УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Малышева Татьяна Алексеевна,

доцент, к.т.н.

tamalysheva@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2024

Численные методы решения нелинейных уравнений

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение вида **f(x)= 0,** где **f(x)** — заданная алгебраическая или трансцендентная (включает в себя тригонометрические или экспоненциальные функции) функция.

f(x)= $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ (имеет *n*-корней)

f(x)= $\sin x+0{,}1x^2$ (имеет *бесконечное множество* решений)

Решить уравнение – это найти такое $x^* \in R$: **f**(x^*)=0. Значение x^* называют *корнем уравнения*.

Методы делятся на:

- **точные** (позволяют найти решение непосредственно с помощью формул)
- **итерационные** (приближенные)

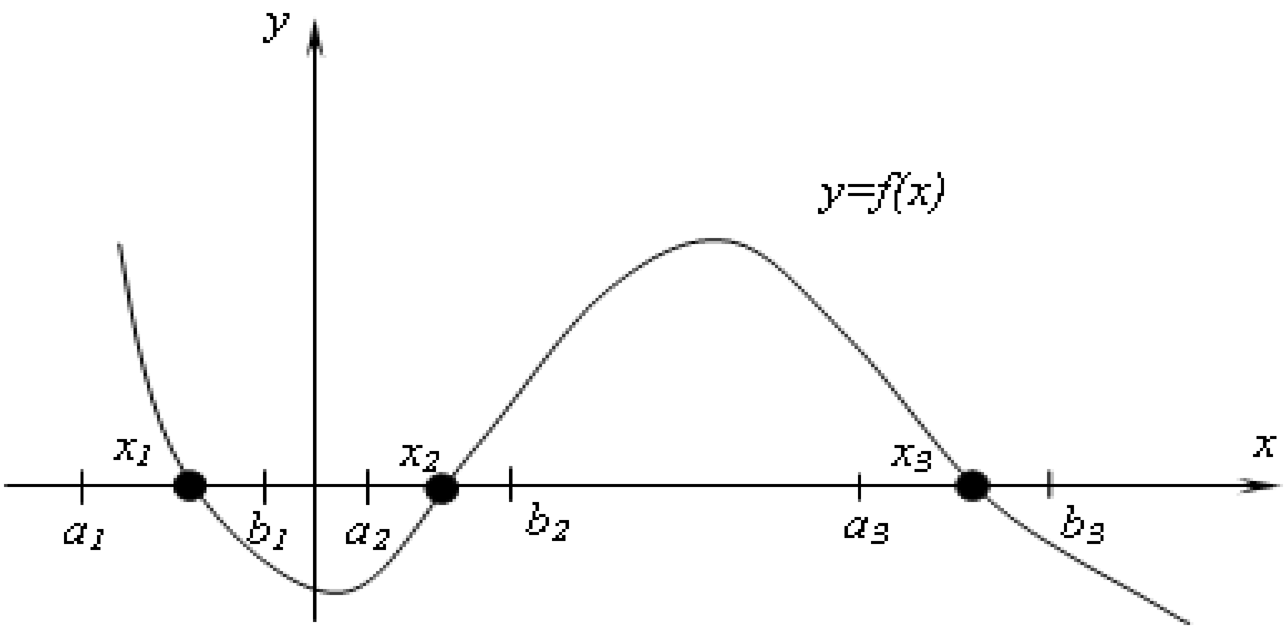
Этапы приближенного решения нелинейных уравнений

- Отделение (локализация) корней, т.е. определение интервала [a,b], на котором содержится ТОЛЬКО один корень уравнения **f(x)=0**. Такой интервал называется интервалом изоляции корня
- Уточнение корней до заданной точности

Способы отделения корней

- графический
- табличный
- аналитический

Графическое отделение корней



Табличное отделение корней

Аналитический способ состоит в нахождении экстремумов функции $f(x)$, исследование ее поведения при $x \to \pm\infty$ и нахождении участков возрастания и убывания функции.

Табличный способ – это построение таблицы табулирования функции.

О наличии корней свидетельствуют перемены знака функции. Чтобы не произошла потеря корней, шаг изменения аргумента должен быть достаточно мелким, а интервал изменения достаточно широким.

x	f(x)
-3	-29,280
-2,5	-13,818
-2	-3,330
-1,5	2,933
-1	5,720
-0,5	5,783
0	3,870
0,5	0,733
1	-2,880
1,5	-6,218
2	-8,530
2,5	-9,068
3	-7,080
3,5	-1,818
4	7,470
4,5	21,533
5	41,120

Теоремы существования корней

- ***Необходимое условие существования корня уравнения на отрезке* [a,b]:**

Теорема 1. Если непрерывная функция **f(x)** на концах отрезка [a; b] принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то на этом отрезке содержится хотя бы один корень уравнения.

- ***Достаточное условие единственности корня* на отрезке [a,b]:**

Теорема 2. Если непрерывная функция **f(x)** на отрезке [a; b] принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная **f'(x)** сохраняет знак внутри отрезка (т.е. **f(x)** монотонна), то внутри отрезка существует единственный корень уравнения **f(x) = 0**.

Методы уточнения приближенных значений действительных корней

- *метод половинного деления (метод дихотомии);*
- *метод хорд*
- *метод Ньютона (метод касательных) ;*
- *модифицированный метод Ньютона (метод секущих);*
- *метод простых итераций ;*
- и др.

Основные требования и показатели численных методов

- устойчивость;
- сходимость;
- эффективность (скорость сходимости);

Алгоритм считается устойчивым, если он обеспечивает нахождение существующего и единственного решения при различных исходных данных (малые погрешности в исходной величине приводят к малым погрешностям в результате расчетов)

Алгоритм сходится, если итерационная последовательность приближений

$x_1, x_2, \ldots, x_n \to x^*$, $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

Скорость сходимости (эффективность) – обозначает количество итераций, затраченных алгоритмом для достижения приемлемой точности решения задачи. Чем выше скорость, тем меньше итераций необходимо выполнить.

Различают линейную, сверхлинейную, квадратичную скорость:

$|x^n - x^*| \leq \alpha |x^{n-1} - x^*|^{\beta}$, $\alpha \in (0,1)$, $\beta = 1$ – линейная,

$1 < \beta < 2$ – сверхлинейная, $\beta = 2$ – квадратичная.

Метод половинного деления

Идея метода: начальный интервал изоляции корня делим пополам, получаем начальное приближение к корню:

