2. Интегралы Пуассона и Френеля

В задачах физики и дифракционной оптики возникают интегралы вида:

$$\int e^{-x^2}dx, \int \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt, \int \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

которые являются специальными функциями (т.е. "неберущимися"интегралами). Однако, переход к "многомерным"интегралам позволяет вычислить по крайней мере:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx, \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt, \int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

где $\Phi(z) = \int\limits_0^z e^{-x^2}dx$ - функция ошибок, $\Phi_S(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ и $\Phi_C(z) = \int\limits_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ - интегралы Френеля.

Постановка задачи

Вычислите интеграл K:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(3t + \frac{3\pi}{2})}{\sqrt{t}}dt$$

Решение

Для начала попробуем вычислить интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = I$. Заметим, что $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy$, то есть возможен переход к двукратному интегралу:

$$I^2 = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx \int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy$$

Вычислим его с переходоим в полярные координаты:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\phi \\ y = \rho \cdot \sin\phi \end{cases} \quad J \text{ - Якобиан, } J = \rho$$

Пределы интегрирования в таком случае находятся как:

$$\begin{cases} \rho \cdot \cos\phi > 0 \\ \rho \cdot \sin\phi > 0 \\ \rho > 0 \\ \phi \in [0; 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi > 0 \\ \sin\phi > 0 \\ \rho > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ \rho > 0 \end{cases}$$

Таким образом:

$$I^2 = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx \int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^\infty e^{-\rho^2\cos^2\phi} \cdot e^{-\rho^2\sin^2\phi} \cdot \rho d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^\infty e^{-\rho^2} \cdot d\rho^2 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}\Big|_0^\infty d\phi$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Далее вычислим интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = J$. Сначала докажем полезное равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-u^2 t} du$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty e^{-u^2 \sqrt{t}^2} du\sqrt{t}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

С его помощью решим упомянутый интеграл J:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \int\limits_0^\infty \cos t \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{-u^2 t} du dt$$

При этом сменим порядок интегрирования (в силу несобственности интеграла смена порядка требует обоснованя, но в данном случае она разрешена):

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty du \int\limits_0^\infty \cos t \cdot e^{-u^2 t} dt$$

$$\int\limits_0^\infty \cos t \cdot e^{-u^2 t} dt = |\text{По частям}| =$$

$$\sin t \cdot e^{-u^2 t} \Big|_0^\infty + u^2 \cdot \int\limits_0^\infty \sin t \cdot e^{-u^2 t} dt =$$

$$\sin t \cdot e^{-u^2 t} \Big|_0^\infty + u^2 \left(-\cos t|_0^\infty e^{-u^2 t} - u^2 \int\limits_0^\infty \cos t \cdot e^{-u^2 t} dt \right) \Rightarrow$$

$$\int\limits_0^\infty \cos t \cdot e^{-u^2 t} dt = \sin t \cdot e^{-u^2 t} \Big|_0^\infty + u^2 \cdot \cos t e^{-u^2 t} \Big|_0^\infty - u^4 \int\limits_0^\infty \cos t \cdot e^{-u^2 t} dt$$

$$\int\limits_0^\infty \cos t \cdot e^{-u^2 t} dt = \frac{e^{-u^2 t} \cdot (\sin t + u^2 \cos t)}{1 + u^4} \Bigg|_0^\infty = \frac{u^2}{1 + u^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty du \int\limits_0^\infty \cos t \cdot e^{-u^2 t} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{u^2}{1 + u^4} du$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{u^2}{1 + u^4} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{u^2}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2} + 1)} du = |\text{Инт. Дроб.-Рац.}| =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{u}{2\sqrt{2}(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} - \frac{u}{2\sqrt{2}(u^2 + \sqrt{2} + 1)} du =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \int\limits_0^\infty \frac{u}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} du - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \int\limits_0^\infty \frac{u}{(u^2 + \sqrt{2}u + 1)} du \right) =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(2) \right)$$

$$(1) = \int\limits_0^\infty \frac{u}{(u^2-\sqrt{2}u+1)}du = |u = \frac{1}{2}(2u-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}|$$

$$(1) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{2u-\sqrt{2}}{(u^2-\sqrt{2}u+1)}du + \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2}(u^2-\sqrt{2}u+1)}du =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(u^2-\sqrt{2}u+1)}d(u^2-\sqrt{2}u+1) + \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(u-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}du =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\ln\left|u^2-\sqrt{2}u+1\right|\Big|_0^\infty + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\arctan(\sqrt{2}u-1)\Big|_0^\infty$$

