Filtro de Kalman

Procesamiento de señales

.UBA fiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

Ing. Débora P. Copa ● Dra. Cecilia G. Galarza
IIBM LPSC

VARIABLES DE ESTADO

Ejemplo de variables de estado incluyendo las mediciones

Ejercicio VE

Dado un proceso físico que se puede modelar a partir del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con entradas $p(t)$ y $q(t)$:

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) - r(t) = p(t) \\ \ddot{d}(t) + d(t) = q(t) \end{cases}$$

Describa el sistema en término de variables de estado y encuentre las matrices F y G. Suponiendo que se dispone de mediciones modeladas como $y(t) = r(t) + d(t)$, encuentre la matriz H del espacio de observaciones.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t) \\ y(t) = H\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Ejercicio VE

$$\begin{cases} \ddot{r} + 0\,\overbrace{\dot{r}}^{x_2} - \overbrace{r}^{x_1} = p \\ \ddot{d} + 0\,\underbrace{\dot{d}}_{x_4} + \underbrace{d}_{x_3} = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + p \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -x_3 + q \end{cases}$$

Ecuación de estados expresada matricialmente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

Ejercicio VE

$$y = r + d$$ Ecuación de salida (mediciones)

Reemplazamos por los estados definidos:

$$y = x_1 + x_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = H\mathbf{x}$$

Ejercicio VE

Resumen

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t) \\ y(t) = H\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Sistema de estados

Matrices y vectores del sistema

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Discretización de la ecuación de estados

Discretización - Solución general

Discretización: Asumimos ruido del proceso

- En la materia vamos a trabajar sin entradas aplicadas intencionalmente.
- Vamos a suponer que la Ec. de estados incluye una incertidumbre del modelo **v**(t)
- A este término aleatorio lo vamos a llamar “ruido del proceso”

Ec. de estados $$\dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{v}(t)$$ *Asumimos esto como ruido del proceso*

Discretización: Solución de la ecuación de estados

Ecuación de estados de tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{v}(t)$$

Trayectoria del sistema

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) G\, \mathbf{v}(\tau)\, d\tau,$$

Discretización: Solución de la ecuación de estados

Matriz de transición

Si F es constante, la *matriz de transición de estados* (entre t_0 y t) puede expresarse como:

$$\Phi(t, t_0) = e^{F(t-t_0)}$$

Trayectoria del sistema

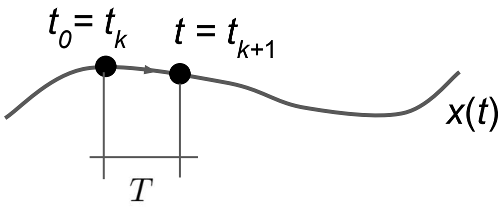
$$\mathbf{x}(t) = e^{F\,(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{F\,(t-\tau)} G\,\mathbf{v}(\tau)\,d\tau,$$

Discretización: Discretización para la solución general

Discretización

- Tiempo de muestreo $T = t_{k+1} - t_k$
- Estado actual $t_0 = t_k = kT$
- Estado siguiente $t = t_{k+1} = (k+1)T$

Estados discretos $T = t_{k+1} - t_k$



Solución para transición entre estados discretos

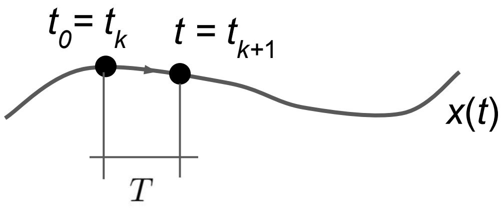
$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = e^{F\,T}\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F\,(t_{k+1}-\tau)} G\,\mathbf{v}(\tau)\,d\tau,$$

Discretización: Discretización para la solución general

Discretización

- Tiempo de muestreo $T = t_{k+1} - t_k$
- Estado actual $t_0 = t_k = kT$
- Estado siguiente $t = t_{k+1} = (k+1)T$

Estados discretos $T = t_{k+1} - t_k$



Solución para transición entre estados discretos

$$\underbrace{\mathbf{x}(t_{k+1})}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{e^{F\,T}}_{F_d} \underbrace{\mathbf{x}(t_k)}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F\,(t_{k+1}-\tau)} G\,\mathbf{v}(\tau)\,d\tau}_{\mathbf{v}(k) \text{ ruido del proceso discreto}},$$

Discretización: Discretización para la solución general

Ecuación de estados de tiempo discreto

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_d \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

$$F_d = e^{FT} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(FT)^n}{!n} = I + FT + \frac{(FT)^2}{2} + \frac{(FT)^3}{6} + \ldots$$

Matriz de transición de estados (si F no depende del tiempo)

$$Q_d = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H]$$

*Dado un proceso aleatorio **v**, no nos interesa su valor, sino su covarianza (matriz Q_d)*

Ruido del proceso discreto

$$\mathbf{v}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F\,(t_{k+1}-\tau)} G\,\mathbf{v}(\tau)\,d\tau,$$

Discretización: Ecuación de salida

Ecuación de observaciones (mediciones)

Muestreo en $t_k = kT$

$$\mathbf{y}(t) = H\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{y}(t_k) = H\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{w}(t_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{y}_k = H\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k$$

$\mathbf{w}(t)$ Ruido de medición

H La matriz de observaciones *H* discreta es idéntica a la de tiempo continuo

Discretización - Aproximación de primer orden

Discretización y aproximación de primer orden

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t)$$

Ecuaciones de estado de tiempo continuo (homogénea)

$$F_d = e^{FT} = I + FT + \cancel{\frac{(FT)^2}{2} + \frac{(FT)^3}{6}} + \ldots$$

Aproximación de primer orden (si *T* es pequeño pueden despreciarse términos de orden superior)

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_d\,\mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{x}_{k+1} \simeq (I + FT)\mathbf{x}_k \Longrightarrow \boxed{F_d \simeq I + FT}$$

Discretización y aproximación de la derivada

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F\mathbf{x}(t)$$

Ecuaciones de estado de tiempo continuo (homogénea)

Aproximación de la derivada

$$\left.\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right|_{t=kT} \simeq \frac{\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)}{T}$$

$$\frac{\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)}{T} \simeq F\mathbf{x}(t_k)$$

¿Qué tan buena es esta discretización?

$$\mathbf{x}_{k+1} \simeq (I + FT)\mathbf{x}_k \Longrightarrow \boxed{F_d \simeq I + FT}$$

FILTRO DE KALMAN

Algoritmo

Conocida la dinámica (F,G,H) y los parámetros estadísticos de vk y wk (Q y R):

Condiciones iniciales

$$\hat{\mathbf{x}}_{0/-1} = E[\mathbf{x}_0]$$
$$\mathbf{P}_{0/-1} = Cov[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0]$$

Llega una medición y(k) ...

Actualización

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1}\mathbf{H}_k^H \left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_{k/k-1}\mathbf{H}_k^H + \mathbf{R}_k\right)^{-1}$$
$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}\right)$$
$$\mathbf{P}_{k/k} = \left(I - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_{k/k-1}$$

Predicción

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$$
$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k\mathbf{P}_{k/k}\mathbf{F}_k^H + \mathbf{G}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{G}_k^H$$

Vectores, matrices y dimensiones

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{v}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$$

F nxn

G nxm

H lxn

R lxl

Q mxm

P nxn

K nxl

n: cantidad de estados x_k

m: dimensión del ruido del proceso v_k

l: cantidad de ecuaciones de medición y_k

x: Estados (nx1)

y: Ecuaciones de medición (lx1)

v: Ruido del proceso (mx1)

w: Ruido de medición (lx1)

Ejercicio 1
Estimación de una constante

Ejercicio 1

Suponga una determinada magnitud b que se mantiene constante en el tiempo. Esto puede modelarse en tiempo discreto mediante la ecuación $b_{k+1} = b_k$. Se requiere estimar el valor de dicha magnitud a partir de mediciones ruidosas $y_k = b_k + w_k$, donde $w_k \sim N(0\ ;\ 0.25)$ es el ruido de medición.

(a) Suponiendo que no hay entradas externas ni errores en el modelo elegido, encuentre la representación en variables de estado y las correspondientes matrices F_d y H.

