Clase 4 - Modelado e Identificación

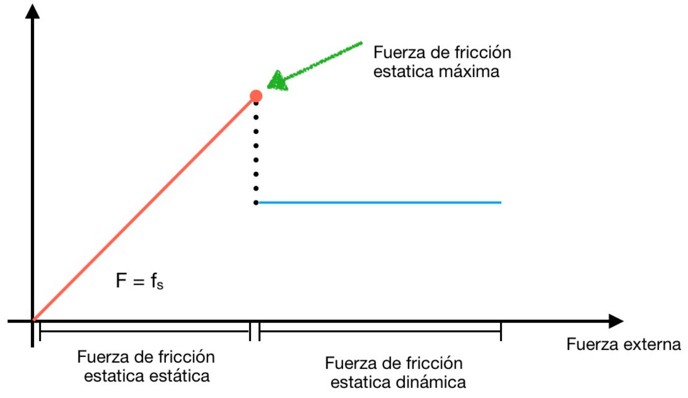
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires
Laboratorio de Control Automático (86.22)
Dr. Ing. Claudio D. Pose

Modelado matemático - físico (caja blanca)

- Es el modelado usado en teoría control lineal.
- Se asume que un sistema responde a un conjunto de leyes físicas.
- Pueden dejarse de lado conscientemente efectos menores o perturbaciones desconocidas.
- Asumen un comportamiento completamente ideal de la planta.

Modelado matemático - físico (caja blanca)

- Muchas veces no se consideran las partes no lineales del sistema.
- Es una falencia común incluso entre los efectos más básicos.



Identificación por regresión lineal

- Es un método de identificación lineal basado en la respuesta de un sistema y un conjunto de parámetros relacionados.
- Dada una respuesta y y un conjunto de variables $x = [x_1, x_2, ..., x_k]^T$, se asume una relación lineal entre ellas $y = x^T\alpha$, siendo α un vector de parámetros de igual largo que x.

Identificación por regresión lineal

- Si se tiene un conjunto de n mediciones, el sistema se transforma en uno matricial.
- Se requiere $n > k$ para poder estimar los parámetros α.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1^T \alpha \\
y_2 &= x_2^T \alpha \\
&\vdots \\
y_n &= x_n^T \alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix} \alpha
$$

$$
\mathbf{y} = \mathbf{X}\alpha
$$

$$
\mathbf{y} = \mathbf{X}\alpha + \eta
$$

Identificación por regresión lineal - cuadrados mínimos

- El α que soluciona el problema es aquel que minimice la norma $||\mathbf{y} - \mathbf{X}\alpha||$.
- La solución es insesgada y de mínima varianza.

$$\alpha = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{y}$$

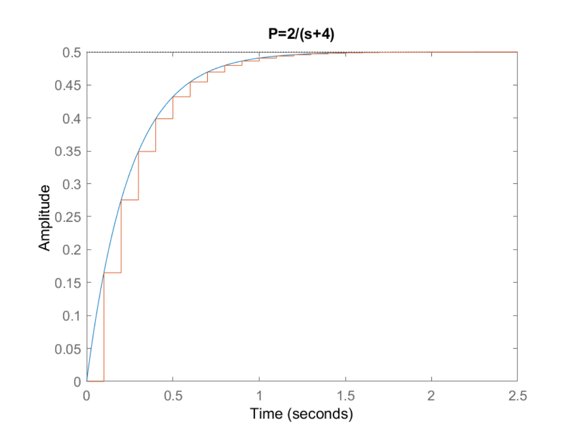
Identificación paramétrica (caja gris)

- Se supone una planta real que tiene una transferencia:

$$P = \frac{2}{s+4}$$

$$P_d = \frac{0.1648}{z - 0.6703}$$

$$y_{n+1} = 0.6703 y_n + 0.1648 u_n$$



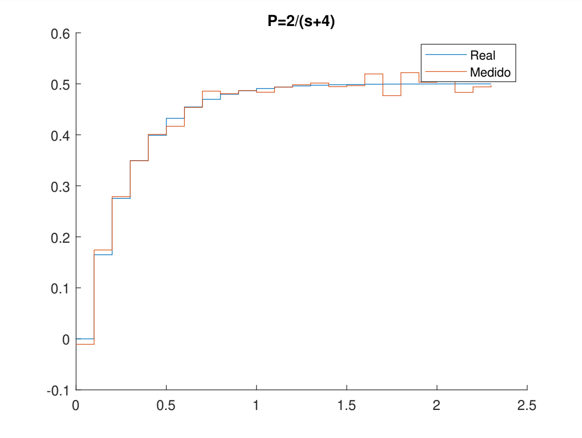
Identificación paramétrica (caja gris)

- Suponga que no se conocen los parámetros del modelo, pero sí su forma.
- Si se obtiene una serie de mediciones de y_{n+1}, y_n, u_n, se puede aplicar regresión para estimar los parámetros desconocidos

$$P = \frac{c_1}{s + c_2} \quad \rightarrow \quad P_d = \frac{c_u}{z - c_y} \quad \rightarrow \quad y_{n+1} = c_y y_n + c_u u_n$$

Identificación paramétrica (caja gris)

- Las mediciones reales tendrán ruido, con lo cual no obtendremos la estimación exacta, pero si la mejor aproximada posible.



