

Alumno: Brian Alex Fuentes Acuña.

Padrón: 101785.

## ▼ Clase 9: Gramianos de controlabilidad y observabilidad

Los tests de controlabilidad y observabilidad nos alcanzan para confirmar si un sistema es controlable y observable. Sin embargo, no nos indican qué tan fácil es controlar u observar el sistema. Para esto podemos utilizar los gramianos, y para más adelante tener como herramienta para establecer reducciones de orden de modelos con ese criterio.

Dado un sistema LTI MIMO tal que:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

El gramiano de controlabilidad es:

$$G_C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tau)} BB^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau$$

Que es una matriz simétrica y semidefinida positiva. Decimos que:

El sistema dado es controlable en el intervalo  $[t_0, t_1]$  si y solo si:

$$|G_C(t_0, t_1)| \neq 0 \forall t \in [t_0, t_1]$$

Si este sistema tiene ecuación de salida dada por:

$$y = Cx + Du$$

El gramiano de observabilidad es:

$$G_O(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T(\tau-t_0)} C^T C e^{A(\tau-t_0)} d\tau$$

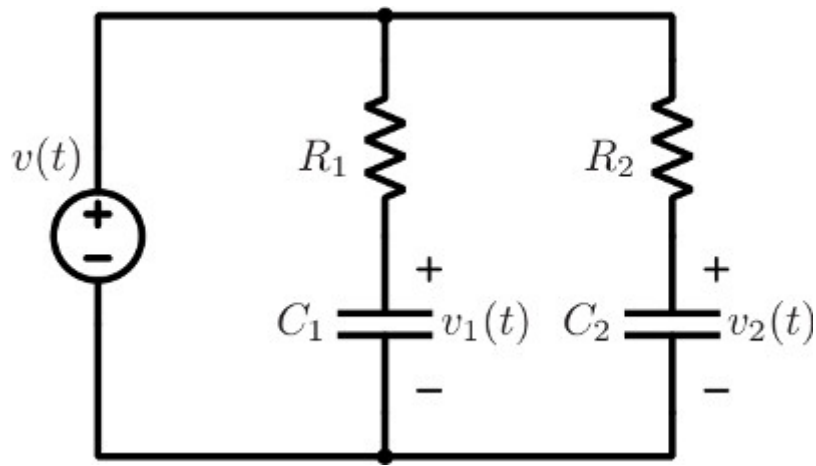
Que es una matriz simétrica y semidefinida positiva. Decimos que:

El sistema dado es observable en el intervalo  $[t_0, t_1]$  si y solo si:

$$|G_O(t_0, t_1)| \neq 0 \forall t \in [t_0, t_1]$$

Volvamos al ejercicio resuelto la clase pasada y repitamos aplicando el gramiano de controlabilidad:

**Ejercicio 7:**



Ejercicio 7

Su ecuación de estado era:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} v(t)$$

y la de salida:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Tomemos algunos valores numéricos para particularizar el cálculo:

- $R_1 = 950\Omega$
- $R_2 = 1,05 \text{ k}\Omega$
- $C_1 = 1,1 \mu\text{F}$
- $C_2 = 1 \mu\text{F}$

Dado que  $t_0 = 0 \text{ s}$  y  $t_1 = t$ , el gramiano de controlabilidad queda:

$$G_C(t) = \int_0^t e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau$$

Empezamos utilizando el test de controlabilidad que ya conocemos:

```
!pip install slycot
!pip install control==0.8.4 # Some functions not working with 0.9.0
import numpy as np
import control as ctrl
import scipy as sp
import sympy as symb
import matplotlib.pyplot as plt

R1 = 950
R2 = 1050
C1 = 1.1e-6
C2 = 1e-6
A = np.array([[ -1/R1/C1, 0], [0, -1/R2/C2]])
B = np.array([[1/R1/C1], [1/R2/C2]])
```

```

C = np.array([1, 1])
D = 0
t_final = 0.01

sys = ctrl.StateSpace(A, B, C, D)

P = ctrl.ctrb(A, B)
print('\n P =')
print(P)

print('El rango de P es', np.linalg.matrix_rank(P), 'entonces es controlable')

```

Nos dice que el sistema es controlable. Evaluemos ahora el gramiano de controlabilidad para  $t_1 = 0,01$ .

