1 Векторная ФНП и векторное поле

$$\overline{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}_x; \mathcal{V}_y) = (\mathcal{V}_x(x;y); \mathcal{V}_y(x,y)) = \mathcal{V}_x(x;y)\overline{i} + \mathcal{V}_y(x,y)\overline{j}$$

Ψ Вектор-функцией в области D называется вектор, координатами которого являются функции, заданные в этой области

$$\overline{F}(x;y) = (P(x;y); Q(x;y)) = P(x;y)\overline{i} + Q(x;y)\overline{j} \;\; in \; \mathbb{R}^2$$

$$\overline{F}(x;y;z) = (P(x;y); Q(x;y); R(x;y)) = P(x;y)\overline{i} + Q(x;y)\overline{j} + R(x;y)\overline{k} \;\; in \; \mathbb{R}^2$$

Векторное поле в $\mathcal{D}$
График - поле направлений
Линия в каждой точке, которой векторное поле касается неё, называется векторной линией этого поля.

Example

$$\overline{F}(x;y) = (x+y; x-y);\; P(x;y) = x+y;\; Q(x;y) = x-y$$

Найдём векторные линии

$$y = y(x);\; tg\alpha = y' = \frac{Q}{P}$$

$$y' = \frac{x-y}{x+y};\;\; y^2 + 2xy - x^2 = C;\;\; C \in \mathbb{R}$$

2 Градиент скалярного поля

$$z(x;y)\; diff\; in \mathcal{D}^2$$

$$M \in \mathcal{D}:\; (\frac{\partial z}{\partial x}\;(M); \frac{\partial z}{\partial y}\;(M)) = \frac{\partial z}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\overline{j} = grad\; z\;(M)$$

$$u(x;y;z)\; diff\; in \mathcal{D}^3$$

$$M \in \mathcal{D}:\; (\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}) = grad\; u\;(M)$$

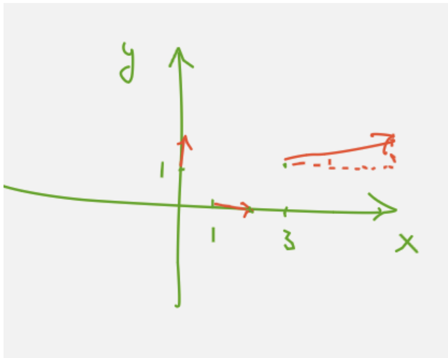
Example

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2);\; grad\; z = (x;y)$$

$$\overline{g}_1 = grad\; z(1;0) = (1;0)$$

$$\overline{g}_2 = grad\; z(0;1) = (0;1)$$

$$\overline{g}_3 = grad\; z(3;1) = (3;1)$$



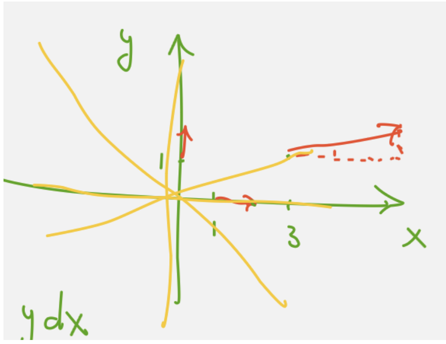
Векторные линии:

$$y' = \frac{y}{x}\;\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}\;\; \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}\;\;\; \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$ln|y| = ln|x| + C;\; C = ln|C_1|$$

$$|y| = |C_1 x|$$

$$y = C_1 x,\; C_1 \in \mathbb{R}$$



Свойства градиента:
1) Градиент скалярной функции z(x;y) каждой точке направлен перпендикулярно к линии уровня z(x;y), проходящей через эту точку.

