

Procesamiento de señales I

86.51

Cecilia G. Galarza

FIUBA

Laboratorio de Procesamiento de Señales y Comunicaciones

2do Cuatrimestre 2022

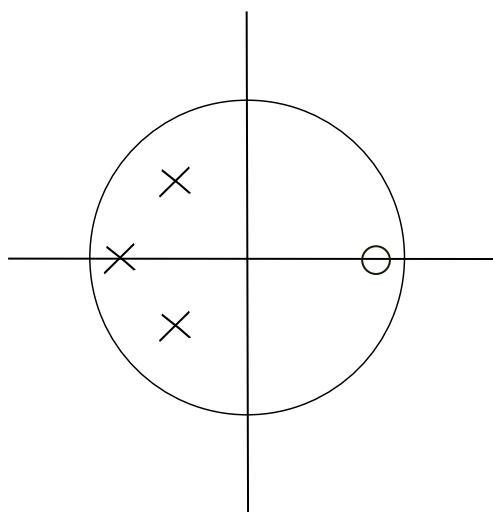
Diseño de Filtros Digitales IIR

Por qué implementaríamos un filtro IIR?

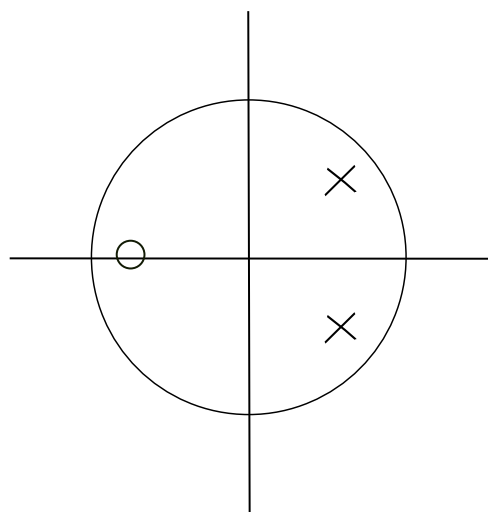
- El filtro digital puede ser obtenido a partir de un filtro analógico de conocido desempeño.
- Un dado $|H(\omega)|$ requiere de un filtro IIR de menor orden que si la implementación fuera con un FIR.

Polos y ceros

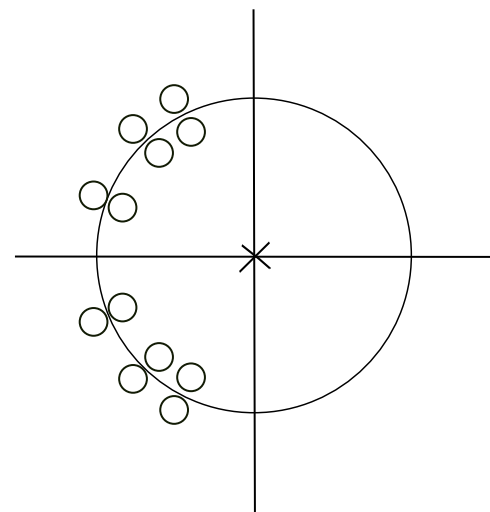
- FIR tiene polos sólo en el origen.
- IIR acepta polos en cualquier punto de $|z| < 1$.



IIR Pasaalto



IIR Pasabajo



FIR Pasabajo

A grandes rasgos, los polos se ubican cerca de la banda de paso y sus ceros cerca de la banda de rechazo.

Desventajas de un filtro IIR?

- Fase no-lineal
- Errores de cuantización

Desventajas de un filtro IIR? Fase no-lineal

Si $h(n)$ es causal y tiene fase lineal, entonces

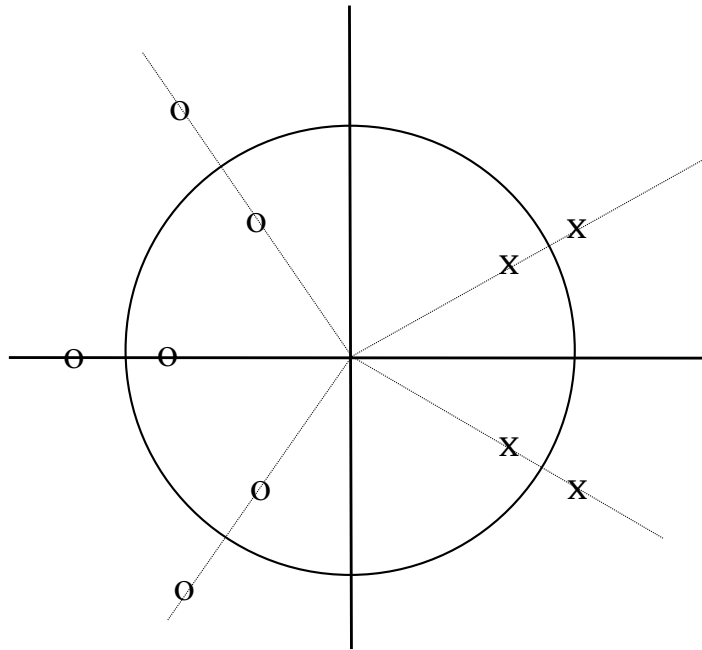
$$H(z) = A(z)z^{-\kappa/2}.$$

Por otro lado, como $h(n)$ es simétrica o antisimétrica, tenemos que

$$H(z) = \pm H(z^{-1})$$

Filtros IIR

Si z_0 es un cero o un polo de $H(z)$, entonces, $1/z_0$ también lo es.