La cuenta da:

$$G_C(t) = \begin{bmatrix} \frac{e\left(\frac{2t}{R_1 C_1}\right) - 1}{2R_1 C_1} & \frac{e\left[t\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}\right)\right] - 1}{R_1 C_1 + R_2 C_2} \\ \frac{e\left[t\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}\right)\right] - 1}{R_1 C_1 + R_2 C_2} & \frac{e\left(\frac{2t}{R_2 C_2}\right) - 1}{2R_2 C_2} \end{bmatrix}$$

**Ejercicio** Llegar a la expresión anterior a partir de la integral dada y la definición del sistema.

**RTA:**

$$\begin{aligned}
BB^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1^2 C_1^2} & \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} & \frac{1}{R_2^2 C_2^2} \end{bmatrix} \\
G_C(t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} e^{\frac{-\tau}{R_1 C_1}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-\tau}{R_2 C_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1^2 C_1^2} & \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} & \frac{1}{R_2^2 C_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{-\tau}{R_1 C_1}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-\tau}{R_2 C_2}} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} \frac{e^{\frac{-\tau}{R_1 C_1}}}{R_1^2 C_1^2} & \frac{e^{\frac{-\tau}{R_1 C_1}}}{R_1 C_1 R_2 C_2} \\ \frac{e^{\frac{-\tau}{R_2 C_2}}}{R_1 C_1 R_2 C_2} & \frac{e^{\frac{-\tau}{R_2 C_2}}}{R_2^2 C_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{-\tau}{R_1 C_1}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-\tau}{R_2 C_2}} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \int_{t_0=0}^{t_1=t_1} \begin{bmatrix} \frac{e^{\frac{-2\tau}{R_1 C_1}}}{R_1^2 C_1^2} & \frac{e^{\frac{-\tau}{R_1 C_1} + \frac{-\tau}{R_2 C_2}}}{R_1 C_1 + R_2 C_2} \\ \frac{e^{\frac{-\tau}{R_1 C_1} + \frac{-\tau}{R_2 C_2}}}{R_1 C_1 R_2 C_2} & \frac{e^{\frac{-2\tau}{R_2 C_2}}}{R_2^2 C_2^2} \end{bmatrix} d\tau
\end{aligned}$$

Finalmente queda reemplazando el  $\tau$  y los  $t_1$  y  $t_0$ :

$$G_C(t_1) = \begin{bmatrix} \frac{e^{\frac{2t_1}{R_1 C_1}} - 1}{2R_1 C_1} & \frac{e^{t_1(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2})} - 1}{R_1 C_1 + R_2 C_2} \\ \frac{e^{t_1(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2})} - 1}{R_1 C_1 + R_2 C_2} & \frac{e^{\frac{2t_1}{R_2 C_2}} - 1}{2R_2 C_2} \end{bmatrix}$$

```
def mi_gramianoC(t_f):
    gc11 = (np.exp(2*t_f/(R1*C1))-1)/(2*R1*C1)
    gc22 = (np.exp(2*t_final/(R2*C2))-1)/(2*R2*C2)
    gc12 = (np.exp(t_f*(1/(R1*C1)+1/(R2*C2)))-1)/(R1*C1+R2*C2)
    gc21 = gc12
    Gc = np.matrix([[gc11, gc12],[gc21, gc22]])
    print('El determinante de Gc es')
    print(np.linalg.det(Gc))
    return Gc
```

```
Gc= mi_gramianoC(t_final)
```

```
El determinante de Gc es
4.9812405978168744e+16
```

De la demostración de condición de suficiencia del teorema para el test de controlabilidad con gramiano, se propone una entrada  $u(t)$  que nos permite llevar al estado de  $x_0 = x(t_0)$  a  $x_1 = x(t_1) = 0$  cuyo valor es:

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_0-t)} G_C^{-1}(t_0, t_1) x_0$$

Calculemos entonces para nuestro circuito, cuál es la entrada que nos permite llevar de:

- $v_1(0) = 10 \text{ V}$ ,
- $v_2(0) = -3 \text{ V}$

a

- $v_1(0,01) = 0 \text{ V}$ ,
- $v_2(0,01) = 0 \text{ V}$ .

