

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по лабораторной работе №5

По дисциплине «Математическая статистика» (четвёртый семестр)
Оценивание параметров двумерной случайной величины

Студент:

Дениченко Александр
Разинкин Александр
Соколов Анатолий

Практик:

Милованович Екатерина Воиславовна

Санкт-Петербург
2024 г.

Цель работы

Цель работы состоит в построении оценок математических ожиданий и дисперсий случайных величин, входящих в систему, а также оценок корреляционного момента и коэффициента корреляции.

Данные

Таблица группированных данных:

y_j^* x_i^*	27	37	42	47
22	20	10	0	0
32	0	80	45	0
42	0	0	15	30

Решение

Построим матрицу распределения (n = 200):

y_j^* x_i^*	27	37	42	47	P(x = x _i)
22	20/200	10/200	0	0	30/200
32	0	80/200	45/200	0	125/200
42	0	0	15/200	30/200	45/200
P(y = y _i)	20/200	90/200	60/200	30/200	1

Выпишем условный ряд:

x_i^*	22	32	42
P_i^*	$\frac{30}{200}$	$\frac{125}{200}$	$\frac{45}{200}$

Найдём математическое ожидание и дисперсию для x:

$$\overline{M}(x) = \frac{22 \cdot 30}{200} + \frac{32 \cdot 125}{200} + \frac{42 \cdot 45}{200} = 32.75$$

$$\overline{D}(x) = \sum_{i=1}^n (x_i^*)^2 P_i^* - (\overline{M}(x))^2 = \frac{22^2 \cdot 30}{200} + \frac{32^2 \cdot 125}{200} + \frac{42^2 \cdot 45}{200} - 32.75^2 = 36.9375$$

$$\underline{\overline{\sigma}(x) = 6.077}$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию для y:

$$\overline{M}(y) = \frac{27 \cdot 20}{200} + \frac{37 \cdot 90}{200} + \frac{42 \cdot 60}{200} + \frac{47 \cdot 30}{200} = 39$$

$$\overline{D}(y) = \sum_{i=1}^n (y_i^*)^2 P_i^* - (\overline{M}(y))^2 = \frac{27^2 \cdot 20}{200} + \frac{37^2 \cdot 90}{200} + \frac{42^2 \cdot 60}{200} + \frac{47^2 \cdot 30}{200} - 39^2 = 28.5$$

$$\underline{\overline{\sigma}(y) = 5.339}$$

Найдём корреляционный момент:

$$\begin{aligned} \overline{K(x, y)} = \overline{cov}(x, y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^* y_j^* P_{ij}^* - \overline{M}(x) \overline{M}(y) = \frac{22 \cdot 27 \cdot 20}{200} + \frac{22 \cdot 37 \cdot 10}{200} + \frac{22 \cdot 42 \cdot 0}{200} + \frac{22 \cdot 47 \cdot 0}{200} + \\ &+ \frac{32 \cdot 27 \cdot 0}{200} + \frac{32 \cdot 37 \cdot 80}{200} + \frac{32 \cdot 42 \cdot 45}{200} + \frac{32 \cdot 47 \cdot 0}{200} + \frac{42 \cdot 27 \cdot 0}{200} + \frac{42 \cdot 37 \cdot 0}{200} + \frac{42 \cdot 42 \cdot 15}{200} + \frac{42 \cdot 47 \cdot 30}{200} - 39 \cdot 32.75 = \end{aligned}$$

$$= \frac{22 \cdot 27 \cdot 20}{200} + \frac{22 \cdot 37 \cdot 10}{200} + \frac{32 \cdot 37 \cdot 80}{200} + \frac{32 \cdot 42 \cdot 45}{200} + \frac{42 \cdot 42 \cdot 15}{200} + \frac{42 \cdot 47 \cdot 30}{200} - 39 \cdot 32.75 = 27.25$$

$$\bar{r}_{xy} = \frac{\overline{K(x, y)}}{\bar{\sigma}(x) \cdot \bar{\sigma}(y)} = \frac{27.25}{6.077 \cdot 5.339} = 0.8399$$

Корреляционная матрица:

$$K = \begin{pmatrix} \overline{D}(x) & \overline{K}(x, y) \\ \overline{K}(x, y) & \overline{D}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.9375 & 27.25 \\ 27.25 & 28.5 \end{pmatrix}$$