Доказательство:

$$z = z(x;y) \quad z(x;y) = C - level\ line$$

$$k_1 = y' = -\frac{z'_x}{z'_y} - \text{угловой коэфицент касательной к линии уровня}$$

$$grad\ z(x;y) = (z'_x; z'_y)$$

$$k_2 = \frac{z'_y}{z'_x}$$

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{z'_x}{z'_y} \cdot \frac{z'_y}{z'_x} = -1$$

2)Линейность

$$grad(f+g) = grad(f) + grad(g)$$

$$grad(\alpha f) = \alpha grad(f), \alpha \cdot \in \mathbb{R}$$

3)

$$grad(f \cdot g) = f \cdot grad(g) + g \cdot grad(f)$$

4)

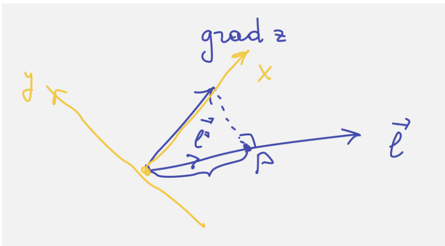
$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{проекция grad(z)}$$

Докажем

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} cos\beta = (\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}) \cdot (cos\alpha; cos\beta) = gradz \cdot \bar{l}^o = |grad\ z| \cdot |\bar{l}^o| \cdot cos\phi = |grad\ z| \cdot \phi$$

$$\phi = \angle(grad\ z; \bar{l}^o)$$

По какой траектории движется точка P при изменении направления $\bar{l}$?



P = (x;y) - точка

$$x = \frac{\partial z}{\partial l} \cdot \cos\phi$$

$$y = \frac{\partial z}{\partial l} \cdot \sin\phi$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |grad\ z| \cdot \cos\phi$$

$$\begin{cases} x = |grad\ z| \cdot \cos^2\phi \\ y = |grad\ z| \cdot \cos\phi \sin\phi \end{cases} \quad -> \begin{cases} x = \frac{1}{2}|grad\ z| \cdot (1 + cos2\phi) \\ y = |grad\ z| \cdot \sin 2\phi \end{cases} \quad -> \begin{cases} (x - \frac{|g|}{2})^2 = (\frac{1}{2}|g| \cdot cos2\phi)^2 \\ y^2 = (\frac{1}{2}|grad\ z| \cdot \sin 2\phi)^2 \end{cases}$$

$$\left(x - \frac{|g|}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{|g|^2}{4}$$

окружность с центром в $(\frac{|g|}{2}; 0)$ $andR = \frac{|g|}{2}$

доказано 5)

$$\frac{\partial z}{\partial l},\ \bar{l} = grad(z),\ = maximum$$

6)

$$\frac{\partial z}{\partial l},\ \bar{l} \perp grad(z),\ = 0$$

Example

Найти наибольшую крутизну(угол наклона поверхности) подъёма поверхности

$$z = ln(x^2 + 2y^2) \ \ in \ \ M(6; 4\sqrt{2}; ln(100))$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |grad\ z| = tg\ \alpha$$

$$|grad\ z| = (\frac{2x}{x^2 + 2y^2}; \frac{4y}{x^2 + 2y^2})$$

$$grad\ z(M) = (\frac{12}{100}; \frac{16\sqrt{2}}{100})$$

$$|grad\ z(M)| \approx \frac{1}{4} = tg\alpha$$

3 Касательная прямая и нормальная плоскость кривой

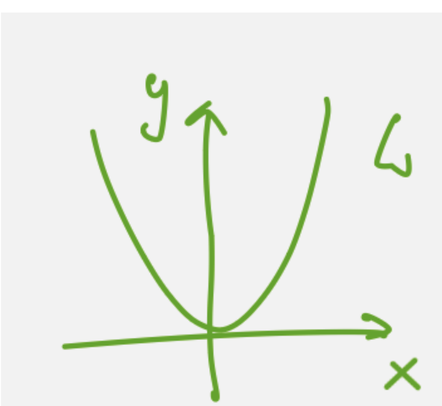
L - кривая на плоскости R 2х мер

1)Явно:

$$y = y(x) \ \ x \in [a; b]$$

Example:

$$L: \ y = x^2$$

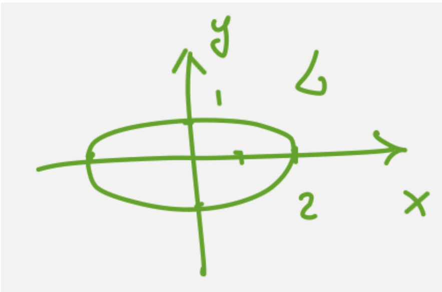


2)Неявно:

$$L: \ F(x, y) = 0$$

Example:

$$L: \ y = x^2$$



3)Векторно:

$$L: \ \overline{r} = \overline{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Example:

$$\begin{cases} x = 2cos(t) \\ y = sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi)$$

