

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по лабораторной работе №2

По дисциплине «Вычислительная математика» (четвёртый семестр)

Студент:

Дениченко Александр Р3212

Практик:

Наумова Надежда Александровна

Санкт-Петербург
2024 г.

1 Цель работы

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

2 Задание

Часть 1.

1. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически (вид уравнения представлен в табл. 6)
2. Определить интервалы изоляции корней.
3. Уточнить корни нелинейного уравнения (см. табл. 6) с точностью $\epsilon = 10^{-2}$.
4. Используемые методы для уточнения каждого из 3-х корней многочлена представлены в таблице 7.
5. Вычисления оформить в виде таблиц (1-5), в зависимости от заданного метода. Для всех значений в таблице удерживать 3 знака после запятой.
 - 5.1 Для метода половинного деления заполнить таблицу 1.
 - 5.2 Для метода хорд заполнить таблицу 2.
 - 5.3 Для метода Ньютона заполнить таблицу 3.
 - 5.4 Для метода секущих заполнить таблицу 4.
 - 5.5 Для метода простой итерации заполнить таблицу 5. Проверить условие сходимости метода на выбранном интервале.
6. Заполненные таблицы отобразить в отчете.

Вид нелинейного уравнения для вычислительной реализации:

$$3x^3 + 1,7x^2 - 15,42x + 6,89$$

Выбор метода для вычислительной реализации задачи:

Номер варианта	Крайний правый корень	Крайний левый корень	Центральный корень
8	Метод простой итерации (5)	Метод хорд (2)	Метод Ньютона (3)

Таблица 1: Методы для вычислительной реализации

3 Выполнение первой части

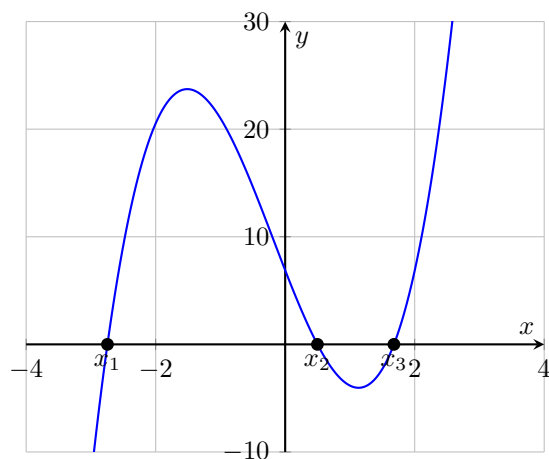
Точки пересечения:

$$x_3(1.67953, 0)$$

$$x_2(0.498258, 0)$$

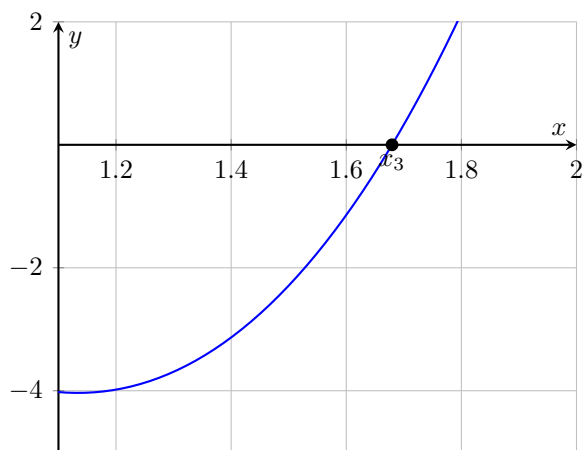
$$x_1(-2.7445, 0)$$

Построим график функции:



$$3x^3 + 1.7x^2 - 15.42x + 6.89$$

1. Метод простой итерации для $x_3(1.67953, 0)$.



$$3x^3 + 1.7x^2 - 15.42x + 6.89$$

Приведём уравнение:

$$3x^3 + 1.7x^2 - 15.42x + 6.89 = 0$$

к следующему виду:

$$x = \phi(x)$$

получим:

$$\phi(x) = 0.195x^3 + 0.110x^2 + 0.447 = 0$$

$$\phi'(x) = 0.585x^2 + 0.220x$$

Пусть начальное приближение будет:

$$a_0 = 1, 2; \quad b_0 = 2$$

Тогда проверим условие сходимости:

$$\phi'(1, 2) = 0.805 < 1$$

$$\phi'(2) = 0.585 \cdot 4 + 0.220 \cdot 2 = 2.34 + 0.44 = 2.78 > 1$$

$$q = \max_{[a, b]} |\phi'(x)| = 2.78 > 1$$

Сходимости нет.