$$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$$

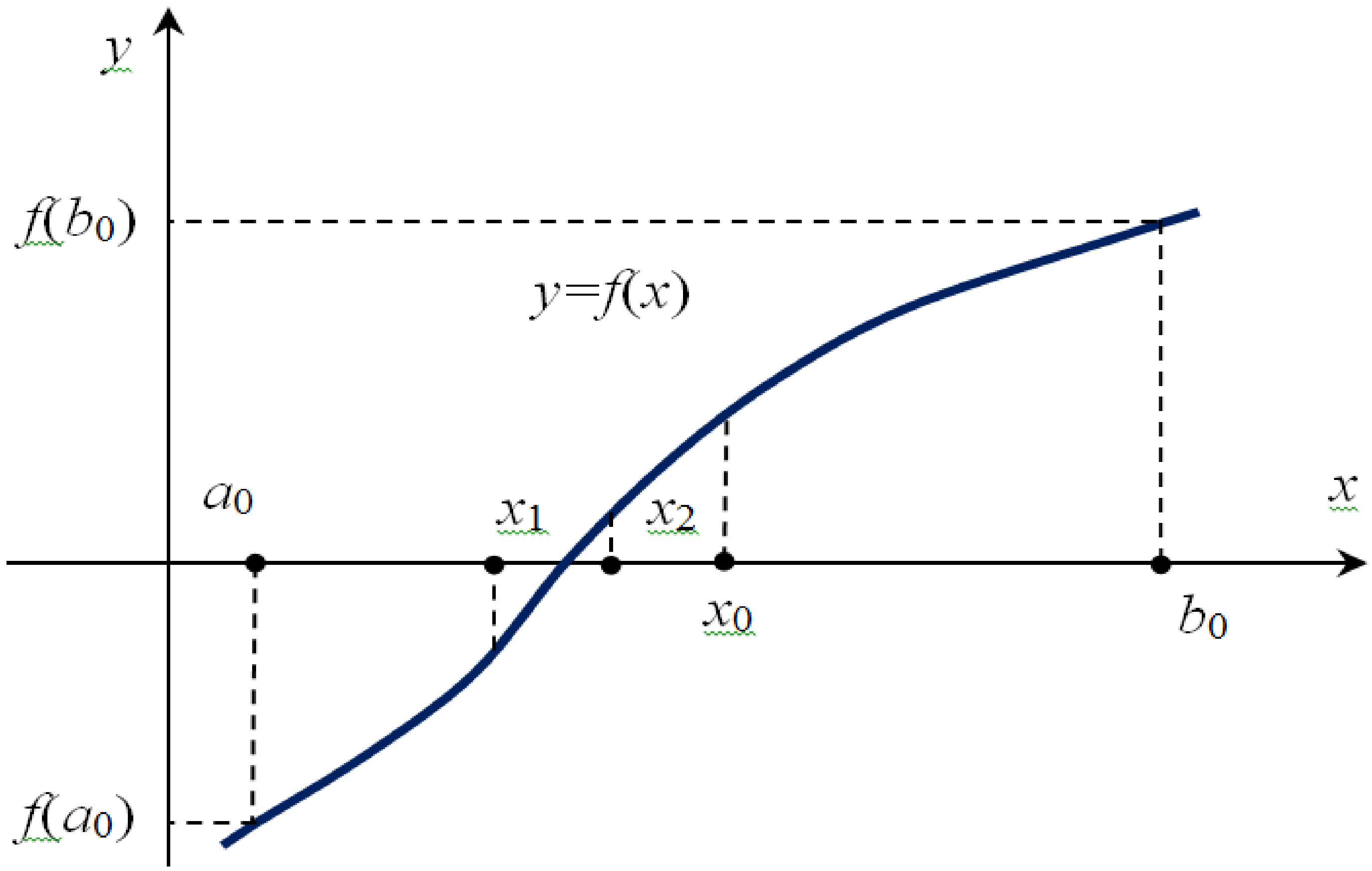
Вычисляем $f(x_0)$. В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0,x_0]$ либо $[b_0,x_0]$. Другую половину отрезка $[a_0, b_0]$, на которой функция $f(x)$ знак не меняет, отбрасываем. Новый интервал вновь делим пополам, получаем очередное приближение к корню: $x_1=(a_1+b_1)/2$. и т.д.

Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_i = \frac{a_i + b_i}{2}}$$

Приближенное значение корня: $x^*= \frac{a_n+b_n}{2}$ или $x^*= a_n$ или $x^*= b_n$

Визуализация метода половинного деления



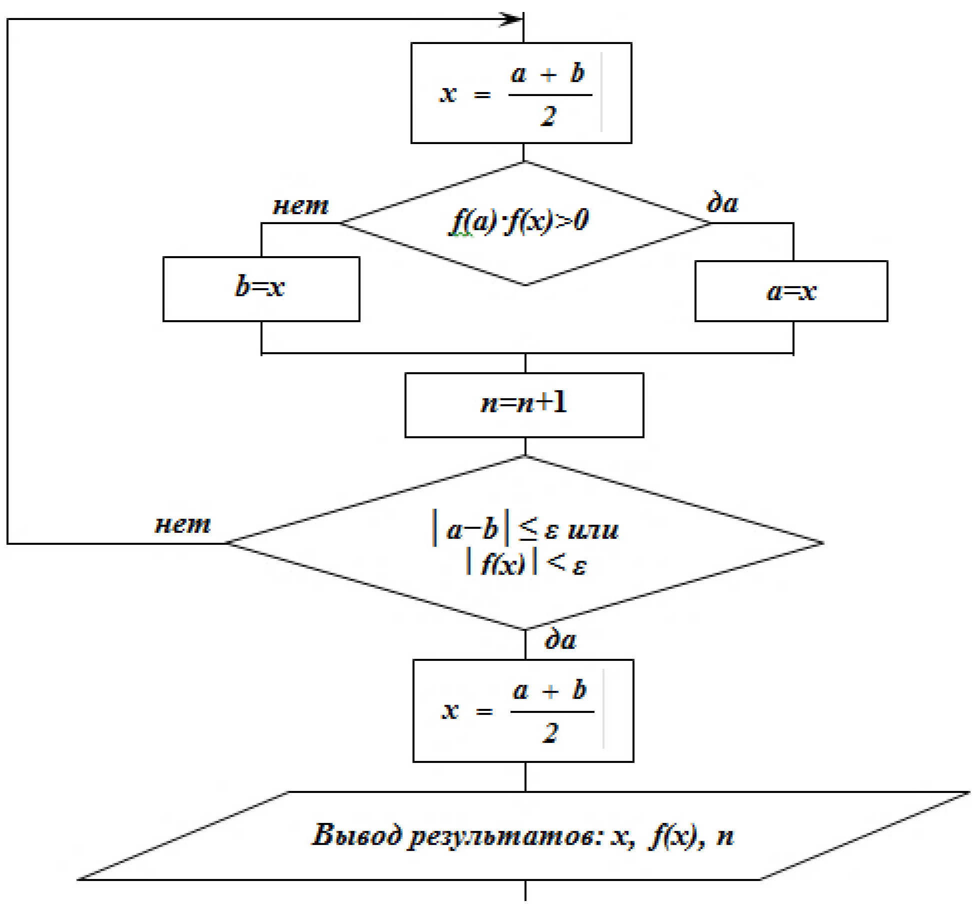
Критерии окончания итерационного процесса

Сходимость итерационного процесса фиксируется следующими способами:

1. Сходимость по аргументу: $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$
2. Сходимость по функции: $|f(x_n)| \le \varepsilon$

Для метода половинного деления можно рассматривать еще один критерий окончания итерационного процесса: $|a_n - b_n| \le \varepsilon$

Блок-схема метода половинного деления



Достоинства и недостатки метода ПД

Достоинства:

- идейная простота и надежность метода;
- непритязательность к свойствам функции $f(x)$ — она должна быть лишь непрерывной, а дифференцируемость не предполагается;
- обладает абсолютной сходимостью (близость получаемого численного решения задачи к истинному решению).

Рекомендация: применять когда требуется высокая надежность счета, а скорость несущественна.

Недостатки:

- если интервал содержит несколько корней, то неизвестно к какому относится вычислительный процесс;
- медленный метод: имеет линейную сходимость.

Оценка числа итераций

$$|a_1 - b_1| = \frac{|a_0 - b_0|}{2},\ |a_2 - b_2| = \frac{|a_1 - b_1|}{2} = \frac{|a_0 - b_0|}{2^2}$$

$$|a_k - b_k| = |a_0 - b_0| \cdot 2^{-k}$$

$$|a_0 - b_0| \cdot 2^{-k} \le \varepsilon$$

$$k \ge \log_2 \frac{|a_0 - b_0|}{\varepsilon}$$

Число итераций: $n = int(\log_2 \frac{|a_0 - b_0|}{\varepsilon}) + 1$

Для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$, при $|a_0 - b_0| = 1$

$$k = 9{,}966;\ \ n = 9 + 1 = 10$$

После 10 шагов дихотомии обеспечиваются лишь т р и верных десятичных знака искомого корня.

