Filtrado de Kalman

86.51

Cecilia G. Galarza

FIUBA
Laboratorio de Procesamiento de Señales y Comunicaciones

2do Cuatrimestre 2022

- Usando las ideas de estimación de variables aleatorias a partir de observaciones correlacionadas, obtuvimos el filtro de Wiener, que resuelve el problema óptimo MMSE.
- Un criterio alternativo de optimización es el de Cuadrados Mínimos (LS)
- El RLS implementa una versión iterativa de la solución LS. se pueden aplicar igual
- En principio, todos estos métodos resuelven problemas estacionarios.
- Para trabajar con procesos no-estacionarios, se introducen parámetros heurísticos (constante de olvido) de difícil calibrado en RLS

Kalman propone el RLS para no estacionarios, de forma optima

Planteo del problema

Considere los procesos en tiempo discreto $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{C}^p$, $\mathbf{v}(k) \in \mathbb{C}^l$, $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{C}^p$, conocidos como *estado*, *observación*, *ruido de estado*, y *ruido de medición* del sistema $\mathcal{F}$ descripto por el modelo lineal variante en el tiempo

LTV

ruido de estado

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k \mathbf{v}(k) \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k).
\end{aligned}
$$

obs. ruido de medición

Asuma que $\mathbf{x}(0)$ también es un vector aleatorio. Luego, para cada instante k, el filtro de Kalman calcula

+ una info vaga de X(0)

No hace falta que el proceso sea ESTACIONARIO, Kalman resuelve el problema para el caso general, pero no necesariamente invariante en el tiempo

$$
\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] = \mathbb{E}\left[\,\mathbf{x}(k) \,\middle|\, \mathbf{y}(k-1), \cdots \mathbf{y}(0)\,\right]
$$

o en forma equivalente, resuelve el problema de estimación MMSE para proc. estacionario

dado t/s obs

$$
\min \mathbb{E}\left[\,\|\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)\|^2 \,\middle|\, \mathbf{y}(k-1), \cdots \mathbf{y}(0)\,\right]
$$

savemos que la estimacion optima es la esperanza condicional, entonces Kalman ofrece una forma optima de calcularla

Todo sistema dinámico tiene asociado un *estado*, generalmente llamado $\mathbf{x}(k)$. En todo instante k, el vector $\mathbf{x}(k)$ contiene toda la información necesaria para poder determinar el futuro comportamiento del sistema si se conocen las entradas.
En particular, si el sistema tiene una dinámica lineal y evoluciona en tiempo discreto, podemos plantear el modelo

suele ser escalar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \qquad k = 0, 1, \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{C}^n$ es el estado del sistema en el instante k, $\mathbf{y}(k)$ es la observación o salida del sistema, y $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{w}(k)$ son dos procesos ruidosos que afectan la dinámica del estado y de la observación respectivamente. Las matrices $\mathbf{F}_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{G}_k \in \mathbb{C}^{n\times l}$, $\mathbf{H}_k \in \mathbb{C}^{p\times n}$ varian con el tiempo de un modo conocido[1]. Las ecuaciones (1) son un modelo de p=1 (acá) estados de un sistema de dimensión finita.

[1] En [3] podrán encontrar un tratamiento metódico de las distintas representaciones en variables de estado.

sist din

- Sistema ARMA en tiempo discreto:

LTI, Δt: cte

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 v(k-1)$$

Definimos el vector de estado $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \; x_3]^t$ de modo que para todo k

$$x_1(k) = y(k-1) \quad x_2(k) = y(k-2) \quad x_3(k) = v(k-1)$$

Luego,

$= y(k)$

$y(k-1)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_k = \mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_k = \mathbf{G}} v(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_k = \mathbf{H}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

- Sistema en tiempo continuo

$$\ddot{y}(t) = av(t)$$

Consideramos el siguiente vector de estados: $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2]$ tal que

$$x_1(t) = y(t) \quad x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Lo q' indica el futuro es la derivada

Luego, el modelo de estado en tiempo continuo resulta

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = av(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Algunos ejemplos III

dif. finitas (malo)

Aproximación en tiempo discreto $\dot{x}(t) \simeq \frac{x[(k+1)T]-x[kT]}{T}$. Luego,

$$\dot{x_1}(t) \simeq \frac{x_1[(k+1)T] - x_1[kT]}{T} = x_2(kT)$$

$$\dot{x_2}(t) \simeq \frac{x_2[(k+1)T] - x_2[kT]}{T} = av(kT)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ aT \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} v(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Kalmam
Parte de acá
→ si da mal
puede q' venga discretizando mal

Algunos ejemplos (cont)

Vuelvo a sistema ARMA: $y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 v(k-1)$

- $x_1(k) = y(k-1), x_2(k) = y(k-2), x_3(k) = v(k-1)$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Algunos ejemplos (cont)

Vuelvo a sistema ARMA: $y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 v(k-1)$

- $x_1(k) = y(k-1), x_2(k) = y(k-2), x_3(k) = v(k-1)$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

- $x_1(k) = y(k), x_2(k) = y(k-1)$

Algunos ejemplos (cont)

Vuelvo a sistema ARMA: $y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 v(k-1)$

- $x_1(k) = y(k-1), x_2(k) = y(k-2), x_3(k) = v(k-1)$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

- $x_1(k) = y(k), x_2(k) = y(k-1)$

$$x_1(k+1) = y(k+1) = a_1 \underbrace{y(k)}_{x_1(k)} + a_2 \underbrace{y(k-1)}_{x_2(k)} + b_1 v(k)$$

$$x_2(k+1) = y(k) = x_1(k)$$

Vuelvo a sistema ARMA: $y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 v(k-1)$

- $x_1(k) = y(k-1), x_2(k) = y(k-2), x_3(k) = v(k-1)$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Ell sistema en solo 1, sin embargo segun las variables de estado que elija, puedo describirlo de muchas maneras, con dos variables de estado me bastan para describir todo el sistema.

- $x_1(k) = y(k), x_2(k) = y(k-1)$

Minima realización →

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(k)$$

La menor cantidad de variables de estado que me permita representar el sistema sin perder informacion

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Todos sus estados observables y controlables, si no es minima no se va a cumplir

El modelo de estados

Retomamos el modelo de estados en tiempo discreto y agregamos algunas hipótesis

LTV

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k \mathbf{v}(k) \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \qquad k = 0, 1, \cdots
\end{aligned}
$$

Asumimos que

- $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{w}(k)$ son dos procesos de media nula, descorrelacionados en el tiempo, tal que

Correlacion de v

$$
\mathbb{E}\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(i) \\ \mathbf{w}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(j)^* & \mathbf{w}(j)^* \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_i \end{bmatrix} \delta_{ij}
$$

corrrelacion de W

- El estado inicial $\mathbf{x}(0)$ es un vector aleatorio de media $\bar{\mathbf{x}}_0$ y matriz de covarianza $\mathbf{P}_0$.
- $\mathbf{x}(0)$ está descorrelacionado con $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{w}(k)$ en todo momento k.

