Estimación lineal

Procesamiento de señales

.UBA fiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

Ing. Débora P. Copa ● Dra. Cecilia G. Galarza
IIBM LPSC

Ejercicio 1
Estimador óptimo MMSE

Ejercicio 1: Estimador óptimo MMSE

Considere dos vectores aleatorios, $\mathbf{x}, \in \mathbb{C}^N$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$, ambos de potencia finita tal que $E[\,||\mathbf{x}||^2] < \infty$ y $E[\,||\mathbf{y}||^2] < \infty$. Se propone estimar $\mathbf{x}$ a partir de $\mathbf{y}$ mediante un estimador $\hat{\mathbf{x}} = g(\mathbf{y})$ tal que se minimice el error cuadrático medio (MMSE), de acuerdo a la Ecuación 1. Demuestre que el estimador óptimo es la esperanza condicional $\hat{\mathbf{x}}_{opt} = E[\mathbf{x}|\mathbf{y}]$ Ayuda: considere la propiedad $E[z] = E\left[E[z|y]\right]$.

$$\min_{\hat{x}=g(y)} E\left[||x - \hat{x}||^2\right] \tag{1}$$

Ejercicio 1: Estimador óptimo MMSE

$$\min_{\hat{x}=g(y)} E\left[||x-\hat{x}||^2\right] \qquad \text{MMSE}$$

$$E\left[||x-\hat{x}||^2\right] = E\left[||x-g(y)||^2\right] = E\left[||x-g(y)+\overbrace{E[x|y]-E[x|y]}^{=0}\,||^2\right]$$

$$= E\left[\,||x-E[x|y]\,||^2 + ||\,E[x|y]-g(y)||^2 + \underbrace{2\,(x-E[x|y]\,)^T(E[x|y]-g(y))\,] =}\right.$$

(Ec. 1)

Trabajemos con este término

Ejercicio 1

$$E\left[(x - E[x|y])^T (E[x|y] - g(y))\right] =$$

$$= E\left[x^T E[x|y]\right] - E\left[x^T g(y)\right] - E\left[E[x|y]^T E[x|y]\right] + E\left[E[x|y]^T g(y)\right] =$$

Propiedad:

$$E[z] = E\left[E[z|w]\right] \Longrightarrow E[x^T E[x|y]] = E[E[x^T E[x|y] \mid y]]$$

$$= E[E[x^T E[x|y] \mid y]] - E[E[x^T g(y) \mid y]] - E\left[E[x|y]^T E[x|y]\right] + E\left[E[x|y]^T g(y)\right] =$$

Ejercicio 1

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \int_{\mathcal{X}} x f_{X|Y}(x|Y=y)\,\mathrm{d}x$$

$$= E[E[\,x^T E[x|y]\,|\,y\,]] - E[E[\,x^T g(y)\,|\,y\,]] - E\left[E[x|y]^T E[x|y]\,\right] + E\left[E[x|y]^T g(y)\right] =$$

$$= \cancel{E[E[x|\,y\,]^T E[x|y]\,]} - \cancel{E[E[x|\,y\,]^T g(y)\,]} - \cancel{E\left[E[x|y]^T E[x|y]\,\right]} + \cancel{E\left[E[x|y]^T g(y)\right]} = 0$$

Volviendo a la **Ec. 1**

$$E\left[||x-\hat{x}||^2\right] = E\left[\,||x - E[x|y]\,||^2 + ||\,E[x|y] - g(y)||^2 + \overbrace{2\,(x - E[x|y]\,)^T (E[x|y] - g(y))}^{=\,0}\,\right] =$$

$$\Downarrow$$

$$E\left[||x-\hat{x}||^2\right] = E\left[\,||x - E[x|y]\,||^2\right] + E[\,||\,E[x|y] - g(y)||^2\,] =$$

Ejercicio 1

no depende de g(y)

$$E\left[||x-\hat{x}||^2\right] = \overbrace{E\left[\,||x - E[x|y]\,||^2\right]}^{>0} + \underbrace{\overbrace{E\left[\,||\,E[x|y] - g(y)||^2\,\right]}^{>0}}_{=0}$$

¿Cómo debo elegir g(y) para que el error sea mínimo?

