Ejercicio 4
Masa, resorte y amortiguador
con desconocimiento del ruido de medición

Ejercicio 4

Asumiendo la mismas condiciones del ejercicio anterior, utilizando $\sigma_b^2 = 0{,}2$ para construir la covarianza de ruido de proceso Q_d, supongamos que ahora desconocemos con exactitud la varianza del ruido de medición σ_w^2.

(a) Genere primero las mediciones reales usando la verdadera varianza del ruido $\sigma_w^2 = 0{,}025$.

Ejercicio 4-b

(b) Bajo la suposición de que el ruido de medición es alto, asuma una matriz de covarianza de medición $R = 2{,}5$. Aplique el algoritmo de Kalman, grafique los estados estimados comparados con los reales. Observe también la autocorrelación de las innovaciones.

Ejercicio 4

(c) Ahora suponga el caso contrario, es decir, confíe en que el ruido de medición es muy bajo, asumiendo que la covarianza de medición es $R = 0,00025$. Aplique el algoritmo de Kalman, grafique los estados estimados comparados con los reales y también las innovaciones. ¿Qué observa entre los resultados de este ítem, el anterior y el caso en el que R es la real?

Ejercicio 4-d

(d) Simule nuevamente el algoritmo guardando las componentes de la ganancia de Kalman en función del tiempo y parametrícelos con distintos valores de varianza del ruido de medición $\sigma_w^2 = \{0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5\}$ y observe cómo influye este parámetro en la ganancia del filtro.

Ejercicio 5

Masa, resorte y amortiguador

Covarianza del error de estados y condiciones iniciales

Ejercicio 5

Considerando nuevamente el sistema del Ejercicio 3, para $\sigma_b^2 = 0{,}2$ y $\sigma_w^2 = 0{,}025$, vamos a analizar el comportamiento para diferentes covarianzas iniciales $P_{0/-1}$ del error de estimación de los estados. Para ello vamos a suponer una condición inicial lejana a los verdaderos estados iniciales, por ejemplo $\hat{\mathbf{x}}_{0/-1} = [0{,}3\ \ \text{-}0{,}4]^t$.

Ejercicio 5

(a) Para una matriz de covarianza inicial $P_{0/-1} = \text{diag}\{0.02, 0.001\}$ (baja), utilice el algoritmo de Kalman para estimar los estados y la autocorrelación de las innovaciones.

Ejercicio 5

(b) Repita el ítem anterior pero esta vez con una matriz de covarianza inicial $P_{0/-1} = \mathrm{diag}\{20, 1\}$ (alta). ¿Qué diferencias observa respecto del punto anterior y a qué cree que se deben?

Ejercicio 5

(c) Realice varias simulaciones para distintas covarianzas iniciales $P_{0/-1} = \alpha\, \mathrm{diag}\{20, 1\}$, donde $\alpha = \{10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001\}$ es un parámetro de escalamiento, y grafique las componentes de la ganancia de Kalman $K = [K_1 \;\; K_2]^t$ en función del tiempo parametrizadas con α. ¿Qué puede concluir acerca de cómo influye la covarianza inicial en el algoritmo?

Ejercicio 6

Masa, resorte y amortiguador
Filtro de Kalman Estacionario

Ejercicio 6

Para el mismo sistema del Ejercicio 3, considerando $\sigma_b^2 = 0{,}2$ y $\sigma_w^2 = 0{,}025$, se quieren estimar los estados utilizando la ganancia de Kalman en la condición estacionaria y compararla para distintas condiciones iniciales.

(a) Calcule la covarianza estacionaria mediante la función `P=dare(Fd',H',Qd,R)` de matlab y con ella obtenga K.

(b) Para una condición inicial lejana a la real $\hat{\mathbf{x}}_{0/-1} = [0{,}3 \ \ \text{-}0{,}4]^t$, implemente el algoritmo de Kalman estacionario utilizando la ganancia calculada en el punto anterior. Grafique los estados obtenidos con este método y compárelos con los estados utlizando el filtro de Kalman convencional.

