Repaso
Steepest descent

Steepest descent

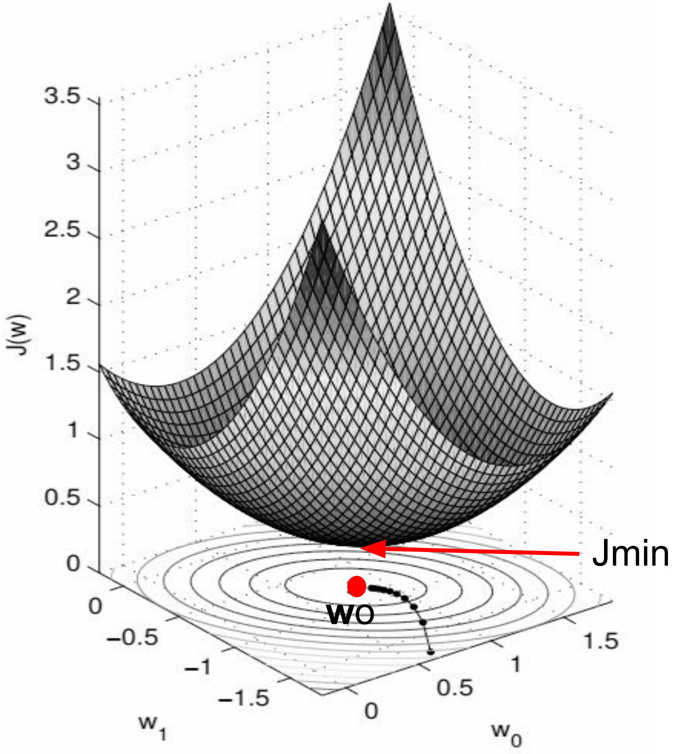
Supone conocimiento de $\boldsymbol{R_y}$ *y* $\boldsymbol{R_{yx}}$

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{R}_{yx}$$

Función costo teórica (potencia del error)

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_x^2 - \mathbf{w}^H\mathbf{R}_{yx} - \mathbf{R}_{yx}^H\mathbf{w} + \mathbf{w}^H\mathbf{R}_y\mathbf{w}$$

J(w) es una superficie cuadrática convexa. Tiene un mínimo global.



Steepest descent

Supone conocimiento de $\boldsymbol{R_y}$ *y* $\boldsymbol{R_{yx}}$

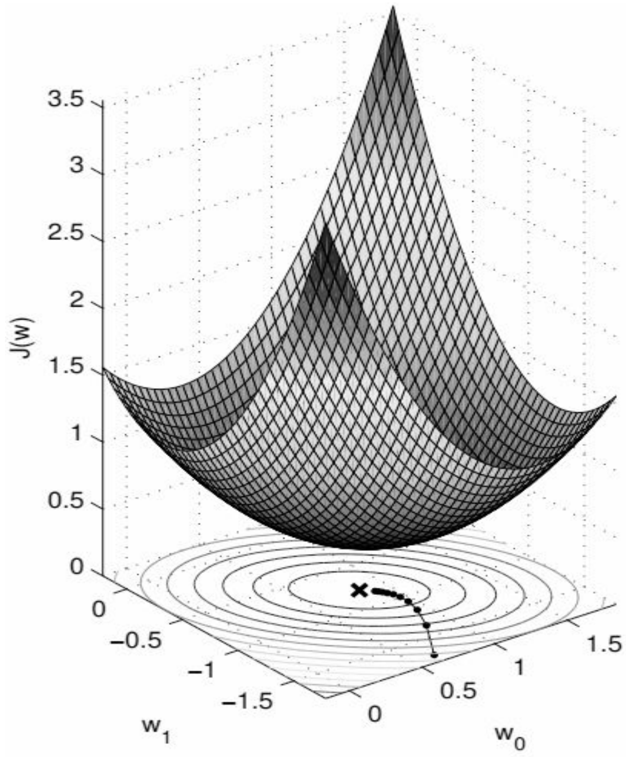
$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \tfrac{1}{2}\mu \nabla J(\mathbf{w}_n) \quad ; \quad \mathbf{w}_{inicial}$$

Gradiente determinístico

$$\nabla J(\mathbf{w}_n) = -2\mathbf{R}_{yx} + 2\mathbf{R}_y\,\mathbf{w}_n$$

Curva de aprendizaje

$$\widehat{J}(n) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} |e(n)|^2 = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} |x(n) - \widehat{x}(n)|^2$$



Ejercicio 1
LMS

Ejercicio 1

Sea un proceso $y(n) \in$ ESA la entrada de un filtro de coeficientes $\{w_0, w_1, ..., w_{M-1}\}$ y $x(n)$ una señal deseada conjuntamente estacionaria con $y(n)$. Se busca estimar los coeficientes del filtro según el criterio MMSE.