Notación y más notación

En este tema, la elección de una buena notación es fundamental para evitar errores

- $\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]$: estimación *a priori* de $\mathbf{x}(k)$. Es la estimación dadas todas las observaciones $\mathbf{y}(0), \cdots, \mathbf{y}(k-1)$.
- $\hat{\mathbf{x}}[k|k]$: estimación *a posteriori* de $\mathbf{x}(k)$. Es la estimación dadas todas las observaciones $\mathbf{y}(0), \cdots, \mathbf{y}(k)$.
- $\Sigma_{k|k-1} = \mathbb{E}\left\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k-1]][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k-1]]^* \mid \mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)\right\}$: covarianza *a priori*.

$X_{opt} = E[X|_y]$

El procesamiento tiene dos etapas:

Post

1. Incorporación de nueva observación: Cálculo de $\hat{\mathbf{x}}[k|k]$

Error

La ganancia y covarianza no depende de las observaciones
No hace falta computo online

$$\hat{\mathbf{x}}[k|k] = \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]\right) \qquad \hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0$$

$$\mathbf{K}_k = \Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^*\left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}$$

$$\Sigma_{k|k} = \Sigma_{k|k-1} - \Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^*\left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1} \qquad \Sigma_{0|-1} = \mathbf{P}_0$$

Observador LQG

$R_k > 0$

2. Predicción: Cálculo de $\hat{\mathbf{x}}[k+1|k]$

Pred : Priori en k+1

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k]$$

$$\Sigma_{k+1|k} = \mathbf{F}_k\Sigma_{k|k}\mathbf{F}_k^* + \mathbf{G}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{G}_k^*$$

Para q siempre sea invertible

La idea es diseñar un sistema que tolere variaciones en el tiempo, que sea LTV

- $\mathbf{K}_k$ es la ganancia del filtro de Kalman.
- El KF es un sistema dinámico lineal de tiempo discreto, en general, variante en el tiempo.
- $\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] = \mathbb{E}[\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)]$ es la esperanza condicional de $\mathbf{x}(k)$ dadas las observaciones $\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)$ Xq Kalman resuelve el problema MMSE
- $\Sigma_{k|k-1} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k-1])\,(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k-1])^*\,|\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)\right]$ es la matriz de covarianza condicional del estado.
- $\Sigma_{k|k-1}$ y $\mathbf{K}_k$ no dependen de las observaciones y pueden ser precomputadas.
- Para computar $\mathbf{K}_k$ se debe calcular la inversa de $\left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]$. Para garantizar que ésta exista, se impone $\mathbf{R}_k > 0$, es decir, se asume que en todo momento las observaciones son ruidosas.

Dadas dos variables aleatorias X, Y, cuál es el mejor estimador lineal $\hat{X}$ tal que minimice $\mathbb{E}[\|X - \hat{X}\|^2]$? $\mathbb{E}[X|Y]$

lineal

Estimador LMMSE

Sean X e Y dos variables aleatorias tal que

$$\mathbb{E}\left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} m_X \\ m_Y \end{bmatrix} \quad \mathbf{Cov}\left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{bmatrix}$$

Luego, el estimador lineal que minimiza $\mathbb{E}[\|X - \hat{X}\|^2]$ es

$$^{L}\hat{X} = m_X + \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}(Y - m_Y)$$

Si X e Y son conjuntamente gaussianas, entonces $^{L}\hat{X}$ es también el estimador MMSE.

Propiedades del LMMSE

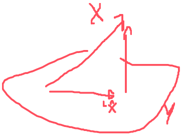
$$ {}^{L}\hat{X}(Y) = m_X + \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\underbrace{(Y - m_Y)}_{E[Y]-E[m_Y] = 0} $$

- El LMMSE es insesgado, es decir

$$ \mathbb{E}\left[{}^{L}\hat{X}(Y)\right] = \mathbb{E}[X] $$

- Principio de ortogonalidad: $X - {}^{L}\hat{X}$ es ortogonal a Y, es decir

$$ \mathbb{E}\left[\left(X - {}^{L}\hat{X}(Y)\right)Y^{*}\right] = 0 $$



- Sean $Y_1, \cdots Y_k$ v.a. descorrelacionadas entre sí. Luego, el LMMSE de X a partir de $Y_1, \cdots Y_k$ es igual a

Estimar K variables aleatorias es lo mismo que estimarlas una por una y luego sumarlas todas, hay un factor de correcion con la media pero lo importante eso.

diagonales

$$ {}^{L}\hat{X}(Y_1, \cdots Y_k) = m_X + \sum_{i=1}^{k} \Sigma_{XY_i}\Sigma_{Y_iY_i}^{-1}(Y_i - m_{Y_i}) $$

$$ = \sum_{i=1}^{k} {}^{L}\hat{X}(Y_i) - \underbrace{(k-1)m_X}_{\text{factor corrección}} $$

En particular, ${}^{L}\hat{X}(Y_1, Y_2) = {}^{L}\hat{X}(Y_1) + {}^{L}\hat{X}(Y_2) - m_X$

Tienen corr

Definición a *mano alzada*: Dada la secuencia de variables aleatorias $Z_0, \cdots Z_k$, la innovación $\tilde{Z}_k$ contiene la información en Z_k no contenida en $Z_0, \cdots Z_{k-1}$.

- Caso gaussiano:

decorr entre sí

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_0 &= Z_0 - \mathbb{E}[Z_0] \\
\tilde{Z}_1 &= Z_1 - \mathbb{E}[Z_1|Z_0] \\
\tilde{Z}_2 &= Z_2 - \mathbb{E}[Z_2|Z_0, Z_1] \\
\tilde{Z}_k &= Z_k - \mathbb{E}[Z_k|Z_0, Z_1, \cdots Z_{k-1}]
\end{aligned}$$

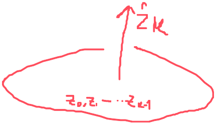
$$\mathbb{E}[\tilde{Z}_k] = \mathbb{E}[Z_k] - \mathbb{E}\{\overbrace{\mathbb{E}[Z_k|Z_0 \cdots Z_{k-1}]}^{\mathbb{E}[Z_k]}\}$$

Innovación

- Caso general:

Resto el estimador lineal

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_0 &= Z_0 - \mathbb{E}[Z_0] \\
\tilde{Z}_1 &= Z_1 - {}^L\hat{Z}_1(Z_0) \\
\tilde{Z}_2 &= Z_2 - {}^L\hat{Z}_2(Z_0, Z_1) \\
\tilde{Z}_k &= Z_k - {}^L\hat{Z}_k(Z_0, \cdots Z_{k-1})
\end{aligned}$$



$\tilde{Z}_k$ resulta el error del estimador LMMSE de Z_k dados $Z_0, \cdots, Z_{k-1}$.