Es decir:

$$u(t) = -B^T e^{-tA^T} G_C^{-1}(0, 0.01) \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Simulemos el sistema con dicha entrada para validar que cumple el objetivo propuesto.

```
x0 = np.array([[10], [-3]])

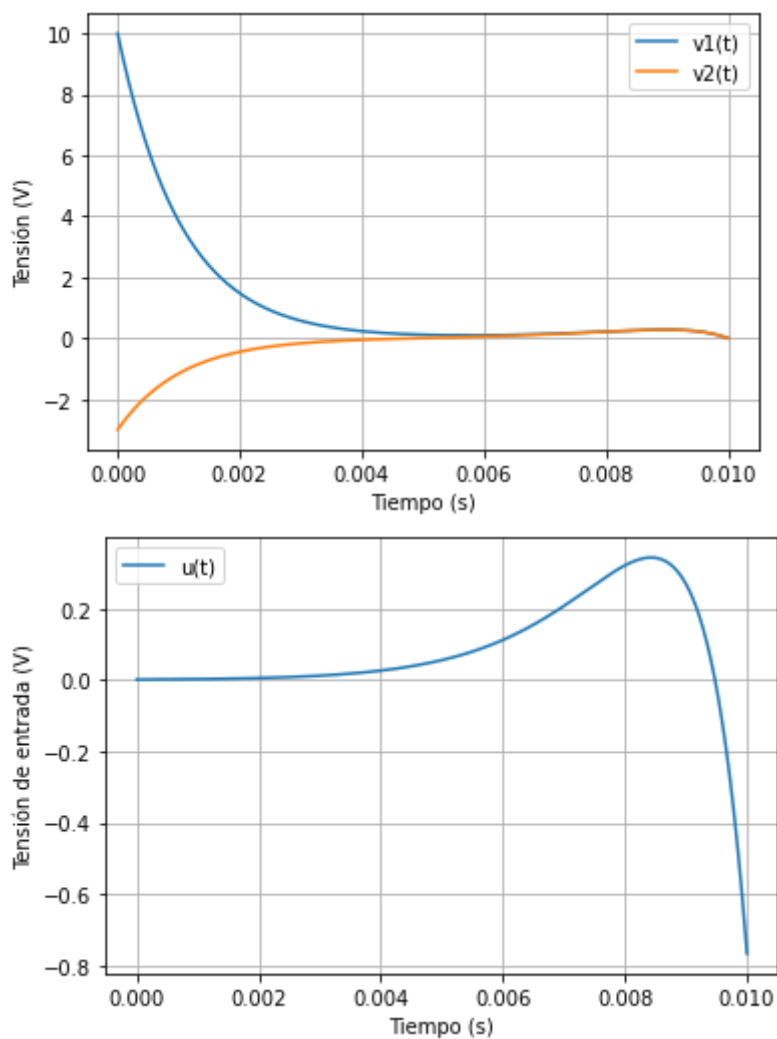
def u_to_origin(tiempo, Gc):
    u = -B.transpose() @ sp.linalg.expm(-tiempo*A) @ np.linalg.inv(Gc) @ x0
    return u.item()

t_inicial = 0
paso_tiempo = t_final/10000 # Ajustar este tiempo
tiempo = np.arange(t_inicial, t_final, paso_tiempo)
u = np.array([u_to_origin(t, Gc) for t in tiempo])
```

```
tout, yout, xout = ctrl.forced_response(sys, tiempo, u, X0=[10, -3])
```

```
def graficos(t, xvect, u):  
    plt.plot(tout, xvect[0], label='v1(t)')  
    plt.plot(tout, xvect[1], label='v2(t)')  
    plt.xlabel('Tiempo (s)')  
    plt.ylabel('Tensión (V)')  
    plt.legend(loc='best')  
    plt.grid()  
    plt.show()  
    plt.figure()  
    plt.plot(tout, u, label='u(t)')  
    plt.xlabel('Tiempo (s)')  
    plt.ylabel('Tensión de entrada (V)')  
    plt.legend()  
    plt.grid()  
    plt.show()
```

```
graficos(tout, xout, u)
```



Vemos que se logra el objetivo de alcanzar  $x = 0$  en el tiempo especificado con la entrada de control calculada.