L - кривая в пространстве R 3х мер

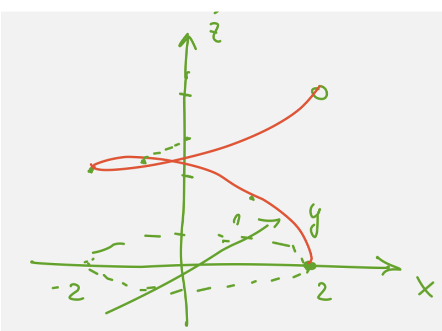
1)

$$L: \overline{r} = \overline{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha; \beta]$$

Example:

$$\begin{cases} x = 2cos(t) \\ y = sin(t) \\ z = t \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi)$$



2)Задано неявно, как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Example:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$$

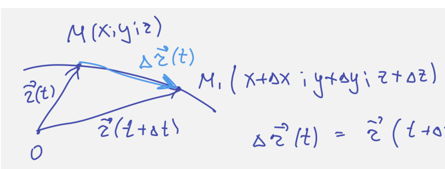
1)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \overline{r} = \overline{r}(t)$$

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \lim_{\Delta t -> 0} \frac{\Delta \overline{r}(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k} = (x'(t); y'(t); z'(t))$$

при

$$x(t),\ \ y(t),\ \ z(t)\ \ -\text{гладкая кривая}$$



$$\Delta\overline{r}(t) = \overline{r}(t + \Delta t) - \overline{r}(t)$$

Уравнение касательной прямой в точке кривой:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$M_0(x_0; y_0; z_0),\ \ \overline{s}(a; b; c)$$

=> Уравнение касательной

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} \quad M_0 : \begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \\ z_0 = z(t_0) \end{cases}$$

Уравнение нормальной плоскости в точке кривой

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;\ \ \overline{n}(A; B; C);\ \ M_0(x_0; y_0; z_0)$$

=>

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

4 Касательная плоскость и нормальная прямая поверхность

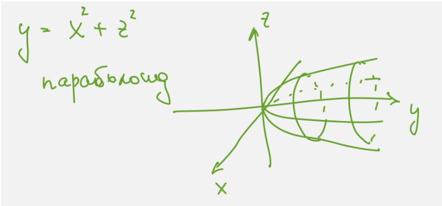
Г- поверхность в пространстве R 3х мер

1) Явное

$$G:\ \ z = f(x; y);\ \ x = g(z; y);\ \ y = h(x; z);$$

Example:

$$y = x^2 + z^2$$

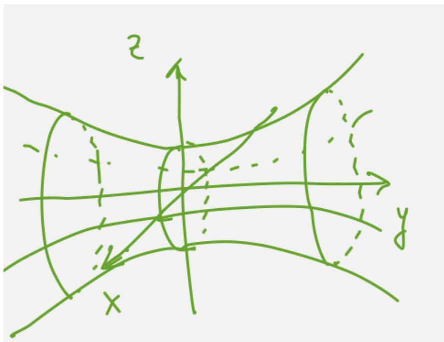


2) Неявное

$$G: \ F(x;y;z) = 0$$

Example:

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$$



3) Параметрически

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \\ z = z(u;v) \end{cases}$$

Векторное:

$$\overline{r} = \overline{r}(u;v)$$

Example:

$$x = 2\cos\phi\sin\theta$$

$$y = 2\sin\phi\sin\theta$$

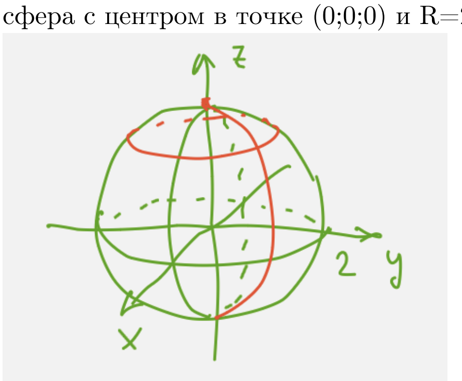
$$z = 2\cos\theta$$

ϕ - азимутальный угол
θ - зенитный угол
$\phi \in [0; 2\pi]$
$\theta \in [0; \pi]$

$$\measuredangle x^2 + y^2 + z^2 = 4cos^2\phi sin^2\theta + 4sin^2\phi sin^2\theta + 4cos^2\theta = 4sin^2\theta + 4cos^2\theta = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

сфера с центром в точке (0;0;0) и R=2



Касательная к поверхности в точке - это касательная к кривой на поверхности, проходящей через эту точку.

$$G: \ F(x;y;z) = 0; \quad P(x;y;z) - point$$

P - обыкновенная точка к поверхности, если в этой точке все чатные производные $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ этой поверхности - существуют, непрерывны и не все =0
P - особая, если все производные ранвы ноль или одно из них не существует.

