

Ventana	$\Delta\omega$	Pico secundario (dB)
Rectangular	$4\pi/M$	-13
Barlett	$8\pi/M$	-25
Hanning	$8\pi/M$	-31
Hamming	$8\pi/M$	-41
Blackman	$12\pi/M$	-57

### Restricciones de la causalidad

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI real y causal debe satisfacer:

- $H(\omega)$  no puede tener un salto discontinuo entre las bandas de paso y de rechazo
- $H(\omega)$  no puede ser constante en un intervalo finito
- $H(\omega)$  no puede ser cero, salvo para un número finito de frecuencias

Luego, el filtro ideal no es implementable por sistemas reales.

### Primera pregunta: FIR o IIR?

- IIR tiene mayor atenuación en banda de rechazo para la misma cantidad de coeficientes del filtro **mas eficiente**
- Un IIR requiere menos polos que el FIR para performance equivalente
- La implementación de un IIR es más sensible a errores de precisión finita
- FIR puede tener fase lineal, evitando distorsión de fase

Tipo FLG	Parámetros	Simetría respuesta impulsiva	Simetría función amplitud	Ceros en $z = 1$ o $z = -1$
I	N par (largo impar) $\phi_0 = 0$	Simétrica: $h(n) = h(N-n)$	Simétrica: $A(\omega) = A(-\omega)$	Si no contiene, implica tipo I
II	N impar (largo par) $\phi_0 = 0$	Simétrica: $h(n) = h(N-n)$	Simétrica: $A(\omega) = A(-\omega)$	Si es tipo II Cero en $z = -1$
III	N par (largo impar) $\phi_0 = \pi/2$	Antisimétrica: $h(n) = -h(N-n)$	Antisimétrica: $A(\omega) = -A(-\omega)$	Si es tipo III Cero en $z = 1$ y $z = -1$
IV	N impar (largo par) $\phi_0 = \pi/2$	Antisimétrica: $h(n) = -h(N-n)$	Antisimétrica: $A(\omega) = -A(-\omega)$	Si es tipo IV Cero en $z = 1$

Tipo FLG	Ubicación de los ceros en general	Función amplitud
I	Si, $z = z_i$ es un cero de $H(z)$ , entonces también son ceros: $z = z_i^*$	$A(\omega) = h(\frac{M-1}{2}) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n) \cos \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right)$
II	$z = 1/z_i$	$A(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}-1} h(n) \cos \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right)$
III	$z = 1/z_i^*$	$A(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n) \sin \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right)$
IV	$z = 1/z_i$	$A(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}-1} h(n) \sin \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right)$

### Resumen Filtros FIR

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-j(\omega \frac{M-1}{2} + \phi)}$$

- Son filtros con fase lineal generalizada. Sin embargo, esta fase puede representar un retardo muy grande si el orden es alto (por qué?)
- Método de ventaneo: el más sencillo e intuitivo, pero no hay control sobre ripple ni banda de transición
- Filtro LS: el diseño sigue un criterio de optimización, pero requiere varias iteraciones para alcanzar las especificaciones
- Filtro equiripple: otro diseño basado en un criterio óptimo. Permite controlar  $M$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_s$ , y  $\delta_p/\delta_s$ .

Respuesta impulsiva ideal (no causal)

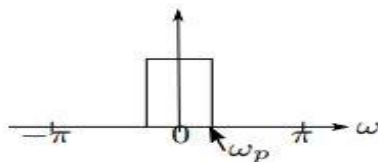
$$ha_M(n) = 0,54 - 0,46 \cos \left( \frac{2\pi n}{M-1} \right)$$

Respuesta de la ventana en frecuencia

$$W(\omega) = \frac{\sin(\omega(\frac{N+1}{2}))}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j\omega \frac{N}{2}} \quad H(\omega) = \frac{1}{2\pi} H_d(\omega) * W(\omega)$$

$$h_0[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc} \left( \frac{\omega_c}{\pi} n \right)$$

