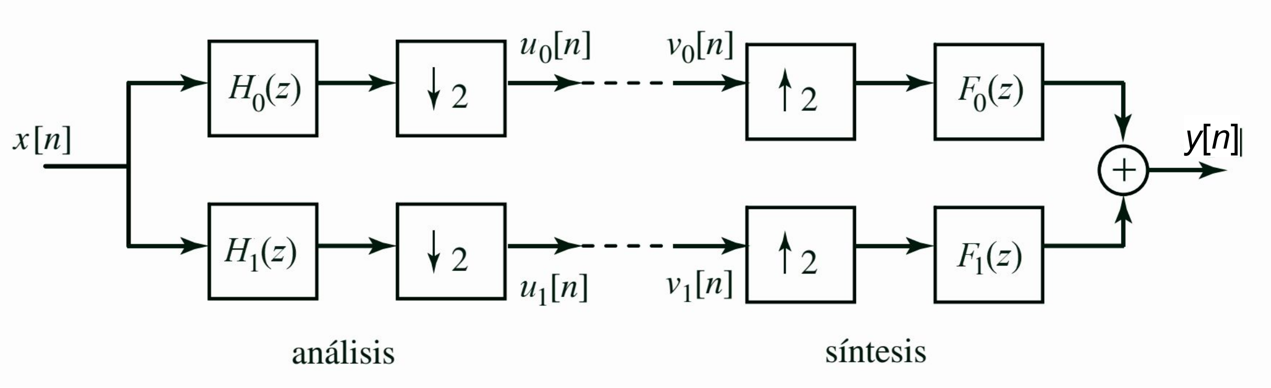
Actividad 1
Banco de filtros QMF

En la Figura se muestra un banco de filtros FIR de dos canales máximamente decimado. Por un lado, el *banco de análisis*, conformado por un filtro pasa bajos $H_0(z)$ y un filtro pasa altos $H_1(z)$ para ambos canales. Por otra parte, tenemos el *banco de síntesis*, ambos canales con filtros pasa bajos $F_0(z)$ y pasa altos $F_1(z)$ luego de los expansores, sintetizando al final la señal de salida y[n].



Actividad 1

Banco de filtros QMF

a) Aplicando las definiciones de submuestreo y sobremuestreo, demuestre que la salida Y(z) se puede escribir como se indica en la siguiente ecuación:

$$Y(z) = T(z)X(z) + A(z)X(-z)$$

donde

$T(z) = 0{,}5(\ H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)\ )$ es la transferencia total del sistema y

$A(z)=0{,}5(\ H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)\ )$ es el término de aliasing producido debido a las decimaciones.

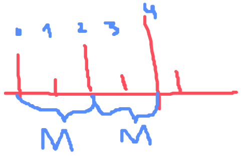
b) Determine los filtros $F_0(z)$ y $F_1(z)$ en función de $H_0(z)$ y $H_1(z)$, respectivamente, tal que se puedan eliminar completamente los términos de aliasing.

Actividad 1

Banco de filtros QMF

Submuestreo

$$X(z) \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow Y(z)$$



$m \leftarrow m/M$

Periodo 2pi y luego decimado en M

$W = \frac{2\pi \ell}{M}$

$$Y(z) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^{\ell}) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{w}{M}} e^{-j\frac{2\pi \ell}{M}}\right)$$

$$W_M = e^{-2\jmath\pi/M}$$ ← Va a ser periodica, M

En términos de energía: estoy tomando una muestra cada M, lo que hace que mi energía solo sea 1/M del total de muestras.

