

Filtrado de Kalman

TP5 Procesamiento de señales 1

Brian Alex Fuentes Acuña^{†1}

[†]Facultad de ingeniería UBA

Buenos aires, Argentina,

¹bfuentes@fi.uba.ar

*

Resumen—Se requiere estimar las variables de estado (posición, velocidad y aceleración) que rigen la dinámica del vehículo para distintos parámetros y condiciones mediante un filtro de Kalman. Se asume que el sistema es discretizado con un período de muestreo de $T = 1$ s y que tanto los ruidos de proceso como de medición son blancos y gaussianos.
Palabras clave: Filtro de Kalman(KF), Ricutti, Espacio de estados(SS)

I. INTRODUCTION

Considere un vehículo aéreo que se desplaza en el espacio definiendo una trayectoria, como la de la Figura 1, tal que la posición en cada instante resulta $\mathbf{p}(t)$, con una velocidad $\mathbf{v}(t)$ y una aceleración $\mathbf{a}(t)$, definidas en un espacio de coordenadas (x, y, z) de acuerdo a:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

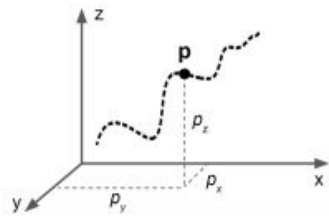


Figura 1: Trayectoria

II. MODELO DEL SISTEMA EN TIEMPO CONTINUO

A partir del modelo que surge de las ecuaciones de movimiento relacionadas con $\dot{\mathbf{p}}(t)$, $\dot{\mathbf{v}}(t)$ y $\dot{\mathbf{a}}(t)$,

se pueden definir un modelo en SS a partir de la aproximación de aceleración constante, es decir $\dot{\mathbf{a}}(t) = 0$, aunque esta aproximación no es cierta en general, se lo puede contemplar considerando que hay un error en el modelo planteado diciendo que $\dot{a}_x, \dot{a}_y, \dot{a}_z$ se pueden modelar como un vector de variables aleatorias gaussianas $N(0, \mathbf{q})$ con $\mathbf{q} = \text{diag}([10^{-2}, 8 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-5}])$.

Entonces, $\dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{0} + \epsilon_q$, $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a}(t)$, $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{v}(t)$, $\epsilon_q \sim N(0, \mathbf{q})$ y se define:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9]^T \quad (1)$$

$$= [p_x, p_y, p_z, v_x, v_y, v_z, a_x, a_y, a_z]^T$$

A partir de esto se puede obtener \mathbf{F} y \mathbf{Q} , la matriz de estado y covarianza del ruido de proceso respectivamente .

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{6 \times 6} & \mathbf{0}^{6 \times 3} \\ 10^{-2} & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^{3 \times 6} & 0 & 8 \times 10^{-03} & 0 \\ & 0 & 0 & 2 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3)$$

III. DISCRETIZACION DEL SISTEMA

Una vez obtenidas las matrices que tener en cuenta que son continuas, por lo que habrá que discretizarlo, teniendo en cuenta que

$$F_d = e^{F.T} = I + F.T + \frac{(F.T)^2}{2} + \frac{(F.T)^3}{3} + \dots$$

$$\begin{aligned} Q_d &= \int_0^\infty e^{Ah} Q e^{A^T h} dh \\ &= QT + \frac{(AQ + QA^H)T^2}{2} + \frac{(A^2.Q + Q.A^{2H}).T^3}{6} \\ &\quad + A^2QA^H \frac{T^3}{3} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{q} \frac{T^5}{20} & \mathbf{q} \frac{T^4}{8} & \mathbf{q} \frac{T^3}{6} \\ \mathbf{q} \frac{T^4}{8} & \mathbf{q} \frac{T^3}{3} & \mathbf{q} \frac{T^2}{2} \\ \mathbf{q} \frac{T^3}{6} & \mathbf{q} \frac{T^2}{2} & \mathbf{q} T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para nuestro caso con $T = 1[s]$ se vio que con F_d hasta el segundo termino funciona bien, y con Q_d si bien se tiene la expresión general con el primer término funciona.

IV. FILTRADO DE KALMAN

Se define la ecuación de observaciones como $\mathbf{y}_k = H\mathbf{x}_k + \eta_k$ y covarianza de medición de ruido $R = E[\eta_k \eta_k^H]$.

Donde se debe tener en cuenta:

$\delta_p^2 = 2500[m^2]$, $\delta_v^2 = 25[\frac{m^2}{s^2}]$ y $\delta_a^2 = 1[\frac{m^2}{s^4}]$ ruidos gaussianos aditivos de la posición, velocidad y aceleración respectivamente.

se define entonces:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_{6 \times 6}$$

Las matrices de observación para la posición, velocidad y aceleración, según lo que se este viendo (en este caso todos los estados).

