Procesamiento de señales I

86.51

Cecilia G. Galarza

FIUBA
Laboratorio de Procesamiento de Señales y Comunicaciones

2do Cuatrimestre 2022

Procesamiento Multirate

Introducción

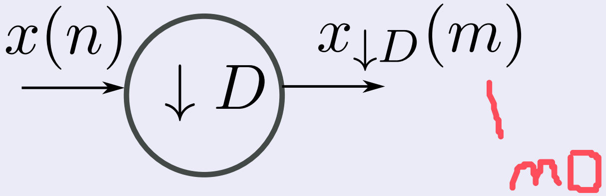
Qué es un sistema de procesamiento *Multirate*?

Es un sistema en el cual las señales procesadas están muestreadas a distintas tasas de muestreo.

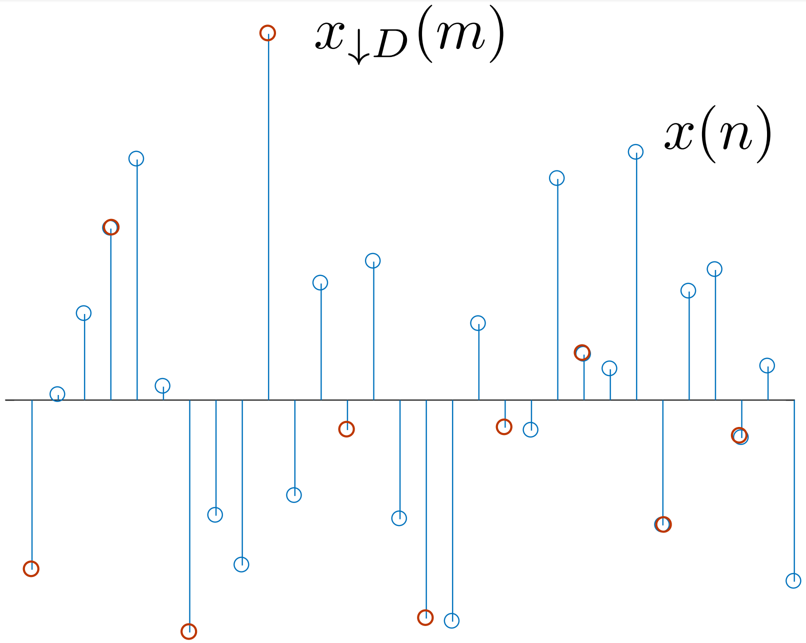
Operaciones básicas (repaso S& S)

Decimación o *downsampling*

$$x_{\downarrow D}(m) = x(mD)$$



Turner ↓

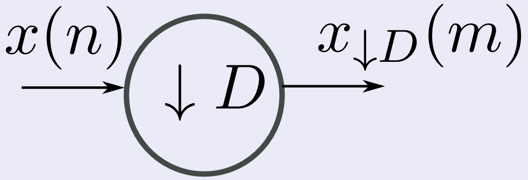


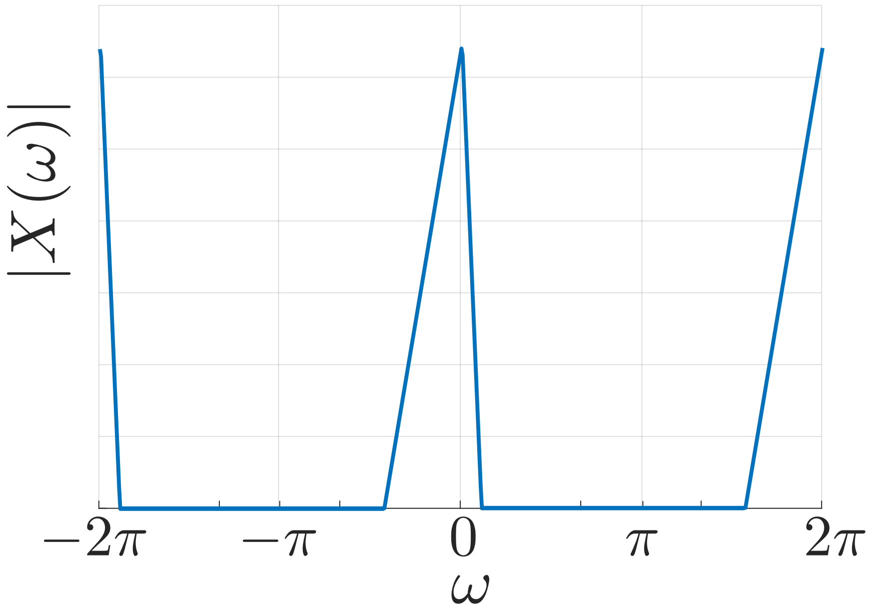
D = 3

Operaciones básicas (repaso S& S)

Decimación o *downsampling*

$$x_{\downarrow D}(m) = x(mD)$$



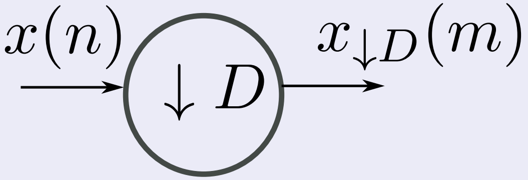


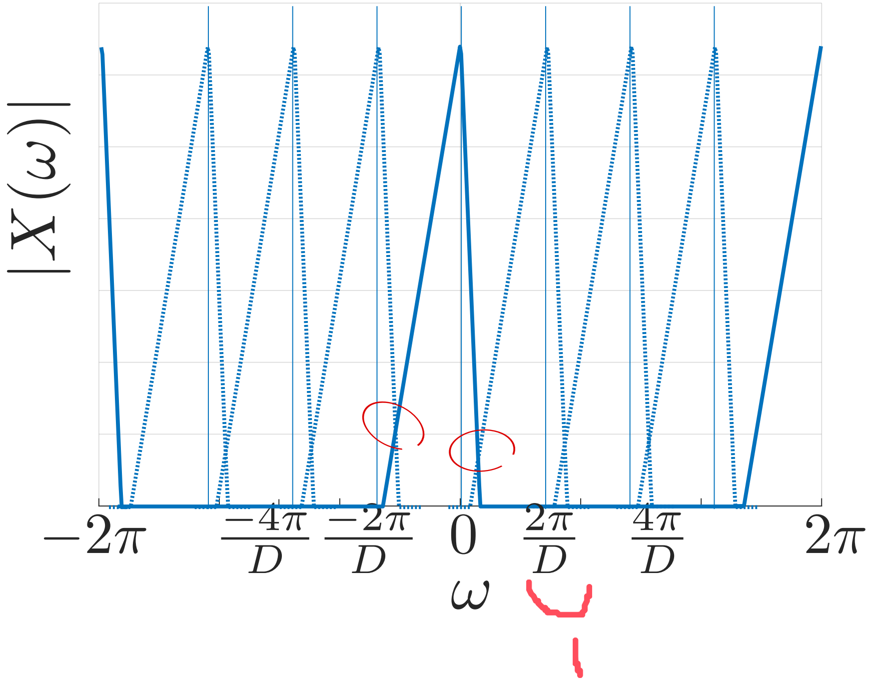
periodo 2π

Operaciones básicas (repaso S& S)

Decimación o *downsampling*

$$x_{\downarrow D}(m) = x(mD)$$

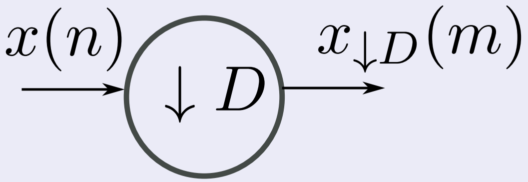




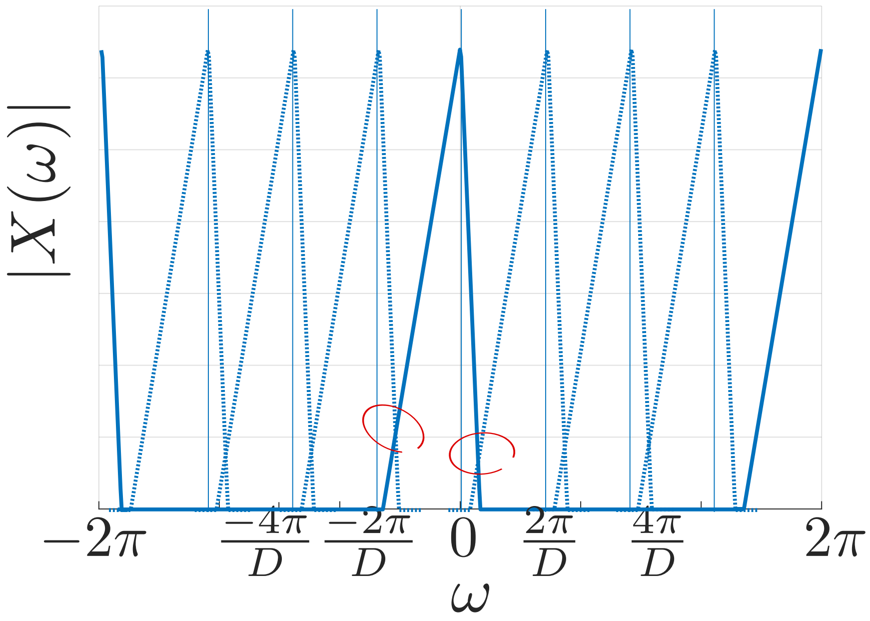
Operaciones básicas (repaso S& S)

Decimación o *downsampling*

$$x_{\downarrow D}(m) = x(mD)$$


$$x(n) \xrightarrow{} \boxed{\downarrow D} \xrightarrow{} x_{\downarrow D}(m)$$

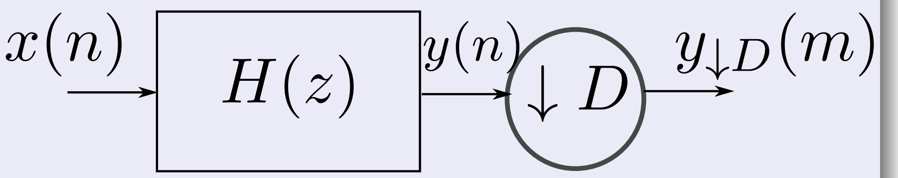
La señal $x(n)$ debe ser limitada en banda para evitar *aliasing*.

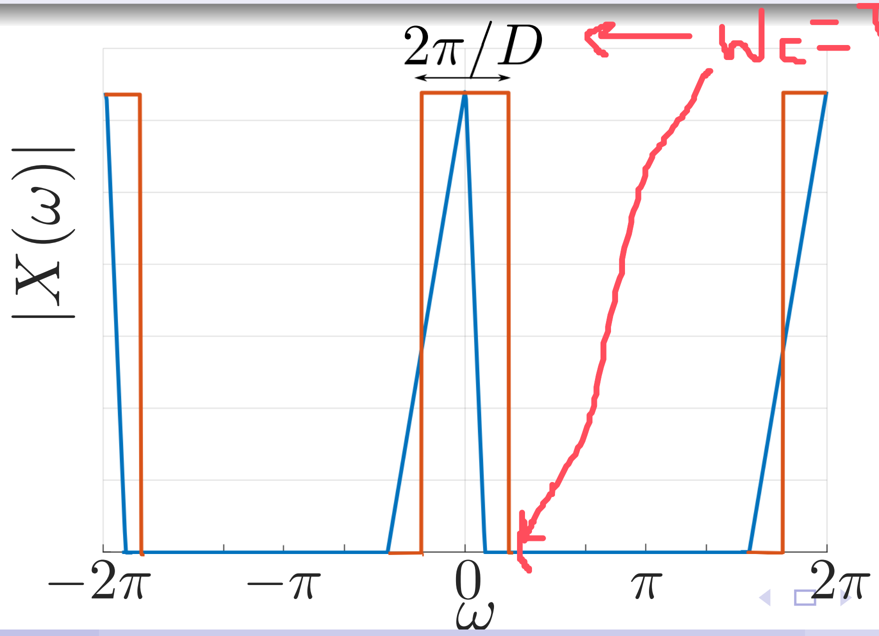


Operaciones básicas (repaso S& S)

Decimación o *downsampling*

$$
\begin{aligned}
y_{\downarrow D}(m) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)x(k)\Big|_{n=mD} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(mD-k)x(k)
\end{aligned}
$$





$\leftarrow W_c = \pi/D$

Pasa bajos

Operaciones básicas (repaso S& S)