Sobremuestreo

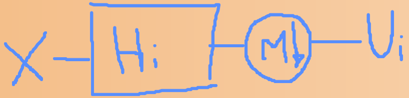
$$X(z) \longrightarrow \boxed{\uparrow M} \longrightarrow Y(z)$$

$$Y(z) = X(z^M) \qquad \sum X(e^{wM})$$

En el sobremuestreo no agrego ni quito energía, pues la energía están en las muestras con amplitud distinto de cero, sobremuestrear solo agrega muestras nulas, no cambia la energía total

Actividad 1

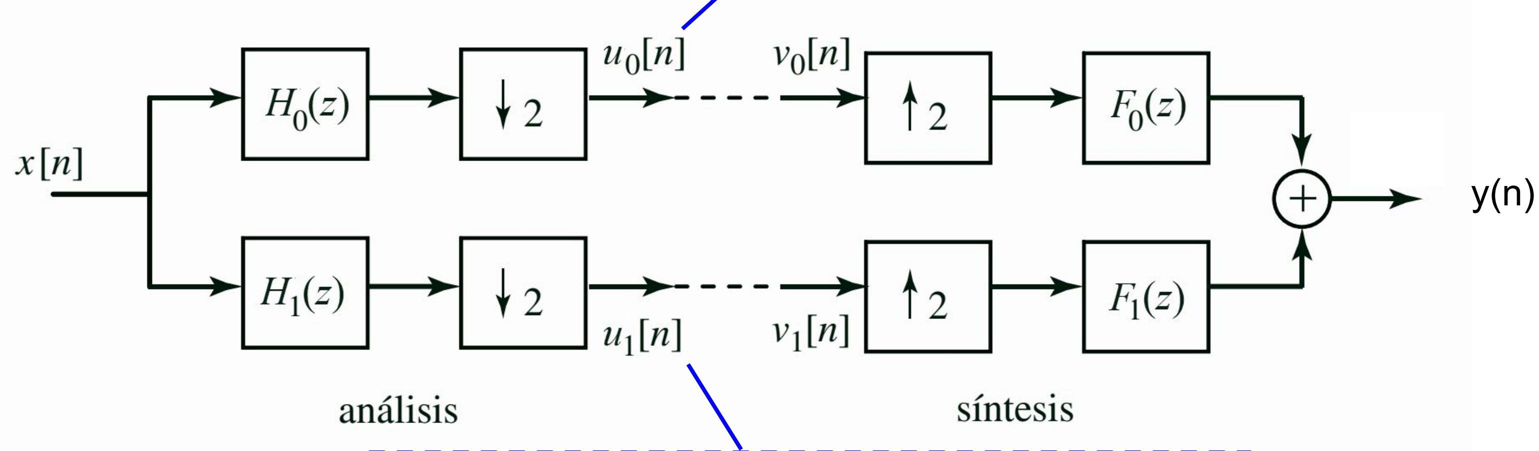
Banco de filtros QMF



$e^{-\pi}=-1$

$$U_i(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H_i\Big(z^{\frac{1}{M}}\underbrace{e^{-j\frac{2\pi k}{M}}}_{W_M^k}\Big)X\Big(z^{\frac{1}{M}}\underbrace{e^{-j\frac{2\pi k}{M}}}_{W_M^k}\Big) \xrightarrow[K=\{0,1\}]{M=2} U_i(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} H_i(z^{\frac{1}{2}}e^{-j\pi k})X(z^{\frac{1}{2}}e^{-j\pi k})$$

$$\boxed{U_0(z) = \frac{1}{2}\left(H_0(z^{\frac{1}{2}})X(z^{\frac{1}{2}}) + H_0(-z^{\frac{1}{2}})X(-z^{\frac{1}{2}})\right)}$$