- $\{\tilde{Z}_0, \tilde{Z}_1, \cdots \tilde{Z}_k\}$ son v.a. de media nula descorrelacionadas entre sí.
- Si $\{Z_0, Z_1, \cdots Z_k\}$ son conjuntamente gaussianas, $\tilde{Z}_k$ es gaussiana
- Por el principio de ortogonalidad, $\tilde{Z}_k \perp \{Z_0, Z_1, \cdots Z_{k-1}\}$
- $\tilde{Z}_k$ es una función lineal de $Z_0, Z_1, \cdots Z_k$
- Z_k es una función lineal de $\tilde{Z}_0, \tilde{Z}_1, \cdots \tilde{Z}_k$!
- Si X es una variable aleatoria de media nula,

$$\mathbb{E}[X|\underbrace{Z_0, Z_1, \cdots Z_k}_{\text{correlacionadas}}] = \mathbb{E}[X|\underbrace{\tilde{Z}_0, \tilde{Z}_1, \cdots \tilde{Z}_k}_{\text{Descorrelacionadas}}] = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}[X|\tilde{Z}_i]$$

El problema a resolver es la estimación del vector de estados $\mathbf{x}(k)$ a partir de las observaciones $\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)$. Usando el criterio MMSE, calculamos

$$\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] = \mathbb{E}[\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)] \qquad \text{caso gaussiano}$$

$$\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] = {}^{L}\hat{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)\right) \qquad \text{caso general}$$

Haciendo un abuso de notación, vamos a hacer todo el desarrollo con $\mathbb{E}[\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)]$, teniendo en cuenta que para el caso general no-gaussiano el estimador corresponde al estimador LMMSE ${}^{L}\hat{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)\right)$.

Vamos a trabajar con la secuencia de innovaciones de las mediciones

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{y}(k) - \mathbb{E}[\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)] \\
&= \mathbf{y}(k) - \mathbb{E}[\mathbf{H}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)|\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)] \\
&= \mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k\mathbb{E}[\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(0), \cdots \mathbf{y}(k-1)] \\
&= \mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] \\
&= \mathbf{H}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] \\
&= \mathbf{H}_k \underbrace{(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k-1])}_{\tilde{\mathbf{x}}(k)} + \mathbf{w}(k)
\end{aligned}
$$

$E[W|y] = \mu_W = 0$

Priori

innovaciones

y con la secuencia de innovaciones del vector de estados o error de estimación del estado

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k-1]$$

est a priori

Deducción del Filtro de Kalman: Media condicional I

Vamos a calcular $\hat{\mathbf{x}}[k+1|k]$ en forma recursiva. Para ello, observamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k+1)\,|\,\mathbf{y}(0),\cdots\mathbf{y}(k)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k+1)\,|\,\tilde{\mathbf{y}}(0),\cdots,\tilde{\mathbf{y}}(k)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k+1)\,|\,\tilde{\mathbf{y}}(k)\right] + \mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k+1)\,|\,\tilde{\mathbf{y}}(0),\cdots\tilde{\mathbf{y}}(k-1)\right] - \mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k+1)\right]
\end{aligned}$$

Pg:14

En la última igualdad, recordamos que para dos v.a. independientes Y_1, Y_2,

$$\mathbb{E}[X|Y_1,Y_2] = \mathbb{E}[X|Y_1] + \mathbb{E}[X|Y_2] - m_X$$

.

Como $\mathbf{x}(k+1)$ y $\tilde{\mathbf{y}}(k)$ tienen una distribución conjunta (gaussiana o no) conocida, tenemos

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k+1)\,|\,\tilde{\mathbf{y}}(k)\right] = \mathbb{E}[\mathbf{x}(k+1)] + \underbrace{\mathbf{Cov}[\mathbf{x}(k+1),\tilde{\mathbf{y}}(k)]}_{1}\,\underbrace{\mathbf{Cov}[\tilde{\mathbf{y}}(k),\tilde{\mathbf{y}}(k)]^{-1}}_{2}\,\tilde{\mathbf{y}}(k)$$

Calculemos los términos 1 y 2 por separado

Deducción del Filtro de Kalman: Media condicional II

es cero pero no siempre

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Cov}[\mathbf{x}(k+1), \tilde{\mathbf{y}}(k)] &= \mathbf{Cov}\left[\mathbf{F}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k\mathbf{v}(k)\,,\, \mathbf{H}_k\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{w}(k)\right] && (2)\\
&= \mathbb{E}\left[(\mathbf{F}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k\mathbf{v}(k))\,(\mathbf{H}_k\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{w}(k))^*\right] && (3)\\
&= \mathbf{F}_k\mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k)\tilde{\mathbf{x}}^*(k)\right]\mathbf{H}_k^* + \mathbf{G}_k\mathbb{E}\left[\mathbf{v}(k)\mathbf{w}(k)^*\right] && (4)\\
&= \mathbf{F}_k\mathbb{E}\left[(\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \tilde{\mathbf{x}}(k))\,\tilde{\mathbf{x}}(k)^*\right]\mathbf{H}_k^* + \mathbf{G}_k\mathbf{S}_k && (5)\\
&= \mathbf{F}_k\mathbb{E}\left[\tilde{\mathbf{x}}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k)^*\right]\mathbf{H}_k^* + \mathbf{G}_k\mathbf{S}_k && (6)\\
&= \mathbf{F}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{G}_k\mathbf{S}_k && (7)
\end{aligned}
$$

$\tilde{X}$ y $\hat{X}$ descorr.

- (2) a (3): Definición de $\mathbf{Cov}$
- (3) a (4): Por hipótesis, $\mathbf{w}(k)$ está descorrelacionado con $\mathbf{x}(0)$ y con $\mathbf{v}(j)$ para todo k, j. Por ende, $\mathbf{w}(k)$ y $\mathbf{x}(k)$ están descorrelacionados. Por otro lado, $\mathbf{v}(k)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ son independendientes y de media nula. Por ende están descorrelacionados.
- (4) a (5): Reemplazo definición de innovación $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k-1]$.
- (5) a (6): Por definición de innovación $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ y $\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]$ están descorrelacionadas
- Reemplazo definición de $\Sigma_{k|k-1}$

wk esta descorrelacionado de x_moño por lo que la
covarianza solo queda en la suma de las covarianzas

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}[\tilde{\mathbf{y}}(k), \tilde{\mathbf{y}}(k)] &= \mathbf{Cov}[\mathbf{H}_k\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{w}(k), \mathbf{H}_k\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{w}(k)] \\ &= \mathbf{H}_k \underbrace{\Sigma_{k|k-1}}_{\text{Priori}} \mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\end{aligned}$$

Reemplazando estas dos expresiones arriba, tenemos:

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k+1) \mid \tilde{\mathbf{y}}(k)\right] = \mathbb{E}[\mathbf{x}(k+1)] + \left[\mathbf{F}_x\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{G}_k\mathbf{S}_k\right]\left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}\tilde{\mathbf{y}}(k)$$

Por otro lado,

E[V|y]=0

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k+1) \mid \tilde{\mathbf{y}}(0), \cdots \tilde{\mathbf{y}}(k-1)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{F}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k\mathbf{v}(k) \mid \tilde{\mathbf{y}}(0), \cdots \tilde{\mathbf{y}}(k-1)\right] \\ &= \mathbf{F}_k\mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k) \mid \tilde{\mathbf{y}}(0), \cdots \tilde{\mathbf{y}}(k-1)\right] \\ &= \mathbf{F}_k\underbrace{\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]}_{\text{Priori}}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \left\{\mathbf{F}_k\mathbf{K}_k + \mathbf{G}_k\mathbf{S}_k\left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}\right\} \cdot \underbrace{(\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1])}_{\tilde{y}(k)}$$

donde

$$\mathbf{K}_k = \Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^*\left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}$$

Sea

$$\Gamma_k = \mathbf{F}_k\mathbf{K}_k + \mathbf{G}_k\mathbf{S}_k\left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}$$

más general, antes eran cero

Luego,

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \Gamma_k\left(\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]\right).$$

(Observación: En la presentación inicial, tomé la covarianza entre $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{w}$(k) nula para simplificar las ecuaciones.)

Ahora le toca el turno a la matriz de covarianza

$$\Sigma_{k+1|k} = \mathbf{Cov}\left[\tilde{\mathbf{x}}(k+1), \tilde{\mathbf{x}}(k+1)\right].$$

Es claro que

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}[k+1|k] \\
&= \mathbf{F}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k\mathbf{v}(k) - \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] - \Gamma_k(\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]) \\
&= \mathbf{F}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k\mathbf{v}(k) - \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] - \Gamma_k(\mathbf{H}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]) \\
&= (\mathbf{F}_k - \Gamma_k\mathbf{H}_k)\,\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}_k\mathbf{v}(k) - \Gamma_k\mathbf{w}(k) \\
&= (\mathbf{F}_k - \Gamma_k\mathbf{H}_k)\,\tilde{\mathbf{x}}(k) + \left[\mathbf{G}_k \quad -\Gamma_k\right]\begin{bmatrix}\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{w}(k)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Recordemos que $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ está descorrelacionado con $\mathbf{v}(k)$ y con $\mathbf{w}(k)$ ya que estos son procesos blancos descorrelacionados en el tiempo. Luego,

$$\Sigma_{k+1|k} = (\mathbf{F}_k - \Gamma_k \mathbf{H}_k)\, \mathbf{Cov}[\tilde{\mathbf{x}}(k), \tilde{\mathbf{x}}(k)]\, (\mathbf{F}_k - \Gamma_k \mathbf{H}_k)^* \\ + [\mathbf{G}_k \quad -\Gamma_k] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_k^* & \mathbf{R}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_k^* \\ -\Gamma_k^* \end{bmatrix}$$

Desarrollando,

$$\Sigma_{k+1|k} = (\mathbf{F}_k - \Gamma_k \mathbf{H}_k)\, \Sigma_{k|k-1}\, (\mathbf{F}_k - \Gamma_k \mathbf{H}_k)^* \\ + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^* + \Gamma_k \mathbf{R}_k \Gamma_k^* - \mathbf{G}_k \mathbf{S}_k \Gamma_k^* - \Gamma_k \mathbf{S}_k^* \mathbf{G}_k^*.$$

Diseñamos un filtro de Kalman para observar el estado del siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k\mathbf{v}(k)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)\end{aligned}$$

donde $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{w}(k)$ son dos procesos blancos de media nula cuyas matrices de covarianza son $\mathbf{Q}_k$ y $\mathbf{R}_k$ respectivamente.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] &= \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \Gamma_k\left(\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]\right)\\ &= \underbrace{\left(\mathbf{F}_k - \Gamma_k\mathbf{H}_k\right)}_{\mathbf{F}_{kalman}}\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \Gamma_k\mathbf{y}(k)\end{aligned}$$

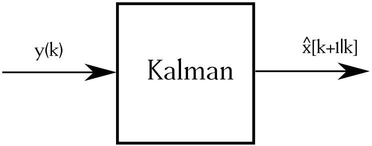
El filtro de Kalman es un sistema lineal cuya dinámica está determinada por $\mathbf{F}_{kalman}$.

Estabilidad interna y BIBO estable es lo mismo para sistemas lineales

MMSE

que F sea estable no significa q. $(F - \Gamma H)$ sea estable

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = (\mathbf{F}_k - \Gamma_k \mathbf{H}_k)\,\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \Gamma_k \mathbf{y}(k).$$



Es éste un sistema *estable*?

Analizamos este tema en el caso de un sistema LTI excitado por señales ESA, es decir:

$$\underbrace{\mathbf{F}_k = \mathbf{F},\ \mathbf{G}_k = \mathbf{G},\ \mathbf{H}_k = \mathbf{H},\ \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q},\ \text{y}\ \mathbf{R}_k = \mathbf{R}.}_{\text{cte's}}$$

Respuesta impulsiva de un sistema LTI

Sea $g(k)$ la respuesta impulsiva del sistema LTI en tiempo discreto.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{v}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k).$$

Notar q la resp. impulsiva es acotada

Si $\mathbf{x}(0) = 0$, $g(k) = 0, k \leq 0$, $\underbrace{g(k) = \mathbf{H}\overset{\text{Sus autoval.}}{\mathbf{F}}^{k-1}\mathbf{G}}_{\text{Resp. impulsiva}}, k \geq 1$.

Estabilidad en tiempo discreto

El sistema LTI en tiempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{v}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$$

es BIBO estable si y sólo si todos los autovalores de $\mathbf{F}$ caen dentro del círculo unitario, es decir, $|\lambda_i(\mathbf{F})| < 1$, $i = 1, \cdots n$.

Observabilidad I

Este concepto explora la capacidad de la señal de salida $\mathbf{y}(k)$ para estimar $\hat{\mathbf{x}}[k+1|k]$.