Identificación paramétrica (caja gris)

- Las mediciones reales tendrán ruido, con lo cual no obtendremos la estimación exacta, pero si la mejor aproximada posible.

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & u_1 \\ y_2 & u_2 \\ \vdots & \vdots \\ y_n & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_y \\ c_u \end{bmatrix} + \eta \quad \rightarrow \quad c_y = 0.6598, c_u = 0.1698$$

Identificación tipo caja negra

- Se trata al sistema como algo completamente desconocido.
- Se propone un posible modelo genérico que lo aproxime.
- Se aplica regresión de manera similar al caso anterior.

Identificación en plantas inestables

- No es posible generar una referencia tipo impulso o escalón y observar la respuesta temporal real.
- Una posibilidad es, en ciertos casos, generar un controlador simple (proporcional) y luego identificar el lazo cerrado.
- No necesariamente se obtiene la respuesta real del sistema, si no se lo excita en todo el rango de frecuencias en donde trabaja.
- Además, puede ser difícil si el orden del sistema estabilizado es grande.

Ejemplo de aplicación - Péndulo

$$
\begin{aligned}
J\ddot{\theta} &= \sum \tau \\
ml^2\ddot{\theta} &= -mglsin(\theta) \quad \text{(ideal)} \\
ml^2\ddot{\theta} &= -mglsin(\theta) + \color{red}{\tau_{roz}} \\
ml^2\ddot{\theta} &= -mglsin(\theta) - k\dot{\theta} \\
\ddot{\theta} &= -\frac{g}{l}sin(\theta) - \frac{k}{ml^2}\dot{\theta} \approx -\frac{g}{l}\theta - \frac{k}{ml^2}\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

Qué puede saberse de estos parámetros? Hay manera precisa de medir la masa, gravedad, la posición del centro de masa? Puedo simplificar la expresión y trabajar con una lineal?

Ejemplo de aplicación - Péndulo

Caso ideal linealizado:

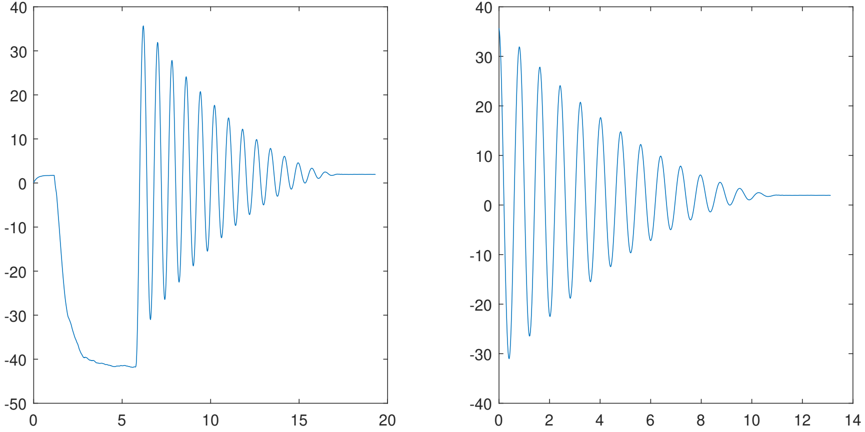
$$ml^2\ddot{\theta} = -mglsin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\theta(t) = \theta_0 cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ejemplo de aplicación - Péndulo



Ejemplo de aplicación - Péndulo

Caso con rozamiento con el aire linealizado:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - \frac{k}{ml^2}\dot{\theta}$$

$$0 = \theta(s^2 + \frac{k}{ml^2}s + \frac{g}{l})$$

$$s_{1,2} = \frac{-k}{2l^2m} \pm \frac{\sqrt{k^2 - 4gl^3m^2}}{2l^2m}$$

$$s_{1,2} = \frac{-k}{2l^2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4l^4m^2} - \frac{g}{l}}$$

Si $k = 0$ se vuelve al modelo ideal, no hay parte real (decaimiento) y la frecuencia de oscilación no es afectada.

