

# **Robótica Móvil**

## **un enfoque probabilístico**

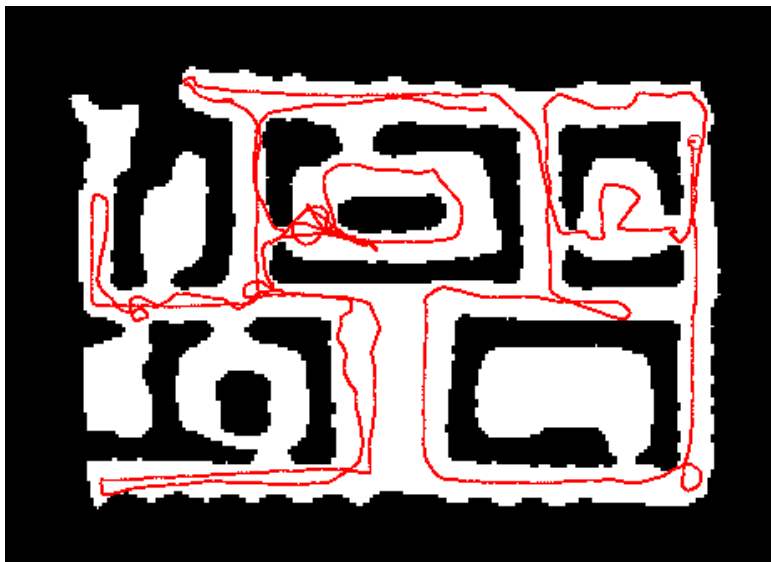
# **Modelos Probabilísticos de Movimiento**

Ignacio Mas

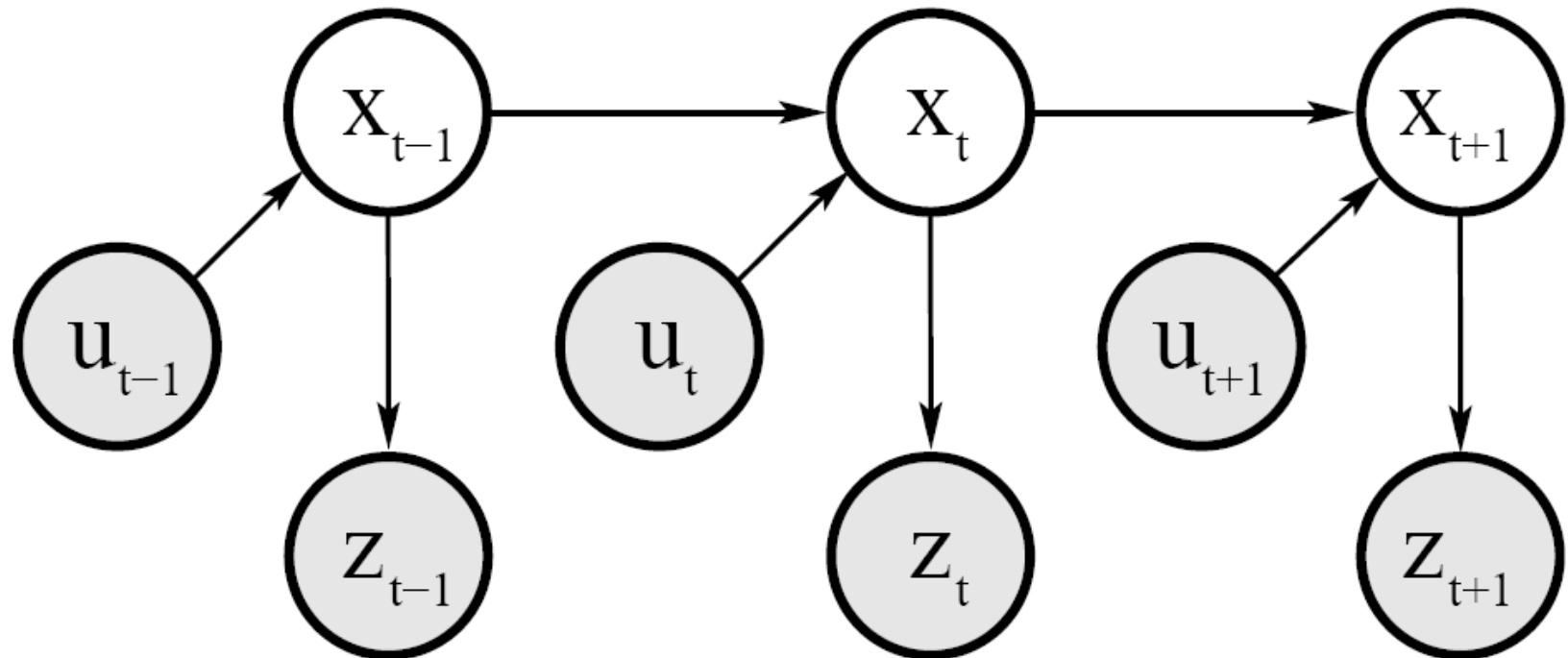
---

# Movimiento de un Robot

- El movimiento de un robot es inherentemente incierto.
- ¿Cómo podemos modelar esta incerteza?



# Red Bayesiana dinámica de controles, estados y percepciones

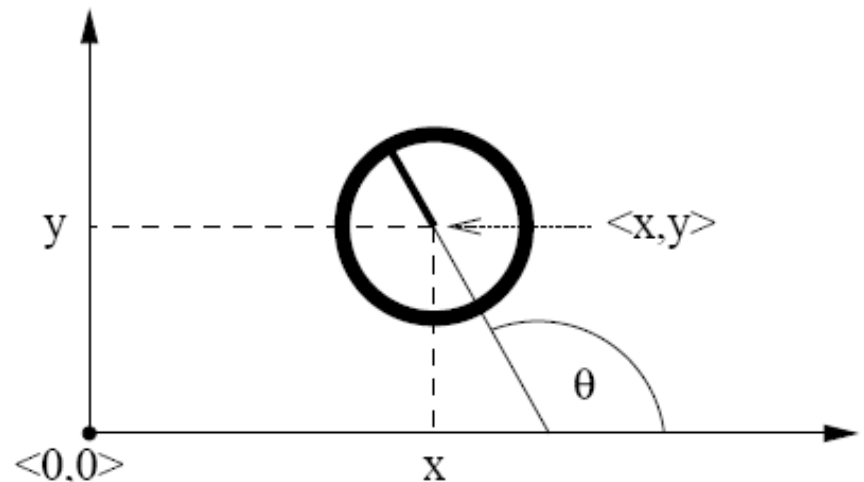


# Modelos de movimiento Probabilísticos

- Para implementar el Filtro de Bayes, necesitamos un modelo de transición  $p(x_t | x_{t-1}, u_t)$ .
- El término  $p(x_t | x_{t-1}, u_t)$  especifica una probabilidad a posteriori: que la acción  $u_t$  lleve al robot desde  $x_{t-1}$  hasta  $x_t$ .
- Discutiremos cómo  $p(x_t | x_{t-1}, u_t)$  puede ser modelado según las ecuaciones de movimiento y de su incerteza.

# Sistemas de coordenadas

- La configuración de un robot en 3D se puede describir con 6 parámetros.
- Estos son las 3 dimensiones de las coordenadas Cartesianas más los 3 ángulos de Euler para roll, pitch y yaw.
- Por simplicidad consideraremos robots que operan en una superficie plana.
- El espacio de estados de este sistema tiene 3 dimensiones  $(x,y,\theta)$ .

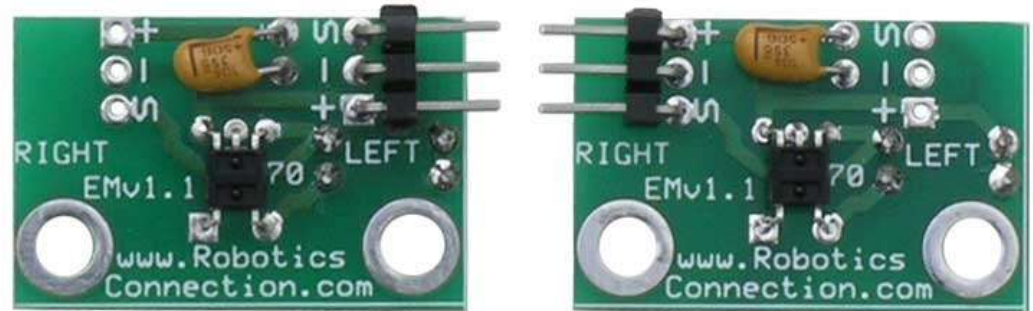


# Modelos más comunes de movimiento

- En la práctica, hay dos tipos de modelos de movimiento:
  - **Basados en odometría**
  - **Basados en velocidad (dead reckoning)**
- Los basados en odometría se usan en sistemas equipados con encoders en las ruedas.
- Los basados en velocidad deben ser usados cuando no hay encoders.
- Calculan una nueva pose basándose en velocidades y tiempo transcurrido.

# Ejemplo de encoders

Estos módulos proveen +5V cuando "ven" blanco, y 0V cuando "ven" negro.



Estos discos están hechos de un laminado color con transiciones de blanco a negro muy nítidas. Esto permite que el sensor vea fácilmente las transiciones.

# Dead Reckoning

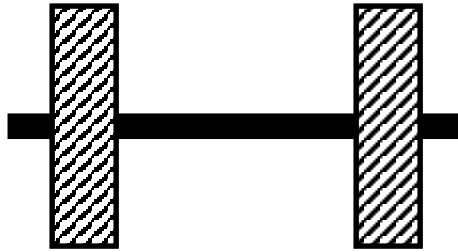
- Viene de “deduced reckoning” o de “dead in the water”.
- Cálculo de la posición integrando las velocidades
- Históricamente usado para calcular la posición de los barcos.