Observabilidad

El sistema en tiempo discreto

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(k)\end{aligned}$$

es **observable** si en todo momento se puede determinar el vector de estados $\mathbf{x}(k)$ a partir de la observación de la salida $\mathbf{y}(s)$ en los instantes siguientes $k \leq s$.

instantes anteriores

Observabilidad II

Sistema observable

Los siguientes puntos son equivalentes:

- El par $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ es observable;
- $$\rho\left(\mathcal{O}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \mathbf{HF}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n,$$
  donde $\mathcal{O} \in \mathbb{C}^{np\times n}$ es la matriz de observabilidad asociada al par $[\mathbf{F}, \mathbf{H}]$.
- Existe $\Gamma \in \mathbb{C}^{n\times p}$ tal que $|\lambda_i(\mathbf{F} - \Gamma\mathbf{H})| < 1$, $i = 1, \cdots n$.

más interesante

Controlabilidad

El sistema en tiempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{v}(k)$$

es **controlable** en tiempo finito, si a partir de cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$ se puede alcanzar cualquier estado $\mathbf{x}(k)$ eligiendo la secuencia $\mathbf{v}(s), s \leq k$.
Esto se cumple si y sólo si

$$\rho\left(\mathcal{C}\right) = \rho\left(\left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} & \mathbf{F}^2\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{array}\right]\right) = n.$$

$\mathcal{C} \in \mathbb{C}^{n \times nl}$ es la matriz de controlabilidad asociada al par $[\mathbf{F}, \mathbf{G}]$.

Un sistema BIBO estable mantiene su salida acotada para toda entrada acotada. Qué sucede con los estados del sistema?

Teorema de Lyapunov (formulación reducida)

El sistema $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k)$ es estable (i.e., $|\lambda_i(\mathbf{F})| < 1$, $i = 1, \cdots n$) si y sólo si existen dos matrices $\mathbf{P} \geq 0$ y $\mathbf{Q} \geq 0$ tal que

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^* + \mathbf{Q}$$

Cuándo la salida de un sistema lineal es ESA? En Procesos Estocásticos vimos que la salida de todo sistema LTI impulsado por una entrada ESA es ESA. Es esta condición suficiente?

Supongamos un sistema LTI

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \end{cases}$$

con $\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)] = 0$, y $\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}(r)] = \mathbf{Q}\delta_{kr}$, $\mathbb{E}[\mathbf{w}(k)] = 0$, y $\mathbb{E}[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}(r)] = \mathbf{R}\delta_{kr}$. Más aún, la condición inicial del sistema es en k_0 con $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$ con matriz de covarianza $\mathbf{P}_0$.

Sea $\mathbf{P}_k$ la matriz de covarianza de $\mathbf{x}(k)$. $\mathbf{P}_k$ satisface la recursión

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{P}_k\mathbf{F}^* + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^*.$$

Si $\mathbf{F}$ es estable, entonces de acuerdo a Lyapunov, existe $\mathbf{P} \geq 0$ tal que

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^* + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^*.$$

Pregunta: $\mathbf{P}_k \to \mathbf{P}$?

Estacionariedad de un sistema lineal II

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P} &= \mathbf{F}\left[\mathbf{P}_k - \mathbf{P}\right]\mathbf{F}^* \\ &= \mathbf{F}^k\left[\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}\right](\mathbf{F}^k)^*\end{aligned}$$

Como $\mathbf{F}$ es estable, sus autovalores están dentro del círculo unitario y por ende $\mathbf{F}^k \to 0$ a medida que $k \to \infty$. Luego, $\mathbf{P}_k \to \mathbf{P}$ a medida que k crece. Tenemos la siguiente conclusión:

Un sistema LTI estable tiene estados y salidas asintóticamente ESA.

Volviendo a Kalman

Vimos que el filtro de Kalman podía ser visto como un sistema lineal. Para el caso de un sistema LTI,

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = (\mathbf{F} - \Gamma_k \mathbf{H})\, \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \Gamma_k \mathbf{y}(k).$$

En el caso que $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{w}(k)$ estén descorrelacionado, $\mathbf{S} = 0$ y tenemos que

$$\Gamma_k = \mathbf{F}\mathbf{K}_k = \mathbf{F}\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}^* \left[\mathbf{H}\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right]^{-1}$$

Observaciones:

- Que el sistema $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ sea LTI y los procesos $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{w}(k)$ sean ESA no garantiza que Γ_k o $\mathbf{K}_k$ sean invariantes.
- Para tener un filtro invariante, se requiere que $\Sigma_{k|k-1} \to \Sigma$ para $k \to \infty$.
- La ganancia de Kalman asintótica resulta $\Gamma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^* \left[\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right]^{-1}$.
- Vamos a asumir que $\left[\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right]^{-1}$ existe. Para ello, se requiere que $\Sigma \geq 0$ y $\mathbf{R}$ sea definida positiva.
- Para tener una estimación ESA, necesitamos que el filtro sea estable, es decir, $|\lambda_i(\mathbf{F} - \Gamma\mathbf{H})| < 1$, $i = 1, \cdots n$.

Estabilidad del filtro de Kalman

Por qué nos interesa un filtro estable? Cómo es la dinámica del error de estimación?

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}[k+1|k] \\ &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{v}(k) - \{\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \Gamma\left[\mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]\right]\} \\ &= \left[\mathbf{F} - \Gamma\mathbf{H}\right]\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{G}\mathbf{v}(k) - \Gamma\mathbf{w}(k)\end{aligned}$$

- La dinámica del filtro de Kalman está dada por $(\mathbf{F} - \Gamma\mathbf{H})$.
- Ésta es la misma dinámica que sigue el error de estimación $\tilde{\mathbf{x}}(k)$.
- Si el filtro es estable y asintóticamente LTI, entonces las innovaciones son ESA. Más aún, $\tilde{\mathbf{x}}(k) \to 0$ para toda condición inicial $\hat{\mathbf{x}}[0|-1]$.

- Recordemos la ecuación de actualización de la matriz de covarianza del error de estimación

$$\Sigma_{k+1|k} = (\mathbf{F}_k - \Gamma\mathbf{H}_k)\,\Sigma_{k|k-1}\,(\mathbf{F}_k - \Gamma_k\mathbf{H}_k)^* + \mathbf{G}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{G}_k^* + \Gamma_k\mathbf{R}_k\Gamma_k^*$$

- En régimen asintótico o de estado estacionario, esperamos que $\Sigma_{k+1|k} = \Sigma_{k|k-1} = \Sigma$.
- Luego, reemplazando en la ecuación de actualización de la matriz de covarianza, tenemos que la matriz de covarianza asintótica satisface

$$\Sigma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^* - \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^*\left(\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{H}\Sigma\mathbf{F}^* + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^* \qquad \text{(DARE)}$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación algebraica de Ricatti en tiempo discreto* (DARE: Discrete-time Algebraic Ricatti Equation).

DARE

$$\Sigma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^* - \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^* \left(\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{H}\Sigma\mathbf{F}^* + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^* \qquad \text{(DARE)}$$

- DARE es un sistema de ecuaciones que puede tener varias soluciones (o ninguna).
- Obtener las soluciones de la DARE es complejo, pero existen rutinas numéricas adecuadas para ello.
- Una solución Σ tal que $|\lambda_i(\mathbf{F} - \Gamma\mathbf{H})| < 1$, $i = 1, \cdots n$ es una *solución estabilizante*.
- Para tener $\Sigma_{k|k-1} \to \Sigma$, necesitamos que $\Sigma_{k|k-1}$ esté acotada y que la convergencia sea independiente de $\Sigma_{0|-1}$.

