

## Exámen Final - Primera Fecha

### Procesamiento de Señales I

#### Problema 1

En este ejercicio, queremos estimar la variable aleatoria normal  $A$  de media nula y varianza  $\sigma^2$  a partir de la observación de

$$y(n) = A + v(n)$$

donde  $v(n)$  es ruido blanco gaussiano independiente de  $A$ , con media nula y varianza unitaria.

- Obtenga un modelo de estados considerando que el estado del sistema es  $x(n) = A$ .
- Obtenga el filtro de Kalman que permite estimar  $\hat{A}[n] = \hat{x}[n|n-1]$ . Resolviendo el filtro, obtenga el valor de  $\hat{A}[n]$  en función de  $\sigma^2$  y las observaciones  $y(0), \dots, y(n-1)$ .
- Obtenga el valor de la ganancia de Kalman en régimen asintótico resolviendo la ecuación discreta de Ricatti para este caso. La solución de Ricatti es estabilizante? Fundamente su respuesta.
- Considere ahora el problema planteando un modelo de estados donde  $x(n) = A + w(n)$ , siendo  $w(n)$  un ruido blanco, descorrelacionado con  $A$  y  $v(n)$  y de varianza  $\sigma_w^2$ . Cómo varía la solución asintótica en este caso? Explique su respuesta.

*Ayuda:* Recuerde que las ecuaciones del filtro de Kalman son:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \Sigma_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* [\mathbf{H}_k \Sigma_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}[k|k] &= \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}[k|k-1]) \quad \hat{\mathbf{x}}[0|-1] = \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \Sigma_{k|k} &= \Sigma_{k|k-1} - \Sigma_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* [\mathbf{H}_k \Sigma_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k]^{-1} \mathbf{H}_k \Sigma_{k|k-1} \quad \Sigma_{0|-1} = \mathbf{P}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}[k+1|k] &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}[k|k] \\ \Sigma_{k+1|k} &= \mathbf{F}_k \Sigma_{k|k} \mathbf{F}_k^* + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^* \end{aligned}$$

#### Problema 2

Un vehículo situado a una distancia  $r$  de un radar Doppler, se mueve con velocidad constante  $v$ . La señal que emite el radar es  $x(t) = \alpha e^{j\omega t}$  y el rebote sobre el vehículo recibido en el radar es

$$y(t) = \beta e^{j(\omega t - 2\omega(\frac{r+vt}{c}))} + w(t)$$

donde  $\beta$  depende de la atenuación del medio,  $c$  es la velocidad de la luz, y  $w(t)$  es una componente de ruido.

- Determine si es posible plantear el problema de modo que se pueda aplicar análisis espectral para estimar  $v$ .
- Qué condiciones debe cumplir  $w(t)$ ? Fundamente su respuesta