Clase 5 - Control digital

Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires
Laboratorio de Control Automático (86.22)
Dr. Ing. Claudio D. Pose

Efectos del muestreo digital

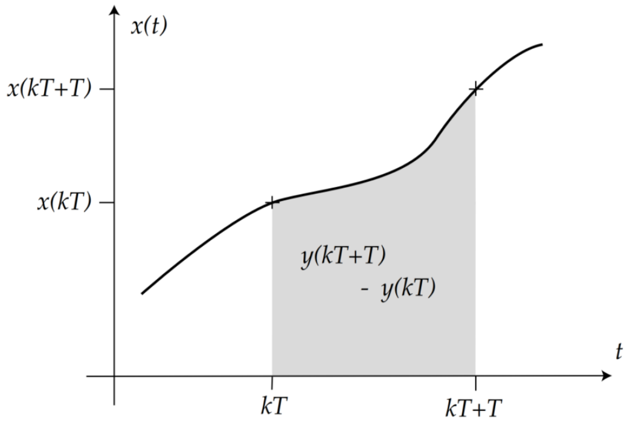
- Se estableció que al muestrear con un período T_s, se puede modelar su efecto en el dominio continuo como un retardo de media muestra $e^{-T_s/2s}$.
- Más aún, simplificando el retardo por su aproximación de Padé de primer orden $(1 - sT_s/4)/(1 + sT_s/4)$.
- Sin embargo, las aproximaciones son válidas mientras no se trabaje muy cerca de los límites.
- Esto también aplica al momento de discretizar un controlador.

Métodos de discretización

- Para pasar del dominio continuo al discreto, se utiliza la transformada z.
- En lugar de analizar el semiplano izquierdo del mapa, se analiza el disco de radio 1.
- La relación entre **s** y **z** depende del método de discretización.

Métodos de discretización

Se utiliza como referencia el problema de representar un integrador en tiempo discreto.



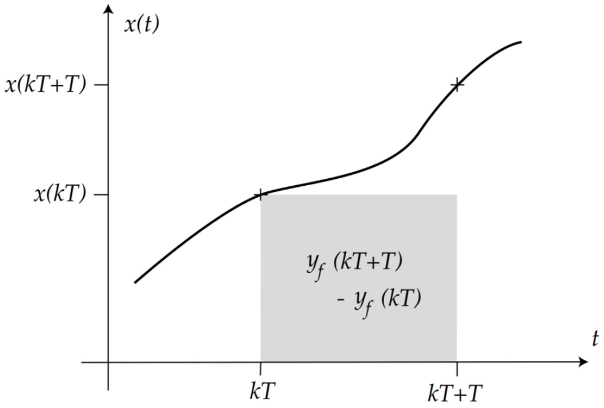
Métodos de discretización - Forward difference

$$y_f(kT+T) = y_f(kT) + Tx(kT)$$

$$\frac{y_f(z)}{x(z)} = \frac{T}{z-1}$$

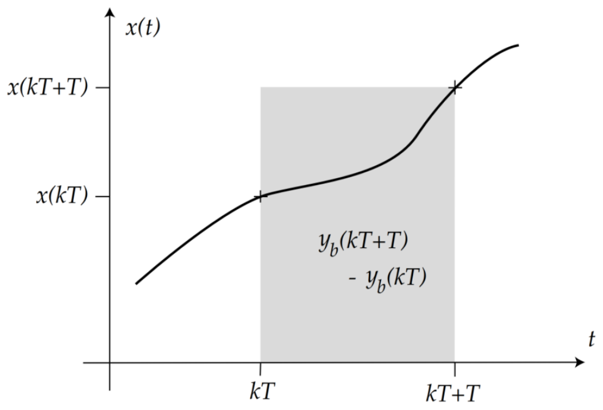
$$\frac{1}{s} = \frac{T}{z-1}$$

$$s = \frac{z-1}{T}$$



Métodos de discretización - Backwards difference

$$
\begin{aligned}
y_b(kT + T) &= y_b(kT) + Tx(kT + T) \\
\frac{y_b(z)}{x(z)} &= \frac{Tz}{z-1} \\
\frac{1}{s} &= \frac{Tz}{z-1} \\
s &= \frac{z-1}{Tz}
\end{aligned}
$$



