Procesamiento multirate (parte 2)

Procesamiento de señales

.UBAfiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

Ing. Débora P. Copa ● Dra. Cecilia G. Galarza
IIBM LPSC

Actividad 1 - Repaso
Descomposición polifásica

Actividad 1
Repaso Descomposición polifásica

Considere la transferencia $H(z)$ de un filtro digital.

a) Demuestre que H(z) se puede representar a partir de M componentes polifásicas, con M entero, de acuerdo a la Ecuación 1, siendo $P_k(z)$ es la k-ésima componente polifásica de $H(z)$ con respuesta impulsiva $\boldsymbol{p_k(n) = h(nM+k)}$.

b) Verifique, para el caso particular de M=3, que esta descomposición puede representarse gráficamente en su forma directa y traspuesta de acuerdo a las Figuras a y b.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} P_k(z^M) z^{-k}$$

Ecuación 1

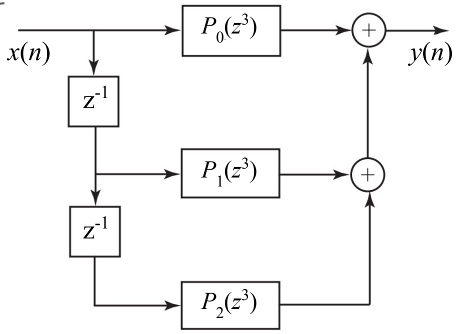


Figura-a

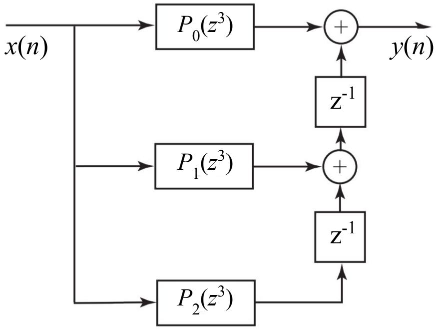


Figura-b

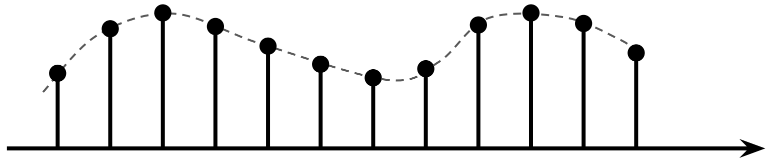
Actividad 1

Repaso Descomposición polifásica

(M=3)

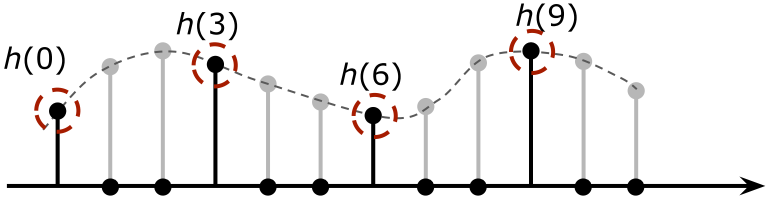
M=3

$h(n)$



$$\longrightarrow \quad H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\, z^{-n}$$

=

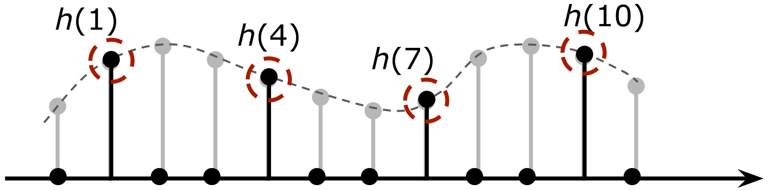


=

mM

$$\longrightarrow \quad h(0)+h(3)z^{-3}+h(6)z^{-6}+h(9)z^{-9}+\ldots$$

+

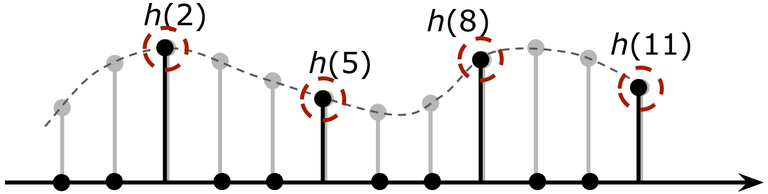


+

mM+1

$$\longrightarrow \quad h(1)z^{-1}+h(4)z^{-4}+h(7)z^{-7}+h(10)z^{-10}+\ldots$$

+



+

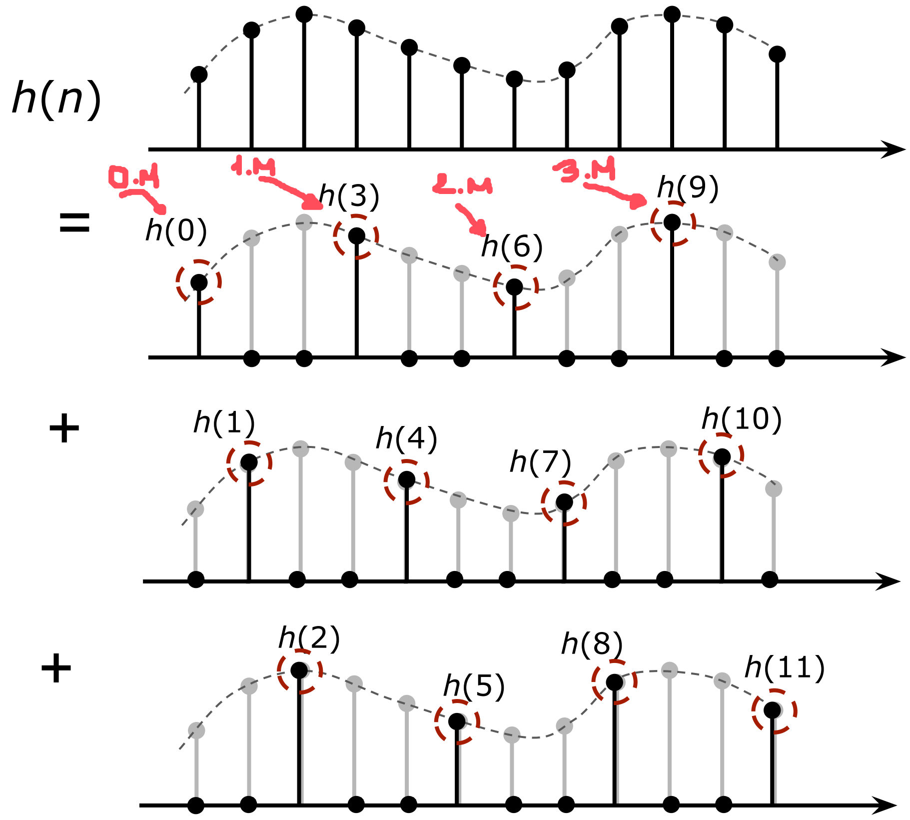
$$\longrightarrow \quad h(2)z^{-2}+h(5)z^{-5}+h(8)z^{-8}+h(11)z^{-11}+\ldots$$

mM+2

Actividad 1

Repaso Descomposición polifásica

(M=3)



$\xrightarrow{Z}$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\, z^{-n}$$

$$=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(nM)\, z^{-nM}$$

$$+$$

$z^{-mM}\ z^{-1}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(nM+1)\, z^{-(nM+1)}$$

$$+$$

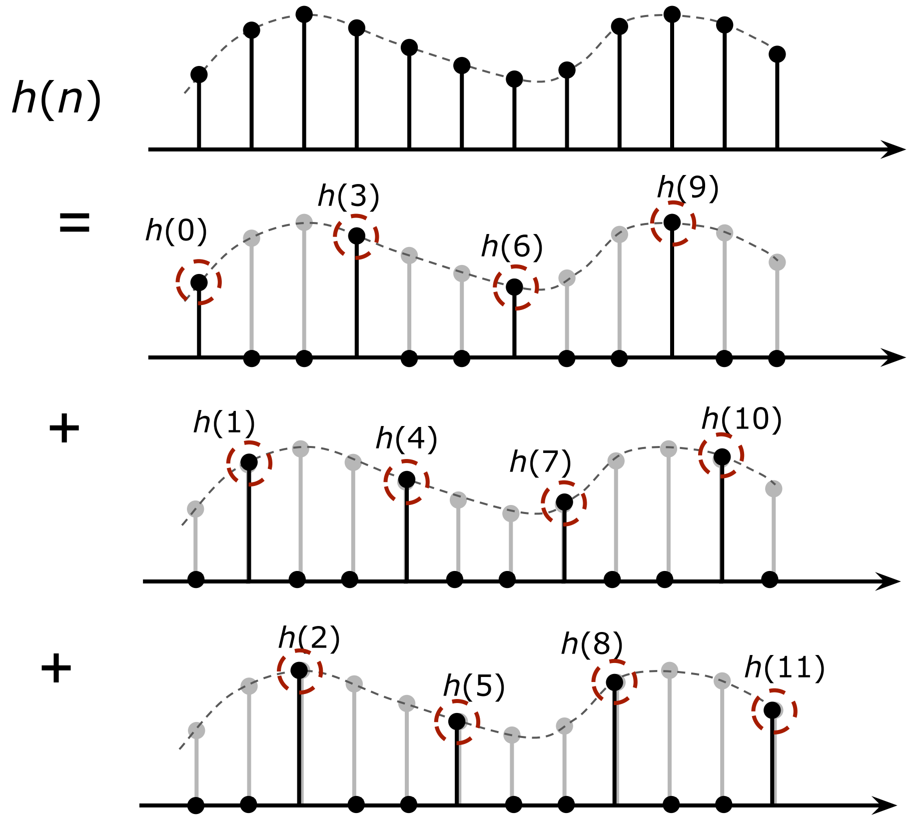
$z^{-mM}\ z^{-2}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(nM+2)\, z^{-(nM+2)}$$

Actividad 1

Repaso Descomposición polifásica

1. Desplazo
2. Submuestreo
3. Sobremuestreo
4. Desplazo



$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\, z^{-n} \qquad (M=3)$$

$$=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(nM)\, z^{-nM}$$

$$+$$

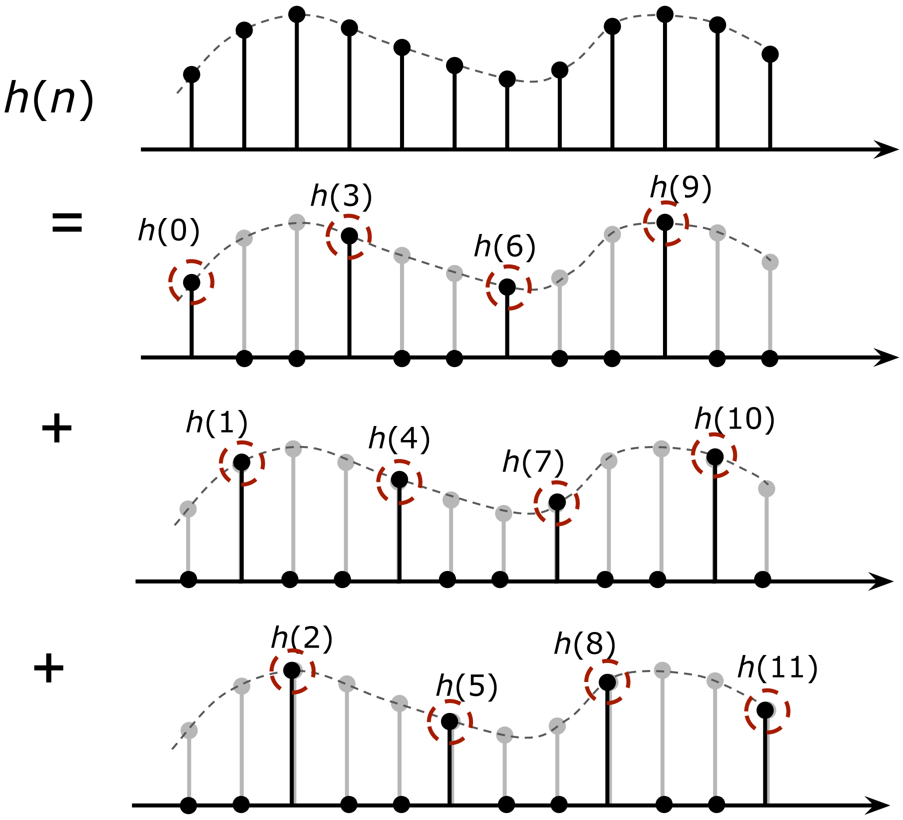
$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(nM + 1)\, z^{-(nM+1)}$$

$$+$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(nM + 2)\, z^{-(nM+2)}$$

Actividad 1

Repaso Descomposición polifásica



$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\, z^{-n}$$

$$=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(nM)\, z^{-nM}$$

$$+$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(nM+1)\, z^{-nM} z^{-1}$$

$P_1(z^M)$

$$+$$

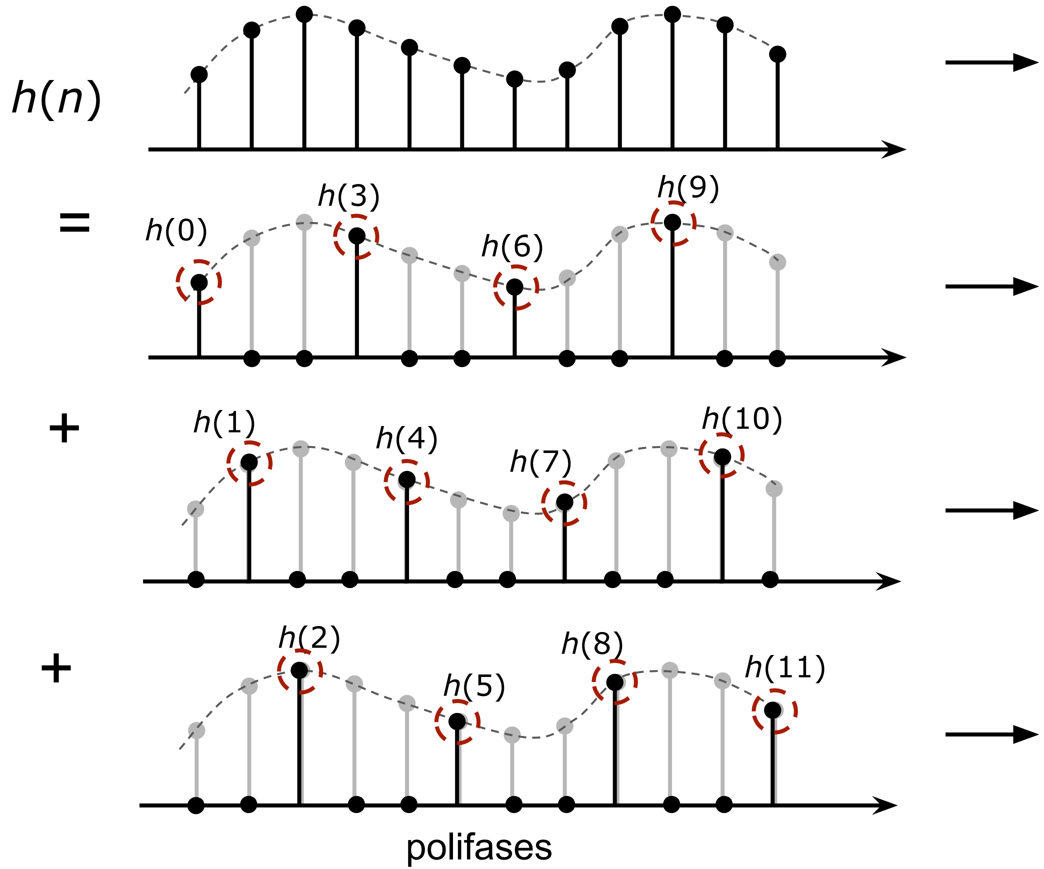
$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(nM+2)\, z^{-nM} z^{-2}$$

Son las t.z. desde y luego delay

Actividad 1

sub.

