2 + p_3) = {p_1}^2 - {p_2}^2 + {p_3}^2$$

Диагональная матрица в каноническом виде будет следующей:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для решения данной задачи методом ортогональных преобразований, нам потребуется выполнить следующие шаги:

1. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A. Для этого решим уравнение $\det(A - \lambda I) = 0$, где λ - собственное значение, а I - единичная матрица:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

2. Решим полученное характеристическое уравнение и найдем собственные значения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -3$.

3. Для каждого собственного значения найдем соответствующий собственный вектор, решив систему уравнений $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{v}$ - собственный вектор:

Для $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Решив эту систему, получим собственный вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 0$:

$$(A - 0I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Решив эту систему, получим собственный вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Для $\lambda_3 = -3$:

$$(A + 3I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Решив эту систему, получим собственный вектор $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Нормализуем найденные собственные векторы, чтобы получить ортонормированный базис. Для этого разделим каждый собственный вектор на его длину: $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}$, $\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|}$.

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Теперь у нас есть ортонормированные собственные векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, которые составляют ортогональную матрицу преобразования P.

$$P = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} & \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} & \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

Так как определитель матрицы, составленной из ортогонального базиса равен -1, то это означает поворот системы координат вместе с зеркальным отображением. В декартовой системе координат это является левой тройков векторов.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

В данном базисе квадратичная форма будет иметь диагональный вид.
Выразим старые координаты черещ новые по формуле:

$$X = PX'$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}$$

Получим систему замены переменных (что-то похожее???)

$$\begin{cases}x = p_1\\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 + p_3)\\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 - p_3)\end{cases}$$

Выпишем уравнения после диагонализации:

$$3p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 = 0$$

Дальнейшее приведение к каноническому виду очевидно из первого пункта путём очередной замены. Так как линейной части нет, то процесс приведения к каноническому виду закончен.
Заметим, данный результат можно было получить не нормируя базис, а просто получить матрицу A' по формуле:

$$A' = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}$$

Где A' находится очевидно после проверки полноты базиса собственного подпространства A и выглядит:

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Порядок собственный чисел по формулировке метода не задан

2) Изобразим оси исходной и приведённой систем координат.

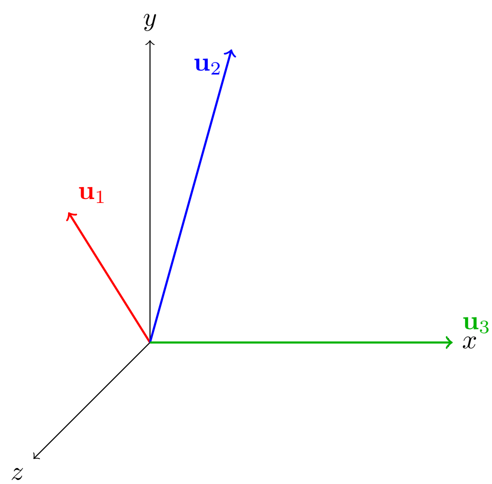

Рис. 7: Новый и старый базис

Фигура, заданная уравнением:

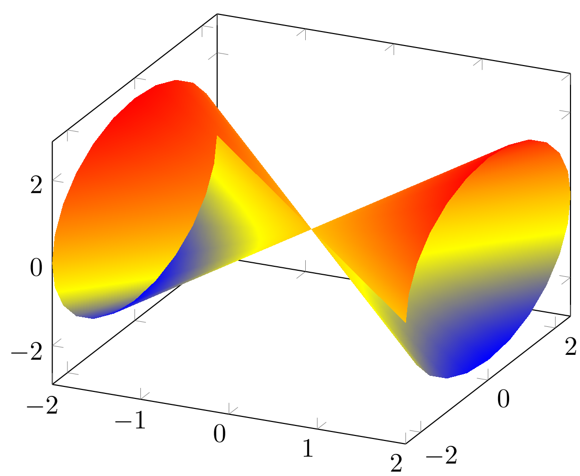

Рис. 8: Конус второго порядка