Procesamiento de señales I

86.51

Cecilia G. Galarza

FIUBA
Laboratorio de Procesamiento de Señales y Comunicaciones

2do Cuatrimestre 2022

Diseño de Filtros Digitales FIR

Diseño con criterio de optimalidad

Diseño con criterio de optimalidad

El método de ventaneo es simple y robusto, pero no permite controlar riple y banda de transición.

Diseño con criterio de optimalidad

El método de ventaneo es simple y robusto, pero no permite controlar riple y banda de transición.
Es posible plantear un criterio de optimización que nos permita tener mayor control sobre estas especificaciones de diseño.

En esta sección vamos a plantear dos criterios de optimalidad para responder a esta pregunta:

- Método de cuadrados mínimos (LS)
- Método minmax (Filtro equiripple)

Sea $A_d(\omega)$ la amplitud del filtro que se desea aproximar. Por lo general, para un filtro pasabajo,

$$A_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_p \\ 0 & |\omega| \geq \omega_s. \end{cases}$$

Error de aproximación

Sea $A_d(\omega)$ la amplitud del filtro que se desea aproximar. Por lo general, para un filtro pasabajo,

$$A_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_p \\ 0 & |\omega| \geq \omega_s. \end{cases}$$

Planteamos el error de aproximación siguiente:

$$E(\omega) = V(\omega)|A_d(\omega) - A(\omega)|,$$

donde $V(\omega) > 0$ es una función de peso que establece un balance entre las distintas bandas del filtro.

Función de peso $V(\omega)$

Objetivo: minimizar $E(\omega) = V(\omega)|A_d(\omega) - A(\omega)|$

Función de peso $V(\omega)$

Si $V(\omega_1) > V(\omega_2)$ entonces $\underbrace{|A_d(\omega_1) - A(\omega_1)|}_{error\ en\ \omega_1} < \underbrace{|A_d(\omega_2) - A(\omega_2)|}_{error\ en\ \omega_2}$

Utilizando la función $V(\omega)$ se establece la importancia relativa de las distintas bandas de frecuencia.

Filtros FIR: breve recap

Antes de atacar el problema de optimización, vamos a retomar la expresión de $A(\omega)$ para poder trabajar con $E(\omega)$

Filtros FIR: breve recap

(Filmina de Teórica 1)

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-\jmath\left(\omega\frac{M-1}{2}+\phi\right)}$$

	M impar	M par
sim	Tipo I: $A(\omega) = h(\frac{M-1}{2}) + 2\sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n)\cos\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$ $\phi = 0$	Tipo II: $A(\omega) = 2\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n)\cos\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$ $\phi = 0$
asim	Tipo III: $A(\omega) = 2\sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n)\sin\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$ $\phi = \frac{\pi}{2}$	Tipo IV: $A(\omega) = 2\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n)\sin\omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$ $\phi = \frac{\pi}{2}$

Filtros FIR: breve recap

Utilizando igualdades trigonométricas y operando sobre $A(\omega)$ en cada caso, es posible demostrar que

$$A(\omega) = Q(\omega)P(\omega) \quad \text{donde} \quad P(\omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha_k \cos(\omega k)$$

	M impar	M par
sim	$\alpha_k = \begin{cases} h\left(\frac{M-1}{2}\right) & k=0 \\ 2h\left(\frac{M-1}{2}-k\right) & 1 \le k \le \frac{M-1}{2} \end{cases}$ $Q(\omega)=1 \quad , \quad L=\frac{M-1}{2}$	$\alpha_k = \begin{cases} h(\frac{M}{2}-1) & k=0 \\ 4h\left(\frac{M}{2}-k\right)-\alpha_{k-1} & 1 \le k \le \frac{M}{2}-2 \\ 4h(0) & k=\frac{M}{2}-1 \end{cases}$ $Q(\omega)=\cos(\frac{\omega}{2}) \quad , \quad L=\frac{M}{2}-1$
asim	$\alpha_k = \begin{cases} 2h(0) & k=\frac{M-3}{2} \\ 4h(1) & k=\frac{M-5}{2} \\ \alpha_{k+2}+4h(\frac{M-3}{2}-k) & 1 \le k \le \frac{M-7}{2} \\ \frac{1}{2}\alpha_2+2h(\frac{M-3}{2}) & k=0 \end{cases}$ $Q(\omega)=\sin(\omega) \quad , \quad L=\frac{M-3}{2}$	$\alpha_k = \begin{cases} 4h(0) & k=\frac{M}{2}-1 \\ \alpha_{k+1}+4h(\frac{M-2}{2}-k) & 1 \le k \le \frac{M}{2}-2 \\ \frac{1}{2}\alpha_1+2h(\frac{M-2}{2}) & k=0 \end{cases}$ $Q(\omega)=\sin\frac{\omega}{2} \quad , \quad L=\frac{M}{2}-1$

Diseño de cuadrados mínimos (LS)

Estamos listos para encarar el primer diseño con criterio de optimalidad.