Para que el sistema sea causal, estable y de fase lineal, los únicos polos aceptables son $z = 0$. Por ende, un sistema IIR estable y causal no puede tener fase lineal.

Filtros IIR con M ceros y N polos

Desventajas de un filtro IIR? Errores de cuantización

Cómo es la representación de sistema IIR general con M ceros y N polos?

En el campo transformado:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$$
$$Y(z) = H(z)X(z)$$

En el tiempo,

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$

Implementación Forma Directa

Cascada de dos sistemas: uno con todos ceros y otro con todos polos

$$\begin{aligned} Y(z) &= \left[\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \right] \left[\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \right] X(z) \\ &= \left[\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \right] \left[\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \right] X(z) \end{aligned}$$

Implementación Forma Directa I y II.

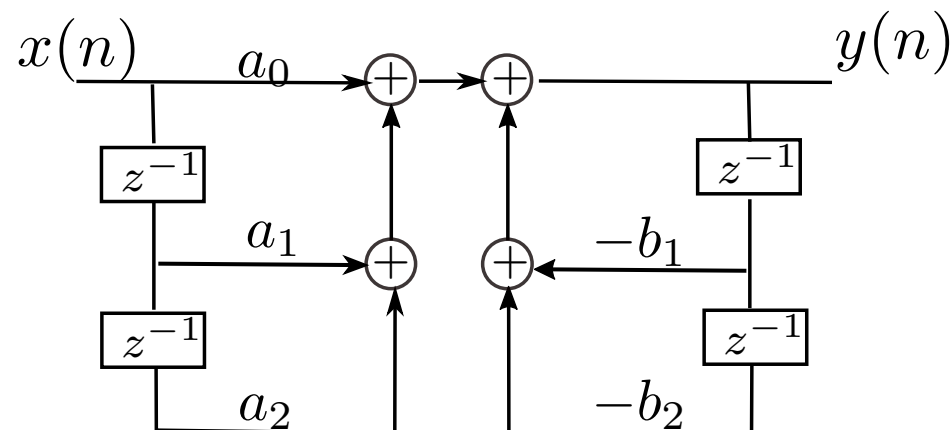
Implementación Forma Directa I

$$Y(z) = \left[\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \right] \left[\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} X(z) \right]$$

entonces

$$Y(z) = - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} X(z)$$

En el tiempo, $y(n) = - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$.



Implementación Forma Directa II

$$Y(z) = \left[\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \right] \underbrace{\left[\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \right]}_{W(z)} X(z)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$$

Implementación Forma Directa II

$$Y(z) = \left[\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \right] \underbrace{\left[\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \right]}_{W(z)} X(z)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \implies w(n) = - \sum_{k=1}^N b_k w(n-k) + x(n)$$

Implementación Forma Directa II

$$Y(z) = \left[\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \right] \underbrace{\left[\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \right]}_{W(z)} X(z)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \implies w(n) = - \sum_{k=1}^N b_k w(n-k) + x(n)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} W(z)$$

Implementación Forma Directa II

$$Y(z) = \left[\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \right] \underbrace{\left[\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \right]}_{W(z)} X(z)$$

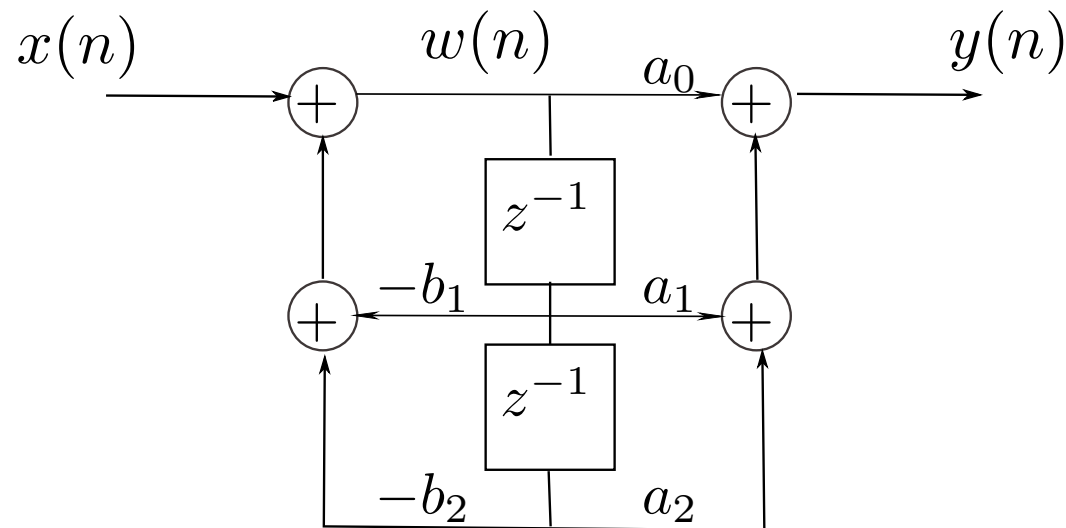
$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \implies w(n) = - \sum_{k=1}^N b_k w(n-k) + x(n)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} W(z) \implies y(n) = \sum_{k=0}^M a_k w(n-k)$$

Implementación Directa Forma II

$$w(n) = - \sum_{k=1}^N b_k w(n-k) + x(n) \quad , \quad y(n) = \sum_{k=0}^M a_k w(n-k)$$

Se combinan los retardos de $w(n)$ para una implementación más compacta.

