

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по лабораторной работе №3
По дисциплине «Базы данных» (второй семестр)

Студент:

Дениченко Александр Р3112

Практик:

Лисицина В.В

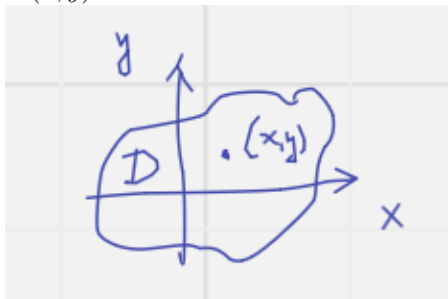
Санкт-Петербург
2023 г.

1 ФНП и скалярное поле П.1 Основные понятия

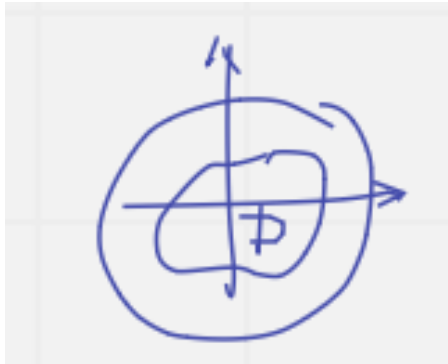
$$\mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R}...\mathbb{R}x\mathbb{R} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n\}$$

$$\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$$

$$n = 2(x, y)$$



Ограниченность \mathbb{D} - ограничена, если существует $M > 0$ Для любых $(x, y) \in \mathbb{D} \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta(M, O) \leq M$



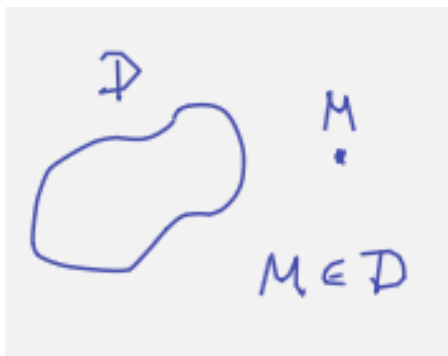
Внутренняя точка (IntD) $M(x, y)$ - внутренняя, если существует $\mathcal{E} > 0 : U_{\mathcal{E}}(M) \in D == \{(x', y') : \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \mathcal{E}\}$



Граничная точка (знак частных производных) \mathcal{D} : $M(x, y)$ - граничная точка, если существует $\mathcal{E} > 0 : U_{\mathcal{E}}(M) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ and $U_{\mathcal{E}}(M) \cap \bar{\mathcal{D}} \neq \emptyset$



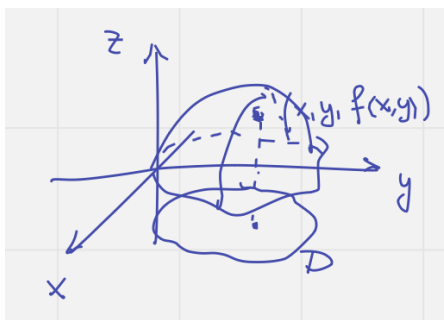
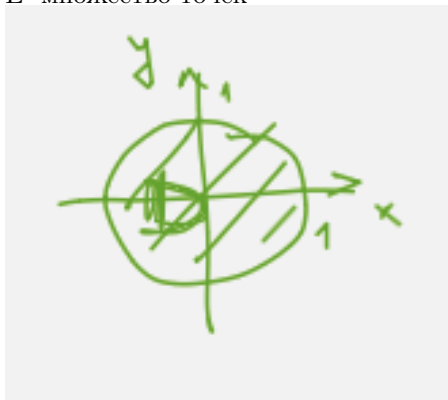
Изолированная точка: существует $\mathcal{E} > 0 : U_{\mathcal{E}}(M) \cap \mathcal{D} = \emptyset$



$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in D \text{ and } \forall (x, y) \in D \Rightarrow !z \in \mathbb{R} : z = f(x, y)$

D - область определения

E - множество точек



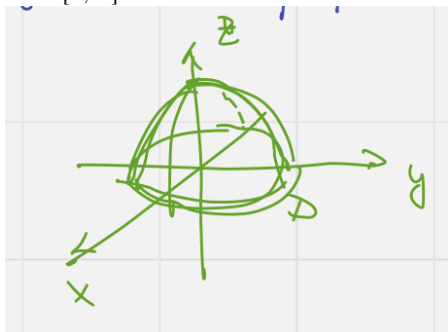
$\Gamma = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$ - график