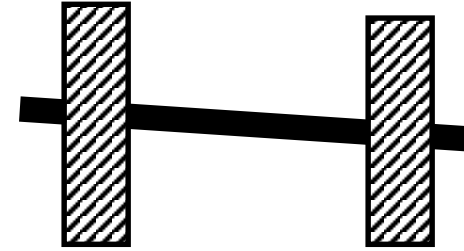
[Fuente de imagen:  
Wikipedia, LoKiLeCh]



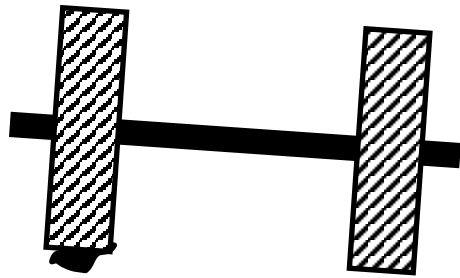
# Fuentes de error de robots con ruedas



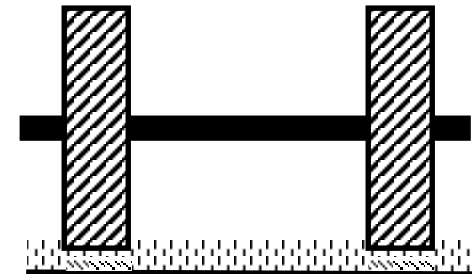
caso ideal



distintos diámetros  
de ruedas



batche



alfombra

Y muchos más ...

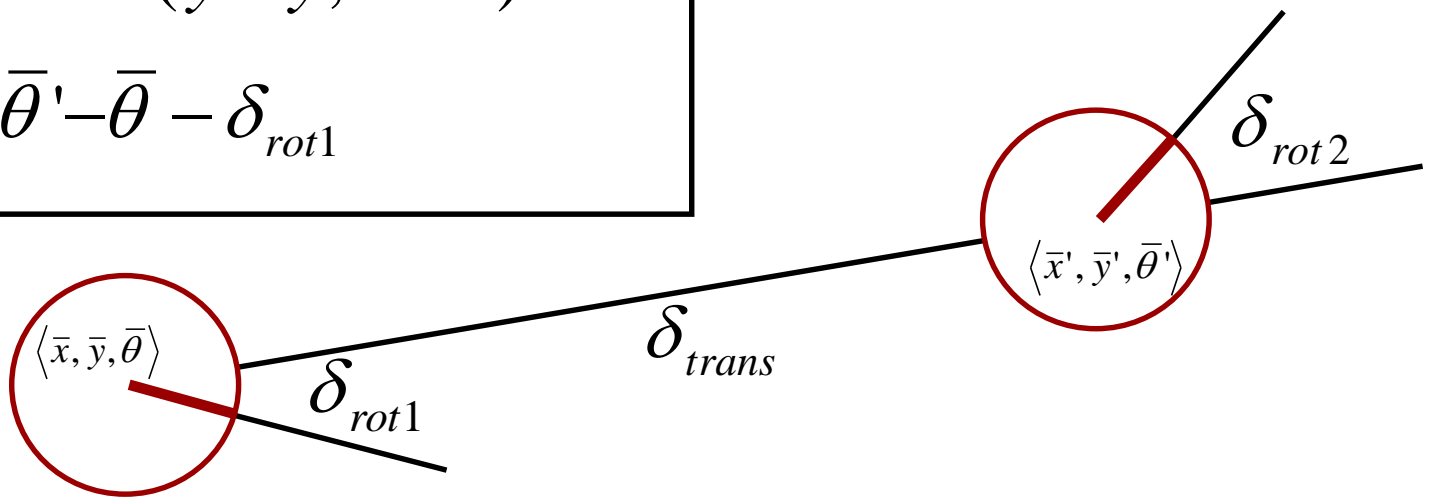
# Modelo de odometría

- El robot se mueve de  $\langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta} \rangle$  a  $\langle \bar{x}', \bar{y}', \bar{\theta}' \rangle$ .
- Información de odometría  $u = \langle \delta_{rot1}, \delta_{rot2}, \delta_{trans} \rangle$

$$\delta_{trans} = \sqrt{(\bar{x}' - \bar{x})^2 + (\bar{y}' - \bar{y})^2}$$

$$\delta_{rot1} = \text{atan2}(\bar{y}' - \bar{y}, \bar{x}' - \bar{x}) - \bar{\theta}$$

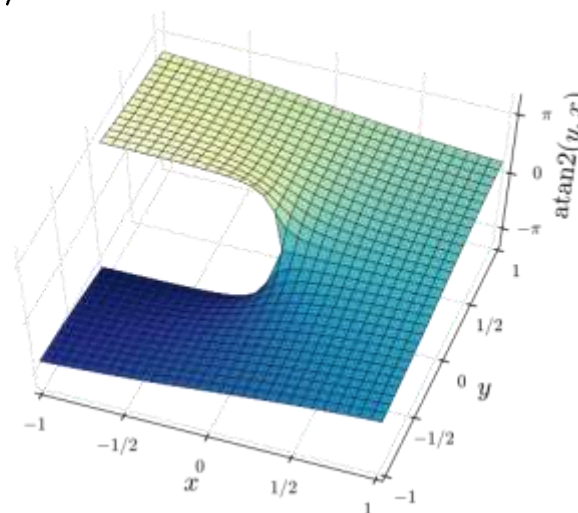
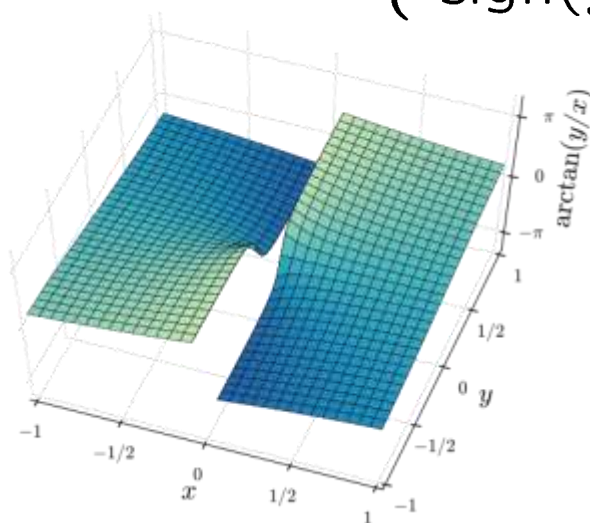
$$\delta_{rot2} = \bar{\theta}' - \bar{\theta} - \delta_{rot1}$$



# La función atan2

- Extiende la arco tangente para tener en cuenta los signos de  $x$  e  $y$ .

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \text{atan}(y/x) & \text{if } x > 0 \\ \text{sign}(y) (\pi - \text{atan}(|y/x|)) & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = y = 0 \\ \text{sign}(y) \pi/2 & \text{if } x = 0, y \neq 0 \end{cases}$$



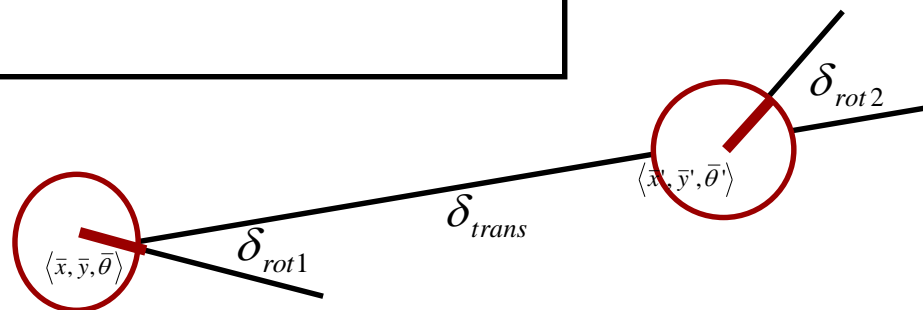
# Modelo de ruido para odometría

- El movimiento medido está dado por el movimiento verdadero más ruido.

$$\hat{\delta}_{rot1} = \delta_{rot1} + \varepsilon_{\alpha_1 |\delta_{rot1}| + \alpha_2 |\delta_{trans}|}$$

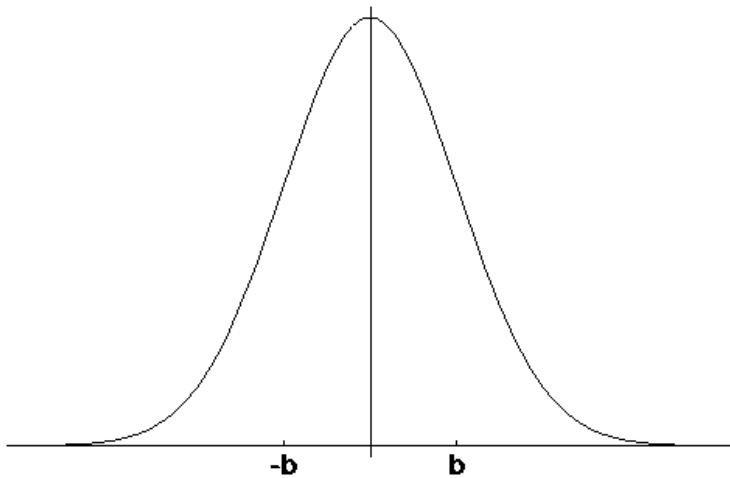
$$\hat{\delta}_{trans} = \delta_{trans} + \varepsilon_{\alpha_3 |\delta_{trans}| + \alpha_4 (|\delta_{rot1}| + |\delta_{rot2}|)}$$

$$\hat{\delta}_{rot2} = \delta_{rot2} + \varepsilon_{\alpha_1 |\delta_{rot2}| + \alpha_2 |\delta_{trans}|}$$