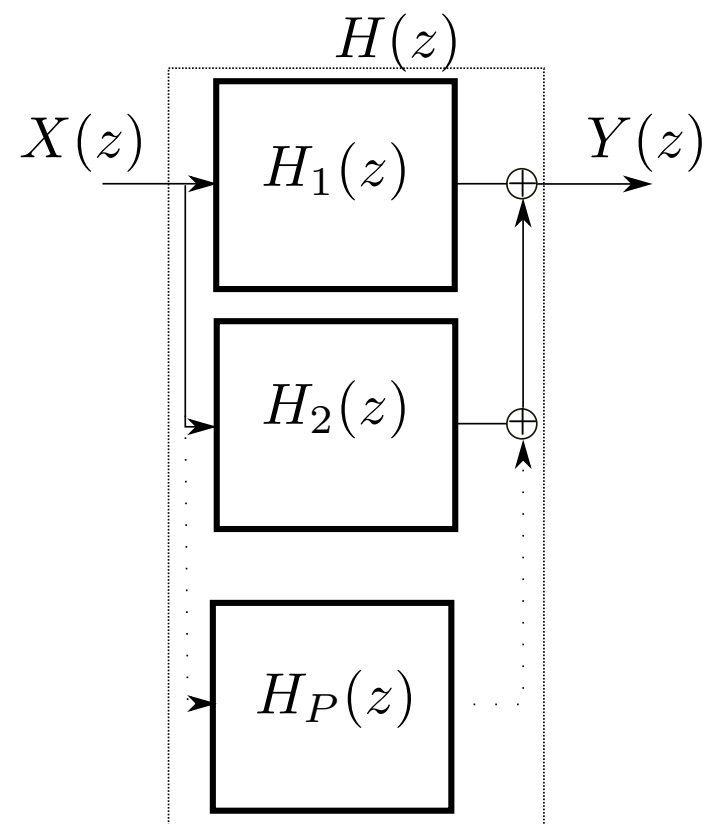
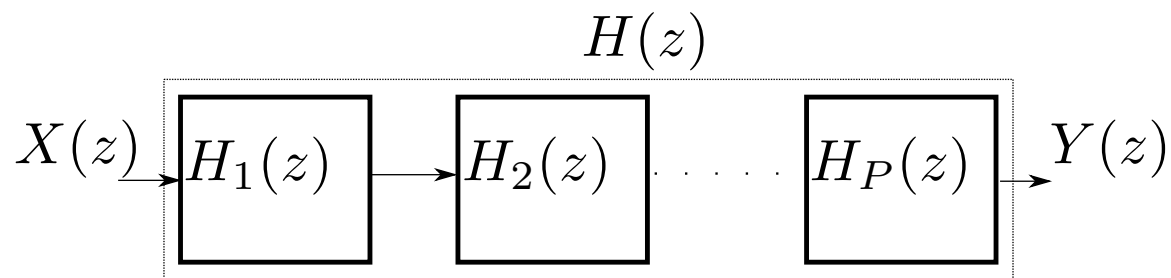


Errores de cuantización de coeficientes

- La implementación de un filtro IIR **siempre** va a tener un lazo de realimentación asociado
- Cuando hay precisión finita, esto puede afectar la estabilidad del sistema implementado
- Con precisión finita, los coeficientes del filtro tienen sólo una cantidad finita de posibilidades de representación. Por ende, los polos y ceros no van a poder ser arbitrarios.
- Como resultado, los sistemas IIR son más delicados al momento de implementarlo en plataforma digital

Implementación de un filtro IIR

Para mejorar la performance, el sistema se descompone en subsistemas de segundo orden, y se implementa la cascada o el paralelo de los subsistemas de segundo orden.



Diseño de filtro IIR

- Al diseñar un filtro IIR, vamos a tener control sobre $|H(\omega)|$, no sobre $\Theta(\omega)$. Los filtros IIR se utilizan cuando se acepta una cierta distorsión de fase.
- El modo más común de diseño es partir de un filtro en tiempo continuo $H(s)$ y hacer una transformación entre el espacio s y el espacio z . En este curso, veremos dos transformaciones de este tipo y repasaremos algunos de los métodos de diseño de filtros en tiempo continuo.

Invarianza de la respuesta impulsiva

Supongamos que contamos con la respuesta impulsiva de un filtro en tiempo continuo que satisface las especificaciones de diseño. Sea $h_a(t)$ dicha respuesta y T el período de muestreo con el cual se discretiza la señal. Luego, este método obtiene la respuesta impulsiva del filtro discreto como

$$h(n) = h_a(t)|_{t=nT} = h_a(nT)$$

¹Repasar S&S si no recuerdan este teorema

Invarianza de la respuesta impulsiva

Supongamos que contamos con la respuesta impulsiva de un filtro en tiempo continuo que satisface las especificaciones de diseño. Sea $h_a(t)$ dicha respuesta y T el período de muestreo con el cual se discretiza la señal. Luego, este método obtiene la respuesta impulsiva del filtro discreto como

$$h(n) = h_a(t)|_{t=nT} = h_a(nT)$$

Recordando el teorema del muestreo¹, tenemos que

$$H(\omega)|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a \left[\Omega - \frac{2\pi}{T}k \right],$$

donde $H_a(\Omega)$ es la transformada de Fourier de tiempo continuo de $h_a(t)$. La frecuencia de muestreo es $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ y la frecuencia de Nyquist $\frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$.

