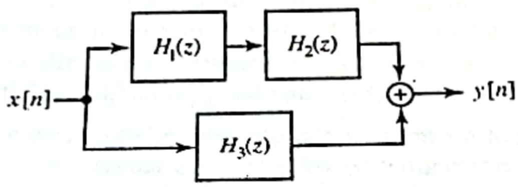
Brian Alex Fuentes Acuna
101785

Parcial - 25/10/2022

Procesamiento de señales

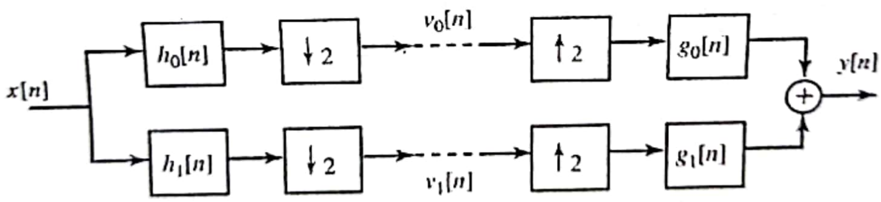
Problema 1 (teórico)

Suponga un filtro $H(\omega)$ que se obtiene a partir de la combinación de tres filtros FLG, $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$ y $H_3(\omega)$, como se indica en la figura. Cada filtro posee funciones amplitud $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ y $A_3(\omega)$, órdenes N_1, N_2 y N_3, y fases iniciales ϕ_{01}, ϕ_{02} y ϕ_{03}, respectivamente. ¿Qué relaciones se deben satisfacer entre los parámetros de los filtros para que el sistema completo se comporte como un filtro FLG con respuesta en frecuencia $H(\omega) = A(\omega)e^{j(-\omega\frac{N}{2}+\phi_0)}$? Si $H_1(z)$ es tipo IV de orden $N_1 = 5$ y $h_2(n)$ tiene una respuesta simétrica con 7 muestras de largo. ¿Cuál es el orden y tipo de filtro de $H(\omega)$?



Problema 2 (teórico)

Sea un banco de filtros QMF como el que se muestra en la figura.



Encuentre $H_0(z)$, $H_1(z)$, $F_0(z)$ y $F_1(z)$ para que se cumplan las condiciones de aliasing cero y reconstrucción perfecta. Para ello se sabe que la siguiente respuesta impulsiva pertenece a alguno de los filtros. Justifique cuál podría tener esa respuesta y a partir de éste encuentre los restantes filtros. Grafique las respuestas impulsivas de cada uno y determine la expresión de la transferencia total $T(z)$.

Problema 3 (simulación)

Sea una señal dada por el archivo x.mat. Se sabe que dicha señal responde a un modelo de senoides en ruido que cumple:

$$x(n) = \sum_{i=1}^{K} a_i e^{j(\omega_i n + \phi_i)} + v(n)$$

donde $\phi_i \sim U(-\pi, \pi)$ y $v(n)$ ruido blanco gaussiano de media nula.

Se quieren determinar las componentes de frecuencias ω_i a partir de la señal medida.

(a) Dado que no se conoce la cantidad K de componentes de frecuencia presentes en $x(n)$, implemente un código en maltab/octave para determinar este parámetro utilizando la señal disponible. Justifique la elección en base a los resultados observados.

(b) Asumiendo como dato el valor de K obtenido en el punto anterior, estime las componentes de frecuencia $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K$ con el método ESPRIT utilizando toda la información disponible. Para ello, defina los parámetros necesarios tal que, sin desperdiciar recursos computacionales, el error no sea mayor al 1 % en todas las estimaciones (suponga que, solo a los fines de medir la performance, conoce el valor de algunas de las frecuencias verdaderas: 0,45π.. 0,54π.. 0,1035π, ¿qué valor teórico asumiría para las restantes?).

Nota: el código del ejercicio debe enviarse por mail en un archivo .m (o copiado a través de un pendrive). Las respuestas conceptuales o deducciones que sean necesarias deben entregarse en papel con el resto del examen.

Alumno: Brian ~~ale~~ fuentes Acuña.
Padrón: 107283

9 $\frac{50}{}$

#1

(1)

$$H_1(\omega) = A_1(\omega) e^{-j(\omega \frac{M_1-1}{2} + \phi_1)}$$
$$H_2(\omega) = A_2(\omega) e^{-j(\omega \frac{M_2-1}{2} + \phi_2}$$
$$H_3(\omega) = A_3(\omega) e^{-j(\omega \frac{M_3-1}{2} + \phi_3}$$