Considere que $\mathcal{F}$ es un conjunto de filtros FIR con fase lineal.

Diseño LS

$$\min_{h(n)\in\mathcal{F}} \int_0^{+\pi} E^2(\omega)d\omega \tag{2}$$

- En (2) se minimiza la energía del error de aproximación
- La integral en (2) utiliza la propiedad de simetría hermítica de $H(\omega)$

Diseño LS

Vimos que para un filtro de fase lineal, tenemos $A(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$, donde $Q(\omega)$ depende sólo del tipo de filtro y

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha_k \cos(\omega k)$$

es función de la respuesta impulsiva $h(n)$ a través de los coeficientes α_k, y L depende del tipo de filtro.

Luego, reemplazando en (2), tenemos que el problema de optimización resulta

$$\min_{\alpha_k \in \mathbb{R}} \int_0^{+\pi} V^2(\omega) \left(A_d(\omega) - Q(\omega) \sum_{k=0}^{L} \alpha_k \cos(\omega k) \right)^2 d\omega \tag{3}$$

En (3) estamos minimizando una función convexa de α_k. Es decir, la solución existe y es única.

Diseño LS

Para hallar la solución, calculamos las derivadas parciales e igualamos a cero.

$$\frac{\partial \int_0^{\pi} E^2(\omega) d\omega}{\partial \alpha_k} =$$

$$-2 \int_0^{\pi} V^2(\omega) Q(\omega) \cos(\omega k) \left(A_d(\omega) - Q(\omega) \sum_{l=0}^{L} \alpha_l \cos(\omega l) \right) d\omega$$

Igualamos a cero para despejar las $L+1$ incógnitas α_l:

$$\underbrace{\int_0^{\pi} V^2(\omega) Q(\omega) A_d(\omega) \cos(\omega k) d\omega}_{g_k} = \sum_{l=0}^{L} \alpha_l \underbrace{\int_0^{\pi} V^2(\omega) Q^2(\omega) \cos(\omega k) \cos(\omega l) d\omega}_{f_{kl}}.$$

Diseño LS

$$g_k = \sum_{l=0}^{L} \alpha_l f_{kl} \qquad k = 0, 1, \cdots L.$$

Obtenemos sistema de $L+1$ ecuaciones

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{00} & \cdots & f_{0L} \\ \vdots & \vdots & \\ f_{L0} & \cdots & f_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{bmatrix}$$

Luego, utilizando las relaciones entre α_k y $h(n)$ del Tipo de filtro elegido se obtiene la solución buscada.

Diseño LS: Observaciones

- En Matlab, este diseño se puede experimentar con el comando `firls`. También se encuentra implementado en `fdatool`.
- Por lo general,

$$V(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta_s}{\delta_p} & \omega \in \Omega_p \text{ (banda de paso)} \\ 1 & \omega \in \Omega_s \text{ (banda de rechazo)} \\ 0 & \Omega_t \text{ (banda de transición)} \end{cases}$$

- Este método permite un buen compromiso entre riple y orden del filtro.
- Sin embargo, no hay garantía de que se cumplan las especificaciones deseadas. Muchas veces, se requieren varias iteraciones de diseño variando $V(\omega)$.

Ejercicios

Ej. 1

1. Demostrar que el problema de optimización que resuelve el método LS es convexo en α_k

$$\min_{\alpha_k \in \mathbb{R}} \int_0^{+\pi} V^2(\omega) \left(A_d(\omega) - Q(\omega) \sum_{k=0}^{L} \alpha_k \cos(\omega k) \right)^2 d\omega \qquad (4)$$

2. Demostrar que se obtiene la misma solución si la integral es en el intervalo $[-\pi, +\pi]$.

Filtro Equiriple

El criterio LS no garantiza un nivel de riple en toda la banda. Para ello, vamos a considerar ahora otro criterio de optimización.

Criterio de optimización min-max

Sea $S = \{\omega : |\omega| \leq \omega_p$ o $|\omega| \geq \omega_s\}$. Es decir, S es la unión de las bandas de paso y de rechazo. Luego, el filtro equiriple es aquel que resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\min_{h(n)\in\mathcal{F}} \max_{\omega\in S} |E(\omega)|,$$

Criterio MinMax (Filtro Equiriple)

Recordando que $A(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$, reagrupamos los términos de $E(\omega)$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= V(\omega)Q(\omega)\left[\frac{A_d(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega)\right] \\ &= \hat{V}(\omega)\left[\hat{A_d}(\omega) - P(\omega)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

El problema (5) tiene algunas propiedades notables. En particular, si $P(\omega)$ puede ser expresada como un polinomio, la solución es única.

