

# Procesamiento de señales I

86.51

Cecilia G. Galarza

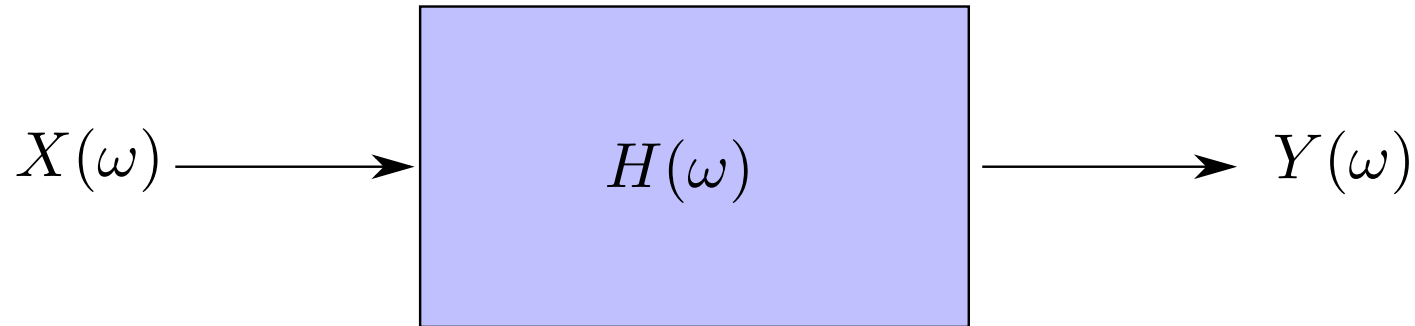
FIUBA

Laboratorio de Procesamiento de Señales y Comunicaciones

2do Cuatrimestre 2022

# Diseño de Filtros Digitales

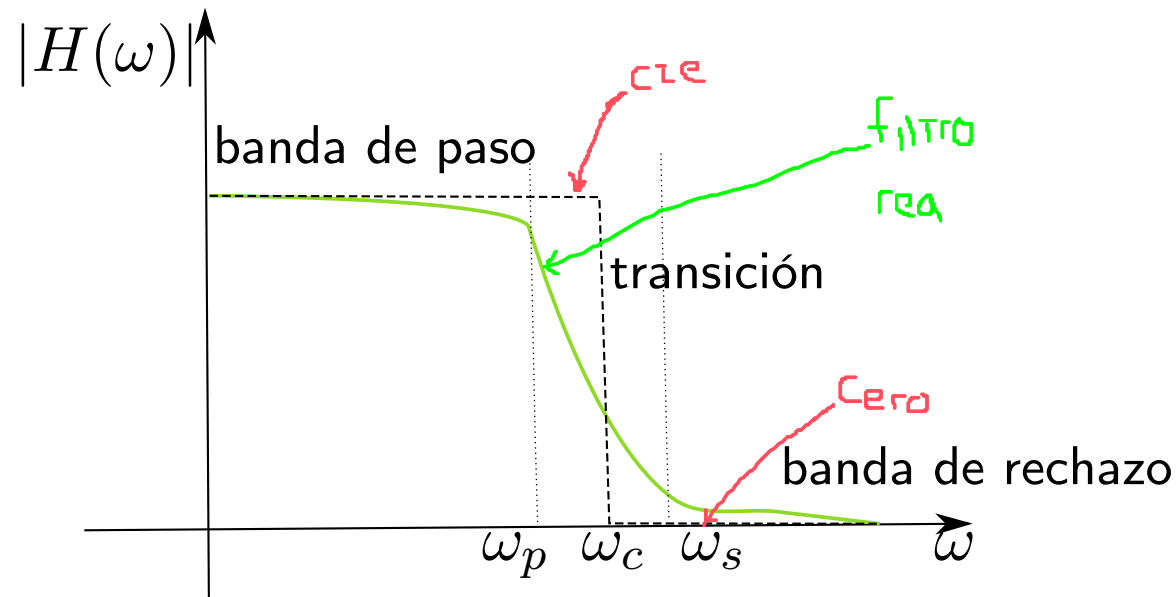
# Introducción



$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

$H$  es un sistema LTI que modifica la descripción espectral de la entrada aplicando una especie de *moldeado* en frecuencia. El filtro LTI está caracterizado por su respuesta en frecuencia,  $H(\omega)$ , o por su respuesta impulsiva,  $h(n)$ .