(c) Para una condición inicial cercana a la real $\hat{\mathbf{x}}_{0/-1} = [\text{-}0{,}04 \ \ 0{,}46]^t$, grafique nuevamente los estados estimados con Kalmam estacionario y no estacionario. Analice ventajas y desventajas de este método.

Ejercicio 7
Covarianza de ruido de proceso en tiempo discreto Qd

Ejercicio 7

Un sistema es modelado en tiempo continuo mediante el espacio de estados con la matriz A, suponiendo que existe un vector de ruido de proceso $\mathbf{v}(t)$ debido a la incertidumbre del modelo:

Se asume que el ruido de proceso es blanco de media nula y matriz de covarianza en tiempo continuo $Q = E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(t)^T]$. Si se discretiza el sistema, con un periodo de muestreo T para los instantes $t_k = kT$, la ecuación de estados puede reescribirse como $\mathbf{x}_{k+1} = F_d\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$, donde el vector de ruido de proceso en tiempo discreto resulta:

$$\mathbf{v}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A\,(t_{k+1}-t)}\,\mathbf{v}(t)\,dt,$$

Ejercicio 7

(a) Demuestre que con esta definición, la matriz de ruido de proceso para tiempo discreto Q_d se puede expresar como:

$$Q_d = \int_0^T e^{Ah}\, Q\, e^{A^T h} dh,$$

(b) Demuestre que para una aproximación de segundo orden de la matriz de transición de estados e^{AT}, la matriz de covarianza de ruido del proceso Q_d resulta:

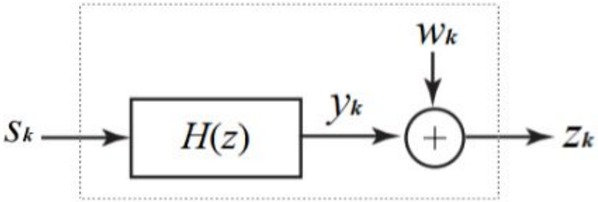
$$Q_d = QT + \left(AQ + QA^H\right)\frac{T^2}{2} + \left(A^2Q + QA^{2H}\right)\frac{T^3}{6} + AQA^H\frac{T^3}{3} + \left(A^2QA^H + AQA^{2H}\right)\frac{T^4}{8} + A^2QA^{2H}\frac{T^5}{20}$$

Ejercicio 8
Ecualizador

Ejercicio 8

Una secuencia de datos binarios se transmiten a través de un canal de comunicaciones con respuesta impulsiva h_k y ruido blanco gaussiano de media nula y varianza σ_w^2 a la salida, tal que $y_k = h_0\, s_k + h_1\, s_{k-1} + h_2\, s_{k-2}$, como se indica en la figura.

Suponiendo que se conocen los coeficientes del canal, se desea implementar un ecualizador que permita recuperar la secuencia de datos s_k mediante un filtro de Kalman. Para ello se dispone de las observaciones $z_k = y_k + w_k$ a la salida del sistema de comunicaciones.



Ejercicio 8

(a) Defina la ecuación de estados y de observaciones. Identifique las matrices F y H. ¿En este caso el ruido de proceso proviene de un error de modelado o de una entrada al sistema?.

(b) Genere la secuencia de datos descorrelacionados $s_k = 2b_k - 1$ con $b_k \sim$Bernoulli(0.5), de largo $N = 1000$. Luego la salida z_k con $h_k = \{0{,}4 \;\; -0{,}3 \;\; 0{,}2\}$ y $\sigma_w^2 = 10^{-4}$.

(c) Implemente el filtro de Kalman para condiciones iniciales nulas para estado $\mathbf{x}_{0/0} = \mathbf{0}$ y con una covarianza inicial de los estados $P_{0/0} = \text{diag}\{10, \; 10, \; 10\}$. Elija el estado que estima a s_k y compárelo con la secuencia de datos original. Por otro lado, calcule la autocorrelación de las innovaciones y grafíquela.