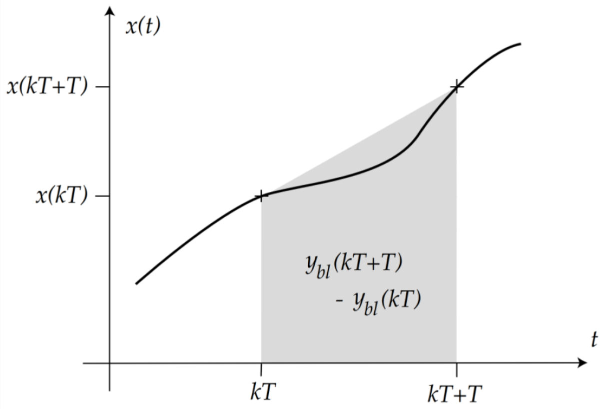
Métodos de discretización - Trapezoidal (Bilinear / Tustin)

$$y_{bl}(kT+T) = y_{bl}(kT) + Tx(kT) + \\ + (x(kT+T) - x(kT))\,T/2$$

$$\frac{y_{bl}(z)}{x(z)} = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

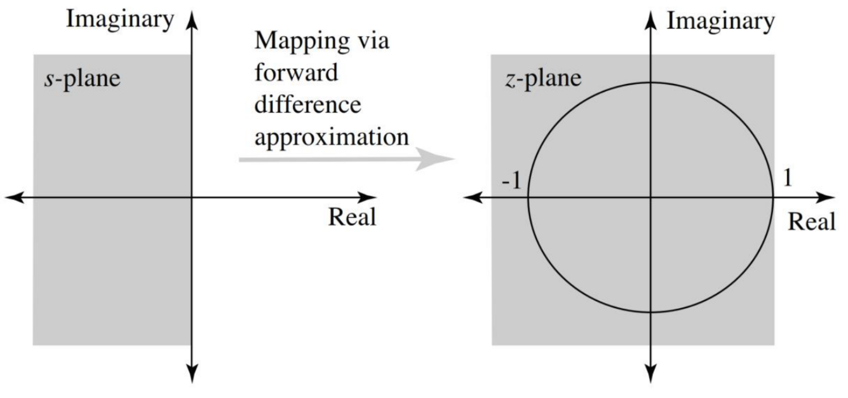
$$\frac{1}{s} = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$



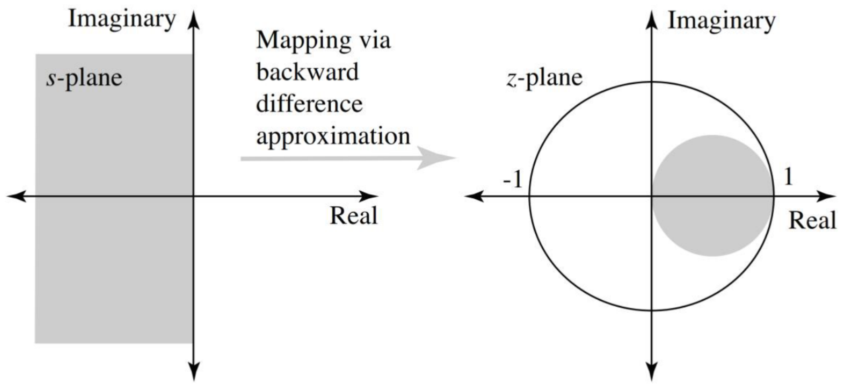
Estabilidad del control discretizado - Forward

Un controlador continuo estable discretizado por forward difference puede resultar en un controlador discreto inestable, para controles muy rápidos o muy oscilantes.



