Robótica Móvil
un enfoque probabilístico

Filtro de Bayes– Filtro de Kalman Extendido (EKF)

Ignacio Mas

Basado en material de Wolfram Bugard, Dieter Fox y Cyrill Stachniss

Repaso de Filtro de Bayes

$$bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t) \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\, bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

- Predicción

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\, bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

- Corrección

$$bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t)\, \overline{bel}(x_t)$$

Filtro de Kalman Discreto

Estima el estado x de un proceso de tiempo discreto controlado

$$\boxed{x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + e_t}$$

Con una medición

$$\boxed{z_t = C_t x_t + d_t}$$

Componentes del filtro de Kalman

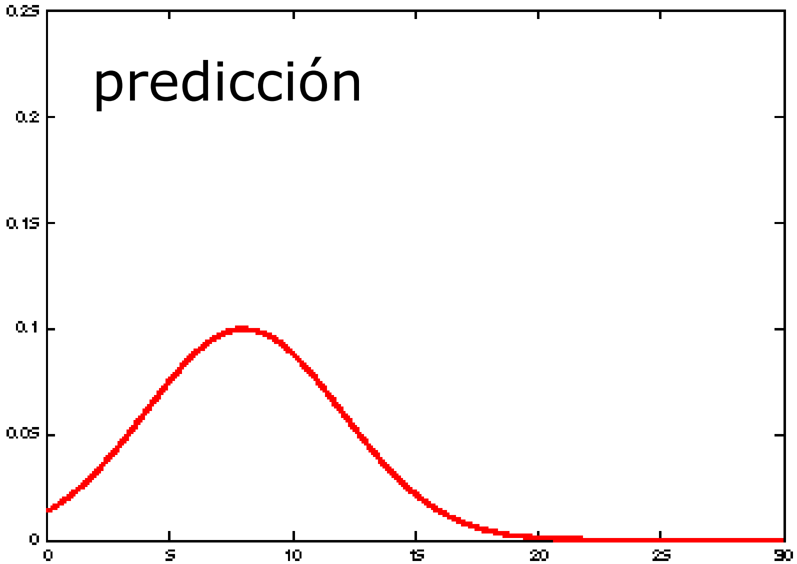
$\boxed{A_t}$ Matriz $(n \times n)$ que describe cómo el estado evoluciona de t-1 a t sin control ni ruido.

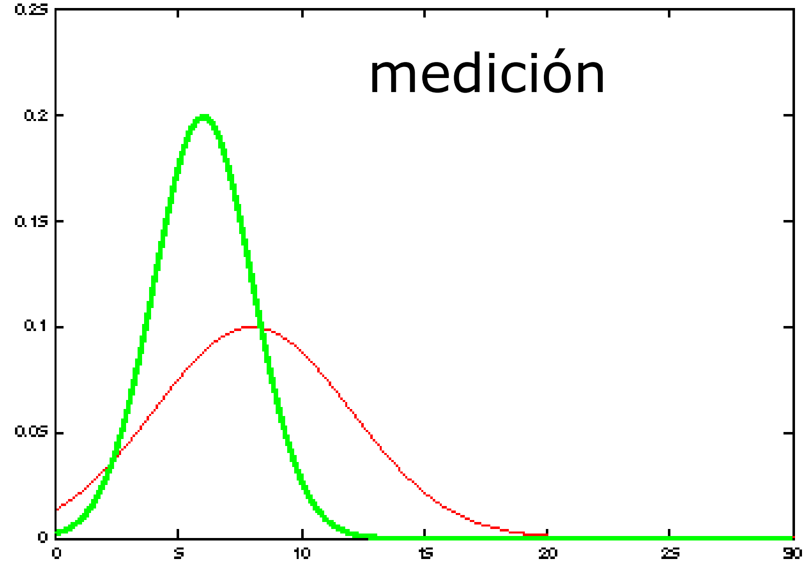
$\boxed{B_t}$ Matriz $(n \times l)$ que describe como el control u_t cambia el estado de t-1 a t.

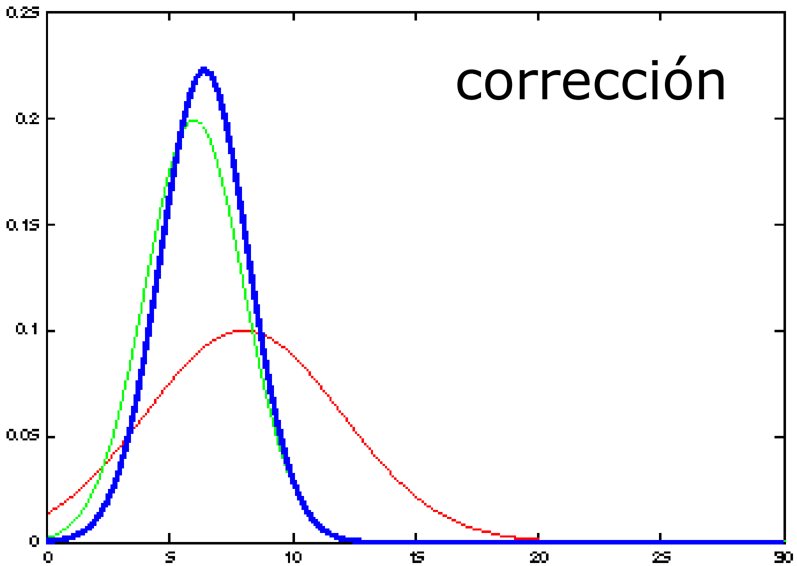
$\boxed{C_t}$ Matriz $(k \times n)$ que describe como mapear el estado x_t a una observación z_t.

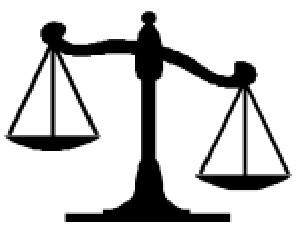
$\boxed{\varepsilon_t}$ $\boxed{\delta_t}$ Variables aleatorias que representan el ruido de proceso y de medición que se asumen independientes y normalmente distribuídas con covarianzas Q_t y R_t respectivamente.

