Suavizado (ventana fija, en general l = {n-N, … , n+N}-→ l = {0 , … ,M}):

$$R_{xy}(n-l) = \sum_{m=0}^{M} k_{nm} R_y(m-l) \qquad l = 0, \cdots M.$$

$$\mathbf{k}_n = [k_{n0}, \ \cdots \ , \ k_{nM}].$$

$\hat{x}[n] = \mathbf{k}_n \mathbf{y}$ y las ecuaciones normales resultan

$$\mathbf{R}_{x\mathbf{y}}[n] = \mathbf{k}_n \mathbf{R}_{\mathbf{y}}.$$

Filtrado (ventana fija):

$$R_{xy}(n-l) = \sum_{m=n-M}^{n} k_{nm} R_y(m-l) \qquad l = n-M, \cdots n.$$

$$\mathbf{R}_{x\mathbf{y}} = \left[\begin{array}{ccc} R_{xy}(M) & \cdots & R_{xy}(0) \end{array} \right] = \mathbf{R}_{x\mathbf{y}}[M]$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}} = \left[\begin{array}{ccc} R_y(0) & \cdots & R_y(-M) \\ & \ddots & \\ R_y(M) & \cdots & R_y(0) \end{array} \right]$$

$$\mathbf{k}_n = \left[\begin{array}{ccc} k_{n,n-M} & \cdots & k_{n,n} \end{array} \right]$$

Kalman

: Recuerde que las ecuaciones del filtro de Kalman son:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* \left[\mathbf{H}_k \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k \right]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}[k|k] = \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] \right) \qquad \hat{\mathbf{x}}[0|-1] = \bar{\mathbf{x}}_0$$

$$\mathbf{\Sigma}_{k|k} = \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} - \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* \left[\mathbf{H}_k \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k \right]^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} \qquad \mathbf{\Sigma}_{0|-1} = \mathbf{P}_0$$

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}[k|k]$$

$$\mathbf{\Sigma}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \mathbf{\Sigma}_{k|k} \mathbf{F}_k^* + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^*$$

Teorema: Solución estabilizante

Supongamos que $\mathbf{F}$ es estable. Luego, existe una única solución estabilizante Σ si y sólo si $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ es observable y $(\mathbf{F}, \mathbf{G}\mathbf{Q}^{1/2})$ es controlable. Más aún, $\Sigma \geq 0$.

CONT: $rang([\mathrm{G}\ \mathrm{FG}\ \mathrm{F}^2\mathrm{G} \ldots F^{\mathrm{n}-1}\mathrm{G}]) = n$ OBSERV: $rang([HHFHF^2 \ldots HF^{n-1}]^T) = n$

DARE:Discrete-time Algebraic Ricatti Equation

$$\Sigma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^* - \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^* \left(\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{H}\Sigma\mathbf{F}^* + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^* \qquad \text{(DARE)}$$

Ecuación algebraica de Ricatti

- Si $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ es observable y $(\mathbf{F}, \mathbf{G}\mathbf{Q}^{1/2})$ es controlable, el filtro de Kalman asintótico resulta

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = [\mathbf{F} - \Gamma \mathbf{H}]\, \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \Gamma \mathbf{y}(k)$$

es la ec. de un obsv.
obs.LQG

donde

$$\Gamma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^* \left[\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right]^{-1}$$

A menos que este en el infinito esta ganancia no es consstante

y $\Sigma \geq 0$ es la única solución de

$$\Sigma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^* - \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^* \left(\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{H}\Sigma\mathbf{F}^* + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^*$$

$$\Sigma_{k+1|k} = (\mathbf{F}_k - \Gamma_k \mathbf{H}_k)\, \mathbf{Cov}[\tilde{\mathbf{x}}(k), \tilde{\mathbf{x}}(k)]\, (\mathbf{F}_k - \Gamma_k \mathbf{H}_k)^* + [\mathbf{G}_k \quad -\Gamma_k] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_k^* & \mathbf{R}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_k^* \\ -\Gamma_k^* \end{bmatrix}$$

Filtrado adaptativo $0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}}$ $\quad entonces \quad wn --> w_{optimo}$

Filtrado de Wiener utilizando Steepest-descent

Luego de obtener $\mathbf{w}_n$, la siguiente actualización es

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu\left(\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\mathbf{w}_n - \mathbf{R}_{x\mathbf{y}}^*\right) \qquad n = 0, 2, \cdots$$

Algoritmo LMS

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{n+1} &= \mathbf{k}_n - \mu\left(\mathbf{y}[n]e(n)^*\right) \\ &= \mathbf{k}_n - \mu\left[\mathbf{y}[n]\left(\mathbf{k}_n{}^*\mathbf{y}[n] - x(n)\right)^*\right] \end{aligned}$$

NLMS

$$\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{k}_n - \frac{\mu_{norm}}{||\mathbf{y}[n]||^2}\mathbf{y}[n]e(n)^*$$

- Inicializar el algoritmo
  - $\mathbf{P}(0) = \delta^{-1}\mathbb{I}$
  - $\mathbf{w}(0) = 0.$
- Para cada instante n, computar
  - Actualización *a priori*
    Ganancia: $\mathbf{k}(n) = \frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathrm{conj}(\mathbf{y}[n])}{1+\lambda^{-1}\mathbf{y}[n]^t\mathbf{P}(n-1)\mathrm{conj}(\mathbf{y}[n])}$
    Error: $\epsilon(n) = x(n) - \mathbf{w}(n-1)^t\mathbf{y}[n]$
  - Actualización *a posteriori*
    Pesos: $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n)\epsilon(n)$.
    Correlación: $\mathbf{P}(n) = \lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1) - \lambda^{-1}\mathbf{k}(n)\mathbf{y}[n]^t\mathbf{P}(n-1)$
    Estimación: $\hat{x}(n) = \mathbf{w}(n)^t\mathbf{y}[n]$

- $S_{xy}(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_{xy}(l)z^{-l}$ existe.
- $S_y(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_y(l)z^{-l}$ existe y no tiene ceros en el círculo unitario.
- $S_y(z)$ admite la *factorización espectral*

$$S_y(z) = \alpha L(z)L^*(z^{-*})$$

El filtro óptimo resulta:

donde

1. $L(z)$ tiene fase mínima, es decir, sus polos y ceros están dentro del círculo unitario
2. $L(\infty) = 1$, es decir, $L(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} l_i z^{-i}$ $\quad R_{xy}(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} k_l R_y(n-l) \qquad n \geq 0$
3. $\alpha > 0$.

$$K(z) = \frac{1}{L(z)}\left\{\frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})}\right\}_+$$