# Características de $|H(\omega)|$ , módulo del filtro



**Filtro ideal:** ganancia constante en la banda de paso (*passband*), ganancia cero en la banda de rechazo (*stop band*), sin banda de transición ( $\omega_p = \omega_s$ )

- Pasa Alto
- Pasa Bajo
- Pasa Banda

# Características de $\Theta(\omega)$ , fase del filtro

$$\text{Fase: } \Theta(\omega) = \text{Im}[\ln H(\omega)]$$

$$\text{Retardo de grupo: } \tau_g(\omega) = -\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega}$$

- **Filtro con fase lineal:**  $\Theta(\omega) = -\omega n_0$  y  $\tau_g(\omega) = n_0$ .

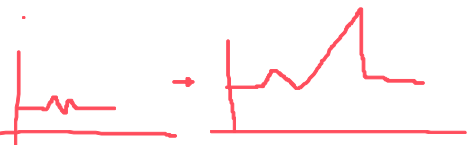
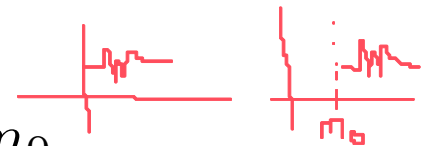
Si  $|H(\omega)| = C$ , entonces,

$$Y(\omega) = CX(\omega)e^{-j\omega n_0} \implies y(n) = Cx(n - n_0)$$

$y(n)$  es una versión escalada y desplazada de  $x(n)$

- **Filtro con fase no-lineal:**  $\tau_g(\omega)$  no es constante.

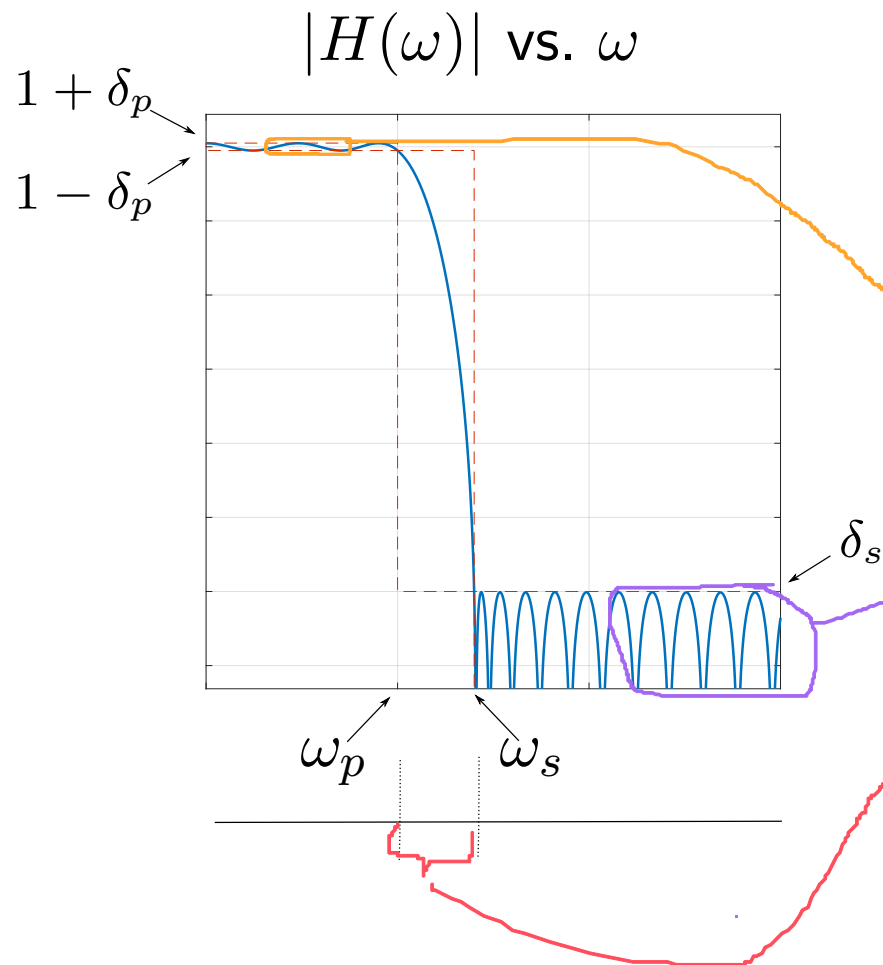
$\tau_g(\omega)$  es el corrimiento que sufre una componente senoidal pura de frecuencia  $\omega$ . Si las componentes frecuenciales de  $x(n)$  se desplazan por intervalos distintos cada una  $\rightarrow$  *distorsión de fase*.



# Pasabajos, Pasaltos, Pasabanda.....

Es posible definir una transformación del plano  $z$  tal que la respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos se transforme en una de un filtro pasaltos o pasabanda. Esta es la razón por la cual, es costumbre desarrollar las técnicas de diseño de filtros pasabajos solamente.