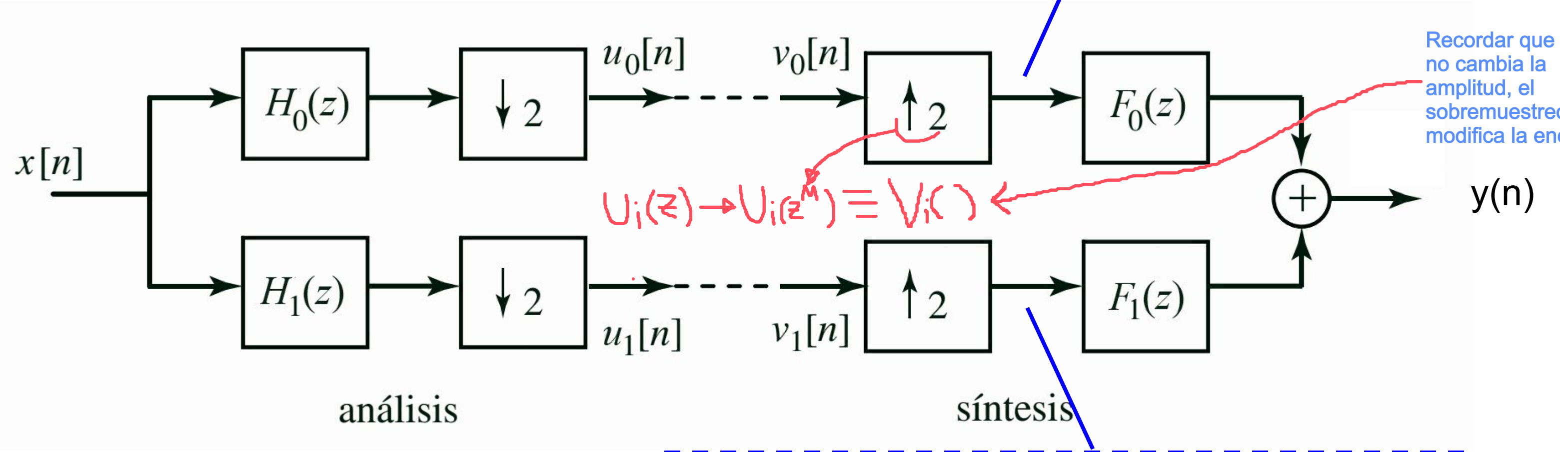


$$\boxed{U_1(z) = \frac{1}{2}\left(H_1(z^{\frac{1}{2}})X(z^{\frac{1}{2}}) + H_1(-z^{\frac{1}{2}})X(-z^{\frac{1}{2}})\right)}$$

Actividad 1
Banco de filtros QMF

$V_i(z^M)$ $\xrightarrow{M=2}$ $\mathbf{V_i(z^2)}$

$$V_0(z^M) = \frac{1}{2}(H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z))$$



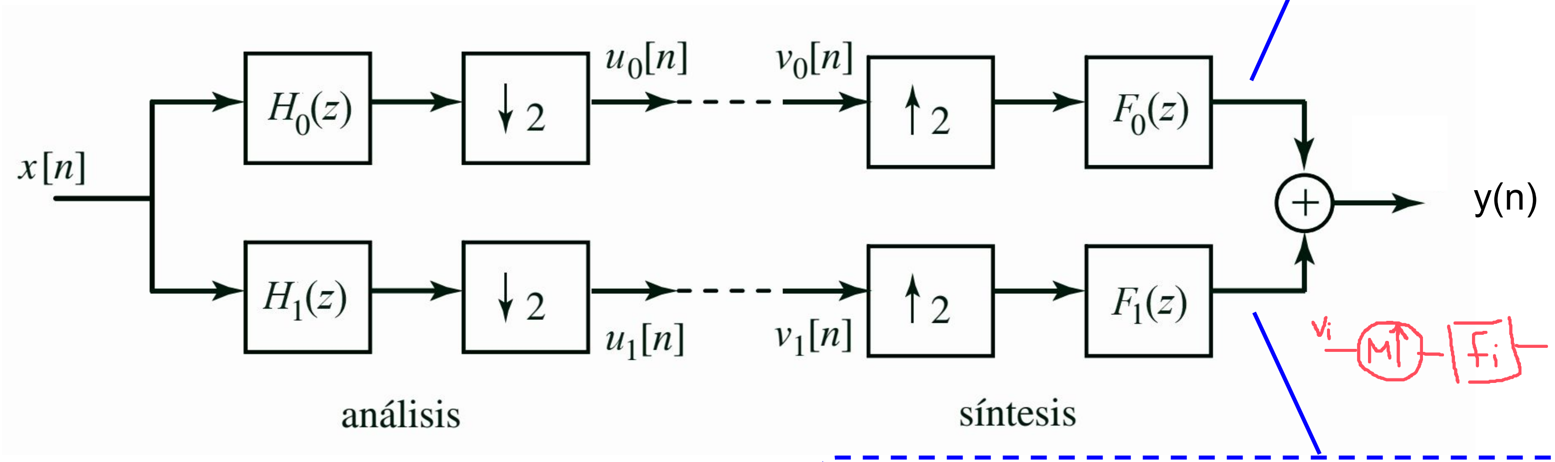
Recordar que acá no cambia la amplitud, el sobremuestreo no modifica la energía

$$V_1(z^M) = \frac{1}{2}(H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z))$$