Repaso Descomposición polifásica



$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\, z^{-n}$$

$$=$$

$$P_0(z^M)$$

$$+$$

$$P_1(z^M) z^{-1}$$

$$+$$

$$P_2(z^M) z^{-2}$$

Actividad 1

Repaso Descomposición polifásica

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\, z^{-n} = P_0(z^M)z^{-0} + P_1(z^M)z^{-1} + P_2(z^M)z^{-2} = \sum_{k=0}^{M-1} P_k(z^M)z^{-k}$$

k-ésima componente polifásica expandida en *M*

$$P_k(z^M) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(nM+k)z^{-nM}$$

k-ésima componente polifásica

$$P_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(nM+k)z^{-n}$$

$$p_k(n) = h(nM+k)$$

Actividad 1
Repaso Descomposición polifásica

Considere la transferencia $H(z)$ de un filtro digital.

a) Demuestre que H(z) se puede representar a partir de M componentes polifásicas, con M entero, de acuerdo a la Ecuación 1, siendo $P_k(z)$ es la k-ésima componente polifásica de $H(z)$ con respuesta impulsiva $\boldsymbol{p_k(n) = h(nM+k)}$.

b) Verifique, para el caso particular de M=3, que esta descomposición puede representarse gráficamente en su forma directa y traspuesta de acuerdo a las Figuras a y b.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} P_k(z^M) z^{-k}$$

Ecuación 1

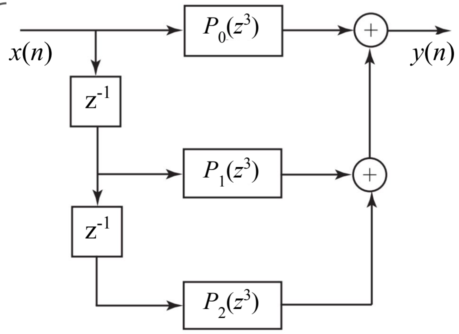


Figura-a

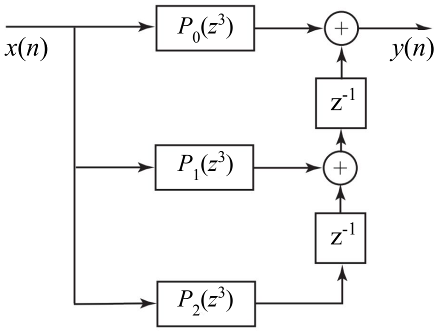


Figura-b

Actividad 1
Repaso Descomposición polifásica

Salida del sistema H(z)

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$$\underbrace{Y(z) = H(z)X(z) \qquad H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} P_k(z^M)z^{-k}}$$

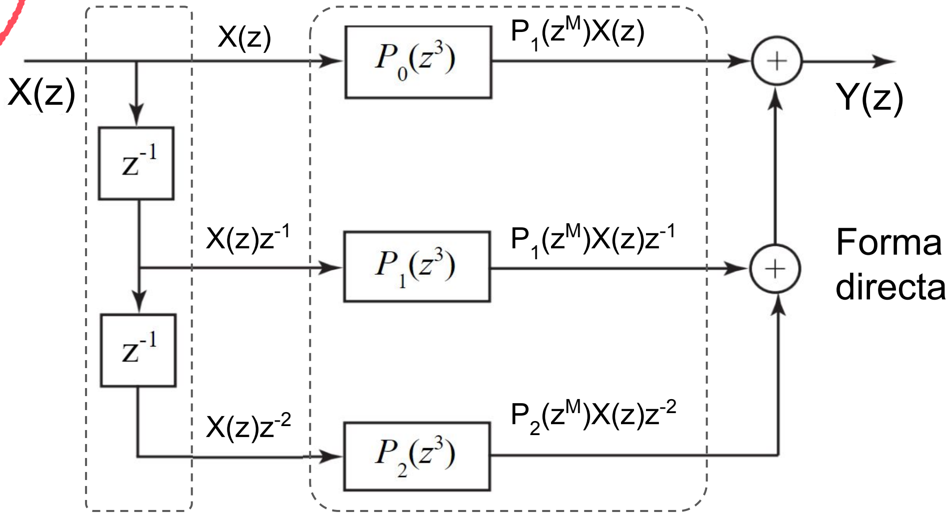
$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} P_k(z^M)z^{-k}\,X(z)$$

Actividad 1

Repaso Descomposición polifásica: **forma directa**

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} P_k(z^M) z^{-k} X(z)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \underbrace{P_k(z^M)}\underbrace{X(z)\, z^{-k}}$$



$$Y(z) = \begin{bmatrix} P_0(z^M) & P_1(z^M) & \cdots & P_{M-1}(z^M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(z)z^{-1} \\ \cdots \\ X(z)z^{-(M-1)} \end{bmatrix}$$

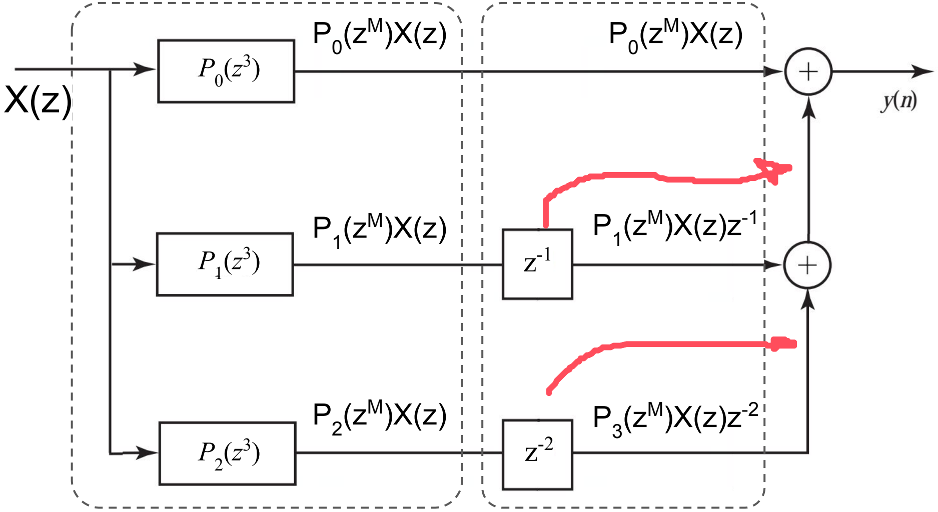
Actividad 1

Repaso Descomposición polifásica: **forma traspuesta**

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} P_k(z^M) z^{-k} X(z)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \underbrace{P_k(z^M)X(z)}\, \underbrace{z^{-k}}$$

$$Y(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \cdots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(z^M)X(z) \\ P_1(z^M)X(z) \\ \cdots \\ P_{M-1}(z^M)X(z) \end{bmatrix}$$



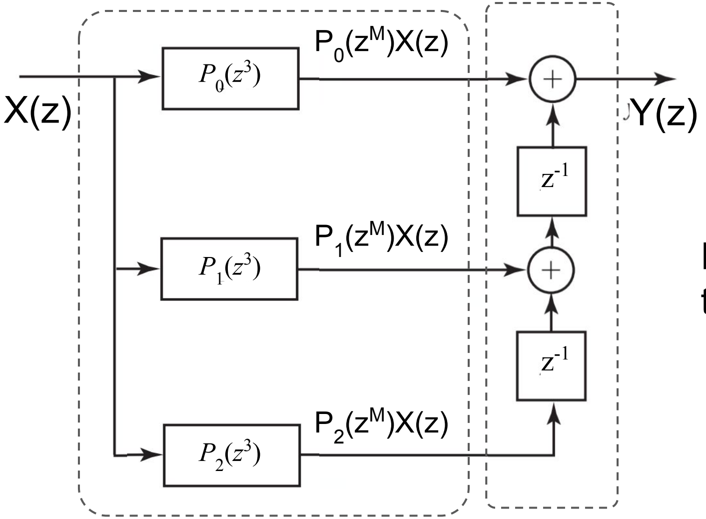
Actividad 1

Repaso Descomposición polifásica: **forma traspuesta**

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} P_k(z^M) z^{-k} X(z)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \underbrace{P_k(z^M) X(z)} \, \underbrace{z^{-k}}$$

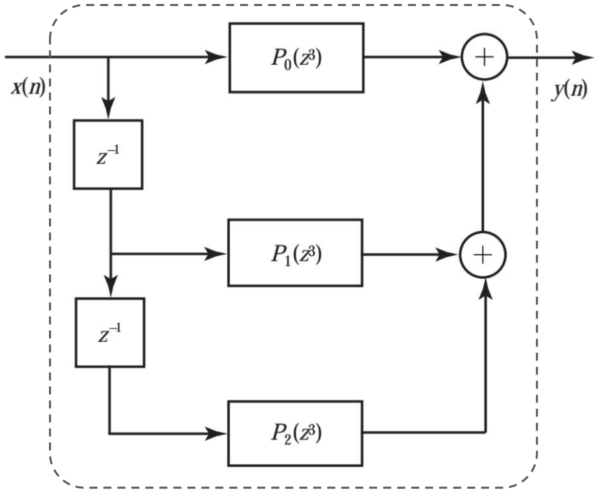
$$Y(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \cdots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(z^M)X(z) \\ P_1(z^M)X(z) \\ \cdots \\ P_{M-1}(z^M)X(z) \end{bmatrix}$$



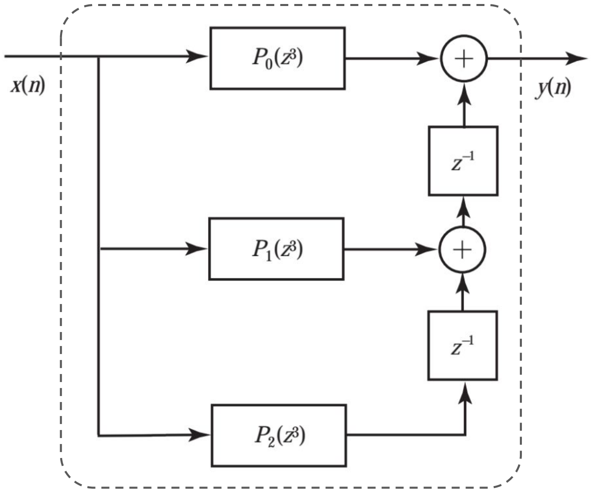
Forma traspuesta

Actividad 1
Repaso Descomposición polifásica

Descomposición polifásica de un sistema H(z)



Forma directa

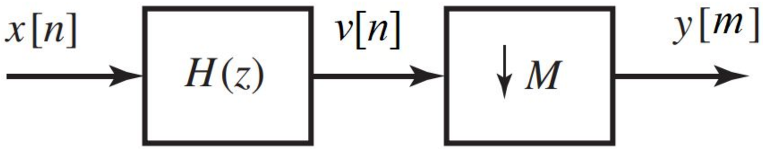


Forma traspuesta

Actividad 2 - D. polifásica con decimación

Actividad 2
D. polifásica con decimación

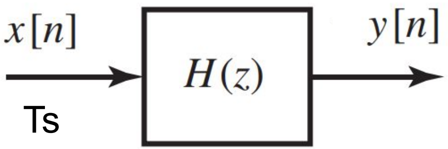
Sea un sistema conformado por un filtro digital FIR con transferencia H(z), de orden N=299, $\omega_c=\pi/M$ y $\Delta\omega=0.01\pi$ (suponga una ventana de Kaiser con beta=10) y un bloque de diezmado con un factor de M=3, como el de la Figura.

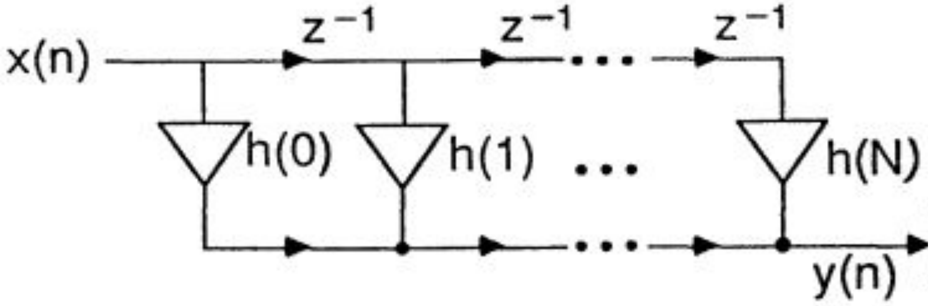


a) Suponga que el filtro H(z) se puede representar con una realización mediante la *forma directa* para un periodo de muestreo Ts en la entrada. ¿Cuántas operaciones por unidad de tiempo son requeridas para obtener la señal de salida *y*(*m*)? **Nota**: tome cómo referencia las **multiplicaciones** necesarias en un intervalo de tiempo Ts para representar la cantidad de operaciones por segundo.

