Robótica Móvil

un enfoque probabilístico

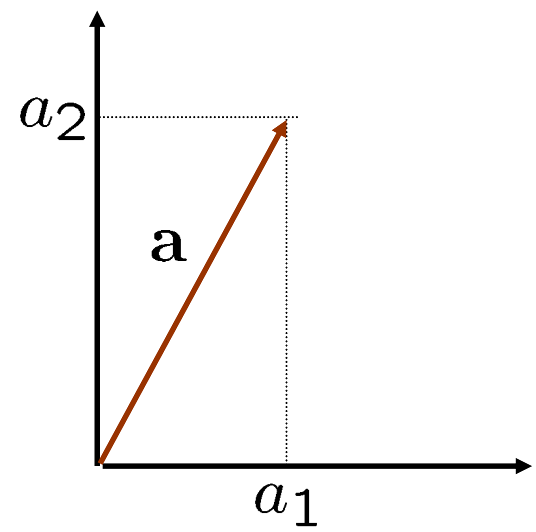
Repaso de Algebra Lineal

Ignacio Mas

Vectores

- Arreglo de números
- Pueden representar un punto en un espacio de dimensión *n*

$$(a_1) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$



Operaciones con vectores

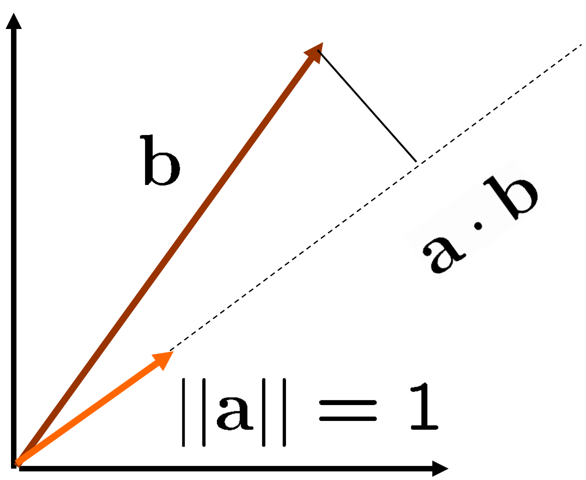
- Producto de vector por escalar
- Suma de vectores
- Producto interno
- Norma

Vectores: Producto interno

- Producto interno de vectores (es un escalar)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \sum_i a_i b_i$$

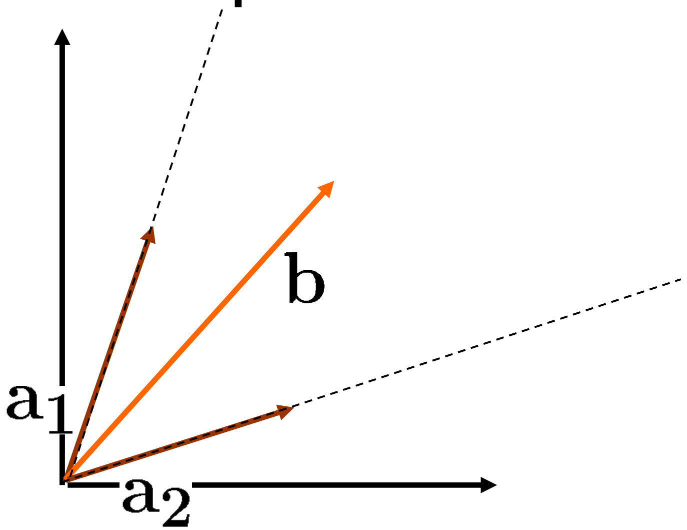
- Si uno de los vectores, $\mathbf{a}$, tiene $||\mathbf{a}|| = 1$, el producto interno $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es la longitud de la proyección de $\mathbf{b}$ sobre la dirección de $\mathbf{a}$



Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$,
los vectores son
ortogonales