Пример 1. Метод половинного деления

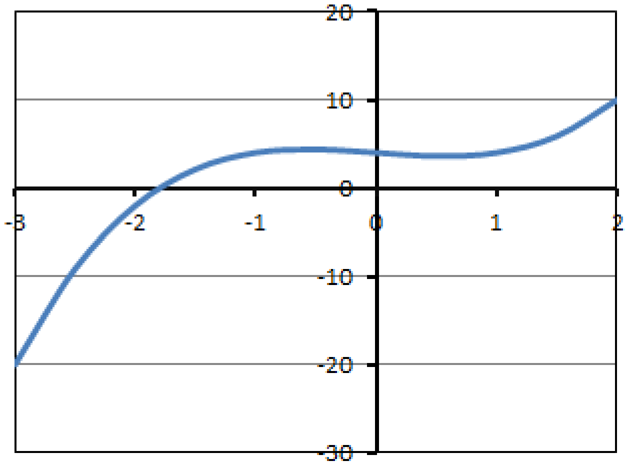
Найти корень уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

$$n = \log_2 \frac{|a_0 - b_0|}{\varepsilon} + 1 = 7$$

$$x^* = \frac{a_7 + b_7}{2} \approx -1{,}79297$$



№ итерации	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	|a-b|
0	-2,00000	-1,00000	-1,50000	-2,00000	4,00000	2,12500	1
1	-2,00000	-1,50000	-1,75000	-2,00000	2,12500	0,39063	0,5
2	-2,00000	-1,75000	-1,87500	-2,00000	0,39063	-0,71680	0,25
3	-1,87500	-1,75000	-1,81250	-0,71680	0,39063	-0,14185	0,125
4	-1,81250	-1,75000	-1,78125	-0,14185	0,39063	0,12961	0,0625
5	-1,81250	-1,78125	-1,79688	-0,14185	0,12961	-0,00480	0,03125
6	-1,79688	-1,78125	-1,78906	-0,00480	0,12961	0,06273	0,015625
7	-1,79688	-1,78906	**-1,79297**	-0,00480	0,06273	0,02905	0,0078125

$|a_7 - b_7| = 0{,}0078125 < \varepsilon$ $\;|f(x_7)| = 0{,}02905 > \varepsilon$,т.к. анализировали ширину интервала

Метод хорд

Идея метода: функция $y = f(x)$ на отрезке [a, b] заменяется хордой и в качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью абсцисс.

Уравнение хорды, проходящей через точки $A\big(a, f(a)\big)$ и $B\big(b, f(b)\big)$:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

Точка пересечения хорды с осью абсцисс ($y = 0$): $x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$

Алгоритм метода:

0 шаг: Находим интервал изоляции корня $[a_0, b_0]$

1 шаг: Вычисляем x_0: $x_0 = a_0 - \frac{b_0-a_0}{f(b_0)-f(a_0)} f(a_0)$

2 шаг: Вычисляем $f(x_0)$.

3 шаг: В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0, x_0]$ либо $[b_0, x_0]$.

4 шаг: Вычисляем x_1 и т.д (повторяем 1-3 шаги).

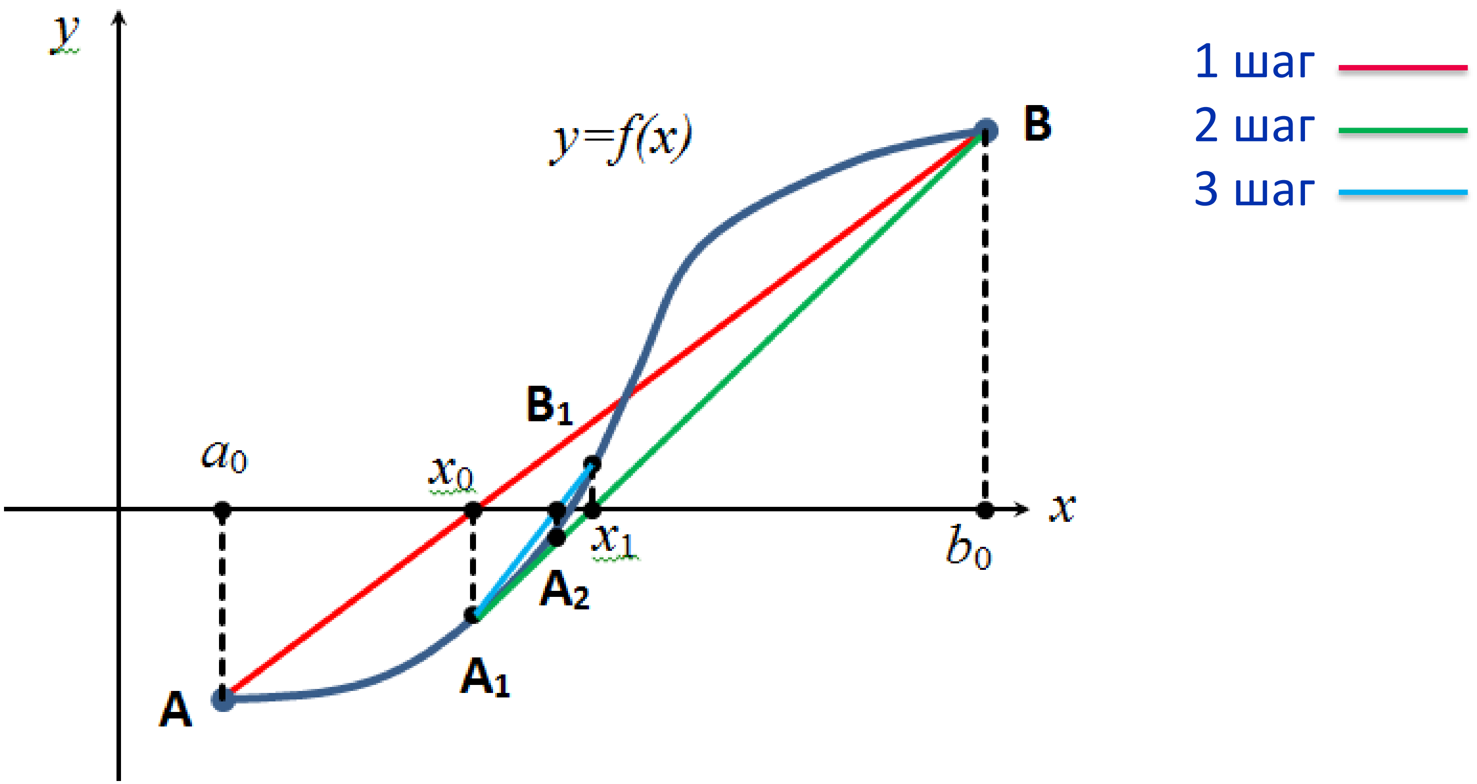
Рабочая формула метода:

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

Критерии окончания итерационного процесса: $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ или $|a_n - b_n| \le \varepsilon$ или $|f(x_n)| \le \varepsilon$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Визуализация метода хорд



Метод хорд

Семейство *хорд* может строиться:

а) при фиксированном левом конце *хорд*, тогда x_0=b (рис. 1а)

Рабочая формула метода:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a - x_i}{f(a) - f(x_i)} f(x_i)$$

б) при фиксированном правом конце *хорд*, тогда x_0=a (рис. 1б)

Рабочая формула метода:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{b - x_i}{f(b) - f(x_i)} f(x_i)$$

В этом случае **НЕ** надо определять на каждой итерации новые значения a, b

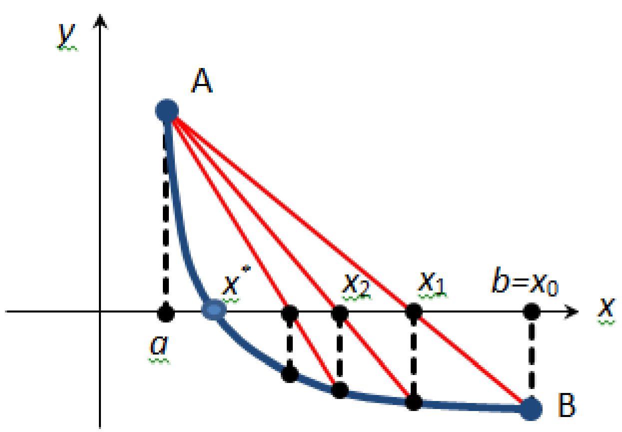


Рис. 1а

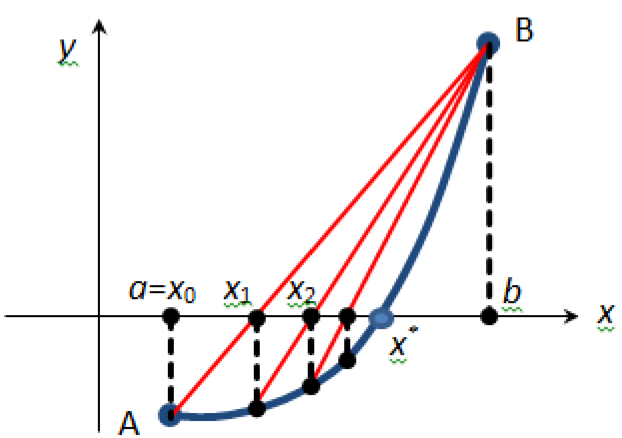


Рис. 1б

Метод хорд. Определение фиксированного конца

1 случай.

