

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по лабораторной работе №3
По дисциплине «Базы данных» (второй семестр)

Студент:

Дениченко Александр Р3112

Практик:

Лисицина В.В

Санкт-Петербург
2023 г.

1 Векторная ФНП и векторное поле

$$\bar{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}_x; \mathcal{V}_y) = (\mathcal{V}_x(x; y); \mathcal{V}_y(x; y)) = \mathcal{V}_x(x; y)\bar{i} + \mathcal{V}_y(x; y)\bar{j}$$

Ψ Вектор-функцией в области D называется вектор, координатами которого являются функции, заданные в этой области

$$\bar{F}(x; y) = (P(x; y); Q(x; y)) = P(x; y)\bar{i} + Q(x; y)\bar{j} \text{ in } \mathbb{R}^2$$

$$\bar{F}(x; y; z) = (P(x; y); Q(x; y); R(x; y)) = P(x; y)\bar{i} + Q(x; y)\bar{j} + R(x; y)\bar{k} \text{ in } \mathbb{R}^3$$

Векторное поле в D

График - поле направлений

Линия в каждой точке, которой векторное поле касается неё, называется векторной линией этого поля.

Example

$$\bar{F}(x; y) = (x + y; x - y); P(x; y) = x + y; Q(x; y) = x - y$$

Найдём векторные линии

$$y = y(x); \operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{Q}{P}$$

$$y' = \frac{x - y}{x + y}; y^2 + 2xy - x^2 = C; C \in \mathbb{R}$$

2 Градиент скалярного поля

$$z(x; y) \text{ diff in } D^2$$

$$M \in D: \left(\frac{\partial z}{\partial x}(M); \frac{\partial z}{\partial y}(M) \right) = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} = \operatorname{grad} z(M)$$

$$u(x; y; z) \text{ diff in } D^3$$

$$M \in D: \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \operatorname{grad} u(M)$$

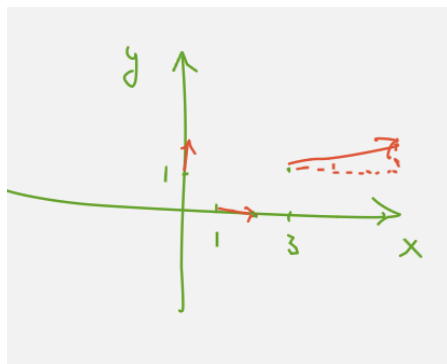
Example

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2); \operatorname{grad} z = (x; y)$$

$$\bar{g}_1 = \operatorname{grad} z(1; 0) = (1; 0)$$

$$\bar{g}_2 = \operatorname{grad} z(0; 1) = (0; 1)$$

$$\bar{g}_3 = \operatorname{grad} z(3; 1) = (3; 1)$$



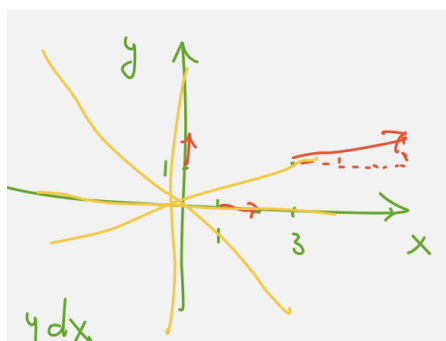
Векторные линии:

$$y' = \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C; C = \ln|C_1|$$

$$|y| = |C_1 x|$$

$$y = C_1 x, C_1 \in \mathbb{R}$$



Свойства градиента:

1) Градиент скалярной функции $z(x; y)$ каждой точке направлен перпендикулярно к линии уровня $z(x; y)$, проходящей через эту точку.

Доказательство:

$$z = z(x; y) \quad z(x; y) = C - \text{level line}$$

$$k_1 = y' = -\frac{z'_x}{z'_y} - \text{угловой коэффициент касательной к линии уровня}$$

$$\text{grad } z(x; y) = (z'_x; z'_y)$$

$$k_2 = \frac{z'_y}{z'_x}$$

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{z'_x}{z'_y} \cdot \frac{z'_y}{z'_x} = -1$$

2). Линейность

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

$$\text{grad}(\alpha f) = \alpha \text{grad}(f), \alpha \in \mathbb{R}$$

3)

$$\text{grad}(f \cdot g) = f \cdot \text{grad}(g) + g \cdot \text{grad}(f)$$

4)

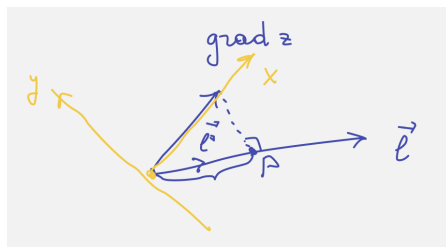
$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{проекция grad}(z)$$

Докажем

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot (\cos \alpha; \cos \beta) = \text{grad } z \cdot \vec{l}^o = |\text{grad } z| \cdot |\vec{l}^o| \cdot \cos \phi = |\text{grad } z| \cdot \phi$$

$$\phi = \angle(\text{grad } z; \vec{l}^o)$$

По какой траектории движется точка Р при изменении направления \vec{l} ?