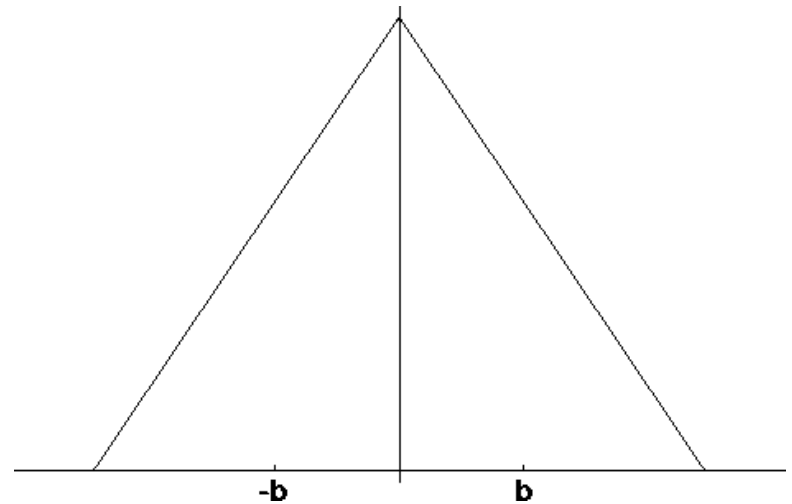
# Distribuciones típicas para modelos probabilísticos de movimiento

Distribución normal



$$\varepsilon_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

Distribución triangular



$$\varepsilon_{\sigma^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| > \sqrt{6\sigma^2} \\ \frac{\sqrt{6\sigma^2} - |x|}{6\sigma^2} & \text{if } |x| \leq \sqrt{6\sigma^2} \end{cases}$$

# Cálculo de densidad de probabilidad (media cero)

- Distribución normal

1. Algoritmo **prob\_normal\_distribution**( $a, b$ ):

2. return  $\frac{1}{\sqrt{2\pi} b^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \right\}$

punto a consultar



Desvío estándar

- Distribución triangular

1. Algoritmo **prob\_triangular\_distribution**( $a, b$ ):

2. return  $\max \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{6} b} - \frac{|a|}{6 b^2} \right\}$

# Cálculo de prob. *a posteriori* dados $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ , odometría

hipótesis odometría

1. Algoritmo **motion\_model\_odometry** ( $\boxed{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}$   $\boxed{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}'}}$ )

2.  $\delta_{trans} = \sqrt{(\bar{x}' - \bar{x})^2 + (\bar{y}' - \bar{y})^2}$

3.  $\delta_{rot1} = \text{atan2}(\bar{y}' - \bar{y}, \bar{x}' - \bar{x}) - \bar{\theta}$

4.  $\delta_{rot2} = \bar{\theta}' - \bar{\theta} - \delta_{rot1}$

5.  $\hat{\delta}_{trans} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

6.  $\hat{\delta}_{rot1} = \text{atan2}(y' - y, x' - x) - \bar{\theta}$

7.  $\hat{\delta}_{rot2} = \theta' - \theta - \hat{\delta}_{rot1}$

8.  $p_1 = \text{prob}(\delta_{rot1} - \hat{\delta}_{rot1}, \alpha_1 | \delta_{rot1} | + \alpha_2 \delta_{trans})$

9.  $p_2 = \text{prob}(\delta_{trans} - \hat{\delta}_{trans}, \alpha_3 \delta_{trans} + \alpha_4 (|\delta_{rot1}| + |\delta_{rot2}|))$

10.  $p_3 = \text{prob}(\delta_{rot2} - \hat{\delta}_{rot2}, \alpha_1 | \delta_{rot2} | + \alpha_2 \delta_{trans})$

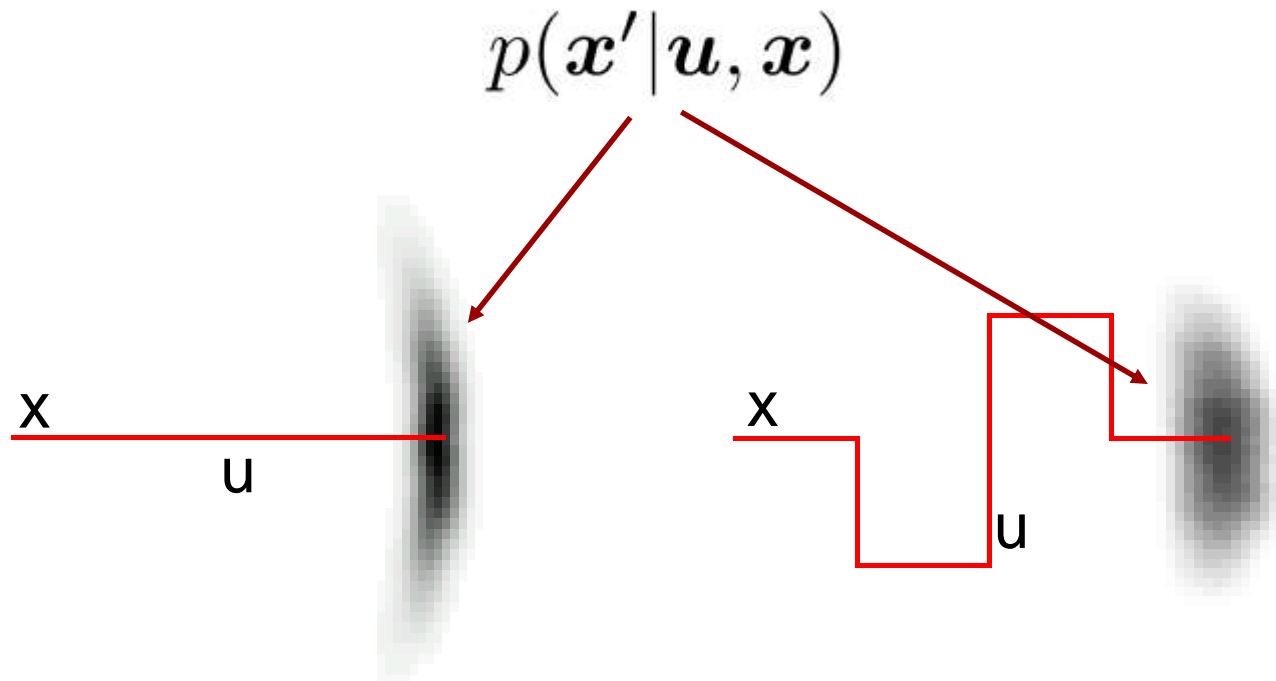
11. **return**  $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$

parámetros de  
odometría( $\mathbf{u}$ )

valores de interés  
( $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ )

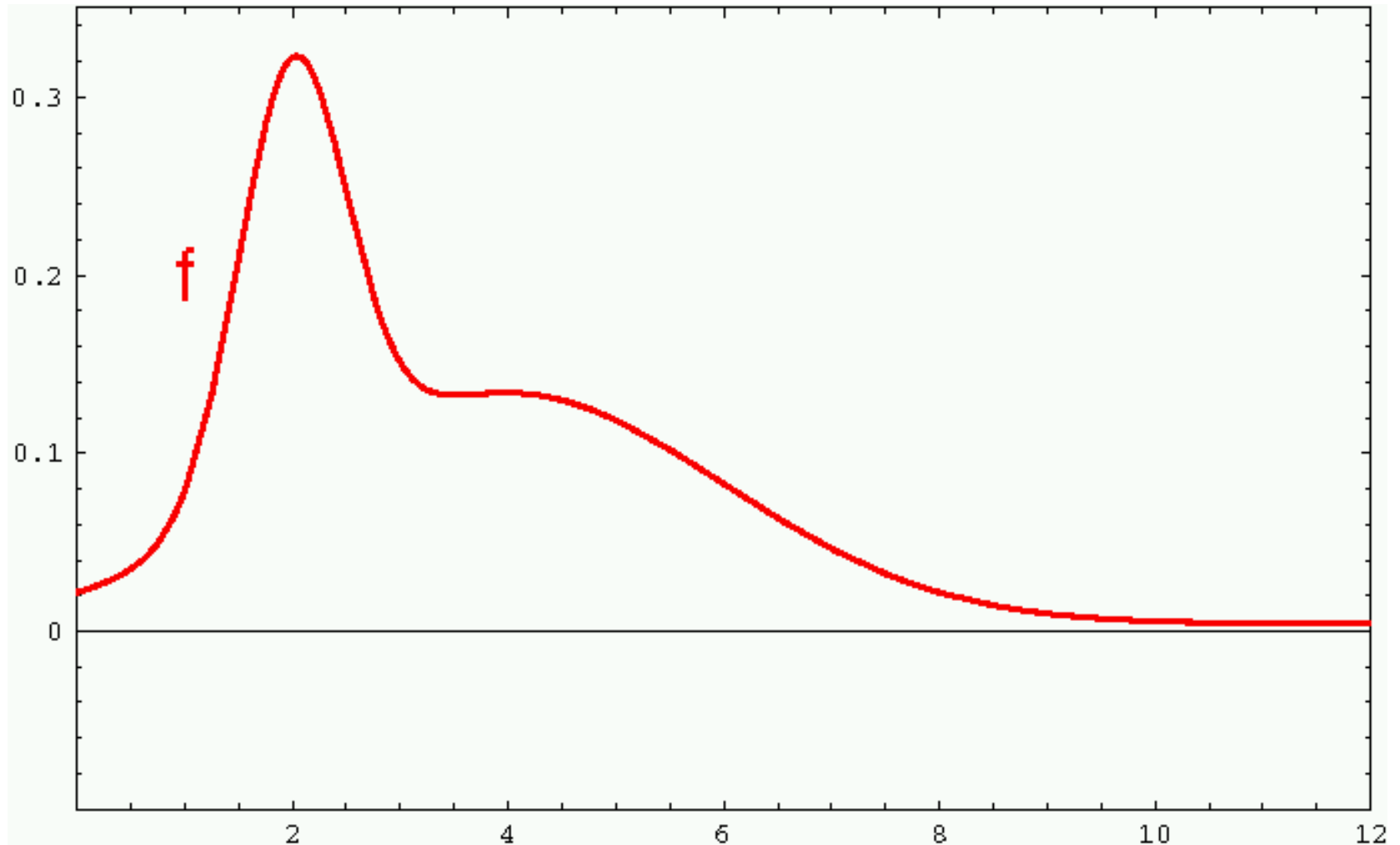
# Aplicación

- Aplicación repetida del modelo de movimiento para pequeños desplazamientos.
- Típica distribución con forma de “banana” para la proyección en 2D de la distribución *a posteriori* en 3D.