Luego la covarianza del ruido de medición

$$\mathbf{R} = \text{diag}([\sigma_p^2, \sigma_p^2, \sigma_p^2, \sigma_v^2, \sigma_v^2, \sigma_v^2, \sigma_a^2, \sigma_a^2, \sigma_a^2])$$

para la posicion, velocidad y aceleracion, en donde se asume que estan descorrelacionados, por ello es una matriz diagonal.

IV-A. Observabilidad

Se plantea estimar todos los estados a partir de las mediciones generadas, pero hasta ahora no se ha hablado si es posible, bueno para ello se debe chequear la observabilidad del sistema, es decir si se puede determinar los estados $x(n)$ a partir de las observaciones $y(n)$ para ello se chequea si el par (F, H) es observable:

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^n \end{bmatrix} \right) = n \quad (4)$$

donde $n = 9$, osea deben ser rango completo

Para las mediciones dadas por el archivo "tp5.mat" se generan las mediciones observadas.

IV-B. Estimaciones

Considerando las siguientes condiciones iniciales, los estados iniciales $x_{0/-1} = [10, -600, 50, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ y la covarianza inicial $P_{0/-1} = \text{diag}(10^6, 10^6, 10^6, 10^4, 10^4, 10^4, 5, 5, 5)$ se utiliza un filtro de Kalman (KF) para estimar los estados.

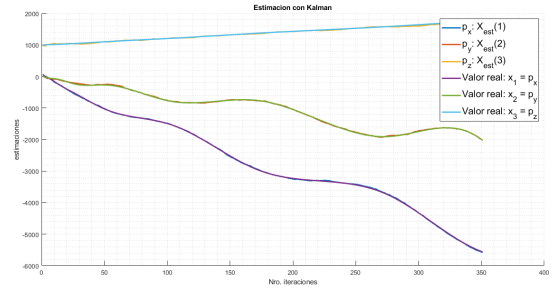


Figura 1: Posición.

La figura 1 son los estado estimados por el KF junto con los verdaderos estados. Notar que la estimación es muy buena para las condiciones dadas.

La figura 2 la aproximación a los verdaderos estados también es buena, se puede apreciar como las oscilaciones propias de la señal observada convergen a la velocidad real.

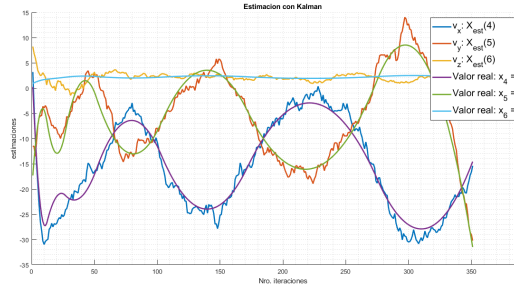


Figura 2: Velocidad.

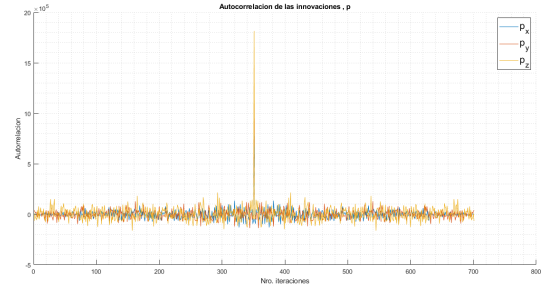


Figura 4: Autorrelacion de posición.

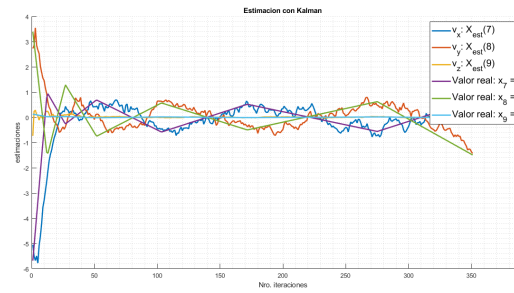


Figura 3: Aceleración.

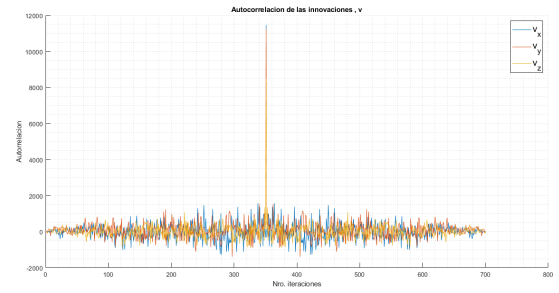


Figura 5: Autorrelacion de velocidad.

En la figura 3 se ve como se cae la hipótesis de aceleración constante, dado que solo es constante a tramos, pero esto aun asi converge debido a que se consideró un error del modelo el cual se tuvo en cuenta y por ello el KF funciona bien.