Actividad 2
D. polifásica con decimación

a)





Filtro FIR. Forma directa

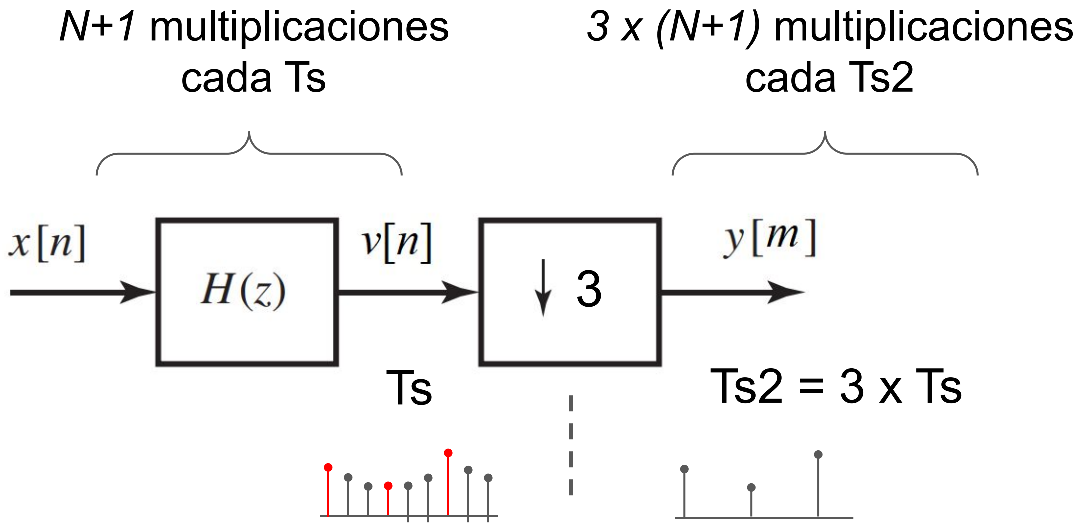
Tenemos N+1 multiplicaciones por cada tiempo de muestreo Ts:

Cantidad de operaciones por segundo:

$$(N+1)/Ts$$

Actividad 2
D. polifásica con decimación

a)



Multiplicaciones por segundo para obtener y(m):

3 x (N+1) / Ts2 =

3 x (N+1) / (3 x Ts) =

(N+1) / Ts

Actividad 2

D. polifásica con decimación

b) Muestre que el sistema de la Figura 1 se puede implementar mediante una descomposición polifásica como la que se indica en la Figura 2. Con esta implementación ¿cuántas operaciones por segundo son requeridas para obtener la salida y(m)? ¿Cuál de las implementaciones mencionadas (Figuras 1 y 2) resulta más eficiente?

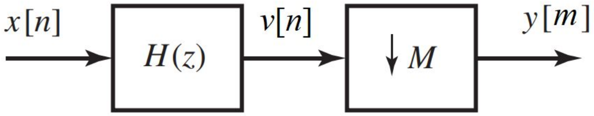


Figura 1

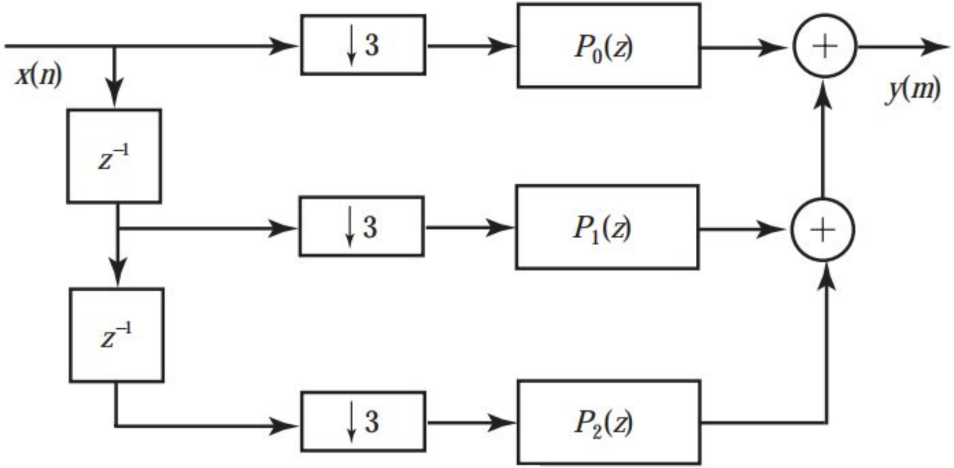


Figura 2

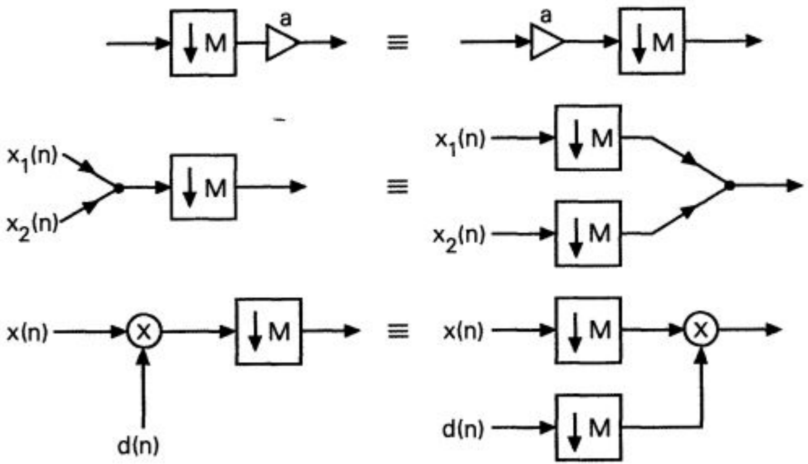
b)

Algunas propiedades de submuestreo y sobremuestreo

Actividad 2
Interconexión de estructuras de tasa múltiple

b)

Propiedades para **up-samplers** y **down-samplers**:



Escalamiento ⇆ (up-sampler o down-sampler)

Suma ⇆ (up-sampler o down-sampler)

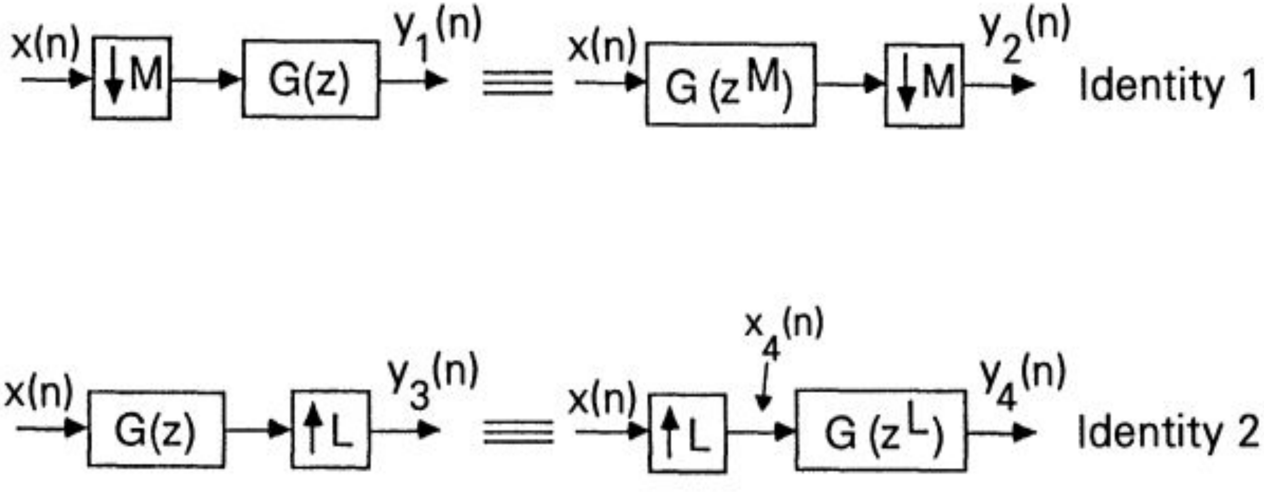
Producto ⇆ (up-sampler o down-sampler)

Actividad 2

D. polifásica con decimación

b)

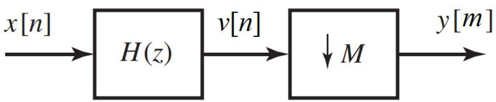
Si H(z) es Racional: Identidades Multirate



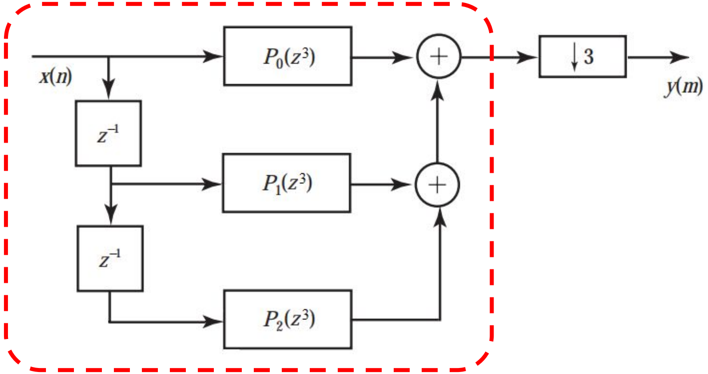
Actividad 2

D. polifásica con decimación

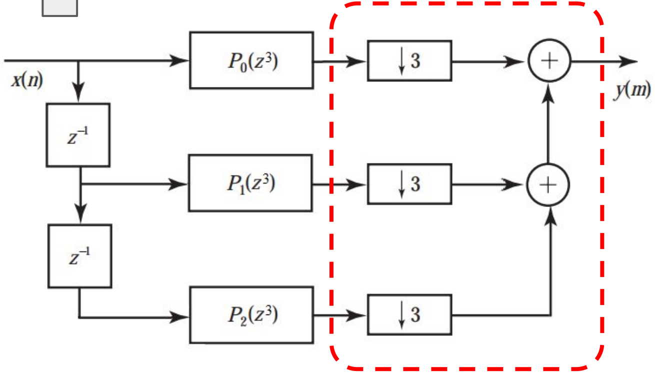
b)



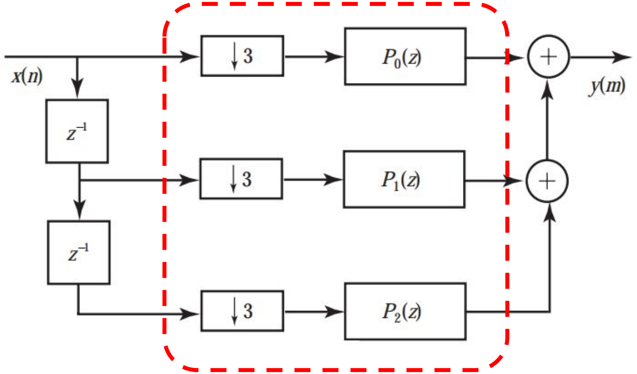
Representación polifásica (DIRECTA)



Intercambio decimador y sumadores



Identidad multirate

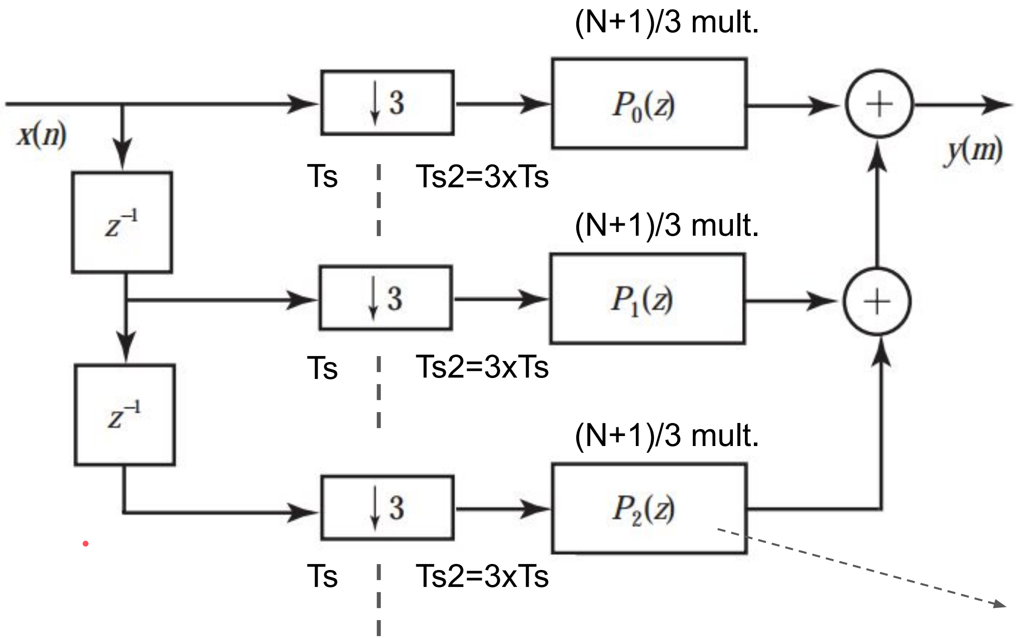


Representación polifásica Eficiente

Actividad 2

D. polifásica con decimación

b) Descomposición polifásica más eficiente (si *Largo* = *K* x *M, con K entero*)



Multiplicaciones por segundo para obtener y(m):

((N+1)/3 + (N+1)/3 + (N+1)/3) / Ts2 =

(N+1) / Ts2 =

(N+1) / (3xTs) =

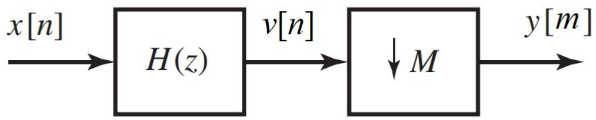
[(N+1)/3] / Ts

$p_k(n) = h(nM + k)$

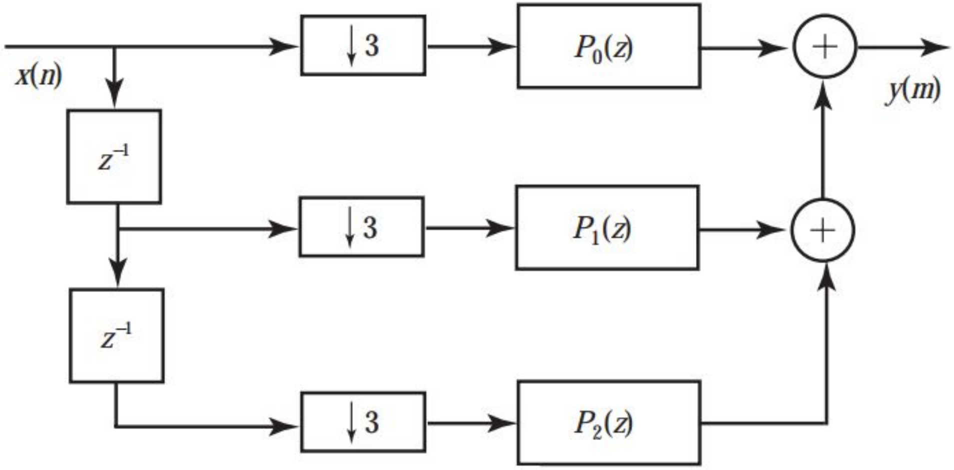
Largo de las componentes polifásicas: (N+1)/3

Actividad 2
D. polifásica con decimación

b) Multiplicaciones / seg.



