Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по расчетно-графической работе №5

По дисциплине «Математический анализ» (третий семестр)

Группа:
МАТБАЗ 21.x

Студенты:
Беляев Михаил
Бутов Иван
Дениченко Александр
Разинкин Александр
Хороших Дмитрий

Лектор:
Правдин Константин Владимирович

Практик:
Правдин Константин Владимирович

Санкт-Петербург
2023 г.

Задание 3. Потенциал векторного поля

Дано: векторное поле $\vec{H}$

$$\vec{H} = (e^x; -e^y) = e^x \cdot \bar{i} + (-e^y) \cdot \bar{j}$$

Решение:

1) Убедитесь, что данное векторное поле потенциально.

Чтобы доказать, что поле потенциально достаточно одного критерия. Векторное поле потенциально, если оно является градиентом некоторого скалярного поля. Необходимо и достаточно следующее:

$$rot(\vec{F}) = \overline{\nabla} \text{ x } \vec{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

$$rot(\vec{H}) = \overline{\nabla} \text{ x } \vec{H} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{i}(0-0) + \bar{j}(0-0) + \bar{k}(0-0) = 0$$

Поле потенциально (безвихриво).

2) Найдите уравнения векторных линий. Изобразите векторные линии на рисунке.

Векторные линии можно найти следующим способом:

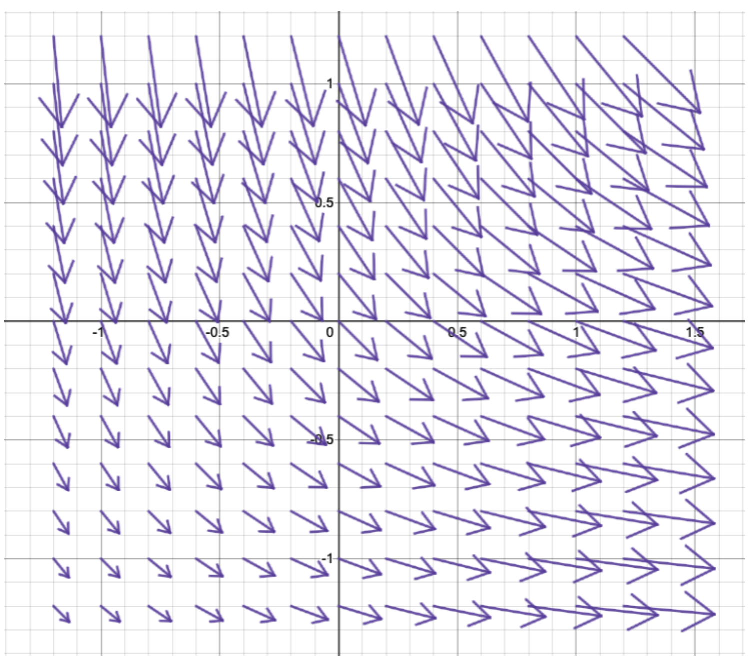
$$tg\alpha = y' = \frac{Q}{P}$$

$$y' = \frac{-e^y}{e^x}$$

После решения ДУ, получили уравнение векторных линий:

$$y = ln\left(\frac{e^x}{Ce^x - 1}\right), \ C \in \mathbb{R}$$

Векторные линии поля на графике:



3) Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла.

$$\mathbb{U}(x,y) = \int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dx$$

$$\mathbb{U}(x,y)=\int_{x_0}^{x}e^x dx-\int_{y_0}^{y}e^y dx=e^x-e^y-e^{x_0}+e^{y_0}$$

Проверка:

$$grad(\mathbb{U})=\vec{H}=\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial x}=e^x$$

$$\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial y}=-e^y$$

$$grad(\mathbb{U})=\vec{H}=e^x-e^y$$

4) Найдите уравнения линий уровня потенциала (эквипотенциальных линий). Изобразите линии уровня потенциала.