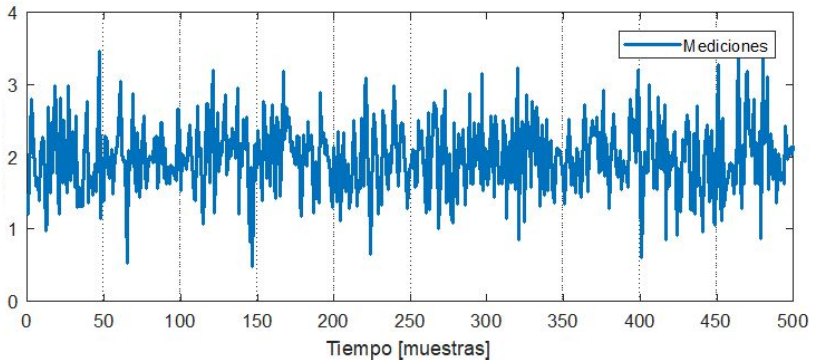
(b) Genere el proceso de mediciones y_k suponiendo $b = 2$ para un largo de $N = 500$ muestras.

(c) Implemente el filtro de Kalman (guarde las innovaciones $e_k = y_k - H\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ en cada iteración) con condiciones iniciales nulas $x_{0/-1} = 0$ y una varianza inicial del error de estimación $P_{0/-1} = 10$. Grafique las mediciones, la constante b y el estado estimado. También calcule y grafique la autocorrelación de las innovaciones.

Ejercicio 1

Problema

- Queremos estimar una magnitud desconocida “b”
- Sabemos que se mantiene constante en el tiempo
- Tenemos observaciones y_k de la misma pero con ruido



En este caso, puede ser poco práctico usar Kalman para resolver este problema, pero lo consideramos desde un punto de vista introductorio.

Ejercicio 1

a)

La magnitud *b* se mantiene constante en el tiempo

$$b_{k+1} = b_k$$

Definimos la variable de estado:

$$x_k = b_k$$

Ecuación de estados general

$$x_{k+1} = F_d x_k + G_d v_k$$

No hay entradas ni errores en el modelado (asumimos ruido de proceso nulo)

$$v_k = 0$$

Ecuación de estados

$$x_{k+1} = F_d x_k$$

$$F_d = 1$$

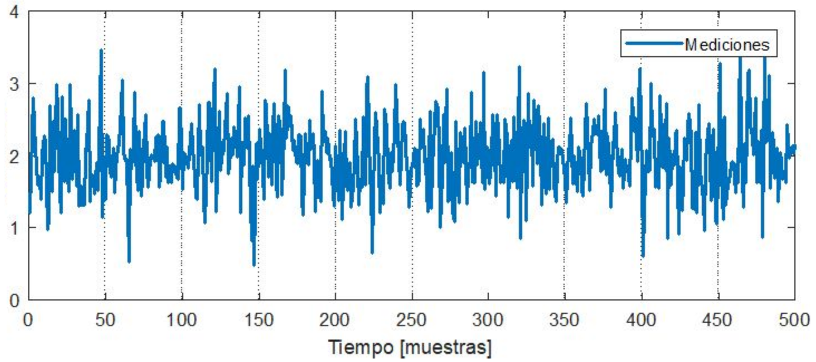
Ejercicio 1

a/b)

Observaciones

$$y_k = b_k + w_k$$

$$y_k = H\, x_k + w_k$$



Matriz de la ecuación de salida

$$H = 1$$

Covarianza de ruido del medición

$$R = E[w_k w_k^*] = \sigma_w^2 = 0{,}25$$

Ejercicio 1

c) Condiciones iniciales y matrices necesarias para el algoritmo:

$\widehat{x}_{0/-1} = 0$ Condiciones iniciales nulas para el estado estimado

$P_{0/-1} = 10$ Covarianza inicial del error de estimación de los estados

$F_d = 1$ Matriz de transición de estados de tiempo discreto

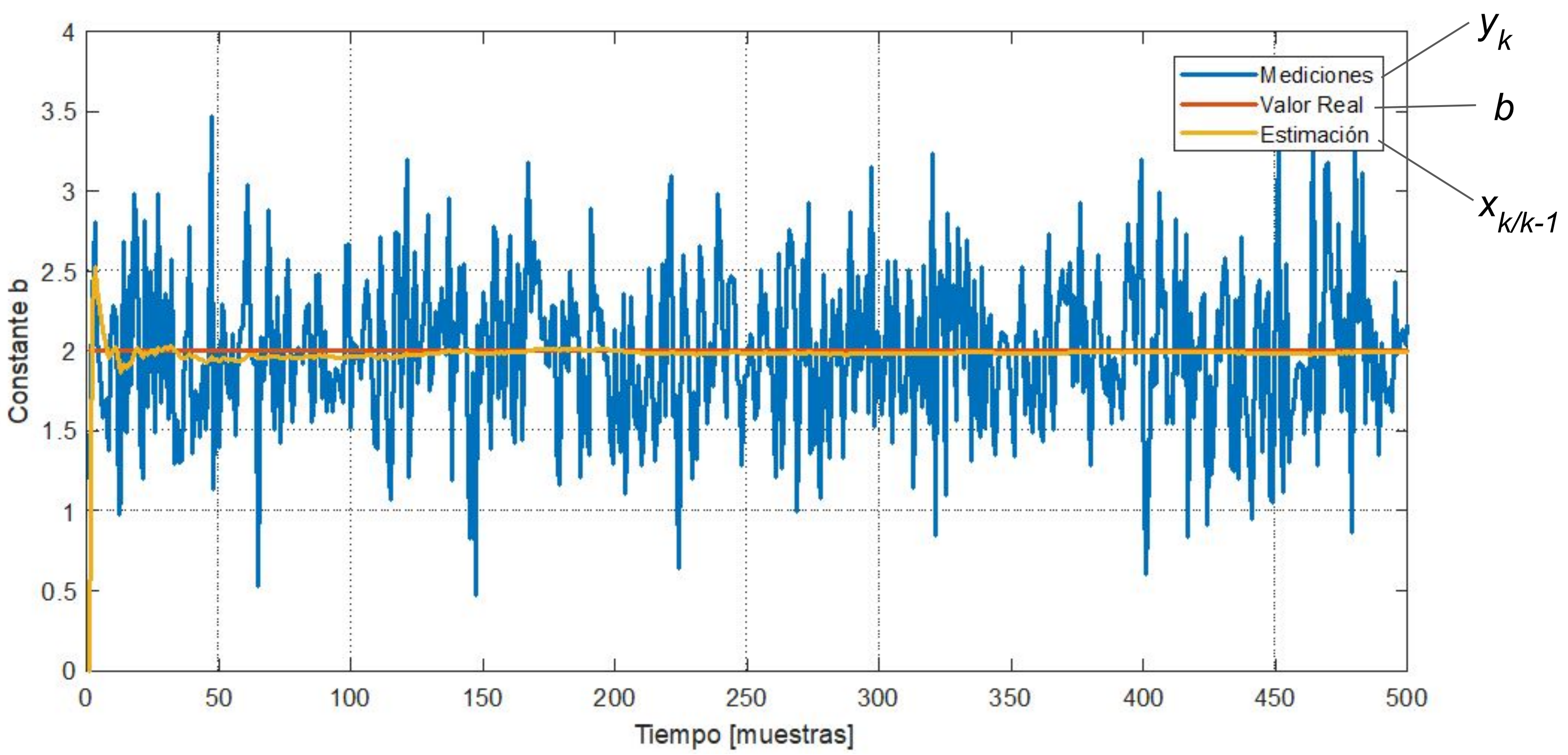
$H = 1$ Matriz de la ecuación de salida

$Q_d = E[v_k v_k^*] = 0$ Covarianza de ruido del proceso (no hay ruido del proceso)