Пример: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$E = [0; 1]$

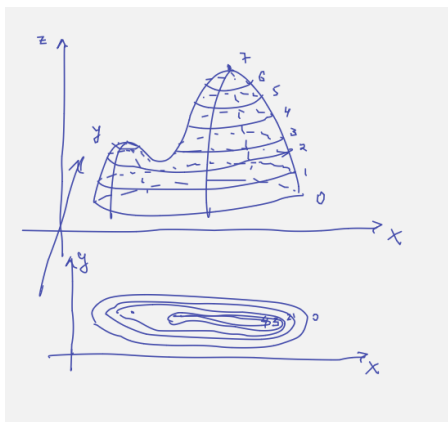


2 П.2 Линии и поверхности уровня

$n = 2 \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$L_c = \{(x, y) : f(x, y) = c\}$

$S_c = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}$



3 п.3 Частное и полное приращение

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, n=2$$

$$z = f(x, y)$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

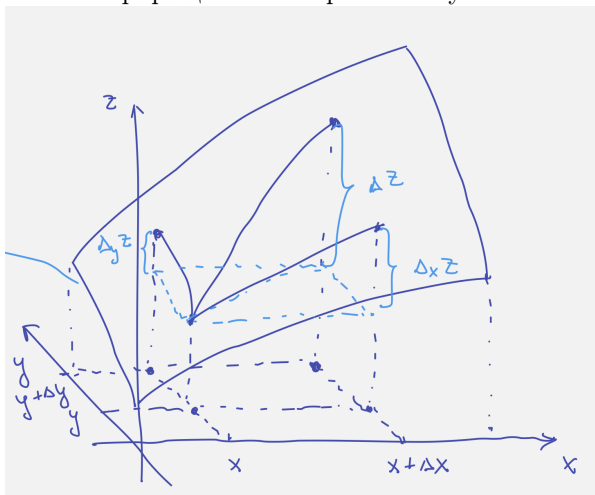
полное приращение

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

частное приращение по переменной x

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

частное приращение по переменной y



$$\Delta z! = \Delta_x z + \Delta_y z$$

Пример:

$$S = xy$$

$$x=1 \quad \Delta x = 0,1$$

$$y=2 \quad \Delta y = 0,2$$

$$\Delta S = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = 0,42$$

$$\Delta_x S + \Delta_y S = (x + \Delta x)y - xy + (y + \Delta y)x - xy = \Delta x \cdot y + \Delta y \cdot x$$

4 п.4 Предел и непрерывность

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap \mathcal{D}_f \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

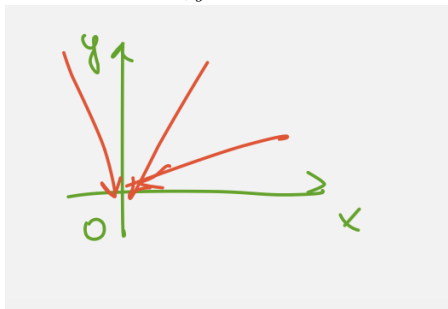
$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall M \in U_\delta(M_0) \cap \mathcal{D}_f \Rightarrow f(M) \in U_\varepsilon(A)$$

$$M(x, y), M(x_1, y_1)$$

$$1) z = x^2 + y^2 \mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \Delta z = (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 + 2y_0 \Delta y + \Delta y^2 - (\Delta x > 0, \Delta y > 0) > 0$$

z - непрерывная на $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$

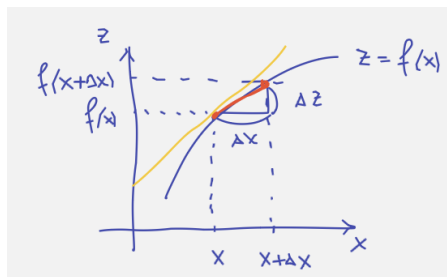
$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} \right) = |y = kx| = \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \left(\frac{2xkx}{x^2+(kx)^2} \right) = \frac{2k}{1+k^2}$$