Debe ser tal que anule este término!

$$\boxed{g(y) = E[x|y]}$$

Mejor estimador MMSE

Ejercicio 2
Estimador lineal MMSE

Ejercicio 2

Dadas dos variables aleatorias $x, y \in \mathbb{R}$, ambos de media nula, se desea estimar x a partir de y mediante un estimador lineal tal que $\hat{x} = a\, y$, con $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que si se utiliza el criterio de optimización minimizando $E[\,|x - \hat{x}|^2]$ el estimador óptimo resulta:

$$\hat{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\, y.$$

Ejercicio 2

Función de costo $E[\,|x-\hat{x}|^2] = E[|x-a\,y|^2] =$

$$E[\,(x-a\,y)(x-a\,y)^*] = E[xx^* - a\,yx^* - xy^*a^* + ayy^*a^*] =$$

$$= \sigma_x^2 - 2a\sigma_{xy} + a^2\sigma_y^2$$

Encontramos el valor de *a* que minimiza la función de costo

$$\frac{d}{da}\left(\sigma_x^2 - 2a\sigma_{xy} + a^2\sigma_{yy}^2\right) = -2\sigma_{xy} + 2a\sigma_y^2 = 0$$

$$\sigma_{xy} = a\sigma_y^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} \\ \hat{x} &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\,y \end{aligned}}$$

Ejercicio 3
Proceso Gaussiano

Ejercicio 3

Sean dos VA $x, y \in \mathbb{R}$ ambas de media nula. Se quiere utilizar el estimador óptimo MMSE tal que $\hat{x} = E[x|y]$. Demuestre que si ambas variables son conjuntamente gaussianas, el estimador óptimo es el estimador lineal.

Ejercicio 3

$X, Y \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$: conjuntamente gaussianas

Matriz de covarianza definida positiva

$$p_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

$$p_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$|\Sigma| = \sigma_y^2 \left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right) \Longrightarrow \Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_y^2 \left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)} \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

$$p_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$p_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_y^2\left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)}\left(\sigma_y^2 x^2 - 2\sigma_{xy} x\, y + \sigma_x^2 y^2\right)\right)$$

$$p_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)}\left[\left(x - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} y\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^4}\right) y^2\right]\right)$$

Ejercicio 3

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_y\left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)}\left(x - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}y\right)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)}\left(x - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}y\right)^2\right)$$

$$X|Y \sim \mathcal{N}\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}y\,,\ \sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)$$

$$E[x|y] = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}y$$

Ejercicio 3

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_y\left(\sigma_x^2-\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sigma_x^2-\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)}\left(x-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}y\right)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma_x^2-\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sigma_x^2-\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)}\left(x-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}y\right)^2\right)$$

$$X|Y \sim \mathcal{N}\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}y\,,\ \sigma_x^2-\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2}\right)$$

$$\boxed{\hat{x} = E[x|y] = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}y}$$

Ejercicio 5
Suavizado Wiener-Hopf con horizonte infinito

Ejercicio 5

Considere dos procesos aleatorios de media cero $x(n)$ y $y(n)$, con función de autocorrelación $R_y(i) = E[y(n)y^*(n-i)]$, ambos conjuntamente ESA ($R_{xy}(i) = E[x(n)y^*(n-i)]$). Se requiere estimar la señal $x(n)$ a partir de observaciones de $y(n)$ mediante coeficientes k_n para el problema de *suavizado* con horizonte infinito, partiendo del estimador:

$$\widehat{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_{n-m}\, y(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m\, y(n-m) \qquad (2)$$

Ejercicio 5

(a) Verifique que los coeficientes óptimos que cumplen la condición MMSE, para la cual se verifica el principio de ortogonalidad $E[e(n)y^*(n-i)] = 0$, donde $e(n) = x(n) - \widehat{x}(n)$, cumplen con la ecuación 3 de Wiener-Hopf.

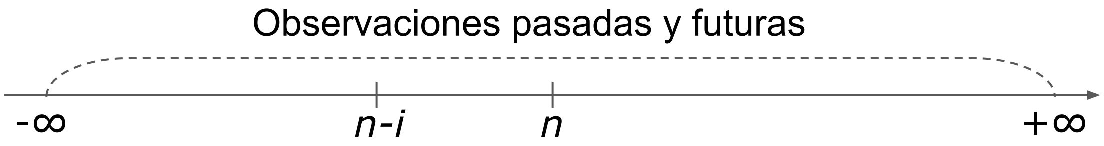
$$R_{xy}(i) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_{i-m} R_y(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m R_y(i-m) \qquad -\infty \leq i \leq +\infty \tag{3}$$

(b) Dadas $S_y(\omega)$ y $S_{xy}(\omega)$, TDFT de $R_y(i)$ y $R_{xy}(i)$ respectivamente, encuentre una expresión para $K(\omega)$, TDFT de los coeficientes óptimos.