(N+1) / Ts



[(N+1)/3] / Ts

Actividad 2

D. polifásica con decimación

c) Obtenga las componentes polifásicas $p_k(n)$ del filtro $H(z)$, con M=3 y grafíquelas en el tiempo.

Nota: las componentes polifásicas para un filtro decimador pueden computarse por definición, aunque en matlab también se pueden obtener mediante:
`p = polyphase(Hdec)`, donde `Hdec = dsp.FIRDecimator(M,h)`.

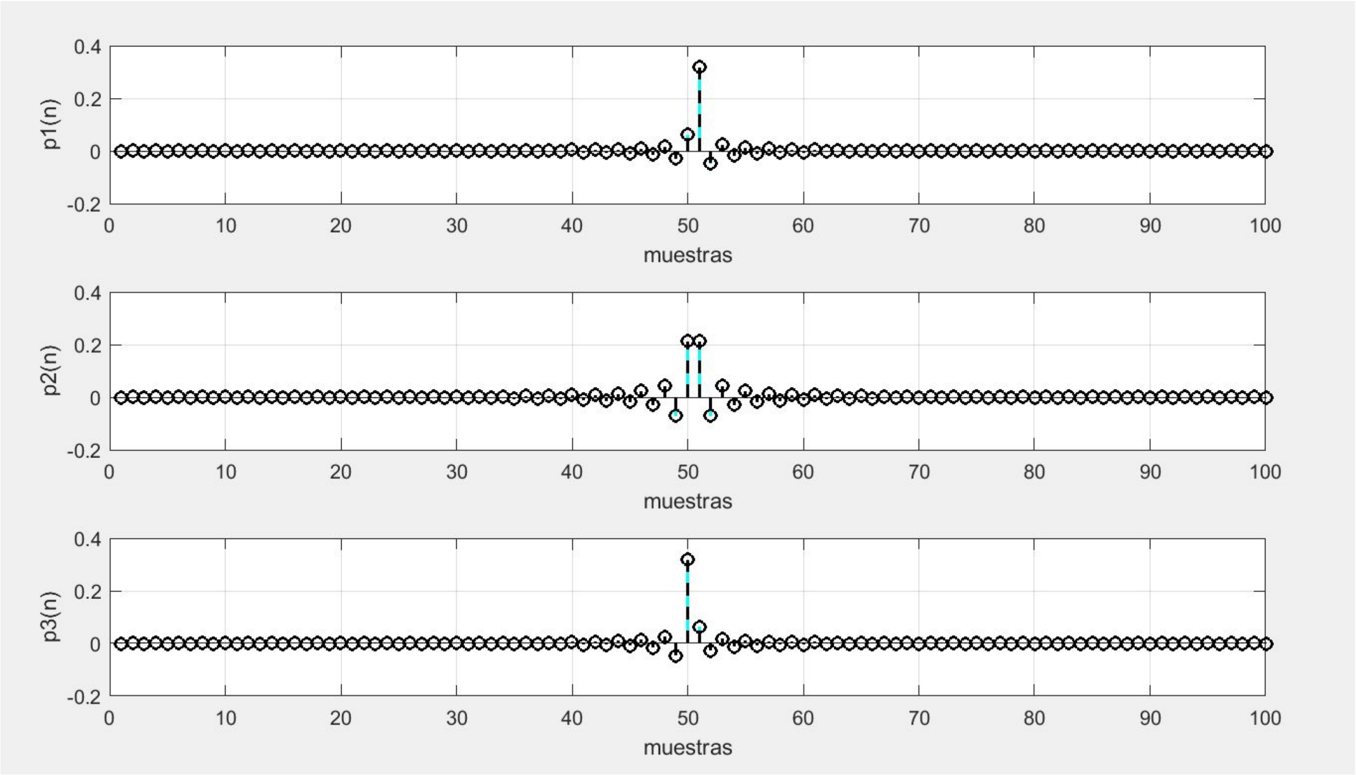
d) Para ambos sistemas, Figuras 1 y 2, aplique alguna de las pistas de audio utilizadas en los TPs 1 y 2 cómo entrada x(n) y compare las salidas de ambos sistemas.

Sugerencia: si utiliza filter(), en lugar de conv(), considere un largo de la entrada suficiente para evitar que la función recorte muestras de más. Puede además truncar la señal de entrada a 1000 muestras.

Actividad 2
D. polifásica con decimación

c)

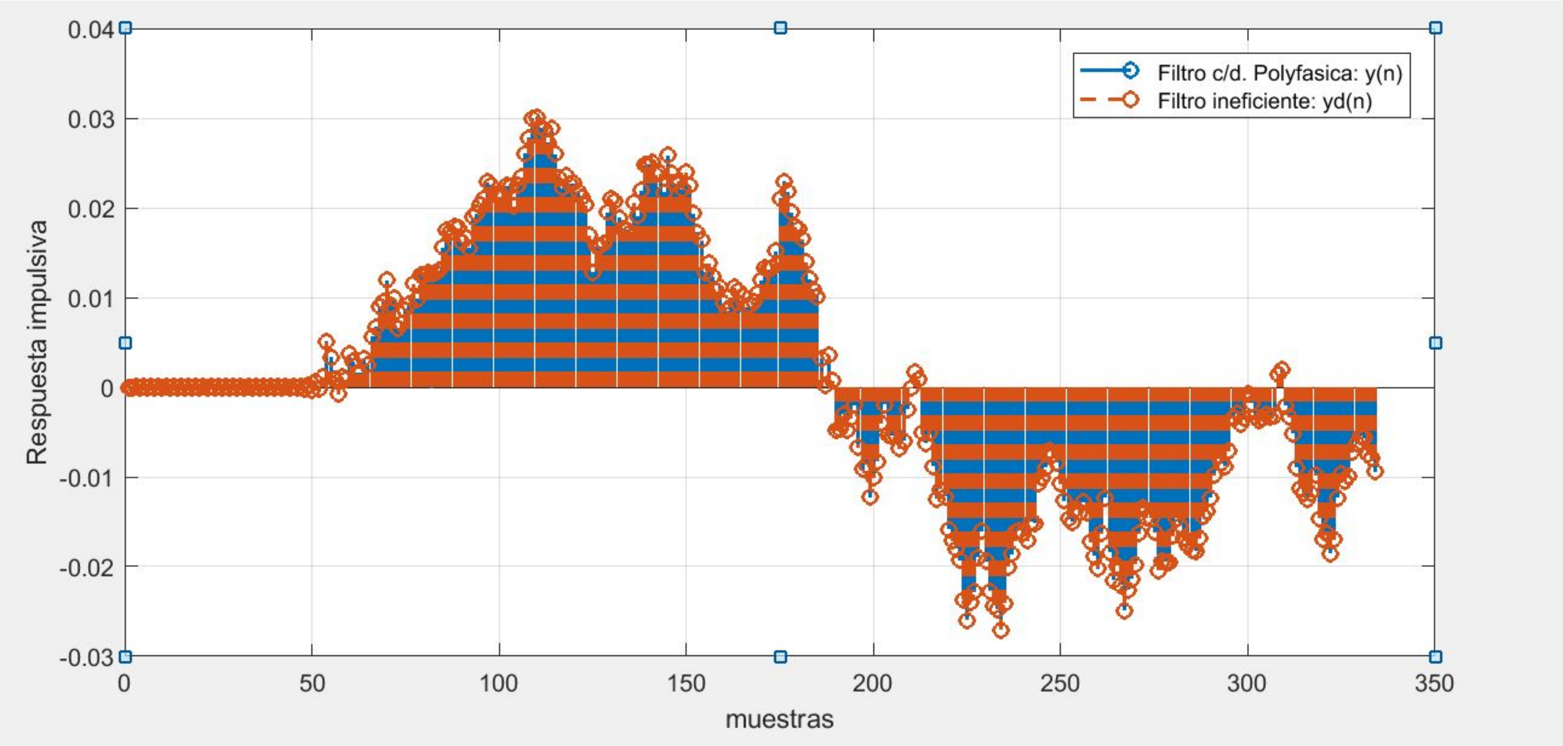
Filtros polifásicos de h(n) implementados por definición



Actividad 2
D. polifásica con decimación

d)

Comparación de la señal de salida para las dos implementaciones

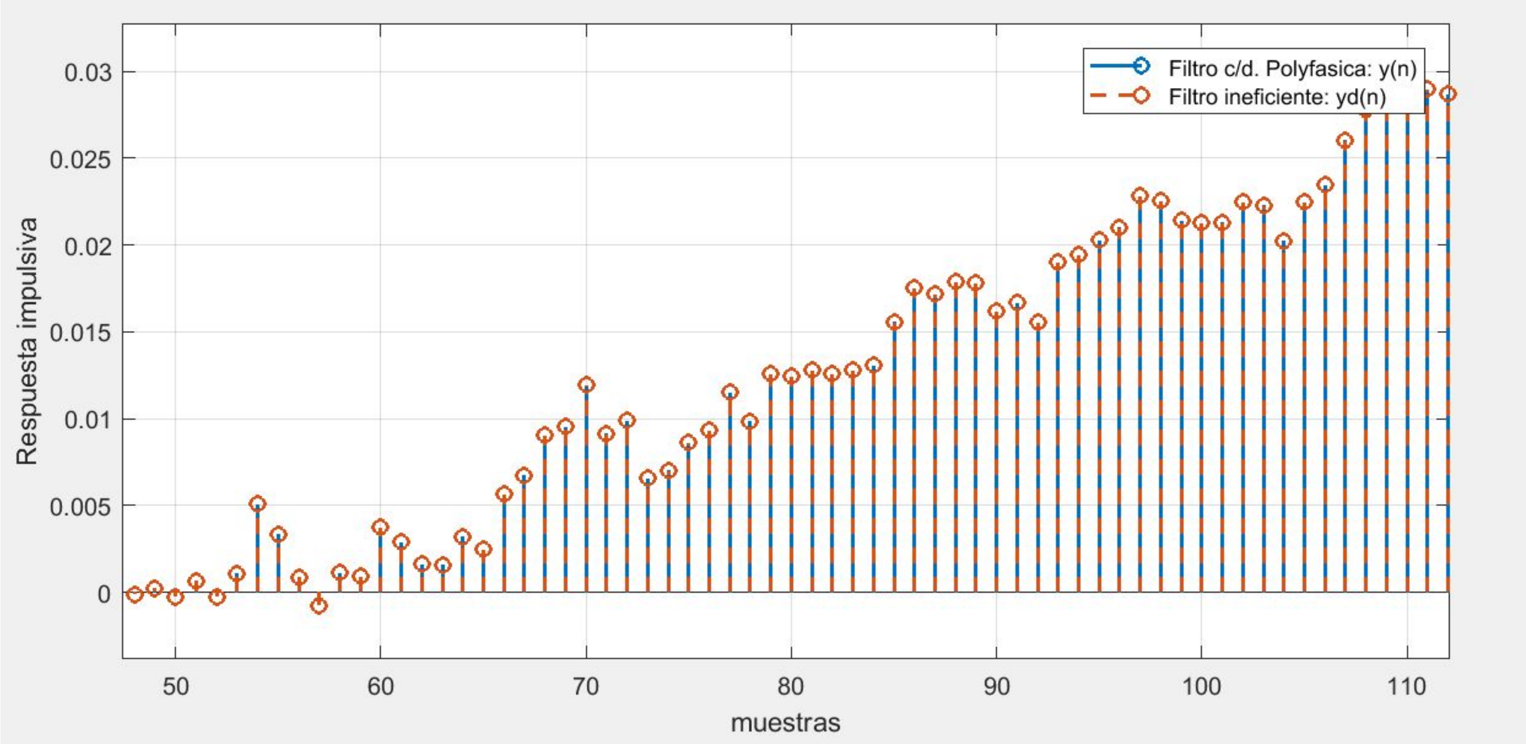


Actividad 2

D. polifásica con decimación

d)

Comparación de la señal de salida para las dos implementaciones

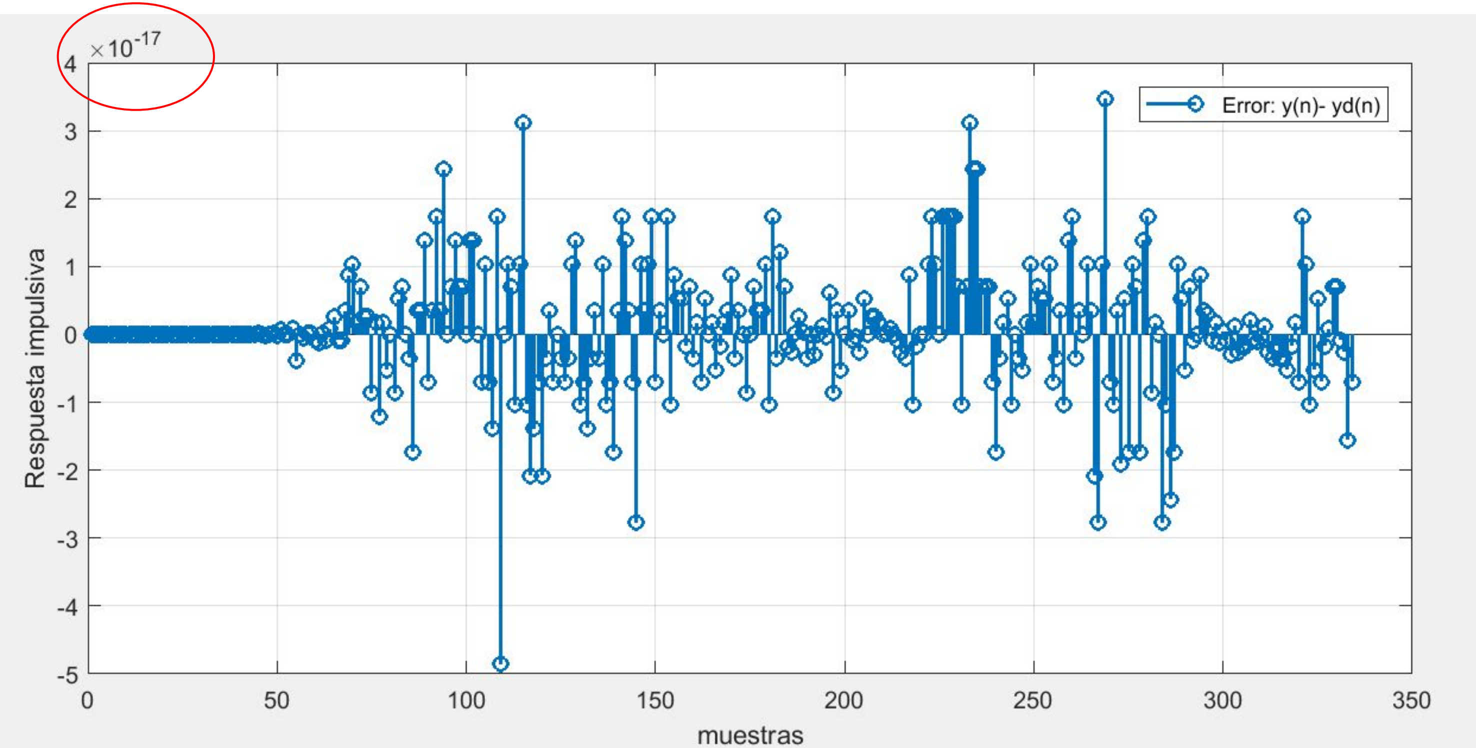


Actividad 2

D. polifásica con decimación

d)