5 П.5 Частные производные

Обычные случаи

$$z = f(x) \quad \frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$



Случай с частной производной

$$z = f(x, y) \quad \Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

Частная производная функции z по x в точке $M(x, y)$

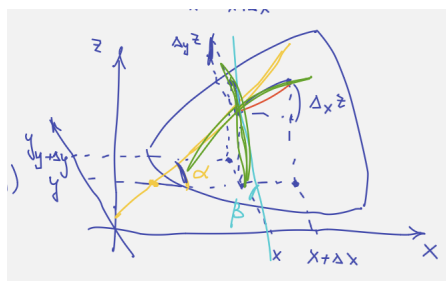
$$\Delta x - \text{фикс} \Rightarrow \Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

Частная производная функции z по y в точке $M(x, y)$

$$\Delta y - \text{фикс} \Rightarrow \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

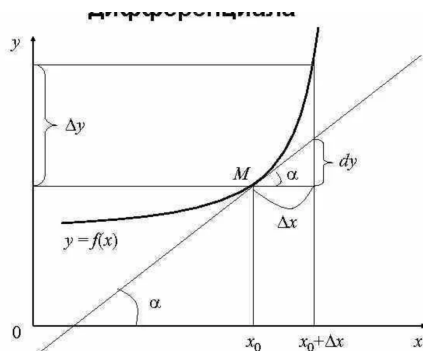
$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$$

Частная производная функции z по направлению в точке $M(x, y)$



6 П.6 Дифференциал

$$z = f(x); \Delta z = A \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x = dz + o(\Delta x)$$



Полный Дифференциал функции двух переменных

$$z = f(x, y); \Delta z = A \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y; A, B \in \mathbb{R}$$

Теорема(о дифференциале):

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \quad M(x, y) \\ \Rightarrow dz &= z'_x dx + z'_y dy \\ \Delta z &= dz + o(\Delta \rho) \end{aligned}$$

Доказательство:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\begin{aligned} \Delta z_1 &= f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = |x - \text{fiks}; f(x, y) = \psi(y)| = \psi(y + \Delta y) - \psi(y) = \\ &= |\psi(y) - \text{непрерывная; по т. Лагранжа} : \exists \bar{y} : \psi(y + \Delta y) - \psi(y) = \psi'_y(\bar{y})\Delta y| = \\ &= \psi'_y(\bar{y})\Delta y = f'_y(x, \bar{y})\Delta y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta z_2 &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = |y + \Delta y - \text{fiks}; f(x, y + \Delta y) = \phi(x)| = \phi(x + \Delta x) = \\ &= f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta z = \Delta z_2 + \Delta z_1 = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, \bar{y})\Delta y$$

$$\triangleleft \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) = f'_x(x, y)$$

по т. о функции, её предел и бмф:

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta \rho)$$

$$\begin{aligned}
\angle \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f'_y(x, \bar{y}) &= f'_y(x, y) \Rightarrow f'_y(x, \bar{y}) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta \rho) \\
&= f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta \rho)\Delta x + \beta(\Delta \rho)\Delta y = dz + o(\Delta \rho) \\
dz &= f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy
\end{aligned}$$

Доказано

7 П.7 Производная сложной функции, полная производная, полный Дифференциал

$$z = z(u, v), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (1)$$

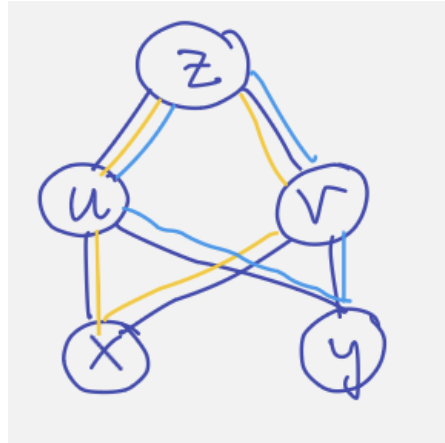
$$z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y) \quad (2)$$

Теорема о производной сложной ф

$$z(u, v), \quad u(x, y) \quad v(x, y) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$



докажем

$$\angle \frac{\partial z}{\partial x} : \quad (6)$$

$$\Delta x \rightarrow 0 : \Delta u, \Delta v \rightarrow 0; \quad y - \text{fix} \quad (7)$$

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + \alpha(\Delta u)\Delta u + \beta(\Delta v)\Delta v \quad | : \Delta x \quad (8)$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \beta(\Delta v) \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (9)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} : \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \text{непрерывна} : \Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha, \beta \rightarrow 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (11)$$