$R = E[w_k w_k^*] = \sigma_w^2 = 0{,}25$ Covarianza de ruido del medición

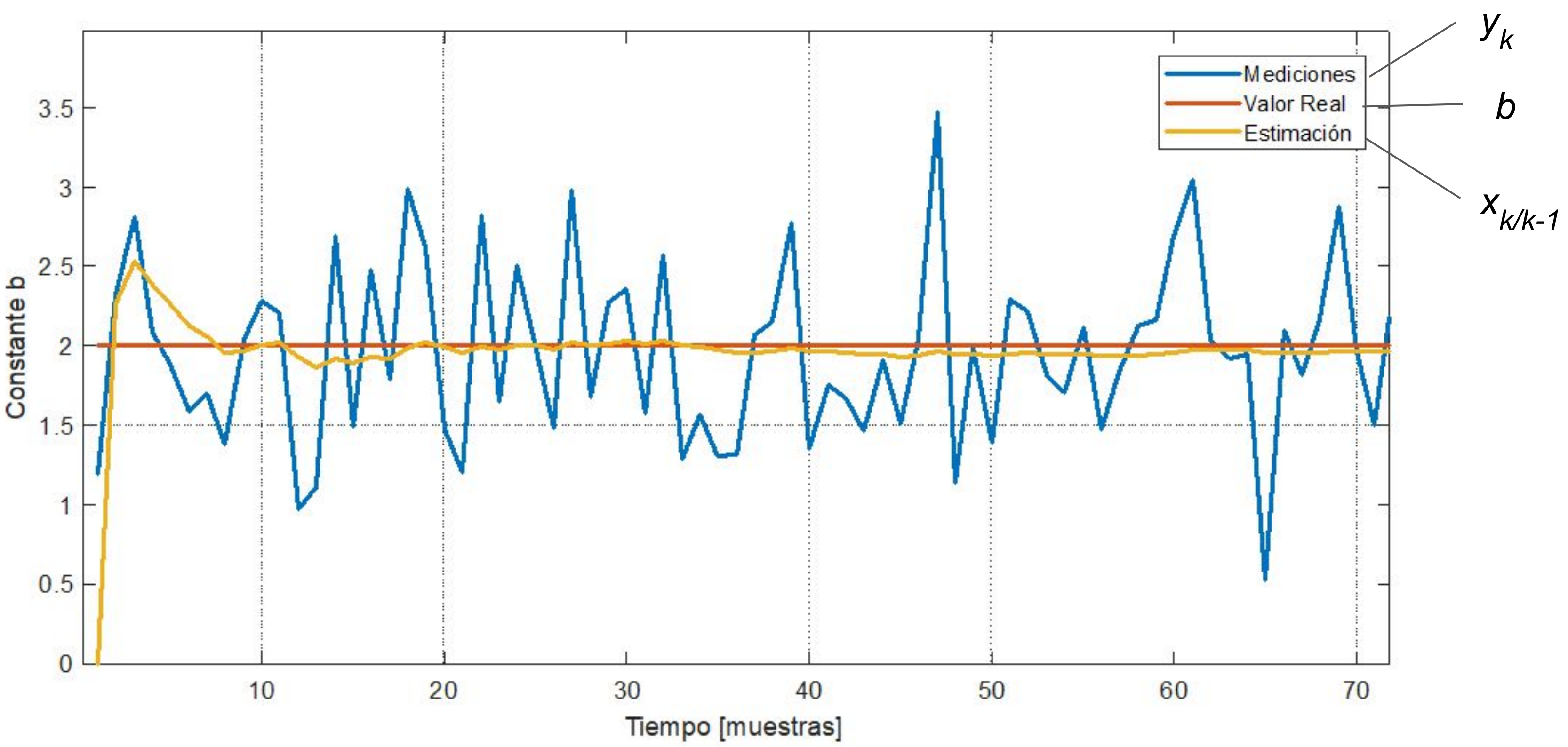
Ejercicio 1

c)



Ejercicio 1

c)



Ejercicio 1

c)

Innovaciones

$$e_k = y_k - H\,\widehat{x}_{k/k-1}$$

$$\hat{r}(\tau)$$

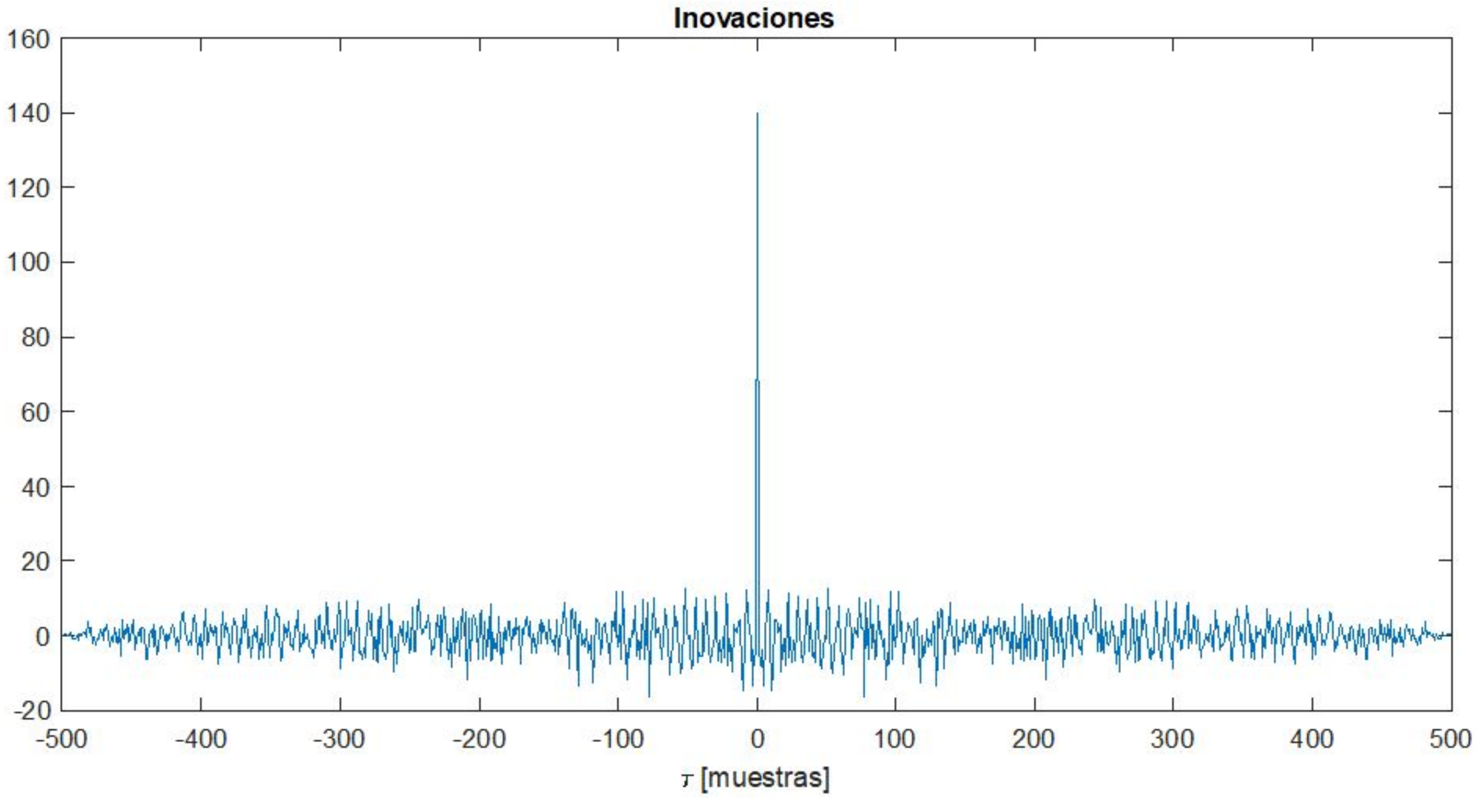
```
r=xcorr(ek)
```

Vemos la autocorrelación

Si las innovaciones son un proceso blanco, cada actualización está aportando nueva información

Ejercicio 1

c)

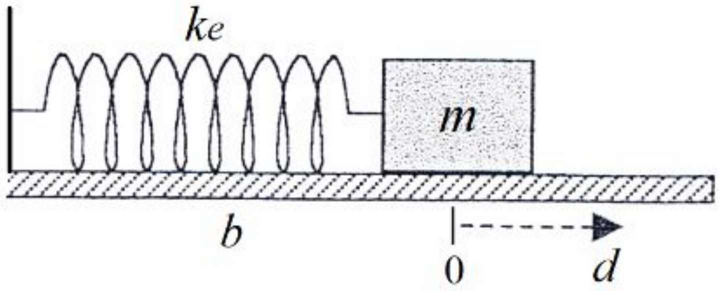


Ejercicio 2

Masa, resorte y amortiguador

Ejercicio 2

Un sistema que responde a un movimiento armónico amortiguado está compuesto por un resorte con constante elástica $k_e = 100$ N/m sujeto a un extremo sólido y otro extremo a una masa de $m = 10$ kg es excitado por una condición inicial que lo hace oscilar horizontalmente. La masa a su vez se desliza por una superficie con coeficiente de rozamiento $b = 10$ kg/s. Asuma el eje d como referencia para la longitud de desplazamiento.