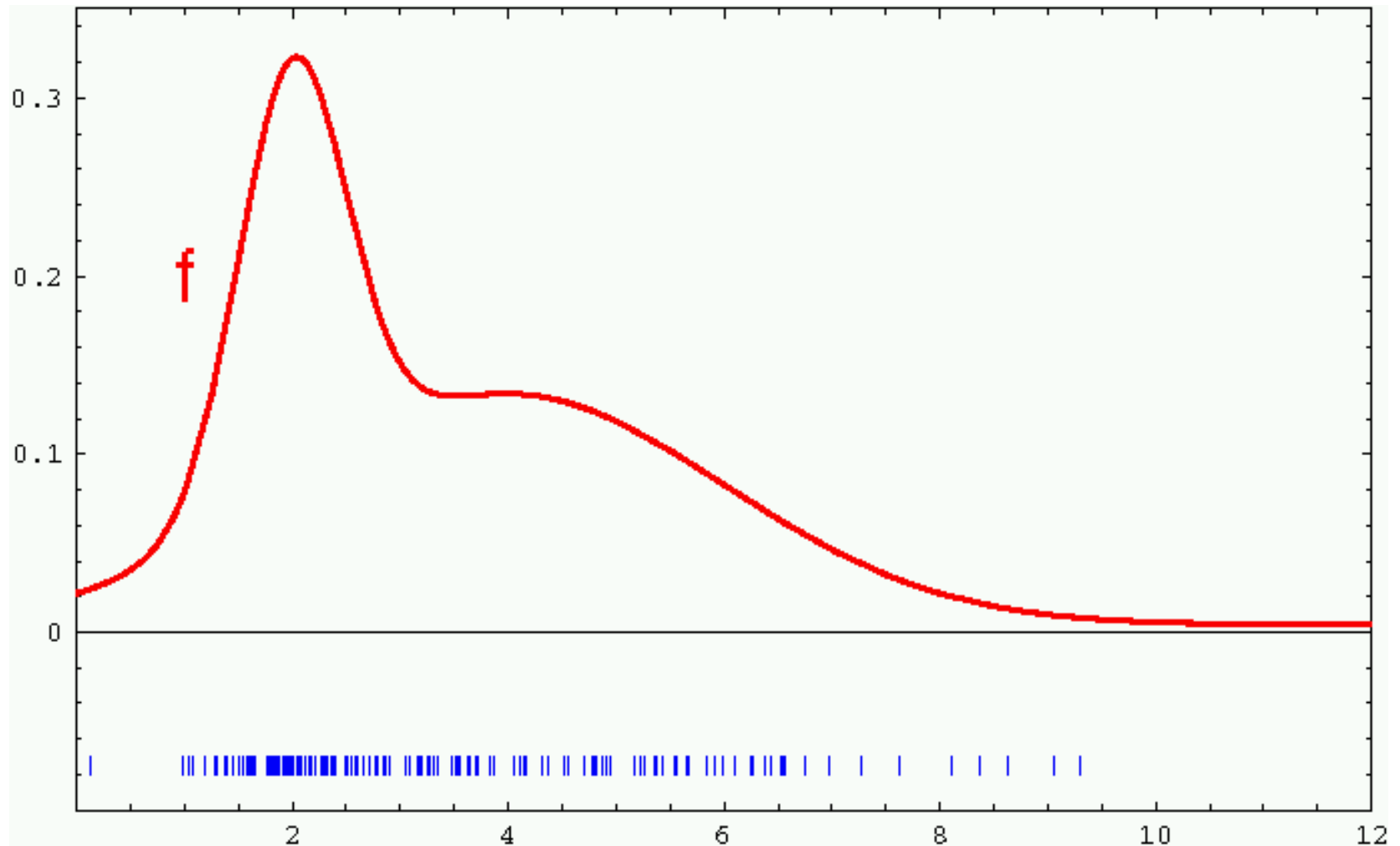




# Representación de densidad basada en muestras



# Representación de densidad basada en muestras



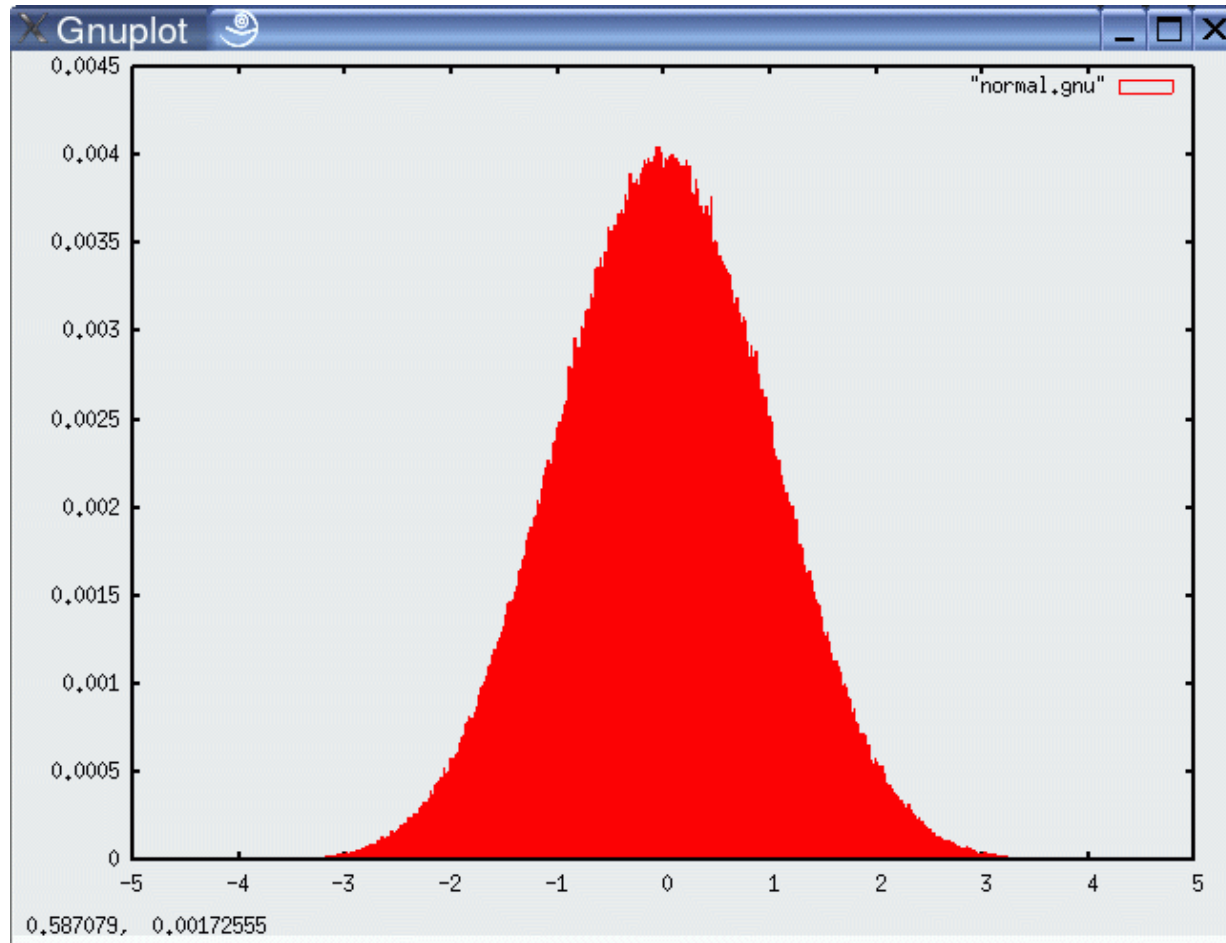
# Cómo muestrear una distribución Normal?