Пойдём по другому способу, где применяется приём введения параметра λ :

$$f(x) = 3x^3 + 1,7x^2 - 15,42x + 6,89$$

$$\lambda f(x) = 0 \quad (\lambda = 0)$$

$$\phi(x) = x + \lambda f(x)$$

$$\phi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$$

$$f'(x) = 9x^2 + 3,4x - 15,42$$

$$f'(1,2) = 9 \cdot (1,2)^2 + 3,4 \cdot (1,2) - 15,42 = 1,62$$

$$f'(2) = 9 \cdot 4 + 3,4 \cdot 2 - 15,42 = 27,38$$

Так как $f'[a, b] > 0$, то рассматриваем:

$$\lambda = -\frac{1}{\max|f'(x)|} = -\frac{1}{27,38} = -0,037$$

Подставим:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x - 0,037 \cdot (3x^3 + 1,7x^2 - 15,42x + 6,89) = \\ &= 1,571x - 0,111x^3 - 0,063x^2 - 0,255 \\ \phi'(x) &= 1,571 - 0,333x^2 - 0,126x\end{aligned}$$

Проверим точки:

$$\begin{aligned}\phi'(1,2) &= 1,571 - 0,333 \cdot (1,2)^2 - 0,126 \cdot 1,2 = 0,940 < 1 \\ \phi'(2) &= 1,571 - 0,333 \cdot (2)^2 - 0,126 \cdot 2 = -0,013 < 1\end{aligned}$$

Условие сходимости выполняется!

$$x_0 = 1,2$$

$$x_1 = \phi(x_0) = 1,571 \cdot 1,2 - 0,111 \cdot (1,2)^3 - 0,063 \cdot (1,2)^2 - 0,255 = 1,348$$

$$x_2 = 1,571 \cdot 1,348 - 0,111 \cdot (1,348)^3 - 0,063 \cdot (1,348)^2 - 0,255 = 1,476$$

$$f(x_2) = 3 \cdot (1,476)^3 + 1,7 \cdot (1,476)^2 - 15,42 \cdot (1,476) + 6,89 = -2,520$$

...

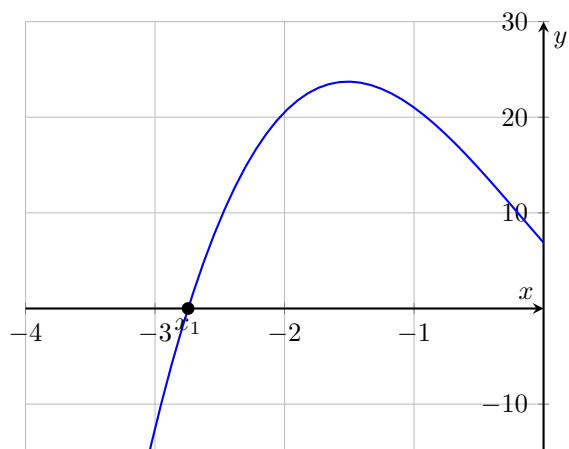
$$f(x) = 3x^3 + 1,7x^2 - 15,42x + 6,89$$

$$\phi(x) = 1,571x - 0,111x^3 - 0,063x^2 - 0,255$$

Номер	x_i	x_{i+1}	$\phi(x_{i+1})$	$f(x_{i+1})$	$ x_{i+1} - x_i $
0	1,2	1,348	1,476	-2,520	0,148
1	1,348	1,476	1,57	-2,520	0,128
2	1,476	1,57	1,627	-1,519	0,094
3	1,57	1,627	1,656	-0,778	0,057
4	1,627	1,656	1,67	-0,36	0,029
5	1,656	1,67	1,676	-0,148	0,014
6	1,67	1,676	1,679	-0,055	0,006

Таблица 2: Уточнение корня уравнения методом простой итерации

2. Метод хорд для $x_1(-2.7445, 0)$.



$$3x^3 + 1.7x^2 - 15.42x + 6.89$$

Возьму за изолированный интервал $[-3, -2]$

$$f(x) = 3x^3 + 1.7x^2 - 15.42x + 6.89$$

Вычисление будем производить по формуле:

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

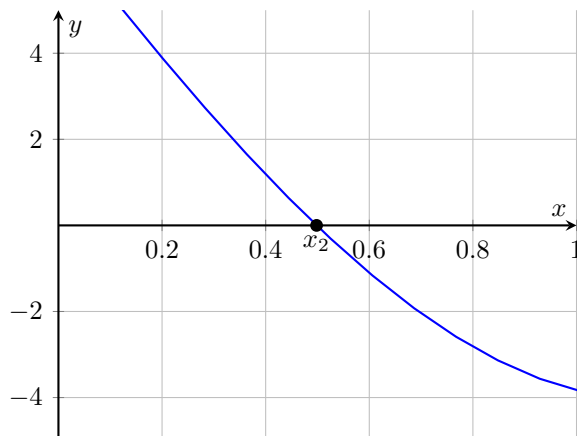
Номер	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$ x_{i+1} - x_i $
0	-3	-2	-2.62062	-12.55	20.53	4.98259	0.37938
1	-3	-2.62062	-2.72843	-12.55	4.98247	0.68357	0.10781
2	-3	-2.72843	-2.74246	-12.55	0.68375	0.08569	0.01403
3	-3	-2.74246	-2.74421	-12.55	0.08574	0.01062	0.00175

Таблица 3: Уточнение корня уравнения методом хорд

Подсчитанный результат:

$$x \approx -2.74421$$

3. Метод Ньютона $x_2(0.498258, 0)$.



$$3x^3 + 1.7x^2 - 15.42x + 6.89$$

Возьму изолированный интервал $[0.4, 0.6]$

$$f(x) = 3x^3 + 1.7x^2 - 15.42x + 6.89$$

$$f(0.4) = 3 \cdot (0.4)^3 + 1.7 \cdot (0.4)^2 - 15.42 \cdot 0.4 + 6.89 = 1.186$$

$$f(0.6) = 3 \cdot (0.6)^3 + 1.7 \cdot (0.6)^2 - 15.42 \cdot 0.6 + 6.89 = -1.102$$

Найдём производные:

$$f'(x) = 9x^2 + 3.4x - 15.42; \quad f'(0.4) = 9(0.4)^2 + 3.4 \cdot (0.4) - 15.42 = -12.62;$$

$$f'(0.6) = 9 \cdot 0.6^2 + 3.4 \cdot 0.6 - 15.42 = -10, 14$$

(первая производная сохраняет знак на интервале)

$$f''(x) = 18x + 3.4; \quad f''(0.4) = 18 \cdot 0.4 + 3.4 = 10.6; \quad f''(0.6) = 18 \cdot 0.6 + 3.4 = 14, 2$$

(вторая производная сохраняет знаки)

Выполняется условие $f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0$, тогда $x_0 = a_0 = 0.4$

Номер	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$ x_{i+1} - x_i $
0	0.4	1.186	-12.62	0.49398	0.09398
1	0.49398	0.049273	-11.54432	0.49825	0.00427
2	0.49825	$9.147 \cdot 10^{-5}$	-11.49167	0.49825	0

Таблица 4: Уточнение корня уравнения методом хорд

Условие окончания итер метода соблюдается:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon \quad |f(x_n)| \leq \epsilon$$

Тогда ответ:

$$x \approx 0.49825$$

4 Выполнение второй части

Задание:

1. Отделить корни заданной системы нелинейных уравнений графически (вид системы представлен в табл. 8).
2. Используя указанный метод, решить систему нелинейных уравнений с точностью до 0,01.
3. Для метода простой итерации проверить условие сходимости метода.
4. Подробные вычисления привести в отчете.

Система нелинейных уравнений для вычислительной реализации:

$$\begin{cases} tg \, x \cdot y = x^2 \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Система имеет не более двух решений, это видно по графику. Решения в точках x_1, x_2 . Выразим:

$$\begin{cases} tg \, x \cdot y - x^2 = 0 \\ 0.8x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Построим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\cos^2 x} - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = tg(x)$$