для $\frac{\partial z}{\partial y}$ по аналогии

Доказано

8 Производная от функций, заданной неявно

$$y = y(x), F(x, y) = 0, y'$$

Первый способ решения

$$e^y - e^x + xy = 0 \quad (e^y - e^x + xy)'_x = 0, \quad y = y(x)$$

$$e^y \cdot y' - e^y + y + xy' = 0, \quad (e^y + x)y' = e^x - y, \quad y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}$$

Второй способ решения

$$y' = \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (12)$$

$$F'_x(x, y) = -e^x + y$$

$$F'_y(x, y) = e^y + x$$

$$y' = \frac{-e^x + y}{e^y + x}$$

Теорема о производной функции заданной неявно

$$y = y(x) - \text{непрерывна}, F(x, y) = 0, (F, F'_x, F'_y - \text{непрерывны в окр } (x, y))$$

$$\Rightarrow y' = \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (13)$$

Доказательство

$$x; y(x); F(x, y) = 0$$

-

$$\Delta x; \Delta y(x); F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$$

=

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x; y + \Delta y) - F(x; y) = 0$$

$$\Delta F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \alpha(\Delta \rho) \Delta x + \beta(\Delta \rho) \Delta y = 0 \mid : \Delta x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta \rho) + \beta(\Delta \rho) \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta(\Delta \rho) \right) \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha(\Delta \rho) \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha(\Delta \rho)}{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta(\Delta \rho)}; \quad \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0, \quad \Delta \rho \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d - \frac{F}{x}}{d \frac{\partial F}{\partial y}}$$

Доказано

$$z = z(x, y) \quad F(x, y, z) = 0 \quad z = z(x, y) \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$$

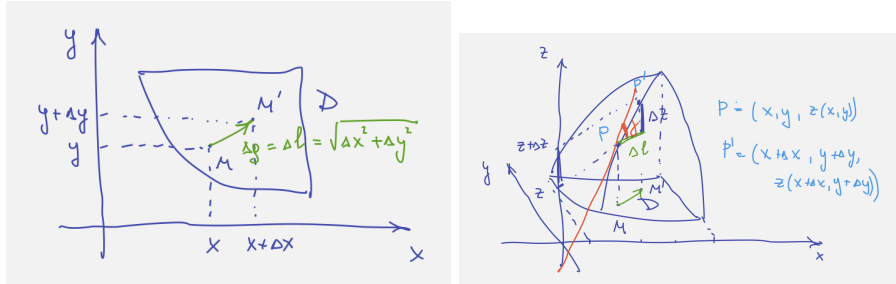
$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$z = z(x, y) \text{ непрерывная, } F, F'_x, F'_y, F'_z - \text{ непрерывная and } F'_z \neq 0$$

9 Производная по направлению

$$z = z(x, y), \quad M(x; y), \quad \bar{l}(l_x; l_y)$$

$$\Delta x, \Delta y \text{ вдоль } \bar{l} \Rightarrow M'(x + \Delta x; y + \Delta y); \quad \frac{\Delta_l z}{\Delta l} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial l} \quad (\Delta l \rightarrow 0)$$



Теорема (о производной функции по направлению)

$$z = z(x, y), \quad z, z'_x, z'_y \text{ — непрерывны} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta, \quad (\cos \alpha; \cos \beta) = \bar{l}^o = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} \quad (14)$$

Доказательство

$$\Delta_l z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha(\Delta l) \Delta x + \beta(\Delta l) \Delta y \quad | : \Delta x$$

$$\frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \alpha(\Delta l) \frac{\Delta x}{\Delta l} + \beta(\Delta l) \frac{\Delta y}{\Delta l} \quad | : \Delta l$$

$$\frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos \beta + \alpha(\Delta l) \cdot \cos \alpha + \beta(\Delta l) \frac{\Delta y}{\Delta l} \quad | : \Delta l$$

$$\Delta l \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0, \quad \Delta y \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos(\alpha) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos \beta$$

$$\angle \bar{l} = \bar{i} = (1; 0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot 0 = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$u = u(x; y; z) \quad \bar{l} = (l_x, l_y, l_z) \quad \bar{l}^o = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

10 Частные производные высших порядков

$$z = z(x; y); \quad \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x(x; y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y(x; y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} = (z'_x)'_x = z''_{xx}(x; y)$$

Теорема (о смешанных производных)

$$z = z(x; y), \quad z, z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx} \text{ — непрерывны} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (15)$$