Ejercicio 2

(a) Sea la ecuación diferencial que describe la dinámica de este sistema en tiempo continuo: $m\,a(t) = -k_e\,d(t) - b\,v(t)$ (asumiendo que no hay fuerzas externas). Determine las ecuaciones de estado y la matriz F definiendo el vector de estados $x_1 = v$ y $x_2 = d$ (velocidad y posición).

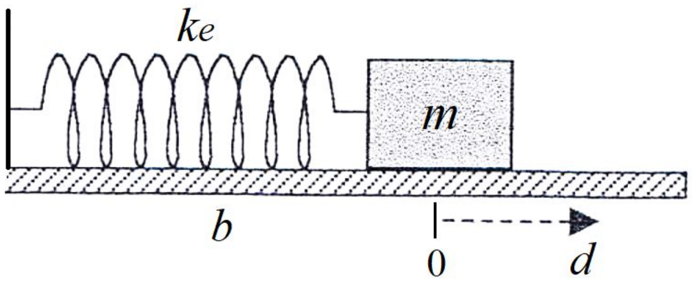
(b) Se toman mediciones de la posición de la masa, con un periodo de muestreo $T = 10$ ms, suponiendo mediciones $y_k = d_k + w_k$, donde $w_k \sim N(0\,;\,0{,}05)$ es el ruido de medición. Determine las matrices de estado de tiempo discreto F_d (considere una aproximación de segundo orden), de observaciones H y de covarianza de ruido de medición R.

(c) Genere las mediciones y_k de posición de la masa utilizando los datos disponibles en el archivo `MRA.mat` en el campus (que incluye los valores de la masa m, coeficiente de fricción b y constante elástica k_e con los que se generaron la posición d y velocidad v reales).

(d) Implemente el filtro de Kalman para estimar el vector de estados suponiendo las siguientes condiciones iniciales $\mathbf{x}_{0/-1} = [0\ 0]^T$ y $P_{0/-1} = \mathrm{diag}\{20,\ 1\}$. Grafique en función del tiempo las mediciones de la posición y_k junto a la posición real d y el estado que la estima. Grafique también la velocidad real junto a su estimación. Por otro lado calcule la autocorrelación de las innovaciones y grafíquela.

Ejercicio 2-a

Sistema de Masa, Resorte y Amortiguador



$$m\,\ddot{d} = -k_e\,d - b\,\dot{d}$$

Ecuación diferencial que modela el sistema (se asumen Fext=0, pero existe una condición inicial aplicada)

Modelo físico

$$m\,a = F_e + F_r$$

$$F_e = -k_e\,d$$

$$F_r = -b\,\dot{d}$$

Ejercicio 2-a

Definición de estados en tiempo continuo

$$m\,\ddot{d} = -k_e\,\underbrace{d}_{x_2} - b\,\underbrace{\dot{d}}_{x_1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = \dot{d} \\ x_2 = d \end{cases}}$$

Ecuación diferencial en función de los estados

$$m\,\dot{x}_1 = -k_e\,x_2 - b\,x_1$$

Ecuaciones de estados en tiempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{k_e}{m}\,x_2 - \frac{b}{m}\,x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

Representación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & -\frac{k_e}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

Ejercicio 2-b

Discretización con periodo T = 10 ms:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = F_d \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k}$$

Supongamos una aproximación de segundo orden para la matriz de transición

$$Fd = e^{FT} \simeq I + FT + \frac{(FT)^2}{2}$$

$$Q_d = 0$$

No asumimos ruido de proceso

Ejercicio 2-b

Ecuación de observaciones

$$y_k = d_k + w_k = x_{2,k} + w_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + w_k$$