¹Repasar S&S si no recuerdan este teorema

Invarianza de la respuesta impulsiva

$$H(\omega)|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a \left[\Omega - \frac{2\pi}{T} k \right],$$

- Si T es demasiado grande, vamos a sufrir efectos de aliasing. La elección de T debe estar en concordancia con el ancho de la banda pasante, pero también debe tener en cuenta el ancho de la banda de transición para evitar aliasing perjudicial al momento de la discretización.
- Si T es demasiado chico, puede haber una compresión innecesaria del espectro.

Invarianza de la respuesta impulsiva

Supongamos que tenemos un filtro con N polos,

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{s - s_k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_a(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{s_k t} u(t).$$

donde $s_k \in \mathbb{C}_-$.

Invarianza de la respuesta impulsiva

Supongamos que tenemos un filtro con N polos,

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{s - s_k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_a(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{s_k t} u(t).$$

donde $s_k \in \mathbb{C}_-$. Para un tiempo de muestreo T , tenemos

$$h(n) = \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{s_k n T} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \left(e^{s_k T} \right)^n \quad n \geq 0.$$

Invarianza de la respuesta impulsiva

Supongamos que tenemos un filtro con N polos,

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{s - s_k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_a(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{s_k t} u(t).$$

donde $s_k \in \mathbb{C}_-$. Para un tiempo de muestreo T , tenemos

$$h(n) = \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{s_k n T} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \left(e^{s_k T} \right)^n \quad n \geq 0.$$

La transformada de esta señal resulta

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n \geq 0} h(n) z^{-n} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^N \alpha_k \left(e^{s_k T} z^{-1} \right)^n \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \end{aligned}$$

Invarianza de la respuesta impulsiva

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{s - s_k} \xrightarrow{\text{inv. al impulso}} H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

Los polos del plano s se mapean en polos del plano z de acuerdo a

$$\boxed{z_k = e^{s_k T}}.$$

Invarianza de la respuesta impulsiva

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{s - s_k} \xrightarrow{\text{inv. al impulso}} H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

Los polos del plano s se mapean en polos del plano z de acuerdo a

$$\boxed{z_k = e^{s_k T}}.$$

OJO!!! Los ceros no quedan mapeados del mismo modo!!!

Propiedades de $z = e^{sT}$

- **Se mantiene el orden del filtro**
La transformación no agrega ni quita polos

Propiedades de $z = e^{sT}$

- **Se mantiene el orden del filtro**
La transformación no agrega ni quita polos
- **Si $\Re(s) \leq 0$, entonces $|z| \leq 1$**

$$s = \sigma + j\Omega \longrightarrow z = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

Si $\sigma \leq 0$, entonces $e^{\sigma T} \leq 1$.

Propiedades de $z = e^{sT}$

- **Se mantiene el orden del filtro**
La transformación no agrega ni quita polos
- **Si $\mathbb{R}(s) \leq 0$, entonces $|z| \leq 1$**

$$s = \sigma + j\Omega \longrightarrow z = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

Si $\sigma \leq 0$, entonces $e^{\sigma T} \leq 1$.

- **El eje $s = j\Omega$, se mapea en el círculo unitario $|z| = 1$:**
Debido a la periodización inducida por el muestreo, **todos** los intervalos en el eje imaginario

$$[(2k - 1)\pi/T] \leq \Omega \leq [(2k + 1)\pi/T] \quad , \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

se mapean en el círculo unitario, $-\pi \leq \omega \leq \pi$

Pregunta

Es posible utilizar esta transformación para digitalizar un filtro pasalto?
(Qué sucede con el aliasing?)

Transformación bilineal

Ésta es una segunda manera de discretizar un filtro en tiempo continuo. Para ello, analizamos una transformación conforme que mapea el plano s en el plano z de acuerdo a

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \longleftrightarrow \quad z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \quad (6)$$

A diferencia de la transformación que mantiene invariante la respuesta impulsiva, la transformación bilineal mapea de forma biunívoca todo el eje $s = j\Omega$ en el círculo unitario $z = e^{j\omega}$. Acá no hay problema de aliasing.

Propiedades Transformación Bilineal

Sea $s = \sigma + j\Omega$ y $z = re^{j\omega}$. Reemplazando en (6) obtenemos

$$\sigma = \frac{2}{T} \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega}, \quad \Omega = \frac{2}{T} \frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega}$$

- Si $\sigma < 0$, entonces $|r| < 1$ y viceversa

Propiedades Transformación Bilineal

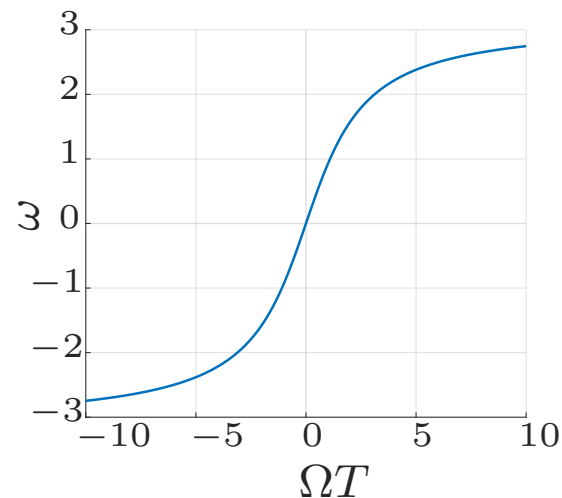
Sea $s = \sigma + j\Omega$ y $z = re^{j\omega}$. Reemplazando en (6) obtenemos

$$\sigma = \frac{2}{T} \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega}, \quad \Omega = \frac{2}{T} \frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega}$$

- Si $\sigma < 0$, entonces $|r| < 1$ y viceversa
- Cuando $\sigma = 0$, $r = 1$ y

$$\omega = 2 \operatorname{atan} \frac{\Omega T}{2}, \quad \Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}.$$

Si bien cada frecuencia Ω tiene una sola imagen ω , hay un efecto de compresión debido a la función $\tan(\cdot)$.