Аналогично:

$$(2) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left|u^2+\sqrt{2}u+1\right|\Big|_0^\infty - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\arctan(\sqrt{2}u+1)\Big|_0^\infty$$

Следовательно:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(2)\right) =$$

$$\frac{2}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1}\right| + \arctan(\sqrt{2}u+1) + \arctan(\sqrt{2}u-1)\right)\Bigg|_0^\infty =$$

$$\frac{2}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

То есть:

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Наконец вычислим искомый интеграл K:

$$K = \int\limits_0^\infty \frac{\sin(3t+\frac{3\pi}{2})}{\sqrt{t}}dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int\limits_0^\infty \frac{\cos 3t}{\sqrt{3t}}d(3t) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{\frac{\pi}{6}}$$

Используя замену переменной и сводя интегралы к J вычислим также:

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \frac{\cos x^2}{2\sqrt{x^2}}dx^2 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi x^2}{2}dx = \frac{2}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi x^2}{2}}{\sqrt{\frac{\pi x^2}{2}}}d\frac{\pi x^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Рассмотрим графики исследуемых интегралов и их подынтегральных функций:

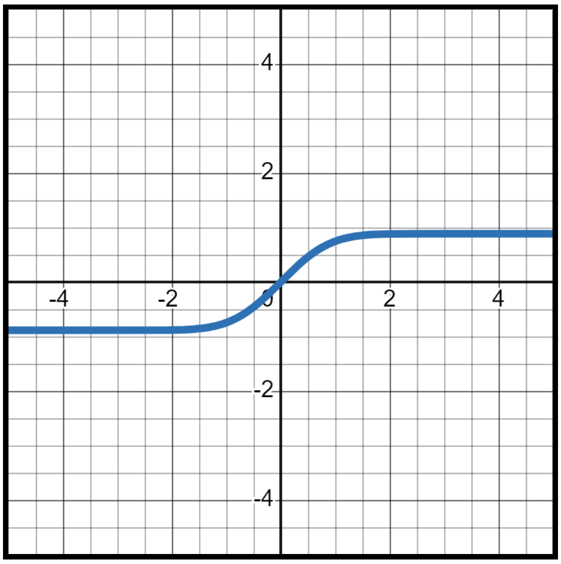

Рис. 1: График функции ошибок $\Phi(z) = \int\limits_0^z e^{-x^2} dx$

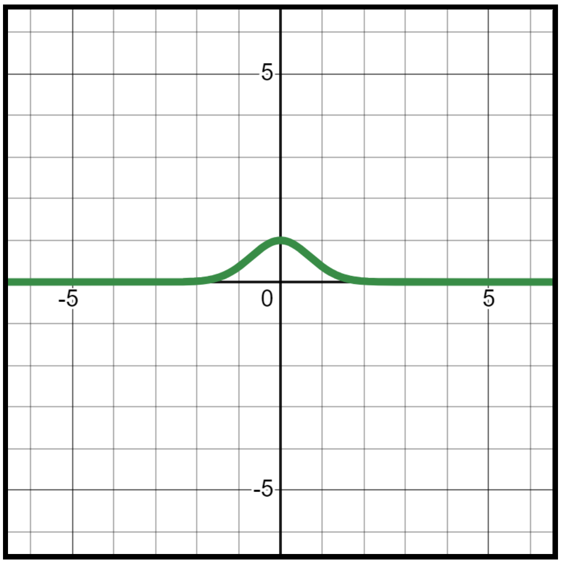

Рис. 2: График подынтегральной фукнции для функции ошибок $y = e^{-x^2}$

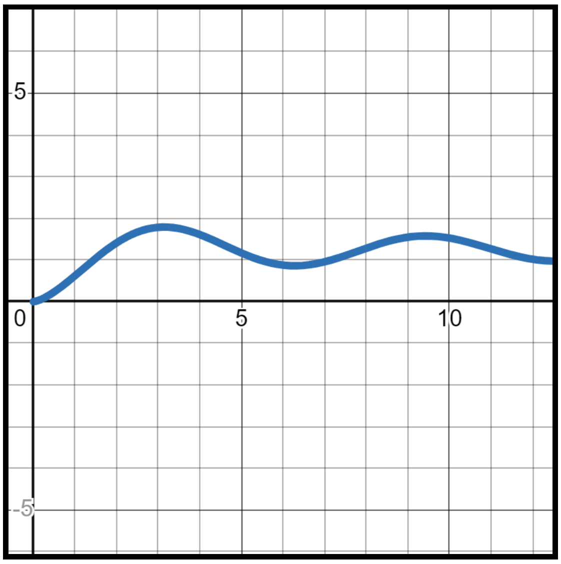

Рис. 3: График интеграла Френеля $\Phi_S(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$

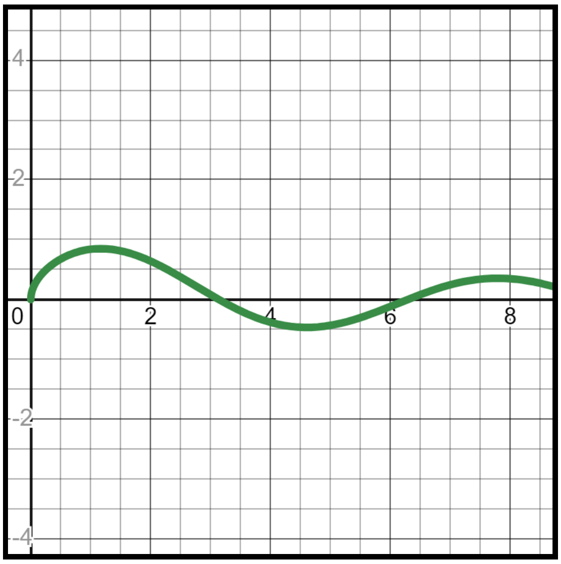

Рис. 4: График подынтегральной функции для фукнции Френеля $y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

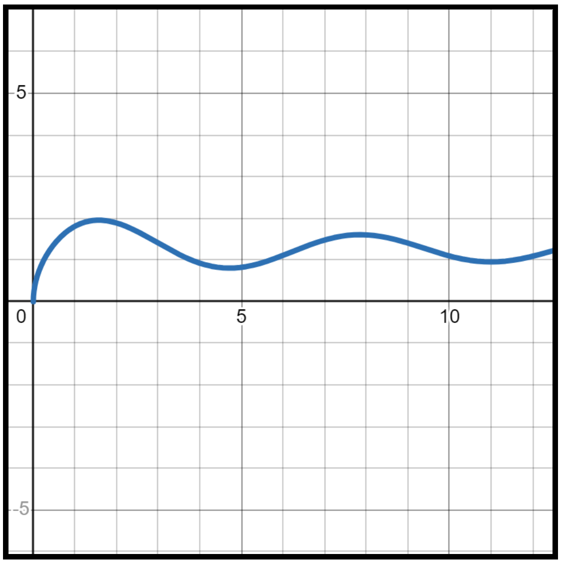

Рис. 5: График интеграла Френеля $\Phi_S(z) = \int\limits_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$

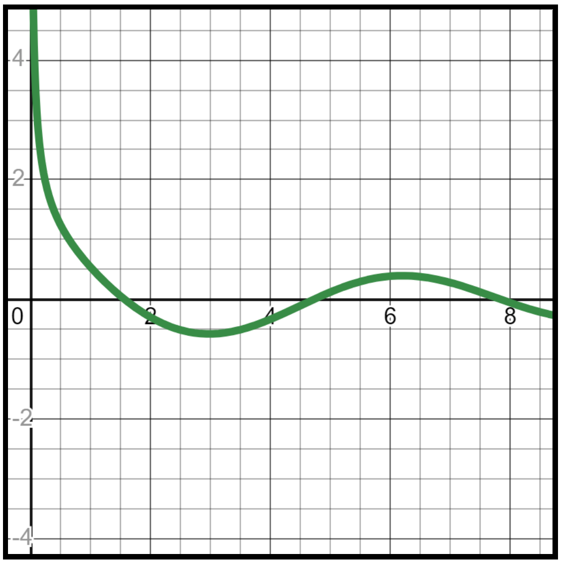

Рис. 6: График подынтегральной функции для фукнции Френеля $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$