Filtro de Bayes: Estructura

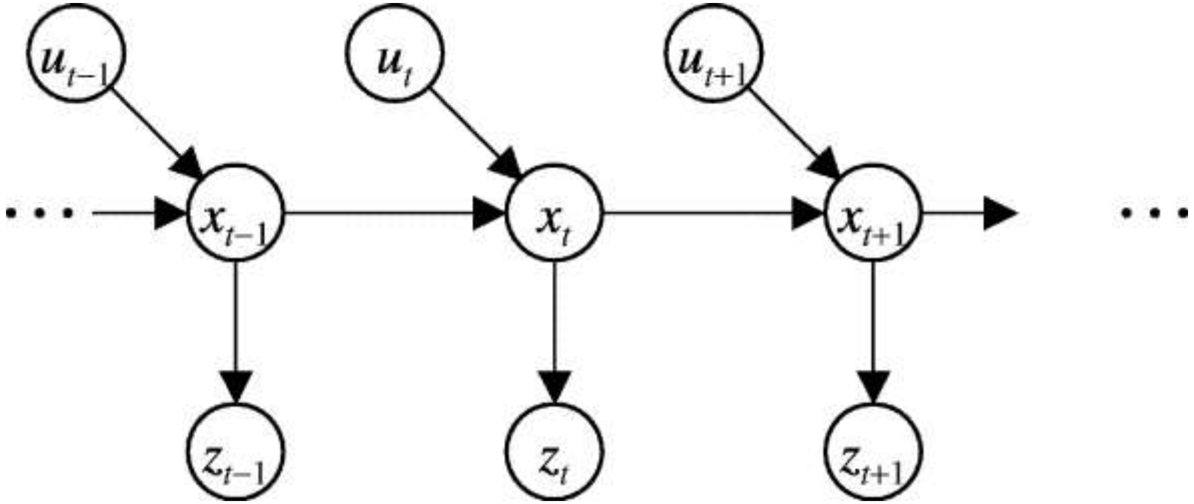
- **Dado:**
  - Una serie de observaciones *z* y acciones *u:*

$$d_t = \{u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t\}$$

  - Modelo del Sensor $P(z \mid x)$
  - Modelo de Acción $P(x \mid u, x')$
  - Probabilidad a priori del estado del sistema $P(x)$
- **Se desea:**
  - Estimar el estado X de un sistema dinámico
  - La probabilidad a posteriori del estado, también llamada **Belief**:

$$Bel(x_t) = P(x_t \mid u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t)$$

Suposición de Markov



$$P(z_t \mid x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = P(z_t \mid x_t)$$

$$P(x_t \mid x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = P(x_t \mid x_{t-1}, u_t)$$

Suposición subyacente

- Mundo estático
- Ruido independiente
- Modelo perfecto, sin errores de aproximación

Filtro de Bayes

z = observación
u = acción
x = estado

$$\boxed{Bel(x_t)} = P(x_t \mid u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t)$$

Bayes
$$= \eta P(z_t \mid x_t, u_1, z_1, \ldots, u_t) P(x_t \mid u_1, z_1, \ldots, u_t)$$

Markov
$$= \eta P(z_t \mid x_t) P(x_t \mid u_1, z_1, \ldots, u_t)$$

Total prob.
$$= \eta P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_1, z_1, \ldots, u_t, x_{t-1})$$
$$P(x_{t-1} \mid u_1, z_1, \ldots, u_t) dx_{t-1}$$

Markov
$$= \eta P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) P(x_{t-1} \mid u_1, z_1, \ldots, u_t) dx_{t-1}$$

Markov
$$= \eta P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) P(x_{t-1} \mid u_1, z_1, \ldots, z_{t-1}) dx_{t-1}$$

$$\boxed{= \eta P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1}}$$

$$Bel(x_t) = \eta P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Algoritmo **Filtro_de_Bayes** ($Bel(x), d$):