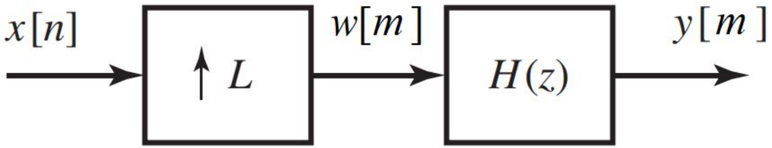
Comparación de la señal de salida para las dos implementaciones



Actividad 3 - D. polifásica con interpolación

Actividad 3
D. polifásica con interpolación

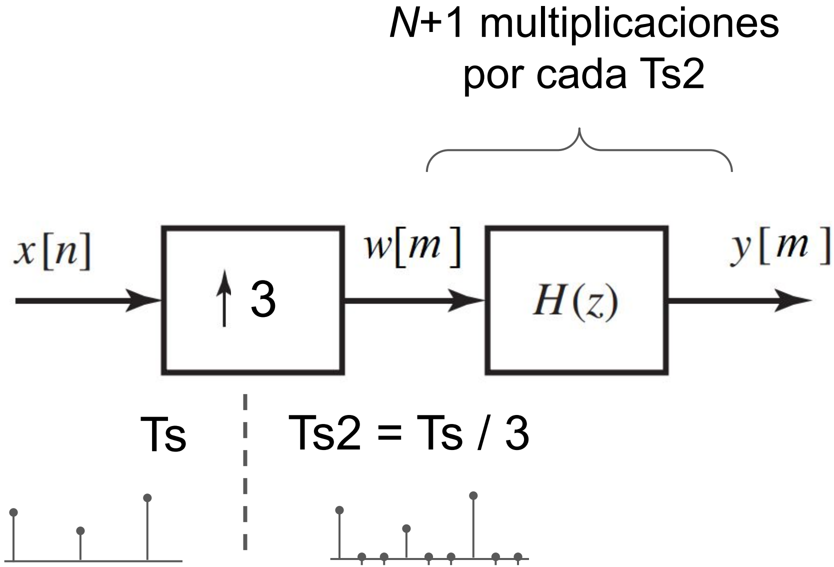
Sea un sistema conformado por un bloque de expansión con un factor de *L*=3 en cascada con un filtro interpolador con transferencia H(z) (con mismas especificaciones que en el ejercicio anterior), de acuerdo a la Figura:



a) Suponga que la respuesta impulsiva *h*(*n*) es un filtro FIR de orden *N*, implementado mediante la forma *directa* para un periodo de muestreo Ts en la entrada. ¿Cuántas operaciones por unidad de tiempo son requeridas para obtener la señal de salida *y*(*m*)?
Nota: tome cómo referencia las multiplicaciones necesarias en un intervalo de tiempo Ts para representar la cantidad de operaciones por segundo.

Actividad 3
D. polifásica con interpolación

a)



Multiplicaciones por segundo para obtener y(m):

(N+1) / Ts2 =

(N+1) / (Ts / 3) =

3x(N+1) / Ts

Actividad 3

D. polifásica con interpolación

b) Muestre que el sistema de la Figura 1 se puede implementar mediante una descomposición polifásica como la que se indica en la Figura 2. Con esta implementación ¿cuántas operaciones por segundo son requeridas para obtener la salida y(m)? ¿Cuál de las implementaciones mencionadas (Figuras 1 y 2) resulta más eficiente?

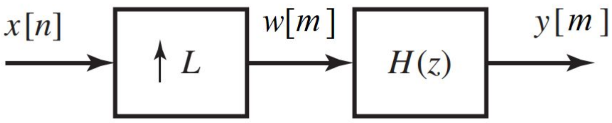


Figura 1

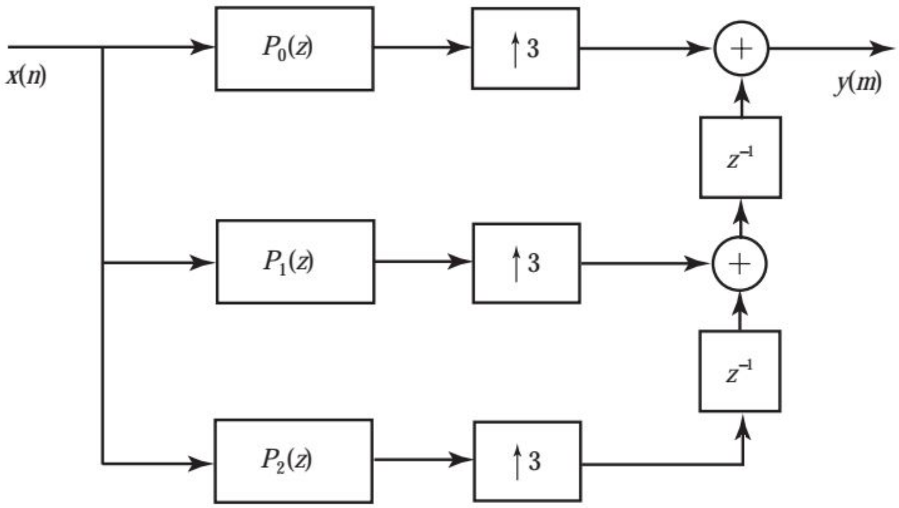
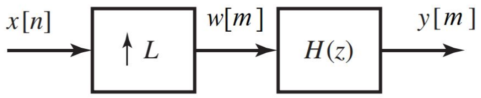


Figura 2

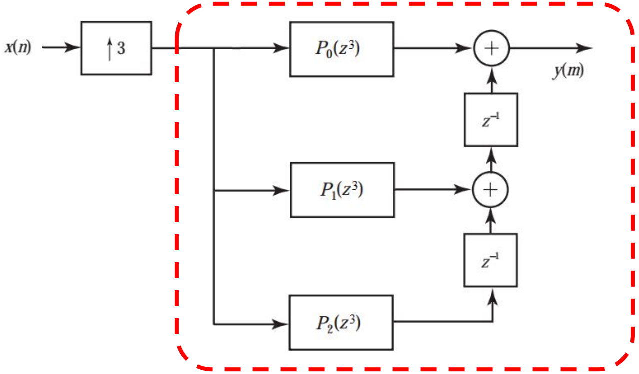
Actividad 3

D. polifásica con interpolación

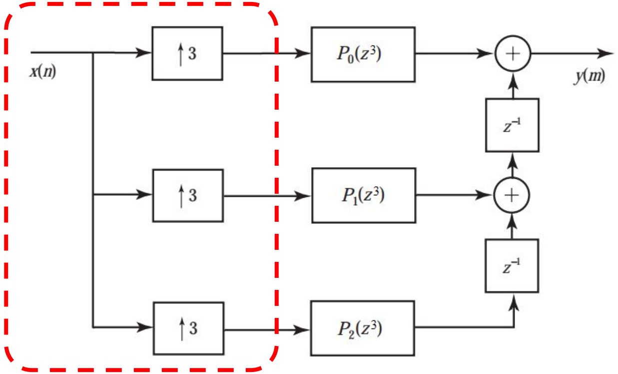
b)



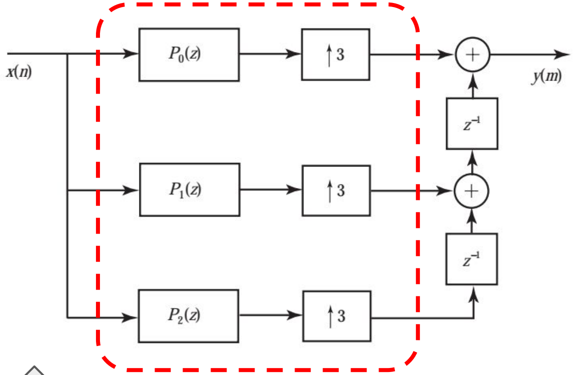
Representación polifásica (TRASPUESTA)



Intercambio decimador y bifurcaciones



Identidad multirate

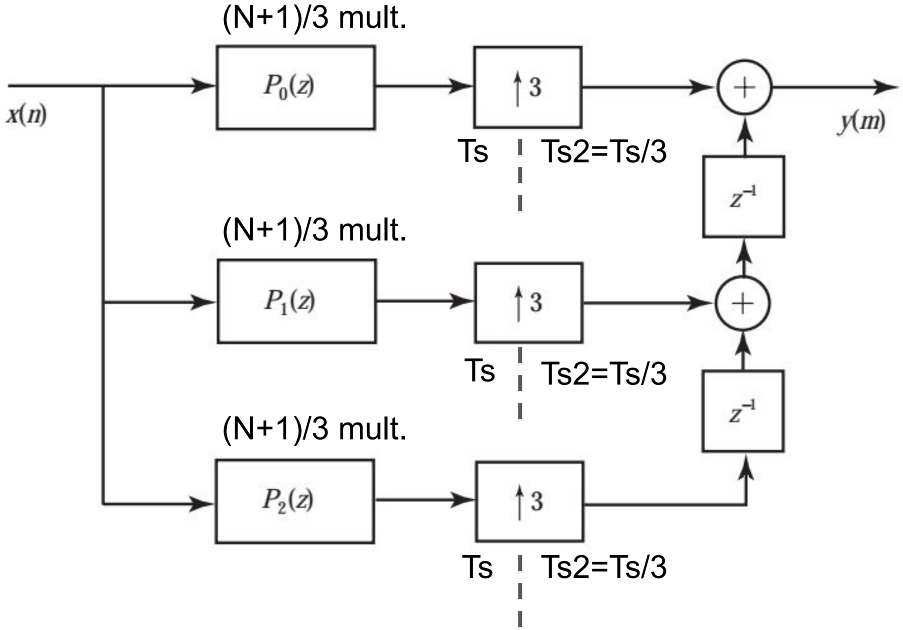


Representación polifásica Eficiente

Actividad 3
D. polifásica con interpolación

b)

Descomposición polifásica más eficiente



Multiplicaciones por segundo para obtener y(m):

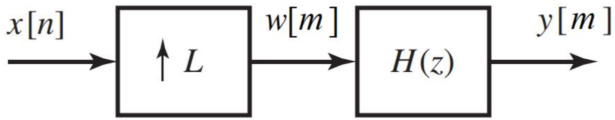
((N+1)/3 + (N+1)/3 + (N+1)/3) / Ts =

(N+1) / Ts

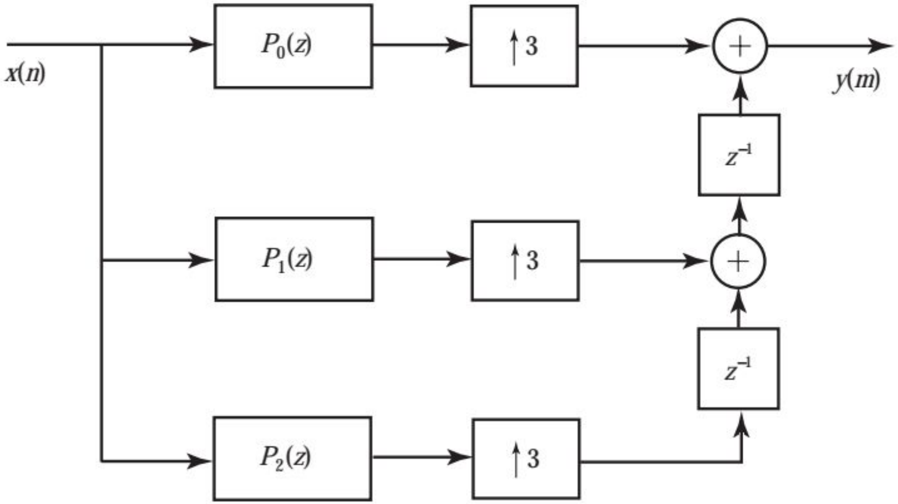
Actividad 3

D. polifásica con interpolación

b) Multiplicaciones / seg.



3 x (N+1) / Ts



(N+1) / Ts

Actividad 3
D. polifásica con interpolación

c) Obtenga las componentes polifásicas $p_k(n)$ del filtro $H(z)$, con L=3 y grafíquelas en el tiempo.

Nota: las componentes polifásicas para un filtro interpolador pueden computarse por definición, aunque en matlab también se pueden obtener mediante: **`p=polyphase(Hdec)`**, donde **`Hint=dsp.FIRInterpolator(L,h)`**.