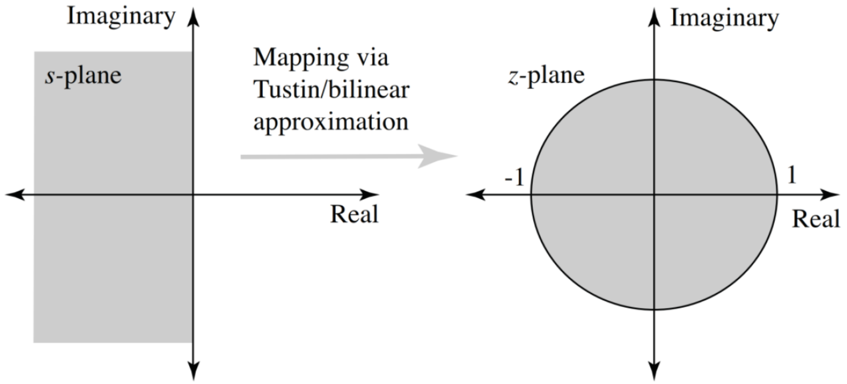
Estabilidad del control discretizado - Backwards

Un controlador continuo estable discretizado por backwards difference siempre será estable, pero no resultará rápido o con polos poco amortiguados.



Estabilidad del control discretizado - Trapezoidal

Un controlador continuo estable discretizado por el método bilineal siempre será estable, ya que el semiplano izquierdo se mapea a toda la esfera unitaria. Es la mejor aproximación y la más usual.



Consideraciones

- Es posible generar controladores discretos estables por backwards difference, siempre y cuando el controlador continuo sea lento y poco oscilante.
- Al diseñar controles continuos para discretizar por forward difference, debe recordarse que resultarán más lentos de lo esperado.
- El método bilinear tiene como desventaja una ligeramente mayor complejidad en la implementación, al requerir de más variables.
- TODOS los métodos pierden precisión rápidamente al acercarse a la frecuencia de Nyquist del sistema.

Ejemplo de simulación

Se supone una planta del tipo:

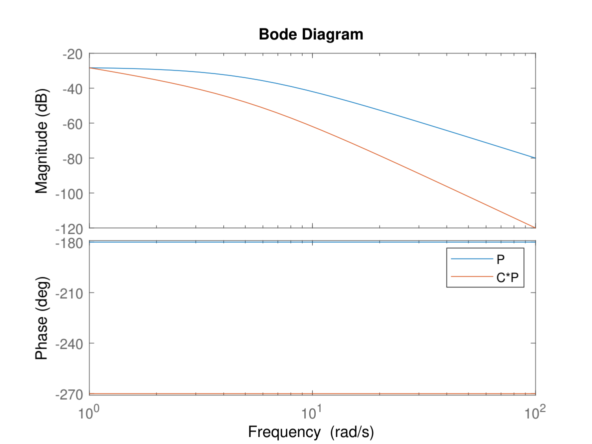
$$P = \frac{1}{(s+5)(s-5)}$$

que suele ser la forma del modelo simplificado y linealizado de un péndulo invertido.

Ejemplo de simulación

Se desea un error nulo a una referencia tipo escalón, procediendo al diseño por loop shaping. Se inicia con un controlador:

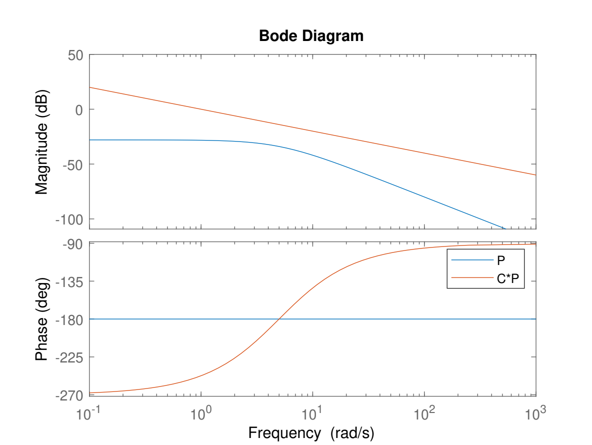
$$C = \frac{1}{s}$$



Ejemplo de simulación

Se agrega la compensación del polo inestable mediante un cero de fase mínima, en formato pasatodo, y otro cero más en el mismo lugar para cancelar la dinámica de fase mínima:

$$C = \frac{(s+5)^2}{s}$$

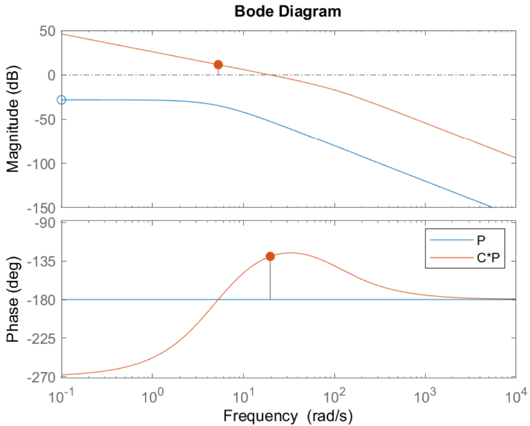


Ejemplo de simulación

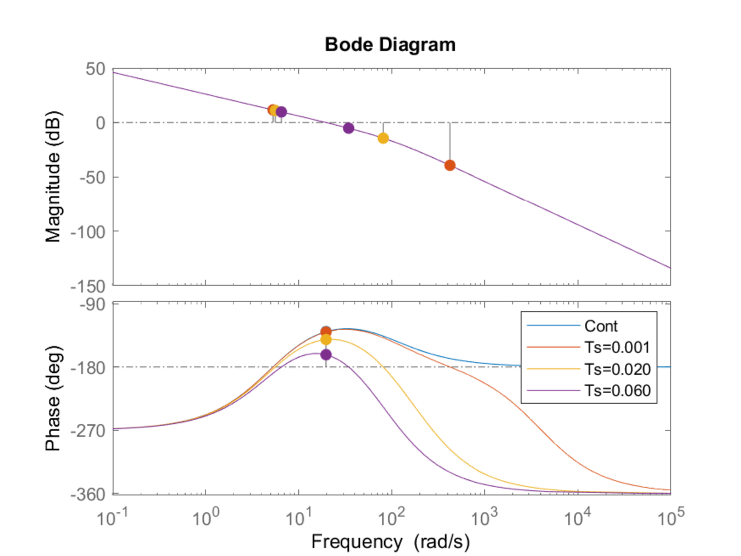
Finalmente se agrega un polo lejano para obtener un controlador propio y se ajusta la ganancia:

$$C = 2000\frac{(s+5)^2}{s(s+100)}$$

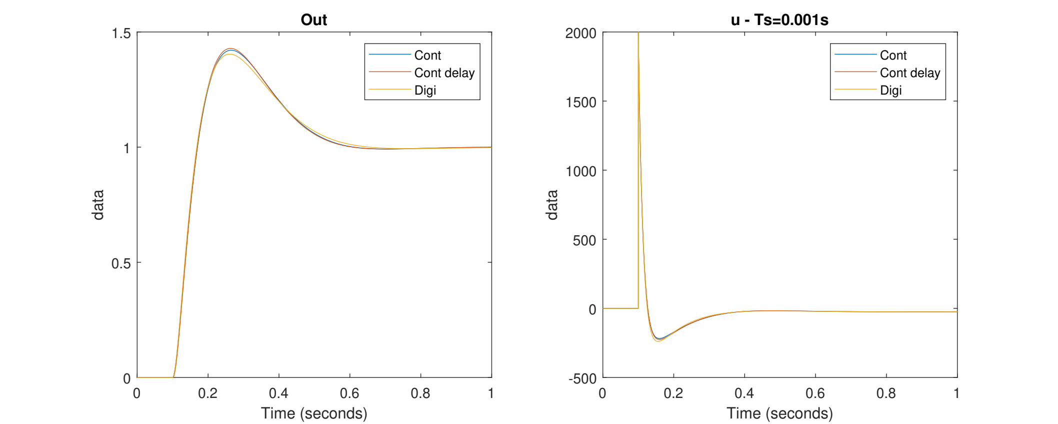
$$L = 2000\frac{(s+5)}{s(s+100)(s-5)}$$



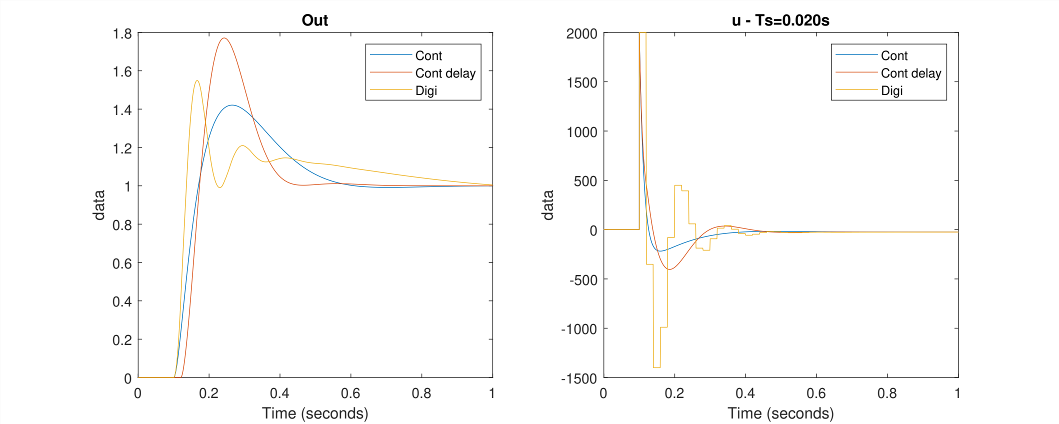
Ejemplo de simulación



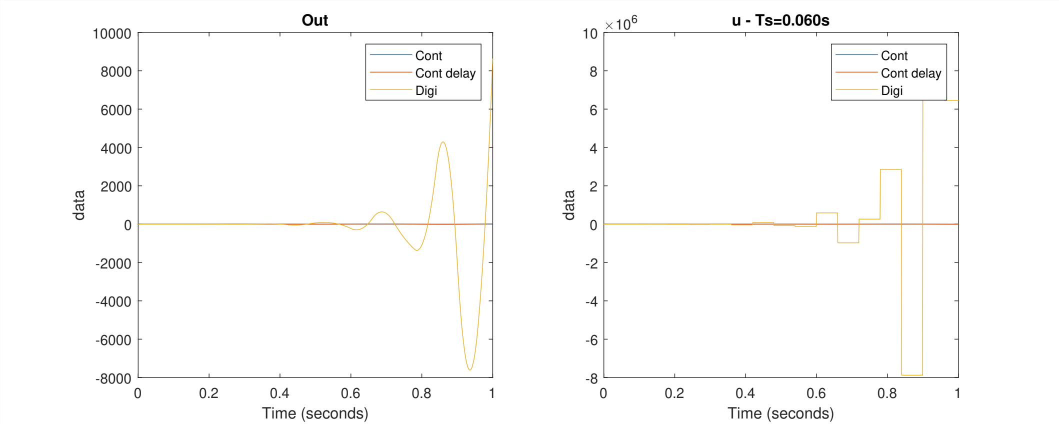
Ejemplo de simulación



Ejemplo de simulación

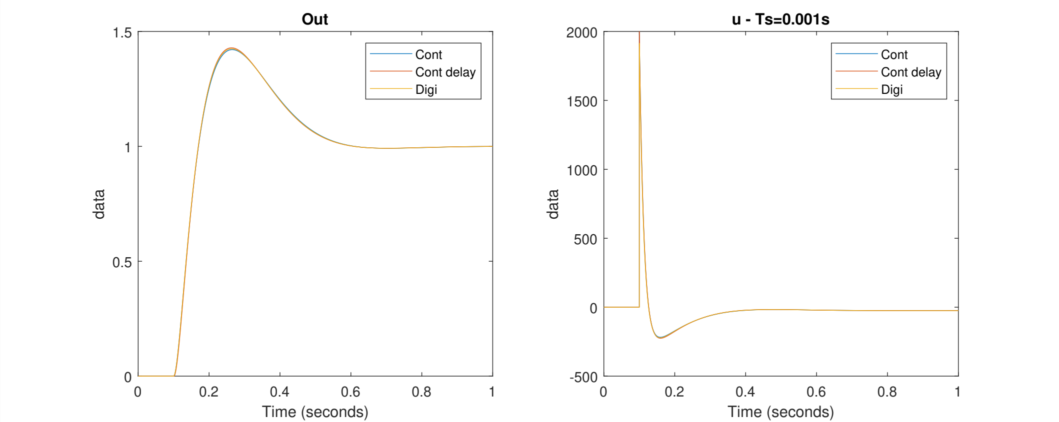


Ejemplo de simulación

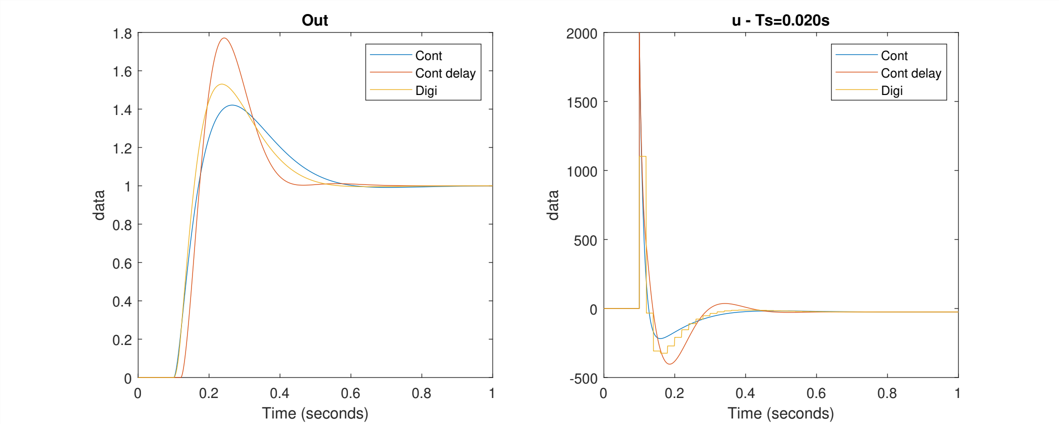