Dado que la función costo $J(\mathbf{w})$ es una función cuadrática, escalar y continuamente diferenciable, los coeficientes del filtro se pueden obtener recursivamente mediante el método *steepest descent* de acuerdo a $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \frac{1}{2}\mu\nabla J(\mathbf{w}_n)$, donde μ es un parámetro que permite ajustar el paso del algoritmo y $\nabla J(\mathbf{w}_n)$ es el gradiente de la función costo $J = E[\,|e(n)|^2]$. Conocidas la matriz de autocorrelación $\mathbf{R}_y$ de $y(n)$ y el vector $\mathbf{R}_{yx}$ de correlación cruzada entre $y(n)$ y $x(n)$, puede demostrarse que el gradiente resulta:

$$\nabla J(\mathbf{w}_n) = -2\mathbf{R}_{yx} + 2\mathbf{R}_y\mathbf{w}_n \tag{1}$$

Ejercicio 1

(a) Para implementar de forma práctica el algoritmo de Steepest-descent, uno de los métodos propuestos es el algoritmo adaptativo LMS (Least Mean Square), el cual supone las siguientes aproximaciones: $\widehat{\mathbf{R}}_y(n) = \mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)$ y $\widehat{\mathbf{R}}_{yx}(n) = \mathbf{y}(n)x^*(n)$. En base a esta aproximación y al resultado de la Ecuación 1, demuestre que la ecuación recursiva para la estimación de los coeficientes del filtro LMS se puede expresar como:

$$\widehat{\mathbf{w}}_{n+1} = \widehat{\mathbf{w}}_n + \mu\,\mathbf{y}(n)e^*(n),$$

Ejercicio 1

a) $$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \frac{1}{2}\mu \nabla J(\mathbf{w}_n)$$ *Steepest descent*

$$\nabla J(\mathbf{w}_n) = -2(\mathbf{R}_{yx} - \mathbf{R}_y \mathbf{w}_n)$$

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu(\mathbf{R}_{yx} - \mathbf{R}_y \mathbf{w}_n)$$

Aproximación (LMS)
$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{R}}_y(n) = \mathbf{y}(n)\mathbf{y}(n)^H \\ \widehat{\mathbf{R}}_{yx}(n) = \mathbf{y}(n)x(n)^* \end{cases}$$

$$\widehat{\mathbf{w}}_{n+1} = \widehat{\mathbf{w}}_n + \mu(\mathbf{y}(n)x(n)^* - \mathbf{y}(n)\mathbf{y}(n)^H \widehat{\mathbf{w}}_n)$$

$$\widehat{\mathbf{w}}_{n+1} = \widehat{\mathbf{w}}_n + \mu\mathbf{y}(n)\underbrace{\left(x(n)^* - \mathbf{y}(n)^H \widehat{\mathbf{w}}_n\right)}_{e(n)^*}$$

$$\boxed{\widehat{\mathbf{w}}_{n+1} = \widehat{\mathbf{w}}_n + \mu\mathbf{y}(n)e(n)^*}$$

Ejercicio 1:

a) ***Algoritmo LMS***

- ➢ Definir condiciones iniciales: **w**(0)
- ➢ Paso 0: estimar **w**(1) a partir de **w**(0)
- ➢ Paso n: estimar **w**(n+1) a partir de **w**(n):

1. Se calcula la salida del filtro, $\widehat{x}(n) = \mathbf{w}_n^H \mathbf{y}(n)$
2. Se calcula el error de estimación, $e(n) = x(n) - \widehat{x}(n)$
3. Se adaptan los coeficientes del filtro, $\widehat{\mathbf{w}}_{n+1} = \widehat{\mathbf{w}}_n + \mu \mathbf{y}(n) e(n)^*$

Ejercicio 1

(b) Se requieren estimar los coeficientes $\mathbf{w}$ de un filtro LMS cuya entrada es una secuencia $y(n)$, de modo tal que su salida se ajuste a una señal deseada definida como $x(n) = s(n) + v(n)$, donde $v(n)$ es ruido blanco gaussiando de media nula y varianza $\sigma_v^2 = 0{,}1$. Para generar las señales $y(n)$ y $s(n)$, considere que éstas pueden obtenerse como:

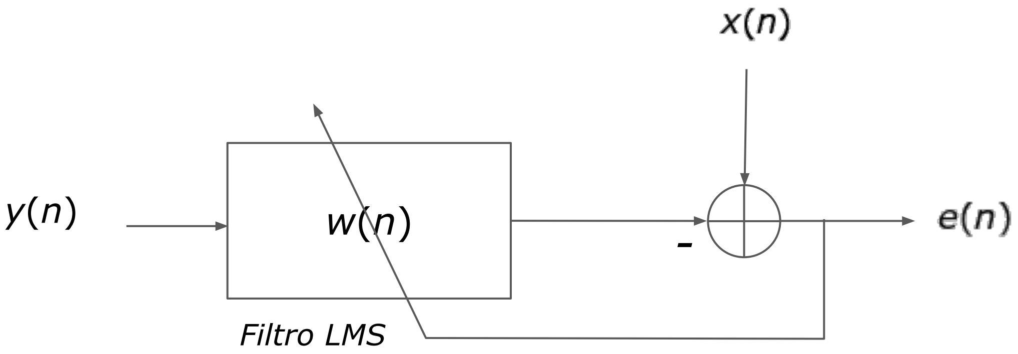
$$y(n) = f(n) + 0{,}5\, f(n-1) + 0{,}25\, f(n-2)$$