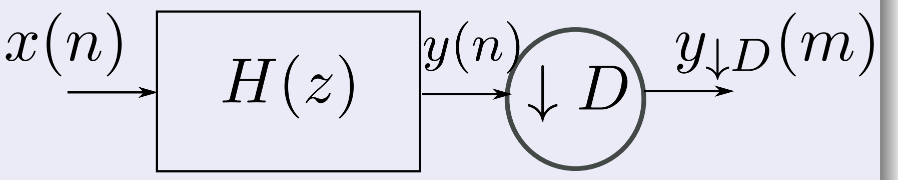
Decimación o *downsampling*

$$y_{\downarrow D}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)x(k)\Big|_{n=mD}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(mD-k)x(k)$$

Señal discreta

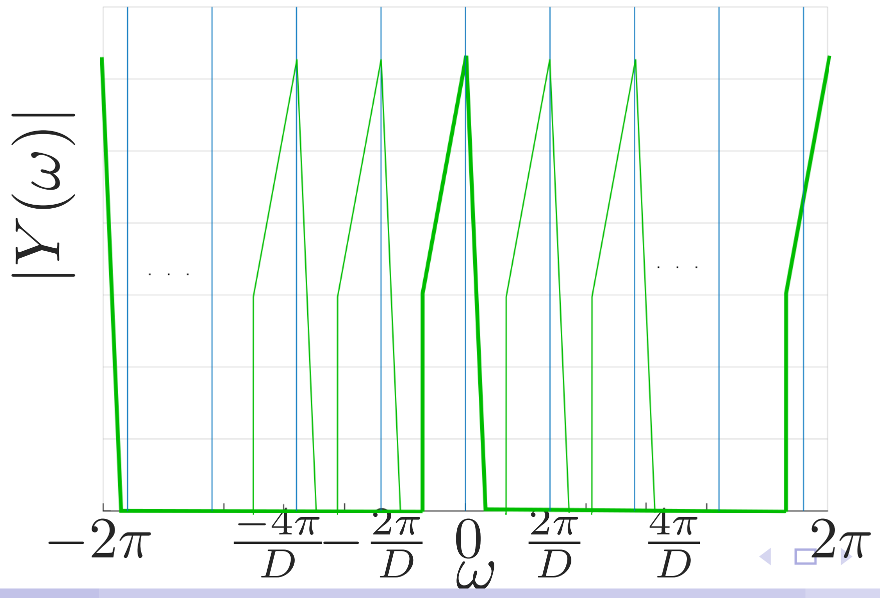
Tasa Rápida



ω

$$\omega = \frac{\Omega}{\Omega_s}$$

cont.

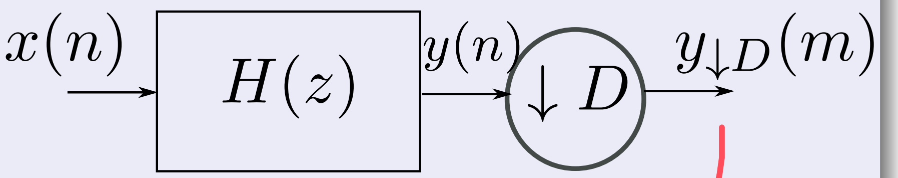


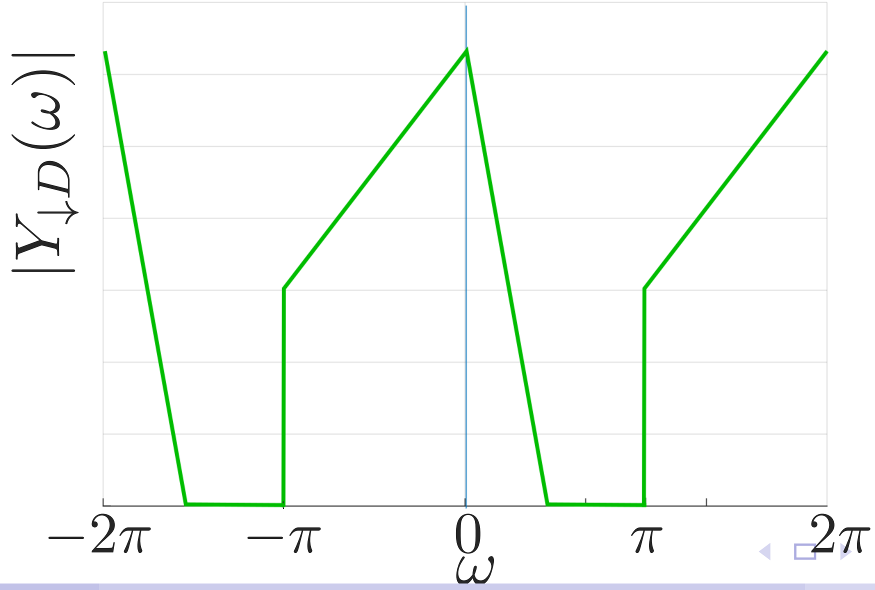
Operaciones básicas (repaso S& S)

Decimación o *downsampling*

$$y_{\downarrow D}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)x(k)\Big|_{n=mD}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(mD-k)x(k)$$



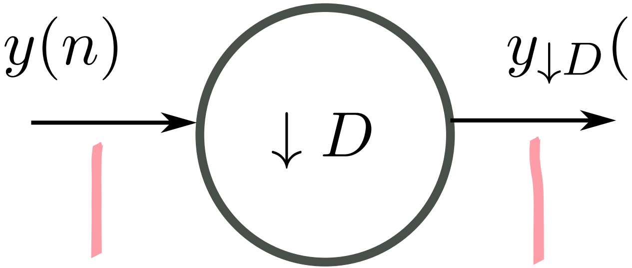


[illegible]
limita

Decimación o *downsampling*

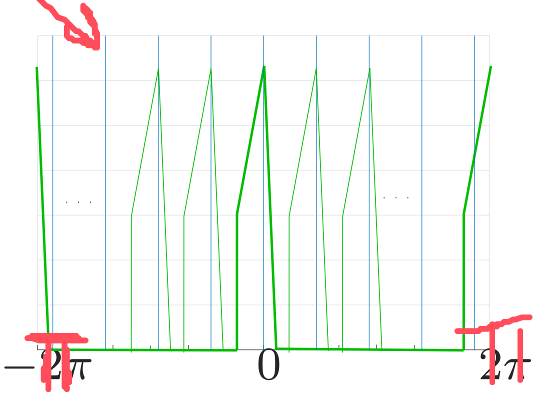
$$Y_{\downarrow D}(\omega) = \frac{1}{D} Y\left(\frac{\omega}{D}\right)$$

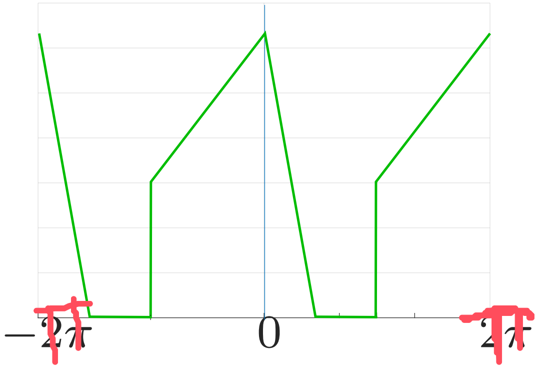
[illegible] dentro de [illegible] de $y(n)$



$y(n)$ → $\downarrow D$ → $y_{\downarrow D}(m) = y(nD)$

Muestreo a T | *Muestreo a* DT
$f = F/F_s$ | $f = DF/F_s$

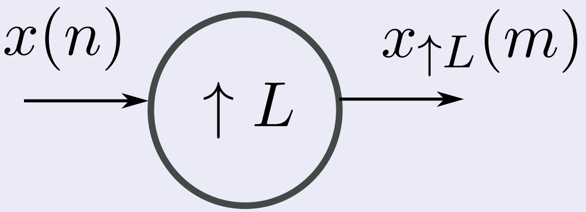




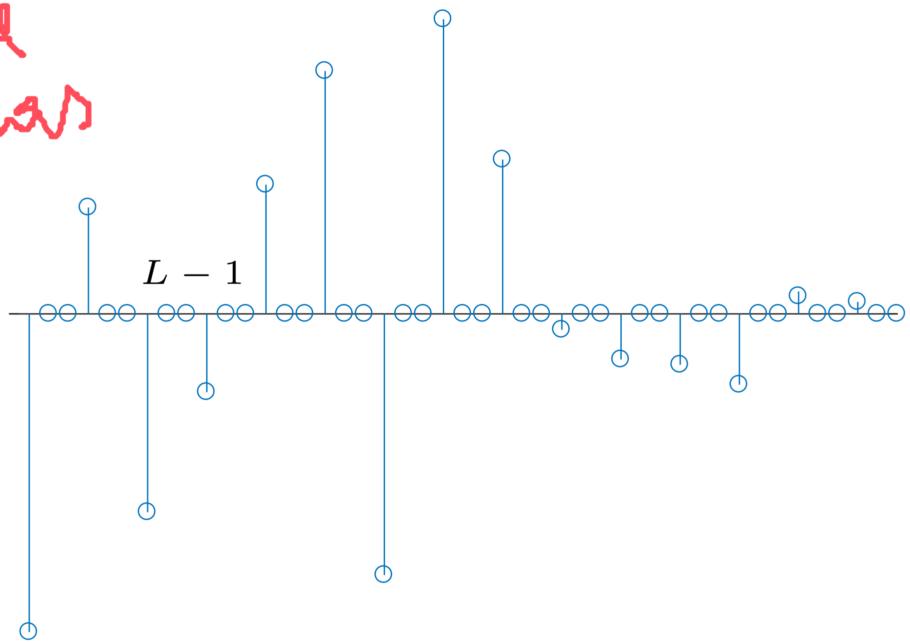
Operaciones básicas (repaso S& S)

Interpolación, expansión o *upsampling*

$$x_{\uparrow L}(m) = \begin{cases} x(m/L) & m = kL \quad , k \in Z \\ 0 & \text{otro } m. \end{cases}$$



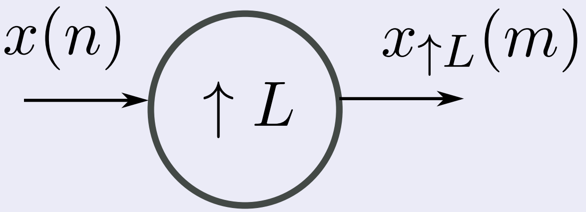
L-1 ceros entre dos muestras

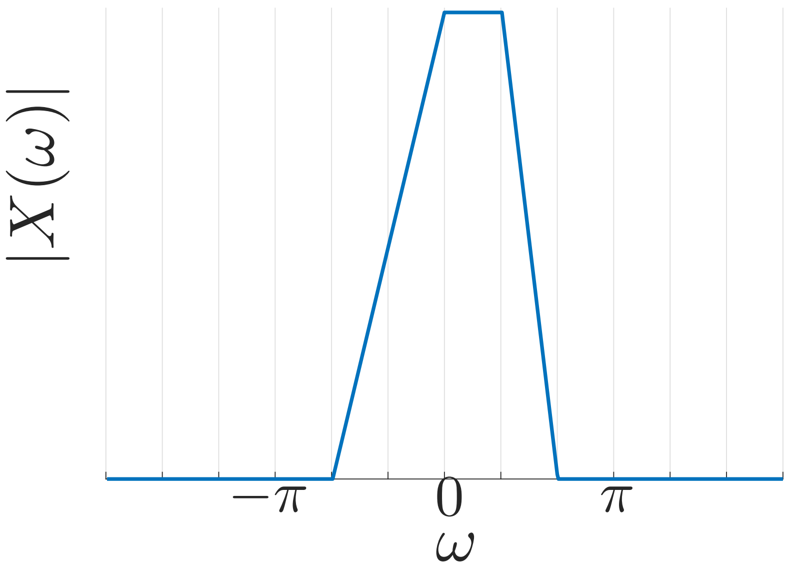


Operaciones básicas (repaso S& S)

Interpolación, expansión o *upsampling*

$$x_{\uparrow L}(m) = \begin{cases} x(m/L) & m = kL \quad , k \in Z \\ 0 & \text{otro } m. \end{cases}$$



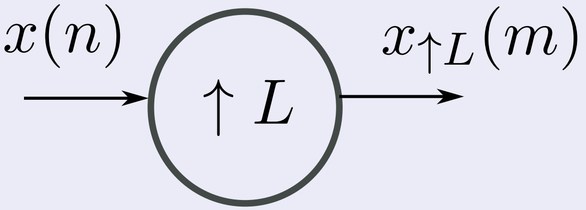


← frec lenta a una mas ampliada

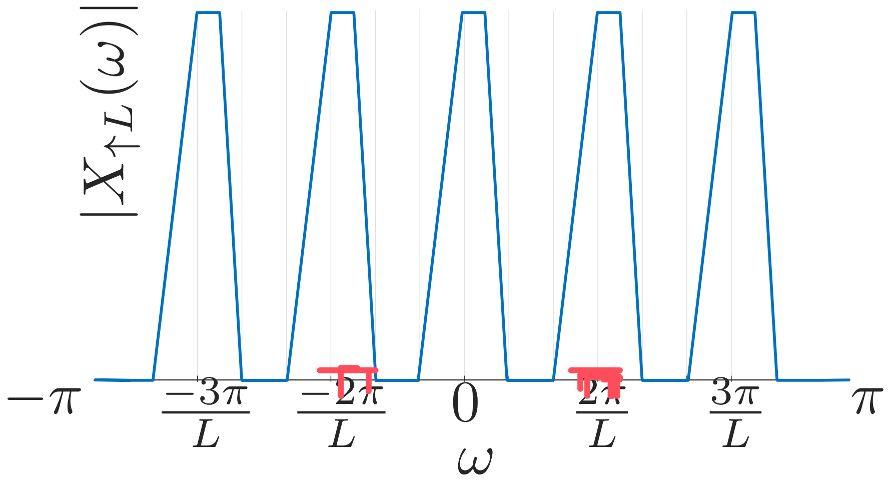
Operaciones básicas (repaso S& S)

Interpolación, expansión o *upsampling*

$$x_{\uparrow L}(m) = \begin{cases} x(m/L) & m = kL \quad , k \in Z \\ 0 & \text{otro } m. \end{cases}$$



Aparecen réplicas del espectro que deben ser canceladas.