# Especificaciones de un filtro



$\omega_p$ : frecuencia de paso

$\omega_s$ : frecuencia de rechazo

$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$ : frecuencia de corte

Ripple banda pasante:

$$R_p = 10 \log_{10}(1 + \delta_p) \text{ dB}$$

Ripple banda de rechazo:

$$R_s = 10 \log_{10}(\delta_s) \text{ dB}$$

Ancho banda de transición:

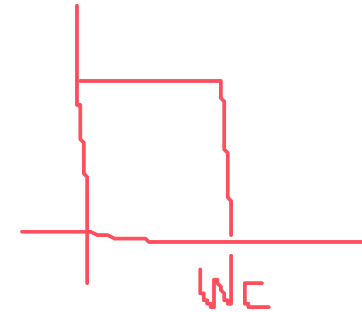
$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$$

Al plantear un diseño, se compromete el valor de estos índices de performance con la complejidad del filtro

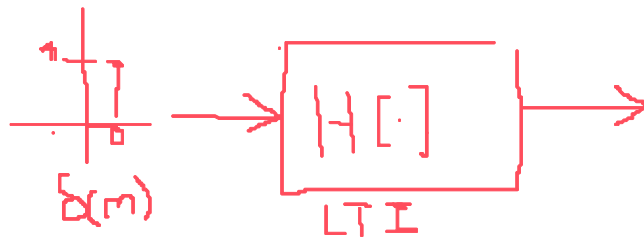
Existe el filtro ideal?

→ NO

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



Respuesta al impulso



↓  $z^{-1}$

$$h(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

$$= \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right),$$

NO CAUSAL  
n ∈ (-∞, +∞)

donde

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

El filtro ideal es un sistema no-causal y de duración infinita



# Causalidad.....

Los sistemas reales en el tiempo son causales. En lo que sigue, vamos a analizar qué restricciones impone sobre los sistemas la causalidad.

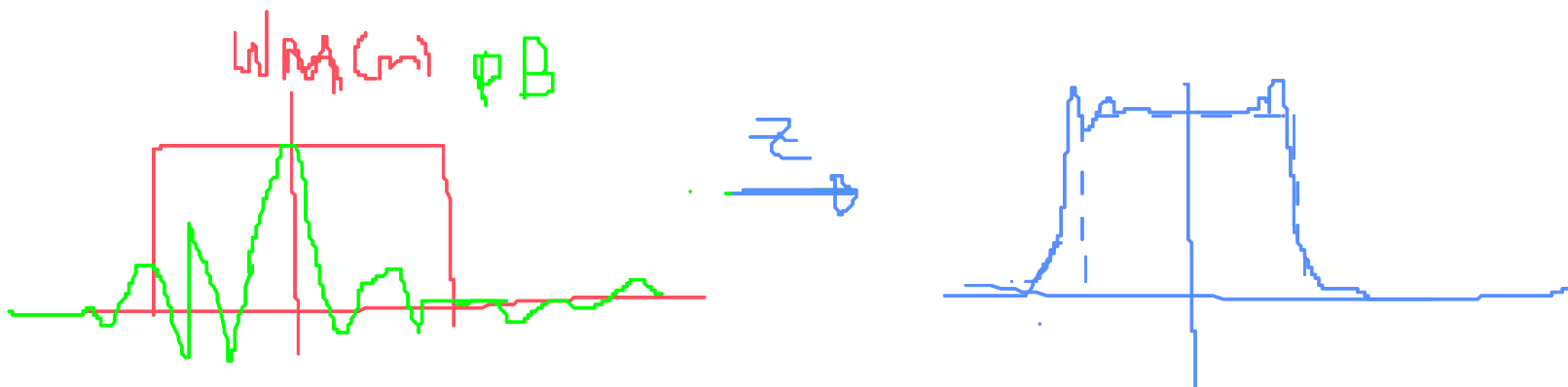
Si un sistema no es de duración finita como el filtro ideal, al aplicar una ventana FIR a  $h(n)$  y luego desplazar el resultado restauro la causalidad.

# Causalidad.....

Los sistemas reales en el tiempo son causales. En lo que sigue, vamos a analizar qué restricciones impone sobre los sistemas la causalidad.

Si un sistema no es de duración finita como el filtro ideal, al aplicar una ventana FIR a  $h(n)$  y luego desplazar el resultado restaura la causalidad. Por ejemplo, si  $M$  es impar, y  $w_M(n)$  es una ventana cuadrada de duración  $M$ , tenemos

$$w_M(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq \frac{M-1}{2} \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \implies W_M(\omega) = \frac{\sin \omega M/2}{\sin \omega/2}.$$



# Causalidad.....

Los sistemas reales en el tiempo son causales. En lo que sigue, vamos a analizar qué restricciones impone sobre los sistemas la causalidad.