$\boldsymbol{x_0 = a,}$ **граница b - зафиксирована**

Производные имеют одинаковые знаки на отрезке $[a, b]$:

$\boldsymbol{f'(x) \cdot f''(x) > 0}$

$f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$, функция возрастает и выпукла вниз

$f'(x) < 0$ и $f''(x) < 0$, функция убывает и выпукла вверх

2 случай.

$\boldsymbol{x_0 = b,}$ **граница $\boldsymbol{a}$ - зафиксирована**

Производные имеют разные знаки на отрезке $[a, b]$:

$\boldsymbol{f'(x) \cdot f''(x) < 0}$

$f'(x) < 0$ и $f''(x) > 0$, функция убывает и выпукла вниз

$f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$, функция возрастает и выпукла вверх

Достоинства и недостатки метода хорд

Достоинства:

- Простота реализации

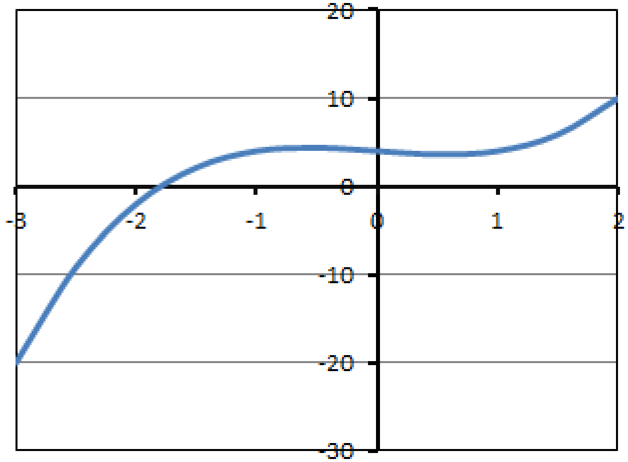
Недостатки:

- Скорость сходимости – линейная. Порядок сходимости метода хорд выше, чем у метода половинного деления.
- Выбор начального приближения.

Пример 2. Метод хорд

Найти корень уравнения $x^3 - x + 4 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

$f(-2) < 0 \;\; f(-1) > 0$



$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

$n = 4$

$x^* \approx -1{,}79611$

№ итерации	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-2,00000	-1,00000	-1.66667	-2,00000	4,00000	1.03704	0.33333
1	-2,00000	-1.66667	-1.78049	-2,00000	1.03704	0.13610	0.11382
2	-2,00000	-1.78049	-1.79447	-2,00000	0.13610	0.01603	0.01399
3	-2,00000	-1.79447	**-1.79611**	-2,00000	0.01603	0.00186	0.00163

Пример 3. Метод хорд. Фиксированный конец

Найти корень уравнения $x^3 - x + 4 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ на интервале [-2, -1]

$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$

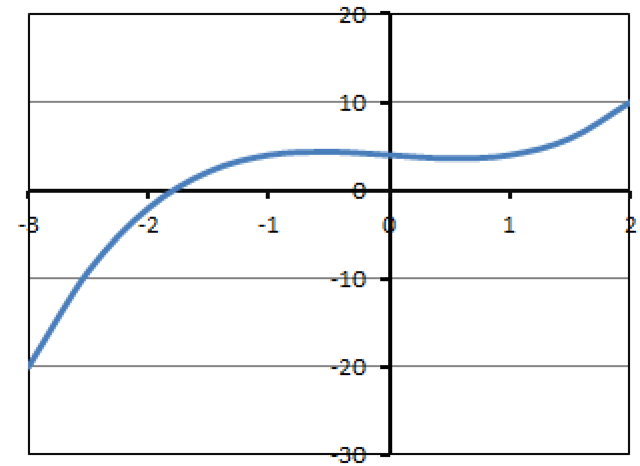
$f''(x) = 6x < 0$

$f'(x) \cdot f''(x) < 0 \ \rightarrow x_0 = b = -1$

a - зафиксирована

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a - x_i}{f(a) - f(x_i)} f(x_i)$$

$n = 4$



№ итерации	a	x	F(a)	F(x)	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-2,00000	-1.66667	-2,00000	1.03704	0.66667
1	-2,00000	-1.78049	-2,00000	0.13610	0.11382
2	-2,00000	-1.79447	-2,00000	0.01603	0.01399
3	-2,00000	**-1.79611**	-2,00000	0.00186	0.00163

Метод Ньютона (касательных)

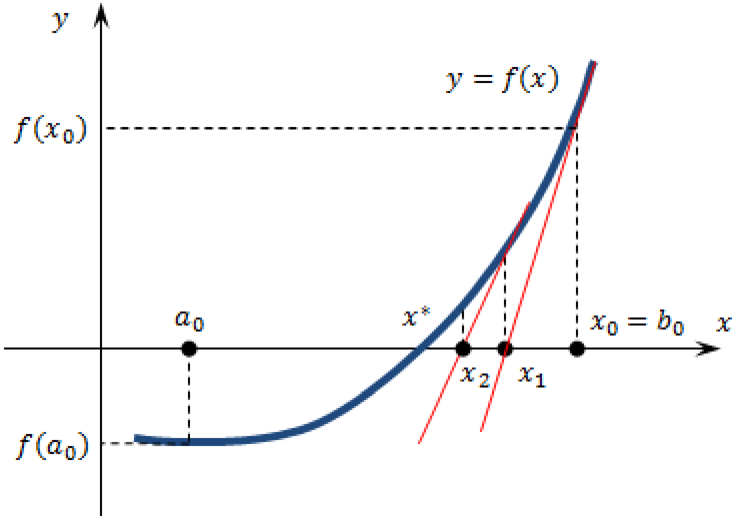
Идея метода: функция $y = f(x)$ на отрезке [a, b] заменяется касательной и в качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

Пусть $x_0 \in [a, b]$ - начальное приближение. Запишем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$в этой точке:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Найдем пересечение касательной с осью x:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}}$$

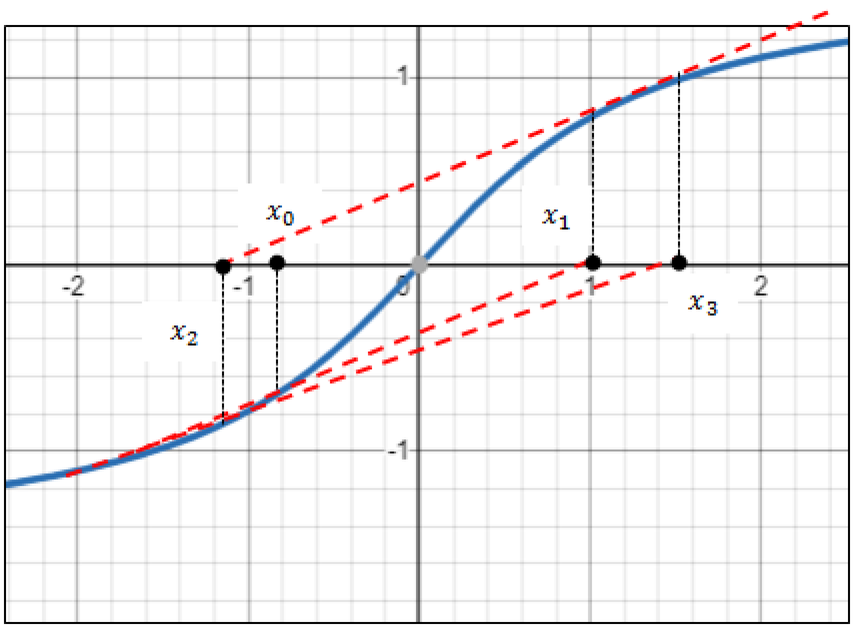
Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \quad \text{или} \quad \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \le \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_n)| \le \varepsilon$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Сходимость метода Ньютона

$$f(x) = arctgx$$



$$f(x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$f(x)''$ меняет знак на интервале изоляции корня

Условия сходимости метода Ньютона

Сходимость метода Ньютона зависит от того, насколько близко к корню выбрано начальное приближение. Тогда скорость сходимости велика.

Метода Ньютона эффективен, если выполняются условия сходимости:

- производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[a; b]$,
- производная $f'(x) \neq 0$.