Ejemplo de uso Transformación Bilineal

Cómo elegir T ?

Todo depende de cuál es el punto de partida del diseño.

- Si las especificaciones son en tiempo discreto, para el diseño, se convierten a tiempo continuo, se realiza el diseño y luego se vuelve a discretizar. La elección de T no incide mayormente en el resultado.

Ejemplo de uso Transformación Bilineal

Cómo elegir T ?

Todo depende de cuál es el punto de partida del diseño.

- Si las especificaciones son en tiempo discreto, para el diseño, se convierten a tiempo continuo, se realiza el diseño y luego se vuelve a discretizar. La elección de T no incide mayormente en el resultado.
- Si se parte de $H_a(s)$, la elección de T sí influye. T debe ser tal que la compresión de ω sea lo menor posible, Para ello, las bandas relevantes del filtro deben estar cerca del origen

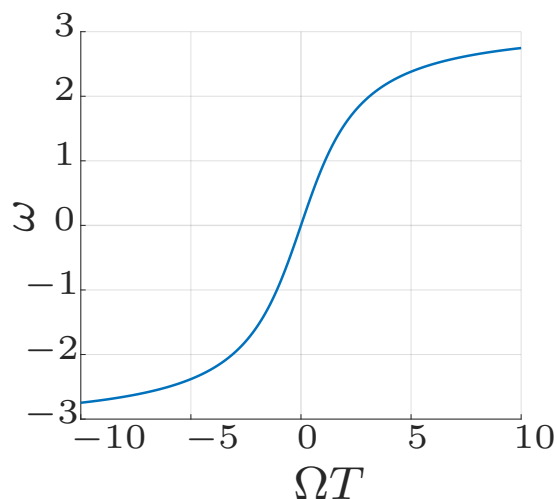


Figura: Compresión de ω en transformación bilineal

Ejercicios

Ej. 1

Demostrar que la transformación bilineal mapea el subconjunto $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) \leq 0\}$ en el subconjunto $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.
Qué relevancia tiene este resultado?

Repaso: Diseño de filtros en tiempo continuo: Butterworth

- Tiene dos parámetros de diseño: N , el orden del filtro y Ω_c , la frecuencia de corte (frecuencia a -3dB).

Repaso: Diseño de filtros en tiempo continuo: Butterworth

- Tiene dos parámetros de diseño: N , el orden del filtro y Ω_c , la frecuencia de corte (frecuencia a -3dB).
- Filtros de sólo polos

$$|H_{BW}(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}},$$

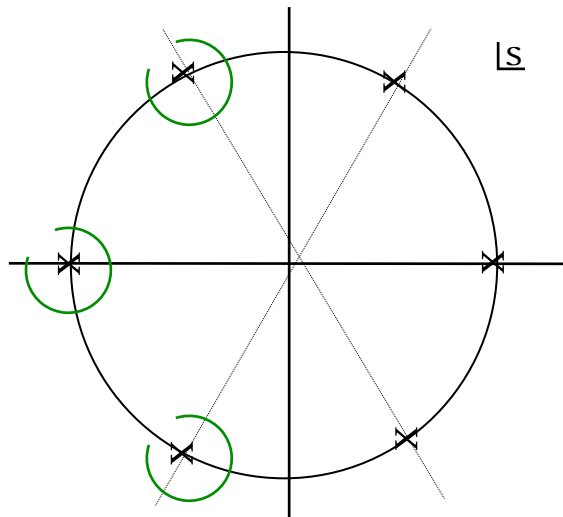
Repaso: Diseño de filtros en tiempo continuo: Butterworth

- Tiene dos parámetros de diseño: N , el orden del filtro y Ω_c , la frecuencia de corte (frecuencia a -3dB).
- Filtros de sólo polos

$$|H_{BW}(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}},$$

- Las singularidades de $H_{BW}(s)H_{BW}(-s)$ están ubicados en

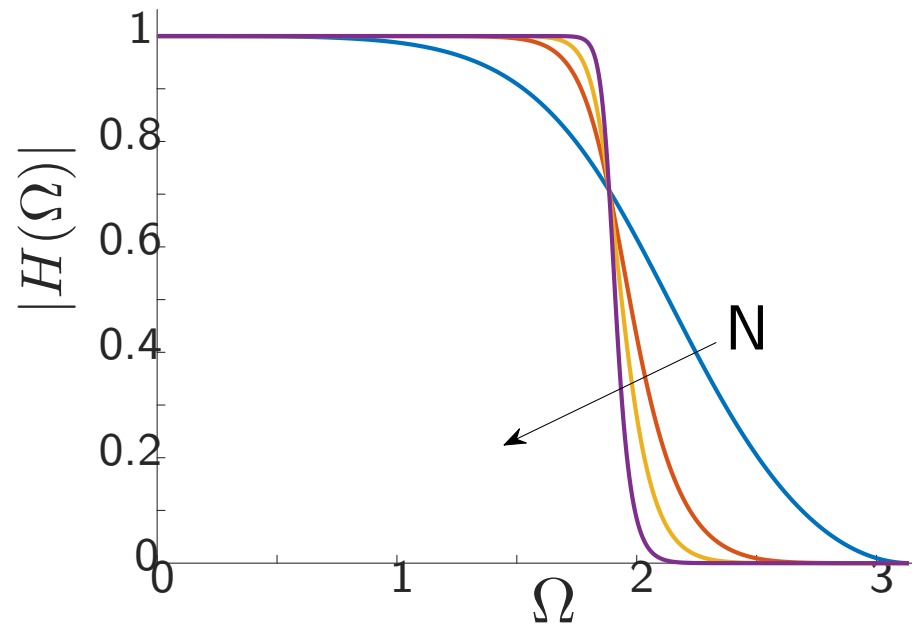
$$s_k = \Omega_c e^{j\pi/2} e^{j(2k+1)\pi/(2N)}, \quad k = 0, \dots, N-1$$



Los polos de $H_{BW}(s)$ están ubicados en el semiplano izquierdo del plano s .