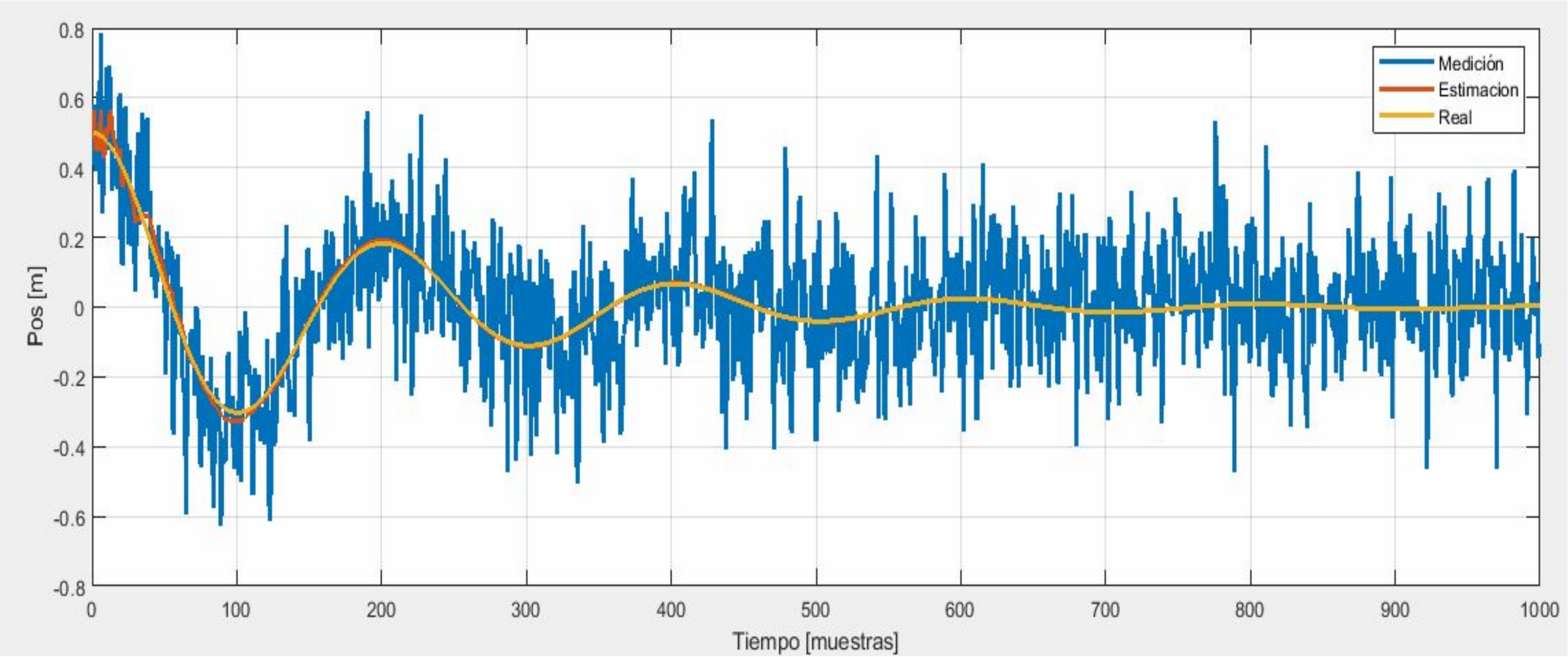
Matriz de salida

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

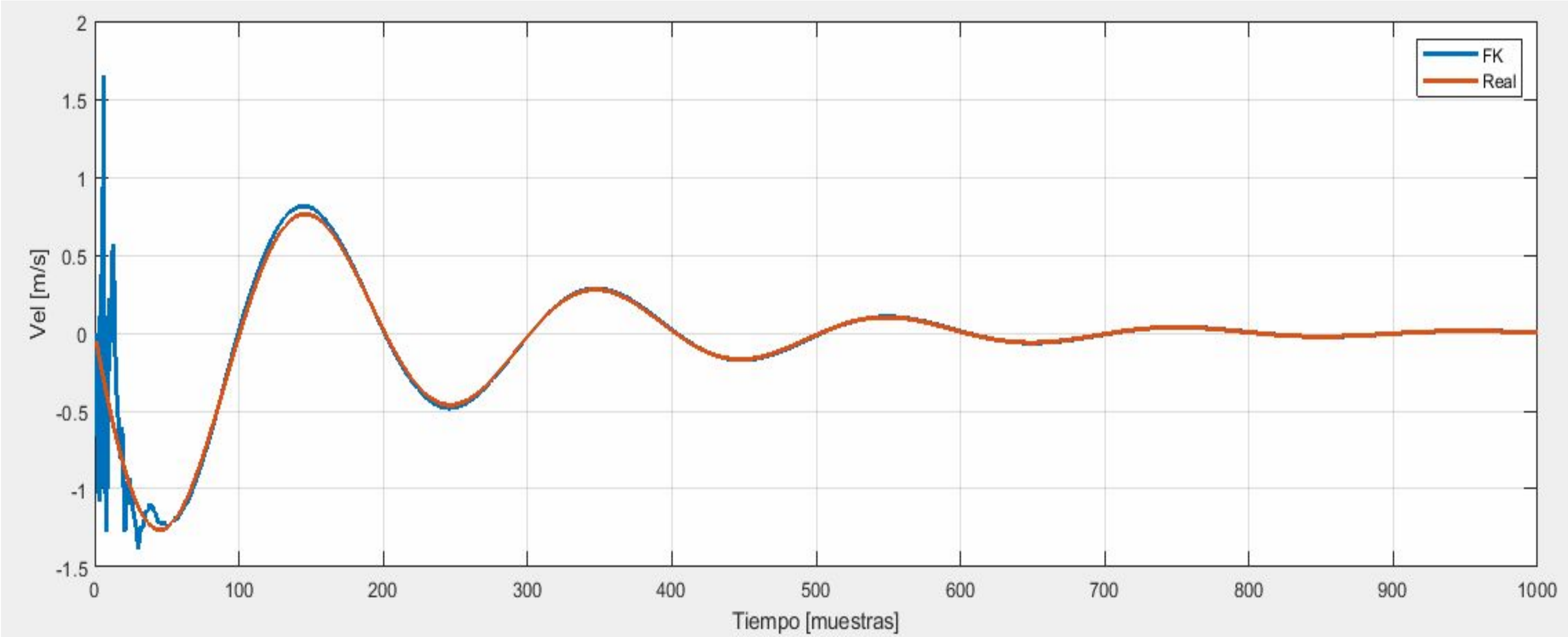
Covarianza del ruido de medición

$$R = \sigma_w^2$$

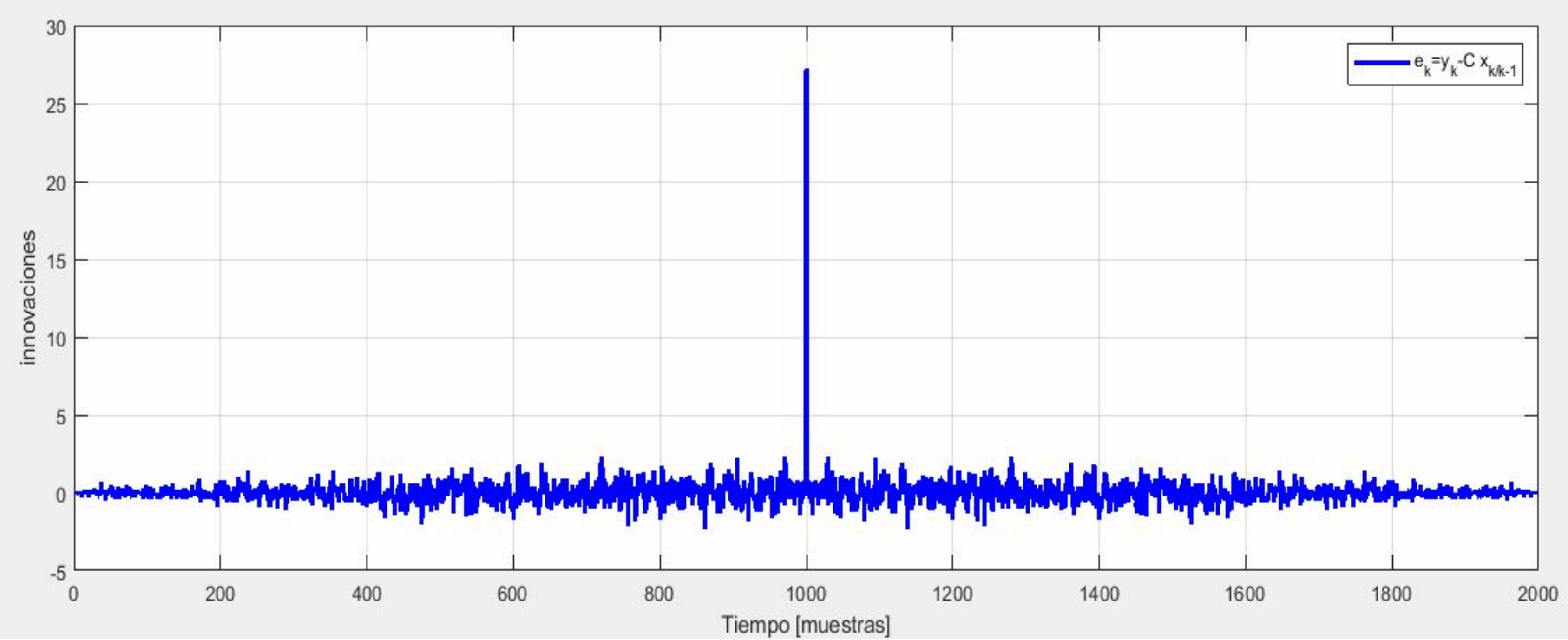
Ejercicio 2-c/d



Ejercicio 2-c/d



Ejercicio 2-c/d



Ejercicio 3

Masa, resorte y amortiguador con errores en el modelo

Ejercicio 3

Para el mismo sistema del Ejercicio 2, suponga que ahora existe un error en el modelo, de manera tal que el coeficiente de fricción supuesto no coincide con el real y es fijado con el valor $b = 18$ kg/s (en lugar de $b = 10$ kg/s). Esto produce un error en el modelo que afecta a una de las componentes de la ecuación de estados. Considere las condiciones iniciales $\mathbf{x}_{0/-1} = [0\ 0]^T$ y $P_{0/-1} = \text{diag}\{20,\ 1\}$ y una varianza $\sigma_w^2 = 0{,}025$ en la medición $y_k = d_k + w_k$.

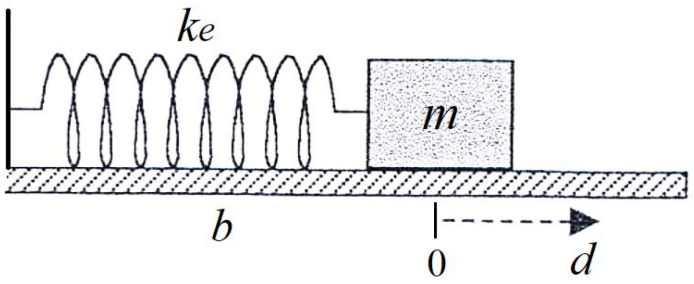
(a) Repita la simulación del Ejercicio 2, suponiendo que confía plenamente en el modelo ($Q = Q_d = 0$), pero utilizando el coeficiente de fricción incorrecto en el modelo de estados. Discretice el sistema y aplique el algoritmo. Observe las respuestas de ambas variables de estado. Grafique también la autocorrelación de las innovaciones.

Ejercicio 3

(b) Repita el punto anterior, pero esta vez admita que existe un error en el modelo, por lo cual se define ahora un ruido de proceso con matriz de covarianza en tiempo discreto $Q_d \simeq QT$ (aproximación), donde Q es la covarianza de proceso de tiempo continuo. Ajuste el valor de la varianza σ_b^2 hasta observar que las variables de estado se ajustan lo mejor posible a los valores reales.