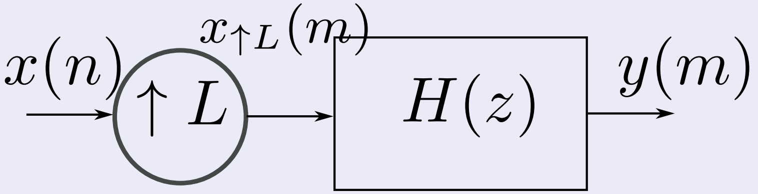


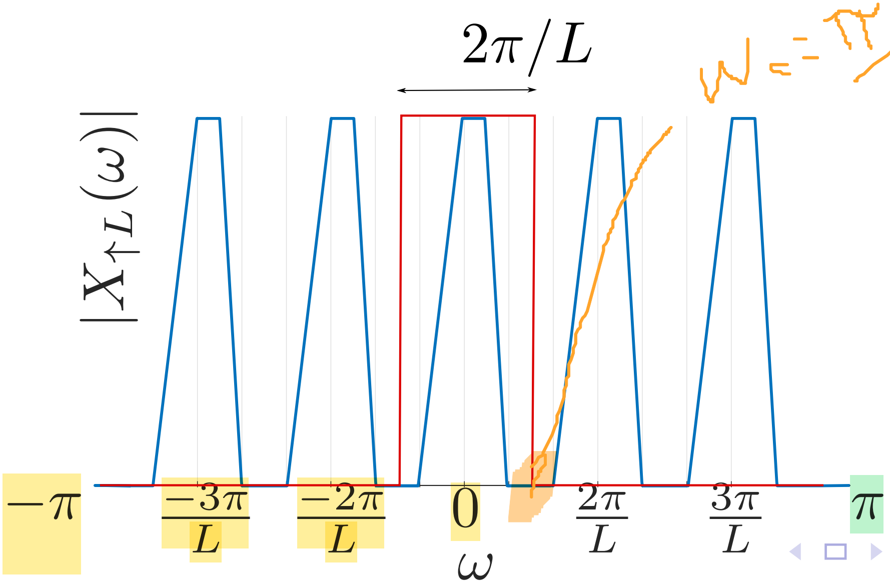
Operaciones básicas (repaso S& S)

Interpolación, expansión o *upsampling*

$$y(m) = \sum_{k=-\infty, k=sL}^{+\infty} h(m-k)x(k/L)$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} h(m-sL)x(s)$$





$\omega = \pi/L$

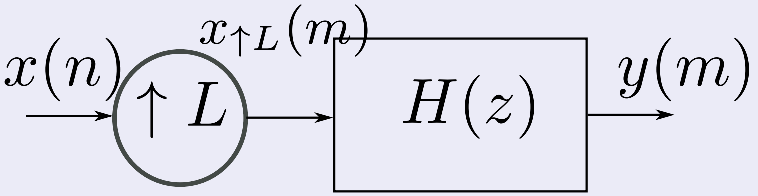
efecto de interpolacion

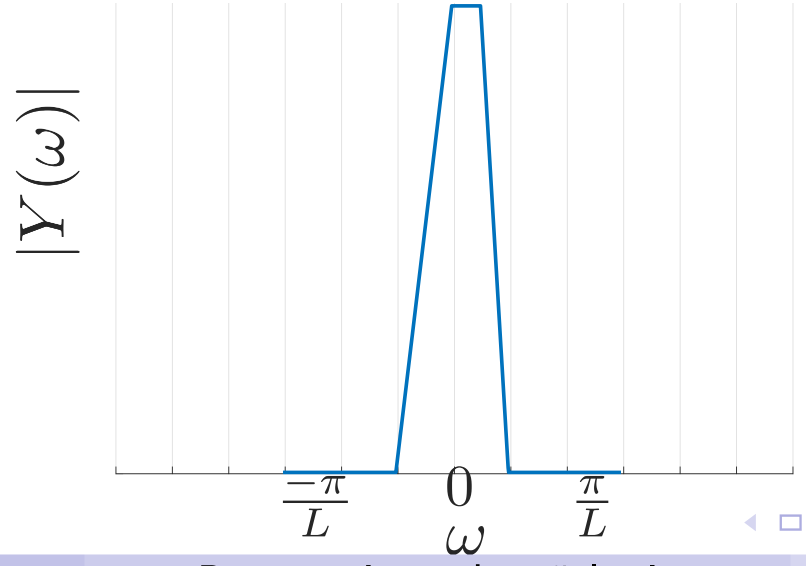
Operaciones básicas (repaso S& S)

Interpolación, expansión o *upsampling*

$$y(m) = \sum_{k=-\infty,\underline{k=sL}}^{+\infty} h(m-k)x(\overset{\overset{sL}{\downarrow}}{k}/L)$$

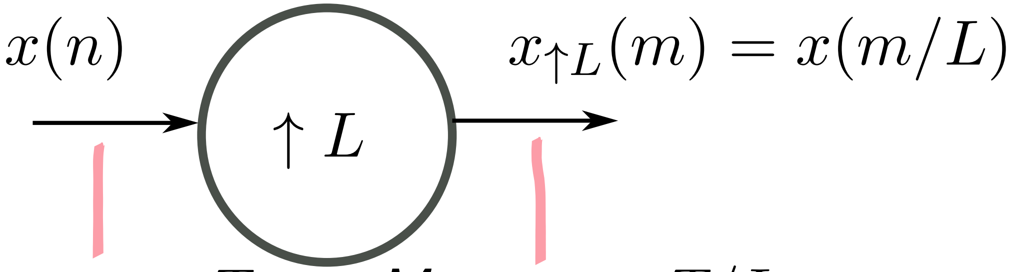
$$= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} h(m-\overset{k}{\overbrace{sL}})x(s)$$





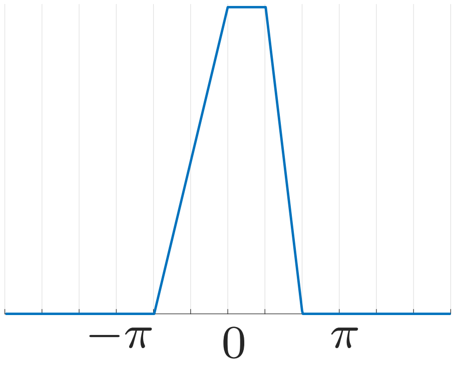
Interpolación o *upsampling*

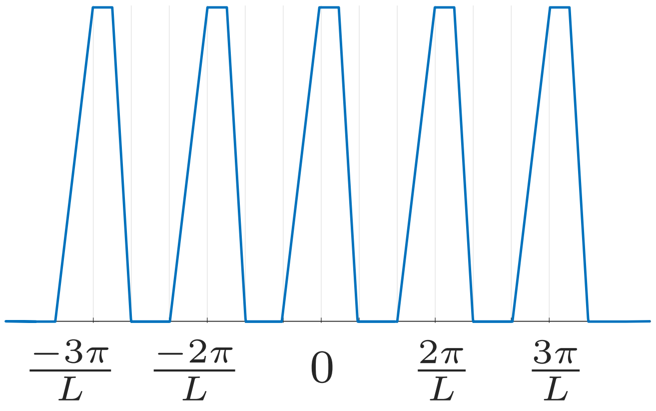
$$X_{\uparrow L}(\omega) = X(L\omega) \qquad |\omega| \leq \frac{\pi}{L}$$



Muestreo a T *Muestreo a* T/L

$f = F/F_s$ $f = F/(LF_s)$

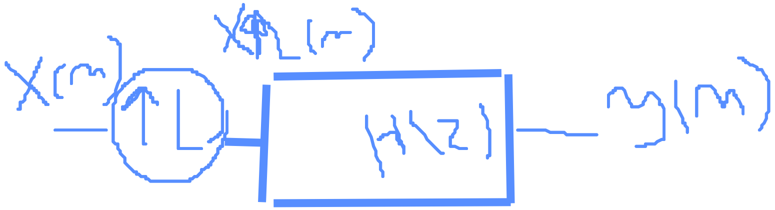




Pregunta

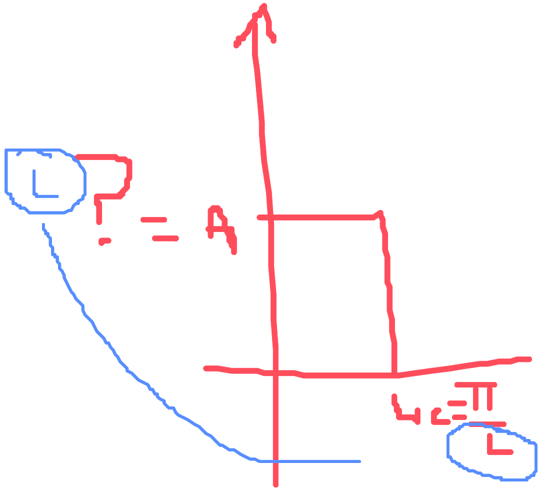
Para mantener $y(0) = x_{\uparrow L}(0)$, $H(z)$ debe tener ganancia L en la banda de paso. En ese caso,

$$Y(\omega) = LX(L\omega)$$



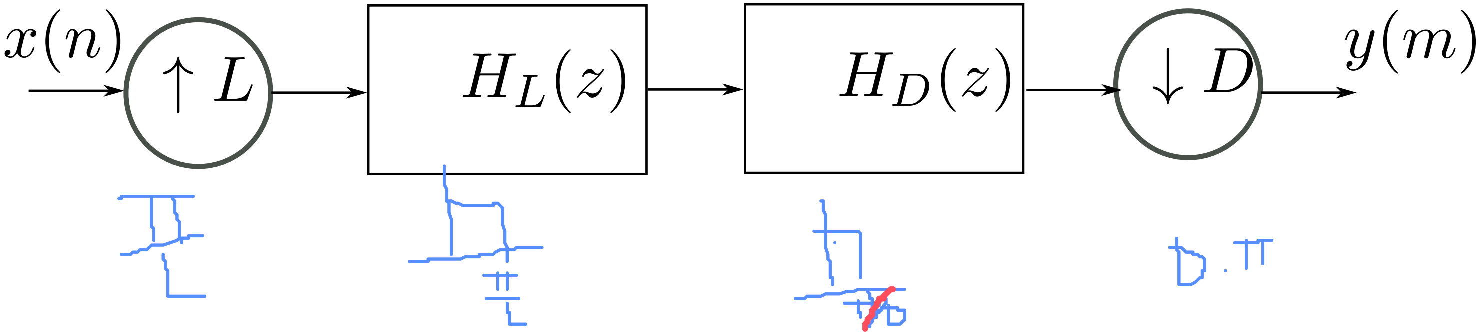
Por qué?

Se tienen que mantener las Areas en espectro



Cómo utilizar un factor no entero?