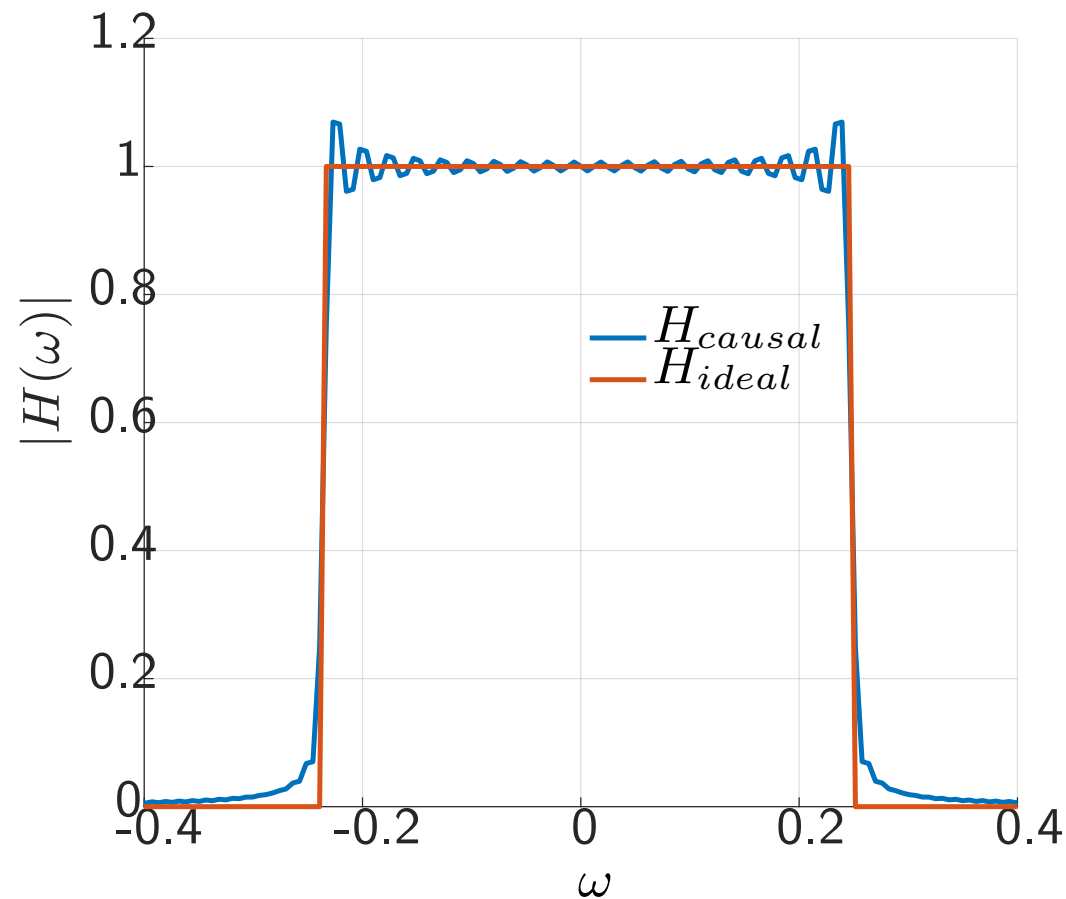
Si un sistema no es de duración finita como el filtro ideal, al aplicar una ventana FIR a  $h(n)$  y luego desplazar el resultado restaura la causalidad. Por ejemplo, si  $M$  es impar, y  $w_M(n)$  es una ventana cuadrada de duración  $M$ , tenemos

$$w_M(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq \frac{M-1}{2} \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \implies W_M(\omega) = \frac{\sin \omega M/2}{\sin \omega/2}.$$

Multiplicando el filtro ideal  $h(n)$  por  $w_M(n)$  y luego desplazando obtenemos:

$$h_{causal}(n) = h\left(n - \frac{M-1}{2}\right) w_M\left(n - \frac{M-1}{2}\right)$$
$$H_{causal}(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}(M-1)} H(\omega) * W_M(\omega)$$

# Causalidad.....



La respuesta en frecuencia del filtro truncado exhibe oscilaciones en los bordes de la banda de paso conocidas como el fenómeno de Gibbs.