Существует такая f, что:

$$\nabla f=\vec{H}$$

Тогда:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^x;\ f(x,y)=\int e^x dx=e^x+C(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-e^y;\ f(x,y)=\int -e^y dx=-e^y+C_1$$

$$f(x,y)=e^x-e^y+C_1$$

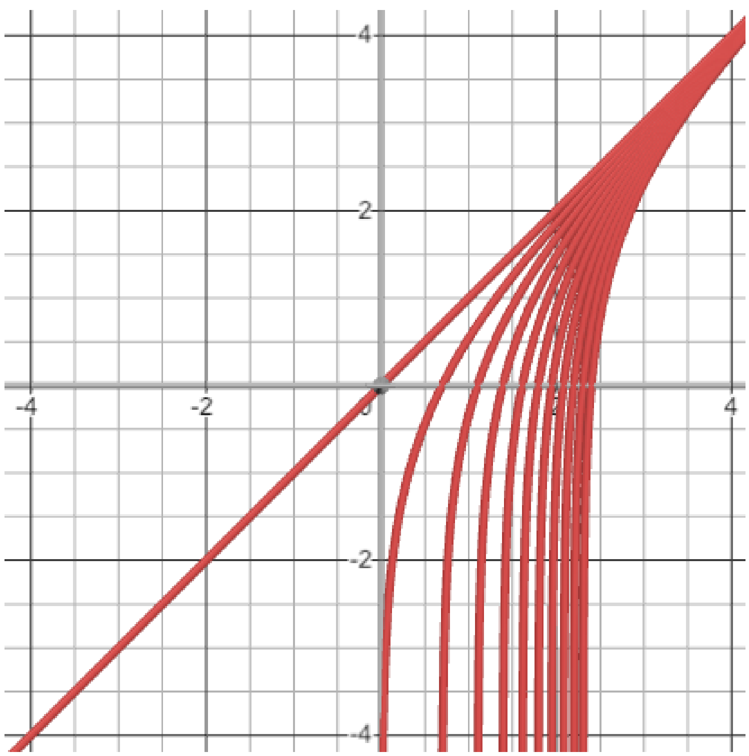
Линии уровня:

$$f(x,y)=C_2$$

$$e^x-e^y=C$$

$$y=ln(e^x-C)$$

Линии уровня потенциала:



5) Докажите ортогональность найденных векторных линий поля и линий уровня потенциала. Проиллюстрируйте ортогональность на графике.

Докажем ортогональность для

$$y_u = ln(e^x - C_1);\ y_v = ln\left(\frac{e^x}{C_2e^x - 1}\right)$$

Зафиксируем точку $C = C_1 = C_2$ и найдём производные:

$$y_u' = \frac{e^x}{e^x - C};\ y_v' = -\frac{1}{Ce^x - 1}$$

Произведение производных в точне пересечения, которую определяет в первую очередь параметр C, должно быть равно -1. Покажем общую формулу, где предположим, что $x = x_0$

$$y_u' \cdot y_v' = (\frac{e^{x_0}}{e^{x_0} - C}) \cdot (-\frac{1}{Ce^{x_0} - 1}) = -\frac{e^{x_0}}{Ce^{2x_0} - e^{x_0} - C^2e^{x_0} + C}$$

Пусть фиксированная C = 1, тогда точка пересечения:

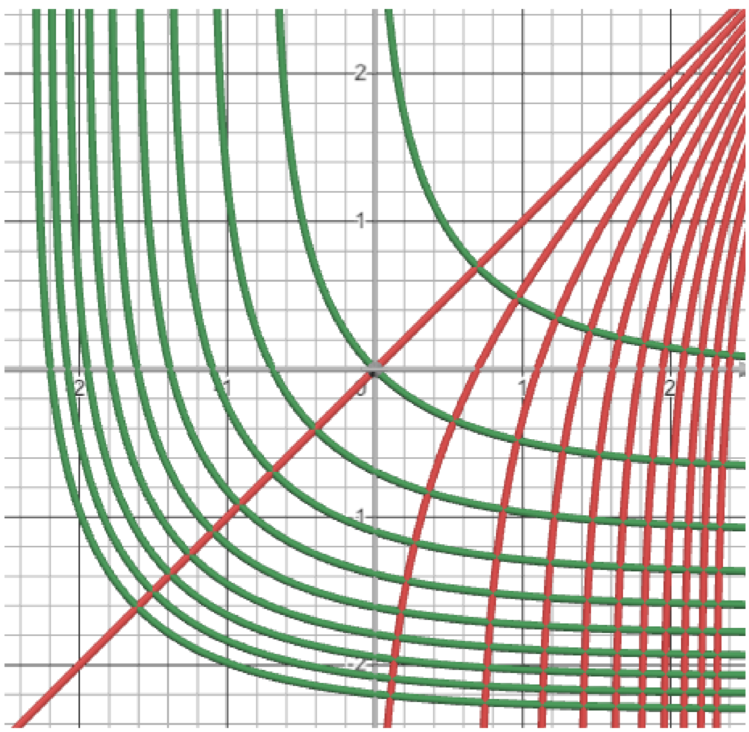
$$e^x - e^{ln(\frac{e^x}{e^x - 1})} = 1$$

$$x = ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Подставим эту точку:

$$y_u' \cdot y_v' = -\frac{e^{ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}}{e^{2ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} - e^{ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} - e^{ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} + 1} = -1$$

Проиллюстрируем ортогональность на графике.



6) Выберите какую-либо векторную линию поля и зафиксируйте на ней точки A и B, выбрав для них числовые координаты. Вычислите работу поля вдоль этой линии, используя найденный в п. 3) потенциал.

Работа потенциального поля по кривой AB:

$$A = \int_A^B \vec{H} \cdot d\bar{l} = \mathbb{U}(B) - \mathbb{U}(A)$$

Фиксируем точки B(-2;0), A(0;-2), тогда:

$$A = e^{-2} - e^0 - e^0 + e^{-2} = -1,73 \text{ Дж}$$

Задание 4. Поток векторного поля

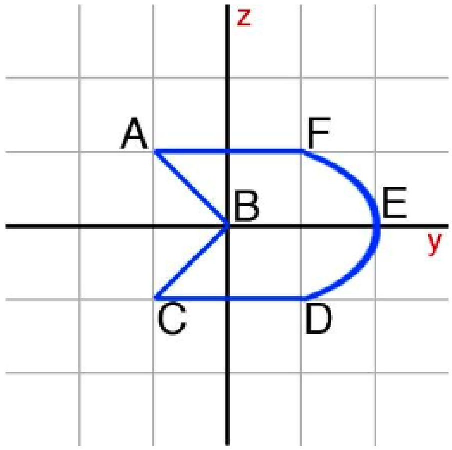
Дано: Дано тело T, ограниченное следующими поверхностями:

$$y + \sqrt{x^2 + z^2} = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

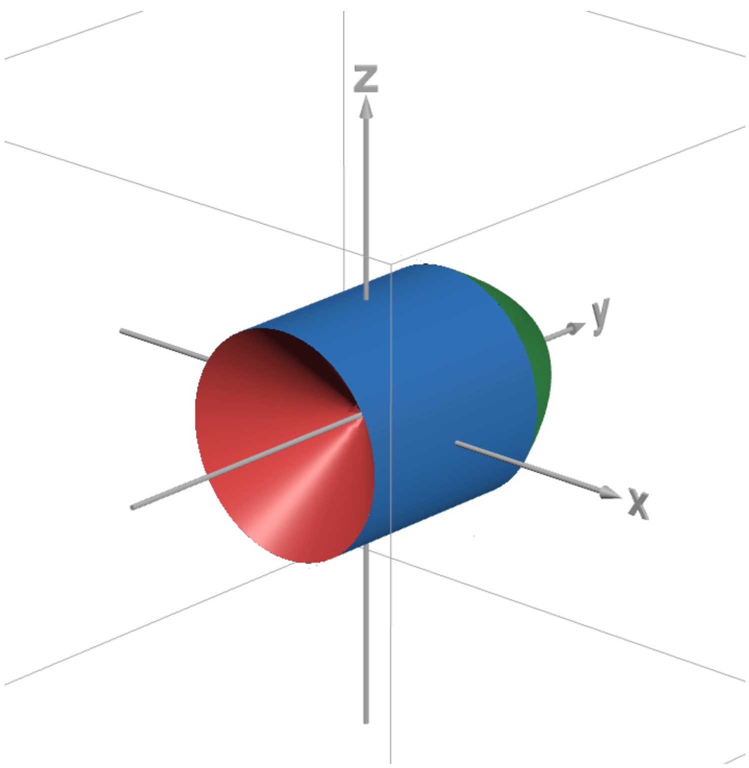
$$x^2 + y + z^2 = 2$$

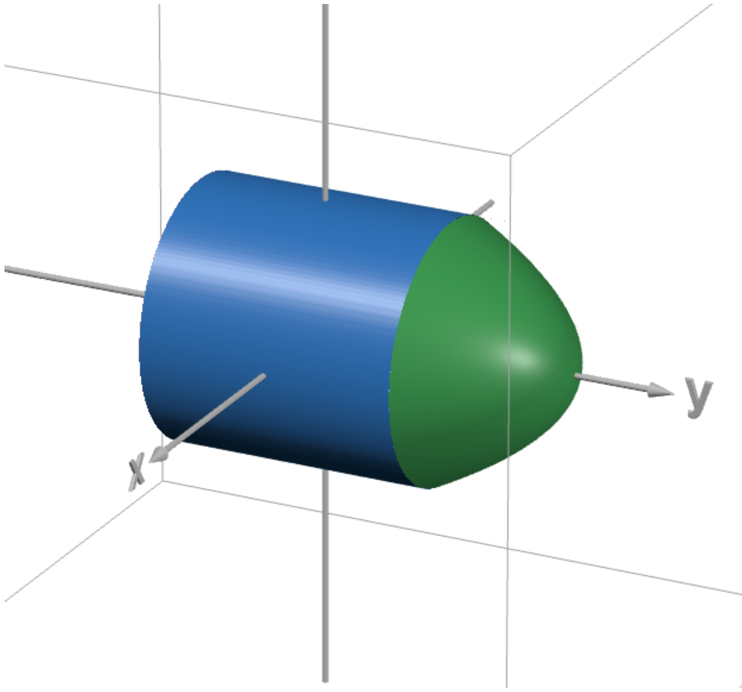
На рисунке представлено сечение тела T координатной плоскостью Oyz.



Решение:

1) Изобразите тело T на графике в пространстве.





2) Вычислите поток поля $a = (sin\ zy^2)\vec{i} + \sqrt{2}x\vec{j} + (\sqrt{2+y} - 3z)\vec{k}$ через боковую поверхность тела T, образованную вращением дуги AFEDC вокруг оси Oy, в направлении внешней нормали поверхности тела T.

$$\iint_{S^+} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_T div\vec{a} \cdot dV = \iiint_T (\frac{\partial sin\ zy^2}{\partial x} + \frac{\partial \sqrt{2}x}{\partial y} + \frac{\partial \sqrt{2+y} - 3z}{\partial z})dxdydz =$$

Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$y = y;\ x = \rho cos\phi;\ z = \rho sin\phi; |\mathbb{J}| = \rho$$

$$\rho^2 cos^2\phi + y + \rho^2 sin^2\phi = 2;\ y + \rho^2 = 2;\ \rho^2 = 2 - y;\ \rho = \sqrt{2-y}$$

$$\text{Первая фигура: } \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{cases} \quad \text{Вторая фигура: } \begin{cases} 1 < y \le 2 \\ 0 \le \rho \le \sqrt{2-y} \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{cases}$$

$$= -3\iiint_T dxdydz = -3(\int_{-1}^{1} dy \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho + \int_1^2 dy \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{2-y}} \rho d\rho) = -3\pi(1-(-1) + (2\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 - (2\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1))) =$$

$$= -\frac{15}{2}\pi$$