Найдём условное математическое ожидание y при условии, что $x = 22$:

y_j^* x_i^*	27	37	42	47	$P(x = x_i)$
22	20/200	10/200	0	0	30/200

y_j^* x_i^*	27	37	42	47	Σ
$P(y = y_j/x = 22)$	20/30	10/30	0	0	1

$$P(y = 27/x = 22) = \frac{\frac{20}{200}}{\frac{30}{200}} = \frac{20}{30}$$

$$P(y = 37/x = 22) = \frac{\frac{10}{200}}{\frac{30}{200}} = \frac{10}{30}$$

Условное математическое ожидание:

$$M(y/x = 22) = \frac{27 \cdot 20}{30} + \frac{37 \cdot 10}{30} = 30.3$$

Найдём условное математическое ожидание y при условии, что $x = 32$:

y_j^* x_i^*	27	37	42	47	$P(x = x_i)$
32	0	80/200	45/200	0	125/200

y_j^* x_i^*	27	37	42	47	Σ
$P(y = y_j/x = 32)$	0	80/125	45/125	0	1

$$P(y = 37/x = 32) = \frac{\frac{80}{200}}{\frac{125}{200}} = \frac{80}{125}$$

$$P(y = 42/x = 32) = \frac{\frac{45}{200}}{\frac{125}{200}} = \frac{45}{125}$$

Условное математическое ожидание:

$$M(y/x = 32) = \frac{37 \cdot 80}{125} + \frac{42 \cdot 45}{125} = 38.8$$

Найдём условное математическое ожидание y при условии, что $x = 42$:

y_j^* x_i^*	27	37	42	47	$P(x = x_i)$
42	0	0	15/200	30/200	45/200

y_j^*	27	37	42	47	Σ
x_i^*					
$P(y = y_j/x = 22)$	0	0	15/45	30/45	1

$$P(y = 42/x = 22) = \frac{\frac{15}{200}}{\frac{45}{200}} = \frac{15}{45}$$

$$P(y = 47/x = 22) = \frac{\frac{30}{200}}{\frac{45}{200}} = \frac{30}{45}$$

Условное математическое ожидание:

$$M(y/x = 32) = \frac{42 \cdot 15}{45} + \frac{47 \cdot 30}{45} = 45.3$$

Зависимость условного математического ожидания компонента у от значений компоненты х.

x_i^*	22	32	42
$M(y/x = x_i)$	30.3	38.8	45.3

Найдём функцию регрессии (оценка несмещённости и эффективности):

$$y = m_y + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x)$$

$$x = m_x + r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y)$$

Получим уравнение:

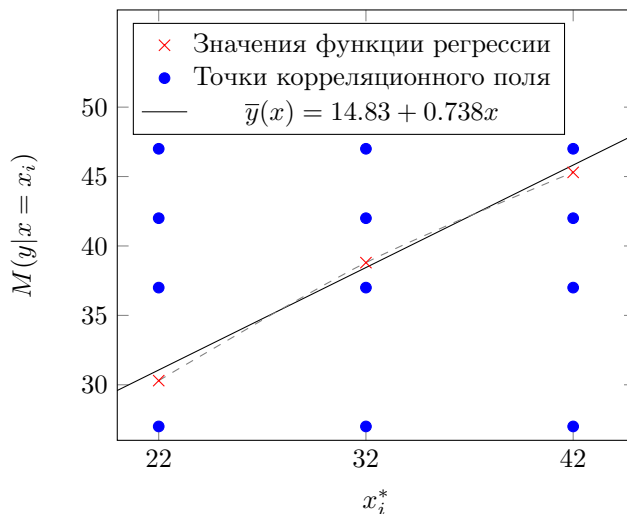
$$\bar{y}(x) = \bar{M}(y) + \bar{r}_{xy} \frac{\bar{\sigma}(y)}{\bar{\sigma}(x)} (x - \bar{M}(x)) = 39 + 0.8399 \cdot \frac{5.339}{6.077} (x - 32.75) = 14.83 + 0.738x$$

$$\delta_{x=22} = \frac{|31.07 - 30.3|}{30.3} \cdot 100\% = 2\%$$

$$\delta_{x=32} = \frac{|38.45 - 38.8|}{38.8} \cdot 100\% = 0.9\%$$

$$\delta_{x=42} = \frac{|45.83 - 45.3|}{45.3} \cdot 100\% = 1\%$$

График:



Вывод

Построили оценки математических ожиданий и дисперсий случайных величин, входящих в систему, а также оценки корреляционного момента и коэффициента корреляции.