# Causalidad.....

Parte real e imaginaria de la respuesta en frecuencia de sistema LTI:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$

# Causalidad.....

Parte real e imaginaria de la respuesta en frecuencia de sistema LTI:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$

Es posible demostrar (ver [2] sección 10.1 ) que para un sistema causal,

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cot \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda \quad (1)$$

# Causalidad.....

Parte real e imaginaria de la respuesta en frecuencia de sistema LTI:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$

Es posible demostrar (ver [2] sección 10.1 ) que para un sistema causal,

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cot \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda \quad (1)$$

Supongamos  $H(\omega) = C \in \mathbb{R}$  para  $|\omega| \leq \omega_p$ . Por simetría hermítica se necesita que

$$H_I(\omega) = 0 \quad \forall \omega.$$

# Causalidad.....

Parte real e imaginaria de la respuesta en frecuencia de sistema LTI:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$

Es posible demostrar (ver [2] sección 10.1 ) que para un sistema causal,

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cot \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda \quad (1)$$

Supongamos  $H(\omega) = C \in \mathbb{R}$  para  $|\omega| \leq \omega_p$ . Por simetría hermítica se necesita que

$$H_I(\omega) = 0 \quad \forall \omega.$$

Por otro lado, de acuerdo a (1),



# Causalidad.....

$$\begin{aligned} H_I(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cot \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_p}^{\omega_p} C \cot \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda + f(\omega, \omega_p) \\ &= -\frac{C}{\pi} \ln \left[ \frac{\sin(\omega - \omega_p)/2}{\sin(\omega + \omega_p)/2} \right] + f(\omega, \omega_p) \end{aligned}$$

→  $H_I(\omega)$  tiene singularidades en  $-\omega_p$  y  $+\omega_p$ .

# Causalidad.....

$$\begin{aligned} H_I(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cot \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_p}^{\omega_p} C \cot \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda + f(\omega, \omega_p) \\ &= -\frac{C}{\pi} \ln \left[ \frac{\sin(\omega - \omega_p)/2}{\sin(\omega + \omega_p)/2} \right] + f(\omega, \omega_p) \end{aligned}$$

→  $H_I(\omega)$  tiene singularidades en  $-\omega_p$  y  $+\omega_p$ .

Si pudiéramos implementar un filtro ideal No sería Causal  
↓

Un sistema causal no puede ser constante en un intervalo de  $\omega$

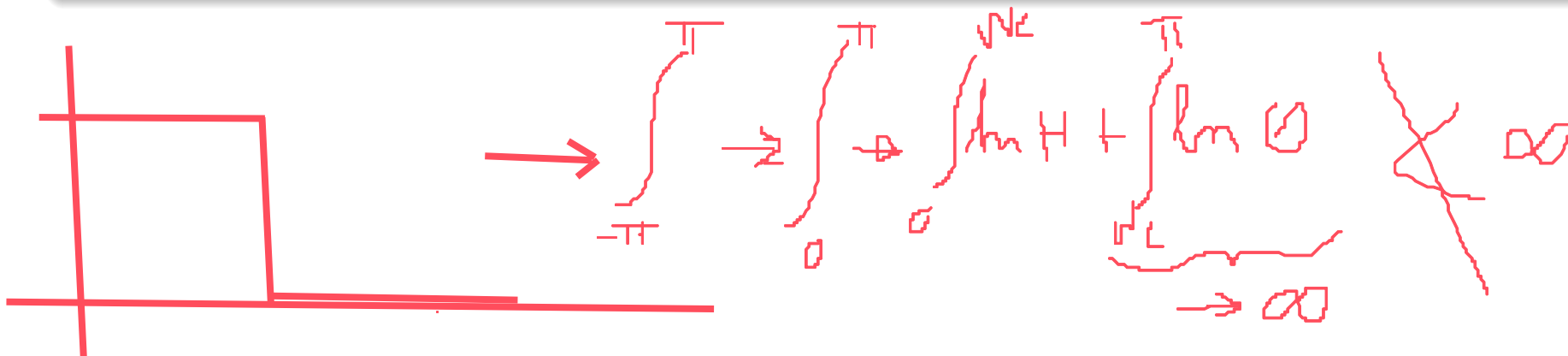
# Causalidad.....

## Teorema de Paley-Wiener

Si  $h(n)$  tiene energía finita y  $h(n) = 0$  para  $n < 0$ , luego  
*estable y causal*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \ln |H(\omega)| \right| d\omega < \infty.$$

Al mismo tiempo, si se cumple esta condición y  $|H(\omega)|$  es cuadrado integrable, entonces es posible encontrar una fase  $\Theta(\omega)$  tal que  $|H(\omega)|e^{j\Theta(\omega)}$  sea la respuesta en frecuencia de un filtro causal.