Podemos utilizar directo la herramienta de simulación para calcular un gramiano del sistema que es equivalente:

```
Gc = ctrl.gram(sys, 'c')
print('Gc =')
print(Gc)
print('El determinante de Gc es:')
print(np.linalg.det(Gc))
#El gramiano y por lo tanto su determinante dependen del tiempo especificado
# por lo que el el Gc anterior se usa t1 pero en el Gc provisto por gram()
# no especificamos ningun tiempo, python usa alguna estimacion numerica por lo
# que el gramiano será distinto y tambien su determinante pero no la conclusion a la que

Gc =
[[478.46889952 477.32696897]
 [477.32696897 476.19047619]]
El determinante de Gc es:
1.2977958265440566
```

## ▼ Tarea

### Ejercicio 1:

1. Repetir las simulaciones del circuito RC para  $t_1 = 0.001$  s.

```
#Cambiamos el nuevo tiempo t1.
t_final= 0.001 #[seg]
#Se evalua el gramiado de controlabilidad en t= t_final.
#Para que sea controlable el determinante del gramiano debe ser distinto de cero.
def mi_gramianoC(t_f):
    gc11 = (np.exp(2*t_f/(R1*C1))-1)/(2*R1*C1)
    gc22 = (np.exp(2*t_final/(R2*C2))-1)/(2*R2*C2)
    gc12 = (np.exp(t_f*(1/(R1*C1)+1/(R2*C2)))-1)/(R1*C1+R2*C2)
    gc21 = gc12
    Gc = np.matrix([[gc11, gc12],[gc21, gc22]])
    print('El determinante de Gc es')
    print(np.linalg.det(Gc))
    return Gc
```

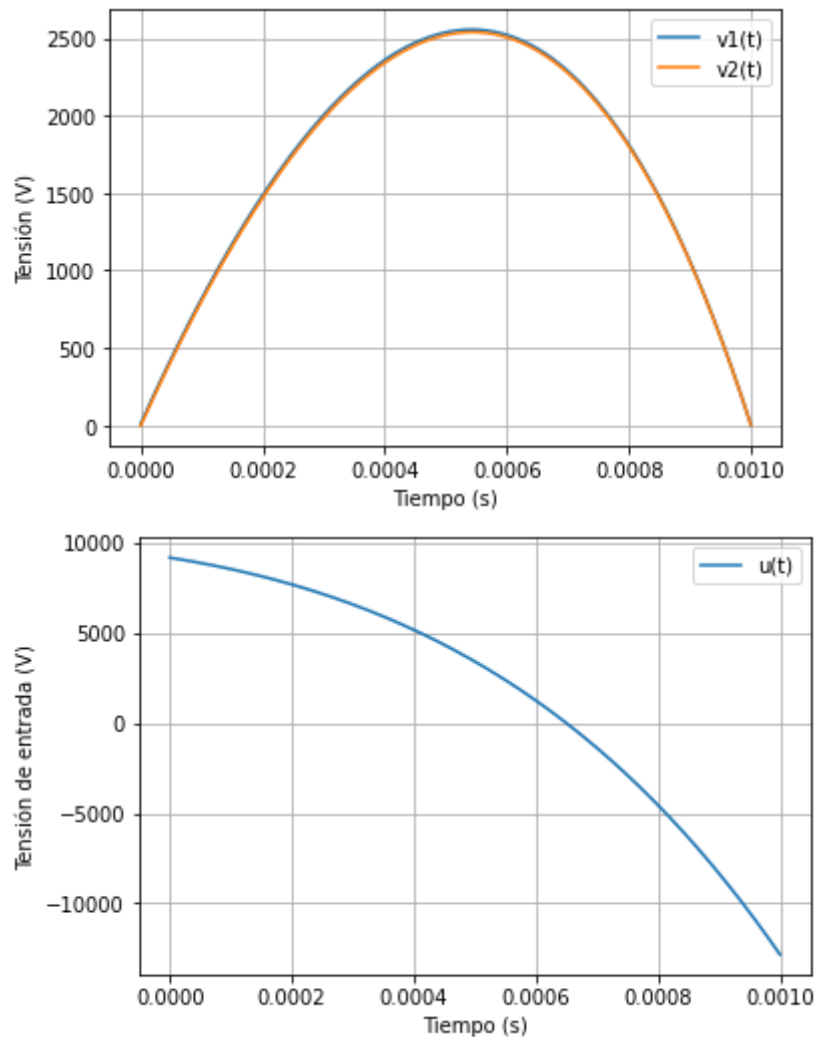
```
Gc= mi_gramianoC(t_final)
```

```
El determinante de Gc es
10.957920844389497
```

```
#Se calcula la entrada para llevar a el estado final esperado.
paso_tiempo = t_final/10000 # Ajustar este tiempo
tiempo = np.arange(t_inicial, t_final, paso_tiempo)
u = np.array([u_to_origin(t,Gc) for t in tiempo])

tout, yout, xout = ctrl.forced_response(sys, tiempo, u, X0=[10, -3])
```

```
graficos(tout, xout, u)
```



```
#Se calcula el gramiano del sistema, que es equivalente.
Gc = ctrl.gram(sys, 'c')
print('Gc =')
print(Gc)
print('El determinante de Gc es:')
print(np.linalg.det(Gc))
```

```
Gc =
[[478.46889952 477.32696897]
 [477.32696897 476.19047619]]
El determinante de Gc es:
1.2977958265440566
```