$P = (x; y)$ - точка

$$x = \frac{\partial z}{\partial l} \cdot \cos \phi$$

$$y = \frac{\partial z}{\partial l} \cdot \sin \phi$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\operatorname{grad} z| \cdot \cos \phi$$

$$\begin{cases} x = |\operatorname{grad} z| \cdot \cos^2 \phi \\ y = |\operatorname{grad} z| \cdot \cos \phi \sin \phi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} |\operatorname{grad} z| \cdot (1 + \cos 2\phi) \\ y = |\operatorname{grad} z| \cdot \sin 2\phi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x - \frac{|g|}{2})^2 = (\frac{1}{2} |g| \cdot \cos 2\phi)^2 \\ y^2 = (\frac{1}{2} |\operatorname{grad} z| \cdot \sin 2\phi)^2 \end{cases}$$

$$\left(x - \frac{|g|}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{|g|^2}{4}$$

окружность с центром в $(\frac{|g|}{2}; 0)$ and $R = \frac{|g|}{2}$
доказано 5)

$$\frac{\partial z}{\partial l}, \bar{l} = \operatorname{grad}(z), = \text{maximum}$$

6)

$$\frac{\partial z}{\partial l}, \bar{l} \perp \operatorname{grad}(z), = 0$$

Example

Найти наибольшую крутизну (угол наклона поверхности) подъёма поверхности

$$z = \ln(x^2 + 2y^2) \text{ in } M(6; 4\sqrt{2}; \ln(100))$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\operatorname{grad} z| = \operatorname{tg} \alpha$$

$$|\operatorname{grad} z| = \left(\frac{2x}{x^2 + 2y^2}; \frac{4y}{x^2 + 2y^2}\right)$$

$$\operatorname{grad} z(M) = \left(\frac{12}{100}; \frac{16\sqrt{2}}{100}\right)$$

$$|\operatorname{grad} z(M)| \approx \frac{1}{4} = \operatorname{tg} \alpha$$

3 Касательная прямая и нормальная плоскость кривой

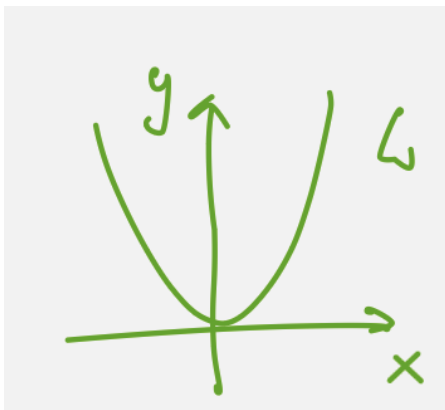
L - кривая на плоскости R 2x мер

1) Явно:

$$y = y(x) \quad x \in [a; b]$$

Example:

$$L: y = x^2$$

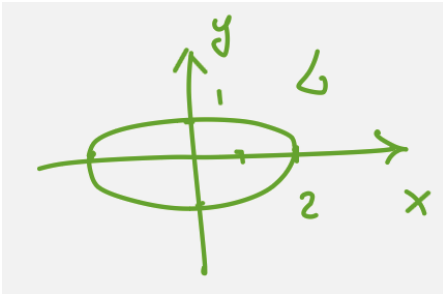


2) Неявно:

$$L: F(x, y) = 0$$

Example:

$$L: y = x^2$$



3) Векторно:

$$L : \bar{r} = \bar{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Example:

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi)$$

L - кривая в пространстве R 3х мер

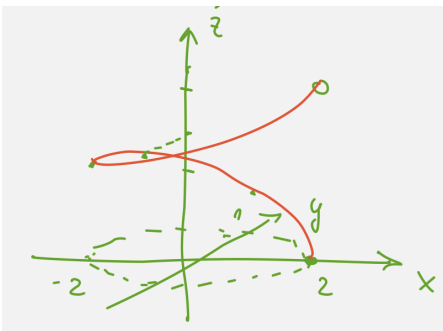
1)

$$L : \bar{r} = \bar{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta]$$

Example:

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi)$$

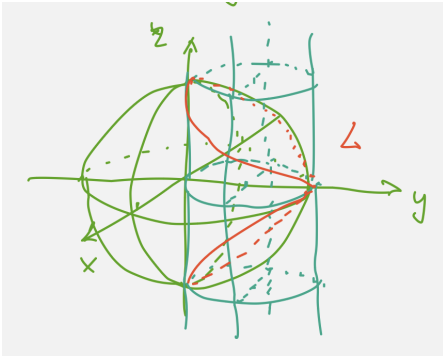


2) Задано неявно, как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Example:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$$