# Causalidad.....

## Teorema de Paley-Wiener

Si  $h(n)$  tiene energía finita y  $h(n) = 0$  para  $n < 0$ , luego

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \ln |H(\omega)| \right| d\omega < \infty.$$

Al mismo tiempo, si se cumple esta condición y  $|H(\omega)|$  es cuadrado integrable, entonces es posible encontrar una fase  $\Theta(\omega)$  tal que  $|H(\omega)|e^{j\Theta(\omega)}$  sea la respuesta en frecuencia de un filtro causal.

La transferencia de un sistema causal no puede ser nula en todo un intervalo, por más que éste sea finito. Sí se puede anular en un conjunto finito de frecuencias.

# Existe el filtro ideal? I

## Restricciones de la causalidad

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI real y causal debe satisfacer:

- $H(\omega)$  no puede tener un salto discontinuo entre las bandas de paso y de rechazo
- $H(\omega)$  no puede ser constante en un intervalo finito
- $H(\omega)$  no puede ser cero, salvo para un número finito de frecuencias

Luego, el filtro ideal no es implementable por sistemas reales.

# Existe el filtro ideal? II

## Replanteo del ideal

Dado que el filtro ideal planteado al principio no se puede implementar, queremos encontrar el filtro que tenga máxima concentración espectral en la banda de paso. Es decir, buscamos un sistema  $h(n)$  tal que :

$$\max_{h(n)} \int_{-\omega_p}^{+\omega_p} |H(\omega)|^2 d\omega \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \int_{-\pi}^{+\pi} |H(\omega)|^2 d\omega = 1 \\ h(n) = 0 \quad |n| \geq M \end{cases}$$

La solución a este problema es la secuencia conocida como *Discrete Prolate Spheroidal Sequence* (DPSS). Para obtener esta secuencia, se resuelve un problema de autovalores y autovectores. Éste es un problema complejo en su implementación. Para diseñar un filtro, vamos a analizar otras alternativas.

# Diseño de filtros

## Primera pregunta: FIR o IIR?

- IIR tiene mayor atenuación en banda de rechazo para la misma cantidad de coeficientes del filtro *mas eficiente*
- Un IIR requiere menos polos que el FIR para performance equivalente
- La implementación de un IIR es más sensible a errores de precisión finita
- **FIR** puede tener fase lineal, evitando distorsión de fase

# Diseño de filtros

## Primera pregunta: FIR o IIR?


- IIR tiene mayor atenuación en banda de rechazo para la misma cantidad de coeficientes del filtro
- Un IIR requiere menos polos que el FIR para performance equivalente
- La implementación de un IIR es más sensible a errores de precisión finita
- **FIR puede tener fase lineal, evitando distorsión de fase**


Qué tipo de filtro implementar es una decisión de diseño que depende del problema entre manos. En general, se puede decir que un filtro IIR tiene una representación más eficiente, pero un FIR de fase lineal es la solución preferida cuando se necesita evitar la distorsión de fase.



# Un poco de repaso de S&S

- FIR: Respuesta impulsiva finita, de largo  $M$ :  $h(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, M - 1$
- 2 posibilidades de largo:  $M$  par o impar
- 2 posibilidades de simetría

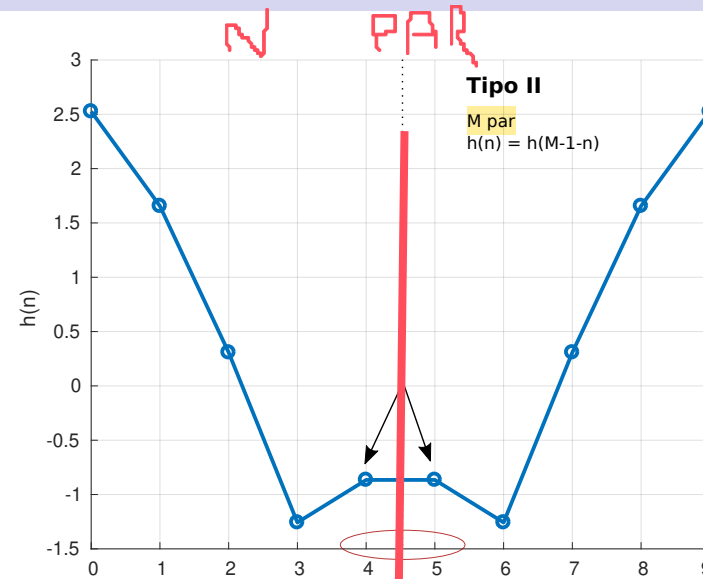
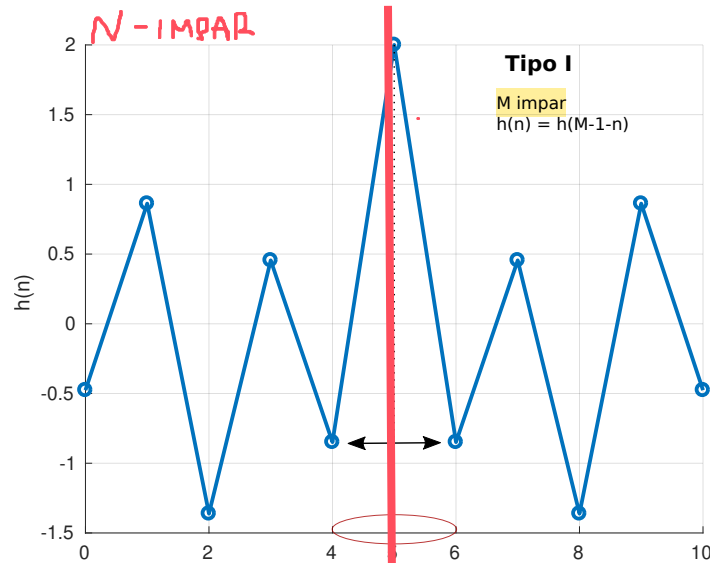
  $h(n) = h(M - 1 - n)$       filtro simétrico