η=0

If d is a perceptual data item z then

  For all x do

    $Bel'(x) = P(z \mid x) Bel(x)$

    $h = h + Bel'(x)$

  For all x do

    $Bel'(x) = h^{-1} Bel'(x)$

Else if d is an action data item u then

  For all x do

    $Bel'(x) = \int P(x \mid u, x') Bel(x') dx'$

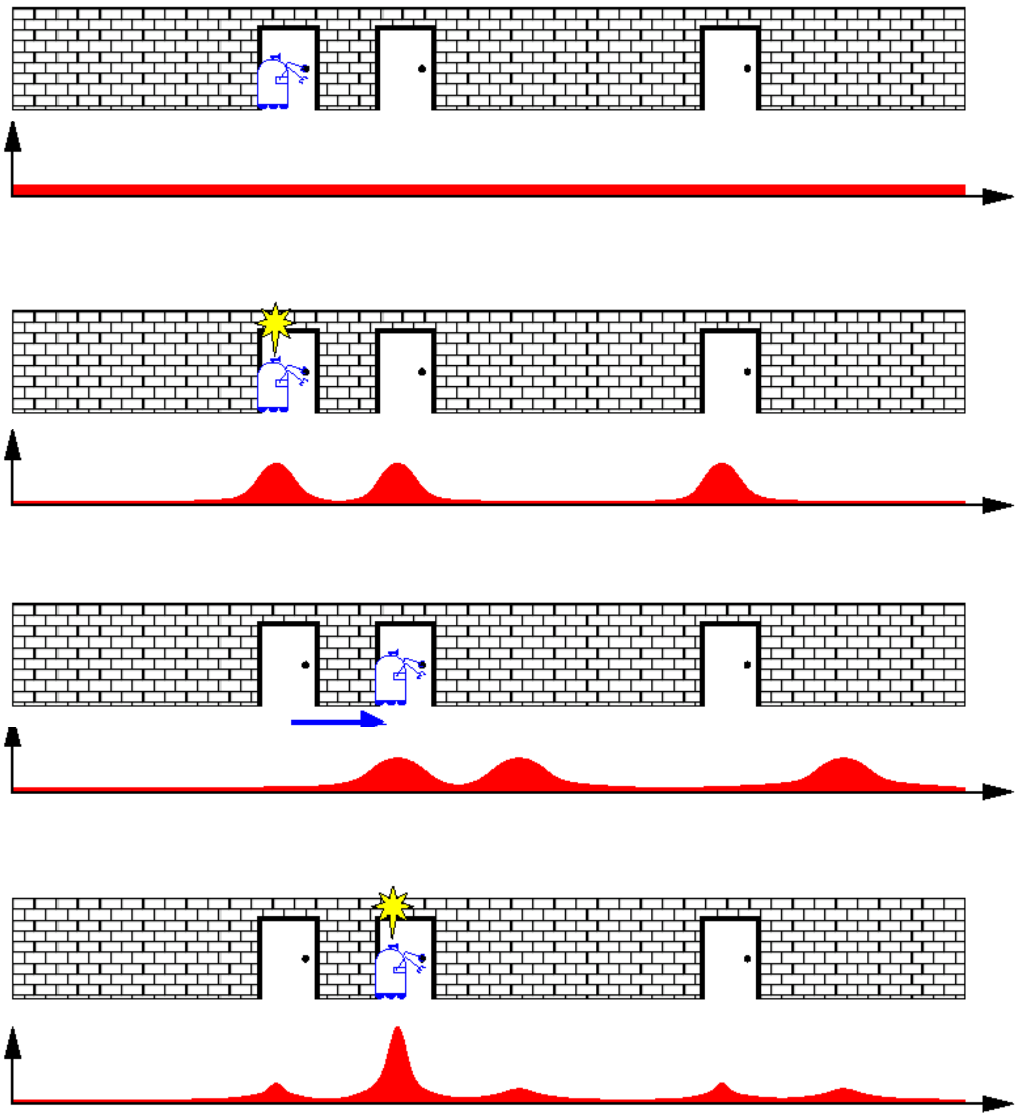
Return $Bel'(x)$

Los filtros de Bayes son muy usados !