Ejemplo de simulación

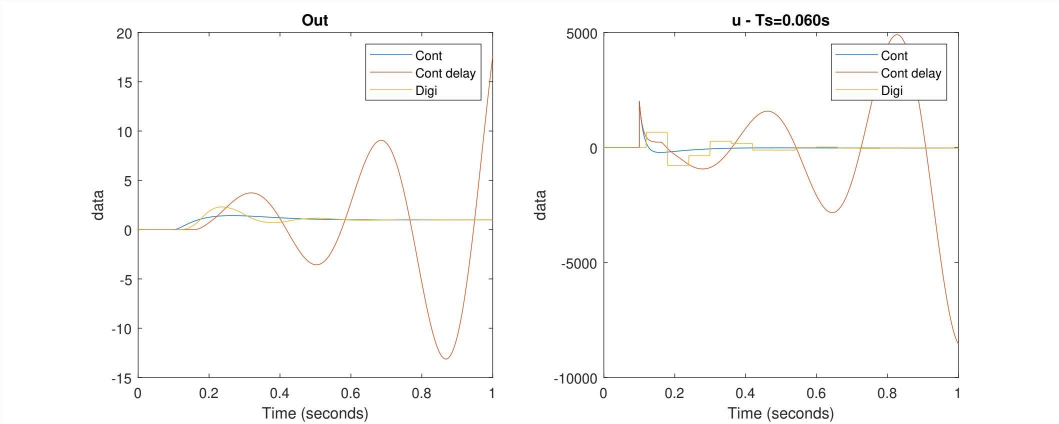
La forma de discretizar el controlador modifica sensiblemente la respuesta:



Ejemplo de simulación



Ejemplo de simulación



Problemas al pasar a un sistema real

- Precisión del sistema.
- Tiempos de cálculo.
- Garantías de tiempo.
- Ancho de banda de canales de comunicación.