  $h(n) = -h(M - 1 - n)$       filtro antisimétrico

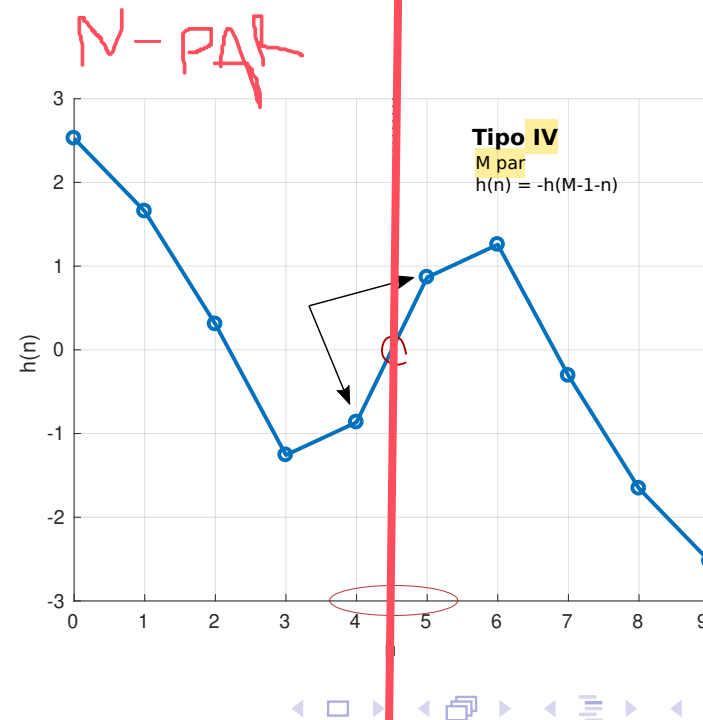
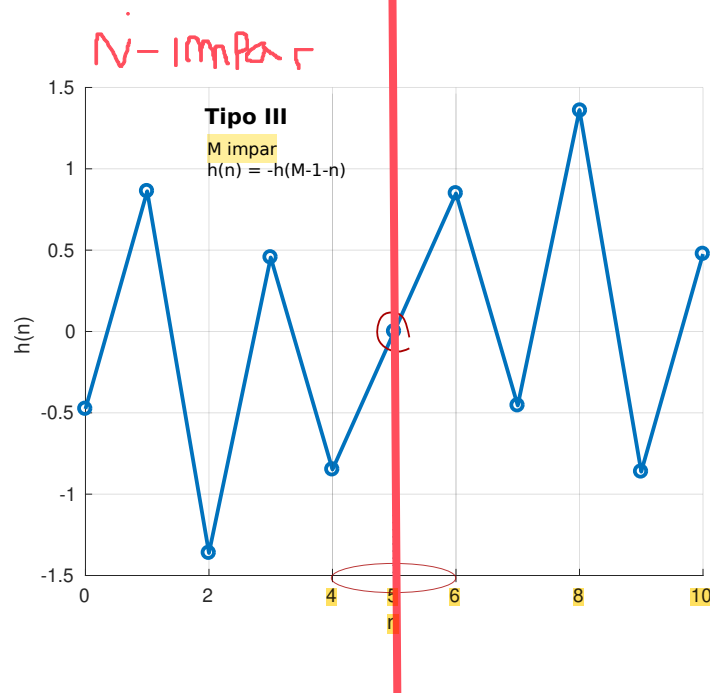
OJO!!!!!!No todo FIR tiene propiedades de simetría!!!!