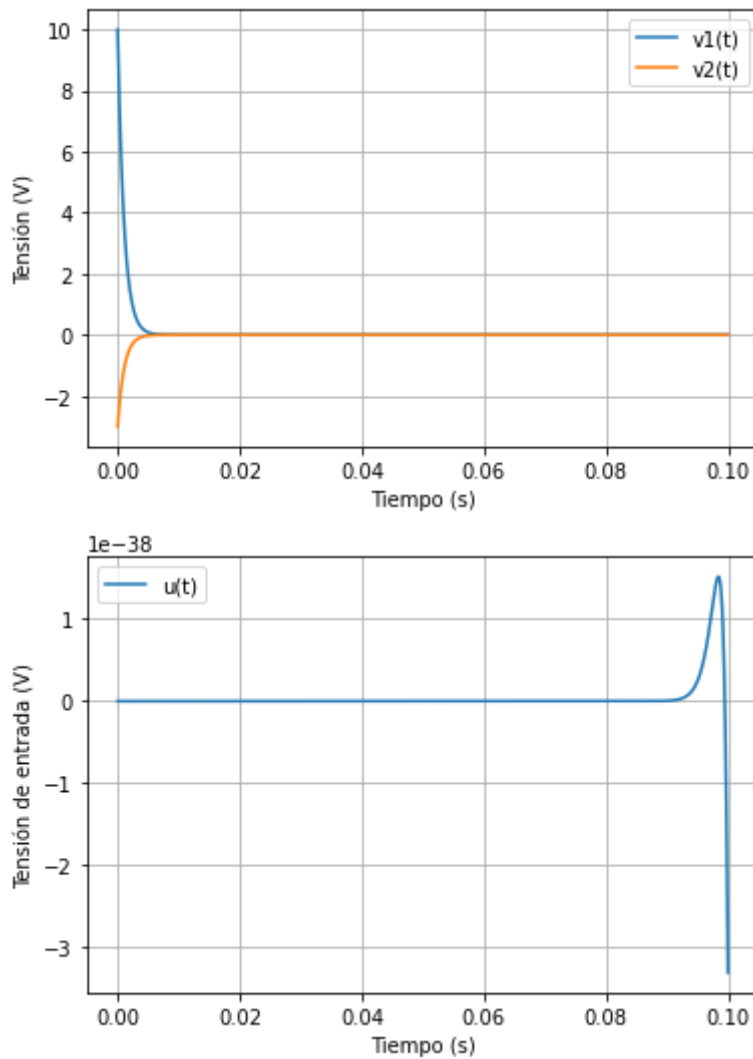
2. Repetir las simulaciones del circuito RC para  $t_1 = 0.1$  s.

```
#Cambiamos el nuevo tiempo t1.
t_final= 0.1 #[seg]
#Se evalua el gramiado de controlabilidad en t= t_final.
#Para que sea controlable el determinante del gramiano debe ser distinto de cero.
Gc= mi_gramianoC(t_final)
```

```
El determinante de Gc es
9.005876000515642e+165
```

```
#Se calcula la entrada para llevar a el estado final esperado.
paso_tiempo = t_final/10000 # Ajustar este tiempo
tiempo = np.arange(t_inicial, t_final, paso_tiempo)
u = np.array([u_to_origin(t,Gc) for t in tiempo])

tout, yout, xout = ctrl.forced_response(sys, tiempo, u, X0=[10, -3])
graficos(tout, xout, u)
```



```
#Se calcula el gramiano del sistema, que es equivalente.
Gc = ctrl.gram(sys, 'c')
print('Gc =')
print(Gc)
print('El determinante de Gc es:')
print(np.linalg.det(Gc))
```

```
Gc =
[[478.46889952 477.32696897]
 [477.32696897 476.19047619]]
El determinante de Gc es:
1.2977958265440566
```