Vimos que $P(\omega) = \sum_k \alpha_k \cos(\omega k)$. Es posible expresar $\cos(\omega k)$ como un polinomio en $\cos \omega$?

Polinomios de Tchebyshev (definición trigonométrica)

El polinomio de Tchebyshev de 1er orden es el único polinomio de orden k que satisface

$$T_k(x) = \sum_{m=0}^{k} \beta_m x^m = \cos\left(k \operatorname{acos} x\right), \qquad |x| \leq 1$$

Filtro Equiriple

La familia $\{T_k(x)\}$ nos permite plantear

$$\cos \omega k = T_k(\cos \omega) = \sum_{m=0}^{k} \beta_m (\cos(\omega))^m$$

Luego,

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha_k \cos(\omega k) = \sum_{k=0}^{L} \alpha_k \sum_{m=0}^{k} \beta_m (\cos(\omega))^m = \sum_{k=0}^{L} \alpha'_k (\cos(\omega))^k,$$

Reemplazando esta expresión en (5) tenemos,

$$E(\omega) = \hat{V}(\omega)\left[\hat{A}_d(\omega) - P(\omega)\right] = \boxed{\hat{V}(\omega)\left[\hat{A}_d(\omega) - \sum_{k=0}^{L} \alpha'_k (\cos(\omega))^k\right]}$$

Filtro Equiriple

El criterio min-max busca entonces el polinomio de orden L que mejor aproxime uniformemente a $\hat{A}_d(\omega)$.

$$\min_{h(n)\in\mathcal{F}} \max_{\omega\in S} \left| \hat{V}(\omega) \left[\hat{A}_d(\omega) - \sum_{k=0}^{L} \alpha_k' (\cos(\omega))^k \right] \right|.$$

La solución a este problema la encontraron Parks y Mc Clellan con el Teorema de la alternancia.

Solución del problema de aproximación min-max

Teorema de la Alternancia

Sea $S \subset [0, \pi)$ una unión de intervalos cerrados en $[0, \pi)$. Considere una función positiva $\hat{V}(\omega)$ continua en S y el error de aproximación

$$E(\omega) = \hat{V}(\omega) \left[\hat{A}_d(\omega) - \sum_{k=0}^{L} \alpha'_k (\cos(\omega))^k \right].$$

Existe un **único** conjunto de valores $\alpha'_0, \cdots \alpha'_L$ que resuelve el problema min-max

$$\min_{\alpha'_k} \max_{\omega \in S} |E(\omega)|$$

si y sólo si existen **por lo menos** $L+2$ frecuencias en S, $\omega_1 \leq \cdots \leq \omega_{L+2}$, tal que

$$E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1}) \quad \text{y} \quad |E(\omega_i)| = \max_{\omega \in S} |E(\omega)|.$$

Las frecuencias ω_i son conocidas como frecuencias extremas.

Mostración del Teorema de la alternancia

- $E(\omega) = \hat{V}(\omega)\left[\hat{A}_d(\omega) - \sum_{k=0}^{L} \alpha'_k (\cos(\omega))^k\right]$ es un polinomio de $\cos(\omega)$ de orden L. Luego, tiene $L-1$ puntos extremos.
- $S = \cup_{i=1}^{b}[\omega_{1_i}, \omega_{2_i}]$ es la unión de b intervalos cerrados disjuntos. Luego, de las $2b$ frecuencias borde ω_{1_i} y ω_{2_i} pueden ser puntos extremos.
- El teorema de alternancia nos dice que para arribar a la solución óptima, por lo menos 3 de las frecuencias borde deben ser extremos.

Diseño de Filtro Equiriple I

Cómo juntamos el resultado del Teo. de Alternancia con el Diseño del filtro?

Volviendo a las especificaciones de un filtro PB, vemos que

$$1 - \delta_p \leq A(\omega) \leq 1 + \delta_p \qquad |\omega| \leq \omega_p$$

y

$$-\delta_s \leq A(\omega) \leq \delta_s \qquad |\omega| \geq \omega_s.$$

Por otro lado, consideremos

$$V(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta_s}{\delta_p} & \omega \in \Omega_p \\ 1 & \omega \in \Omega_s \end{cases}$$

Diseño de Filtro Equiriple II

Sea $\delta = \max_{\omega \in S} |E(\omega)|$. De acuerdo al Teo. de Alternancia, hay por lo menos $L+2$ frecuencias extremas

$$E(\omega_i) = \hat{V}(\omega_i)\left[\hat{A}_d(\omega_i) - \sum_{k=0}^{L} \alpha'_k \cos^k(\omega_i)\right] = (-1)^i\delta, \qquad i = 1, \cdots L+2.$$

En este sistema de ecuaciones, las incógnitas son: $\omega_1, \cdots, \omega_{L+2}$, δ, $\alpha'_0, \cdots \alpha'_L$.