Выбор начального приближения $x_0 \in [a; b]$:

Метод обеспечивает быструю *сходимость*, если выполняется условие:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

(тот конец интервала, для которого знаки функции и второй производной совпадают)

$$x_0 = \begin{cases} a_0, & \text{если } f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0 \\ b_0, & \text{если } f(b_0) \cdot f''(b_0) > 0 \end{cases}$$

Достоинства и недостатки метода Ньютона

Достоинства:

- квадратичная сходимость .

Недостатки:

- функции, участвующие в расчетах, должны быть дифференцируемыми;
- необходимость вычисления производной на каждой итерации;
- выбор начального приближения.

Пример 4. Метод Ньютона

Найти корень уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

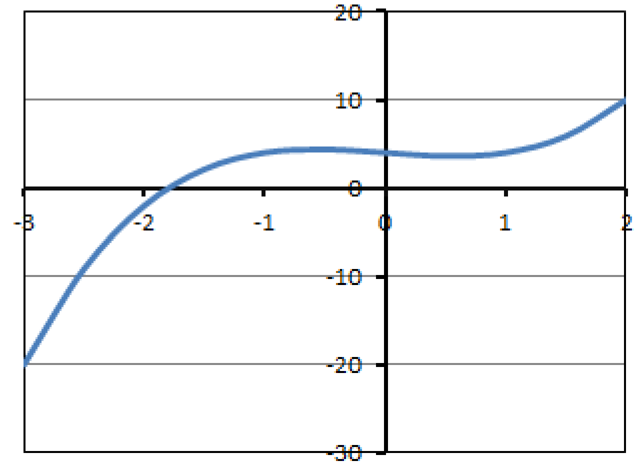
$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f''(x) = 6x$

Сохраняют знак на [-2,-1]

$f(-2) < 0 \quad f(-1) > 0$

$f''(-2) < 0 \rightarrow x_0 = -2$

$n = 3 \quad x^* \approx -1{,}79632$



№ итерации	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0	-2,00000	-2,00000	11.00000	-1.81818	0.18182
1	-1.81818	-0.19234	8.91736	-1.79661	0.02157
2	-1.79661	-0.00253	8.68345	**-1.79632**	0.00029

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \quad |f(x_n)| \le \varepsilon$$

Метод секущих

Упростим метод Ньютона, заменив $f'(x)$ разностным приближением:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)} \qquad i = 1,2 \ldots$$

Метод секущих является *двухшаговым*, т.е. новое приближение x_{i+1} определяется двумя предыдущими итерациями x_i и x_{i-1}.

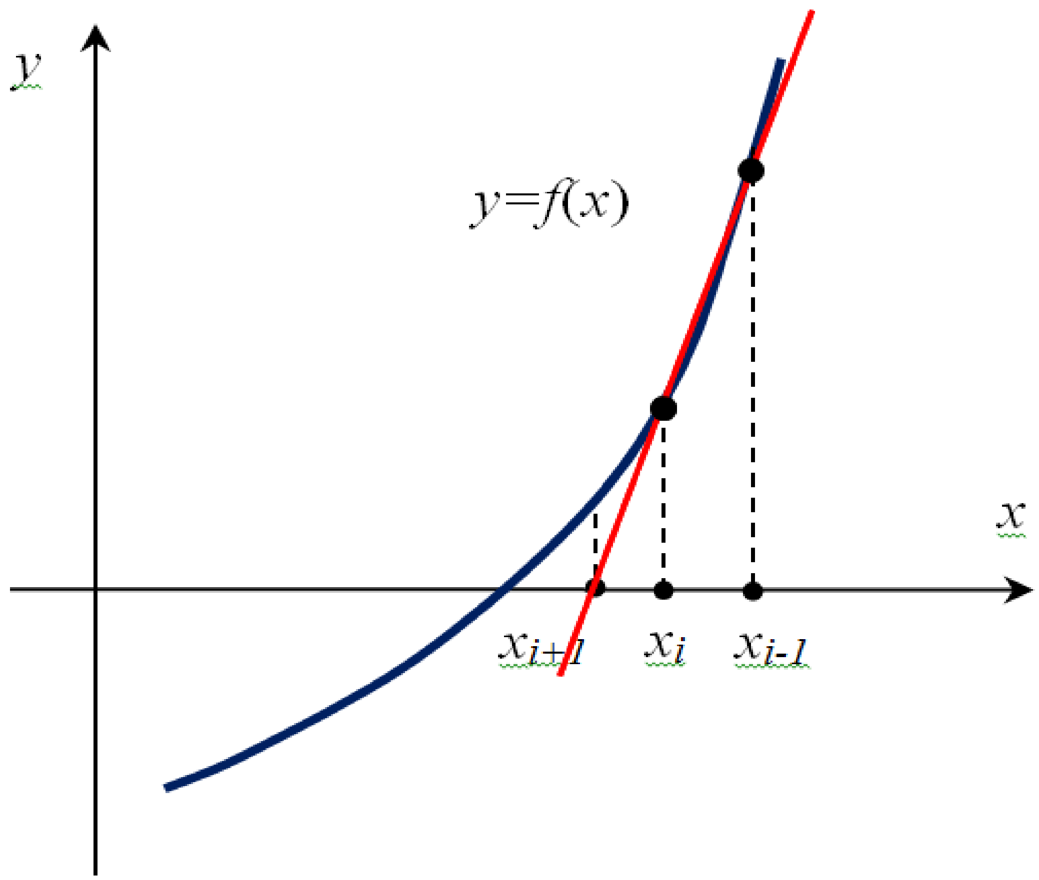
Выбор x_0 определяется как и в методе Ньютона, x_1- выбирается рядом с начальным самостоятельно.

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \quad \text{или} \quad \boldsymbol{|f(x_n)| \le \varepsilon}$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Визуализация метода секущих



Достоинства и недостатки метода секущих

Достоинства:

Меньший объем вычислений по сравнению с методом Ньютона, т.к. не требуется вычислять производную.

Недостатки:

Порядок сходимости метода секущих ниже, чем у метода касательных и равен золотому сечению ≈1,618 (сверхлинейная).

Пример 5. Метод секущих

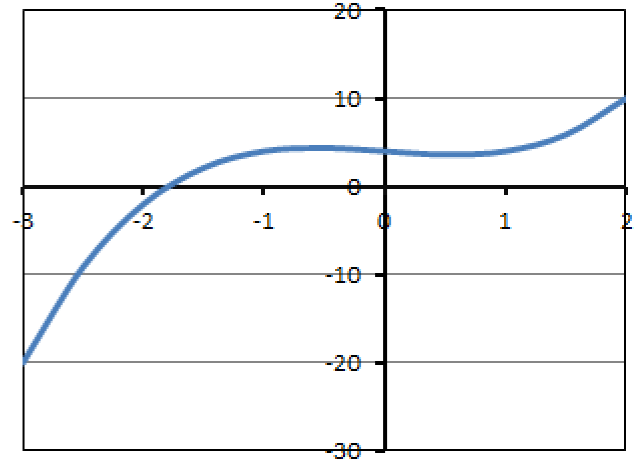
Найти корень уравнения $x^3 - x + 4 = 0$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

$x_0 = -2 \quad x_1 = -1{,}5$

$n = 3 \quad x^* \approx 1{,}79612$

(метод Ньютона: $n = 3 \quad x^* \approx -1{,}79632$)



№ итерации	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-2,00000	-1.50000	-1.75758	2.12500	0.25758
1	-1.50000	-1.75758	-1.80464	0.32830	0.04706
2	-1.75758	-1.80464	**-1.79612**	-0.07258	0.00852

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \quad |f(x_n)| > \varepsilon \rightarrow n = 4$$

Метод простой итерации

Уравнение $f(x) = 0$ приведем к эквивалентному виду: $x = \varphi(x)$, выразив x из исходного уравнения.

Зная начальное приближение: $x_0 \in [a, b]$, найдем очередные приближения:

$x_1 = \varphi(x_0) \rightarrow x_2 = \varphi(x_1) \ldots$

Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_{i+1} = \varphi(x_i)}$

Условия сходимости метода простой итерации определяются следующей теоремой.