Filtro de Kalman en 1D



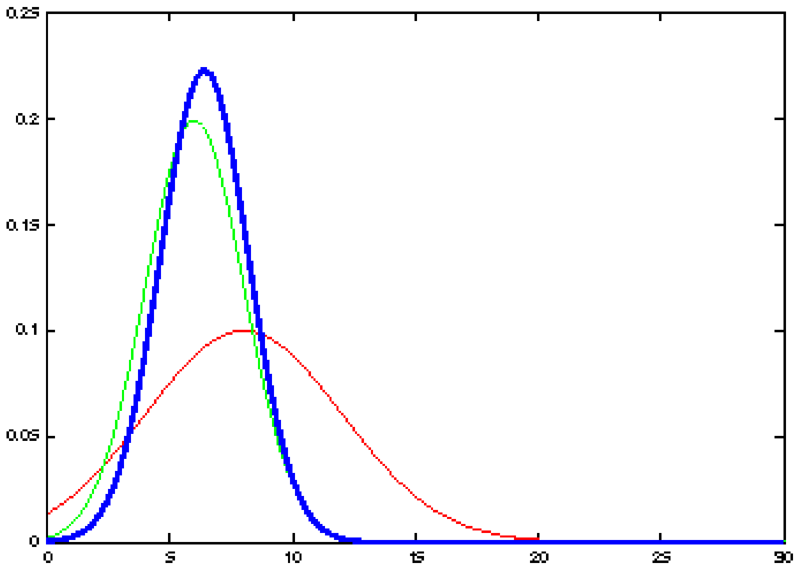


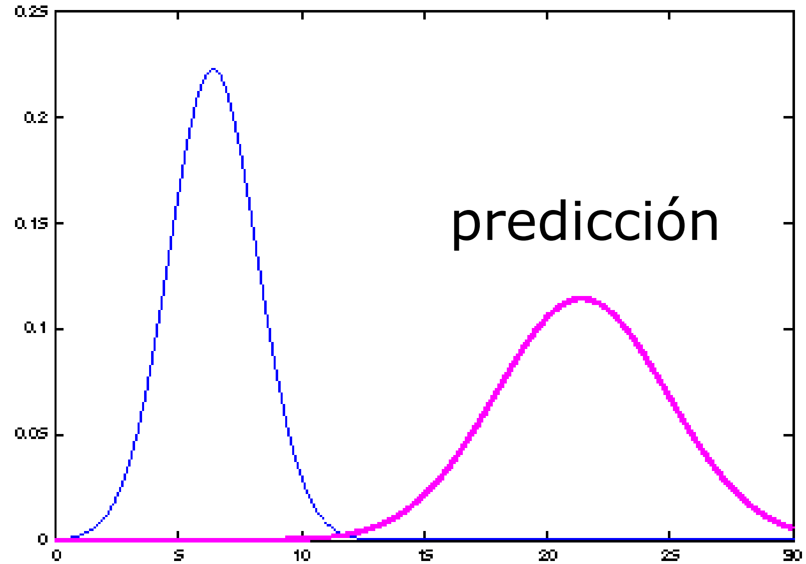


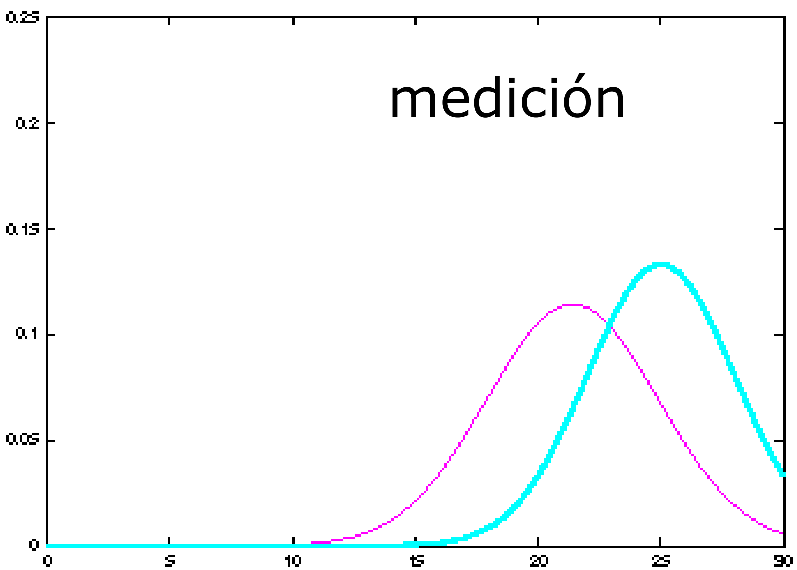


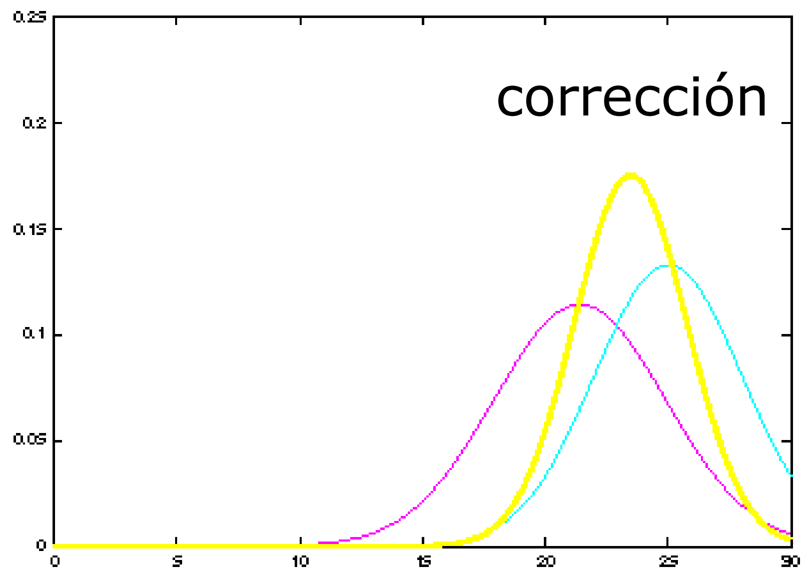
Es un promedio ponderado

Filtro de Kalman en 1D









Algoritmo de filtro de Kalman

1. Algoritmo **Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):

2. Predicción:
3. $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
4. $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + Q_t$

5. Corrección:
6. $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + R_t)^{-1}$
7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$
8. $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$