$$Bel(x_t) = \eta P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

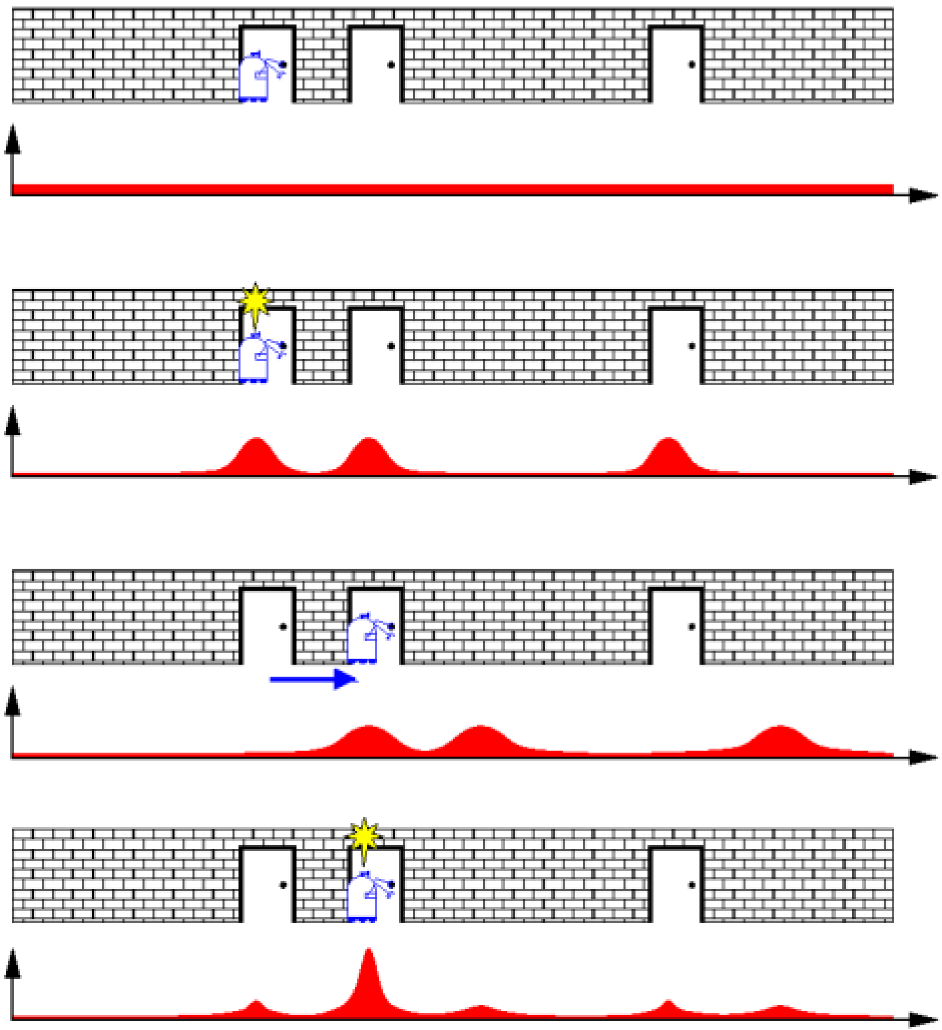
- Filtros de Kalman
- Filtros de Partículas
- Modelos ocultos de Markov
- Redes Bayesianas dinámicas
- Procesos de decisión de Markov parcialmente observables (POMDPs)

Localización Probabilística



Localización Probabilística

$$Bel(x \mid z, u) \;=\; \alpha\, p(z \mid x) \int_{x'} p(x \mid u, x')\; Bel(x')dx'$$



Resumen

- La regla de Bayes nos permite calcular probabilidades que de otra forma serían muy complejas.
- Con la suposición de Markov, la actualización recursiva Bayesiana es una forma eficiente de combinar evidencia.
- Los filtros de Bayes son una herramienta probabilística para estimar el estado de un sistema dinámico.