Actividad 1

Banco de filtros QMF

$$\frac{1}{2}\left(H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)\right) F_0(z)$$



$$\frac{1}{2}\left(H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)\right) F_1(z)$$

Actividad 1
Banco de filtros QMF

SUMO LA PARTE DE ARRIBA Y ABAJO

son iguales

$$Y(z) = \frac{1}{2}(H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z))\,F_0(z) + \frac{1}{2}(H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z))\,F_1(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{2}(H_0(z)X(z)F_0(z) + H_0(-z)X(-z)F_0(z)) +$$

$$+ \frac{1}{2}(H_1(z)X(z)F_1(z) + H_1(-z)X(-z)F_1(z))$$

Saco factor común X(z) y X(-z) y obtengo las transferencias

Alias

$$Y(z) = \underbrace{\frac{1}{2}(H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z))}_{T(z)}X(z) + \underbrace{\frac{1}{2}(H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z))}_{A(z)}X(-z)$$

$$Y(z) = T(z)\,X(z) + \underbrace{A(z)}_{\neq T(-z)}\,X(-z)$$

Actividad 1

Banco de filtros QMF

Caso M=2

$$T(z) = \frac{1}{2}[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]$$

$$A(z) = \frac{1}{2}[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]$$

Actividad 1
Banco de filtros QMF (b)

1ro: Para que el aliasing sea cero, debe anularse el término A(z):

$$A(z) = \frac{1}{2}\underbrace{[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]}_{} = 0$$

$H_0(z) = H_1(-z)$

recordar que H1 esta basado en H0 y lo mismo para F1 que esta basada en F0.

Entonces F0 no puede ser F1 jamas!

$$H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0$$

$$H_0(-z)F_0(z) = -H_1(-z)F_1(z)$$

Esto se cumple si:

$$\boxed{F_0(z) = H_1(-z) \qquad F_1(z) = -H_0(-z)}$$

Actividad 1
Banco de filtros QMF

c) Si se requiere la condición de reconstrucción perfecta (PR), tal que

$y(n)=c.x(n-k)$ o bien **$T(z)=cz^{-k}$** (con c una constante real y k un entero para asegurar causalidad),

demuestre que para un banco de filtros QMF (*Quadrature Mirror Filter*) el cual cumple

$H_1(z) = H_0(-z)$,

la respuesta impulsiva de $H_0(z)$ sólo puede ser de dos coeficientes y con respuesta impulsiva

$h_0(n) = c_0\delta(n-2n_0) + c_1\delta(n-2n_1-1)$.

¿Qué condición deben cumplir c_0 y c_1 para que el filtro sea FLG?.

d) A partir de los resultados anteriores, determine las respuestas impulsivas del resto de los filtros del banco QMF, $h_1(n)$, $f_0(n)$ y $f_1(n)$.

Actividad 1
Banco de filtros QMF

c) 1ro Transferencia (con aliasing cero) $A(z)=0$

$$T(z) = \frac{1}{2}[H_0(z)\underbrace{F_0(z)}_{H_0(z)} + H_1(z)\underbrace{F_1(z)}_{H_0(-z)\,\cdot\,-H_0(-z)}]$$