# Filtros de Fase Lineal

SIM



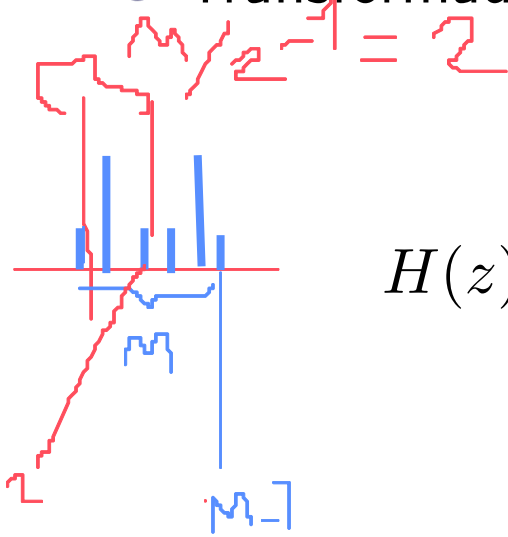
ANT-SIM



# Un poco de repaso de S&S

Tipo 2

- Transformada  $z$  (ej:  $M$  par, filtro simétrico):



$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{M-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{M}{2}}^{M-1} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \left[ z^{-n} + z^{-(M-1-n)} \right] \\ &= z^{-\left(\frac{M-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \left[ z^{\left(\frac{M-1}{2}-n\right)} + z^{-\left(\frac{M-1}{2}-n\right)} \right] \end{aligned}$$

# Un poco de repaso de S&S

- Transformada de Fourier (DFT) (ej: M par, filtro simétrico):

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H(z)|_{z=e^{j\omega}} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \left[ e^{j\omega(\frac{M-1}{2}-n)} + e^{-j\omega(\frac{M-1}{2}-n)} \right] \right\} e^{-j\omega(\frac{M-1}{2})} \\ &= 2 \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \cos \left[ \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right) \right] \right\} e^{-j\omega(\frac{M-1}{2})} \end{aligned}$$

# Filtros de Fase Lineal Generalizada

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-j(\omega \frac{M-1}{2} + \phi)}$$

- $A(\omega) \in \mathbb{R}$ , es a veces llamada la 'amplitud' del filtro. (OJO!!  $A(\omega)$  puede ser negativo. )
- $\phi$  es un desfase constante que depende si el filtro es simétrico o antisimétrico.

# Filtros de Fase Lineal Generalizada

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-j(\omega \frac{M-1}{2} + \phi)}$$

	$M$ impar	$M$ par
sim	<p>Tipo I:</p> $A(\omega) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n) \cos \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right)$ $\phi = 0$	<p>Tipo II:</p> $A(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \cos \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right)$ $\phi = 0$
asim	<p>Tipo III:</p> $A(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n) \sin \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right)$ $\phi = \frac{\pi}{2}$	<p>Tipo IV:</p> $A(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \sin \omega \left( \frac{M-1}{2} - n \right)$ $\phi = \frac{\pi}{2}$

# Ejercicios

## Ej. 1

Considere 3 filtros FIR ,  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  y  $H_3(z)$ , cada uno de largo  $N_1$  ,  $N_2$  , y  $N_3 = N_1 + N_2$  . En particular,  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$  son filtros simétricos (Tipo I o II). Considere la transferencia combinada

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) + H_3(z)$$

Determine cuáles son las condiciones sobre  $H_3$  para que  $H(z)$  tenga fase lineal generalizada.



## Ej. 2

Suponga que tenemos un filtro  $h(n)$ , FIR simétrico de largo  $M$  impar (Tipo I). A partir de este filtro, se diseña uno nuevo

$$g(n) = (-1)^n h(n)$$

- 1 Qué tipo de filtro es  $G(z)$ ?
- 2 Conociendo las frecuencias  $\omega_p$ ,  $\omega_s$  de  $h(n)$ , determine cuál es la banda de transición de  $G(\omega)$ .
- 3 Conociendo  $\delta_p$  y  $\delta_s$ , los ripples de  $h(n)$  en sus bandas de paso y de atenuación, determine cómo son los ripples en las bandas de  $g(n)$ .

## Ej. 3

Se desea diseñar un filtro "peine" que se anule en todos los armónicos  $\omega_k = k\frac{\pi}{8}$ .

- 1 Determine el mínimo orden de un filtro FIR de fase lineal generalizada que permita cumplir con la consigna
- 2 Obtenga la respuesta impulsiva del filtro