Solución: Algoritmo de Remez (diagrama de flujo de [2])

Diseño de Filtro Equiriple

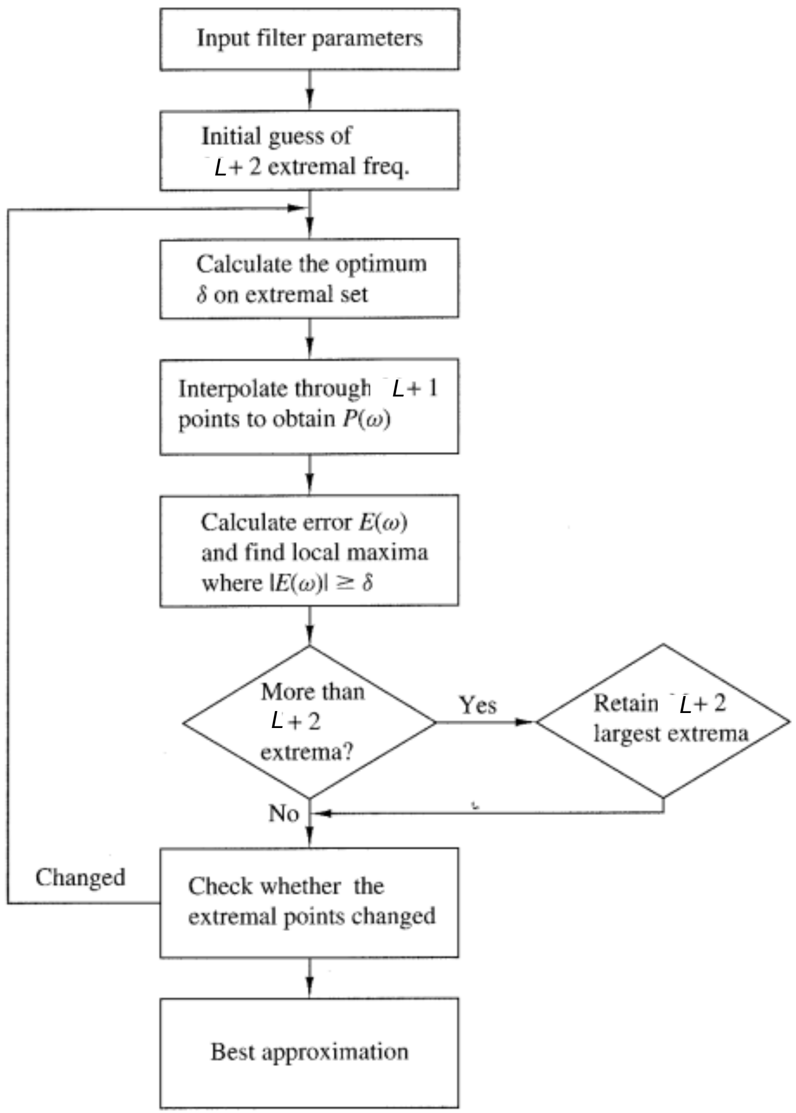

Figure 10.2.16 Flowchart of Remez algorithm.

- Elegir $L+2$ frecuencias extremas
- Calcular δ como solución del sistema de ecuaciones
- Calcular α'_k como solución de interpolación del polinomio $P(\omega)$
- Calcular error $E(\omega)$ en una grilla densa y renovar las frecuencias extremas.

Como el resultado va a tener por lo menos $L+2$ frecuencias extremas, va a ser el filtro óptimo que buscamos.

Diseño de Filtro Equiriple:Recap

- El algoritmo de Remez obtiene $P(\omega)$
- La respuesta en frecuencia va a depender de $Q(\omega)$ que queda determinada por el Tipo de filtro elegido por el diseñador
- A partir de $P(\omega)$ se obtiene la respuesta impulsiva del filtro (ver cuadro en filmina 46)

Resumen Filtros FIR

- Son filtros con fase lineal generalizada. Sin embargo, esta fase puede representar un retardo muy grande si el orden es alto (por qué?)
- Método de ventaneo: el más sencillo e intuitivo, pero no hay control sobre riple ni banda de transición
- Filtro LS: el diseño sigue un criterio de optimización, pero requiere varias iteraciones para alcanzar las especificaciones
- Filtro equiriple: otro diseño basado en un criterio óptimo. Permite controlar M, ω_p, ω_s, y δ_p/δ_s.

En la actualidad, la gran mayoría de librerías numéricas tienen rutinas de diseño de filtros. La idea es utilizar estas rutinas conociendo cuáles son las limitaciones y alternativas de cada método de diseño.