Теорема. Если на отрезке локализации $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$|\varphi'(x)| < q$, где $0 \le q < 1$, то независимо от выбора начального приближения $x_0 \in [a, b]$ итерационная последовательность $\{x_n\}$ метода будет сходится к корню уравнения.

<u>Достаточное</u> условие сходимости метода:

$|\varphi'(x)| \le q < 1$, где q – некоторая константа (коэффициент Липшица или коэффициент сжатия)

$q = \max\limits_{[a,b]} |\varphi'(x)|$

При $q \approx 0$ - скорость сходимости высокая,

При $q \approx 1$ - скорость сходимости низкая,

При $q > 1$ - нет сходимости.

Чем меньше q, тем выше скорость сходимости.

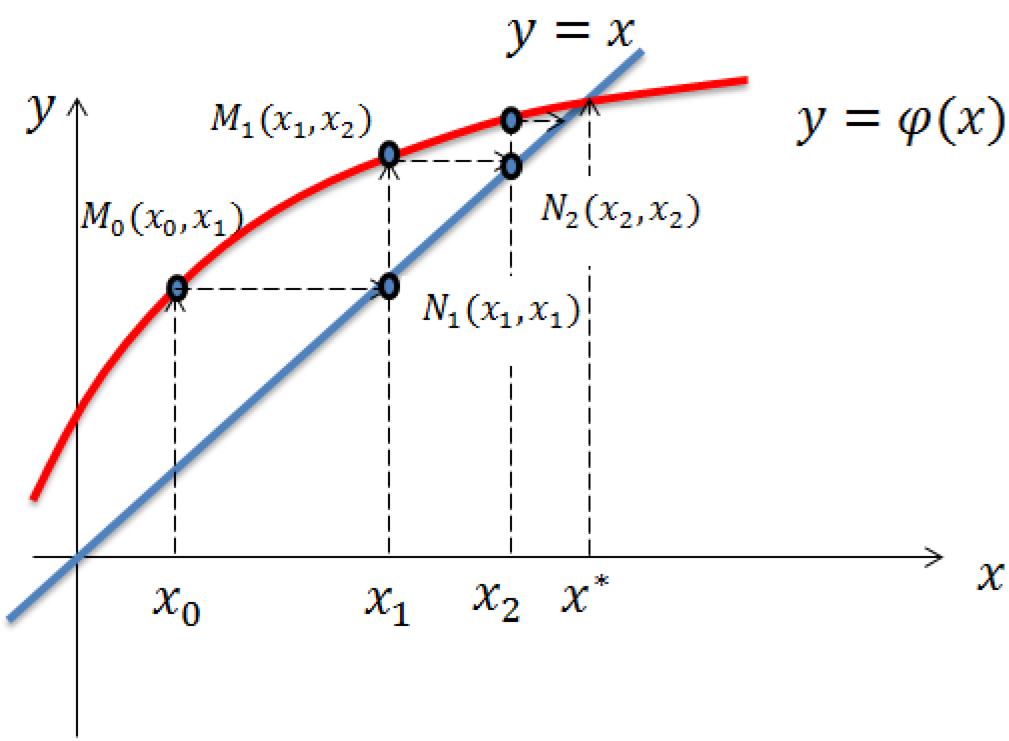
Критерий окончания итерационного процесса:

$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ (при $0 < q \le 0{,}5$)

$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$ (при $0{,}5 < q < 1$)

Можно ограничиться: $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$

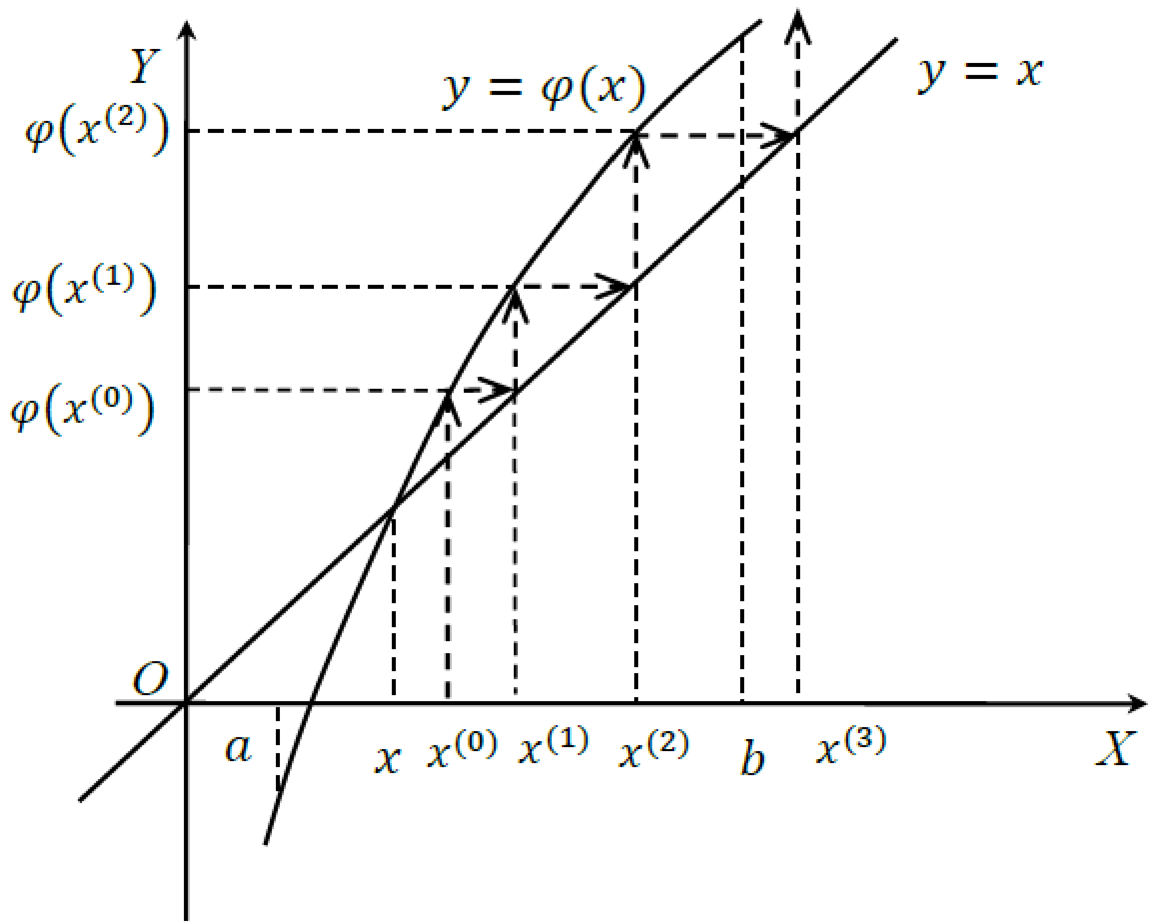
Геометрический смысл метода простой итерации



При итерационном процессе получается ломаная линия $M_0 N_1 M_1 N_2 M_2 \ldots$, где абсциссы M_n- последовательные приближения x_n к решению x^*

Последовательность итераций на рисунке сходится к точному значению корня: предел последовательности $\{(x^k)\}$ существует и совпадает с корнем.

Геометрический смысл метода простой итерации



Последовательность $\{(x^{k})\}$ может расходиться.
Это не значит, что уравнение не имеет корня.
Просто, последовательность к нему не сходится.

Достоинства и недостатки метода простой итерации

Достоинства:

Простота реализации

Недостатки:

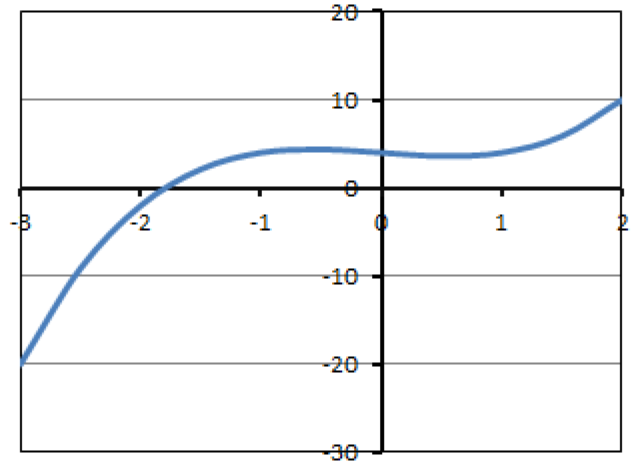
Недостатком этого метода является его сходимость в малой окрестности корня и вытекающая отсюда необходимость выбора начального приближения к корню из этой малой окрестности. В противном случае итерационный процесс расходится или сходится к другому корню этого уравнения.