Ejemplo de aplicación - Péndulo

Solución general:

$$\theta(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t}$$

$$\theta(0) = a_1 + a_2 = \theta_0$$

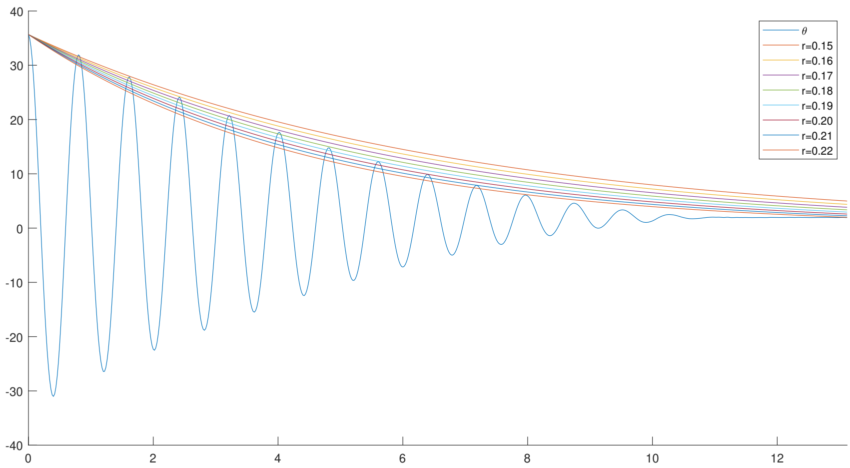
$$\dot{\theta}(0) = a_1 s_1 + a_2 s_2 = 0$$

$$\theta(t) = \theta(0) e^{\mathbb{R}(s_1)} cos(\mathbb{I}(s_1) t)$$

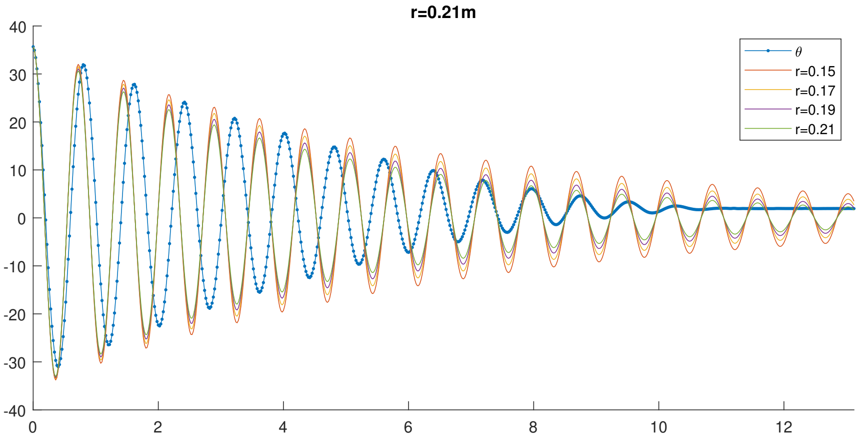
$$\theta(t) = \theta(0) e^{-\frac{k}{2l^2 m} t} cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{4l^4 m^2} - \frac{g}{l}} t\right)$$

$$\theta(t) = \theta(0) e^{-rt} cos\left(\sqrt{\left|r^2 - \frac{g}{l}\right|} t\right)$$

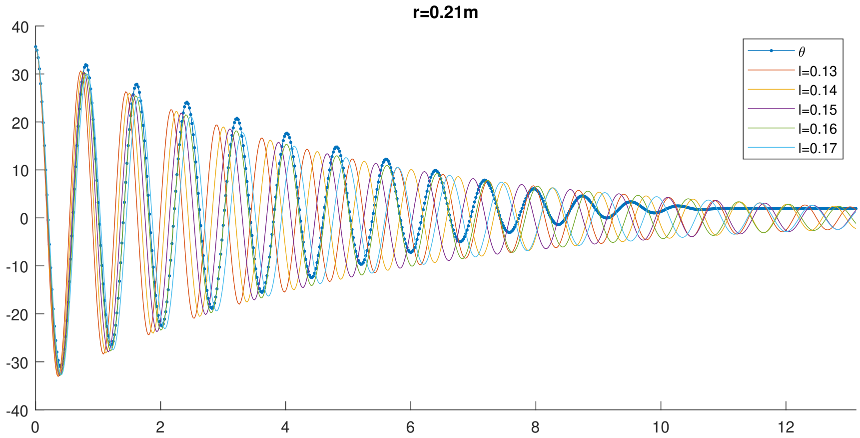
Ejemplo de aplicación - Péndulo



Ejemplo de aplicación - Péndulo



Ejemplo de aplicación - Péndulo



Ejemplo de aplicación - Péndulo