DARE

$$\Sigma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^* - \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^*\left(\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{H}\Sigma\mathbf{F}^* + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^* \qquad \text{(DARE)}$$

Teorema: Solución estabilizante

Supongamos que $\mathbf{F}$ es estable. Luego, existe una única solución estabilizante Σ si y sólo si $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ es observable y $(\mathbf{F}, \mathbf{G}\mathbf{Q}^{1/2})$ es controlable. Más aún, $\Sigma \geq 0$.

- La condición de observabilidad de $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ garantiza la existencia de una matriz Γ que resulta en un filtro de Kalman estable.
- La condición de controlabilidad de $(\mathbf{F}, \mathbf{G}\mathbf{Q}^{1/2})$ permite obtener una solucion semidefinida positiva que puede ser una matriz de covarianza. De hecho, Σ corresponde a la matriz de covarianza asintótica.
- DARE es la ecuación de Lyapunov para $\tilde{\mathbf{F}} = (\mathbf{F} - \Gamma\mathbf{H})$ y $\tilde{\mathbf{Q}} = (\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^* + \Gamma\mathbf{R}\Gamma^*)$.
- De acuerdo al teorema de Lyapunov, el filtro es estable si la solución $\Sigma > 0$.

KF asintótico

- Cuando trabajamos con un sistema LTI, podemos utilizar la ganancia asintótica Γ resolviendo la DARE.
- Si $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ es observable y $(\mathbf{F}, \mathbf{G}\mathbf{Q}^{1/2})$ es controlable, el filtro de Kalman asintótico resulta

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = [\mathbf{F} - \Gamma\mathbf{H}]\,\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \Gamma\mathbf{y}(k)$$

es la ec. de un obter

obs. LQG

donde

$$\Gamma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^* \left[\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right]^{-1}$$

A menos que este en el infinito esta ganancia no es consstante

y $\Sigma \geq 0$ es la única solución de

$$\Sigma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^* - \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^* \left(\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{H}\Sigma\mathbf{F}^* + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^*$$

- Para tiempo finito, ésta es una solución subóptima, pero más conveniente de implementar que la solución óptima que varía en el tiempo. La ganancia se precalcula y no es necesario actualizar en forma recursiva la covarianza.

Más allá del desarrollo teórico para obtener las expresiones del filtro de Kalman, el mismo puede ser visto como un sistema lineal parametrizado por $\mathbf{Q}_k$ y $\mathbf{R}_k$.

- Qué representa $\mathbf{Q}_k$? En algunos casos, el proceso $\mathbf{v}(k)$ modela la incertidumbre del sistema. En estos casos, la matriz $\mathbf{Q}$ puede ser usada como "perilla de ajuste" del sistema.

Algunas consideraciones adicionales

Más allá del desarrollo teórico para obtener las expresiones del filtro de Kalman, el mismo puede ser visto como un sistema lineal parametrizado por $\mathbf{Q}_k$ y $\mathbf{R}_k$.

- Qué representa $\mathbf{Q}_k$? En algunos casos, el proceso $\mathbf{v}(k)$ modela la incertidumbre del sistema. En estos casos, la matriz $\mathbf{Q}$ puede ser usada como "perilla de ajuste" del sistema.
- Qué representa $\mathbf{R}_k$? En general es la covarianza del ruido de medición. Por otro lado, $\mathbf{R} > 0$ asegura que la covarianza de las innovaciones, $(\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R})$, sea definida positiva.

Cómo influye la elección de las matrices de covarianza en la performance del filtro? Podemos ganar cierta intuición analizando cómo varía la ganancia del filtro en ciertas circunstancias.

- Supongamos por un momento que $\mathbf{H}_k$ es invertible para todo k y que $\mathbf{R}_k \to 0$. Esto último implica que las mediciones tienen poco ruido y resultan más confiables. En ese caso, $\Gamma_k \to \mathbf{F}_k \mathbf{H}_k^{-1}$. Decimos que la estimación confia fuertemente en la nueva información aportada por las innovaciones y aumenta la ganancia para darles mayor relevancia en el cómputo de $\hat{\mathbf{x}}[k+1|k]$.
- Por otro lado, si $\Sigma_{k|k-1} \to 0$, entonces $\Gamma_k \to 0$. En este caso, la ganancia confia en la estimación del estado y su evolución temporal dada por el modelo de estados. El filtro "cierra los ojos" ante nuevas observaciones y evoluciona siguiendo el modelo solamente.
- Un modo de prevenir que $\Sigma_{k|k-1} \to 0$ es asegurar que $\mathbf{Q}_k > 0$, es decir, mantener siempre un cierto nivel de ruido de proceso.

Y si el sistema es no-lineal?

Hasta el momento, analizamos sistemas lineales modelados por sus ecuaciones de estado

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k \mathbf{v}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k).$$

Pero el caso más general es cuando la dinámica y/o las mediciones tienen una relación no-lineal, es decir

$$\mathbf{x}(k+1) = f_k(\mathbf{x}(k)) + g_k(\mathbf{x}(k))\mathbf{v}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = h_k(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{w}(k),$$

donde $f_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $g_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n\times l}$, $h_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, son funciones del vector de estado $\mathbf{x}(k)$.

Ejemplo

Supongamos un móvil que se mueve sobre un plano, cuyas coordenadas cartesianas son (p_x, p_y).
El movimiento del móvil en tiempo discreto está determinado por

$$p_x(k+1) = f_1 p_x(k) + v_1(k) \qquad p_y(k+1) = f_2 p_y(k) + v_2(k)$$

donde $f_1, f_2, \in \mathbb{R}$ y $v_1(k), v_2(k)$ son dos procesos blancos gaussianos de media nula y varianzas conocidas.

Supongamos que en lugar de observar a cada instante las coordenadas cartesianas, sólo tenemos acceso a las coordenadas polares, es decir, a cada instante disponemos de

$$\rho(k) = \sqrt{p_x(k)^2 + p_y(k)^2} \qquad \phi(k) = \text{atan}\left(\frac{p_y(k)}{p_x(k)}\right)$$

En este caso el estado es $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} p_x(k) \\ p_y(k) \end{bmatrix}$, las mediciones $\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \rho(k) \\ \phi(k) \end{bmatrix}$. Por fin,

$$f_k(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \quad , \quad h_k(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sqrt{x_1(k)^2 + x_2(k)^2} & \text{atan}\left(\frac{x_2(k)}{x_1(k)}\right) \end{bmatrix}.$$

Sabemos que el estimador MMSE para el estado $\mathbf{x}(k)$ es la esperanza condicional

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(k),\cdots\mathbf{y}(0)\right].$$

Pero es muy difícil de computar en el caso general!!!!!