$$s(n) = f(n) + 1{,}2 f(n-1) + 0{,}6\, f(n-2) + 0{,}3\, f(n-3)$$

donde $f(n) \sim N(0,1)$ es de largo $L = 2000$.

Implemente el filtro LMS y obtenga los coeficientes $\widehat{\mathbf{w}}$ para un largo $M = 2$ y $\mu = 0{,}01$. Grafique los coeficientes $\widehat{\mathbf{w}}_n$ y la curva de aprendizaje $\widehat{J}(n) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} |x(n) - \widehat{x}(n)|^2$ (con $m \geq 200$ realizaciones y en escala logarítmica) en función de las iteraciones.

Ejercicio 1



Ejercicio 1

(c) Para una única realización, grafique en un plano (w_0, w_1) las curvas de nivel de $J(w_0, w_1)$ (para generarla va a requerir estimar $\mathbf{R}_y$ y $\mathbf{R}_{yx}$) y la trayectoria de los pesos (resultantes de las iteraciones) sobre el plano. Considere para esto las siguientes condiciones iniciales:

i) $\mathbf{w}_0 = [-3{,}19 \;\; 4{,}47]^T$

ii) $\mathbf{w}_0 = [4{,}84 \;\; 4{,}52]^T$

iii) $\mathbf{w}_0 = [1{,}65 \;\; 8{,}99]^T$

(d) Repita el punto anterior pero para $\mu = 0,12$.

Recordar:

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_x^2 - \mathbf{w}^H\mathbf{R}_{yx} - \mathbf{R}_{yx}^H\mathbf{w} + \mathbf{w}^H\mathbf{R}_y\mathbf{w}$$

Ejercicio 2
Cancelación de interferencia

Ejercicio 2

Una señal de audio $s(t)$ es contaminada por una interferencia $g(t)$ de banda angosta de frecuencia conocida $f_0 = 1{,}5$ kHz, aunque se desconoce su amplitud y fase. La señal recibida se puede expresar como $x(t) = s(t) + g(t)$. Suponga que $s(t)$ es digitalizada a una frecuencia de $fs = 44100$ Hz y que la interferencia en el dominio discreto puede ser modelada como $g(n) = A\cos(\omega_i n + \theta)$. Se requiere utilizar un filtro adaptativo LMS para cancelar esta interferencia y obtener una aproximación $\widehat{s}(n)$ de la señal de audio $s(n)$.

Ejercicio 2

(a) Considerando un largo de filtro $M = 2$ y tomando como entradas al vector $\mathbf{y}(n) = [\cos(\omega_0 n) \ \ \sin(\omega_0 n)]^T$, haga un diagrama en bloques proponiendo una solución mediante el filtrado con el algoritmo LMS. ¿Qué significado tiene el error óptimo $e_o(n)$ en este problema? Tenga en cuenta que la interferencia también se puede expresar como

$$g(n) = A\cos(\omega_0 n + \theta) = B\cos(\omega_0 n) + C\sin(\omega_0 n)$$

Ejercicio 2

(b) Genere la señal $x(n)$ utilizando alguna de las pistas del TP1 para $s(n)$. Para generar la interferencia $g(n)$ considere que los parámetros desconocidos son V.A. $A \sim N(0{,}01\,;\,0{,}001)$ y $\theta \sim U(-\pi\,;\,\pi)$ (tenga en cuenta que éstos parámetros son V.A. pero toman un valor fijo en cada realización).

Ejercicio 2

(c) Implemente un algoritmo LMS para resolver los coeficientes óptimos que permitan mitigar la interferencia. Ejecute el algoritmo para $\mu = 5 \times 10^{-5}$ y grafique en un mismo plot los M coeficientes del filtro en función de las iteraciones. Grafique también la diferencia cuadrática entre la señal de interferencia y la salida del filtro LMS $|g(n) - \widehat{x}(n)|^2$.

Ejercicio 2

(e) Repita el punto (c) pero esta vez con una interferencia $g_2(n)$ que sufre un cambio abrupto tal que su amplitud se duplica en la mitad del intervalo temporal, es decir para $n > L/2$.

Ejercicio 2

(f) Reproduzca la señal de audio original contaminada con la interferencia $s(n)$ y luego la señal resultante con la cancelación de interferencia. Analice subjetivamente el desempeño del algoritmo para los distintos casos simulados.