3. ¿Qué conclusiones podés sacar sobre los puntos 1 y 2? ¿Qué esperarías que pase cuando  $t \rightarrow \infty$ ?

**RTA:**

Observando las respuesta, a medida que aumenta  $t_1$  se puede observar que las amplitudes necesarias, para llevar los estados de  $x(t_0) = x_0$  a un  $x(t_1) = 0$ , disminuyen considerablemente.

Eso quiere decir que a menor tiempo  $t_1$  mayor será la energía empleada y a mayor tiempo menor será la energía necesaria para llevarlo a  $x(t_1) = 0$ .

Entonces a tiempo  $t \rightarrow \infty$  se necesita muy poca energía para llevarlo a algún  $x(t^*) = 0$ .

*Nota 1: Se puede observar los determinantes de los gramianos para comprarlos, dado que en los siguientes temas se concluye que la energía de la entrada  $u(t)$  necesaria dependerá de la inversa del gramiano, y este a su vez depende del determinante de este. entonces a mayor valor del determinante, menor la energía empleada "es más controlable" y a menor valor de determinante (ósea tendiendo a cero) menos controlable será porque se necesitará más energía*

*Nota 2: Como el gramiano depende del tiempo en la expresión del determinante se puede sacar factor común  $e^{t_1}$  y se ve a medida que el tiempo aumenta lo hace el determinante haciendo que*

4. Calcular el grammiano de observabilidad para  $t_1 = 0.01$  s y verificar que es observable.

Repetir usando la función `gram()`.

$$\begin{aligned}
 BB^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 G_C(t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} e^{\frac{-(t-t_0)}{R_1 C_1}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-(t-t_0)}{R_2 C_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{-(t-t_0)}{R_1 C_1}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-(t-t_0)}{R_2 C_2}} \end{bmatrix} d\tau \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} e^{\frac{-(t-t_0)}{R_1 C_1}} & e^{\frac{-(t-t_0)}{R_1 C_1}} \\ e^{\frac{-(t-t_0)}{R_2 C_2}} & e^{\frac{-(t-t_0)}{R_2 C_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{-(t-t_0)}{R_1 C_1}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-(t-t_0)}{R_2 C_2}} \end{bmatrix} d\tau \\
 &= \int_{t_0=0}^{t_1=t_1} \begin{bmatrix} e^{\frac{-2(t-t_0)}{R_1 C_1}} & e^{-(t-t_0)(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2})} \\ e^{-(t-t_0)(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2})} & e^{\frac{-2(t-t_0)}{R_2 C_2}} \end{bmatrix} d\tau
 \end{aligned}$$