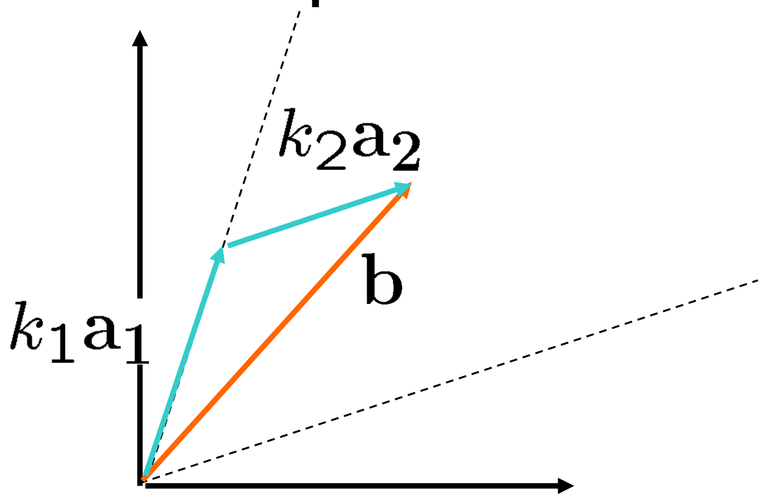
Vectores: (In)Dependencia Lineal

- Un vector $\mathbf{b}$ es **linealmente dependiente de** $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ si $\mathbf{b} = \sum_i k_i \mathbf{a}_i$
- Es decir, si $\mathbf{b}$ se puede obtener sumando los $\mathbf{a}_i$ escalados apropiadamente
- Si no existen coef. $\{k_i\}$ tales que $\mathbf{b} = \sum_i k_i \mathbf{a}_i$ entonces $\mathbf{b}$ es independiente de $\{\mathbf{a}_i\}$



Vectores: (In)Dependencia Lineal

- Un vector $\mathbf{b}$ es **linealmente dependiente de** $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ si $\mathbf{b} = \sum_i k_i \mathbf{a}_i$
- Es decir, si $\mathbf{b}$ se puede obtener sumando los $\mathbf{a}_i$ escalados apropiadamente
- Si no existen coef. $\{k_i\}$ tales que $\mathbf{b} = \sum_i k_i \mathbf{a}_i$ entonces $\mathbf{b}$ es independiente de $\{\mathbf{a}_i\}$



Matrices

- Una matriz es un arreglo de números

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad A : \underset{\text{filas}}{\underset{\uparrow}{n}} \times \underset{\text{columnas}}{\underset{\uparrow}{m}}$$

- **1er índice** es la **fila**
- **2do índice** es la **columna**
- Nota: un vector de dimensión *d* es equivalente a una matriz de *d*x1

Matriz como colección de vectores

- Vectores Columna

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{*1} & \mathbf{a}_{*2} & \cdots & \mathbf{a}_{*m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matriz como colección de vectores

- Vectores fila

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1m}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2m}} \\ \vdots \\ \boxed{a_{n1} \quad a_{n2} \quad \cdots \quad a_{nm}} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1*}^T \\ \mathbf{a}_{2*}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*}^T \end{pmatrix}$$

Operaciones matriciales

- Multiplicación por un escalar
- Suma (conmutativa, asociativa)
- Multiplicación por un vector
- Producto (no conmutativo)
- Inversión (cuadrada, rango completo)
- Transposición

Producto Matriz-Vector

- El componente *i de* $\mathbf{Ab}$ es el producto interno $\mathbf{a}_{i*}^T \cdot \mathbf{b}$.
- El vector $\mathbf{Ab}$ es linealmente dependiente de los vectores columna $\{\mathbf{a}_{*i}\}$ con coef. $\{b_i\}$

$$\mathbf{Ab} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1*}^T \\ \mathbf{a}_{2*}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*}^T \end{pmatrix} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1*}^T \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_{2*}^T \cdot \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*}^T \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix} = \sum_k \mathbf{a}_{*k} b_k$$

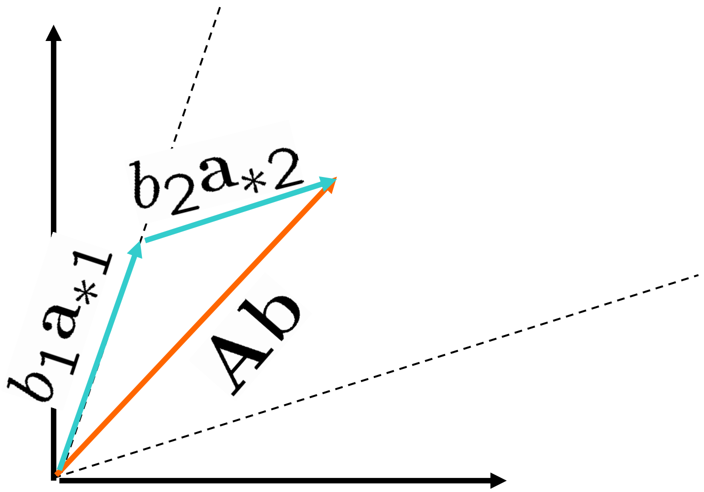
Vectores fila

Vectores columna

Producto Matriz-Vector

- Si los vectores columna de $\mathbf{A}$ representan un sistema de referencia, el producto $\mathbf{Ab}$ calcula la transformación global del vector $\mathbf{b}$ según $\{\mathbf{a}_{*i}\}$

vectores columna



Producto de Matrices

- Puede definirse como:
  - El producto interno de vectores fila y columna
  - La combinación lineal de las columnas de ***A*** escaladas por los coeficientes de las columnas de ***B***