9. Return μ_t, Σ_t

Sistema dinámico No-lineal

- La mayoría de los problemas reales de robótica incluyen funciones no lineales

$$\boxed{\cancel{x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + e_t}}$$

$$\Downarrow$$

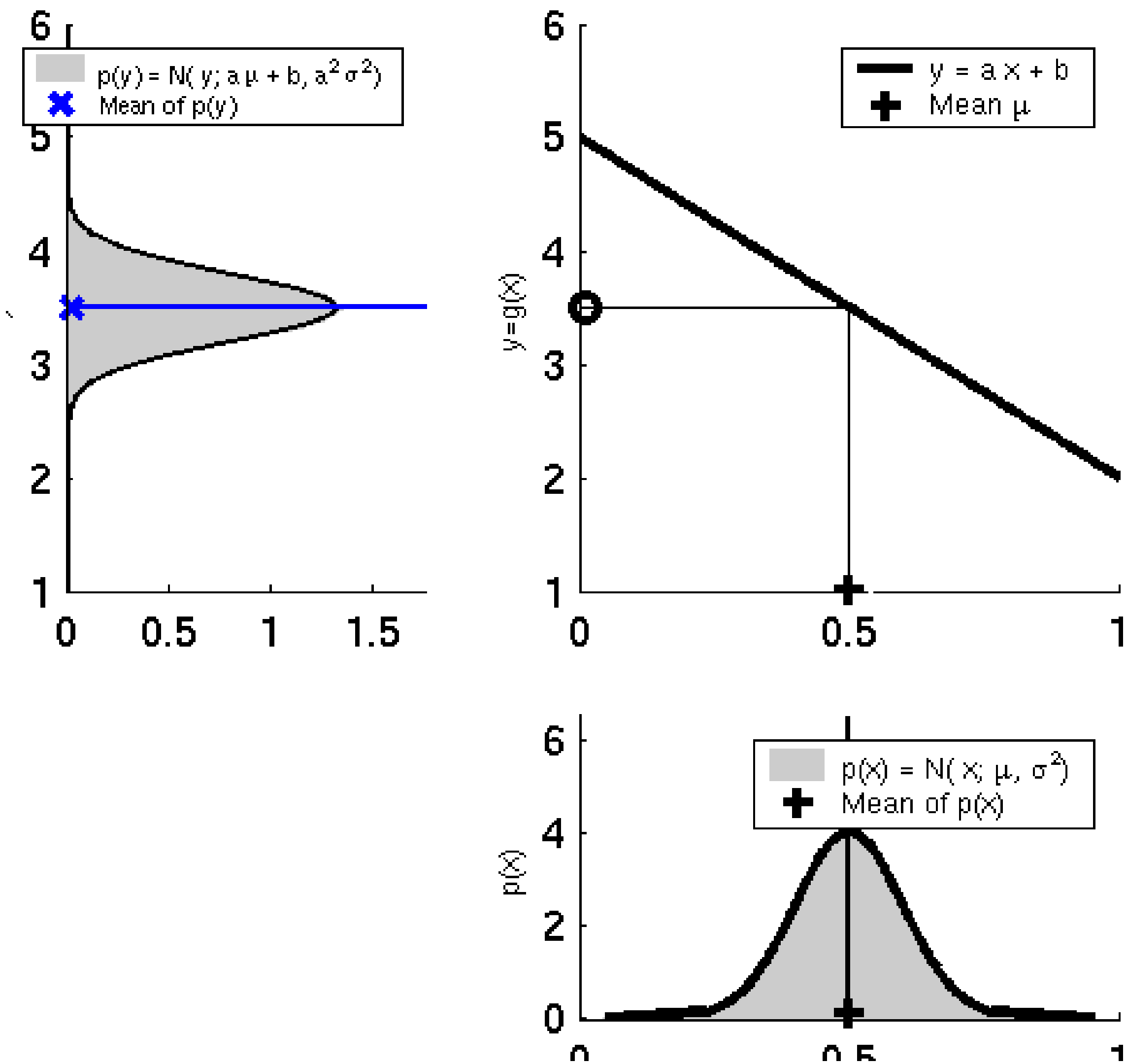
$$\boxed{x_t = g(u_t, x_{t-1})}$$

$$\boxed{\cancel{z_t = C_t x_t + d_t}}$$

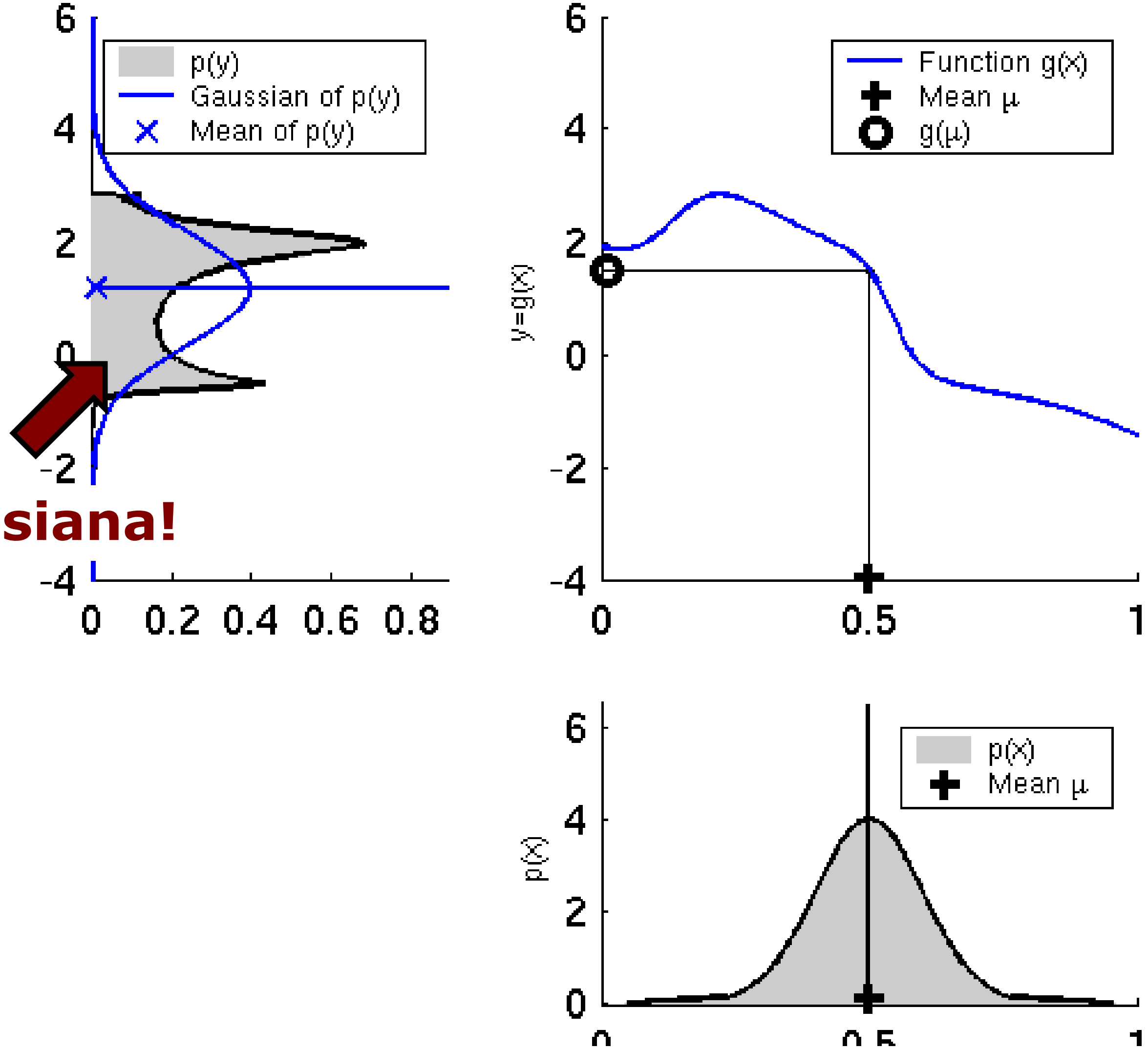
$$\Downarrow$$

$$\boxed{z_t = h(x_t)}$$

Suposición de Linealidad



Función No-Lineal



No Gaussiana!

Distribuciones No Gaussianas

- Funciones no lineales llevan a distribuciones No Gaussianas
- El filtro de Kalman ya no se puede usar!

Cómo se resuelve esto?

Distribuciones No Gaussianas

- Funciones no lineales llevan a distribuciones No Gaussianas
- El filtro de Kalman ya no se puede usar!

Cómo se resuelve esto?

Linealización local!

Linealización EKF: Expansión de Taylor de primer orden

- Predicción:

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}} (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t \, (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