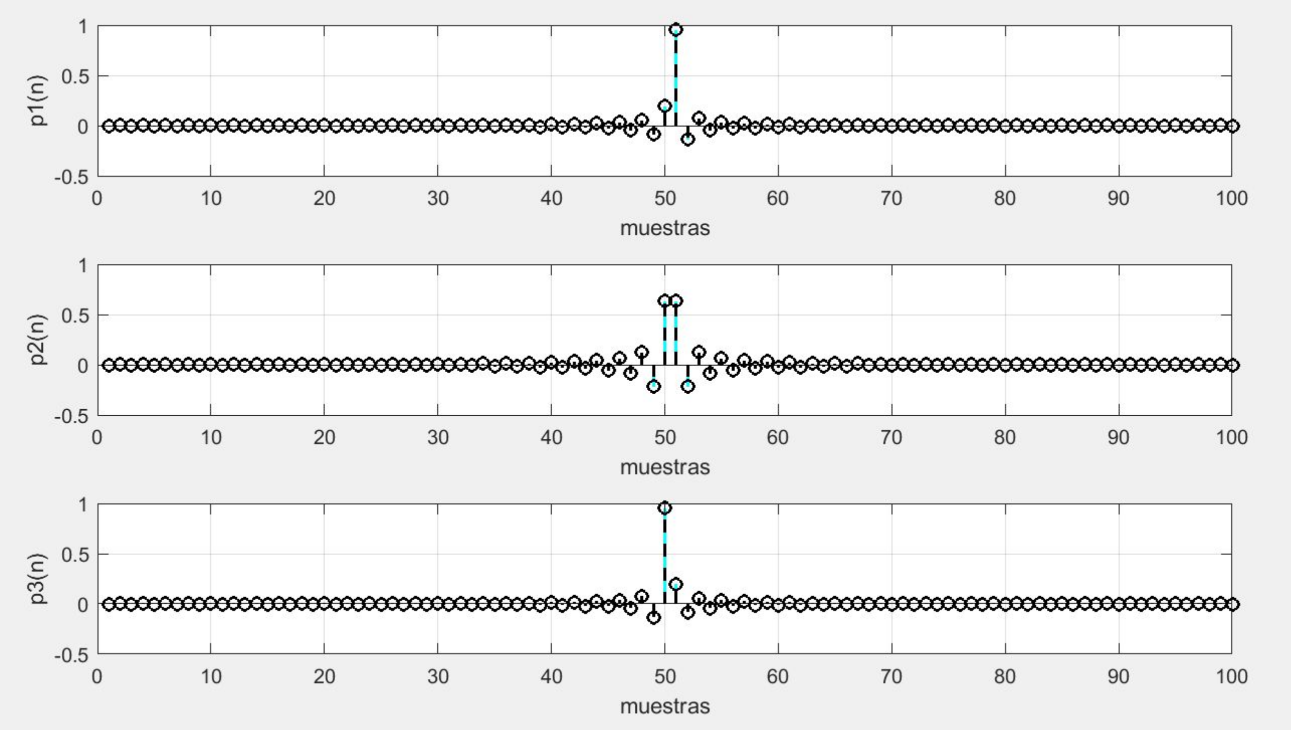
d) Para ambos sistemas, Figuras 1 y 2, aplique alguna de las pistas de audio utilizadas en los TPs 1 y 2 cómo entrada x(n) y compare las salidas de ambos sistemas. Sugerencia: si utiliza filter(), en lugar de conv(), considere un largo de la entrada suficiente para evitar que la función recorte muestras de más.

Actividad 3

D. polifásica con interpolación

c)

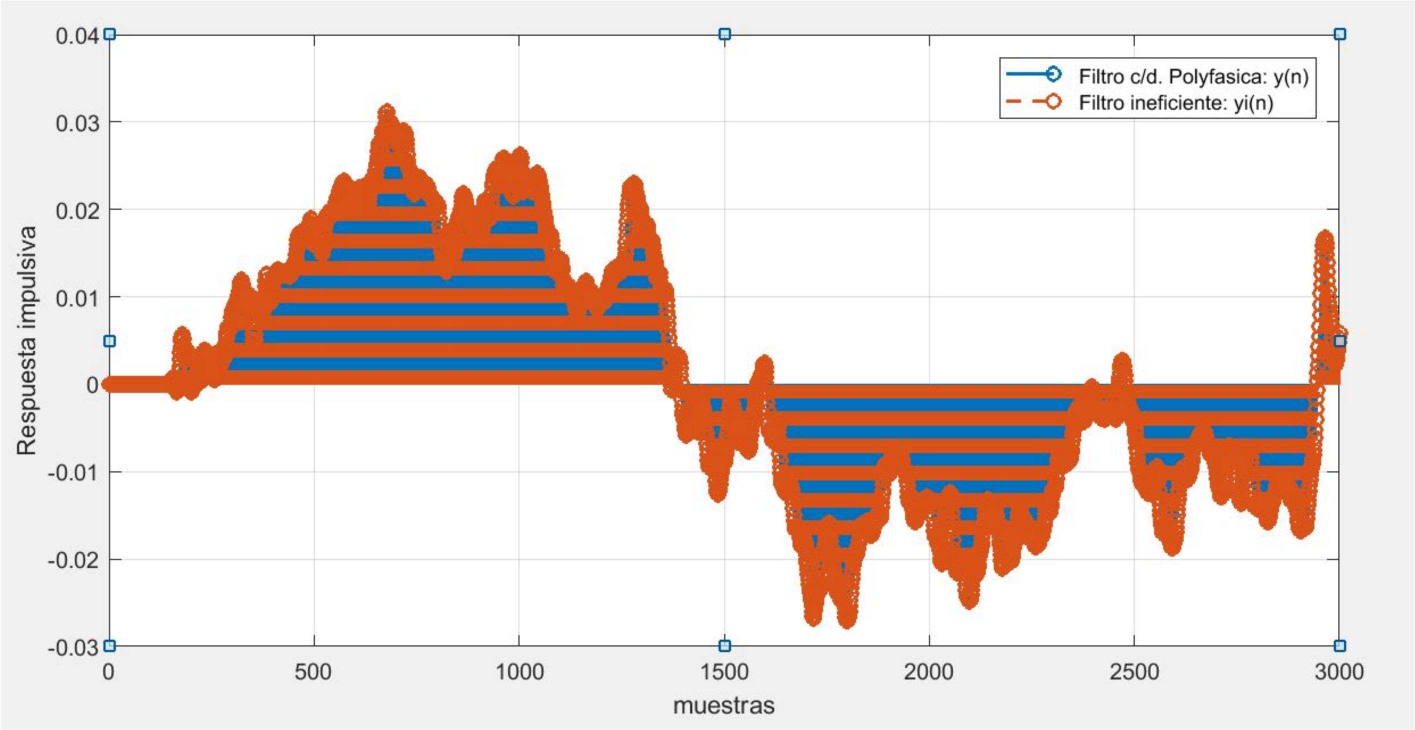
Filtros polifásicos de h(n) implementados por definición y con la función



Actividad 3
D. polifásica con interpolación

d)

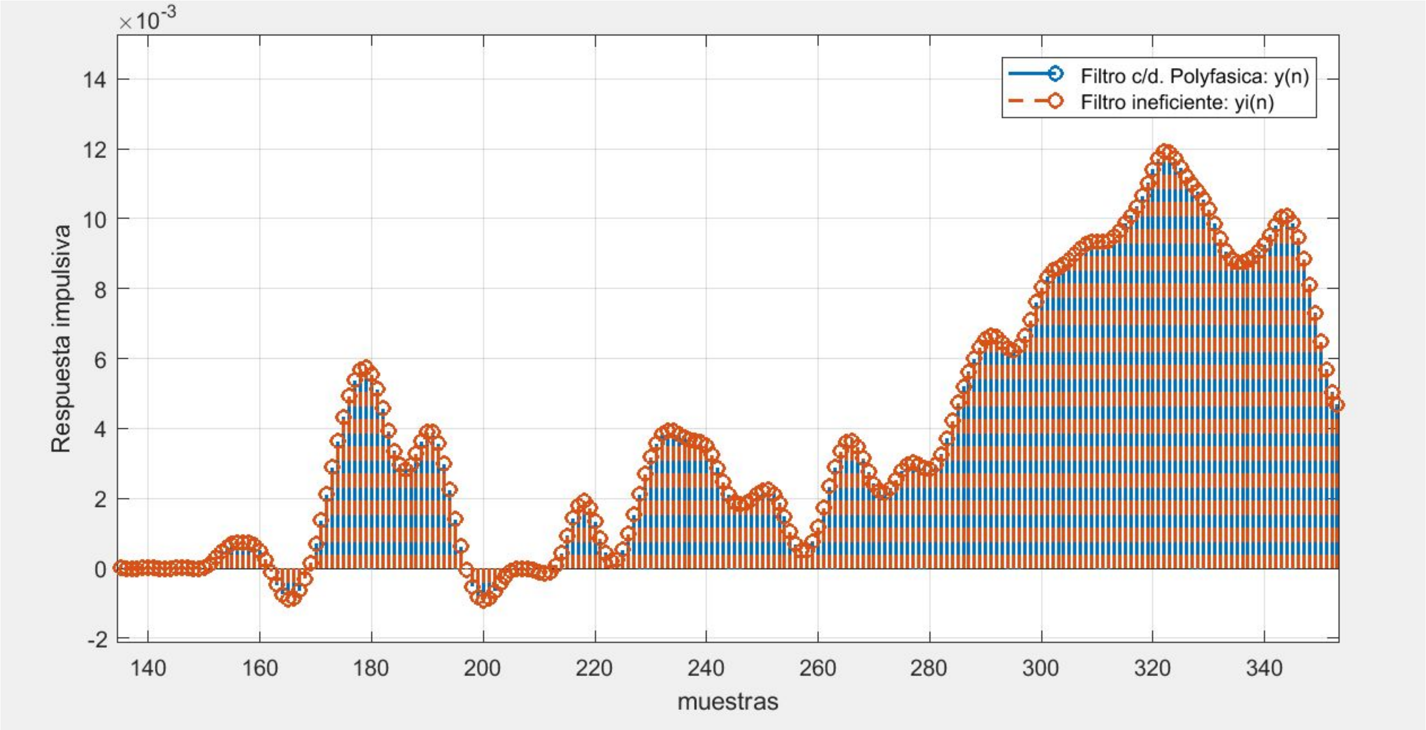
Comparación de la señal de salida para las dos implementaciones



Actividad 3
D. polifásica con interpolación

d)

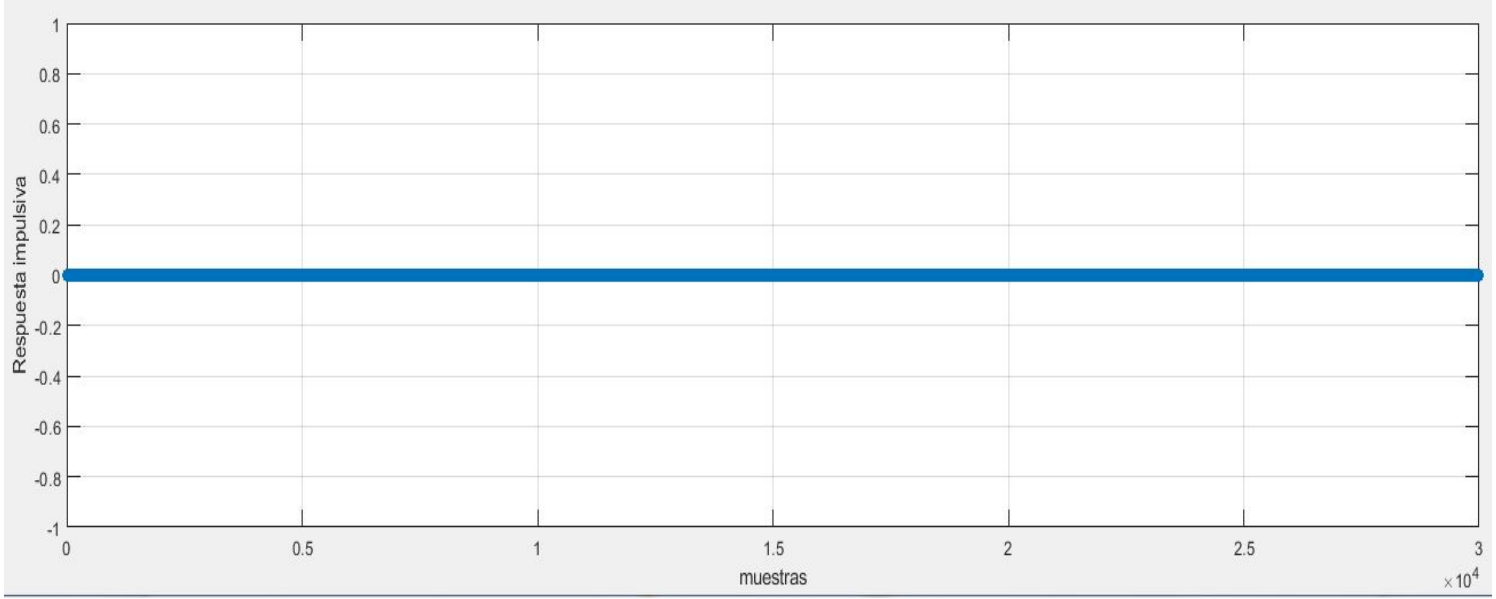
Comparación de la señal de salida para las dos implementaciones



Actividad 3
D. polifásica con interpolación

d)

Error de la señal de salida para las dos implementaciones



Actividad 4 - IFIR

Actividad 4

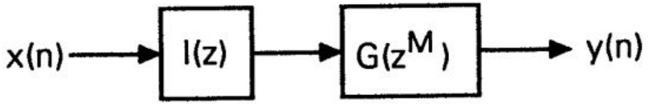
IFIR

Se requiere implementar un filtro pasa bajos con una transición muy estrecha, $h(n)$ con frecuencias límites ω_p=0.05π y ω_s=0.1π, ripples de paso δ_p=0.01 y supresión δ_s=0.001.