$$F_0(z) = H_1(-z) \qquad F_1(z) = -H_0(-z)$$

$A(z)=0$

Condición QMF

$$H_1(z) = H_0(-z)$$

Transferencia de un banco QMF

$$T(z) = \frac{1}{2}[H_0^2(z) - H_0^2(-z)]$$

$(a-b)(a+b) = a^2 \cancel{-ba} \cancel{+ab} - b^2 = a^2 - b^2$

Descomposición polifásica (M=2) de $H_0(z)$

$\{k=0,1\}$

$$H_0(z) = 1P_0(z^2) + z^{-1}P_1(z^2)$$

$$T(z) = \frac{1}{2}(H_0(z) + H_0(-z))(H_0(z) - H_0(-z))$$

$$T(z) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{P_0(z^2) + \cancel{z^{-1}P_1(z^2)} + P_0(z^2) - \cancel{z^{-1}P_1(z^2)}}_{2P_0(z^2)}\Big)\Big(\underbrace{\cancel{P_0(z^2)} + z^{-1}P_1(z^2) - \cancel{P_0(z^2)} + z^{-1}P_1(z^2)}_{2z^{-1}P_1(z^2)}\Big)$$

Actividad 1
Banco de filtros QMF

$$T(z) = \frac{1}{2}\left(P_0(z^2) + P_0(z^2)\right)\left(z^{-1}P_1(z^2) + z^{-1}P_1(z^2)\right)$$

$$\downarrow$$

$$T(z) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}P_0(z^2)\right)\left(2z^{-1}P_1(z^2)\right)$$

$$\downarrow$$

$$T(z) = \frac{1}{2}4P_0(z^2)P_1(z^2)z^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{T(z) = 2P_0(z^2)P_1(z^2)z^{-1}}$$

Actividad 1

Banco de filtros QMF

Reconstrucion perfecta

$$T(z) = 2P_0(z^2)P_1(z^2)z^{-1} \xrightarrow{\text{Condición PR}} T(z) = 2P_0(z^2)P_1(z^2)z^{-1} = c\,z^{-k}$$

la misma pero desplazada en k

deben ser también desplazamientos, deltas

Para que se cumpla la condición PR (FIR):

$$P_0(z) = c_0\,z^{-n_0} \qquad P_1(z) = c_1\,z^{-n_1}$$

$$H_0(z) = P_0(z^2) + P_1(z^2)z^{-1} = c_0\,z^{-2n_0} + c_1\,z^{-2n_1}z^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$H_0(z) = c_0\,z^{-2n_0} + c_1\,z^{-2n_1-1}$$

$$\downarrow$$

Para que sea FLG: $c_0 = c$ y $c_1 = c$

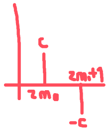
$$H_0(z) = cz^{-2n_0} + cz^{-2n_1-1} \longrightarrow h_0(n) = c\,\delta(n-2n_0) + c\,\delta(n-2n_1-1)$$

Actividad 1
Banco de filtros QMF

$$H_1(z) = H_0(-z) \qquad F_0(z) = H_1(-z) \qquad F_1(z) = -H_0(-z)$$

$$H_0(z) = c_0\, z^{-2n_0} + c_1\, z^{-(2n_1+1)} \longrightarrow h_0(n) = c_0\, \delta(n - 2n_0) + c_1\, \delta(n - 2n_1 - 1)$$

$$H_1(z) = c_0\, z^{-2n_0} - c_1\, z^{-(2n_1+1)} \longrightarrow h_1(n) = c_0\, \delta(n - 2n_0) - c_1\, \delta(n - 2n_1 - 1)$$



$$F_0(z) = c_0\, z^{-2n_0} + c_1\, z^{-(2n_1+1)} \longrightarrow f_0(n) = c_0\, \delta(n - 2n_0) + c_1\, \delta(n - 2n_1 - 1)$$

$$F_1(z) = -c_0\, z^{-2n_0} + c_1\, z^{-(2n_1+1)} \longrightarrow f_1(n) = -c_0\, \delta(n - 2n_0) + c_1\, \delta(n - 2n_1 - 1)$$

Actividad 1

Banco de filtros QMF

e) Implemente en Matlab el banco de filtros para el caso QMF. Suponiendo que se aplica un impulso como entrada $x(n) = \delta(n)$, para $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$ y $n_0 = n_1 = 0$, obtenga la salida $y(n)$, grafiquela en el tiempo y en frecuencia. ¿Se alcanza la condición de PR?. ¿Cuánto es el retardo del sistema completo?

f) Grafique superpuestas las respuestas en frecuencia de $|H_0(\omega)|$ y $|H_1(\omega)|$. Observe las transiciones y bandas de supresión de ambos filtros. También grafique la salida para cada rama por separado ($Y_0(w)$ e $Y_1(w)$).