Ejercicio 3-a

Sistema de Masa, Resorte y Amortiguador



$$m\,\ddot{d} = -k_e\,d - b\,\dot{d}$$

Ecuación diferencial que modela el sistema (se asumen Fext=0, pero existe una condición inicial aplicada)

Modelo físico

$$m\,a = F_e + F_r$$

$$F_e = -k_e\,d$$

$$F_r = -b\,\dot{d}$$

Ejercicio 3-a

Ecuación de estados en tiempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{k_e}{m} x_2 - \frac{b}{m} x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

Representación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & -\frac{k_e}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

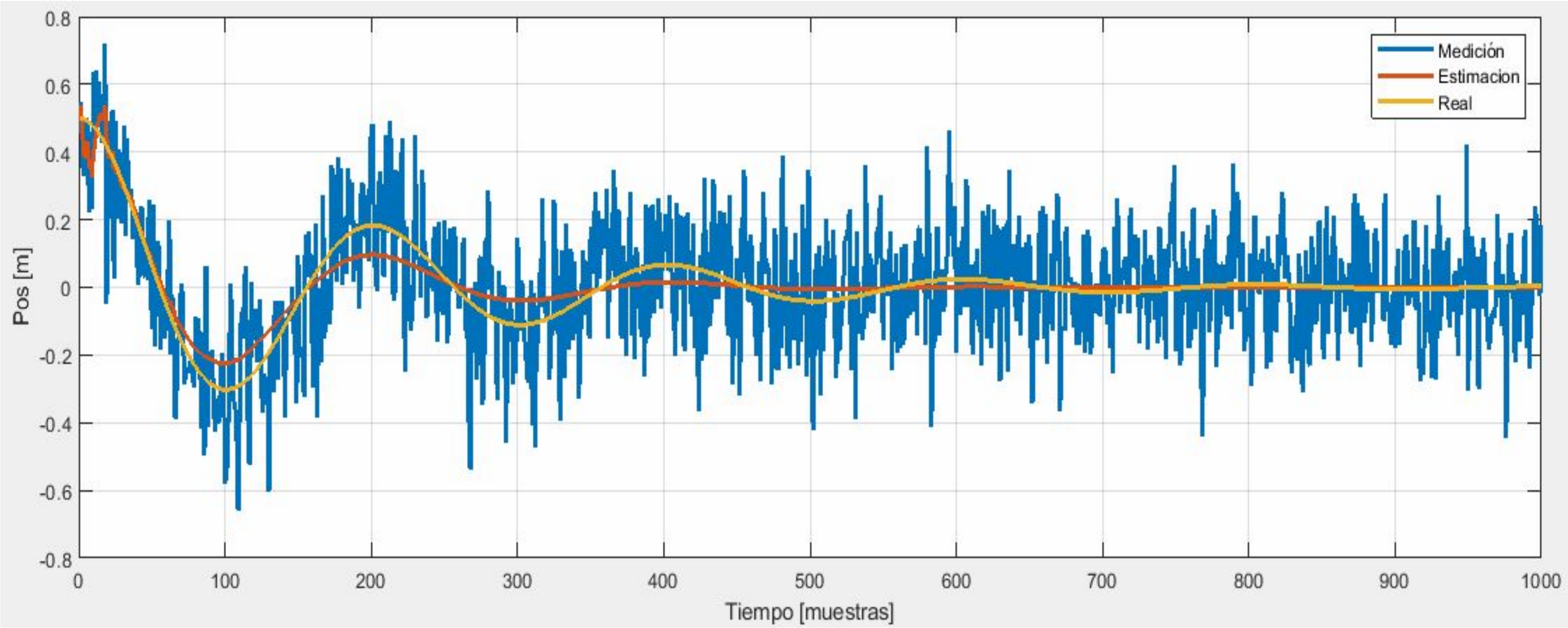
Elegimos confiar en el modelo

Esto implica que Qd = 0

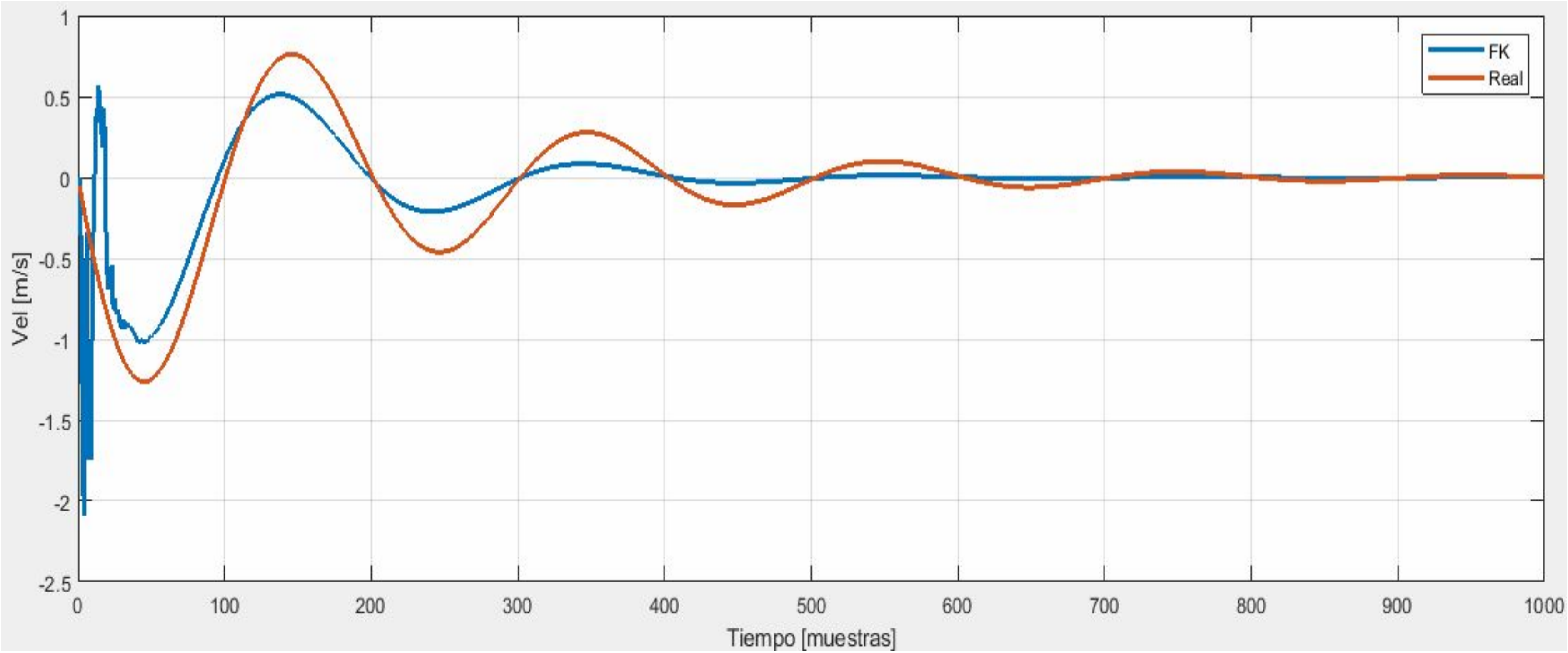
Estamos cometiendo un error al construir la matriz de estados!

- Confiamos en un modelo con **b=18**.
- Pero el valor real es b=10.