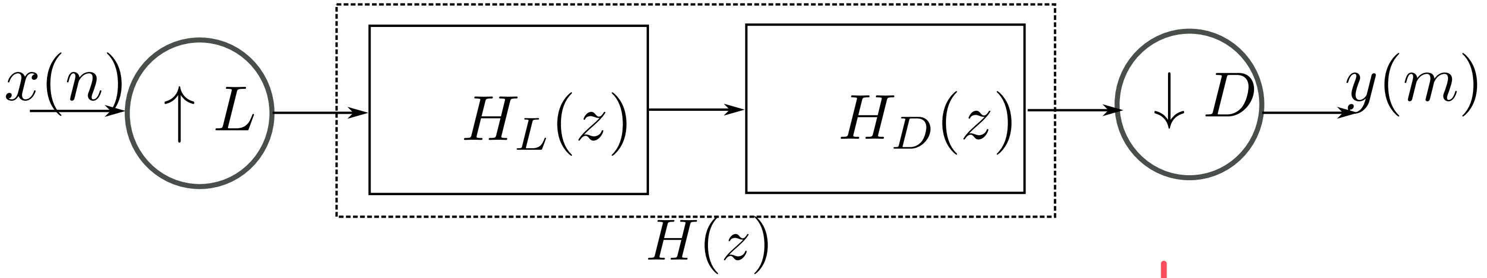
- En las operaciones anteriores, vimos cómo decimar o interpolar por un factor entero.
- Si combinamos ambas operaciones, podemos cambiar la tasa de muestreo por un factor racional $Q = L/D$.



-

Cómo utilizar un factor no entero?

- En las operaciones anteriores, vimos cómo decimar o interpolar por un factor entero.
- Si combinamos ambas operaciones, podemos cambiar la tasa de muestreo por un factor racional $Q = L/D$.

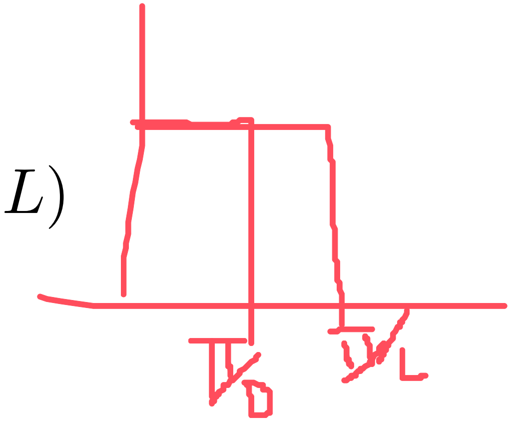


-

ó 1/D

El filtro ideal combinado es:

$$H(\omega) = \begin{cases} L & 0 \le |\omega| \le \min(\pi/D, \pi/L) \\ 0 & \text{otro } \omega. \end{cases}$$



Sist. remuestr.

-

$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overset{\text{sobremuestreo}}{h(n-kL)x(k)}\Big|_{n=mD} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underset{\text{cuantas L?}}{h(mD-kL)}x(k)$$

luego decimar

Analicemos $Q = L/D$

En la expresión anterior, tenemos que evaluar la respuesta del filtro en $mD - kL$ para $m, k, \in \mathbb{Z}$. Vamos a analizar cuántos desplazamientos enteros de L muestras hay en $mD - kL$. Sea $\lfloor \alpha \rfloor$ la parte entera de α. Luego,

$$\left\lfloor \frac{mD - kL}{L} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{mD}{L} \right\rfloor - k \quad \in \; \mathbb{N}.$$

Por otro lado, el resto de la división entera de mD por L es

def.

$$(mD)_L = \left[mD - \left\lfloor \frac{mD}{L} \right\rfloor L \right] \quad \in \; \{1, 2, \cdots L - 1\}.$$

Luego,

$$mD - kL = \underbrace{\left[\left\lfloor \frac{mD}{L} \right\rfloor - k \right]}_{n} L + (mD)_L.$$

Cómo resulta $h(mD - kL)$?

Utilizando el cambio de varible $k = \left\lfloor \frac{mD}{L} \right\rfloor - n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
y(m) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(mD - kL)x(k) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h\left(mD - \left\lfloor \frac{mD}{L} \right\rfloor L + nL\right) x\left(\left\lfloor \frac{mD}{L} \right\rfloor - n \right) \\
&= \sum_{\underline{n}=-\infty}^{+\infty} \underbrace{h(\underline{n}L + (\underline{m}D)_L)}_{g(\underline{n},\underline{m})} x\left(\left\lfloor \frac{mD}{L} \right\rfloor - n \right).
\end{aligned}$$

← . donde en lugar de [illegible] [illegible] [illegible].

Vamos a demostrar que $g(n, m)$ es periódica en m de período L, es decir

$$g(n, m) = g(n, m + sL) \quad , \quad s \in \mathbb{Z}$$

Cómo resulta $h(mD - kL)$?

$g(n, m + sL) = h(nL + ((m + sL)D)_L)$ donde $((m + sL)D)_L$ es el resto de la división entera

$$\begin{aligned} ((m+sL)D)_L &= (m+sL)D - \left\lfloor \frac{(m+sL)D}{L} \right\rfloor L \\ &= mD - \left\lfloor \frac{mD}{L} \right\rfloor L + sLD - \left\lfloor \frac{sLD}{L} \right\rfloor L \\ &= mD - \left\lfloor \frac{mD}{L} \right\rfloor L = (mD)_L \end{aligned}$$

Interpretación: x es procesada por un sistema LTV periódico en m,

$$g(n, m) = g(n, m + sL).$$

Variante en el Tiempo Lineal

Cómo afecta $H(z)$?

En el campo transformado, si consideramos que $H(z)$ elimina las réplicas por el interpolado, y el aliasing del decimado, tenemos,

$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{L}{D} X\left(\frac{L\omega}{D}\right) & 0 \leq |\omega| \leq \min(\pi, \frac{\pi D}{L}) \\ 0 & \text{otro } \omega. \end{cases}$$

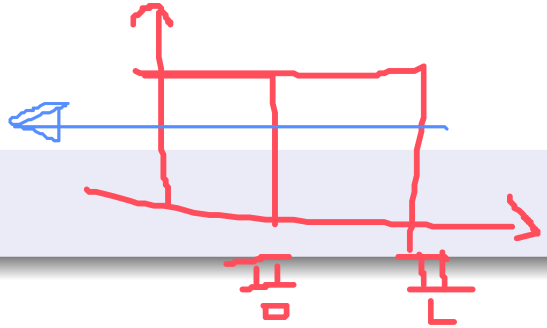
Hay que tener en cuenta que la señal decimada es la salida del filtro H(z), $v(n) = h(n) * x(nI)$. Por ende, $y(m)$ va a contener las distorsiones aportadas por la implementación del filtro.

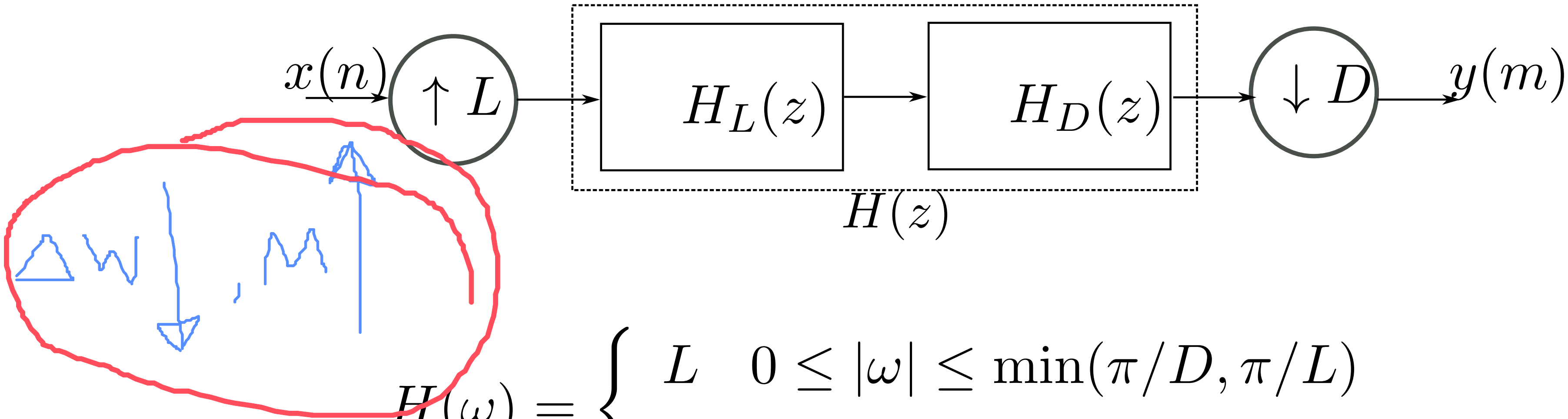
Esquemas de múltiples etapas

Qué sucede si $L \gg 1$ o $D \gg 1$, o ambos?

Esquemas de múltiples etapas

Qué sucede si $L \gg 1$ o $D \gg 1$, o ambos?





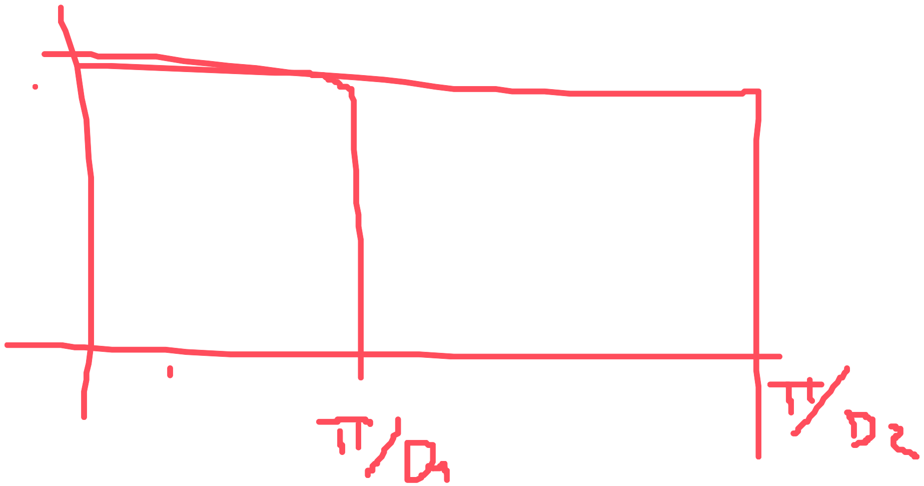
$$H(\omega) = \begin{cases} L & 0 \leq |\omega| \leq \min(\pi/D, \pi/L) \\ 0 & \text{otro } \omega. \end{cases}$$

El orden del filtro $H(z)$ es muy elevado porque la banda de transición es muy estrecha.

Esquemas de múltiples etapas

Supongamos que estamos haciendo una decimación con $D = D_1 D_2$. La banda de rechazo del filtro antialiasing debe comenzar en $\omega_s = \frac{\pi}{D}$. Entonces,

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = \frac{\pi}{D} - \omega_p \qquad , \qquad \omega_p \text{ dado.}$$



$D = 100$, $D_1 = 50$

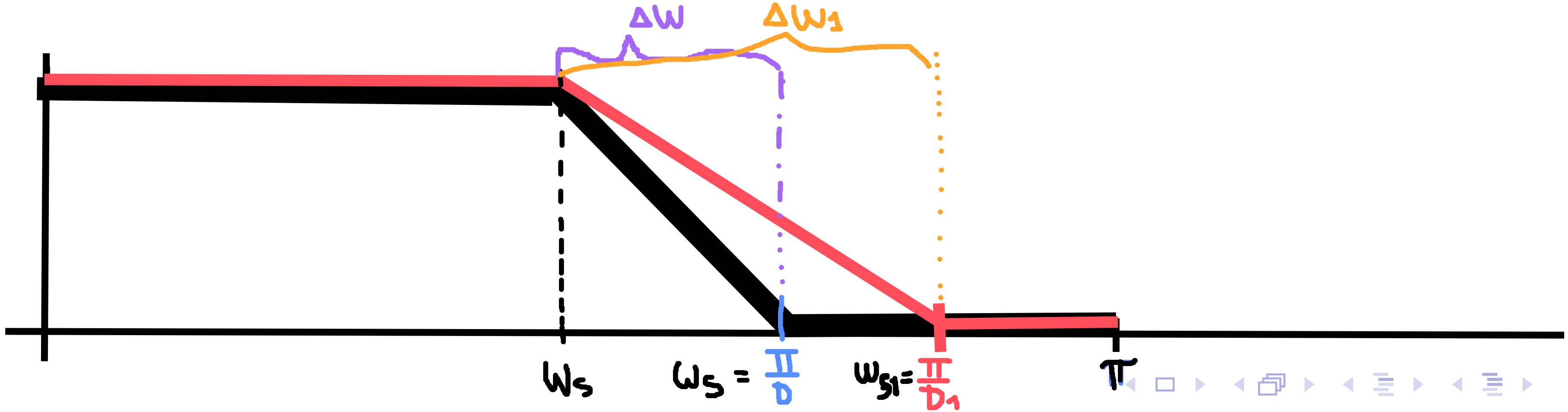
$D_2 = 2$

Esquemas de múltiples etapas

Supongamos que estamos haciendo una decimación con $D = D_1 D_2$. La banda de rechazo del filtro antialiasing debe comenzar en $\omega_s = \frac{\pi}{D}$. Entonces,

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = \frac{\pi}{D} - \omega_p \qquad , \qquad \omega_p \text{ dado.}$$

Si en lugar de decimar por D, decimamos primero por D_1, entonces $\omega_{s1} = \frac{\pi}{D_1} > \omega_s$ y la banda de transición es más holgada.