Ayuda: para obtener la salida de cada rama puede anular la entrada sobre la otra rama.

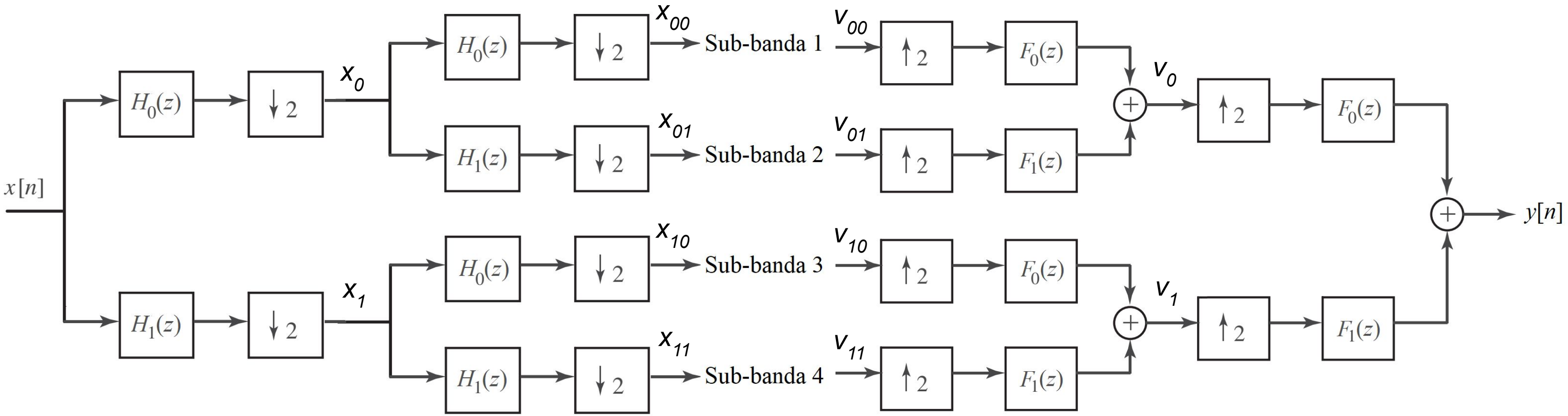
Actividad 2

Banco de filtros: árbol

Suponga un banco de filtros de cuatro sub-bandas con una estructura de árbol cómo el de la Figura. Asuma que posee filtros QMF: $\mathbf{H_0(z) = (1+z^{-1})/\sqrt{2}}$

a) Implemente el banco de filtros completo, banco de análisis y síntesis, conectados directamente en cada sub-banda. Gráfique la salida y(n) para una entrada impulsiva y su respuesta en frecuencia $|Y(\omega)|$. Se cumple la reconstrucción perfecta?

b) Grafique la respuesta en frecuencia de cada una de las cuatro ramas. Para ello, grafique $|Y(\omega)|$ conectando de a una sub-banda a la vez (es decir, anulando el resto).



Actividad 2
Banco de filtros: octava

Suponga un banco de filtros de cuatro sub-bandas en octavas, ver Figura. Asuma que cada etapa posee filtros QMF: $\mathbf{H_0(z) = (1+z^{-1})/\sqrt{2}}$.

a) Calcule los retardos D1 y D2 para compensar el delay de diferencia que se produce por los retardos introducidos en los filtros de las distintas sub-bandas.

b) Implemente el banco de filtros completo y grafique la respuesta en frecuencia de cada una de las cuatro ramas y la respuesta completa (es decir con las cuatro sub-bandas conectadas).