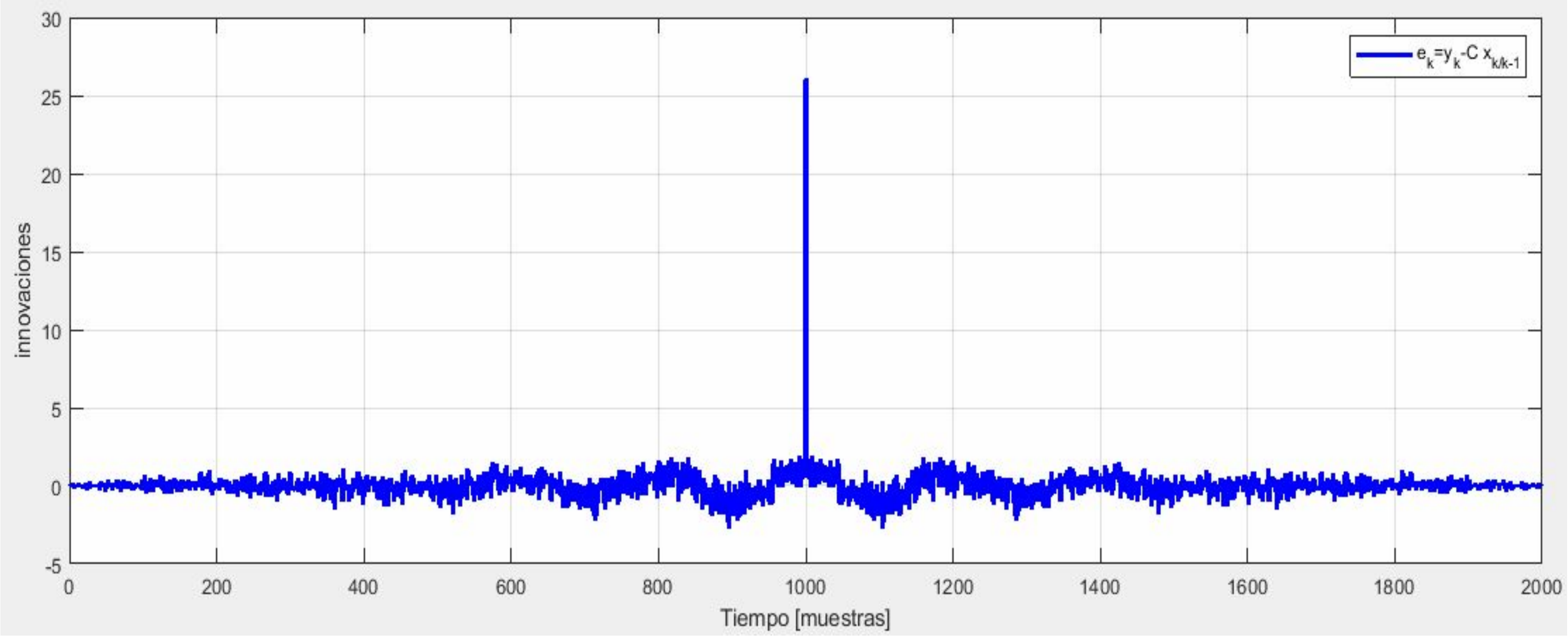
Ejercicio 3-a



Ejercicio 3-a



Ejercicio 3-a



Ejercicio 3-b

Ecuación de estados en tiempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{k_e}{m} x_2 - \frac{b}{m} x_1 + \boxed{\varepsilon_b} \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

Representación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & -\frac{k_e}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\varepsilon_b} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}$$

Asumimos que existe un ruido del proceso debido a un error en el modelo

Ahora tenemos que obtener Qd

Estamos cometiendo un error al construir la matriz de estados!

- En el modelo suponemos que **b=18**.
- Pero el valor real es b=10.

Ejercicio 3-b

$$Q = E\left[\begin{bmatrix}\varepsilon_b \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_b^* & 0\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}\sigma_b^2 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Covarianza del ruido de proceso en tiempo continuo

Se puede demostrar que la covarianza de proceso discreto resulta:

$$Qd = QT + \underbrace{(FQ + QF^H)\frac{T^2}{2} + \ldots}_{\text{despreciamos términos de orden superior}}$$

$$\boxed{Q_d \simeq QT}$$

Podemos suponer esta aproximación (luego debe hacerse un ajuste fino en la varianza del ruido del proceso) para T suficientemente chico en relación a la dinámica.

Ejercicio 3-b

Resumen

Ecuación de estados

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_d\,\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

Matrices de transición de estados

$$Fd = e^{FT} \simeq I + FT + \frac{(FT)^2}{2}$$

Ecuación de observaciones

$$y_k = H\mathbf{x}_k + w_k$$

Matriz de salida

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Covarianza de ruido del proceso

$$Q_d \simeq QT$$

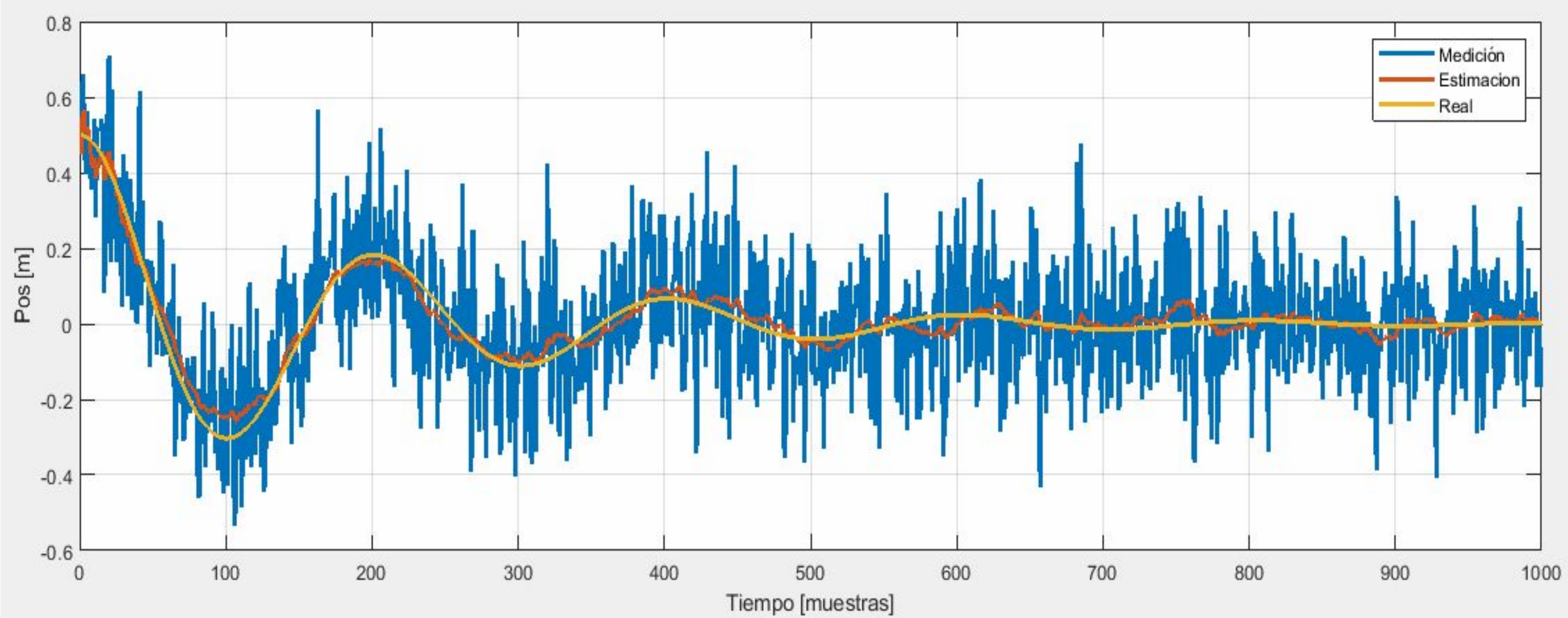
Covarianza de ruido de medición

$$R = \sigma_w^2$$

Ejercicio 3-b

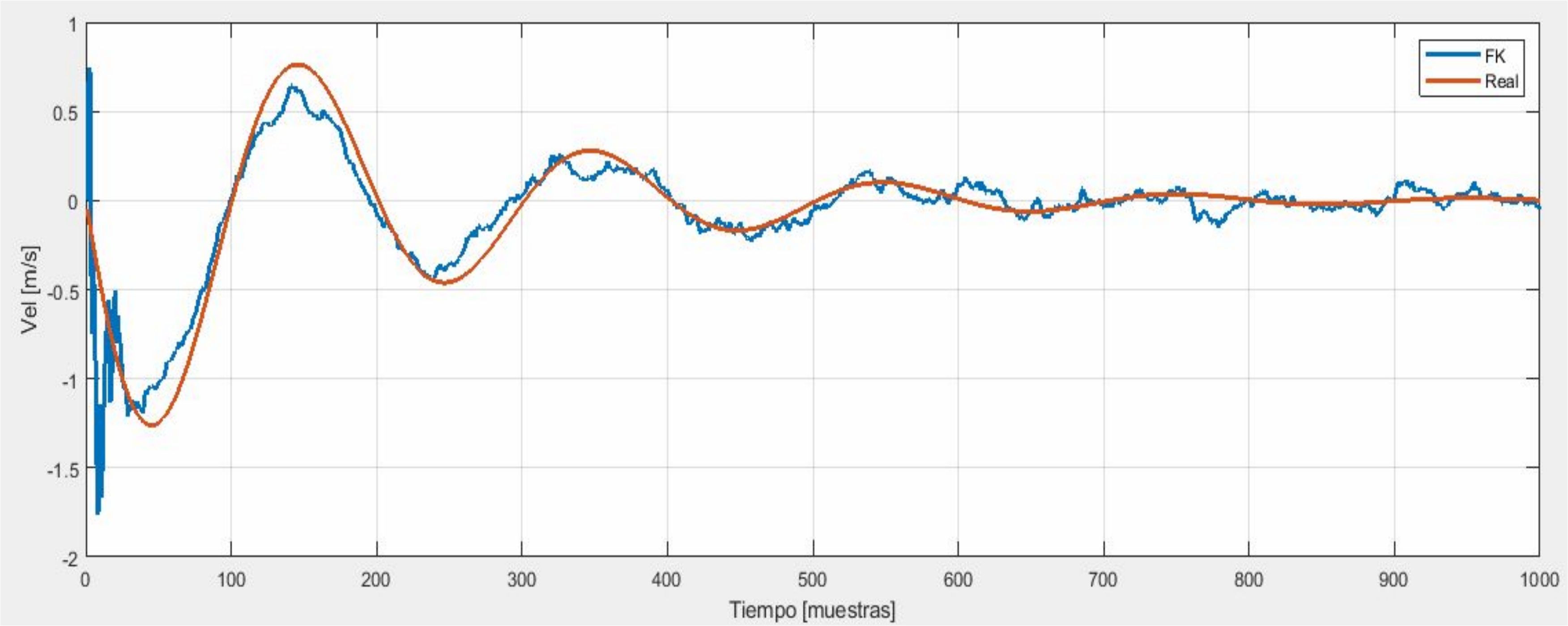
sigma_b2=0.2;