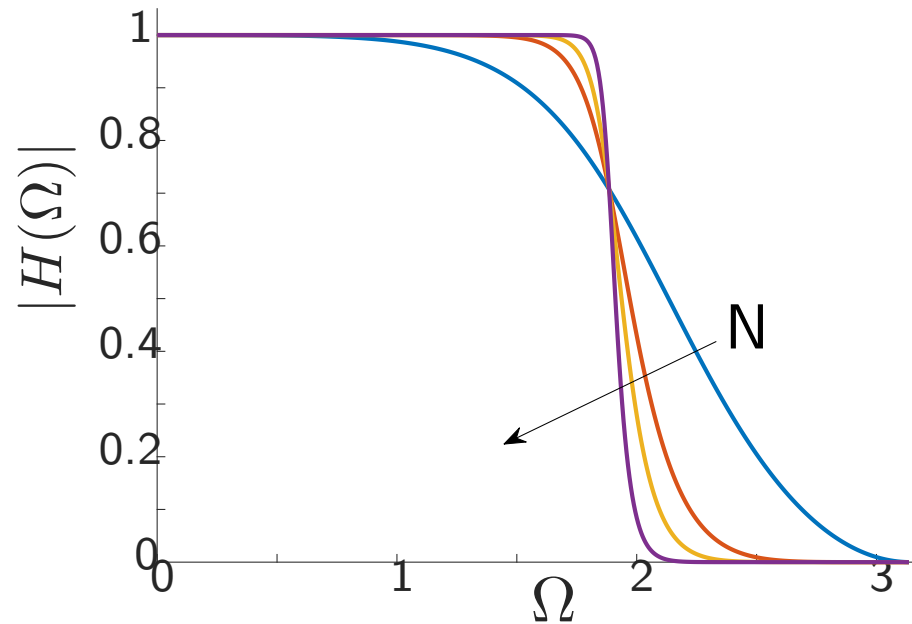
Repaso: Diseño de filtros en tiempo continuo: Butterworth

- La respuesta en frecuencia decrece monótonamente con Ω



Repaso: Diseño de filtros en tiempo continuo: Butterworth

- La respuesta en frecuencia decrece monótonamente con Ω



- El orden del filtro puede ser estimado a partir de las especificaciones de diseño.

Repaso: Diseño de filtros en tiempo continuo: Butterworth

Si se quiere $|H(\omega)| \leq \delta_s$ para $\Omega \geq \Omega_s$, luego,

$$|H_{BW}(\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s/\Omega_c)^{2N}} = \delta_s^2$$

Es decir,

$$N = \frac{1}{2} \frac{\log(\frac{1}{\delta_s^2} - 1)}{\log \frac{\Omega_s}{\Omega_c}}$$

Repaso: Diseño de filtros en tiempo continuo: Tchebyshev tipo I

- Filtro de todos polos

$$|H_{TCH1}(\Omega)| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

donde $T_N(x)$ es el polinomio de Tchebyshev de primer orden

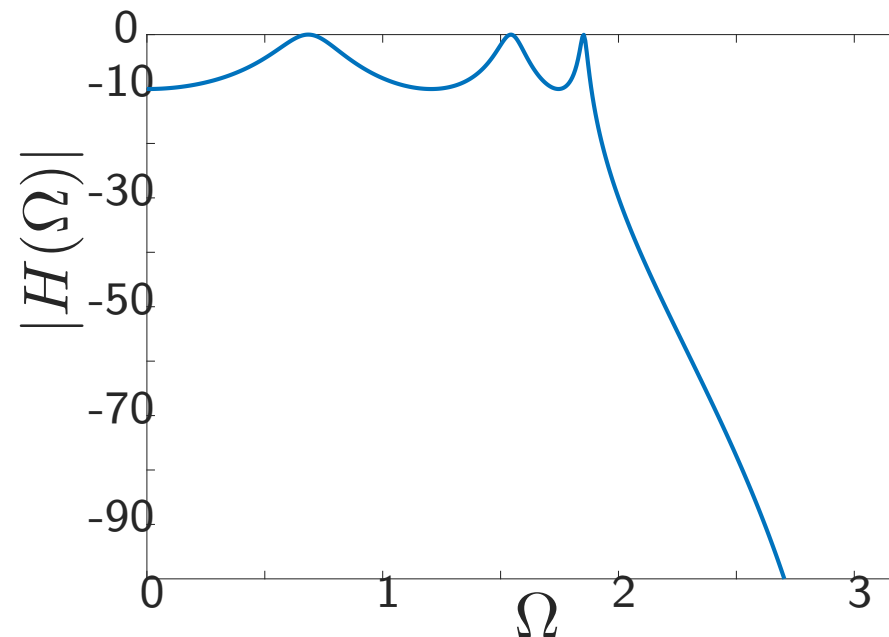
$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \arccos(x)) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \operatorname{arccosh}(x)) & |x| > 1 \end{cases}$$

y ε es un parámetro del filtro tal que

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{(1 - \delta_p)^2} - 1$$

Repaso: Diseño de filtros en tiempo continuo: Tchebyshev tipo I

- Son filtros equiripple en la banda de paso y monótonos en la banda de rechazo
- Por lo general, alcanzan las mismas especificaciones que Butterworth con órdenes más pequeños.