Tenemos que recurrir a aproximaciones para poder estimar $\hat{p_x}$ y $\hat{p_y}$.

Kalman para sistemas no lineales es siempre una aproximacion

Supongamos que sabemos que $\mathbf{x}(k)$ evoluciona siguiendo aproximadamente una trayectoria conocida $\bar{\mathbf{x}}(k)$.

$$\Delta\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)$$

Para todo instante, asumimos que $|\Delta\mathbf{x}(k)|$ es pequeño. Luego, planteamos un desarrollo de Taylor en cada punto de la trayectoria $\bar{\mathbf{x}}$. sino tengo q tomar mas terminos en taylor

$$f_k(\mathbf{x}(k)) \simeq f_k(\bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{F}_k\Delta\mathbf{x}(k) \qquad h_k(\mathbf{x}(k)) \simeq h_k(\bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{H}_k\Delta\mathbf{x}(k),$$

donde

$$\mathbf{F}_k = \left.\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(k)} \qquad \mathbf{H}_k = \left.\frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(k)}.$$

Para tener un sistema lineal, tomamos orden 0 para el ruido de proceso, es decir,

$$g_k(\mathbf{x}(k)) \simeq g_k(\bar{\mathbf{x}}(k)) = \mathbf{G}_k$$

Linearización sobre una trayectoria

- Modelo dinámico:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= f_k(\mathbf{x}(k)) + g_k(\mathbf{x}(k))\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= h_k(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{w}(k) \end{cases}$$

- Trayectoria: $\bar{\mathbf{x}}(k+1) = f_k(\bar{\mathbf{x}}(k))$. X_barra es una trayctoria conocida por eso no tiene error
- Taylor estado: $\mathbf{x}(k+1) \simeq f_k(\bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{F}_k\Delta\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k\mathbf{v}(k)$.
- Taylor observaciones: $\mathbf{y}(k) \simeq h_k(\bar{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{H}_k\Delta\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$.

Definimos $\Delta\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)$ y $\Delta\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}(k) - h_k(\bar{\mathbf{x}}(k))$. Luego,

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}_k\Delta\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k\mathbf{v}(k) \\ \Delta\mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}_k\Delta\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \end{cases}$$

es el sistema linearizado alrededor de la trayectoria $\bar{\mathbf{x}}(k)$.

1. Kalman para sistema linearizado

$$\mathbf{K}_k = \Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* \left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}$$

$$\hat{\Delta\mathbf{x}}[k+1|k] = \mathbf{F}_k\hat{\Delta\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{F}_k\mathbf{K}_k\left(\Delta\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k\hat{\Delta\mathbf{x}}[k|k-1]\right)$$

$$\Sigma_{k+1|k} = \mathbf{F}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{F}_k^* - \mathbf{F}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^*\left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{F}_k^* + \mathbf{G}_k\mathbf{Q}_k$$

2. Reconstrucción del estado del sistema nolineal

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] &= \bar{\mathbf{x}}(k+1) + \hat{\Delta\mathbf{x}}[k+1|k] \\ &= f_k(\bar{\mathbf{x}}(k)) + \hat{\Delta\mathbf{x}}[k+1|k]\end{aligned}$$

Observaciones:

- Las matrices $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{H}_k$, y $\mathbf{G}_k$ sólo dependen de $\bar{\mathbf{x}}(k)$.
- Para una trayectoria conocida, $\mathbf{K}_k$ puede ser calculada de antemano.
- Parte de las varianzas de $\mathbf{v}(k)$ y $\mathbf{w}(k)$ cubren el error de aproximación de $f_k(.)$ y $h_k(.)$.
- La performance depende mucho de la trayectoria elegida.

El EKF (*Extended Kalman Filter*) es una opción para diseñar estimadores recursivos al estilo Kalman para sistemas no-lineales.

La idea es similar a la linearización a lo largo de una trayectoria, pero la trayectoria ahora es la del estado estimado

$$\begin{aligned} f_k(\mathbf{x}(k)) &\simeq f_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k]) + \mathbf{F}_k \left(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k]\right) \\ h_k(\mathbf{x}(k)) &\simeq h_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]) + \mathbf{H}_k \left(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k-1]\right) \\ g_k(\mathbf{x}(k)) &\simeq g_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k]) = \mathbf{G}_k, \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{F}_k = \left.\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k]} \qquad \mathbf{H}_k = \left.\frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]}.$$

- Taylor estado alrededor de $\hat{\mathbf{x}}[k|k]$:

$$\mathbf{x}(k+1) \simeq f_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k]) + \mathbf{F}_k\left(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k]\right) + \mathbf{G}_k \mathbf{v}(k).$$

Reordenando términos, obtenemos un sistema lineal con entrada conocida.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k \mathbf{v}(k) + \underbrace{\left(f_k\left(\hat{\mathbf{x}}[k|k]\right) - \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}[k|k]\right)}_{\mathbf{u}(k)}$$

- Taylor observaciones alrededor de $\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]$:

$$\mathbf{y}(k) \simeq h_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]) + \mathbf{H}_k\left(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}[k|k-1]\right) + \mathbf{w}(k).$$

Nuevamente, sistema lineal con offset conocido en $k-1$.

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{y}(k) - \underbrace{\left(h_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]) - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}[k|k-1]\right)}_{\mathbf{y}_o(k)} = \mathbf{H}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k).$$

Filtro de Kalman Extendido (EKF)

- Sistema linearizado

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_k\mathbf{v}(k) + \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{F}_k = \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k]} \qquad \mathbf{H}_k = \frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]} \qquad \mathbf{G}_k = g_k\left(\hat{\mathbf{x}}[k|k]\right).$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{y}(k) - \left(h_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]) - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]\right) \qquad \mathbf{u}(k) = f_k\left(\hat{\mathbf{x}}[k|k]\right) - \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k]$$

- Una vez obtenidas las matrices $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{H}_k$, y $\mathbf{G}_k$, se calculan $\Sigma_{k+1|k}$ y $\mathbf{K}_k$.
- Actualización de mediciones:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}[k|k] &= \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{z}(k) - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]\right) \\ &= \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}(k) - h_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]) + \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]\right) \\ &= \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}(k) - h_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k-1])\right) \end{aligned}$$

- Actualización de tiempos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}[k+1|k] &= \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k] + \mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k] + f_k\left(\hat{\mathbf{x}}[k|k]\right) - \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}[k|k] \\ &= f_k\left(\hat{\mathbf{x}}[k|k]\right) \end{aligned}$$

Para cada instante k,

1. Linearización:

$$\mathbf{F}_k = \left.\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k]} \qquad \mathbf{H}_k = \left.\frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]} \qquad \mathbf{G}_k = g_k\left(\hat{\mathbf{x}}[k|k]\right).$$