Ejercicio 5

a) Problema de suavizado

$\{y(m)\}_{m=-\infty}^{+\infty}$



$$E[e(n)y^*(n-i)] = E[(x(n)-\hat{x}(n))y^*(n-i)] =$$

donde $-\infty \leq i \leq +\infty$

$$= E[x(n)y^*(n-i)] - E[\hat{x}(n)y^*(n-i)] = R_{xy}(i) - E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m y(n-m)y^*(n-i)\right] =$$

$$= R_{xy}(i) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m E[y(n-m)y^*(n-i)] = R_{xy}(i) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m R_y(i-m) = 0$$

$$\boxed{R_{xy}(i) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m R_y(i-m) \quad ; \quad -\infty \leq i \leq +\infty}$$

Ejercicio 5

b)

$$R_{xy}(i) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m R_y(i-m) \qquad -\infty \le i \le +\infty \qquad \xrightarrow{\text{TDFT}} \qquad S_{xy}(\omega) = K(\omega) S_y(\omega)$$

Donde

$$S_{xy}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{xy}(n) e^{-j\omega n} \qquad S_y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_y(n) e^{-j\omega n} \qquad K(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_m e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow \boxed{K(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_y(\omega)}}$$

Ejercicio 6
Filtrado Wiener-Hopf con horizonte infinito

Ejercicio 6

Suponiendo los procesos $x(n)$ e $y(n)$ del ejercicio anterior, se puede definir el problema de *filtrado* con horizonte infinito, según ecuación 4 con coeficientes k_n.

$$\widehat{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} k_{n-m}\, y(m) = \sum_{m=0}^{+\infty} k_m\, y(n-m) \tag{4}$$

Ejercicio 6

(a) Justifique que para el el problema de filtrado, la ecuación de Wiener-Hopf satisface la ecuación 5 para $i \geq 0$.

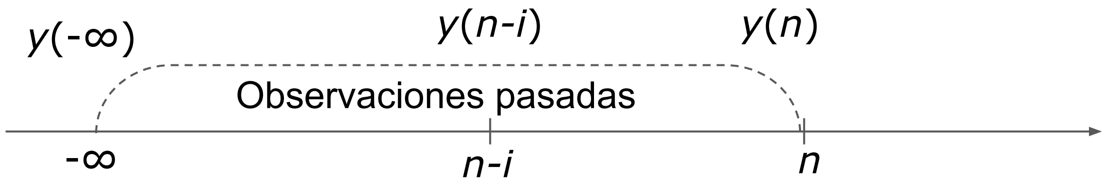
$$R_{xy}(i) = \sum_{m=-\infty}^{n} k_{i-m} R_y(m) = \sum_{m=0}^{+\infty} k_m R_y(i-m) \qquad 0 \leq i \leq +\infty \tag{5}$$

Ejercicio 6

a) Problema de filtrado $\{y(m)\}_{m=-\infty}^{n}$

ppio. de ortogonalidad

$$E[e(n)y^*(n-i)] = 0.$$



$$-\infty \leq n - i \leq n$$

$$-\infty - n \leq \quad -i \quad \leq 0$$

$$+\infty \geq \quad i \quad \geq 0$$

$$\boxed{0 \leq i \leq +\infty}$$

Ejercicio 6

a) Problema de filtrado $\{y(m)\}_{m=-\infty}^{n}$

$$E[e(n)y^*(n-i)] = E[(x(n)-\hat{x}(n))y^*(n-i)] =$$

donde $0 \leq i \leq +\infty$

$$= E[x(n)y^*(n-i)] - E[\hat{x}(n)y^*(n-i)] = R_{xy}(i) - E\left[\sum_{m=0}^{+\infty} k_m y(n-m)y^*(n-i)\right] =$$

$$= R_{xy}(i) - \sum_{m=0}^{+\infty} k_m E[y(n-m)y^*(n-i)] = R_{xy}(i) - \sum_{m=0}^{+\infty} k_m R_y(i-m) = 0$$

$$\boxed{R_{xy}(i) = \sum_{m=0}^{+\infty} k_m R_y(i-m) \quad ; \quad 0 \leq i \leq +\infty}$$

Ejercicio 6

(b) Se puede reescribir la ecuación 5 redefiniendo $k_m \ \forall\, m$ (con $k_m = 0$ para $m < 0$) de modo tal de expresarla como una convolución. Sin embargo, no es posible resolver los coeficientes del mismo modo que en el caso de suavizado, debido a que no está definida para todo i. Se introduce entonces la siguiente definición:

$$g(i) \triangleq R_{xy}(i) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m R_y(i-m) \qquad -\infty \leq i \leq +\infty \tag{6}$$

donde $g(i)$ es una secuencia estrictamente anticausal ($g(i) = 0 \ \forall i \geq 0$).