Según la figura $Y(\omega) = \overbrace{[H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) + H_3(\omega)]}^{H(\omega)} X(\omega)$

para poder ser FLG, ~~[illegible]~~ debe cumplir que $\tau_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \text{cte.}$

de esa manera no habrá deformación de la señal

Además se sé que H_1, H_2 y H_3 son ~~[illegible]~~ FIR por lo que:

$$\boxed{H(\omega) = A_1(\omega) e^{-j(\omega \frac{N_1}{2} + \phi_1)} \cdot A_2(\omega) e^{-j(\omega \frac{N_2}{2} + \phi_2)} + A_3(\omega) e^{-j(\omega \frac{N_3}{2} + \phi_3)}}$$
$$= A_1(\omega) A_2(\omega) e^{-j(\omega \frac{N_1+N_2}{2} + \phi_1 + \phi_2)} + A_3(\omega) e^{-j(\omega \frac{N_3}{2} + \phi_3)}$$

- Primero $N_3 = N_1 + N_2$
- Si H_3 es tipo III ó IV entonces H_1 ó H_2 deberá ser tipo III ó IV
- Si H_3 es tipo I ó II entonces H_1 ó H_2 debe ser una combinación tal que $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2 = \emptyset$ (en general $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$)
- también $A_1(\omega) A_2(\omega) + A_3(\omega)$ será $A(\omega) \in H(\omega)$ (el total)

- $N_1 = 5$, tipo IV ($\phi_1 = \pi/2$)
  $h_2(n)$: simétrica $M = 7$

$\theta(H(\omega))$?

$\hookrightarrow H_1(\omega) = A_1(\omega) e^{-j(\omega \frac{N_1}{2} + \pi/2)}$ ← Tipo IV ($N_1 = 5$)

$H_2(\omega) = A_1(\omega) e^{-j(\omega \frac{N_2}{2} + \emptyset)}$ ← simétrica → tipo I ($N_2 = 6$)

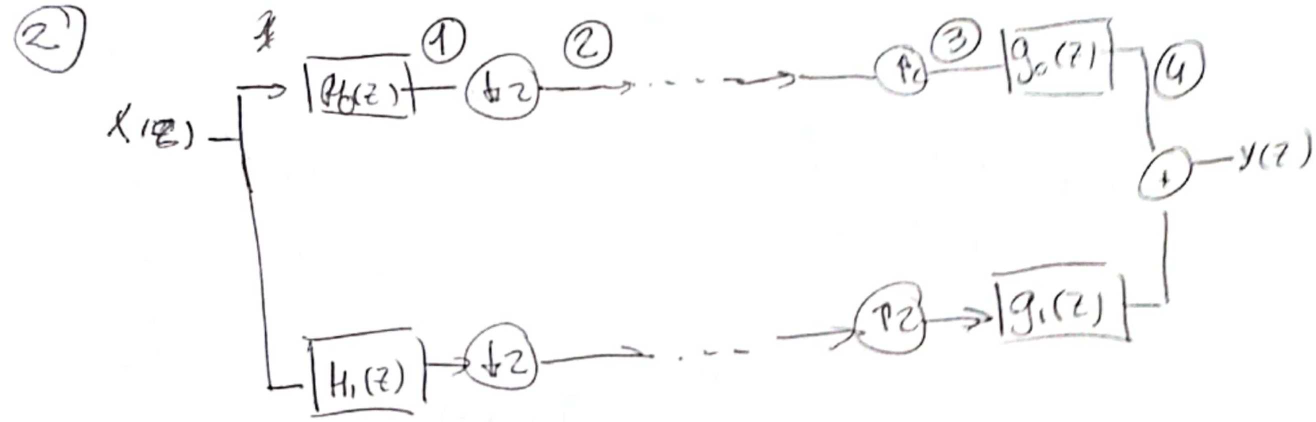
$\hookrightarrow H_3$ debe ser antisimétrica con $N = 11$ y $\phi_3 = \frac{\pi}{2}$, impar

$H_3(\omega) = A_3(\omega) e^{-j(\omega \frac{11}{2} + \pi/2)}$ → tipo IV

$$\Rightarrow H(\omega) = (A_1(\omega) A_2(\omega) + A_3(\omega)) e^{-j(\omega \frac{N}{2} + \pi/2)}$$ ($N = 11$)

→ tipo IV
Antisimétrica
$N = 11$, $\phi = \pi/2$

②



• $X \to \boxed{H(z)} \to Y$ • $X(z) \to (\downarrow M) \to Y(z)$ • $X(z) \to (\uparrow M) \to Y(z)$

$Y = H(z)\,X(z)$ $\quad Y(z) = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^{l})$ $\quad Y(z) = X(z^{M})$

$W_M = e^{-j2\pi/M}$

en la interpolación no hay pérdida de energía

Se hará la deducción partiendo de que $\boxed{M=2}$

• ① $H_0(z)\,X(z)$ como la decimación es escala en función de la pérdida de energía

• ② $\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{1} H_0(z^{1/2}e^{-j\pi l}) \cdot X(z^{1/2}e^{-j\pi l})$

• ③ $\frac{1}{2}\left[\sum_{m=0}^{1} H_0(z e^{-j\pi l})\,X(z e^{-j\pi l})\right]$

$= \frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)\right]$

aparece un término de aliasing

¡error, era $G_0(z)$ y $G_1(z)$ (sigo con esta notación)