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{AB} \\
&= \begin{pmatrix}
\mathbf{a}_{1*}^T \cdot \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{1*}^T \cdot \mathbf{b}_{*2} & \cdots & \mathbf{a}_{1*}^T \cdot \mathbf{b}_{*m} \\
\mathbf{a}_{2*}^T \cdot \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{2*}^T \cdot \mathbf{b}_{*2} & \cdots & \mathbf{a}_{2*}^T \cdot \mathbf{b}_{*m} \\
\vdots & & & \\
\mathbf{a}_{n*}^T \cdot \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{n*}^T \cdot \mathbf{b}_{*2} & \cdots & \mathbf{a}_{n*}^T \cdot \mathbf{b}_{*m}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{Ab}_{*1} & \mathbf{Ab}_{*2} & \ldots \mathbf{Ab}_{*m} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

vectores columna

Producto de Matrices

- Considerando la segunda interpretación, vemos que las columnas de ***C*** son las "transformaciones" de las columnas de ***B*** según ***A***
- Todas las interpretaciones hechas para el producto matriz-vector son válidas

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{AB} \\
&= \left(\mathbf{Ab}_{*1} \;\; \mathbf{Ab}_{*2} \;\; \ldots \mathbf{Ab}_{*m} \right) \\
\mathbf{c}_{*i} &= \mathbf{Ab}_{*i}
\end{aligned}
$$

vectores columna

Rango

- Número **Máximo** de filas (columnas) linealmente independientes.
- Dimensión de la **imagen** de la transformación $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

- Cuando A es $m \times n$ tenemos
  - $\operatorname{rank}(A) \geq 0$ y la igualdad se cumple sii A es la matriz nula
  - $\operatorname{rank}(A) \leq \min(m, n)$

- El cálculo del rango se hace por
  - Eliminación Gaussiana
  - Contando el número de filas distintas de cero

Inversa de una Matriz

$$\mathrm{AB} = \mathrm{I}$$

- Si A es una matriz cuadrada de rango completo, entonces existe una matriz única $\boldsymbol{B=A^{-1}}$ tal que $\boldsymbol{AB=I}$

- La fila i de $\boldsymbol{A}$ y la columna j de $\boldsymbol{A^{-1}}$ son:
  - ortogonales (si $i \neq j$)
  - o su producto interno es 1 (si $i = j$)

Traza (tr)

- Solo definido para **matrices cuadradas**
- **Suma** de los elementos de la diagonal principal:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Es un operador lineal con las siguientes propiedades
  - Adición: $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
  - Homogeneidad: $\mathrm{tr}(cA) = c \times \mathrm{tr}(A)$
  - Conmutativa en pares: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \quad \mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(ACB)$

- La traza es invariante a semejanza $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(P(P^{-1}A)) = \mathrm{tr}(A)$
- La traza es invariante a la transposición $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$
- Dados dos vectores ***a*** y ***b***, $tr(\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b}) = tr(\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b}^T)$

Determinante (det)

- Solo definido para **matrices cuadradas**
- La inversa de $\mathbf{A}$ existe sii $det(\mathbf{A}) \neq 0$
- Para matrices de 2×2 :

  Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $|\mathbf{A}| = det(\mathbf{A})$, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- Para matrices de 3×3 vale la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{11}$$

Determinante: Propiedades

- **Operaciones de filas** ($\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de $n \times n$)
  - Si $\mathbf{B}$ resulta de $\mathbf{A}$ al intercambiar dos filas, entonces $det(\mathbf{B}) = -det(\mathbf{A})$
  - Si $\mathbf{B}$ resulta de $\mathbf{A}$ al multiplicar una fila por un número c, entonces $det(\mathbf{B}) = c \cdot det(\mathbf{A})$
  - Si $\mathbf{B}$ resulta de $\mathbf{A}$ al sumar el múltiplo de una fila a otra fila, entonces $det(\mathbf{B}) = det(\mathbf{A})$