- Corrección:

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t} (x_t - \bar{\mu}_t)$$

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + H_t \, (x_t - \bar{\mu}_t)$$

Matrices Jacobianas

Repaso: Matriz Jacobiana

- En general, es una **matriz no cuadrada** de $n \times m$
- Dada una función vectorial

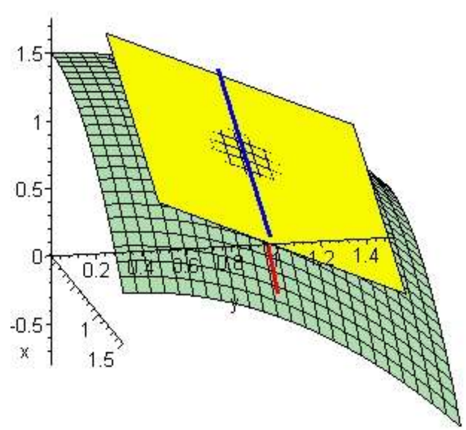
$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

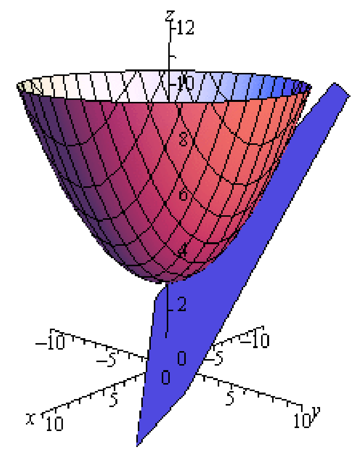
- La **matriz Jacobiana** se define como

$$\mathbf{F_x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Repaso: Matriz Jacobiana

- Es la orientación del **plano tangente** a una función vectorial en un punto dado





- Es la **generalización del gradiente** de una función escalar

Linealización EKF: Expansión de Taylor de primer orden

- Predicción:

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}} (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t \, (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

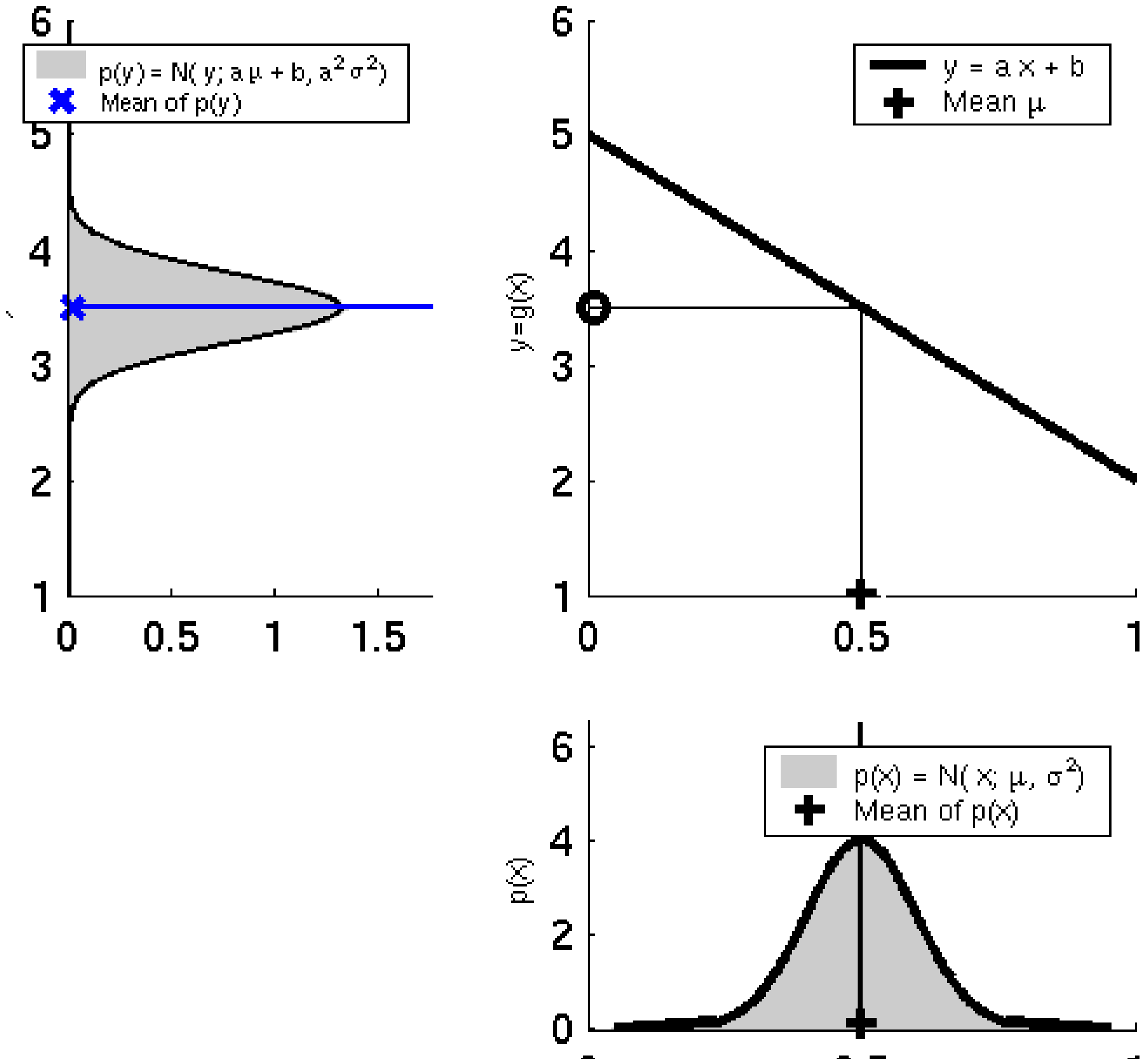
- Corrección:

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t} (x_t - \bar{\mu}_t)$$

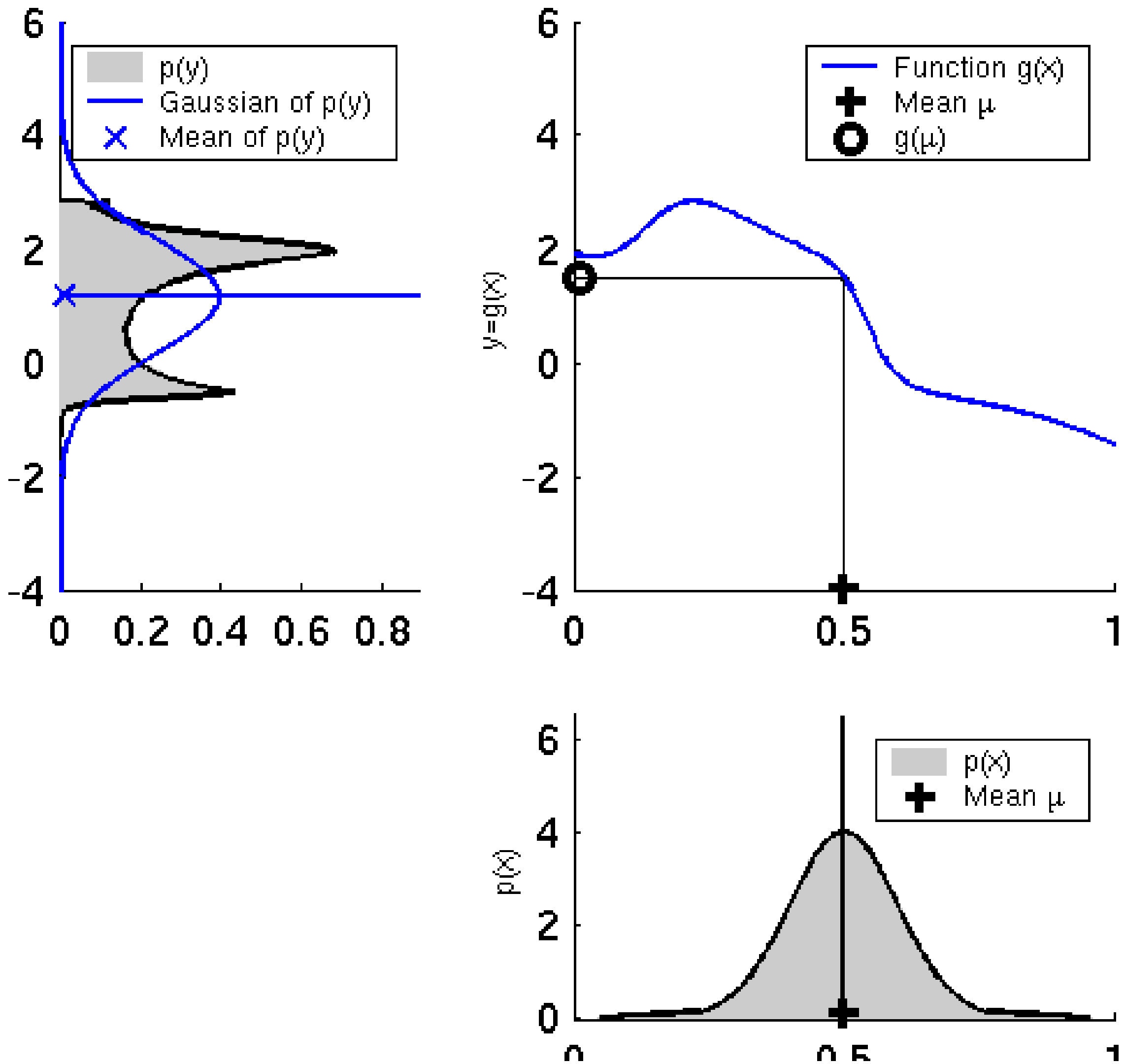
$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + H_t \, (x_t - \bar{\mu}_t)$$

Función Lineal!