- Tomando muestras de una distribución normal

1. Algoritmo **sample\_normal\_distribution**( $b$ ):

2. return  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} rand(-b, b)$

# Muestras distribuidas normalmente

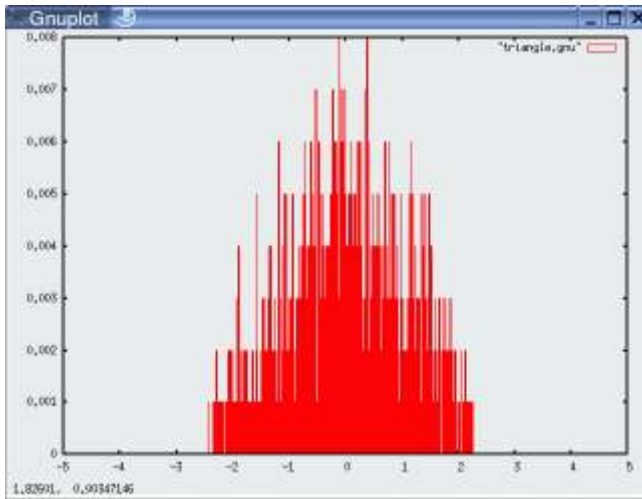


10<sup>6</sup> samples

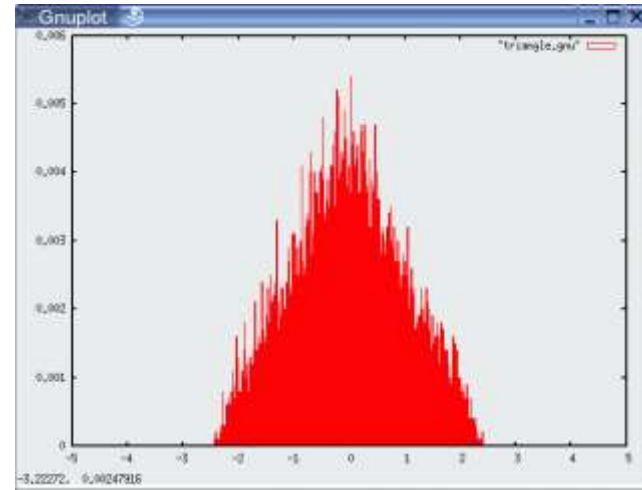
# Cómo muestrear una distribución Normal o triangular?

- Tomando muestras de una distribución normal
  1. Algoritmo **sample\_normal\_distribution**( $b$ ):
  2. return  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \text{rand}(-b, b)$
- Tomando muestras de una distribución triangular
  1. Algorithm **sample\_triangular\_distribution**( $b$ ):
  2. return  $\frac{\sqrt{6}}{2} [\text{rand}(-b, b) + \text{rand}(-b, b)]$

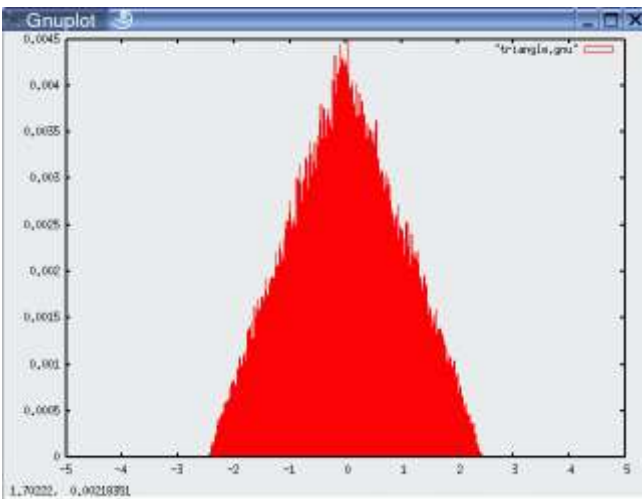
# Muestras de distrib. triangular



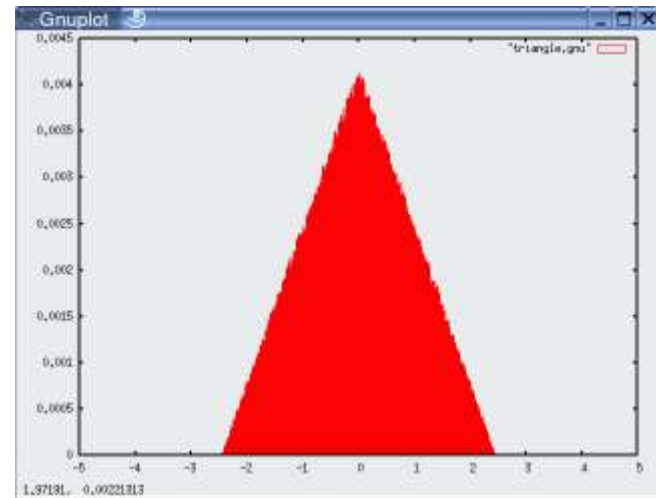
$10^3$  samples



$10^4$  samples

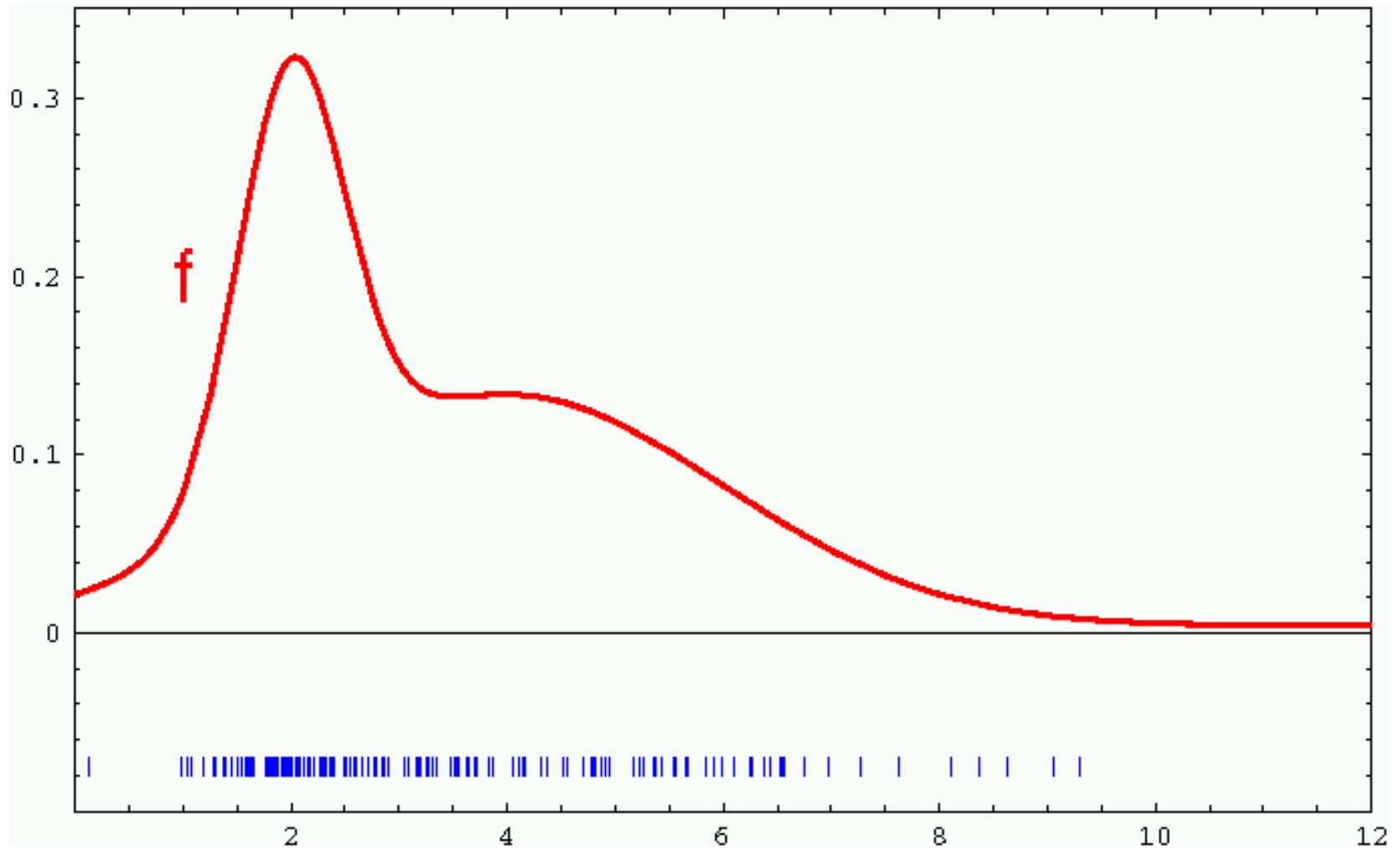


$10^5$  samples



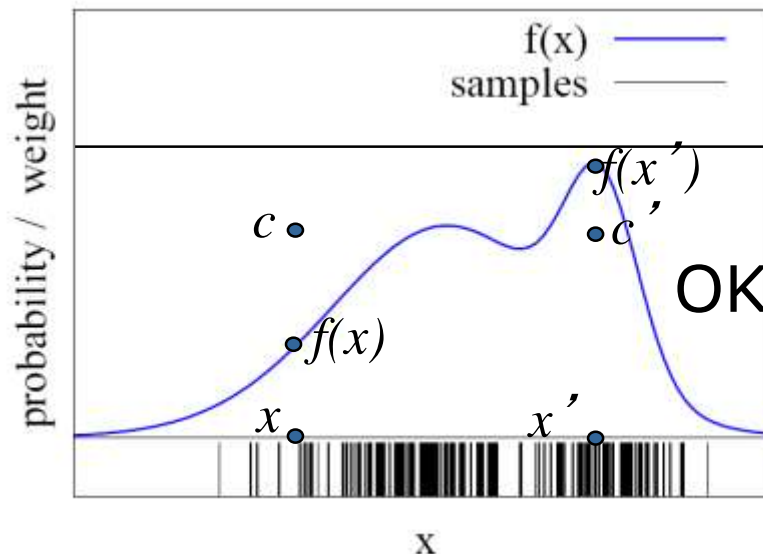
$10^6$  samples

# Cómo muestrear una función arbitraria?



# Muestreo con rechazo

- Para muestrear de distribuciones arbitrarias:
- Muestrear  $x$  de una distribución uniforme entre  $[-b,b]$
- Muestrear  $c$  entre  $[0, \max f]$
- Si  $f(x) > c$  conservar muestra  
sino eliminar la muestra





