Suavizado (ventana fija, en general l = {n-N, … , n+N}-→ l = {0 , … ,M}):

$$R_{xy}(n-l) = \sum_{m=0}^{M} k_{nm} R_y(m-l) \qquad l = 0, \cdots M.$$

$$\mathbf{k}_n = [k_{n0}, \ \cdots \ , \ k_{nM}].$$

$\hat{x}[n] = \mathbf{k}_n \mathbf{y}$ y las ecuaciones normales resultan

$$\mathbf{R}_{x\mathbf{y}}[n] = \mathbf{k}_n \mathbf{R}_{\mathbf{y}}.$$

Filtrado (ventana fija):

$$R_{xy}(n-l) = \sum_{m=n-M}^{n} k_{nm} R_y(m-l) \qquad l = n-M, \cdots n.$$

$$\mathbf{R}_{x\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} R_{xy}(M) & \cdots & R_{xy}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{x\mathbf{y}}[M]$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} R_y(0) & \cdots & R_y(-M) \\ & \ddots & \\ R_y(M) & \cdots & R_y(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_n = \begin{bmatrix} k_{n,n-M} & \cdots & k_{n,n} \end{bmatrix}$$

Kalman

: Recuerde que las ecuaciones del filtro de Kalman son:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* \left[\mathbf{H}_k \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k \right]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}[k|k] = \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] \right) \qquad \hat{\mathbf{x}}[0|-1] = \bar{\mathbf{x}}_0$$

$$\mathbf{\Sigma}_{k|k} = \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} - \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* \left[\mathbf{H}_k \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^* + \mathbf{R}_k \right]^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{\Sigma}_{k|k-1} \qquad \mathbf{\Sigma}_{0|-1} = \mathbf{P}_0$$

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}[k|k]$$

$$\mathbf{\Sigma}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \mathbf{\Sigma}_{k|k} \mathbf{F}_k^* + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^*$$

Teorema: Solución estabilizante

Supongamos que $\mathbf{F}$ es estable. Luego, existe una única solución estabilizante Σ si y sólo si $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ es observable y $(\mathbf{F}, \mathbf{G}\mathbf{Q}^{1/2})$ es controlable. Más aún, $\Sigma \geq 0$.

CONT: $rang([G\ FG\ F^2G \ldots F^{n-1}G]) = n$ OBSERV: $rang([H HF HF^2 \ldots HF^{n-1}]^T) = n$

- Si $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ es observable y $(\mathbf{F}, \mathbf{G}\mathbf{Q}^{1/2})$ es controlable, el filtro de Kalman asintótico resulta

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1|k] = [\mathbf{F} - \Gamma\mathbf{H}]\,\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \Gamma\mathbf{y}(k)$$

es la ec. de un [illegible]

obs. LQG

donde

$$\Gamma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^* \left[\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right]^{-1}$$

A menos que este en el infinito esta ganancia no es consstante

y $\Sigma \geq 0$ es la única solución de

$$\Sigma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^* - \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^* \left(\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{H}\Sigma\mathbf{F}^* + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^*$$

DARE:Discrete-time Algebraic Ricatti Equation

$$\Sigma = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^* - \mathbf{F}\Sigma\mathbf{H}^* \left(\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^* + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{H}\Sigma\mathbf{F}^* + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^* \qquad \text{(DARE)}$$

Ecuación algebraica de Ricatti

$$\Sigma_{k+1|k} = (\mathbf{F}_k - \Gamma_k\mathbf{H}_k)\,\mathbf{Cov}[\tilde{\mathbf{x}}(k), \tilde{\mathbf{x}}(k)]\,(\mathbf{F}_k - \Gamma_k\mathbf{H}_k)^* + \begin{bmatrix}\mathbf{G}_k & -\Gamma_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_k & \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_k^* & \mathbf{R}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G}_k^* \\ -\Gamma_k^*\end{bmatrix}$$

Filtrado adaptativo $0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}}$ $\quad entonces \quad wn --> w_{optimo}$

Filtrado de Wiener utilizando Steepest-descent

Luego de obtener $\mathbf{w}_n$, la siguiente actualización es

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu\left(\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\mathbf{w}_n - \mathbf{R}_{x\mathbf{y}}^*\right) \qquad n = 0, 2, \cdots$$

Algoritmo LMS

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{n+1} &= \mathbf{k}_n - \mu\left(\mathbf{y}[n]e(n)^*\right) \\ &= \mathbf{k}_n - \mu\left[\mathbf{y}[n]\left(\mathbf{k}_n{}^*\mathbf{y}[n] - x(n)\right)^*\right]\end{aligned}$$

NLMS

$$\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{k}_n - \frac{\mu_{norm}}{||\mathbf{y}[n]||^2}\mathbf{y}[n]e(n)^*$$

- Inicializar el algoritmo
  - $\mathbf{P}(0) = \delta^{-1}\mathbb{I}$
  - $\mathbf{w}(0) = 0.$
- Para cada instante n, computar
  - Actualización *a priori*
    Ganancia: $\mathbf{k}(n) = \frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathrm{conj}(\mathbf{y}[n])}{1+\lambda^{-1}\mathbf{y}[n]^t\mathbf{P}(n-1)\mathrm{conj}(\mathbf{y}[n])}$
    Error: $\epsilon(n) = x(n) - \mathbf{w}(n-1)^t\mathbf{y}[n]$
  - Actualización *a posteriori*
    Pesos: $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{k}(n)\epsilon(n).$
    Correlación: $\mathbf{P}(n) = \lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1) - \lambda^{-1}\mathbf{k}(n)\mathbf{y}[n]^t\mathbf{P}(n-1)$
    Estimación: $\hat{x}(n) = \mathbf{w}(n)^t\mathbf{y}[n]$