Notar que al tener una condición inicial $X_{0/-1} = [10^6, 10^6, 10^6...]^T$ un poco lejana de la real $[0, 0, 1000...]^T$ inicialmente la estimación de los estados difiere un poco de la real, pero habiendo puesto una covarianza para la posición inicial grande, este mejora rápidamente.

Las autocorrelaciones de cada estado (p, v, a) son:

Luego las innovaciones deben ser un proceso blanco, entonces las autocorrelaciones deben de ser una delta, por lo que se procede a graficar las autocorrelaciones para comprobar que todo este correcto.

V. ANALISIS DE CONDICIONES INICIALES

Suponiendo que se mide la posición afectada por ruido blanco gaussiano con una varianza $\sigma_p^2 = 2500[m^2]$ y la covarianza inicial del error en los estados $P_{0/-1}$. Para cada una de las

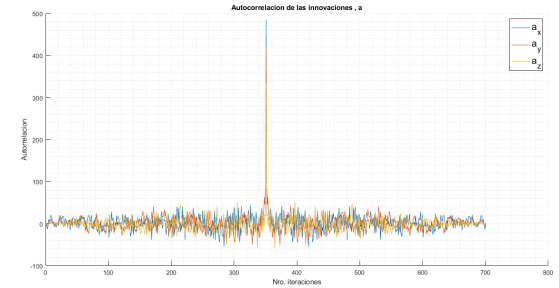


Figura 6: Autorrelación de aceleración.

condiciones iniciales indicadas a continuación, se grafica la trayectoria $p = [p_x, p_y, p_z]^T$ para observar la convergencia de la trayectoria estimada.

V-A. Estados cercanos, varianza inicial pequeña

$$x_{0/-1} = [-15, 10, 960, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$P_{0/-1} = \text{diag}([10, 10, 10, 10^4, 10^4, 10^4, 5, 5, 5])$$

El estado inicial $x_{0/-1}$ es cercano al verdadero estado $p_0 = [00100]^T$ y la covarianza inicial del error de estimación de estados $P_{0/-1}$ es pequeña,

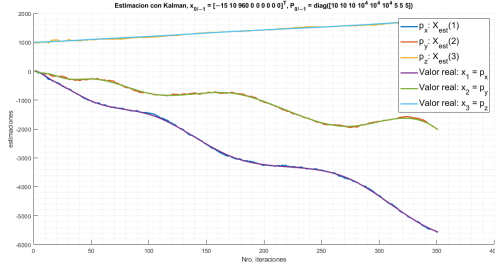


Figura 7: Convergencia de trayectoria estimada

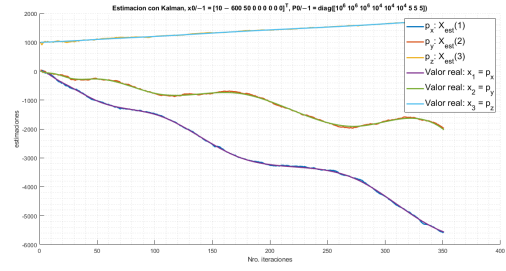


Figura 9: Convergencia de trayectoria estimada

es decir que inicialmente se conoce el estado inicial muy bien, Ahora bien, esto es cierto por lo que el KF confiara más en el modelo de SS y evolucionará dándole más importancia a este.

V-B. Estados cercanos, varianza inicial pequeña

$$x_{0/-1} = [10, -600, 50, 0, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$P_{0/-1} = \text{diag}([10, 10, 10, 10^4, 10^4, 10^4, 5, 5, 5])$$

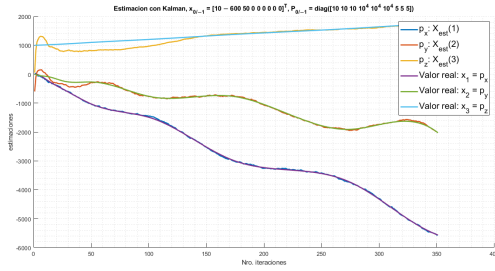


Figura 8: Convergencia de trayectoria estimada

El estado inicial $x_{0/-1}$ es lejano al verdadero estado $p_0 = [00100]^T$ y la covarianza inicial del error de estimación de estados $P_{0/-1}$ es pequeña, entonces el KF erróneamente al principio le dará más importancia al modelo de SS, luego las covarianzas se actualizan, dándole más importancia a las mediciones y finalmente convergiendo.