# Muestreo con rechazo

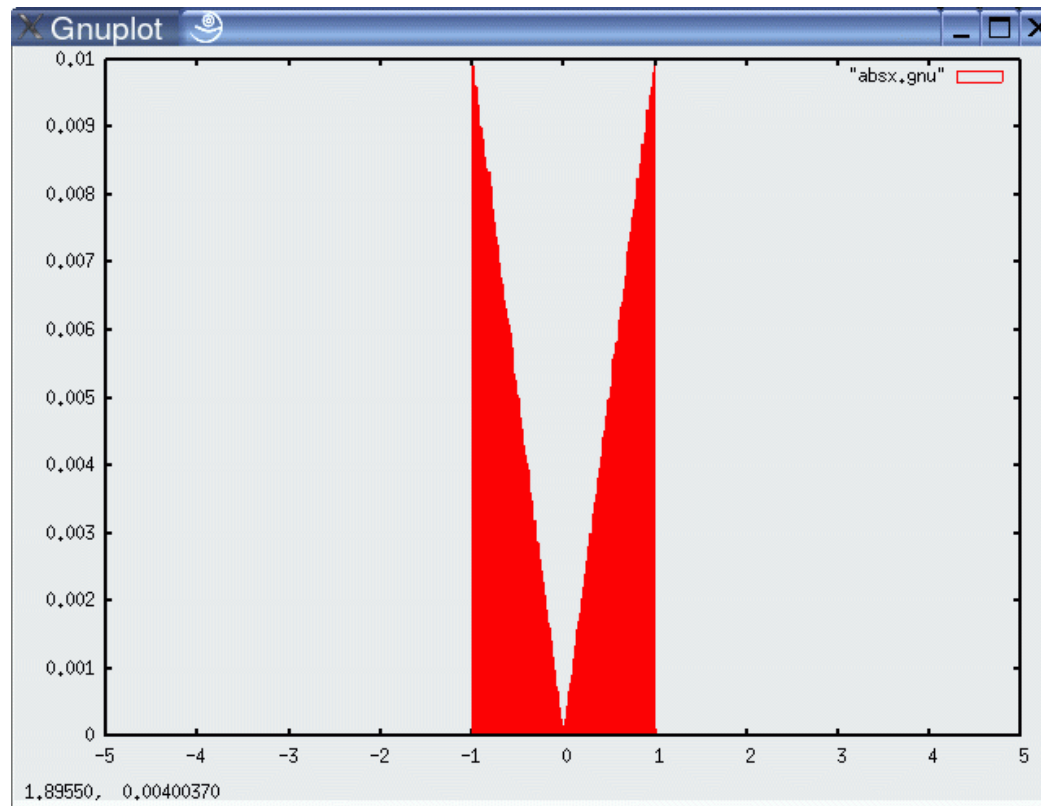
- Para muestrear de distribuciones arbitrarias:

1. Algoritmo **sample\_distribution**( $f, b$ ):
2. repeat
3.      $x = \text{rand}(-b, b)$
4.      $y = \text{rand}(0, \max\{f(x) \mid x \in [-b, b]\})$
5. until ( $y \leq f(x)$ )
6. return  $x$

# Ejemplo

- Muestrear de

$$f(x) = \begin{cases} \text{abs}(x) & x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



# Muestrear el modelo de Odometría

1. Algoritmo **sample\_motion\_model**( $u, x$ ):

$$u = \langle \delta_{rot1}, \delta_{rot2}, \delta_{trans} \rangle, x = \langle x, y, \theta \rangle$$

1.  $\hat{\delta}_{rot1} = \delta_{rot1} + \text{sample}(\alpha_1 |\delta_{rot1}| + \alpha_2 \delta_{trans})$

2.  $\hat{\delta}_{trans} = \delta_{trans} + \text{sample}(\alpha_3 \delta_{trans} + \alpha_4 (|\delta_{rot1}| + |\delta_{rot2}|))$

3.  $\hat{\delta}_{rot2} = \delta_{rot2} + \text{sample}(\alpha_1 |\delta_{rot2}| + \alpha_2 \delta_{trans})$

4.  $x' = x + \hat{\delta}_{trans} \cos(\theta + \hat{\delta}_{rot1})$

5.  $y' = y + \hat{\delta}_{trans} \sin(\theta + \hat{\delta}_{rot1})$

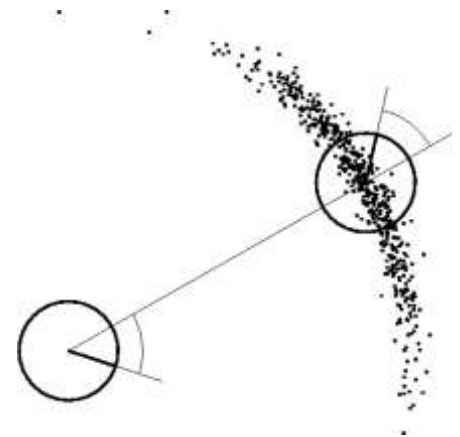
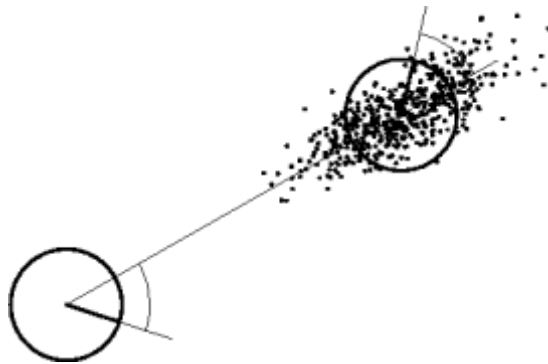
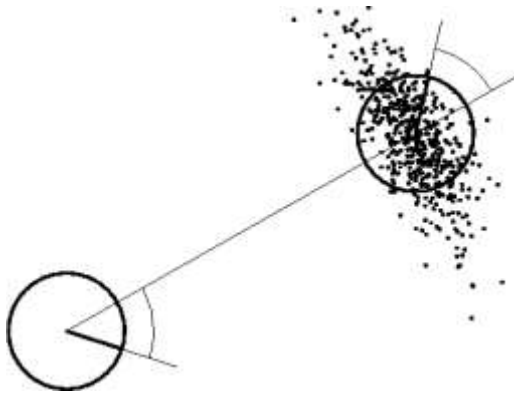
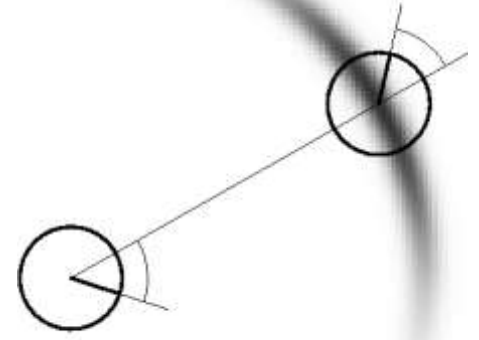
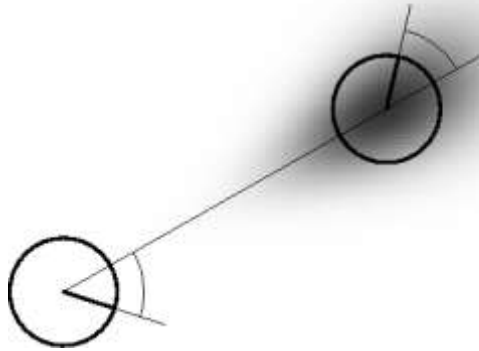
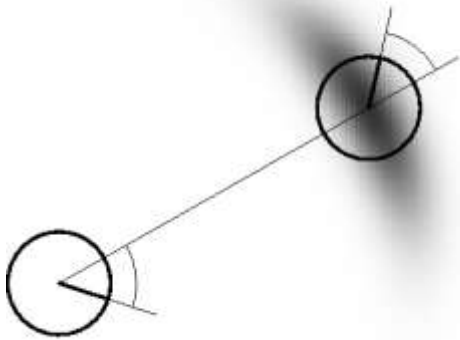
6.  $\theta' = \theta + \hat{\delta}_{rot1} + \hat{\delta}_{rot2}$