- **Transpuesta**: $det(\mathbf{A}^T) = det(\mathbf{A})$

- **Multiplicación**: $det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = det(\mathbf{A}) \cdot det(\mathbf{B})$

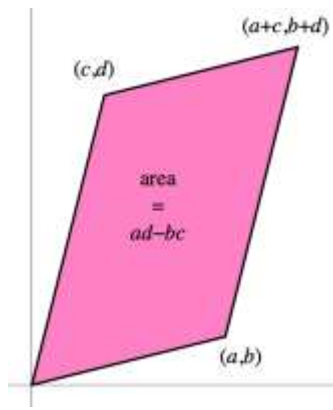
- **No** vale para la suma! $det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq det(\mathbf{A}) + det(\mathbf{B})$

Determinante: Aplicaciones

- Calcular **autovalores:**
  Resolver el polinomio característico $det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0$

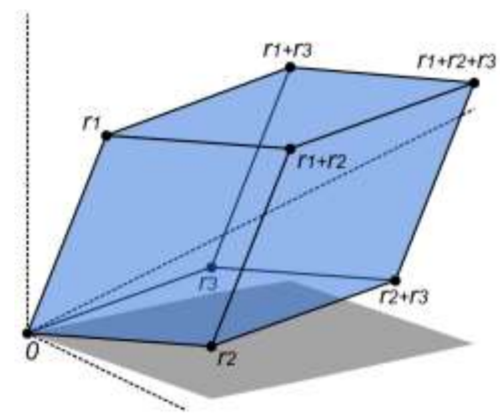
- **Área** y **Volumen:** $\text{area} = |det(\mathbf{A})|$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

(r_i es la fila i)



Matriz Ortogonal

- La matriz Q es **ortogonal** si y solo si sus vectores columnas (filas) representan una base **ortonormal**

$$q_{*i}^T \cdot q_{*j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad , \forall\ i, j$$

- Como transformación lineal, preserva la **norma**

- Algunas propiedades:
  - La transpuesta es la inversa $QQ^T = Q^TQ = I$
  - El determinante tiene norma unitaria (± 1)

$$1 = det(I) = det(Q^TQ) = det(Q)det(Q^T) = det(Q)^2$$

Matriz de Rotación

- Una matriz de rotación es una matriz ortogonal con det =+1
  - Rotaciones 2D $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$
  - Rotaciones 3D sobre los ejes principales

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

- **IMPORTANTE: Las rotaciones en 3D no son conmutativas**

$$R_x(\frac{\pi}{4}) \cdot R_y(\frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & -0.707 \\ -0.5 & 0.707 & -0.5 \\ 0.5 & 0.707 & 0.5 \end{bmatrix}, \; R_x(\frac{\pi}{4}) \cdot R_y(\frac{\pi}{4}) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.414 \\ 0.586 \\ 3.414 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\frac{\pi}{4}) \cdot R_x(\frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \; R_y(\frac{\pi}{4}) \cdot R_x(\frac{\pi}{4}) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.793 \\ 0.707 \\ 3.207 \end{bmatrix}$$

Matrices que representan transformaciones afines

- Una forma fácil y general de describir una transformación en 3D es con matrices

Vector de traslación

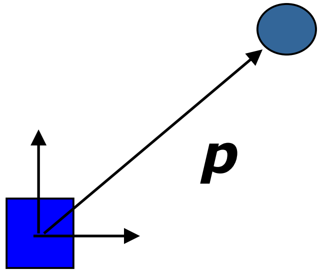
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}; \; \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}; \; \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de Rotación

- Toma en cuenta la no conmutatividad de las transformaciones
- Se llaman transformaciones homogéneas

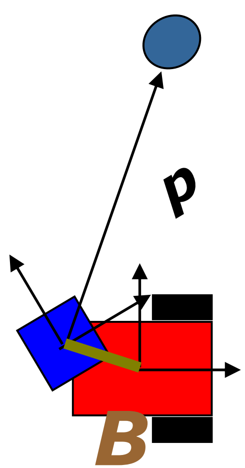
Combinando Transformaciones

- Un ejemplo de uso: encadenar transformaciones (representadas como matrices homogéneas)
  - Matriz ***A*** representa la pose de un **robot** en el espacio
  - Matriz ***B*** representa la posición de un sensor sobre el robot
  - El **sensor** percibe un **objeto** en la ubicación ***p***, en su propia terna [el sensor no tiene idea de su ubicación en el mundo]
  - ¿Dónde está el objeto en la terna global?