Esquemas de múltiples etapas

Por otro lado, vimos que el orden de un filtro

$$\boxed{M \propto \frac{1}{\Delta\omega}.}$$

Luego,

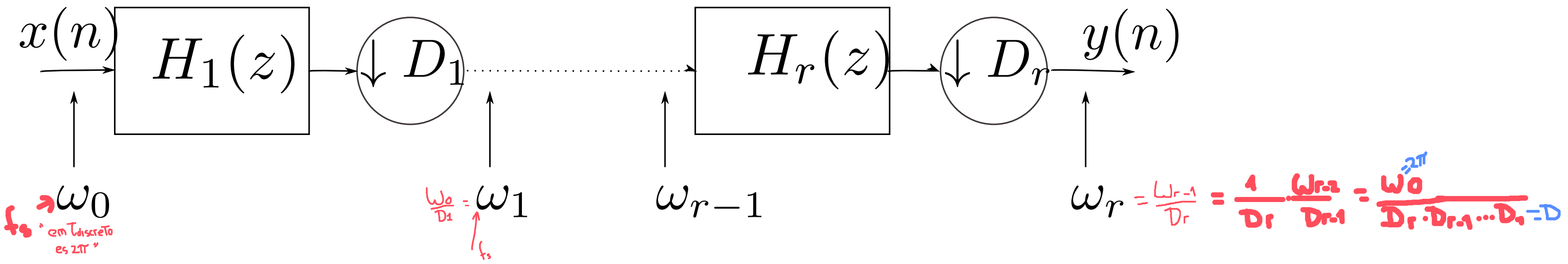
$$\Delta\omega_1 > \Delta\omega \quad \Longrightarrow \quad \underline{M_1} < M$$

Vamos a ver que se puede lograr una reducción aún mayor de M con una selección juiciosa de ω_{s1}.

Esquemas de múltiples etapas: decimación

Queremos implementar un decimador por un factor D. Luego, el filtro antialiasing debe preservar la banda $0 \leq \omega \leq \omega_s = \pi/D$. Asumimos que $\omega_p < \frac{\pi}{D}$. Sea

$$D = D_1 D_2 \cdots D_r.$$



La tasa de muestreo luego de la i-ésima etapa de decimación es[1]

$$\omega_i = \frac{\omega_{i-1}}{D_i} = \frac{\boxed{2\pi}^{\,\omega_0}}{D_1 D_2 \cdots D_i} \quad , \quad i = 1, \cdots r, \qquad \text{donde } \omega_0 = 2\pi.$$

---

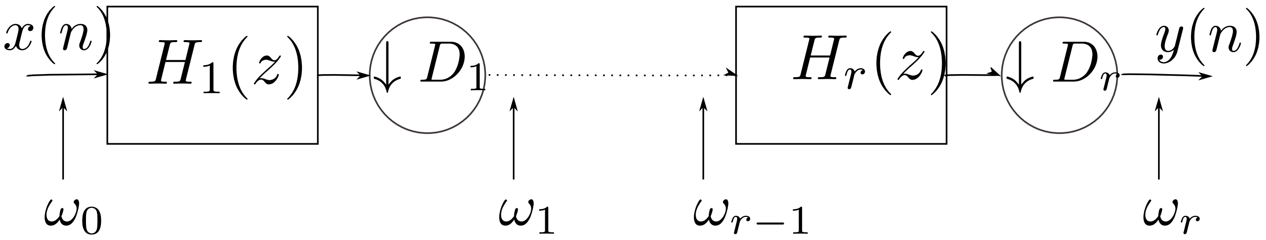
[1] Esto corresponde a

$$F_i = \frac{F_{i-1}}{D_i} = \frac{F_0}{D_1 D_2 \cdots D_i} \qquad \text{(en Hz)}$$

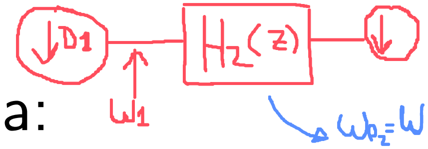
Esquemas de múltiples etapas: decimación

Queremos implementar un decimador por un factor D. Luego, el filtro antialiasing debe preservar la banda $0 \leq \omega \leq \omega_s = \pi/D$. Asumimos que $\omega_p < \frac{\pi}{D}$. Sea

$$D = D_1 D_2 \cdots D_r.$$

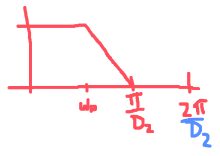


Observen que el filtrado de la i-ésima etapa se realiza a la tasa ω_{i-1}.



$\omega_{p_2} = \omega_{p_1} \cdot D_1$

En cada etapa, implementamos $H_i(z)$ de acuerdo a:



banda de paso: $\omega_{p_i} = D_1 \cdots D_{i-1}\, \omega_p = D_{i-1}\omega_{p_{i-1}}$

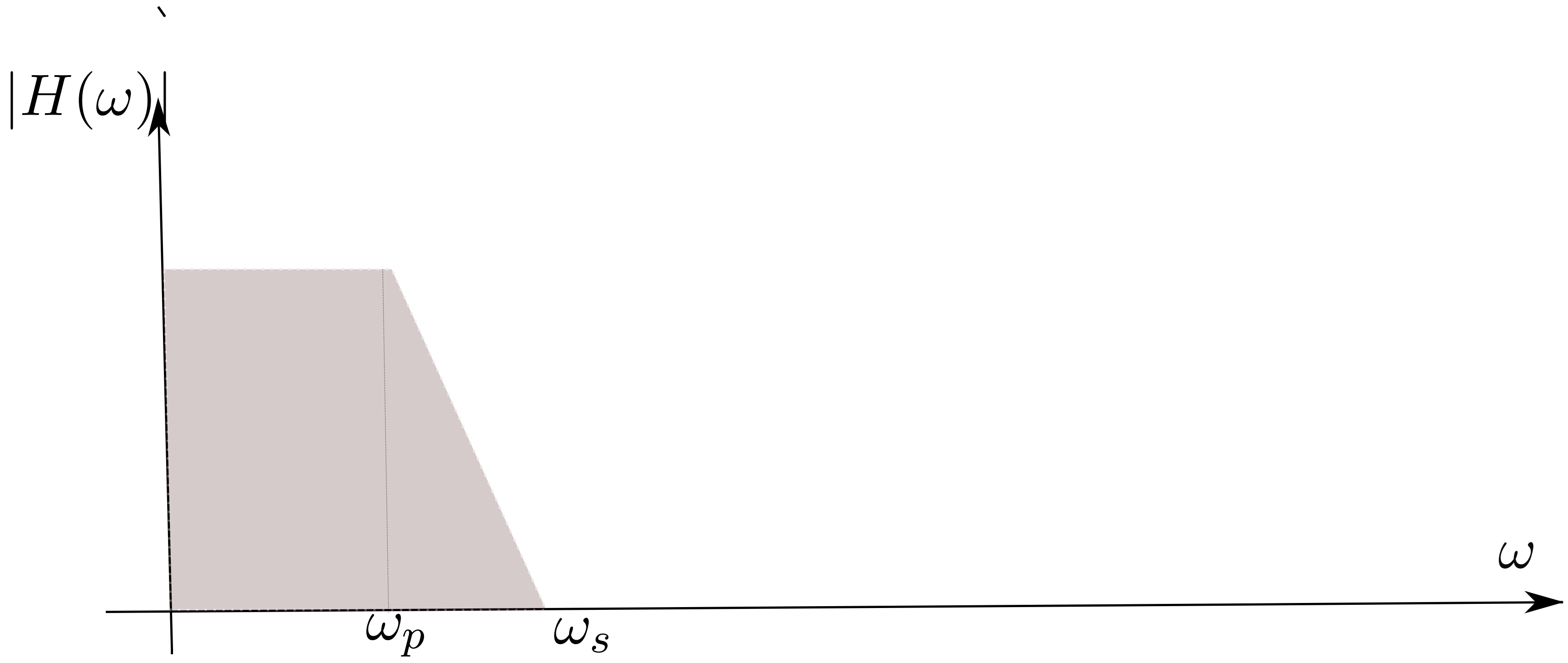
banda de transición: $\omega_{s_i} = \frac{2\pi}{D_i} - \underbrace{D_1 \cdots D_{i-1}\, \overset{\pi/D}{\omega_s}}_{\omega_{s_i}} = \left[\frac{2}{D_i} - \frac{1}{D_i \cdots D_r}\right]\pi.$

ω_1

Esquemas de múltiples etapas: decimación

Observaciones:

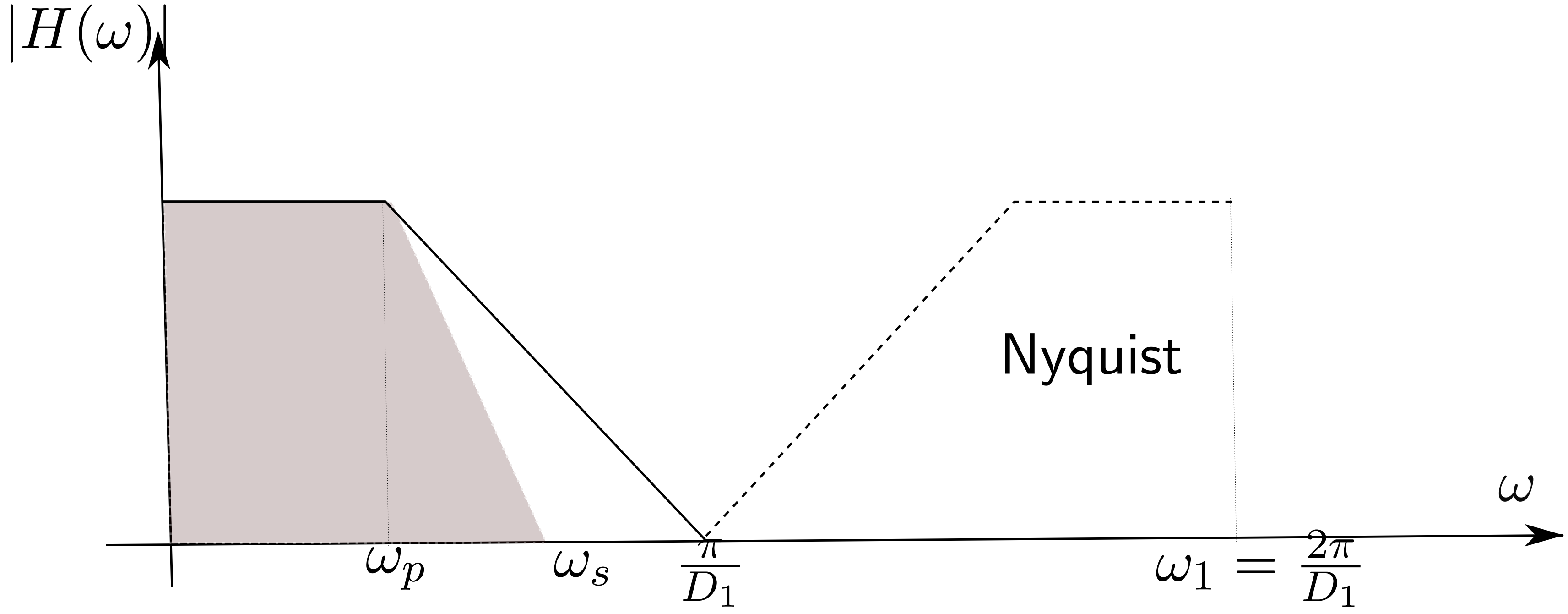
- La frecuencia ω_{p_i} corresponde a la frecuencia F_p normalizada a la tasa F_{i-1} (F_p y F_{i-1} expresadas en Hz.)
- $\omega_{s_i} > \omega_i/2$. Luego, la i-ésima etapa genera aliasing, pero no en la banda que corresponde a $0 \leq F \leq F_0/D$.