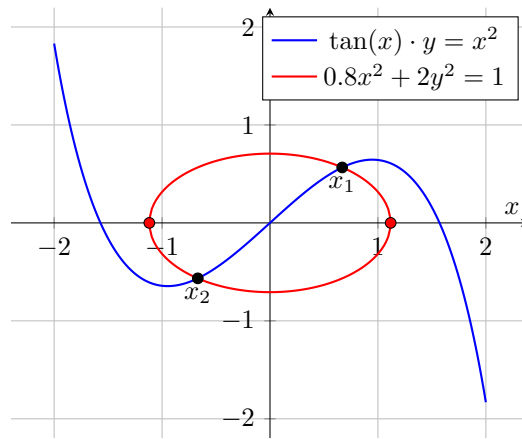


Рис. 1: Система нелинейных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 1.6x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y\end{aligned}$$

Получим матрицу Якоби:

$$\begin{vmatrix} \frac{y}{\cos^2 x} - 2x & tg(x) \\ 1.6x & 4y \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} tg x \cdot y - x^2 \\ 0.8x^2 + 2y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Возьмём точку $x_0 = 0.5$; $y_0 = 0.5$

$$\begin{cases} -0.35078\Delta x + 0.5463\Delta y = -0.02315 \\ 0.8\Delta x + 2\Delta y = 0.3 \end{cases}$$

Решения:

$$\Delta x = 0.185; \quad \Delta y = 0.076$$

Проверка:

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 0.5 + 0.185 = 0.685$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y = 0.5 + 0.076 = 0.576$$

Продолжим вычисление при новом приближении $x_0 = 0.685$; $y_0 = 0.576$

$$\begin{vmatrix} \frac{0.576}{\cos^2(0.685)} - 2 \cdot 0.685 & tg(0.685) \\ 1.6 \cdot 0.685 & 4 \cdot 0.576 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} tg(0.685) \cdot 0.576 - 0.685^2 \\ 0.8 \cdot (0.685)^2 + 2 \cdot (0.576)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -0.40956\Delta x + 0.81697\Delta y = -0.00135 \\ 1.096\Delta x + 2.304\Delta y = -0.03893 \end{cases}$$

Решения:

$$\Delta x = -0.016; \quad \Delta y = -0.009;$$

Проверка:

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 0.685 - 0.016 = 0.669$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = 0.576 - 0.009 = 0.567$$

Продолжим вычисление при новом приближении $x_0 = 0.669$; $y_0 = 0.567$

$$\begin{vmatrix} \frac{0.567}{\cos^2(0.669)} - 2 \cdot (0.669) & tg(0.669) \\ 1.6 \cdot 0.669 & 4 \cdot 0.567 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} tg(0.669) \cdot 0.567 - (0.669)^2 \\ 0.8 \cdot (0.669)^2 + 2 \cdot (0.567)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.416573\Delta x + 0.790628\Delta y = -0.00072 \\ 1.0704\Delta x + 2.268\Delta y = -0.00103 \end{cases}$$

Решения:

$$\Delta x = -0.008 < \epsilon; \quad \Delta y = 0.003 < \epsilon;$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = 0.669 - 0.008 = 0.661$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y = 0.576 + 0,003 = 0.579$$

5 Программная реализация задачи

Задачи для нелинейных:

1. Все численные методы (см. табл. 9) должны быть реализованы в виде отдельных подпрограмм/методов/классов.
2. Пользователь выбирает уравнение, корень/корни которого требуется вычислить (3-5 функций, в том числе и трансцендентные), из тех, которые предлагает программа.
3. Предусмотреть ввод исходных данных (границы интервала/начальное приближение к корню и погрешность вычисления) из файла или с клавиатуры по выбору конечного пользователя.
4. Выполнить верификацию исходных данных. Необходимо анализировать наличие корня на введенном интервале. Если на интервале несколько корней или они отсутствуют – выдавать соответствующее сообщение. Программа должна реагировать на некорректные введенные данные.
5. Для методов, требующих начальное приближение к корню (методы Ньютона, секущих, хорд с фиксированным концом, простой итерации), выбор начального приближения x_0 (а или b) вычислять в программе.
6. Для метода простой итерации проверять достаточное условие сходимости метода на введенном интервале.
7. Предусмотреть вывод результатов (найденный корень уравнения, значение функции в корне, число итераций) в файл или на экран по выбору конечного пользователя.

Функции для исследования:

1. $x^3 - 4.5x^2 - 9.21x - 0.383$
2. $x^3 - x + 4$
3. $\sin(x) + 0.1$

Методы:

1. Метод половинного деления
2. Метод Ньютона
3. Метод простой итерации