Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по лабораторной работе №3
По дисциплине «Базы данных» (второй семестр)

Студент:
Дениченко Александр Р3112
Практик:
Лисицина В.В

Санкт-Петербург
2023 г.

1 Векторная ФНП и векторное поле

$$\overline{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}_x; \mathcal{V}_y) = (\mathcal{V}_x(x; y); \mathcal{V}_y(x, y)) = \mathcal{V}_x(x; y)\overline{i} + \mathcal{V}_y(x, y)\overline{j}$$

Ψ Вектор-функцией в области D называется вектор, координатами которого являются функции, заданные в этой области

$$\overline{F}(x; y) = (P(x; y); Q(x; y)) = P(x; y)\overline{i} + Q(x; y)\overline{j} \;\; in \; \mathbb{R}^2$$

$$\overline{F}(x; y; z) = (P(x; y); Q(x; y); R(x; y)) = P(x; y)\overline{i} + Q(x; y)\overline{j} + R(x; y)\overline{k} \;\; in \; \mathbb{R}^2$$

Векторное поле в $\mathcal{D}$
График - поле направлений
Линия в каждой точке, которой векторное поле касается неё, называется векторной линией этого поля.

Example

$$\overline{F}(x; y) = (x + y; x - y);\; P(x; y) = x + y;\; Q(x; y) = x - y$$

Найдём векторные линии

$$y = y(x);\; tg\alpha = y' = \frac{Q}{P}$$

$$y' = \frac{x - y}{x + y};\;\; y^2 + 2xy - x^2 = C;\;\; C \in \mathbb{R}$$

2 Градиент скалярного поля

$$z(x; y)\; diff\; in \mathcal{D}^2$$

$$M \in \mathcal{D}:\; (\frac{\partial z}{\partial x}\;(M); \frac{\partial z}{\partial y}\;(M)) = \frac{\partial z}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\overline{j} = grad\; z\;(M)$$

$$u(x; y; z)\; diff\; in \mathcal{D}^3$$

$$M \in \mathcal{D}:\; (\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}) = grad\; u\;(M)$$

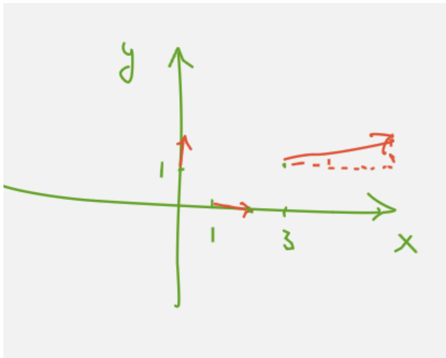
Example

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2);\; grad\; z = (x; y)$$

$$\overline{g}_1 = grad\; z(1; 0) = (1; 0)$$

$$\overline{g}_2 = grad\; z(0; 1) = (0; 1)$$

$$\overline{g}_3 = grad\; z(3; 1) = (3; 1)$$



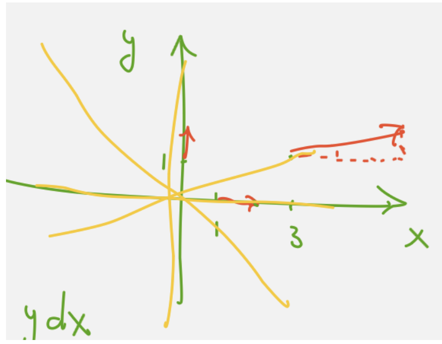
Векторные линии:

$$y' = \frac{y}{x}\;\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}\;\; \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}\;\;\; \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$ln|y| = ln|x| + C;\; C = ln|C_1|$$

$$|y| = |C_1 x|$$

$$y = C_1 x,\; C_1 \in \mathbb{R}$$



Свойства градиента:

1) Градиент скалярной функции z(x;y) каждой точке направлен перпендикулярно к линии уровня z(x;y), проходящей через эту точку.

Доказательство:

$$z = z(x;y) \quad z(x;y) = C - level\ line$$

$$k_1 = y' = -\frac{z'_x}{z'_y} - \text{угловой коэфицент касательной к линии уровня}$$

$$grad\ z(x;y) = (z'_x; z'_y)$$

$$k_2 = \frac{z'_y}{z'_x}$$

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{z'_x}{z'_y} \cdot \frac{z'_y}{z'_x} = -1$$

2)Линейность

$$grad(f+g) = grad(f) + grad(g)$$

$$grad(\alpha f) = \alpha grad(f), \alpha \cdot \in \mathbb{R}$$

3)

$$grad(f \cdot g) = f \cdot grad(g) + g \cdot grad(f)$$

4)

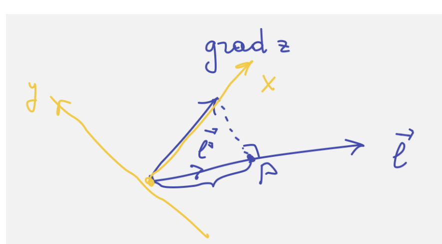
$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{проекция grad(z)}$$

Докажем

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} cos\beta = (\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}) \cdot (cos\alpha; cos\beta) = gradz \cdot \bar{l}^o = |grad\ z| \cdot |\bar{l}^o| \cdot cos\phi = |grad\ z| \cdot \phi$$

$$\phi = \angle(grad\ z; \bar{l}^o)$$

По какой траектории движется точка P при изменении направления $\bar{l}$?



P = (x;y) - точка

$$x = \frac{\partial z}{\partial l} \cdot \cos\phi$$

$$y = \frac{\partial z}{\partial l} \cdot \sin\phi$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |grad\ z| \cdot \cos\phi$$

$$\begin{cases} x = |grad\ z| \cdot \cos^2\phi \\ y = |grad\ z| \cdot \cos\phi \sin\phi \end{cases} \quad -> \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}|grad\ z| \cdot (1 + cos2\phi) \\ y = |grad\ z| \cdot \sin 2\phi \end{cases} \quad -> \quad \begin{cases} (x - \frac{|g|}{2})^2 = (\frac{1}{2}|g| \cdot cos2\phi)^2 \\ y^2 = (\frac{1}{2}|grad\ z| \cdot \sin 2\phi)^2 \end{cases}$$

$$\left(x - \frac{|g|}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{|g|^2}{4}$$

окружность с центром в $(\frac{|g|}{2}; 0)\ andR = \frac{|g|}{2}$

доказано 5)

$$\frac{\partial z}{\partial l},\ \bar{l} = grad(z),\ = maximum$$

6)

$$\frac{\partial z}{\partial l},\ \bar{l} \perp grad(z),\ = 0$$

Example

Найти наибольшую крутизну(угол наклона поверхности) подъёма поверхности

$$z = ln(x^2 + 2y^2)\ \ in\ \ M(6; 4\sqrt{2}; ln(100))$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |grad\ z| = tg\ \alpha$$

$$|grad\ z| = (\frac{2x}{x^2 + 2y^2}; \frac{4y}{x^2 + 2y^2})$$

$$grad\ z(M) = (\frac{12}{100}; \frac{16\sqrt{2}}{100})$$

$$|grad\ z(M)| \approx \frac{1}{4} = tg\alpha$$