A partir de la ecuación 6, válida $\forall\, i$, demuestre que se cumple la ecuación 7. Para ello asuma que se admite la factorización espectral $S_y(z) = \alpha L(z) L^*(z^{-*})$, con $L(z)$ de fase mínima (todos sus polos/ceros dentro del circulo unitario) y α una constante, donde $S_y(z)$ no debe tener ceros sobre el circulo unitario.

$$\frac{G(z)}{\alpha L^*(z^{-*})} = \frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})} - K(z)L(z) \tag{7}$$

Justifique porqué $TZ^{-1}\left\{\frac{G(z)}{\alpha L^*(z^{-*})}\right\}$ es estrictamente anticausal y $TZ^{-1}\left\{K(z)L(z)\right\}$ causal.

Ejercicio 6

b)

$$R_{xy}(i) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m R_y(i-m) \qquad 0 \le i \le +\infty$$

La ecuación de Wiener-Hopf se cumple sólo para $i \geq 0$

Se define una secuencia estrictamente anticausal para definir todo el rango de i

$$g(i) \triangleq R_{xy}(i) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m R_y(i-m) \qquad -\infty \le i \le +\infty$$

$g(i)=0 \; ; \quad i \geq 0$

Podemos aplicar la Tz a esta ecuación para todo i

Ejercicio 6

b)

$$g(i) \triangleq R_{xy}(i) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k_m R_y(i-m)$$

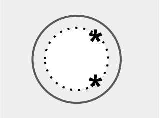
$\downarrow$ TZ

$$G(z) = S_{xy}(z) - K(z)S_y(z)$$

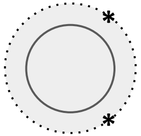
Factorización espectral

$$S_y(z) = \alpha\, L(z)L^*(z^{-*})$$

$L(z)$ polos/ceros $\subset$ |z|<1 (**causal** para la respuesta estable)



$L^*(z^{-*})$ polos/ceros $\subset$ |z|>1 (**anticausal** para la respuesta estable)



$$G(z) = S_{xy}(z) - K(z)\,\alpha\, L(z)L^*(z^{-*})$$

$$\boxed{\frac{G(z)}{\alpha L^*(z^{-*})} = \frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})} - K(z)L(z)}$$

Ejercicio 6

b)

$G(z)$ Anticausal por definición

$L(z)$ Causal para la solución estable (ya que es de fase mínima)

$L^*(z^{-*})$ Anticausal para la solución estable (recíproco de L(z))

$K(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} k_m z^{-m}$ Causal ya que para el problema de filtrado se define $k_m = 0$ con m<0.

$$\boxed{\underbrace{\frac{G(z)}{\alpha L^*(z^{-*})}}_{\text{anticausal}} = \frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})} - \underbrace{K(z)L(z)}_{\text{causal}}}$$

Ejercicio 6

(c) Demuestre que si se define el operador $\{F(z)\}_+$ como la parte causal de $TZ^{-1}\{F(z)\}$, la transformada-z de los coeficientes del filtro óptimo $K(z)$ se puede expresar como:

$$K(z) = \frac{1}{L(z)} \left\{ \frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})} \right\}_+ \tag{8}$$

Ejercicio 6

c)

$$\underbrace{\frac{G(z)}{\alpha L^*(z^{-*})}}_{\text{anticausal}} = \frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})} - \underbrace{K(z)L(z)}_{\text{causal}}$$

$$\{F(z)\}_+ = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)z^{-n}$$

Definimos el operador $\{\ .\ \}_+$ para quedarnos con la parte causal de la secuencia f(n)

$$\underbrace{\left\{\frac{G(z)}{\alpha L^*(z^{-*})}\right\}_+}_{=0} = \left\{\frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})}\right\}_+ - \underbrace{\{K(z)L(z)\}_+}_{=K(z)L(z)} \Rightarrow K(z)L(z) = \left\{\frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})}\right\}_+$$

$$\Rightarrow \boxed{K(z) = \frac{1}{L(z)}\left\{\frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})}\right\}_+}$$