## Filtro Pasabajo Tipo:



PB a PB

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$$

$$a = \frac{\sin(\frac{\omega_p - \omega'_p}{2})}{\sin(\frac{\omega_p + \omega'_p}{2})}$$

PB a PA

$$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1}+a}{1+az^{-1}}$$

$$a = -\frac{\cos(\frac{\omega_p + \omega'_p}{2})}{\cos(\frac{\omega_p - \omega'_p}{2})}$$

PB  
PBanda

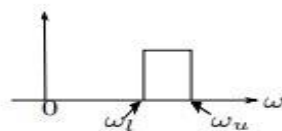
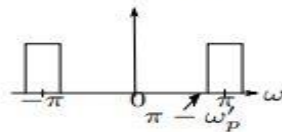
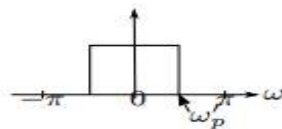
a

$$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2}-a_1z^{-1}+a_2}{a_2z^{-2}-a_1z^{-1}+1}$$

$$a_1 = 2\alpha \frac{\kappa}{\kappa+1} \quad a_2 = \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$$

$$\alpha = \frac{\cos(\frac{\omega_u + \omega_l}{2})}{\cos(\frac{\omega_u - \omega_l}{2})}$$

$$\kappa = \cot \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_p}{2}$$



## Submuestreo

Diagrama:  $X(z) \rightarrow \downarrow M \rightarrow Y(z)$

Diagrama de la respuesta en frecuencia: Muestra la decimación de la respuesta en frecuencia de  $X(z)$  por un factor de  $M$ . El periodo de  $2\pi$  se divide en  $M$  partes, cada una de  $2\pi/M$ . Se indica que  $m = n/M$ .

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^\ell) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} X(e^{j\omega/M} e^{-j2\pi\ell/M})$$

$$W_M = e^{-2j\pi/M} \leftarrow \text{Va a ser periodica } M$$

En términos de energía: estoy tomando una muestra cada  $M$ , lo que hace que mi energía solo sea  $1/M$  del total de muestras.

$$P_k(z^M) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(nM + k) z^{-nM}$$

## Sobremuestreo

Diagrama:  $X(z) \rightarrow \uparrow M \rightarrow Y(z)$

$$Y(z) = X(z^M) \quad \sum x(e^{j\omega M})$$

En el sobremuestreo no agrego ni quito energía, pues la energía están en las muestras con amplitud distinto de cero, sobremuestrear solo agrega muestras nulas, no cambia la energía total

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} P_k(z^M) z^{-k}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z) H_k(z W_M^\ell) X(z W_M^\ell) \\ &= \underbrace{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z) H_k(z) X(z)}_{T(z)} + \sum_{\ell=1}^{M-1} \underbrace{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z) H_k(z W_M^\ell) X(z W_M^\ell)}_{A_\ell(z)} \end{aligned}$$

df

$$T(z) = 2P_0(z^2)P_1(z^2)z^{-1} \xrightarrow{\text{Condición PR}} T(z) = 2P_0(z^2)P_1(z^2)z^{-1} = cz^{-k}$$

Para que se cumpla la condición PR (FIR):  $P_0(z) = c_0 z^{-n_0} \quad P_1(z) = c_1 z^{-n_1}$

$$H_0(z) = P_0(z^2) + P_1(z^2)z^{-1} = c_0 z^{-2n_0} + c_1 z^{-2n_1-1}$$

$$H_0(z) = c_0 z^{-2n_0} + c_1 z^{-2n_1-1}$$

Para que sea FLG:  $c_0 = c$  y  $c_1 = c$

$$H_0(z) = cz^{-2n_0} + cz^{-2n_1-1} \longrightarrow h_0(n) = c\delta(n-2n_0) + c\delta(n-2n_1-1)$$