2. Covarianzas y ganancia

$$\mathbf{K}_k = \Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^*\left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}$$
$$\Sigma_{k+1|k} = \mathbf{F}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{F}_k^* - \mathbf{F}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^*\left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{F}_k^* + \mathbf{G}_k\mathbf{Q}_k$$

3. Estimación del estado

$$\hat{\mathbf{x}}[k|k] = \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}(k) - h_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k-1])\right)$$
$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = f_k\left(\hat{\mathbf{x}}[k|k]\right)$$

Observaciones:

- Las matrices $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{H}_k$, y $\mathbf{G}_k$ dependen de las observaciones en k e instantes anteriores. No pueden ser calculadas de antemano.
- $\hat{\mathbf{x}}[k|k]$ tiene una dependencia nolineal con las observaciones anteriores a través de $\mathbf{H}_k$.
- Es muy difícil establecer un indicador de performance del EKF de forma analítica
- Un modo de testear la bondad de la estimación es utilizando los residuos $\varepsilon(k) = \mathbf{y}(k) - h_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k-1])$
  - Idealmente, estos residuos deben ser blancos
  - Idealmente, la matriz de covarianza $\varepsilon(k)$ se debería comportar como $\mathbf{H}_k \Sigma_{k|k-1} \mathbf{H}_k + \mathbf{R}_k$, que es la covarianza de las innovaciones del sistema linealizado.

Dinámica del sistema en tiempo discreto:

$$\begin{bmatrix} \lambda(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\frac{T}{\beta} & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} v(k)$$

La dinámica del sistema es lineal. La nolinealidad está en la ecuación de salida. Consideramos dos posibles salidas:

Salida escalar:

$$y(k) = \sqrt{2}\sin\left(\omega_c k + \theta(k)\right) + w(k)$$

Salida vectorial:

$$\mathbf{y}(k) = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \sin(\theta(k)) \\ \cos(\theta(k)) \end{bmatrix} + \mathbf{w}(k)$$

1. Linearización:

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F} \qquad \mathbf{G}_k = \mathbf{G}.$$

$$\mathbf{H}_k = \left[\frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial x_1}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]} \quad \frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial x_2}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]} \right]$$
$$= \left[0 \qquad \sqrt{2}\cos(\omega_c k + \hat{x}_2[k|k-1])\right]$$

2. Covarianzas y ganancia

$$\mathbf{K}_k = \frac{\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^*}{\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + r}$$

$$\Sigma_{k+1|k} = \mathbf{F}\Sigma_{k|k-1}\mathbf{F}^* - \frac{\mathbf{F}\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^*\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{F}^*}{\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + r} + q\mathbf{G}\mathbf{G}^*$$

3. Estimación del estado

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}[k|k] \\ \hat{\theta}[k|k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}[k|k-1] \\ \hat{\theta}[k|k-1] \end{bmatrix} + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}(k) - \sqrt{2}\sin\left(\omega_c k + \hat{\theta}[k|k-1]\right)\right)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}[k+1|k] \\ \hat{\theta}[k+1|k] \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}[k|k] \\ \hat{\theta}[k|k] \end{bmatrix}$$

1. Linearización:

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F} \qquad \mathbf{G}_k = \mathbf{G}.$$

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial h_{1_k}(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]} & \left.\frac{\partial h_{1_k}(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]} \\ \left.\frac{\partial h_{2_k}(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]} & \left.\frac{\partial h_{2_k}(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}\cos(\hat{\theta}[k|k-1]) \\ 0 & -\sqrt{2}\sin(\hat{\theta}[k|k-1]) \end{bmatrix}$$

2. Covarianzas y ganancia

$$\mathbf{K}_k = \Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* \left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}\right]^{-1}$$

$$\Sigma_{k+1|k} = \mathbf{F}\Sigma_{k|k-1}\mathbf{F}^* - \mathbf{F}\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* \left[\mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}\right]^{-1} \mathbf{H}_k\Sigma_{k|k-1}\mathbf{F}^* + q\mathbf{G}\mathbf{G}^*$$

3. Estimación del estado

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}[k|k] \\ \hat{\theta}[k|k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}[k|k-1] \\ \hat{\theta}[k|k-1] \end{bmatrix} + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}(k) - \sqrt{2}\begin{bmatrix} \sin(\hat{\theta}[k|k-1]) \\ \cos(\hat{\theta}[k|k-1]) \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}[k+1|k] \\ \hat{\theta}[k+1|k] \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}[k|k] \\ \hat{\theta}[k|k] \end{bmatrix}$$

En algunos casos, en particular cuando $h_k(.)$ es una función con fuertes nolinealidades, es conveniente utilizar la siguiente adaptación del EKF conocida como IKF (*Iterated Kalman Filter*).

Para cada instante k, computar:

1. Secuencia de matrices $\mathbf{H}_k^0, \cdots \mathbf{H}_k^L$ tal que
   - $\mathbf{H}_k^0 = \frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}[k|k-1]}$
   - Para cada $j = 0 \cdots L$,

$$\mathbf{K}_k^j = \Sigma_{k|k-1}(\mathbf{H}_k^j)^* \left[\mathbf{H}_k^j \Sigma_{k|k-1}(\mathbf{H}_k^j)^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^j[k|k] = \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{K}_k^j \left(\mathbf{y}(k) - h_k(\hat{\mathbf{x}}[k|k-1])\right)$$

$$\mathbf{H}_k^{j+1} = \frac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}^j[k|k]}$$

2. Actualización de la estimación

$$\hat{\mathbf{x}}[k|k] = \hat{\mathbf{x}}^L[k|k] \qquad \hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = f_k\left(\hat{\mathbf{x}}[k|k]\right)$$

$$\Sigma_{k|k} = \Sigma_{k|k-1} - \Sigma_{k|k-1}(\mathbf{H}_k^L)^* \left[\mathbf{H}_k^L \Sigma_{k|k-1}(\mathbf{H}_k^L)^* + \mathbf{R}_k\right]^{-1} \mathbf{H}_k^L \Sigma_{k|k-1}$$

$$\Sigma_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \Sigma_{k|k} \mathbf{F}_k^* + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^*$$

- Tanto el EKF como el IFK necesitan el cómputo del jacobiano de $f_k()$ y de $h_k()$.
- Una alternativa que soluciona este problema es el llamado filtro UKF (*Unscented Kalman Filter*).
- Lamentablemente, si bien han habido muchos trabajos al respecto, no es claro en qué situaciones hay que utilizar uno u otro enfoque.

Bibliografía

1. *Linear Estimation*, Thomas Kailath, Ali H. Sayed, and Babak Hassibi Prentice Hall.
2. *Optimal Filtering*, Anderson, B. D.O., and J. B. Moore, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ.
3. *Linear System Theory and Design*, Chi-Tsong Chen , The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering
4. *Linear Systems*, Thomas Kailath, Prentice Hall,1980.