Transformada-z de los coeficientes del filtro

Factorización Espectral

Factorización espectral canónica

- En general, obtener la factorización espectral de un proceso es una tarea compleja. Sin embargo, cuando el proceso es tal que $S(z)$ es una función racional de z, la factorización queda determinada por sus polos y ceros.
- $S(z)$ por ser la transformada de una secuencia real y par, cumple con

$$S(z) = S^*(z^{-*})$$

Luego, si p es un polo/cero, p^{-*} también lo es.
- Si $S(z)$ es una función racional de z, entonces tiene la forma:

$$S(z) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)(z^{-1} - z_i^*)}{\prod_{i=1}^{n}(z - p_i)(z^{-1} - p_i^*)} \qquad |z_i|, |p_i| < 1, \quad \alpha > 0.$$

- Para armar $L(z)$, retenemos los ceros y polos estables de $S(z)$

$$L(z) = z^{n-m} \frac{\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z - p_i)}$$

$$L(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} l_i z^{-i}$$

Ejercicio 7

Ejercicio 7

Sea la transformada-z $S(z)$ de una función de autocorrelación dada, expresada en la ecuación 9. Encuentre la factorización espectral de $S(z)$.

$$S(z) = 2z^{-1} + 5 + 2z \tag{9}$$

Ejercicio 7

$S(z) = 2z^{-1} + 5 + 2z$

Partimos de la hipótesis que S(z) admite factorización espectral

$$S(z) = (2 + 5z + 2z^2)z^{-1} = 2(1 + \tfrac{5}{2}z + z^2)z^{-1} = 2(z+2)\underbrace{(z + \tfrac{1}{2})z^{-1}}_{L(z)} = 2(z+2)(1 + \tfrac{1}{2}z^{-1})$$

$$L^*(z^{-*}) = (1 + \tfrac{1}{2}z^*)^* = 1 + \tfrac{1}{2}z$$

Elegimos L(z) tal que sea de fase mínima (n=0, m=1)

$$S(z) = 2(z+2)(1 + \tfrac{1}{2}z^{-1}) = 4(1 + \tfrac{1}{2}z^{-1})(1 + \tfrac{1}{2}z) = \alpha L(z)L^*(z^{-*})$$

$$\boxed{L(z) = 1 + \tfrac{1}{2}z^{-1}} \qquad \boxed{\alpha = 4}$$

Ejercicio 8

Ejercicio 8

Suponga un proceso con autocorrelación $R(i)$, cuya transformada-z $S(z)$ responde a la ecuación 10, con $|a| < 1$. Encuentre la factorización espectral $L(z)$ de $S(z)$.

$$S(z) = \frac{(1 - a^2)}{(1 - az^{-1})(1 - az)} \tag{10}$$

Ejercicio 8

$$S(z) = \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)} = (1-a^2)\frac{1}{(1-az^{-1})}\frac{1}{(1-az)}$$

$$L(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})} = z / (z-a)$$

Está elección es de fase mínima ya que |a|<1

$$L^*(z^{-*}) = \frac{1}{(1-az)}$$

$$\alpha = 1 - a^2$$

Ejercicio 9

Ejercicio 9

Sea un sistema ARMA, cuya entrada $u(n)$ es un proceso blanco de media cero de varianza σ_u^2 y salida $y(n)$, que responde a la siguiente ecuación de coeficientes reales:

$$y(n) = 0{,}7y(n-1) - 0{,}1y(n-2) + u(n-1) - 0{,}5u(n-2) \tag{11}$$

(a) Determine la transferencia $H(z)$ del sistema.

(b) Encuentre la transformada $S_y(z)$ de autocorrelación del proceso de salida $y(n)$.

(c) Determine la factorización espectral de $S_y(z)$.