Repaso: Diseño de filtros en tiempo continuo: Tchebyshev tipo II

- Este filtro tiene ceros y polos

$$|H_{TCH2}(\Omega)| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)/T_N^2(\Omega_s/\Omega)]}$$

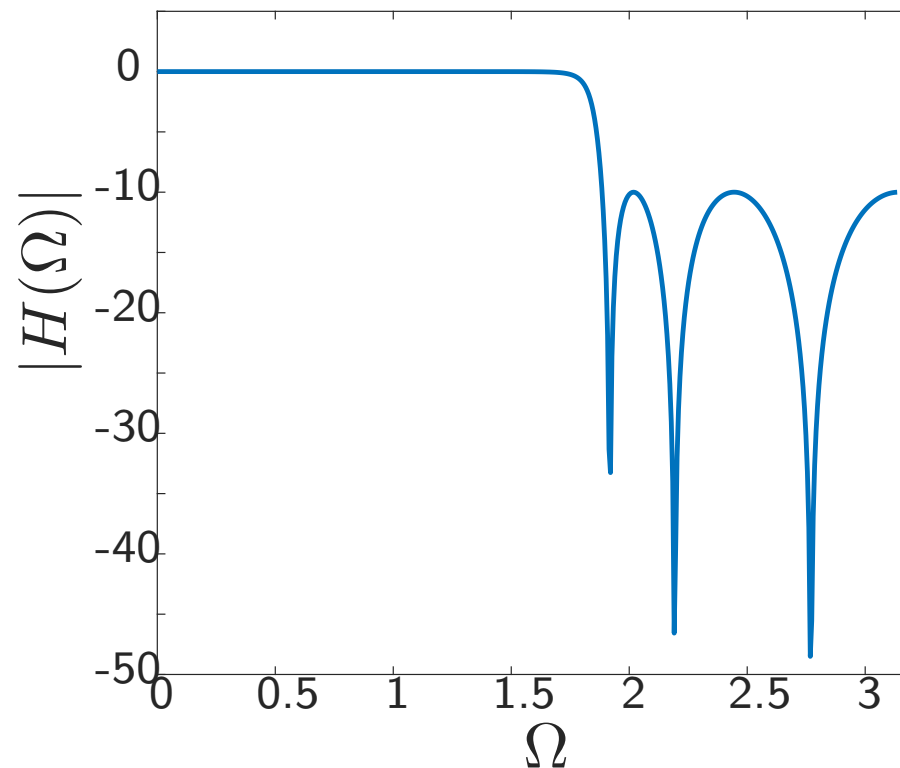
donde $T_N(x)$ es el polinomio de Tchebyshev de primer orden

- Filtros caracterizados por N , ε , δ_s , Ω_s/Ω_p .
- Dados estos parámetros, N toma el valor

$$N = \frac{\text{acosh}(\delta/\varepsilon)}{\text{acosh}(\Omega_s/\Omega_p)}.$$

Repaso: Diseño de filtros en tiempo continuo: Tchebyshev tipo II

- Son filtros equiripple en la banda de rechazo y monótonos en la banda de paso (al revés que TCHI).
- Los ceros del filtro están en el eje imaginario del plano s .

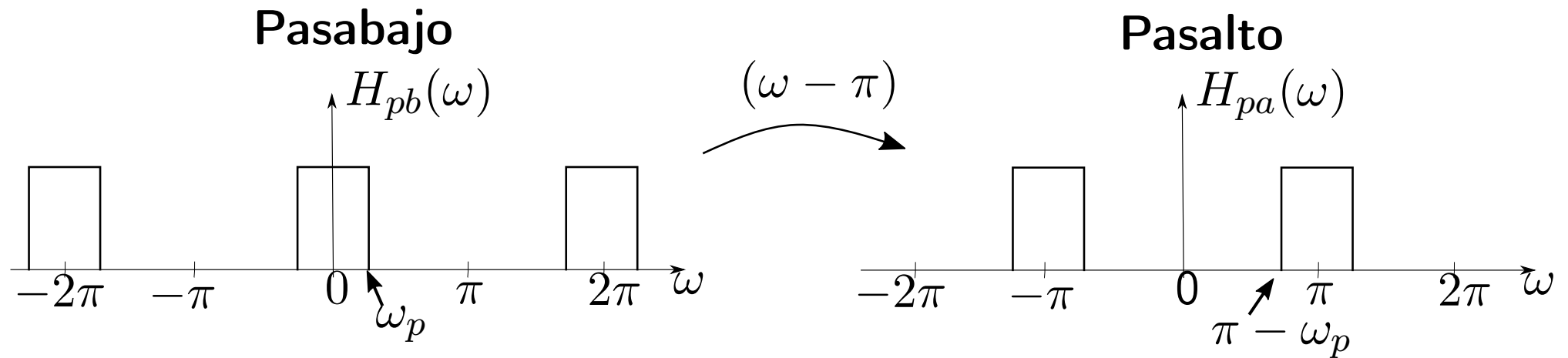


Pasabajos, Pasaltos, Pasabanda.....