Esquemas de múltiples etapas: decimación

Observaciones:

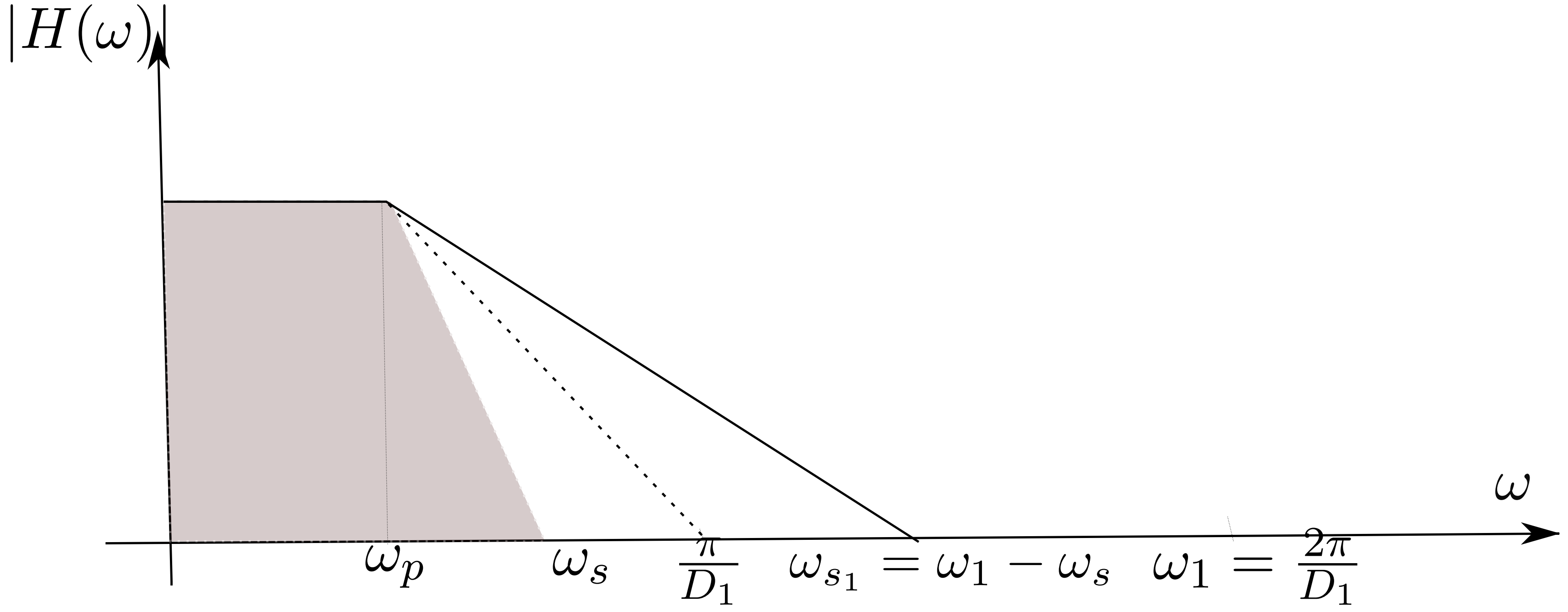
- La frecuencia ω_{p_i} corresponde a la frecuencia F_p normalizada a la tasa F_{i-1} (F_p y F_{i-1} expresadas en Hz.)
- $\omega_{s_i} > \omega_i/2$. Luego, la i-ésima etapa genera aliasing, pero no en la banda que corresponde a $0 \leq F \leq F_0/D$.



Esquemas de múltiples etapas: decimación

Observaciones:

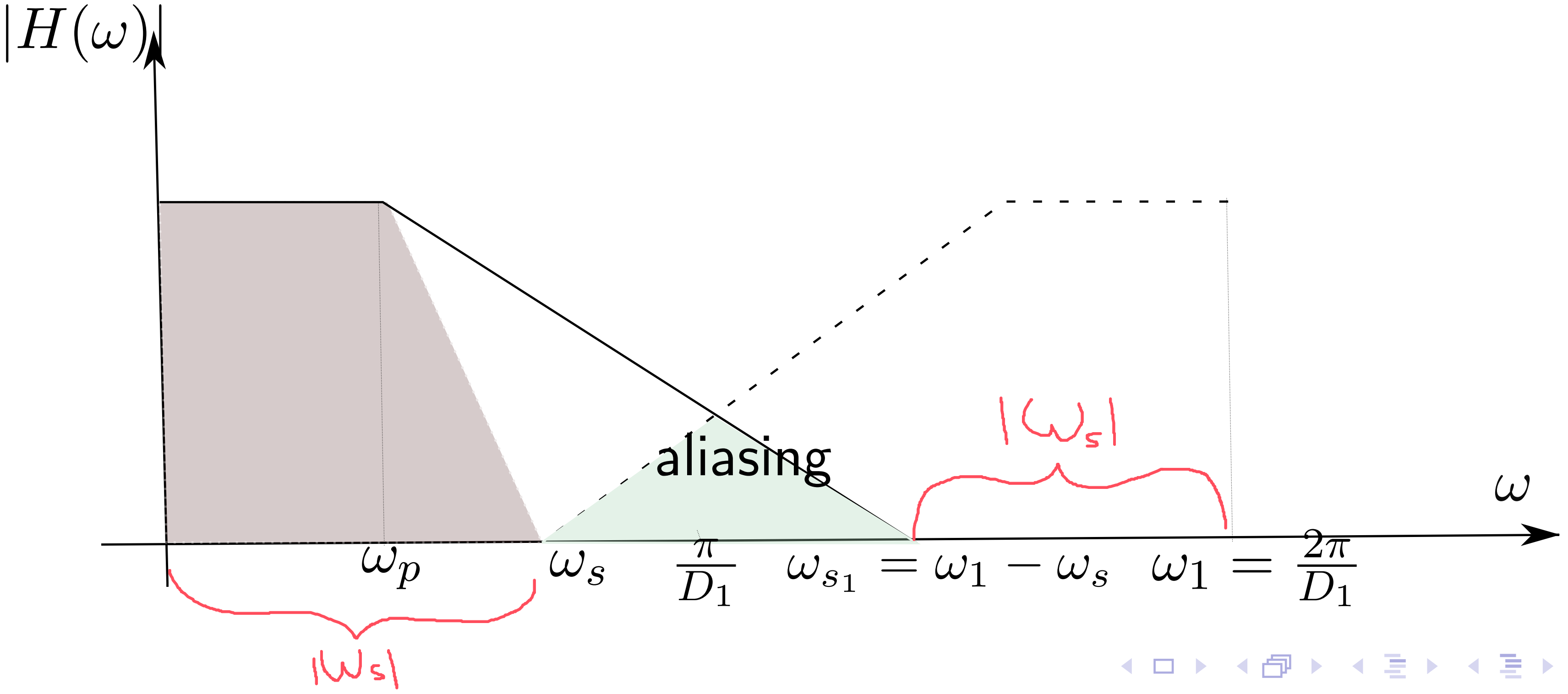
- La frecuencia ω_{p_i} corresponde a la frecuencia F_p normalizada a la tasa F_{i-1} (F_p y F_{i-1} expresadas en Hz.)
- $\omega_{s_i} > \omega_i/2$. Luego, la i-ésima etapa genera aliasing, pero no en la banda que corresponde a $0 \leq F \leq F_0/D$.



Esquemas de múltiples etapas: decimación

Observaciones:

- La frecuencia ω_{p_i} corresponde a la frecuencia F_p normalizada a la tasa F_{i-1} (F_p y F_{i-1} expresadas en Hz.)
- $\omega_{s_i} > \omega_i/2$. Luego, la i-ésima etapa genera aliasing, pero no en la banda que corresponde a $0 \leq F \leq F_0/D$.



Esquemas de múltiples etapas: Ejemplo de decimación

Una señal muestreada a $F_0 = 96$*kHz es decimada con* $D = 12$*. El ancho de banda de la señal es de* $F_p = 3$*kHz, y el riple* $\delta = 10^{-5}$*. Filtro usando Kaiser.*

- Una etapa:

$$\begin{array}{l} \omega_p = 2\pi \frac{3\times 10^3}{96\times 10^3} = \frac{\pi}{16} \\ \omega_s = \frac{\pi}{D} = \frac{\pi}{12} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad M = 249$$

Esquemas de múltiples etapas: Ejemplo de decimación

Una señal muestreada a $F_0 = 96kHz$ *es decimada con* $D = 12$. *El ancho de banda de la señal es de* $F_p = 3kHz$, *y el riple* $\delta = 10^{-5}$. *Filtro usando Kaiser.*

- Una etapa:

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2\pi\frac{\overset{F_p}{3\times10^3}}{\underset{F_0}{96\times10^3}} = \frac{\pi}{16} \\ \omega_s &= \frac{\pi}{D} = \frac{\pi}{12} \end{aligned} \implies M = 249$$

- Dos etapas: $D_1 = 3,\ D_2 = 4$

$$W_{S_1} = \frac{2\pi}{D} - W_{S_1}' = \frac{2\pi}{D_1} - \frac{\pi}{D} = \left(\frac{2}{D_1} - \frac{1}{D}\right)\pi \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \omega_{p1} &= \omega_p = \frac{\pi}{16} \\ \omega_{s1} &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{12}\right)\pi = \frac{7\pi}{12} \end{aligned} \implies M_1 = 11$$

$$\begin{aligned} \omega_{p2} &= D_1\omega_p = \frac{3\pi}{16} \\ \omega_{s2} &= \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \implies M_2 = 83$$

Esquemas de múltiples etapas: Ejemplo de decimación

Una señal muestreada a $F_0 = 96$*kHz es decimada con* $D = 12$*. El ancho de banda de la señal es de* $F_p = 3$*kHz, y el riple* $\delta = 10^{-5}$*. Filtro usando Kaiser.*

- Una etapa:

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2\pi \frac{3\times 10^3}{96\times 10^3} = \frac{\pi}{16} \\ \omega_s &= \frac{\pi}{D} = \frac{\pi}{12} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad M = 249$$

- Dos etapas: $D_1 = 3,\ D_2 = 4$

$$\begin{aligned} \omega_{p1} &= \omega_p = \frac{\pi}{16} \\ \omega_{s1} &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{12}\right)\pi = \frac{7\pi}{12} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad M_1 = 11$$

$$\begin{aligned} \omega_{p2} &= D_1\omega_p = \frac{3\pi}{16} \\ \omega_{s2} &= \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad M_2 = 83$$

- Tres etapas: $D_1 = 3,\ \underline{D_2 = 2},\ D_3 = 2\ (M_1 = 11)$

$$\omega_{s_2} = \frac{2\pi}{D_2} - \frac{1}{D_2D_3}\pi = \left(\frac{2}{D_2} - \frac{1}{D_2D_3}\right)\pi \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \omega_{p2} &= D_1\omega_p = \frac{3\pi}{16} \\ \omega_{s2} &= \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{3\pi}{4} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad M_2 = 10$$

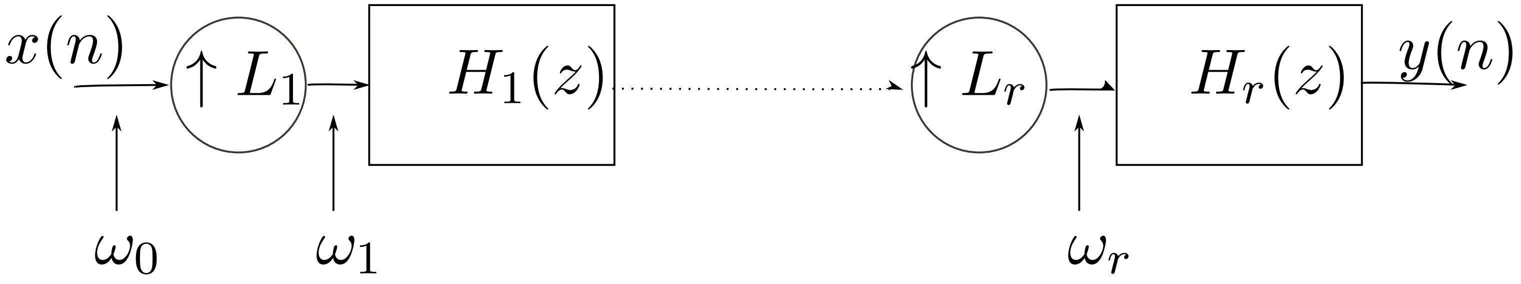
$$\omega_{s_3} = \left(\frac{2\pi}{D_3} - \frac{1}{D_3}\right)\pi \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \omega_{p3} &= D_2\omega_{p2} = \frac{3\pi}{8} \\ \omega_{s3} &= \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad M_3 = 11$$

Esquemas de múltiples etapas: interpolación

En este caso, vamos a implementar un interpolador por un factor L tal que

$$L = L_1 L_2 \cdots L_r.$$



El filtrado de la i-ésima etapa se realiza a la tasa: $\omega_i = L_i \omega_{i-1}$. Este filtrado es para eliminar las imágenes que provoca la interpolación.