Ejercicio 9

$$y(n) = 0.7\,y(n-1) - 0.1\,y(n-2) + u(n-1) - 0.5\,u(n-2)$$

$$Y(z) - 0.7\,Y(z)z^{-1} + 0.1\,Y(z)z^{-2} = U(z)z^{-1} - 0.5\,U(z)z^{-2}$$

$$u(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y(n)$$

a)

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5\,z^{-2}}{1 - 0.7\,z^{-1} + 0.1\,z^{-2}} = \frac{(z-0.5)}{z^2 - 0.7\,z + 0.1}$$

Densidad espectral a la salida $S_y(z)$

b)

$$S_y(z) = \sigma_u^2 H(z) H(z^{-1}) = \sigma_u^2 \frac{(z-0.5)}{(z^2 - 0.7z + 0.1)} \frac{(z^{-1} - 0.5)}{(z^{-2} - 0.7z^{-1} + 0.1)}$$

Ejercicio 9

c)

$$S_y(z) = \sigma_u^2 H(z) H(z^{-1}) = \underbrace{\sigma_u^2}_{\alpha} \underbrace{\frac{(z-0.5)}{(z^2-0.7z+0.1)}}_{L(z)} \underbrace{\frac{(z^{-1}-0.5)}{(z^{-2}-0.7z^{-1}+0.1)}}_{L^*(z^{-*})}$$

$$L(z) = \frac{(z-0.5)}{(z^2-0.7\,z+0.1)}$$

L(z) es de fase mínima (polos/ceros dentro del círculo unitario)

(polos en 0.2 y 0.5)

$$L^*(z^{-*}) = \frac{(z^{-1}-0.5)}{(z^{-2}-0.7\,z^{-1}+0.1)}$$

$$\alpha = \sigma_u^2$$

Ejercicio 10

Ejercicio 10

Sea una función en el dominio z que posee la sigueinte transferencia:

$$F(z) = \frac{4z + 3}{z^2 + \frac{7}{3}z + + \frac{2}{3}}$$

(a) Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $F(z)$.

(b) Encuentre la parte causal de $TZ^{-1}\{F(z)\}$ aplicando el operador $\{.\}_+$

Ejercicio 10

$$F(z) = \frac{4z+3}{z^2 + \frac{7}{3}z + \frac{2}{3}}$$

Observación: para hallar las fracciones parciales expresar las raíces en términos potencias positivas (z^k)

$$F(z) = \frac{4z+3}{(z+2)(z+\frac{1}{3})} \Rightarrow F(z) = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+\frac{1}{3}}$$

$$A = F(z)(z+2)\big|_{z=-2} = \left.\frac{4z+3}{z+\frac{1}{3}}\right|_{z=-2} = 3 \qquad B = F(z)(z+\tfrac{1}{3})\big|_{z=-\frac{1}{3}} = \left.\frac{4z+3}{z+2}\right|_{z=-\frac{1}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{3}{z+2} + \frac{1}{z+\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 10

Operador de Parte Causal
(para términos de polos simples o múltiples)

$$\left\{\frac{1}{(z-z_i)^i}\right\}_+ = \begin{cases} \frac{1}{(z-z_i)^i} & |z_i| < 1 \\ \frac{1}{(-z_i)^i} & |z_i| > 1 \end{cases}$$

$$F(z) = \frac{3}{z+2} + \frac{1}{z+\frac{1}{3}}$$

Parte Causal

$$\{F(z)\}_+ = 3\left\{\frac{1}{z+2}\right\}_+ + \left\{\frac{1}{z+\frac{1}{3}}\right\}_+$$

$$= 3\frac{1}{2} + \frac{1}{z+\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\frac{z+1}{z+\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 11

Ejercicio 11

Sea una función en el dominio z que posee la siguiente transferencia:

$$F(z) = \frac{2}{3}\frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 + \frac{5}{2}z + 1}$$

(a) Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $F(z)$.

(b) Encuentre la parte causal de $TZ^{-1}\{F(z)\}$ aplicando el operador $\{.\}_+$.

Ejercicio 11

a)

$$F(z) = \frac{2}{3}\frac{z^2+4z+1}{z^2+\frac{5}{2}z+1}$$

Expresamos F(z) en fracciones parciales

Primero, necesitamos un numerador con grado menor que el denominador. Expresamos como fracción mixta:

$$\begin{array}{rl} z^2+4z+1 & \big|\ \underline{z^2+\frac{5}{2}z+1} \\ -\ \underline{z^2+\frac{5}{2}z+1} & \quad 1 \\ 0+\frac{3}{2}z+0 & \end{array}$$

$$F(z) = \frac{2}{3}\left(1+\frac{\frac{3}{2}z}{z^2+\frac{5}{2}z+1}\right)$$

$$F(z) = \frac{2}{3}+\frac{z}{(z+\frac{1}{2})(z+2)}$$

$$\boxed{F(z) = \frac{2}{3}-\frac{\frac{1}{3}}{z+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{4}{3}}{z+2}}$$