V-C. Estados cercanos, varianza inicial alta

$$x_{0/-1} = [10, -600, 50, 0, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$P_{0/-1} = \text{diag}([10^6, 10^6, 10^6, 10^4, 10^4, 10^4, 5, 5, 5])$$

El estado inicial $x_{0/-1}$ es lejano al verdadero estado $p_0 = [00100]^T$ y la covarianza inicial

del error de estimación de estados $P_{0/-1}$ es alta, esto hace que el KF inicialmente sepa que la estimación es mala, por lo que rápidamente dará más importancia a las mediciones y gracias a ello converge más rápido.

VI. ANALISIS DE COVARIANZA DE RUIDO DE MEDICIÓN

Se toman mediciones de la posiciones afectadas por ruido gaussiano aditivo con una varianza $\sigma_p^2 = 2500[m^2]$, asumiendo condiciones iniciales

$$x_{0/-1} = [10, -600, 50, 0, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$P_{0/-1} = \text{diag}([10^6, 10^6, 10^6, 10^4, 10^4, 10^4, 5, 5, 5])$$

Se estima el filtrado de los estados $p = [p_x, p_y, p_z]^T$.

suponiendo que se miden las posiciones con ruido blanco y matriz de covarianza R, pero que sin embargo el algoritmo utiliza una covarianza R' equivocada, en lugar R.

Se grafica la trayectoria (real, estimada y medida) y la autocorrelación de las innovaciones, para los siguientes dos casos:

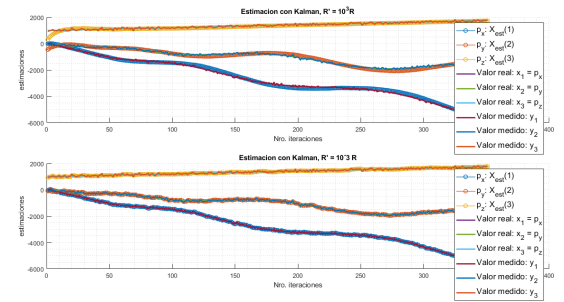


Figura 10: Convergencia con distinta matriz de covarianza R

Cuando aumenta la covarianza del ruido de medición R , disminuye la ganancia del KF, haciendo que se le dé más importancia al modelo de SS para evolución inicial. en la figura ?? se observa como con $R' = 10^3$ (una covarianza de medición mayor que R) el KF da menos importancia inicialmente a las mediciones, haciendo que tarde más en converger a los verdaderos estados.

Por otro lado con $R = 10^{-3}$ el KF asumirá que las mediciones son mucho mejores que con R por lo que dará más importancia a las mediciones para estimar los estados, haciendo que la convergencia sea más rápida.

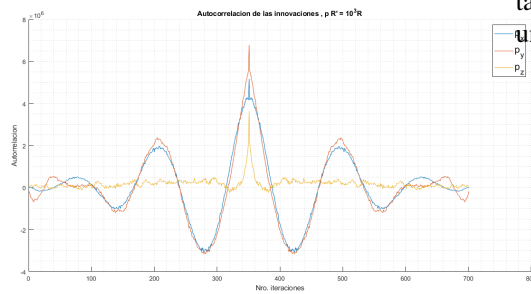


Figura 11: autocorrelaciones con $R' = 10^3$

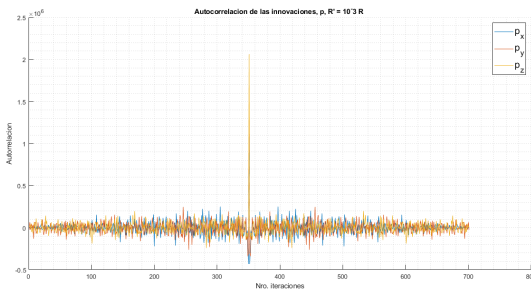


Figura 12: autocorrelaciones con $R' = 10^{-3}$

Una de las condiciones del KF es que la autocorrelación del proceso sea de ruido blanco, es decir a lo sumo una delta. Entonces observando la figura 11 se ve como una mala medición afecta a la condición pedida, haciendo que se aleje de lo ideal, mientras que por otro lado en la figura 12 la aproximación mucho mejor, esto es consistente con la convergencia.

VII. CONCLUSION

Es posible obtener un modelo SS en espacio continuo y luego discretizar, en este caso es posible la discretización completa de Q .

El filtro de Kalman resuelve el problema de minimización MMSE para un modelo lineal.

Existe una relación de compromiso entre KF y las condiciones iniciales, de hecho, la ganancia del filtro de Kalman es proporcional a la matriz de covarianza del proceso.

Existe una relación inversamente proporcional entre la ganancia del KF y la matriz de covarianza de medición.

Estos dos parámetros mencionado son importantes a la hora de usar el filtro de Kalman para una convergencia más rápida.

REFERENCIAS

- Thomas Kailath, Ali H. Sayed, Babak Hassibi - Linear Estimation, (2000).
- G. Welch. Measurement Sample Time Optimization for Human Motion Tracking/Capture Systems