Finalmente queda:

$$G_C(t_1) = \begin{bmatrix} \frac{-R_1 C_1}{2} [e^{\frac{-2t_1}{R_1 C_1}} - 1] & \frac{-R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} [e^{-t_1(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2})} - 1] \\ \frac{-R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} [e^{-t_1(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2})} - 1] & \frac{-R_2 C_2}{2} [e^{\frac{-2t_1}{R_2 C_2}} - 1] \end{bmatrix}$$

```
#Miremos el rango de la matriz de observabilidad, si es rango completo es observable
Po = ctrl.observ(A, C)
print('\n Po =')
```

```
print(Po)

print('El rango de P0 es', np.linalg.matrix_rank(Po), 'entonces es observable')
```

```
Po =
[[ 1.          1.          ]
 [-956.93779904 -952.38095238]]
El rango de P0 es 2 entonces es observable
```

```
#Miremos el gramiano
t_final= 0.01 #[Seg.]
def mi_gramiano0(t_f):
    gc11 = (np.exp(-2*t_f/(R1*C1)) - 1) * (-(2*R1*C1)/2)
    gc22 = (np.exp(-2*t_f/(R2*C2)) - 1) * (-(2*R2*C2)/2)
    gc12 = (np.exp(-t_f*(1/(R1*C1) + 1/(R2*C2))) - 1) * (-(R1*C1*R2*C2) / (R1*C1+R2*C2))
    gc21 = gc12
    Go = np.matrix([[gc11, gc12],[gc21, gc22]])
    print('El determinante de Go es')
    print(np.linalg.det(Go))
    return Go

Go= mi_gramianoC(t_final)
print("|Go| no es nulo, entonces es observable")
```

```
El determinante de Gc es
4.9812405978168744e+16
|Go| no es nulo, entonces es observable
```

```
#Se calcula el gramiano del sistema, que es equivalente.
Go = ctrl.gram(sys, 'o')
print('Go =')
print(Go)
print('El determinante de G0 es:')
print(np.linalg.det(Go))
print("|Go| no es nulo, entonces es observable")
```

```
Go =
[[0.0005225  0.00052375]
 [0.00052375 0.000525  ]]
El determinante de G0 es:
1.5624910999634253e-12
|Go| no es nulo, entonces es observable
```

## Ejercicio 2:

¿Puede detectar si el sistema de las siguientes ecuaciones es controlable u observable sin utilizar el test de controlabilidad y observabilidad? En caso de pérdida de controlabilidad u observabilidad, indique el o los modos que producen esta(s) pérdida(s).

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Analizar primero y luego verificar por computadora.

### RTA:

Efectivamente la forma de Jordan tiene la ventaja de que se puede ser la controlabilidad y observabilidad por inspección, el análisis será el siguiente:

#### Controlabilidad

Para  $\lambda = 2$  se tiene multiplicidad algebraica mayor a la geométrica, no están todos desacoplados, voy a tener que ver que las filas de **B** correspondiente a los autovalores que si desacoplaron totalmente sean filas no nulas y LI. en caso contrario las variables de estado asociadas no serían controlables. Las filas asociadas al autovalor  $\lambda = 2$  son:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectivamente son LI.

por lo que las variables de estado asociadas a  $\lambda = 2$  son controlables.

Se procede de forma análoga para  $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y a simple vista se vé que no son LI.

Entonces las variables de estado asociadas a  $\lambda = 3$  no son controlables

En cuanto a las variables que no desacoplaron, mirar las filas correspondientes no me dirán nada sobre la controlabilidad de esos modos.

#### Observabilidad

En este caso se procede de una forma análoga pero mirando las columnas de **C**. Para  $\lambda = 2$  las columnas asociadas de **C** son:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se va a mirar las columnas de **C** correspondiente a los autovalores que tengan ceros por debajo y arriba de los mismos ( $1^{era}$ ,  $3^{ra}$  y  $4^{ta}$ .), esas columnas tienen que ser distintas de cero y LI.

Entonces se observa que la primera columna y la tercera sumadas dan la cuarta.

Por lo que se concluye con no son LI, y por lo tanto esos modos no son observables.

Para  $\lambda = 3$  se tiene la siguiente matriz asociada:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La  $1^{er}$  y  $3^{er}$  columnas deben ser LI y a simple vista lo son, entonces esos modos son observables.