Example

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \ (cono)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \ \frac{\partial F}{\partial z} = -2z; \quad => P(0,0,0)$$

Theorem - о касательной плоскости

$$P - \text{ обыкновенная точка} => in \ P \text{ все касательные лежат в одной плоскости}$$

Доказательство

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \overline{\tau} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$G: F(x;y;z) = 0$$

т.к. точки L лежат на поверхности, то

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad | \cdot \frac{d}{dt}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

$$grad(F) \cdot \overline{\tau} = 0$$

$$grad(F) - \text{ вектор нормали n}$$

$$\forall \overline{\tau} \perp grad(\overline{F}(P))$$

все касательные лежат в одной плоскости
доказано

Касательная плоскость:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - z_0) = 0; \quad P(x_0; y_0; z_0)$$

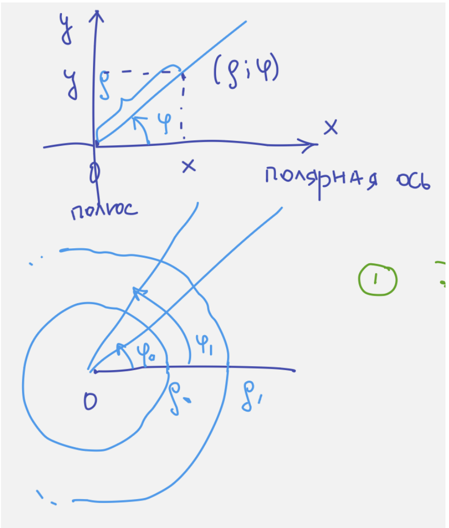
Нормальная прямая:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}$$

5 Полярные координаты

ϕ - полярный угол
ρ - полярный угол

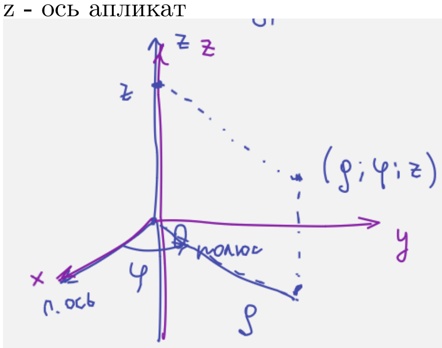
$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \phi < 2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cdot \cos\phi \\ y = \rho \sin\phi \end{cases}$$



6 Цилиндрические и сферические координаты

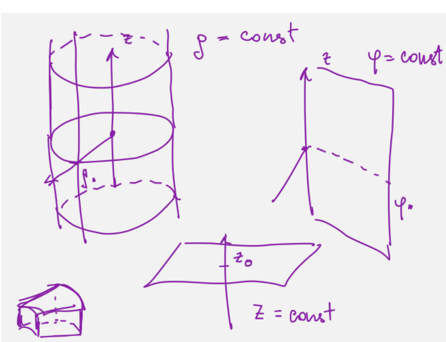
Цилиндрическая

z - ось апликат



$$\rho \geq 0;\ 0 \leq \phi < 2\pi;\ z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = \rho cos\phi \\ y = \rho sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

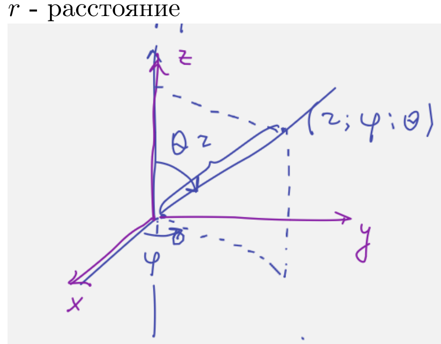


Сферическая

ϕ - азимутальный

θ - зенитный угол

r - расстояние



$$r \geq 0;\ 0 \leq \phi < 2\pi;\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\phi \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\phi \sin\theta \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases}$$