Если $|\varphi'(x)| \approx 1$, то сходимость может быть очень медленной.

Метод простой итерации

Способы преобразования уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$



1 способ:

Преобразуем уравнение к виду $x = \varphi(x)$

$\varphi(x) = x^3 + 4 = 0$

$a_0 = -2 \;\; b_0 = -1$

$\varphi'(x) = 3x^2$

$\varphi'(-2) = 12 > 1$

$\varphi'(-1) = 3 > 1$ Условие сходимости НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ

2 способ:

$\varphi(x) = \sqrt[3]{x - 4}$

$\varphi'(x) = 1/3(x-4)^{-2/3} \;\; |\varphi'(-2)| < 1 \;\; |\varphi'(-1)| < 1$

Условие сходимости ВЫПОЛНЯЕТСЯ

Метод простой итерации

Способы преобразования уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$

3 способ (наиболее используемый):

Если непосредственное преобразование уравнения к виду $x = \varphi(x)$
не позволяет получить уравнение, для которого выполняются условия сходимости метода,
применяем более общий прием введения параметра λ

1. преобразуем уравнение $f(x) = 0$ к равносильному (при $\lambda \neq 0$) $\lambda f(x) = 0$
2. прибавим x в обеих частях: $x = x + \lambda f(x)$
3. $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$, $\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x)$
4. высокая скорость сходимости обеспечивается при $q = \max\limits_{[a,b]}|\varphi'(x)| \approx 0$. Тогда $\boldsymbol{\lambda = -\frac{1}{\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|}}$

$\lambda = -\frac{1}{\max|f'(x)|}$, если $f'[a,b] > 0$

$\lambda = \frac{1}{max|f'(x)|}$, если $f'[a,b] < 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f'(-2) = 11 \quad f'(-1) = 2 \quad \lambda = -\frac{1}{\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|} = -\frac{1}{11}$

$$x = x + \lambda f(x) \to x = x + \lambda(x^3 - x + 4) = \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}x^3 - \frac{4}{11} \qquad \varphi(x) = \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}x^3 - \frac{4}{11}$$

Проверим условие сходимости концах выбранного интервала :

$\varphi'(-2) = \frac{12}{11} - \frac{3}{11}x^2 = 0 \ll 1 \qquad \varphi'(-1) = \frac{12}{11} - \frac{3}{11}x^2 = 0{,}818 < 1$

Условие сходимости выполняется!

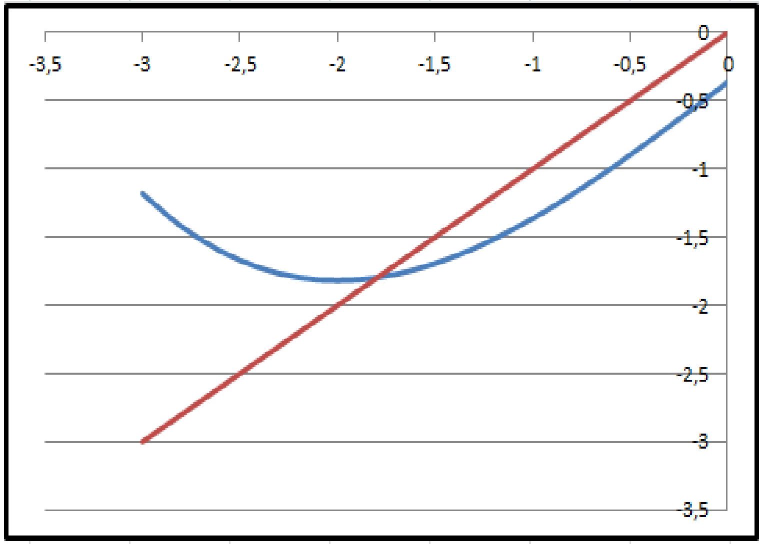
Метод простой итерации

$$x = \frac{12}{11}x - \frac{1}{11}x^3 - \frac{4}{11}$$

$$x_0 = -2$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \frac{12}{11}x_0 - \frac{1}{11}{x_0}^3 - \frac{4}{11} \approx -1.8182$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \frac{12}{11}x_1 - \frac{1}{11}{x_1}^3 - \frac{4}{11} \approx -1.8007$$



№ итерации	x_i	x_{i+1}	$\varphi(x_{i+1})$	$f(x_{i+1})$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-2,0000	-1.8182	-1.8007	-0.19234	0.1818
1	-1.8182	-1.8007	-1.7972	-0.03808	0.0175
2	-1.8007	-1.7972	-1.7965	-0.00793	0.0035

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть для вычисления неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ требуется решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

В отличие от систем линейных уравнений не существует прямых методов решения нелинейных систем общего вида.
Лишь в отдельных случаях систему можно решить непосредственно.
Например, для случая двух уравнений иногда удается выразить одно неизвестное через другое и таким образом свести задачу к решению одного уравнения относительно одного неизвестного.
Для системы с двумя неизвестными можно использовать геометрические построения, но для системы с $n > 2$ неизвестными такой подход становится неприменимым.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

К основе метода лежит использование разложения функций $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторой фиксированной точки, причем члены, содержащие вторые (и более высоких порядков) производные, отбрасываются.

Пусть начальные приближения неизвестных системы (1) получены и равны соответственно $a_1, a_2, \dots, a_n$. Задача состоит в нахождении приращений (поправок) к этим значениям $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, благодаря которым решение системы запишется в виде

$$x_1 = a_1 + \Delta x_1, \ x_2 = a_2 + \Delta x_2, \dots, x_n = a_n + \Delta x_n \qquad (2)$$

Проведем разложение левых частей уравнений (1) с учетом (2) в ряд Тейлора, ограничиваясь лишь линейными членами относительно приращений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx F_1(a_1, a_2, \dots, a_n) + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}\Delta x_n \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx F_2(a_1, a_2, \dots, a_n) + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}\Delta x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx F_n(a_1, a_2, \dots, a_n) + \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}\Delta x_n \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Поскольку в соответствии с (1) левые части этих выражений должны обращаться в нуль, то приравняем к нулю и правые части. Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F_n}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\Delta x_n = -F_n \end{cases} \qquad (3)$$

Значения $F_1, F_2, \dots, F_n$ и их производные вычисляются при $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$.
Определителем системы (3) является ***якобиан***:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots\dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dots\dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots\dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Итерационный процесс решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона состоит в определении приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ к значениям неизвестных на каждой итерации.

Критерий окончания итерационного процесса: $max|\Delta x_i \leq \varepsilon|$.

В методе Ньютона:

1. Важен удачный выбор начального приближения для обеспечения хорошей сходимости.
2. Сходимость ухудшается с увеличением числа уравнений системы.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Пусть задано начальное приближение $\{x_0\ , y_0\}$ (его можно определить графическим методом). Тогда, очередное приближение:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=0 \\ g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=0 \end{cases}$$

Разложим функцию в окрестности некоторой фиксированной точки по формуле Тейлора:

$$\begin{cases} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + R = 0 \\ g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = g(x_0,y_0) + \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + R = 0 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Пренебрегая остаточным членом, получаем:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = -f(x_0,y_0)\right) \\ \left(\dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = -g(x_0,y_0)\right) \end{cases}$$

Введем матрицу Якоби:

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Тогда, вместо системы нелинейных уравнений будем решать систему линейных уравнений относительно $\Delta x, \Delta y$:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

А далее вычислять на каждой итерации:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \quad \text{и} \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \,,$$

где x_i, y_i - текущее приближение к корню,

x_{i+1}, y_{i+1} - последующее приближение,

Δx_i , Δy_i – приращения к очередным приближениям.

Процесс вычисления заканчивается при выполнении следующих условий:

$|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon, \quad |y_{i+1} - y_i| \leq \varepsilon$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

Пример:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 3x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ -3x^2 + y = 0 \end{cases}$$

Отметим, что решение системы уравнений являются точки пересечения окружности радиусом, равным 2, и параболы $y = 3x^2$. Следовательно, система имеет не более двух различных решений.