Ejercicio 11

b)

$$F(z) = \frac{2}{3} + \frac{z}{(z+\frac{1}{2})(z+2)} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{1}{3}}{z+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{4}{3}}{z+2}$$

Aplicamos el operador de causalidad

$$\{F(z)\}_+ = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{z+\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\frac{4z+1}{z+\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\{F(z)\}_+ = \frac{1}{3}\frac{4z+1}{z+\frac{1}{2}}}$$

Ejercicio 12

Ejercicio 12

Suponga una señal aleatoria $x(n)$, con autocorrelación $R_x(i) \xrightarrow{TZ} S_x(z) = -2z^{-1} + 2 - 2z$, perturbada por ruido blanco de media cero $v(n)$ y varianza $\sigma_v^2 = 3$, obteniéndose el proceso $y(n) = x(n) + v(n)$. Encuentre los coeficientes del filtro óptimo MMSE para la estimación de $x(n)$ a partir de las observaciones $y(n)$.

Ejercicio 12

Queremos hallar K(z) haciendo la factorización espectral de $S_y(z)$ y aplicando el operador de causalidad

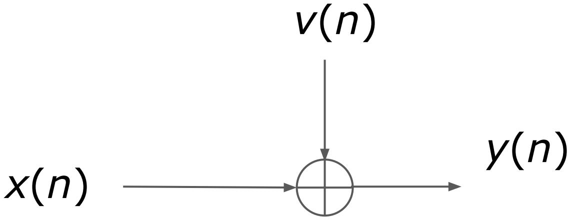
$$K(z) = \frac{1}{L(z)} \left\{ \frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})} \right\}_+$$

Necesitamos hallar:

- $S_{xy}(z)$
- L(z)
- α

Ejercicio 12

$$\begin{cases} y(n) = x(n) + v(n) \\ \sigma_v^2 = 3 \\ S_x(z) = -2z^{-1}+2 - 2z \end{cases}$$



$$S_y(z) = S_x(z) + \sigma_v^2$$

$$\begin{cases} \boxed{S_y(z) = -2z^{-1} + 2 - 2z + 3 =} \\ = -2z^{-1} + 5 - 2z = -2z^{-1}(1 - \frac{5}{2}z + z^2) = \\ = -2z^{-1}(z - 0.5)(z - 2) = \boxed{(z^{-1} - 2)(z - 2)} \end{cases}$$

$$R_{xy}(i) = E[x(n)(x^*(n+i) + v^*(n+i))] = E[x(n)x^*(n+i)] = R_x(i)$$

TZ

$$\boxed{S_{xy}(z) = S_x(z) = -2z^{-1}+2 - 2z}$$

Ejercicio 12

Descomposición espectral: $S_y(z) = \alpha L(z) L^*(z^{-*})$

$$S_y(z) = (z^{-1} - 2)(z - 2) = 2.(0.5z^{-1}-1).2(0.5z-1) = \underbrace{4.}_{\alpha}\underbrace{(1-0.5z^{-1})}_{L(z)}.\underbrace{(1-0.5z)}_{L^*(z^{-*})}$$

Coeficientes del filtro

$$\boxed{K(z) = \frac{1}{L(z)}\left\{\frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})}\right\}} = \frac{1}{L(z)}\left\{\frac{S_y(z) - \sigma_v^2}{\alpha L^*(z^{-*})}\right\}_+ = \frac{1}{\alpha L(z)}\left\{\alpha L(z) - \frac{\sigma_v^2}{L^*(z^{-*})}\right\}_+$$

$$= \frac{1}{\alpha L(z)}\left\{\alpha L(z) - \sigma_v^2\left\{\frac{1}{L^*(z^{-*})}\right\}_+\right\} \boxed{= 1 - \frac{\sigma_v^2}{\alpha}\frac{1}{L(z)}}$$

Ejercicio 12

$$K(z) = \frac{1}{L(z)} \left\{ \frac{S_{xy}(z)}{\alpha L^*(z^{-*})} \right\}_+ = 1 - \frac{\sigma_v^2}{\alpha} \frac{1}{L(z)}$$

$$\boxed{K(z) = 1 - \frac{3}{4} \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{1}{4} \frac{(1 - 2z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}}$$