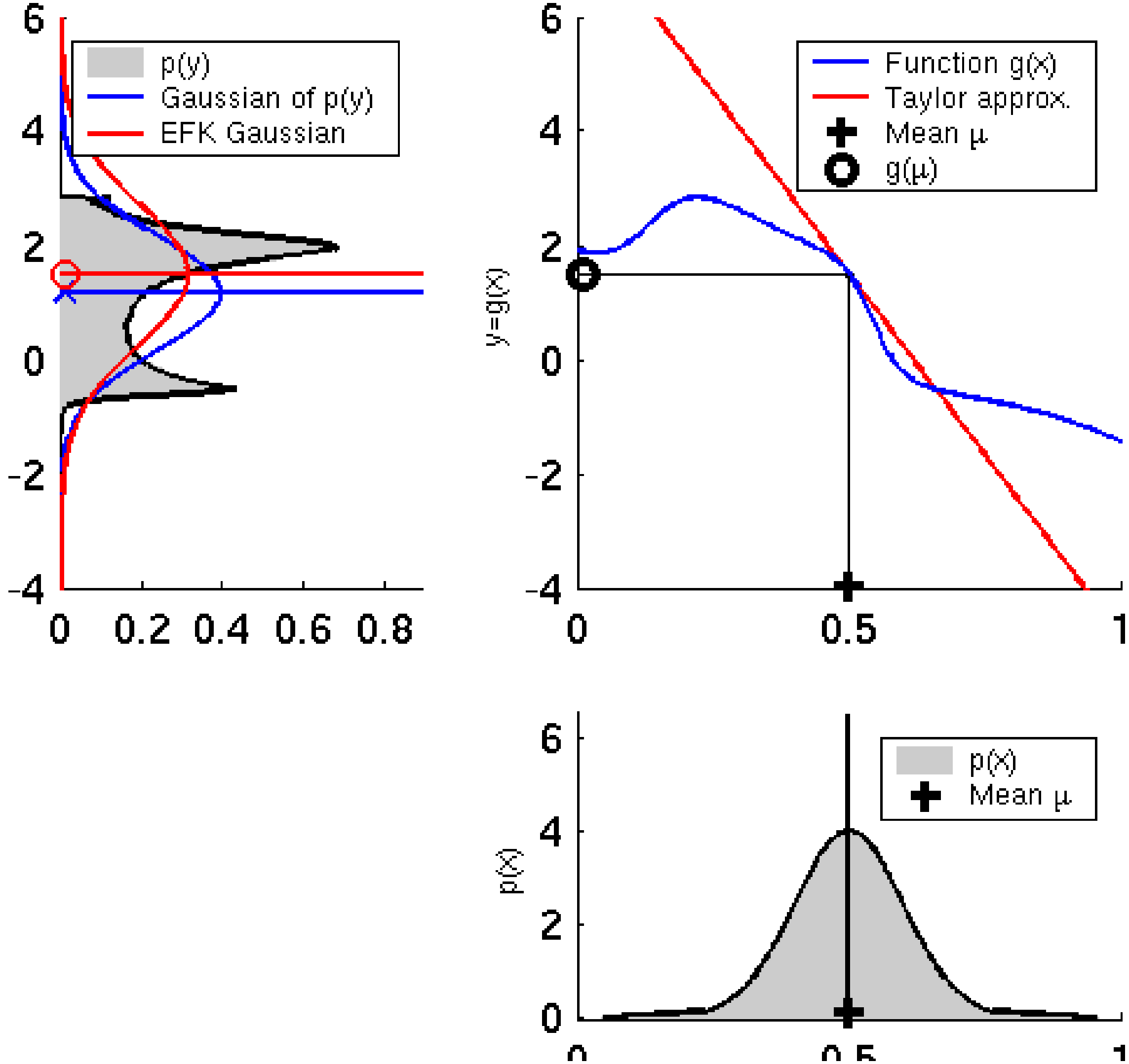
Suposición de Linealidad



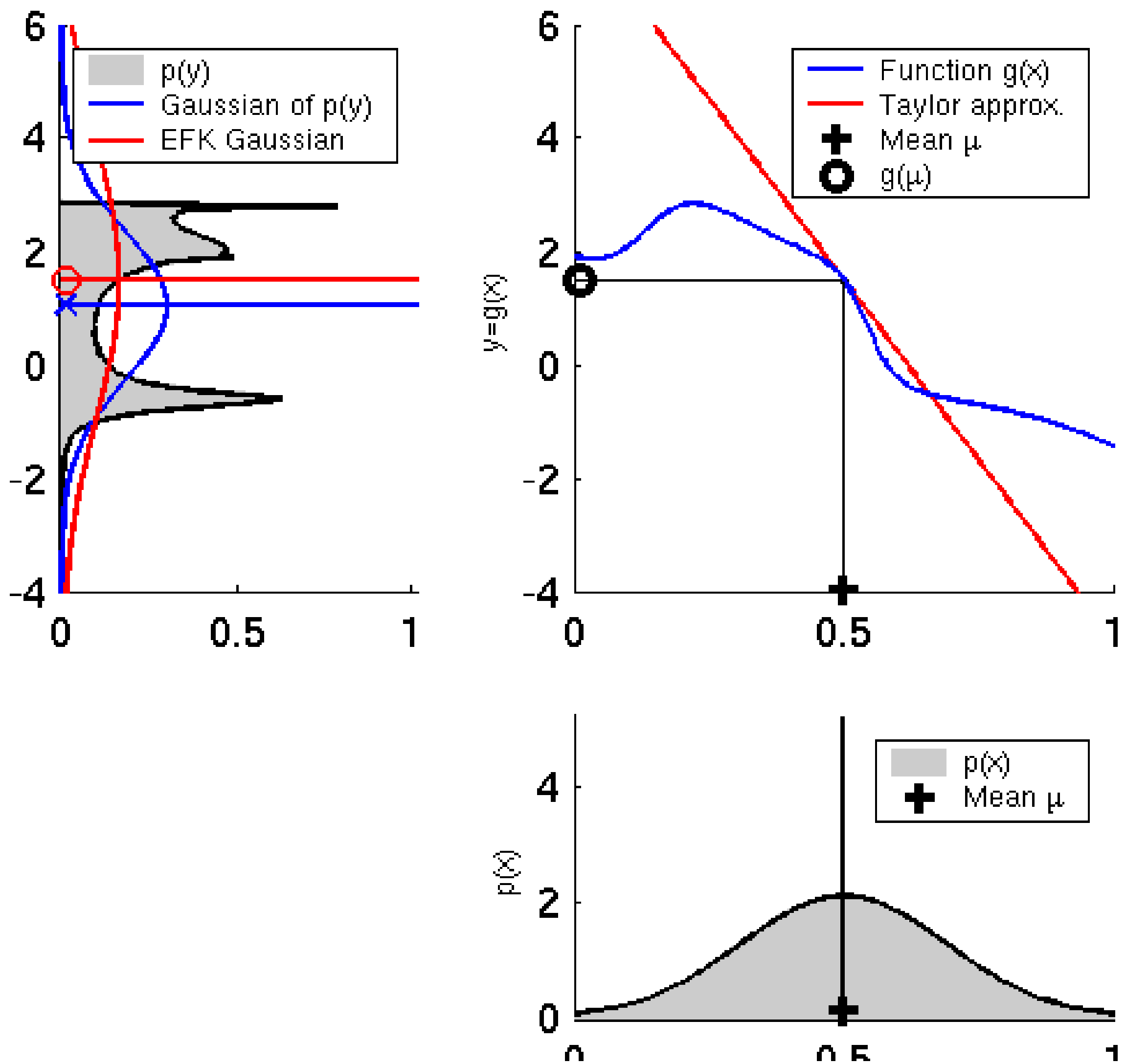
Función No Lineal



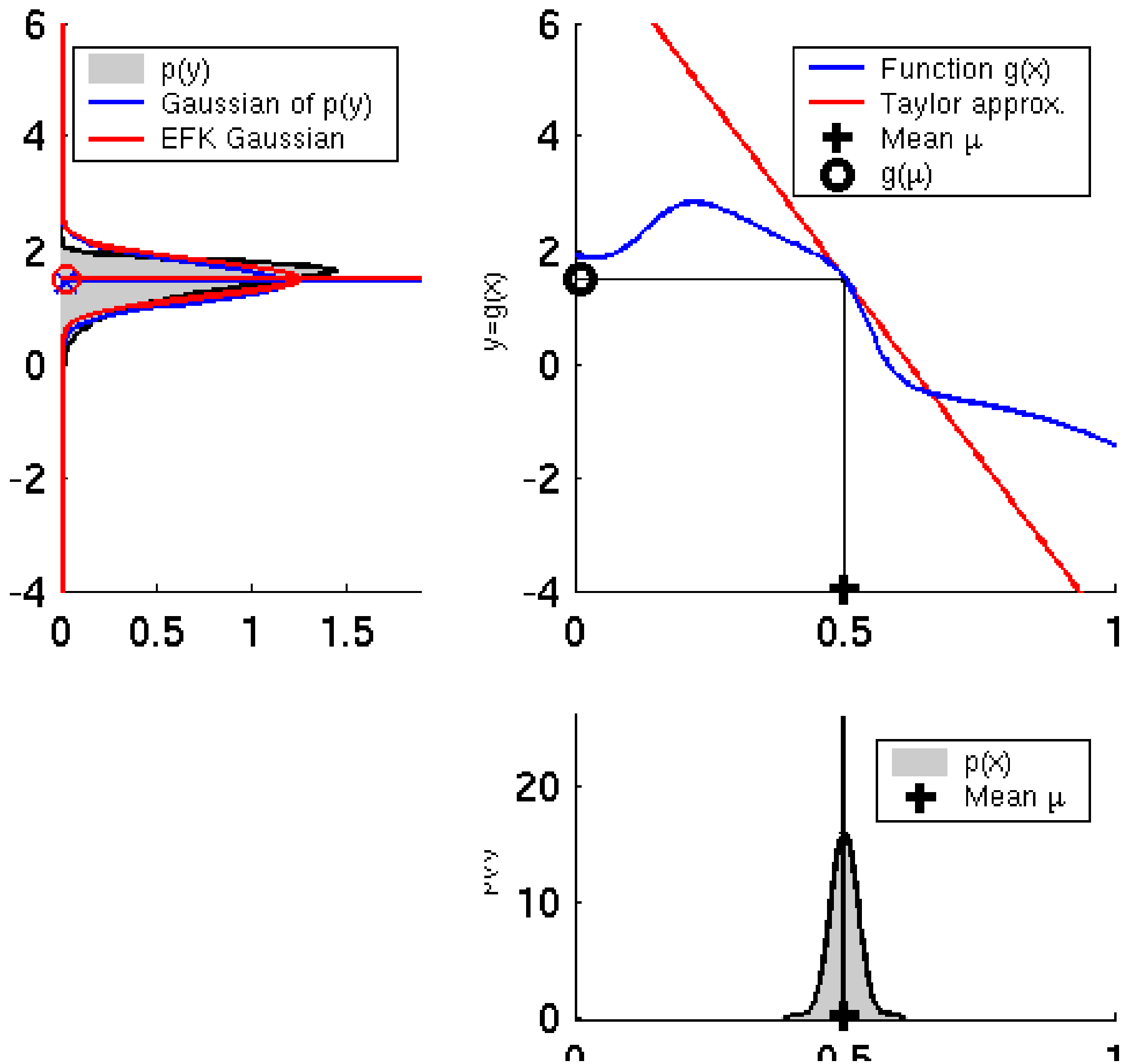
Linealización EKF (1)



Linealización EKF (2)



Linealización EKF (3)



Algoritmo EKF

1. **Extended_Kalman_filter**(μ_{t-1}, Σ_{t-1}, u_t, z_t):