Como antes, buscamos implementar el filtro más laxo posible.

banda de paso: $\omega_{p_i} = L_1 \cdots L_{i-1}\, \omega_p = L_{i-1}\omega_{p_{i-1}}$

banda de transición: $\omega_{s_i} = \frac{2\pi}{L_i} - \frac{\omega_s}{L_1 \cdots L_{i-1}} = \left[\frac{2}{L_i} - \frac{1}{L_1 \cdots L_i}\right]\pi.$

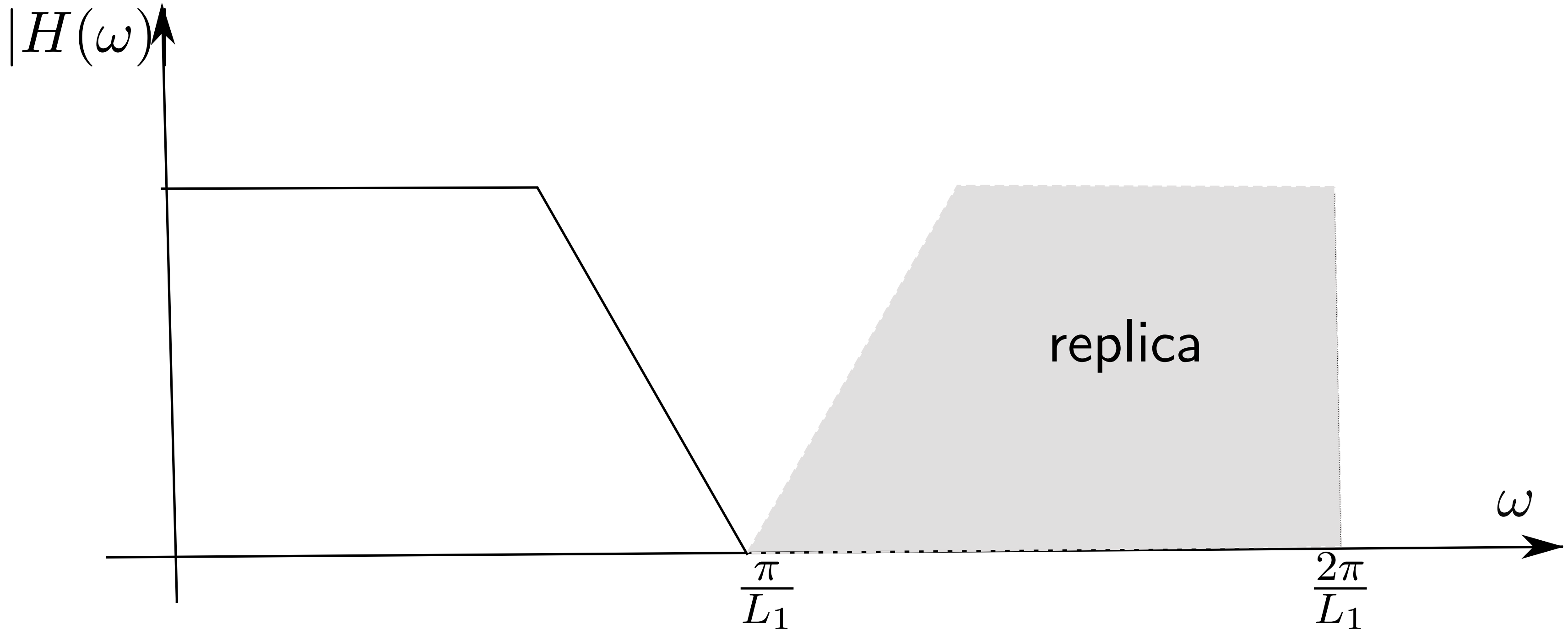
Esquemas de múltiples etapas: interpolación

Observaciones:

- El factor de interpolación al finalizar la i-ésima etapa es $L_1 \cdots L_i$. Luego, se necesita eliminar todas las imágenes por encima de $\pi/(L_1 \cdots L_i)$. La elección de $\omega_{s_i} > \pi/(L_1 \cdots L_i)$, permite implementar un filtro de menor orden.

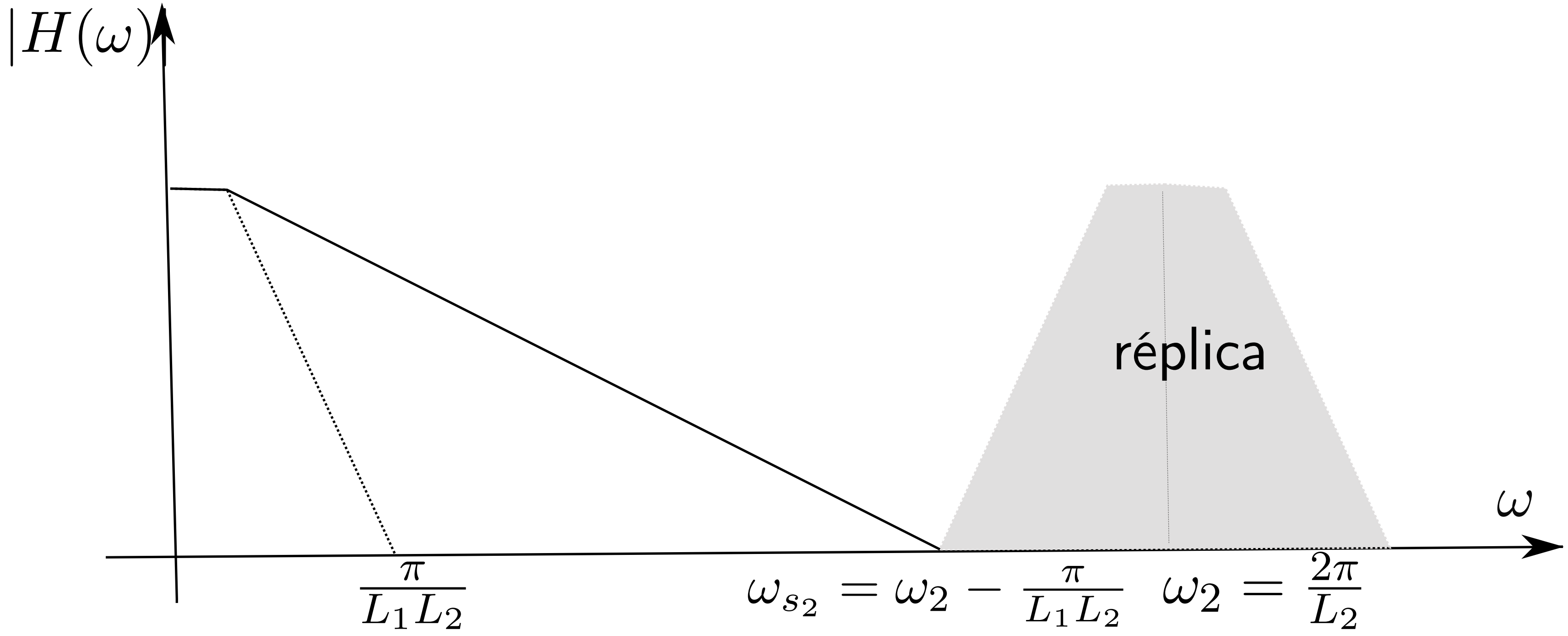
Esquemas de múltiples etapas: interpolación

Observaciones:



Esquemas de múltiples etapas: interpolación

Observaciones:



Esquemas de múltiples etapas: Ejemplo de remuestreo

Una señal muestreada a $F_0 = 48$*kHz debe ser remuestreada a* $F_1 = 44{,}1$*kHz.*

- Implementación directa:

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{441}{480} = \frac{147}{160}$$

  Se requiere un factor de interpolación $L = 147$ para luego decimar con $D = 160$. El filtro trabaja con la frecuencia interpolada $LF_0 =$ 7MHz.

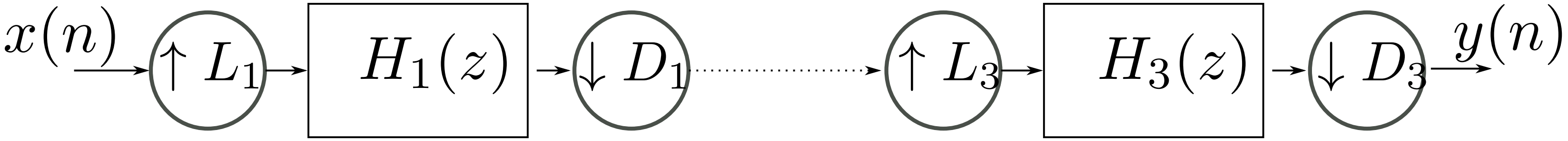
- Vemos que

$$147 = 7 \times 7 \times 3 \qquad \text{y} \qquad 160 = 10 \times 8 \times 2$$

  Luego, se pueden implementar 3 etapas remuestreadoras

$$\frac{L_1}{D_1} = \frac{7}{10} \quad , \quad \frac{L_2}{D_2} = \frac{7}{8} \quad , \quad \frac{L_3}{D_3} = \frac{3}{2}$$

Esquemas de múltiples etapas: Ejemplo de remuestreo



Ejercicios

1. Considere el ejemplo de decimación que se trabajó anteriormente:

   Una señal muestreada a $F_0 = 96$kHz es decimada con $D = 12$. El ancho de banda de la señal es de $F_p = 3$kHz, y el riple $\delta = 10^{-5}$.

   Verifique que las implementaciones multietapa están libres de aliasing.

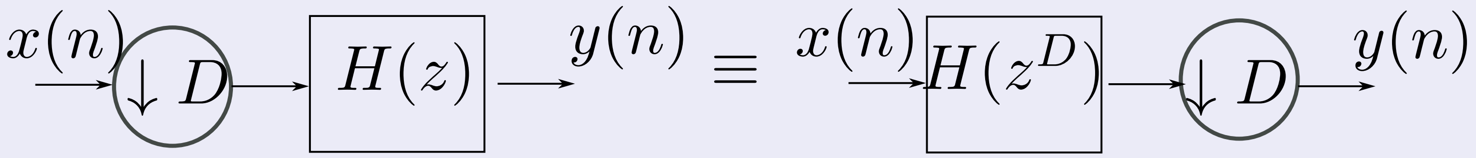
2. Ahora considere el último ejemplo de remuestreo:

   Una señal muestreada a $F_0 = 48$kHz debe ser remuestreada a $F_1 = 44{,}1$kHz.

   Nuevamente, verifique que la implementación multietapa está libre de aliasing.

Identidades Multirate

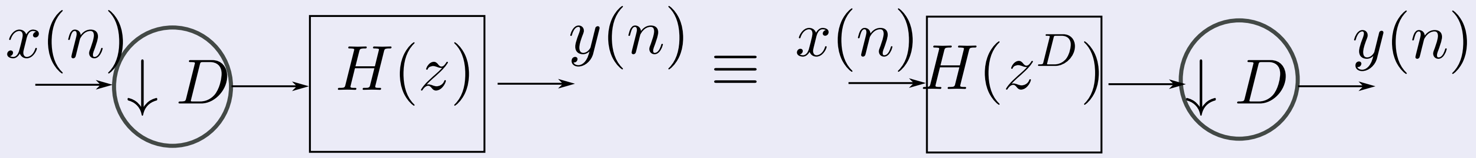
Decimación



Decimar y luego filtrar equivale a interpolar el filtro y luego decimar

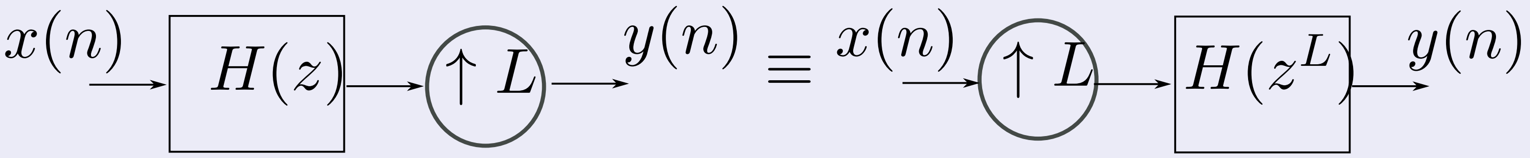
Identidades Multirate

Decimación



Decimar y luego filtrar equivale a interpolar el filtro y luego decimar

Interpolación

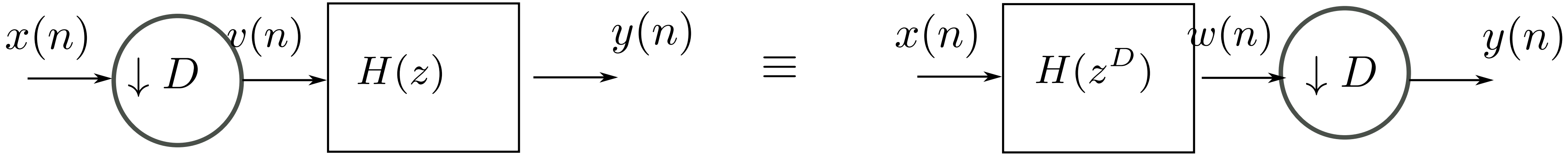


Filtrar y luego interpolar equivale a interpolar y luego filtrar con filtro interpolado.

