Ясно значение множителя C_j мы знаем, что если систему частных решений помножить на одно и то же произвольное постоянное, то получаем опять решение системы однородных линейных уравнений. Применяя проведенные рассуждения ко всем корням $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения, мы получим n частных решений вида (22) для j=1, 2,..., n.

После этого мы можем написать полное решение системы (18) в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + ... + C_n y_1^{(n)}, \\ y_2 &= C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + ... + C_n y_2^{(n)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + ... + C_n y_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Примечание 1. Если коэффициенты уравнения действительны, а некоторые корни характеристического уравнения окажутся мнимыми, то они будут входить попарно сопряженными, например

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \lambda_2 = \alpha - \beta i.$$

Соответствующее решения будут иметь вид:

$$\lambda_j^{(1)} = k_j^{(1)} e^{(\alpha+\beta)x},\ y_j^{(1)} = k_j^{(2)} e^{(\alpha-\beta i)x},\ (j = 1, 2, ..., n).$$

Коэффициенты $k_j^{(1)}$ и $k_j^{(2)}$ тоже окажутся комплексными сопряженными, если взять их равными минорами одной и той же строки детерминантов $\Delta(\alpha+\beta i)$ и $\Delta(\alpha-\beta i)$. Легко убедиться, что корням $\lambda = \alpha \pm \beta i$ будут соответствовать две системы решений, соответствующих действительной и мнимой части $\lambda_j^{(1)}$ и $\lambda_j^{(2)}$, вида:

$\widetilde{y}_j^{(1)} = e^{\alpha x}(l_j^{(1)} \cos\beta x - l_j^{(2)} sin\beta x)$, $\widetilde{y}_j^{(2)} = e^{\alpha x}(l_j^{(1)} \sin\beta x + l_j^{(2)} cos\beta x)$, где $l_j^{(1)}$ и $l_j^{(2)}$ - действительные числа $k_j^{(1)} = l_j^{(1)} + i l_j^{(2)}$, $k_j^{(2)} = l_j^{(1)} - i l_j^{(2)}$.

Пример 5. $\dfrac{dy}{dx} + 7y - z = 0$, $\dfrac{dz}{dx} + 2y + 5z = 0$. Ищем решение в виде $y = \gamma_1 e^{\lambda x}, z = \gamma_2 e^{\lambda x}$; подставляя в заданную систему, получаем уравнения:

$$\gamma_1(\lambda + 7) - \gamma_2 = 9,\ 2\gamma_1 + (\lambda + 5)\gamma_2 = 0.$$

Условие их совместности дает характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda + 7 & -1 \\ 2 & \lambda + 5 \end{vmatrix},\ \text{или } \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

Корни характеристического уравнения суть: $\lambda_1 = -6 + i$, $\lambda_2 = -6 - i$. Подставляя первый из этих корней в систему для определения γ_1 и γ_2, получаем два уравнения:

$$\gamma_1(1 + i) - \gamma_2 = 0,\ 2\gamma_1 + (-1 + i)\gamma_2 = 0,$$

из которых одно является следствием другого. Мы можем взять $k_1^{(1)} = 1, k_2^{(1)} = 1 + i$. Первая система частных решений есть

$$y_1^{(1)} = e^{(-6+i)x},\ y_2^{(1)} = (1 + i)e^{(-6+i)x}.$$

Аналогично, подставляя корень $\lambda_1 = -6 - i$, найдем вторую систему частных решений:

$$y_1^{(2)} = e^{(-6-i)x},\ y_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)x}.$$

Беря в качестве новой фундаментальной системы решения

$$\overline{y}_i^{(1)} = \frac{y_i^{(1)} + y_i^{(2)}}{2},\ \overline{y}_i^{(2)} = \frac{y_i^{(1)} - y_i^{(2)}}{2i}\ (i = 1, 2),$$

находим:

$$\overline{y}_1^{(1)} = e^{-6x} \cdot cosx;\ \overline{y}_1^{(2)} = e^{-6x} \cdot sinx;\ \overline{y}_2^{(1)} = e^{-6x} \cdot (cosx - sinx),$$
$$\overline{y}_2^{(2)} = e^{-6x} \cdot (cosx + sinx).$$

Общим решением будет:

$$y_1 = e^{-6x}(C_1 cosx + C_2 sinx),$$
$$y_2 = e^{-6x}[(C_1 + C_2)cosx + (C_2 - C_1)sinx].$$

Примечание 2. Полученные нами n решений (22) являются линейно независимыми. В самом деле, рассмотрим таблицу (12); в нашем случае $y_i^{(j)} = k_i^{(j)} e^{\lambda} j^x$. Допустим, что в силу второго определения линейной зависимости выполняются соотношения (15), причем не все $\alpha_j = 0$. С другой стороны, в каждой строке системы, например j-й, найдется коэфициент $k_i^{(j)} \neq 0$, иначе j-е частное решение было бы тривиальным.

В силу допущения мы имеем:

$$\alpha_1 k_i^{(1)} e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 k_i^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \cdots + \alpha_j k_i^{(j)} e^{\lambda_j x} + \cdots + \alpha_n k_i^{(n)} e^{\lambda_n x} = 0$$

Так как по доказанному в VI главе, функции $e^{\lambda} j^x$ линейно-независимы (j=1,2,..., n), то все коэфициенты в последнем соотношении равны нулю, в частности $\alpha_j k_i^{(j)} = 0$.

В силу условия не все $k_i^{(j)} (i = 1, 2, ..., n)$, равны нулю, следовательо $\alpha_j = 0$.

Это рассуждение применимо ко всем значениям j=1, 2,..., n, таким образом все α_j равны нулю. Полученное противоречие доказывает линейную независимость решений (22).

2) Среди корней уравнения (21) есть кратные. Пусть λ_1 есть m-кратный корень характеристического уравнения. В таком случае значение m-й производной $\Delta(\lambda), \Delta^{(m)}(\lambda_1) \neq 0$, и рассуждение, аналогичное предыдущему, показывает, что среди миноров порядка m детерминанта $\Delta(\lambda)$ по крайней мере один отличен от нуля при $\lambda = \lambda_1$. Отсюда следует, что для ранга r матрицы $\mathbf{M}(\lambda)$, при $\lambda = \lambda_1$ имеет место неравенство: $r \geq n - m$. В таком случае система линейных алгебраических уравнений (20) сводится к r независимым уравнениям. Из теории линейных уравнений известно, что тогда в общем решении системы (20) n=r неизвестных остаются произвольными, пусть это будут $\gamma_1 = C_1, \gamma_2 = C_2, ..., \gamma_{n-r} = C_{n-r}$; остальные r неизвестных $\gamma_{n-r+1}, \gamma_{n-r+2}, ..., \gamma_n$ выразятся в виде линейных форм относительно $C_1, C_2, ..., C_{n-r}$, пусть эти выражения будут:

$$\gamma_j = k_j^{(1)} C_1 + k_j^{(2)} C_2 + ... + k_j^{(n-r)} C_{n-r}.$$
$$(j = n - r + 1, n - r + 2, ..., n).$$