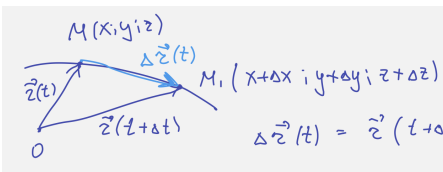
1)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \bar{r} = \bar{r}(t)$$

$$\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k} = (x'(t); y'(t); z'(t))$$

при

$x(t), y(t), z(t)$ — гладкая кривая



$$\Delta \bar{r}(t) = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$$

Уравнение касательной прямой в точке кривой:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$M_0(x_0; y_0; z_0), \quad \bar{s}(a; b; c)$$

=> Уравнение касательной

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} \quad M_0 : \begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \\ z_0 = z(t_0) \end{cases}$$

Уравнение нормальной плоскости в точке кривой

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \quad \bar{n}(A; B; C); \quad M_0(x_0; y_0; z_0)$$

=>

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

4 Касательная плоскость и нормальная прямая поверхность

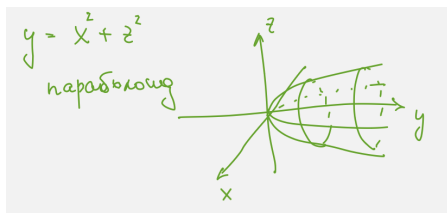
Γ - поверхность в пространстве R^3 мер

1) Явное

$$G : z = f(x; y); \quad x = g(z; y); \quad y = h(x; z);$$

Example:

$$y = x^2 + z^2$$

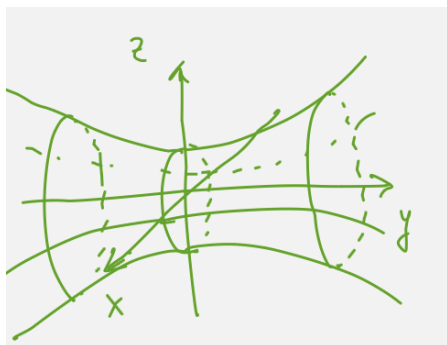


2) Неявное

$$G: F(x; y; z) = 0$$

Example:

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$$



3) Параметрически

$$\begin{cases} x = x(u; v) \\ y = y(u; v) \\ z = z(u; v) \end{cases}$$

Векторное:

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v)$$

Example:

$$x = 2 \cos \phi \sin \theta$$

$$y = 2 \sin \phi \sin \theta$$

$$z = 2 \cos \theta$$

ϕ - азимутальный угол

θ - зенитный угол

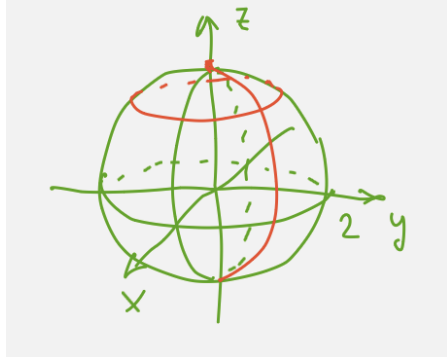
$$\phi \in [0; 2\pi]$$

$$\theta \in [0; \pi]$$

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 4\cos^2\phi\sin^2\theta + 4\sin^2\phi\sin^2\theta + 4\cos^2\theta = 4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

сфера с центром в точке (0;0;0) и R=2



Касательная к поверхности в точке - это касательная к кривой на поверхности, проходящей через эту точку.

$$G : F(x; y; z) = 0; \quad P(x; y; z) - point$$

P - обыкновенная точка к поверхности, если в этой точке все частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ этой поверхности - существуют, непрерывны и не все = 0

P - особая, если все производные равны нулю или одно из них не существует.

Example

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (cono)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z; \quad \Rightarrow P(0, 0, 0)$$

Theorem - о касательной плоскости

P - обыкновенная точка \Rightarrow in P все касательные лежат в одной плоскости

Доказательство

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \bar{\tau} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$G : F(x; y; z) = 0$$

т.к. точки L лежат на поверхности, то

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad | \cdot \frac{d}{dt}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

$$grad(F) \cdot \bar{\tau} = 0$$

$$grad(F) - \text{вектор нормали } n$$

$$\forall \bar{\tau} \perp grad(\bar{F}(P))$$

все касательные лежат в одной плоскости
доказано

Касательная плоскость:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - z_0) = 0; \quad P(x_0; y_0; z_0)$$

Нормальная прямая:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}$$