Identidades Multirate

Estas identidades nos van a permitir armar estructuras eficientes para el procesamiento multirate. Para familiarizarnos con el manejo de estas expresiones, vamos a demostrar cada una de ellas.

1) Decimación:



$$W_D^k = \left(e^{-j\frac{2\pi}{D}}\right)^k$$

A partir del diagrama de la izquierda, tenemos:

$$Y(z) = H(z)V(z) \qquad V(z) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} X(z^{1/D}W_D^k)$$

$$V(w) = V(z)\Big|_{z=e^{jw}}$$

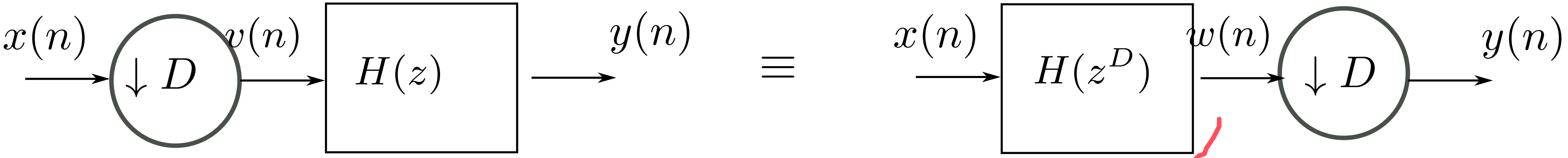
$$= \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} X\left(e^{j\frac{w}{D}}\, e^{j\frac{2\pi k}{D}}\right)$$

$$Y(z) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} H(z)X(z^{1/D}W_D^k) \tag{1}$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} X\left(\frac{w}{D} - \frac{2\pi k}{D}\right)$$

Identidades Multirate

1) Decimación:



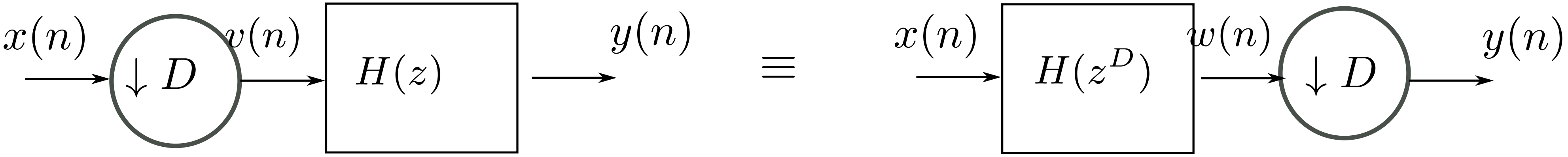
$x(n)$ $\downarrow D$ $v(n)$ $H(z)$ $y(n)$ $\equiv$ $x(n)$ $H(z^D)$ $w(n)$ $\downarrow D$ $y(n)$

Por otro lado, analizando el diagrama de la derecha resulta:

$$Y(z) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} \underline{W}\left(\boxed{z^{1/D}W_D^k}\right) \quad \text{y} \quad \underline{W}(z) = H(\boxed{z}^D)X(z)$$

Identidades Multirate

1) Decimación:



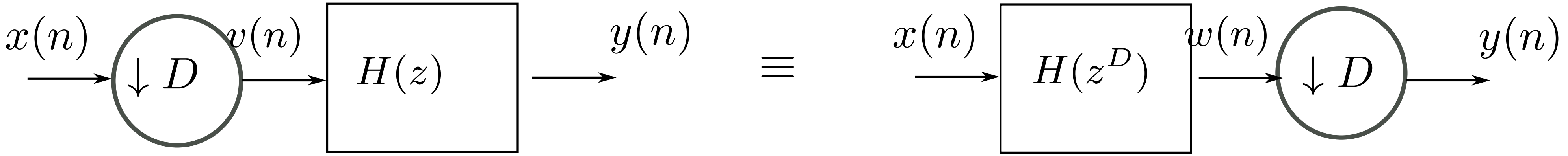
Por otro lado, analizando el diagrama de la derecha resulta:

$$Y(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} W(z^{1/D} W_D^k) \quad \text{y} \quad W(z) = H(z^D) X(z)$$

Recordando que $W_D^{\underline{kD}} = e^{\jmath \frac{2\pi}{\cancel{D}} \underline{k \cancel{D}}} = 1$, recuperamos el resultado en (1).

Identidades Multirate

1) Decimación:



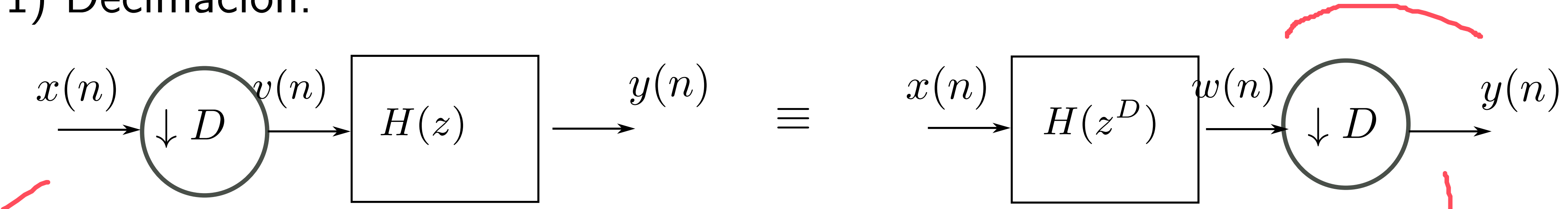
Haciendo el análisis en el tiempo, si tomamos el diagrama en de la izquierda tenemos:

$$v(n) = x(nD) \quad \& \quad y(n) = \sum_k h(k)v(n-k) \tag{2}$$

$$\boxed{y(n) = \sum_k h(k)x((n-k)D)} \tag{3}$$

Identidades Multirate

1) Decimación:



Haciendo el análisis en el tiempo, si tomamos el diagrama en de la izquierda tenemos:

$$v(n) = x(nD) \quad \& \quad y(n) = \sum_k h(k)v(n-k) \tag{2}$$

$$y(n) = \sum_k h(k)x((n-k)D) \tag{3}$$

Operando sobre el diagrama de la derecha, tenemos

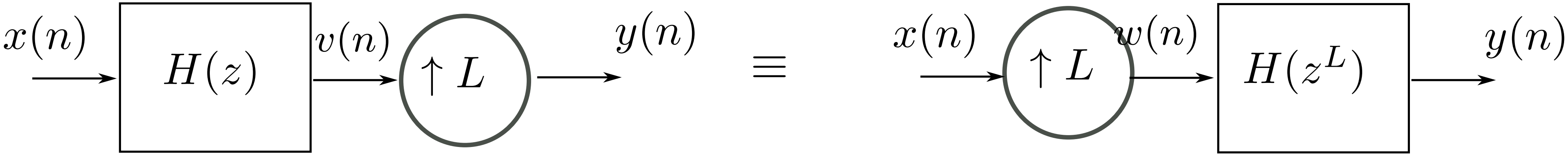
$$y(n) = w(\underline{nD}) \quad \& \quad w(n) = \sum_k h(k)x(n-kD)$$

nD

Nuevamente, recuperamos (2).

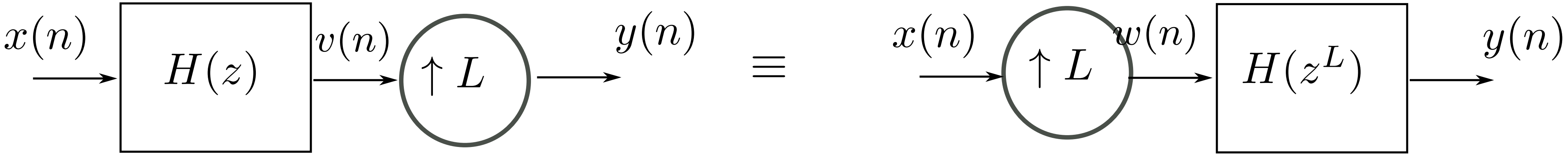
Identidades Multirate

2) Interpolación:



Identidades Multirate

2) Interpolación:



Comenzando por la izquierda, tenemos,

$$Y(z) = V(z^L) = H(z^L)X(z^L) \tag{4}$$

Identidades Multirate

2) Interpolación:

Comenzando por la izquierda, tenemos,

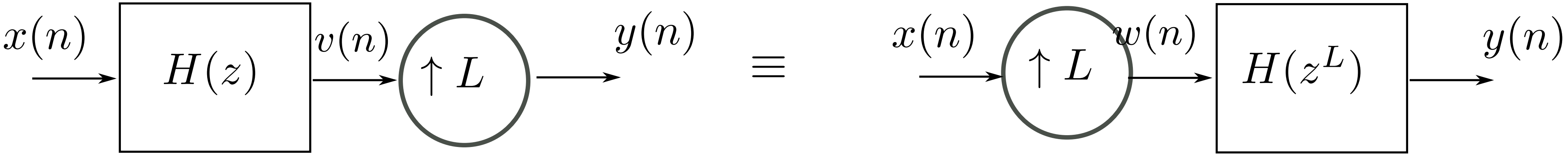
$$Y(z) = V(z^L) = H(z^L)X(z^L) \tag{4}$$

Por otro lado, trabajando con el diagrama a la derecha

$$Y(z) = H(z^L)W(z) = H(z^L)X(z^L) \tag{5}$$

Identidades Multirate

2) Interpolación:



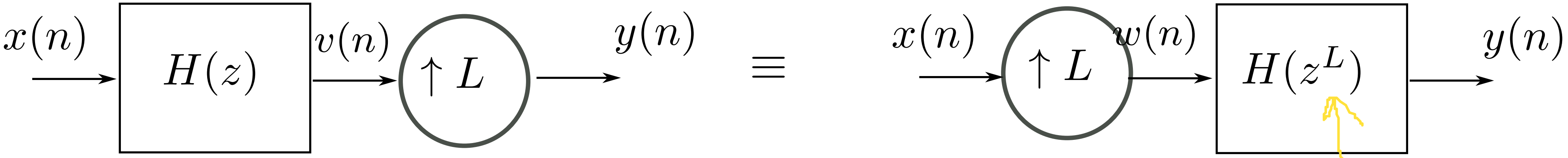
Con el análisis en el tiempo obtenemos para el bloque de la izquierda,

$$y(n) = \begin{cases} v(n/L) & n = kL \\ 0 & \end{cases} = \begin{cases} \sum_i h(i)x(n/L - i) & n = kL \\ 0 & \end{cases} . \quad (4)$$

donde usamos el hecho que $v(n) = \sum_i h(i)x(n - i)$.

Identidades Multirate

2) Interpolación:



Por otro lado, analizando el diagrama de la derecha, vemos que la respuesta impulsiva de $H(z^L)$ es

$X_{\uparrow L}(w) = X(Lw)$

$$h(0)\,\underbrace{0\cdots0}_{L-1}\,h(1)\,\underbrace{0\cdots0}_{L-1}\,h(2)\cdots$$

$f = \frac{f}{LF_s}$

y la señal interpolada $w(n)$ es

$z^L = |z|^L e^{jwL}$

$$x(0)\,\underbrace{0\cdots0}_{L-1}\,x(1)\,\underbrace{0\cdots0}_{L-1}\,x(2)\cdots$$

Al hacer la convolución de ambas secuencias, vemos que recuperamos (3).