Estimación estado x2 (posición)



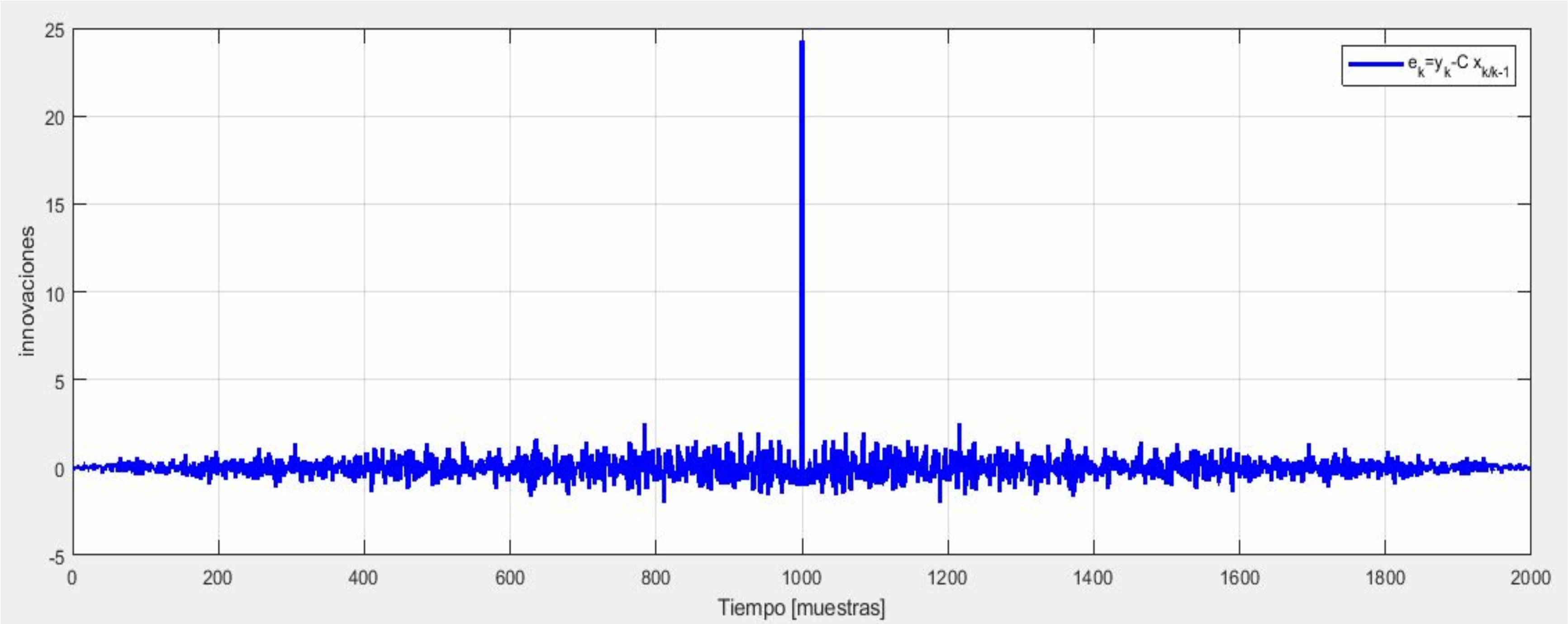
Ejercicio 3-b

Estimación estado x1 (velocidad)



Ejercicio 3-b

Autocorrelación de las innovaciones



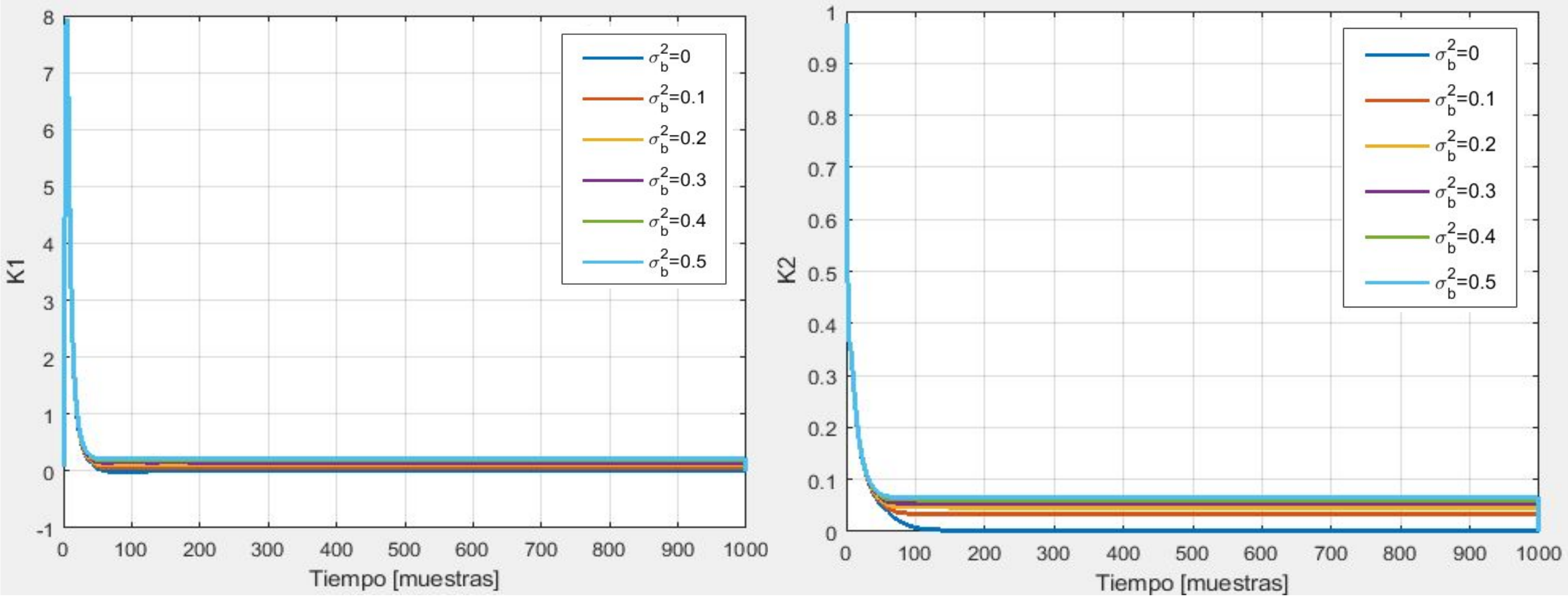
Ejercicio 3

(c) Vuelva a correr el algoritmo utilizando distintas covarianzas Q_d, pero guardando las componentes del vector de ganancia de Kalman ($K = [K_1 \ K_2]^t$) en función del tiempo. Grafique los coeficientes (por separado) parametrizados con distintos valores de varianza $\sigma_b^2 = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ y observe como influye este parámetro en la ganancia del filtro.

Ejercicio 3-c

Ganancia de Kalman en función del tiempo $K_k = (K1,K2)_k$

Varianzas ruido del proceso



Ejercicio 3-c

Ganancia de Kalman en función del tiempo $K_k = (K1,K2)_k$

Varianzas ruido del proceso