7. Return  $\langle x', y', \theta' \rangle$

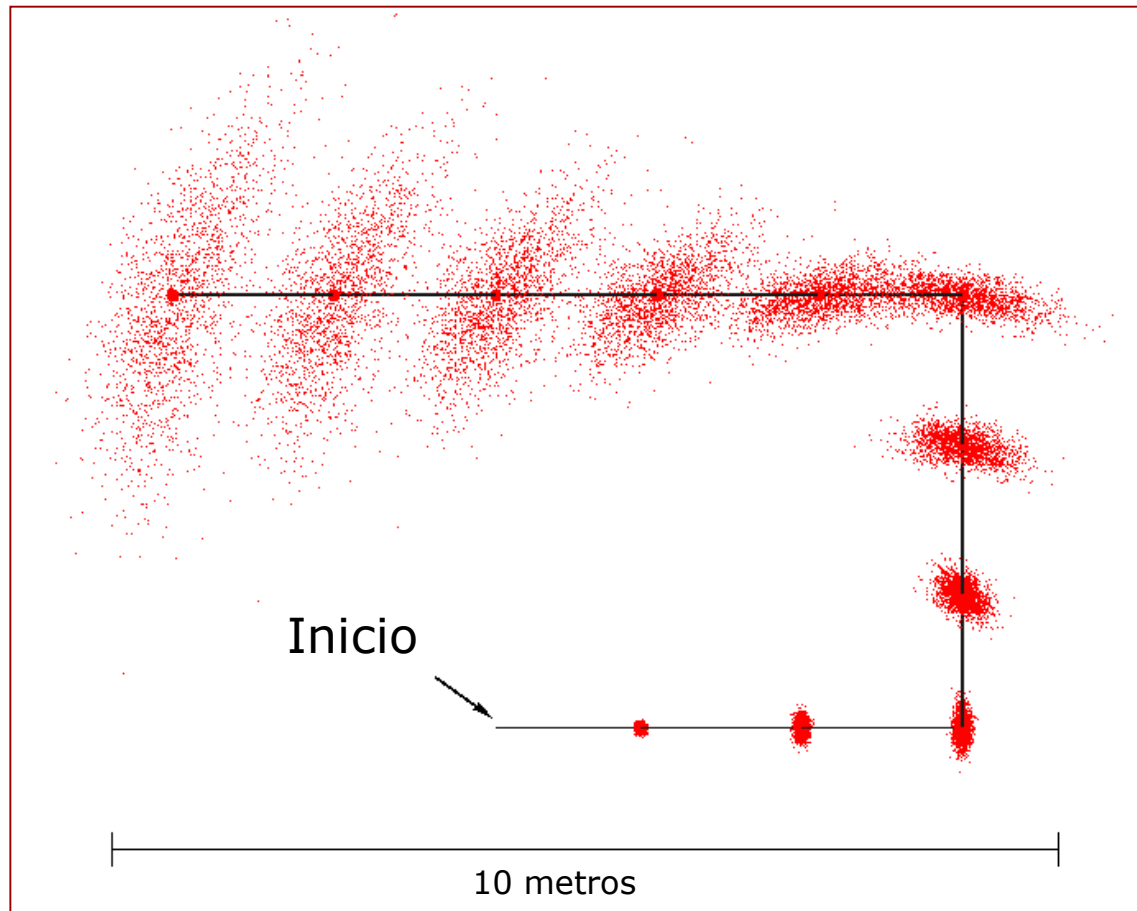
**sample\_normal\_distribution**



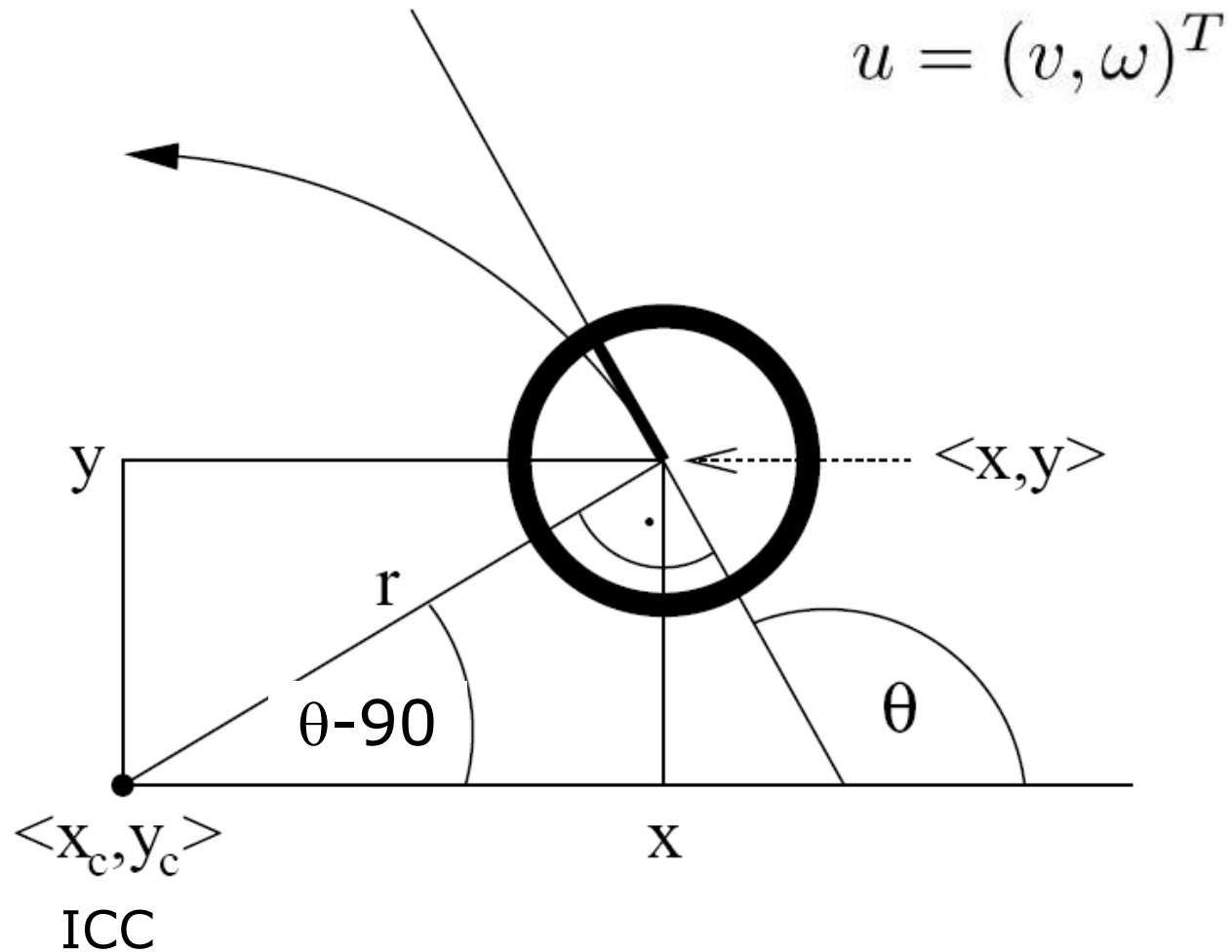
# Ejemplos (basado en Odometría)



# Muestreado del modelo de movimiento



# Modelo basado en velocidad



# Modelo de ruido para el modelo basado en velocidad

- El movimiento medido es el movimiento verdadero más ruido.

$$\hat{v} = v + \varepsilon_{\alpha_1|v|+\alpha_2|\omega|}$$

$$\hat{\omega} = \omega + \varepsilon_{\alpha_3|v|+\alpha_4|\omega|}$$

- Cuál es la **desventaja** de este modelo de ruido?

# Modelo de ruido para el modelo basado en velocidad

- El círculo  $(\hat{v}, \hat{\omega})$  limita la orientación final (manifold 2D en un espacio 3D)
- Un mejor método:

$$\hat{v} = v + \varepsilon_{\alpha_1|v|+\alpha_2|\omega|}$$

$$\hat{\omega} = \omega + \varepsilon_{\alpha_3|v|+\alpha_4|\omega|}$$

$$\hat{\gamma} = \varepsilon_{\alpha_5|v|+\alpha_6|\omega|}$$

↑  
Término para contemplar la rotación final



# Modelo incluyendo 3<sup>er</sup> parámetro

$$\begin{aligned}x' &= x - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin \theta + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin(\theta + \hat{\omega} \Delta t) \\y' &= y + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos \theta - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos(\theta + \hat{\omega} \Delta t) \\\theta' &= \theta + \hat{\omega} \Delta t + \hat{\gamma} \Delta t\end{aligned}$$

Diagram annotations: A yellow dashed box encloses the terms  $x - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin \theta$  and  $y + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos \theta$ , with an arrow labeled "ICC" pointing to it. A red dashed box encloses the term  $\frac{\hat{v}}{\hat{\omega}}$  in the first equation, with an arrow labeled "R" pointing to it. An upward arrow points from the text below to the term  $\hat{\gamma} \Delta t$  in the third equation.

Término para contemplar la rotación final

# Ecuación del modelo de velocidad

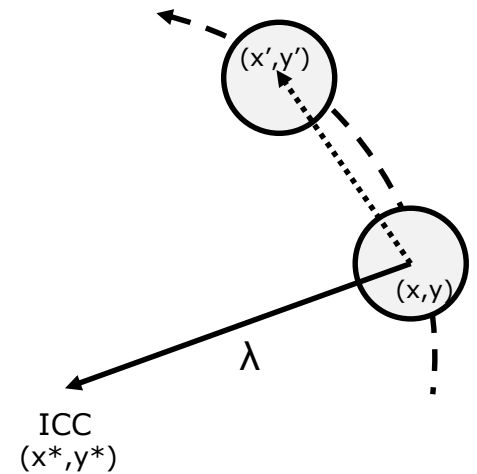
$$x_{t-1} = (x, y, \theta)^T$$

$$x_t = (x', y', \theta')^T$$

Centro del círculo:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda \sin \theta \\ \lambda \cos \theta \end{pmatrix}$$

↑  
constante (distancia al ICC, R)  
(centro del círculo es ortogonal  
a la orientación inicial)



# Ecuación del modelo de velocidad

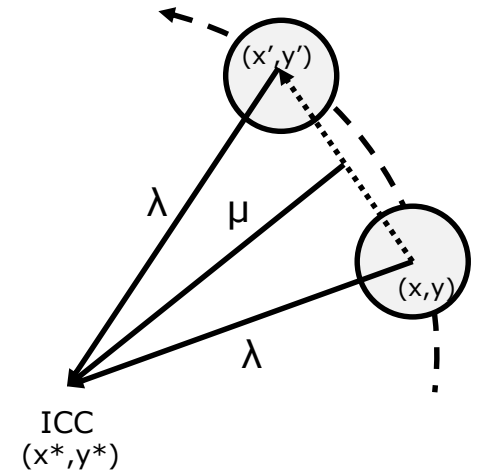
$$x_{t-1} = (x, y, \theta)^T$$

$$x_t = (x', y', \theta')^T$$

Una constante (R)

Centro del círculo:

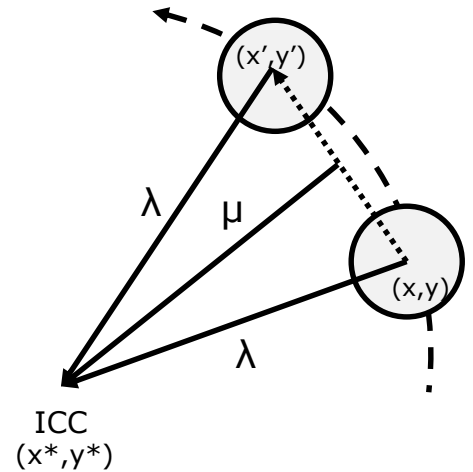
$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda \sin \theta \\ \lambda \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} + \mu(y-y') \\ \frac{y+y'}{2} + \mu(x'-x) \end{pmatrix}$$



una constante (el centro del círculo está sobre una línea entre  $x$  y  $x'$ , y es ortogonal a la línea que une  $x$  con  $x'$ )

# Ecuación del modelo de velocidad

$$x_{t-1} = (x, y, \theta)^T$$
$$x_t = (x', y', \theta')^T$$



Centro del círculo:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda \sin \theta \\ \lambda \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} + \mu(y-y') \\ \frac{y+y'}{2} + \mu(x'-x) \end{pmatrix}$$

Podemos resolver para:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta}{(y-y') \cos \theta - (x-x') \sin \theta}$$

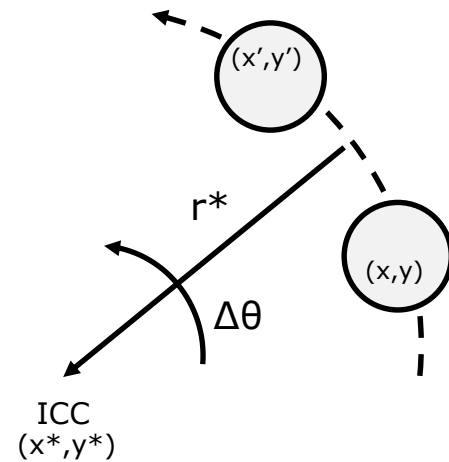
# Ecuación del modelo de velocidad

$$x_{t-1} = (x, y, \theta)^T$$

$$x_t = (x', y', \theta')^T$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} + \mu(y-y') \\ \frac{y+y'}{2} + \mu(x'-x) \end{pmatrix} \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta}{(y-y') \cos \theta - (x-x') \sin \theta}$$

entonces



$$r^* = \sqrt{(x' - x^*)^2 + (y' - y^*)^2}$$

$$\Delta\theta = \text{atan2}(y' - y^*, x' - x^*) - \text{atan2}(y - y^*, x - x^*)$$

# Ecuación del modelo de velocidad

- Los parámetros del círculo:

$$r^* = \sqrt{(x' - x^*)^2 + (y' - y^*)^2}$$

$$\Delta\theta = \text{atan2}(y' - y^*, x' - x^*) - \text{atan2}(y - y^*, x - x^*)$$

- nos permiten expresar las velocidades como:

$$v = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} r^*$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

# Cálculo de prob. *a posteriori* del modelo de velocidad

1:     **Algorithm** motion\_model\_velocity( $x_t, u_t, x_{t-1}$ ):  $p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)$

2:     
$$\mu = \frac{1}{2} \frac{(x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta}{(y - y') \cos \theta - (x - x') \sin \theta}$$

3:     
$$x^* = \frac{x + x'}{2} + \mu(y - y')$$

4:     
$$y^* = \frac{y + y'}{2} + \mu(x' - x)$$

5:     
$$r^* = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$$

6:     
$$\Delta\theta = \text{atan2}(y' - y^*, x' - x^*) - \text{atan2}(y - y^*, x - x^*)$$

7:     
$$\hat{v} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} r^*$$

8:     
$$\hat{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

9:     
$$\hat{\gamma} = \frac{\theta' - \theta}{\Delta t} - \hat{\omega}$$

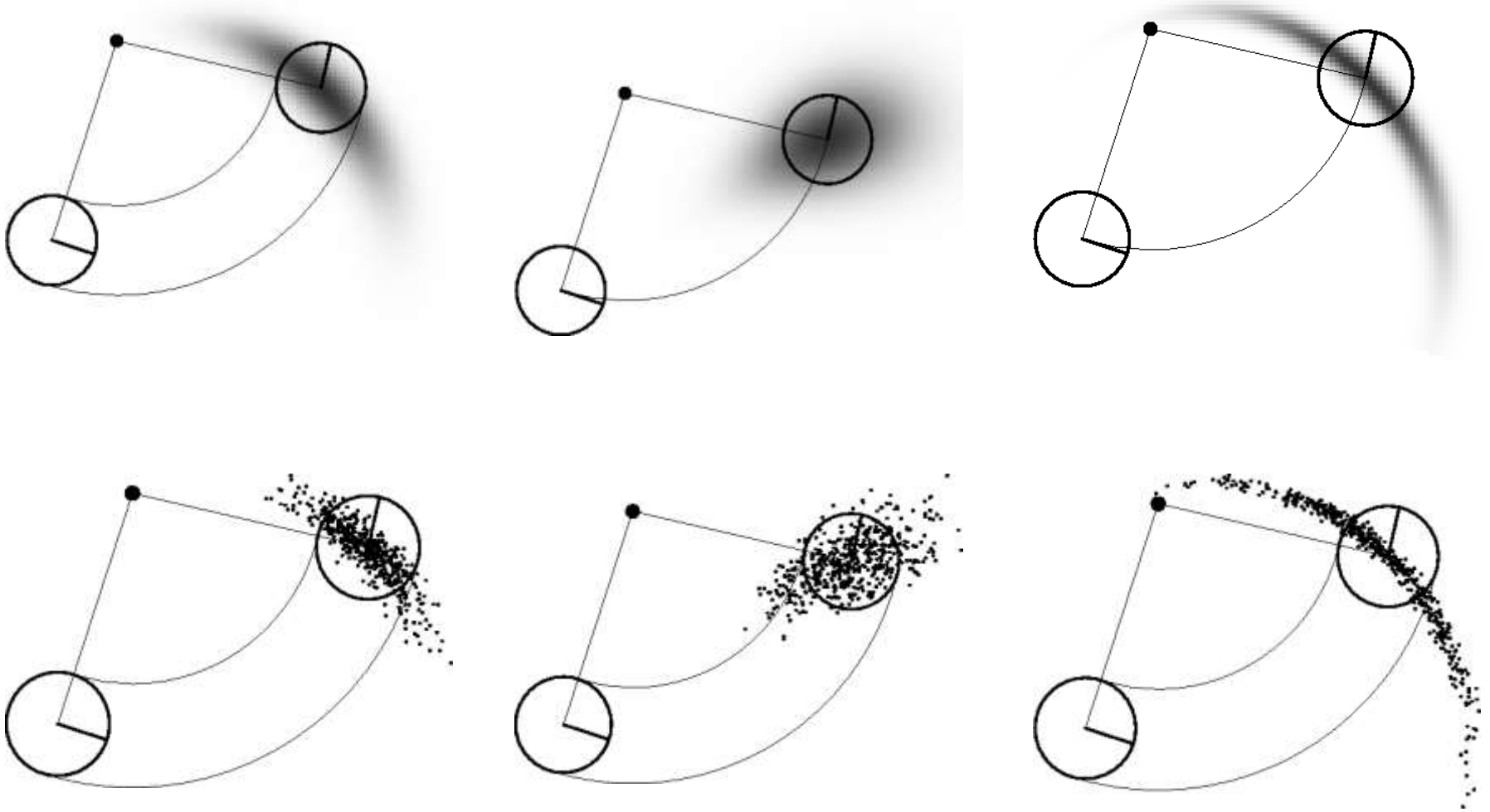
10:     **return**  $\text{prob}(v - \hat{v}, \alpha_1 v^2 + \alpha_2 \omega^2) \cdot \text{prob}(\omega - \hat{\omega}, \alpha_3 v^2 + \alpha_4 \omega^2)$   
           $\cdot \text{prob}(\hat{\gamma}, \alpha_5 v^2 + \alpha_6 \omega^2)$

# Muestrear del modelo de velocidad

- 1:      **Algorithm** `sample_motion_model_velocity`( $u_t, x_{t-1}$ ):
- 2:       $\hat{v} = v + \text{sample}(\alpha_1 v^2 + \alpha_2 \omega^2)$
- 3:       $\hat{\omega} = \omega + \text{sample}(\alpha_3 v^2 + \alpha_4 \omega^2)$
- 4:       $\hat{\gamma} = \text{sample}(\alpha_5 v^2 + \alpha_6 \omega^2)$
- 5:       $x' = x - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin \theta + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \sin(\theta + \hat{\omega} \Delta t)$
- 6:       $y' = y + \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos \theta - \frac{\hat{v}}{\hat{\omega}} \cos(\theta + \hat{\omega} \Delta t)$
- 7:       $\theta' = \theta + \hat{\omega} \Delta t + \hat{\gamma} \Delta t$
- 8:      *return*  $x_t = (x', y', \theta')^T$



# Ejemplos (basado en velocidad)



# Modelo de movimiento consistente con mapas



$$p(x'|u, x)$$

$\neq$



$$p(x'|u, x, m)$$

Aproximación: 
$$p(x'|u, x, m) = \eta p(x'|m)p(x'|u, x)$$

# Resumen

- Vimos modelos de movimiento basados en odometría y en velocidad
- Discutimos como calcular probabilidades *a posteriori*  $p(x' / x, u)$ .
- Describimos como muestrear de  $p(x' / x, u)$ .
- En general, se calcula basándose en intervalos de tiempo  $\Delta t$  fijos.
- En la práctica, los parámetros de los modelos deben ser aprendidos.
- Mencionamos como mejorar el modelo de movimiento teniendo en cuenta un mapa del entorno.