Построим матрицу Якоби:

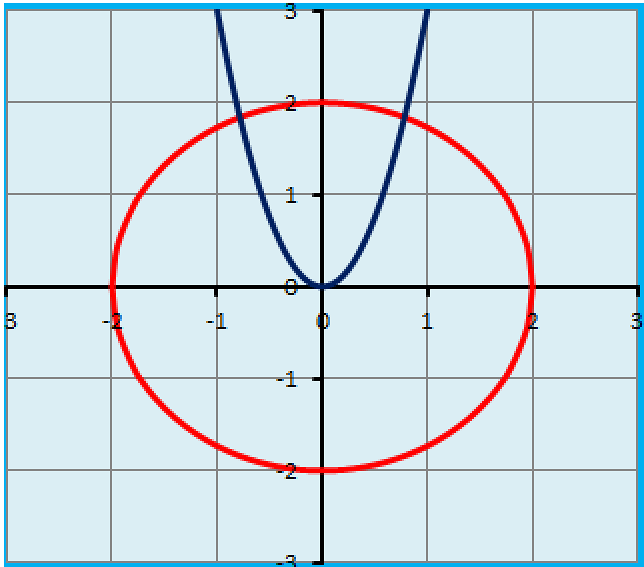
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -6x \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

Тогда будем решать следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -6x & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x^2 - y^2 \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} 2x\Delta x + 2y\Delta y = 4 - x^2 - y^2 \\ -6x\Delta x + \Delta y = 3x^2 - y \end{cases} \qquad (4)$$



РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД НЬЮТОНА.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ:

Шаг 1. Выбираем $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

$$\begin{cases} 2x\Delta x + 2y\Delta y = 4 - x^2 - y^2 \\ -6x\Delta x + \Delta y = 3x^2 - y \end{cases}$$

На первой итерации система будет иметь вид:

$$\begin{cases} 2\Delta x + 4\Delta y = -1 \\ -6\Delta x + \Delta y = 1 \end{cases}$$

Шаг 2. Решаем полученную систему.

Получаем $\Delta x = -0{,}192$ и $\Delta y = -0{,}154$.

Шаг 3. Вычисляем очередные приближения:

$x_1 = x_0 + \Delta x = 1 - 0{,}192 = 0{,}808$

$y_1 = y_0 + \Delta y = 2 - 0{,}154 = 1{,}846$.

Шаг 4. Проверяем критерий окончания итерационного процесса при $\varepsilon = 0{,}01$:

$|x_1 - x_0| \le \varepsilon, \quad |y_1 - y_0| \le \varepsilon$

$|0{,}808 - 1| > \varepsilon, \quad |1{,}846 - 2| > \varepsilon$

Шаг 5. Если ответ не найден, возврат на шаг 2, подставив очередные приближения в систему:

$$\begin{cases} 1{,}616\Delta x + 3{,}692\Delta y = -0{,}06058 \\ -4{,}848\Delta x + \Delta y = 0{,}11259 \end{cases}$$

И т.д.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

Приведем систему уравнений к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Или, в векторной форме: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})$ $\quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\boldsymbol{X}) \\ \varphi_2(\boldsymbol{X}) \\ \dots\dots \\ \varphi_n(\boldsymbol{X}) \end{pmatrix}$

Если выбрано начальное приближение: $\boldsymbol{X}^{(0)} = x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$,

получим первые приближения к корням:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \varphi_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ x_2^{(1)} = \varphi_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ x_n^{(1)} = \varphi_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

Последующие приближения находятся по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right) \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Сходятся ли эти последовательности?

Пусть задача отделения корней уже решена и определена достаточно малая область изоляции G, в которой находится подлежащий уточнению корень.

Пусть в этой окрестности функции $\varphi_i\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)$ дифференцируемы:

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ & \dots\dots\dots & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

Достаточное условие сходимости итерационного процесса:

$$\max_{[x\in G]}|\varphi'(x)| \le q < 1 \text{ или } \max_{[x\in G]}\ \max_{[i]} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j}\right| \le q < 1$$

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\right| < 1$$
$$\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}\right| < 1$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$\left|\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right| < 1$$

Если $\boldsymbol{X}^{(0)}$ и все последовательные приближения: $\boldsymbol{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}^{k}),\ k = 0, 1, 2 \dots$ принадлежат ограниченной замкнутой области G, тогда итерационный процесс сходится к единственному решению уравнения $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})$

Критерий окончания итерационного процесса:

$$\max_{1<i<n} \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{k}\right| \le \varepsilon$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

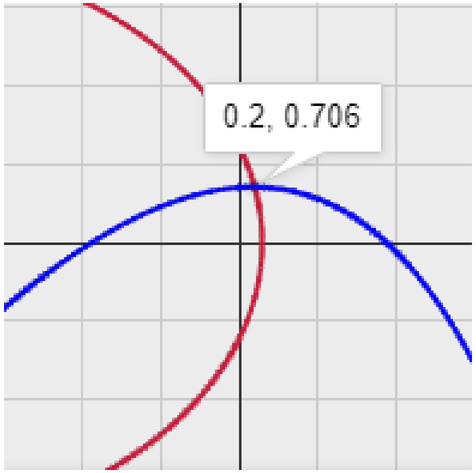
Пример: найти положительное решение системы нелинейных уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2) = 0{,}1x_1^2 + x_1 + 0{,}2x_2^2 - 0{,}3 = 0 \\ f_2(x_1,x_2) = 0{,}2x_1^2 + x_2 + 0{,}1x_1x_2 - 0{,}7 = 0 \end{cases}$$

Определяем, что положительное решение системы уравнений находится в области G:

$$0 < x_1 < 1, \qquad 0 < x_2 < 1$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3 - 0{,}1x_1^2 - 0{,}2x_2^2 \\ x_2 = 0{,}7 - 0{,}2x_1^2 - 0{,}1x_1x_2 \end{cases}$$



Проверим условие сходимости. В области G имеем:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = -0{,}2x_1 \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = -0{,}4x_2$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = -0{,}4x_1 - 0{,}1x_2 \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = -0{,}1x_1$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right| = |-0{,}2x_1| + |-0{,}4x_2| \le 0{,}6$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| = |-0{,}4x_1 - 0{,}1x_2| + |-0{,}1x_1| \le 0{,}6$$

$\max\limits_{[x\in G]}|\varphi'(x)| \le 0{,}6 < 1$ → Процесс сходящийся

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3 - 0{,}1x_1^2 - 0{,}2x_2^2 \\ x_2 = 0{,}7 - 0{,}2x_1^2 - 0{,}1x_1x_2 \end{cases}$$

Выберем начальное приближение: $x_1^{(0)} = 1 \quad x_2^{(0)} = 1$

1 шаг.

$x_1^{(1)} = 0{,}3 - 0{,}1 - 0{,}2 = 0$ $\quad\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = 1 > \varepsilon$

$x_2^{(1)} = 0{,}7 - 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}4$ $\quad\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = 0{,}6 > \varepsilon$

2 шаг.

$x_1^{(2)} = 0{,}3 - 0 - 0{,}2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}268$ $\quad\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = 0{,}268 > \varepsilon$

$x_2^{(2)} = 0{,}7 - 0 - 0 = 0{,}7$ $\quad\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = 0{,}3 > \varepsilon$

3 шаг.

$x_1^{(3)} = 0{,}3 - 0{,}1 \cdot 0{,}268^2 - 0{,}2 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}195$ $\quad\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0{,}073 > \varepsilon$

$x_2^{(3)} = 0{,}7 - 0{,}2 \cdot 0{,}268^2 - 0{,}1 \cdot 0{,}268 \cdot 0{,}7 = 0{,}667$ $\quad\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = 0{,}033 > \varepsilon$

4 шаг.

$x_1^{(4)} = 0{,}3 - 0{,}1 \cdot 0{,}195^2 - 0{,}2 \cdot 0{,}667^2 = 0{,}207$ $\quad\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0{,}012 > \varepsilon$

$x_2^{(3)} = 0{,}7 - 0{,}2 \cdot 0{,}195^2 - 0{,}1 \cdot 0{,}195 \cdot 0{,}667 = 0{,}679$ $\quad\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = 0{,}002 > \varepsilon$

И т.д.