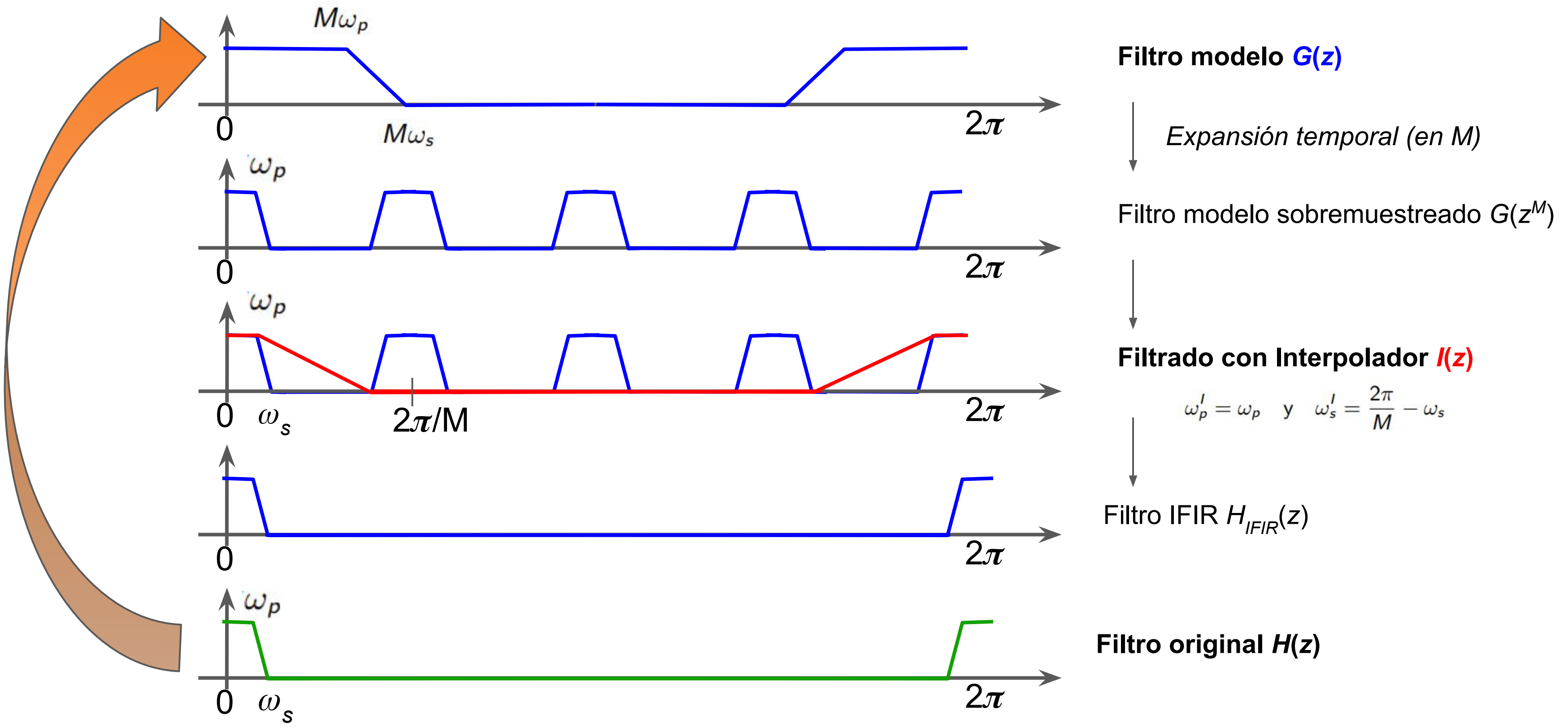
a) Implemente $h(n)$ y grafique su respuesta en frecuencia para verificar si cumple las especificaciones y observe el orden requerido para su cumplimiento.

b) Implemente un filtro IFIR de modo tal que el filtro completo $H_{IFIR}(z)$ (cascada del filtro interpolador $I(z)$ y el modelo $G(z^M)$, con M=5) cumpla las mismas especificaciones que H(z). Grafique en un mismo esquema la respuesta en frecuencia de $G(z)$, $G(z^M)$, $I(z)$ y $H_{IFIR}(z)$. En un esquema separado, grafique $|H(\omega)|$ y $|H_{IFIR}(\omega)|$ y compare ambas implementaciones.

c) De los resultados observados en el punto anterior, determine el ahorro de coeficientes requeridos para la implementación de IFIR respecto del filtro original (puede expresarlo como porcentaje [%] en relación al filtro original).



Actividad 4
IFIR

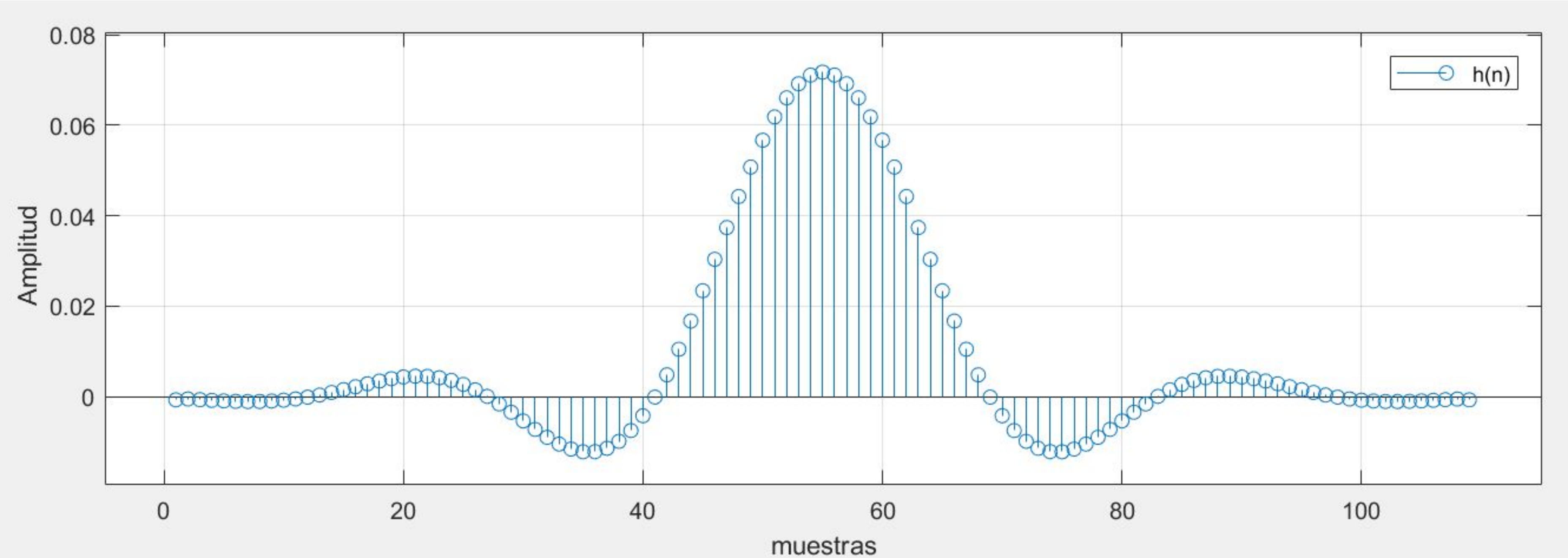


Actividad 4
IFIR

Especificaciones

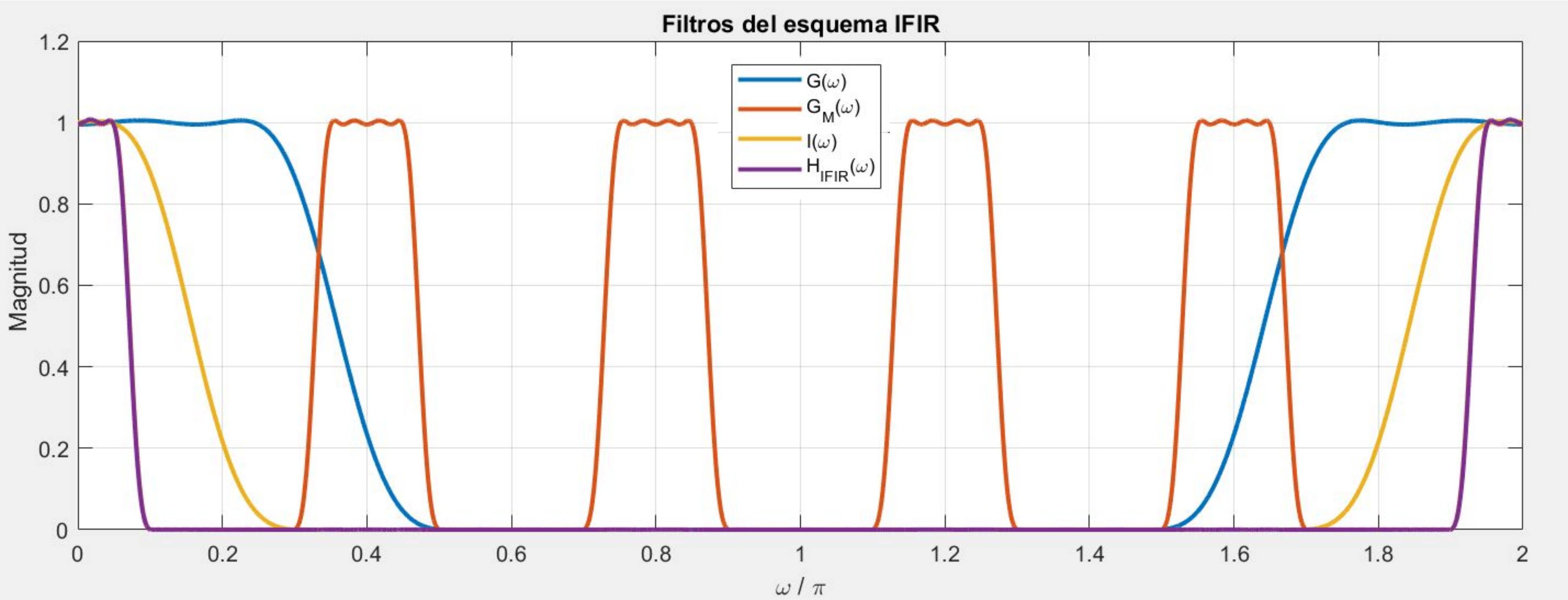
Filtro requerido	Filtro interpolador	Filtro modelo
$\lvert H(\omega)\rvert$	$\lvert I(\omega)\rvert$	$\lvert G(\omega)\rvert$
$\delta_p = 0.01$	$\delta_p' = 0.01/2 = 0.005$	$\delta_p'' = 0.01/2 = 0.005$
$\delta_s = 0.001$	$\delta_s' = 0.001$	$\delta_s'' = 0.001$
$\omega_p = 0.05\pi$	$\omega_p' = 0.05\pi$	$\omega_p'' = M \times 0.05\pi = 0.25\pi$
$\omega_s = 0.1\pi$	$\omega_s' = 2\pi/M - 0.1\pi = 0.3\pi$	$\omega_s'' = M \times 0.1\pi = 0.5\pi$
$N = 108$	$NI = 25$	$Ng = 25$