④ $Y_1(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)\right]F_0(z)$

análogamente

$Y_2(z) = \frac{1}{2}\left[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)\right]F_1(z)$

$\hookrightarrow Y(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z)F_0(z) + H_0(-z)X(-z)F_0(z) + H_1(z)X(z)F_1(z) + H_1(z)X(-z)F_1(z)\right.$

se quiere despejar $X(z)$, es lo que importa, la señal y $X(-z)$ el aliasing

$$Y(z) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)\right)}_{T(z)}X(z) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)\right)}_{A(z)}X(-z)$$

donde $T(z)$ es la transferencia de mi señal #2
y $A(z)$ es parte de la "transferencia" del alias
entonces para eliminar el aliasing en la señal $Y(z)$
necesito $A(z)=0$ $\rightarrow H_0(-z)F_0(z)=-H_1(-z)F_1(z)$

$$\Rightarrow A(z)=\frac{1}{2}\left(H_0(-z)F_0(z)+H_1(-z)F_1(z)\right)=0$$

en QMF se pide como condición que H_1 sea obtenido a partir de H_0
entonces ~~para cumplir~~ $H_0(+z) \neq H_1(z)$

por lo que $\begin{cases} F_0(z)=+H_1(-z) \\ F_1(z)=-H_0(-z) \end{cases}$, así se elimina el aliasing

- luego para el término $T(z)$ hay q' pensar en una descomposición en polifase:

$$\rightarrow H_0(z)\overset{M=2}{=}P_0(z^2)+z^{-1}P_1(z^2) \quad ; \quad \overset{\text{condición}}{H_1(z)=H_0(-z)}$$

$$T(z)=\frac{1}{2}\left[H_0(z)\overset{+H_0(z)}{F_0(z)}+\overset{H_0(-z)\cdot -H_0(-z)}{H_1(z)F_1(z)}\right]=\frac{1}{2}\left(H_0^2(z)-H_0^2(-z)\right)$$

propiedad
$\hookrightarrow (a+b)(a-b)=a^2+ba-ab-b^2 \quad (a^2-b^2)$

- $T(z)=\frac{1}{2}\left[\left(H_0(z)+H_0(-z)\right)\left(H_0(z)-H_0(-z)\right)\right]$

poli
$$\overset{!}{=}\frac{1}{2}\left[\left(P_0+\cancel{z^{-1}P_1}+P_0-\cancel{z^{-1}P_1}\right)\left(\cancel{P_0}+z^{-1}P_1-\cancel{P_0}+z^{-1}P_1\right)\right]=\frac{1}{2}\left(2\cdot P_0(z^2)\cdot 2P_1(z^2)z^{-1}\right)$$

$$\rightarrow T(z)=2P_0(z^2)P_1(z^2)z^{-1}$$

si quiero reconstrucción perfecta entonces $T(z)=c\,z^{-k}$ / $\hat{x}(m)=c\,x(m-k)$
$\rightarrow$ ~~[illegible]~~ para q' se cumpla: $\boxed{P_0(z)=C_0 z^{-m_0}}$ $\boxed{P_1=C_1 z^{-m_1}}$
y sea FIR

entonces $H_0(z)=C_0 z^{-2m_0}+C_1 z^{-2m_1}\cdot z^{-1}$

y para que sea FLG $\rightarrow C=C_0=C_1$

$$\rightarrow H_0(z)=C z^{-2m_0}+C z^{-2m_1-1}$$

$\longrightarrow$ ~~[illegible]~~
$h_0(m)=c\,\delta(m-2m_0)+c\,\delta(m-2m_1-1)$

$$h_0(n) = c\,\delta(n-n_0) + c\,\delta(n-2n_1-1)$$

$$h_1(n) = c\,\delta(n-n_0) - c\,\delta(n-2n_1-1)$$

$$g_1(n) = -c\,\delta(n-n_0) + c\,\delta(n-2n_1-1)$$

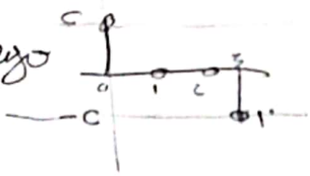
$$g_0(n) = c\,\delta(n-n_0) + c\,\delta(n-2n_1-1)$$

PCCR

$G_0 = H_1(-z)$

$G_1 = -H_0(-z)$

$H_1(z) = H_0(-z)$

luego  puede ser $h_1(n)$ ó $g_1(n)$ según sea el valor de c

si $c > 0$ → es $h_1(n)$

$$T(z) = 2\,P_0(z^2)\,P_1(z^2)\,z^{-1} \quad / \quad P_0(z) = c\,z^{-n_0},\; P_1(z) = c\,z^{-n_1}$$

$$= 2c^2\, z^{-(n_1+n_2+1)}$$

<u>SIMULACION</u>: En el calculo del error, no se tuvo en cuenta las frec. teóricas faltantes (dado que era una señal Real)