Combinando Transformaciones

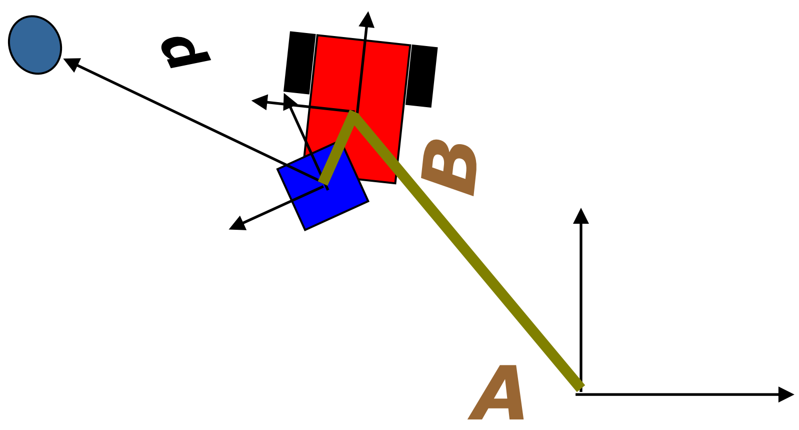
- Un ejemplo de uso: encadenar transformaciones (representadas como matrices homogéneas)
  - Matriz ***A*** representa la pose de un **robot** en el espacio
  - Matriz ***B*** representa la posición de un sensor sobre el robot
  - El **sensor** percibe un **objeto** en la ubicación ***p***, en su propia terna [el sensor no tiene idea de su ubicación en el mundo]
  - ¿Dónde está el objeto en la terna global?



Bp da la pose del objeto con respecto al robot

Combinando Transformaciones

- Un ejemplo de uso: encadenar transformaciones (representadas como matrices homogéneas)
  - Matriz ***A*** representa la pose de un **robot** en el espacio
  - Matriz ***B*** representa la posición de un sensor sobre el robot
  - El **sensor** percibe un **objeto** en la ubicación ***p***, en su propia terna [el sensor no tiene idea de su ubicación en el mundo]
  - ¿Dónde está el objeto en la terna global?



Bp da la pose del objeto con respecto al robot

ABp da la pose del objeto con respecto al mundo

Matriz Definida Positiva

- Análogo a número positivo
- Definición $M > 0$ iff $z^T M z > 0 \quad \forall z \neq 0$
- Ejemplo
  - $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = z_1^2 + z_2^2 > 0$

Matriz Definida Positiva

- Propiedades
  - **Invertible**, con inversa definida positiva
  - Todos los **autovalores** reales > 0
  - La **Traza** es > 0
  - Tiene descomposición de **Cholesky** $A = LL^T$

Matriz Jacobiana

- En general, es una **matriz no cuadrada** de $n \times m$
- Dada una función vectorial

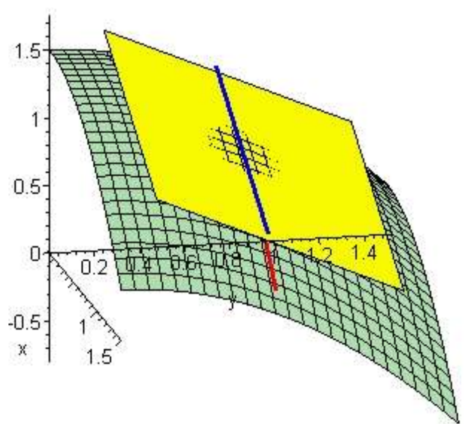
$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

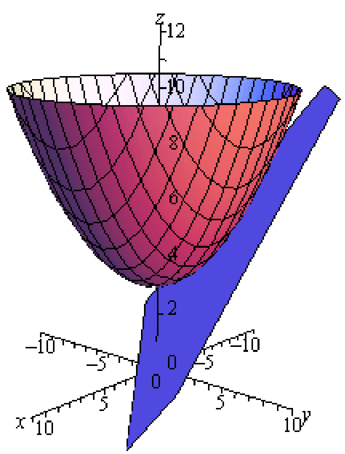
- La **matriz Jacobiana** se define como

$$\mathbf{F}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Matriz Jacobiana

- Es la orientación del **plano tangente** a una función vectorial en un punto dado





- Es la **generalización del gradiente** de una función escalar