Actividad 4
IFIR



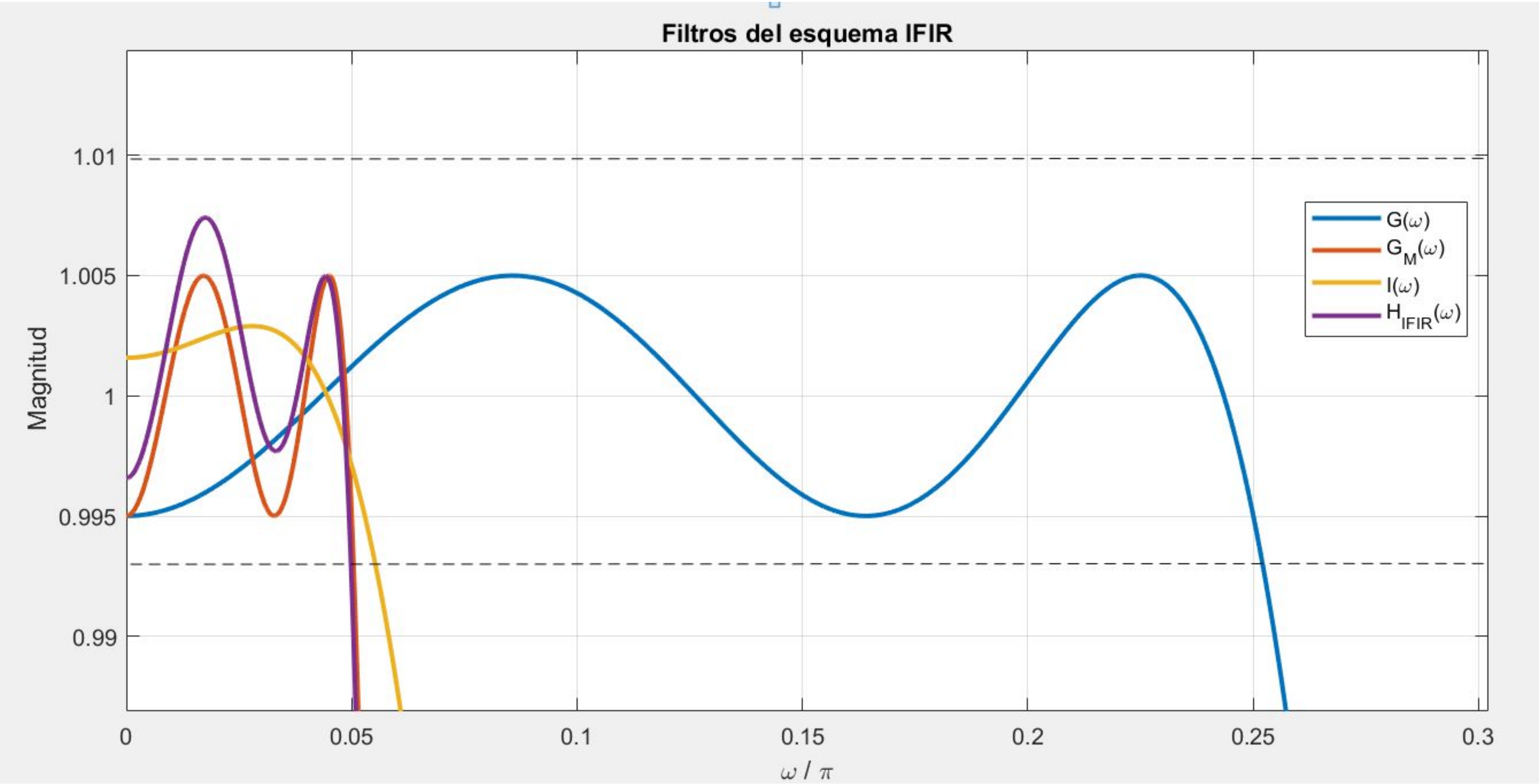
Actividad 4

IFIR

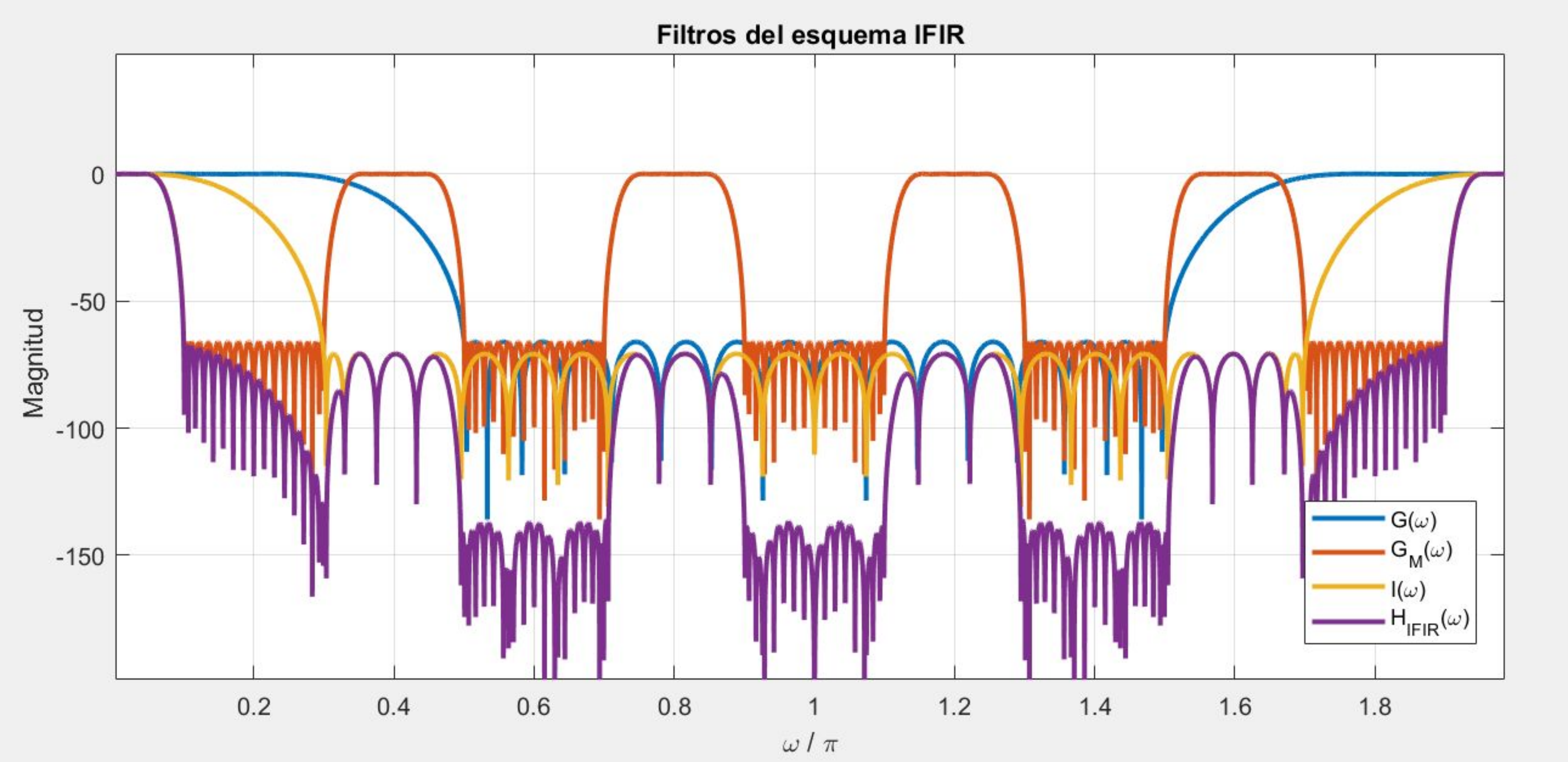


Actividad 4

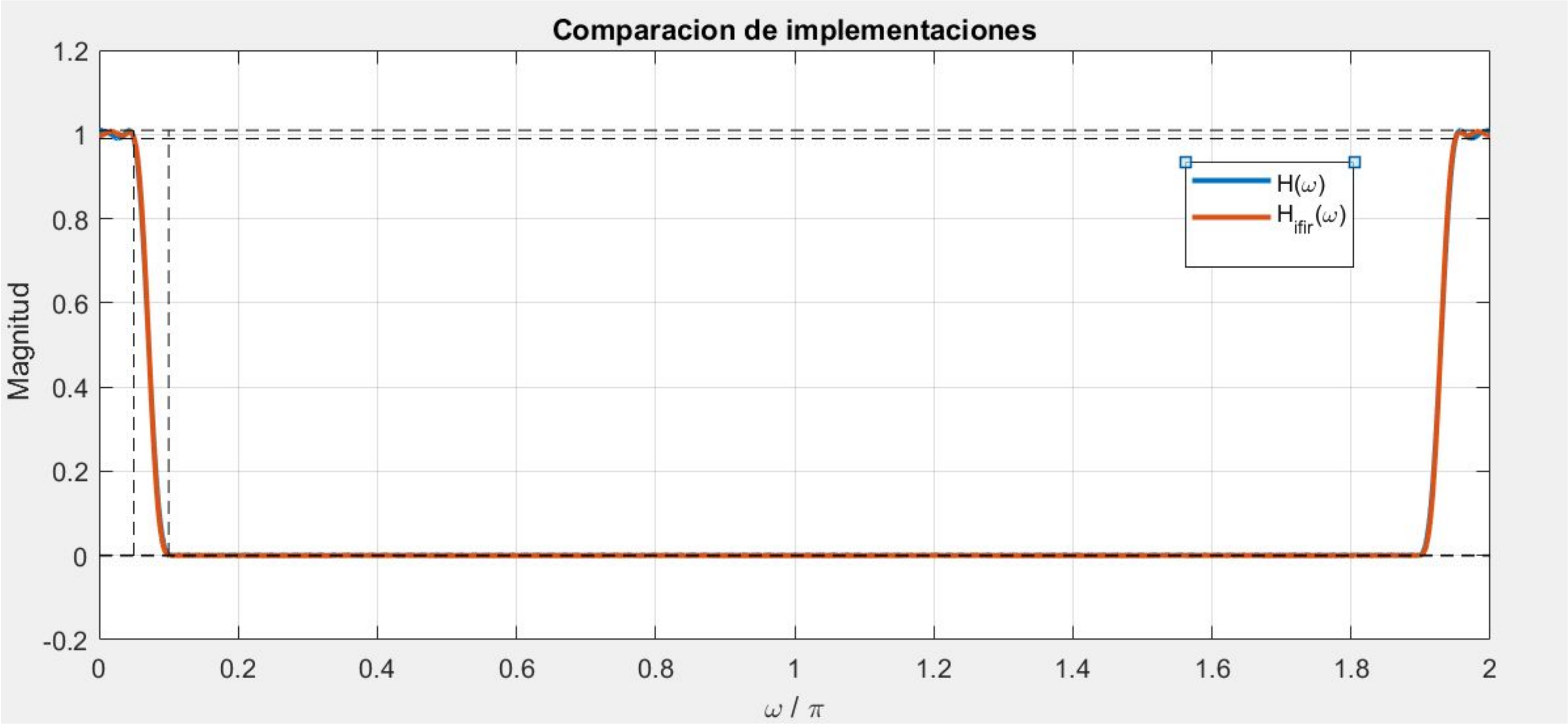
IFIR



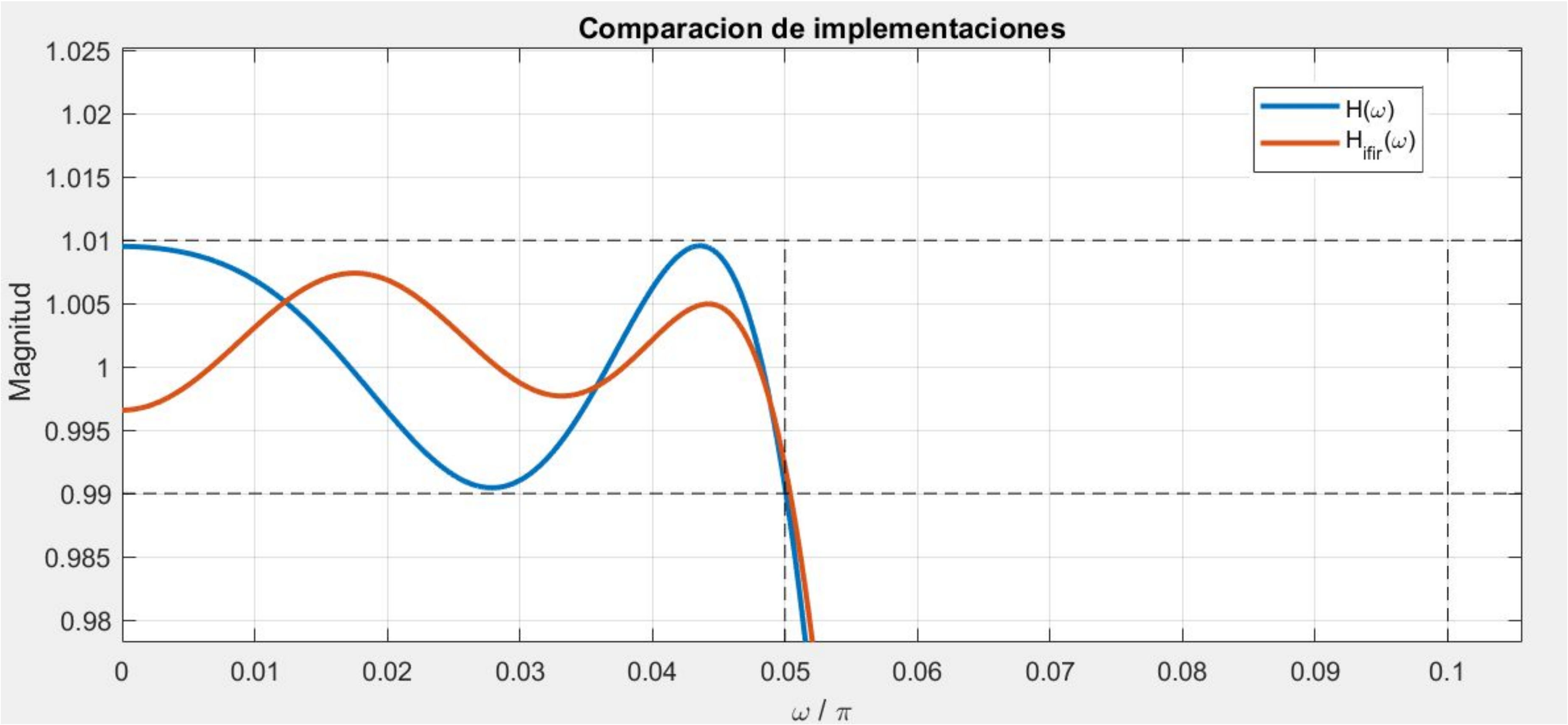
Actividad 4
IFIR



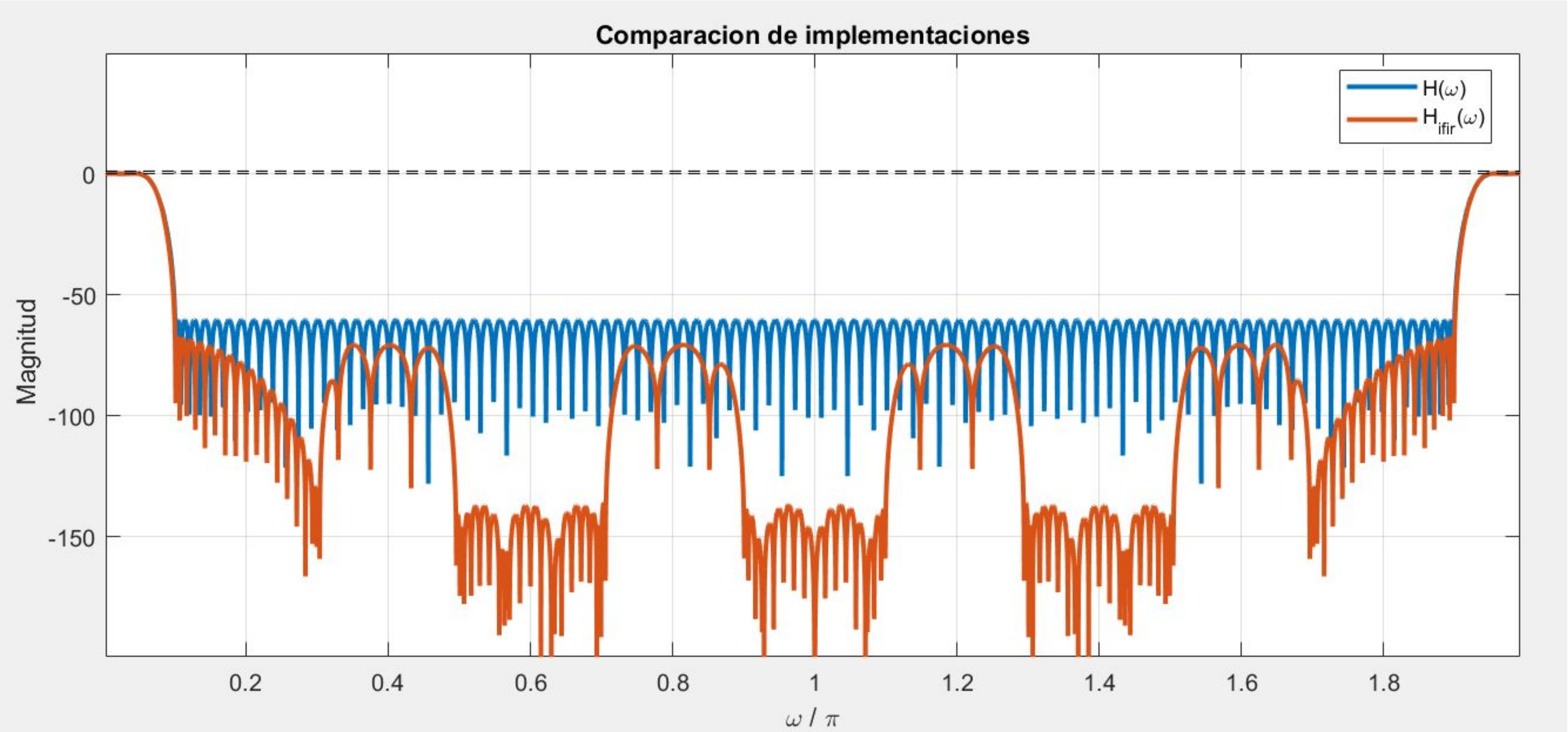
Actividad 4
IFIR



Actividad 4
IFIR



Actividad 4
IFIR



Actividad 4

IFIR

Filtro	**Nro de coeficientes**	**% de uso**
Original	109	
Interpolador	26	
Modelo	26	
Total IFIR	52	48,25 %

Con esta implementación se requieren almacenar sólo el 48,15% de los coeficientes que se utilizarían con la implementación original.