Es posible definir una transformación del plano z tal que la respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos se transforme en una de un filtro pasaltos o pasabanda. Ésta es una de las razones por las cuales es costumbre desarrollar las técnicas de diseño de filtros pasabajos solamente.

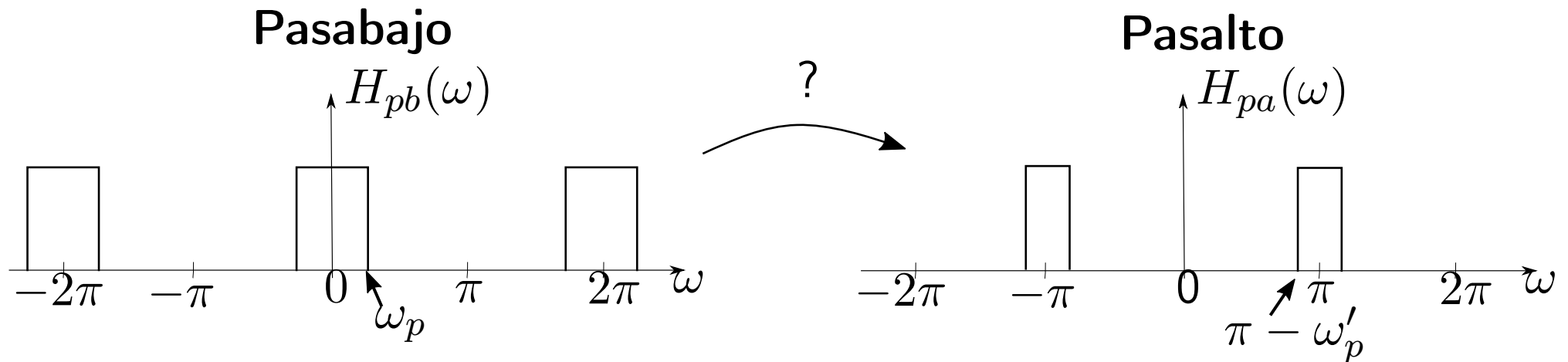
Transformaciones en Frecuencia

Primera transformación sencilla: $H_{pa}(\omega) = H_{pb}(\omega - \pi)$



Transformaciones en Frecuencia

Cómo hago si el pasalto tiene un ancho de banda distinto?

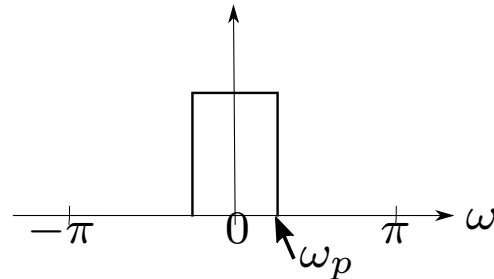


La transformación debe conservar estabilidad del filtro y mantener invariante el círculo unitario.

$$e^{-j\omega} \longrightarrow -\frac{e^{-j\omega} + a}{1 + ae^{-j\omega}} \quad \text{donde} \quad a = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_p + \omega'_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_p - \omega'_p}{2}\right)}$$

Transformaciones en Frecuencia

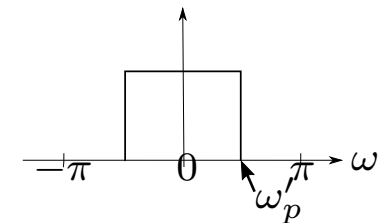
Filtro Pasabajo Tipo:



PB a PB

$$z^{-1} \longrightarrow \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$$

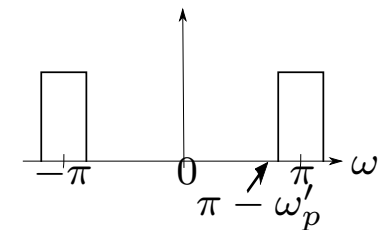
$$a = \frac{\sin(\frac{\omega_p - \omega'_p}{2})}{\sin(\frac{\omega_p + \omega'_p}{2})}$$



PB a PA

$$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$$

$$a = -\frac{\cos(\frac{\omega_p + \omega'_p}{2})}{\cos(\frac{\omega_p - \omega'_p}{2})}$$



PB
PBanda

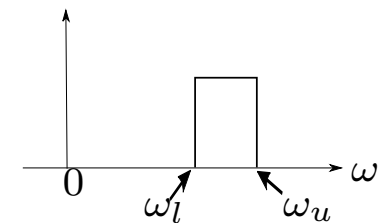
a

$$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$$

$$a_1 = 2\alpha \frac{\kappa}{\kappa + 1} \quad a_2 = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$$

$$\alpha = \frac{\cos(\frac{\omega_u + \omega_l}{2})}{\cos(\frac{\omega_u - \omega_l}{2})}$$

$$\kappa = \cot \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_p}{2}$$



Bibliografía

- ① *Discrete-Time Signal Processing*, Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer, and John R. Buck, Prentice-Hall Signal Processing Series.
- ② *Digital Signal Processing*, J Proakis, D. Manolakis, Prentice Hall
- ③ *Multirate Systems And Filter Banks*, P. P. Vaidyanathan, Prentice Hall.
- ④ *Introduction to Spectral Analysis*, P. Stoica, R. Moses, Prentice Hall.
- ⑤ *Linear Estimation*, Thomas Kailath, Ali H. Sayed, and Babak Hassibi Prentice Hall.
- ⑥ L.R. Rabiner, B. Gold, C. A. McGonegal, "An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters", IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, vol. AU-18, June 1970.