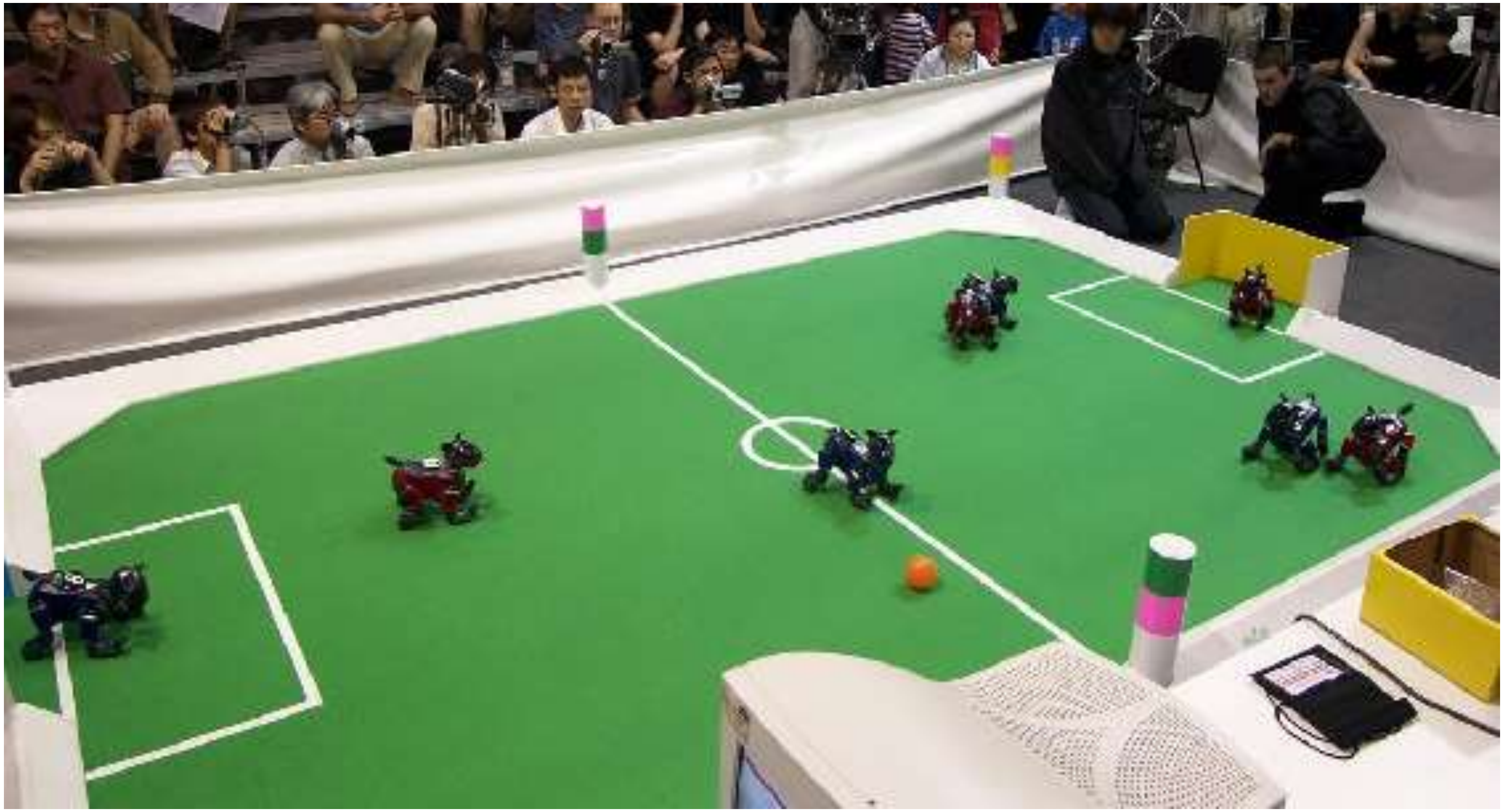
2. Predicción:
3. $\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$ $\longleftarrow$ $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
4. $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + Q_t$ $\longleftarrow$ $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + Q_t$

5. Corrección:
6. $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + R_t)^{-1}$ $\longleftarrow$ $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + R_t)^{-1}$
7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h(\bar{\mu}_t))$ $\longleftarrow$ $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$
8. $\Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t$ $\longleftarrow$ $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$
9. Return μ_t, Σ_t

$$H_t = \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t} \qquad G_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

Ejemplo: Localización EKF

- Localización EKF con landmarks



1. **localización_EKF** (μ_{t-1}, Σ_{t-1}, u_t, z_t, m):

Predicción:

$$G_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial \mu_{t-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \mu_{t-1,x}} & \frac{\partial x'}{\partial \mu_{t-1,y}} & \frac{\partial x'}{\partial \mu_{t-1,\theta}} \\ \frac{\partial y'}{\partial \mu_{t-1,x}} & \frac{\partial y'}{\partial \mu_{t-1,y}} & \frac{\partial y'}{\partial \mu_{t-1,\theta}} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial \mu_{t-1,x}} & \frac{\partial \theta'}{\partial \mu_{t-1,y}} & \frac{\partial \theta'}{\partial \mu_{t-1,\theta}} \end{pmatrix}$$

Jacobiano de g con respecto a la pose

$$V_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial u_t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial v_t} & \frac{\partial x'}{\partial \omega_t} \\ \frac{\partial y'}{\partial v_t} & \frac{\partial y'}{\partial \omega_t} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial v_t} & \frac{\partial \theta'}{\partial \omega_t} \end{pmatrix}$$

Jacobiano de g con respecto al control

1. $$Q_t = \begin{pmatrix} (\alpha_1 |v_t| + \alpha_2 |\omega_t|)^2 & 0 \\ 0 & (\alpha_3 |v_t| + \alpha_4 |\omega_t|)^2 \end{pmatrix}$$

Ruido de movimiento

2. $$\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$$

Predicción de media

3. $$\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + V_t Q_t V_t^T$$

Predicción de covarianza (V mapea Q al espacio de estado)

1. **localización_EKF** ($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t, m$):

Corrección:

3. $$\hat{z}_t = \begin{pmatrix} \sqrt{(m_x - \bar{\mu}_{t,x})^2 + (m_y - \bar{\mu}_{t,y})^2} \\ \operatorname{atan2}(m_y - \bar{\mu}_{t,y}, m_x - \bar{\mu}_{t,x}) - \bar{\mu}_{t,\theta} \end{pmatrix}$$ Predicción de media de la medición (depende del tipo de observación)

5. $$H_t = \frac{\partial h(\bar{\mu}_t, m)}{\partial x_t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_t}{\partial \bar{\mu}_{t,x}} & \frac{\partial r_t}{\partial \bar{\mu}_{t,y}} & \frac{\partial r_t}{\partial \bar{\mu}_{t,\theta}} \\ \frac{\partial \varphi_t}{\partial \bar{\mu}_{t,x}} & \frac{\partial \varphi_t}{\partial \bar{\mu}_{t,y}} & \frac{\partial \varphi_t}{\partial \bar{\mu}_{t,\theta}} \end{pmatrix}$$ Jacobiano de *h* con respecto a la pose

6. $$R_t = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 \end{pmatrix}$$

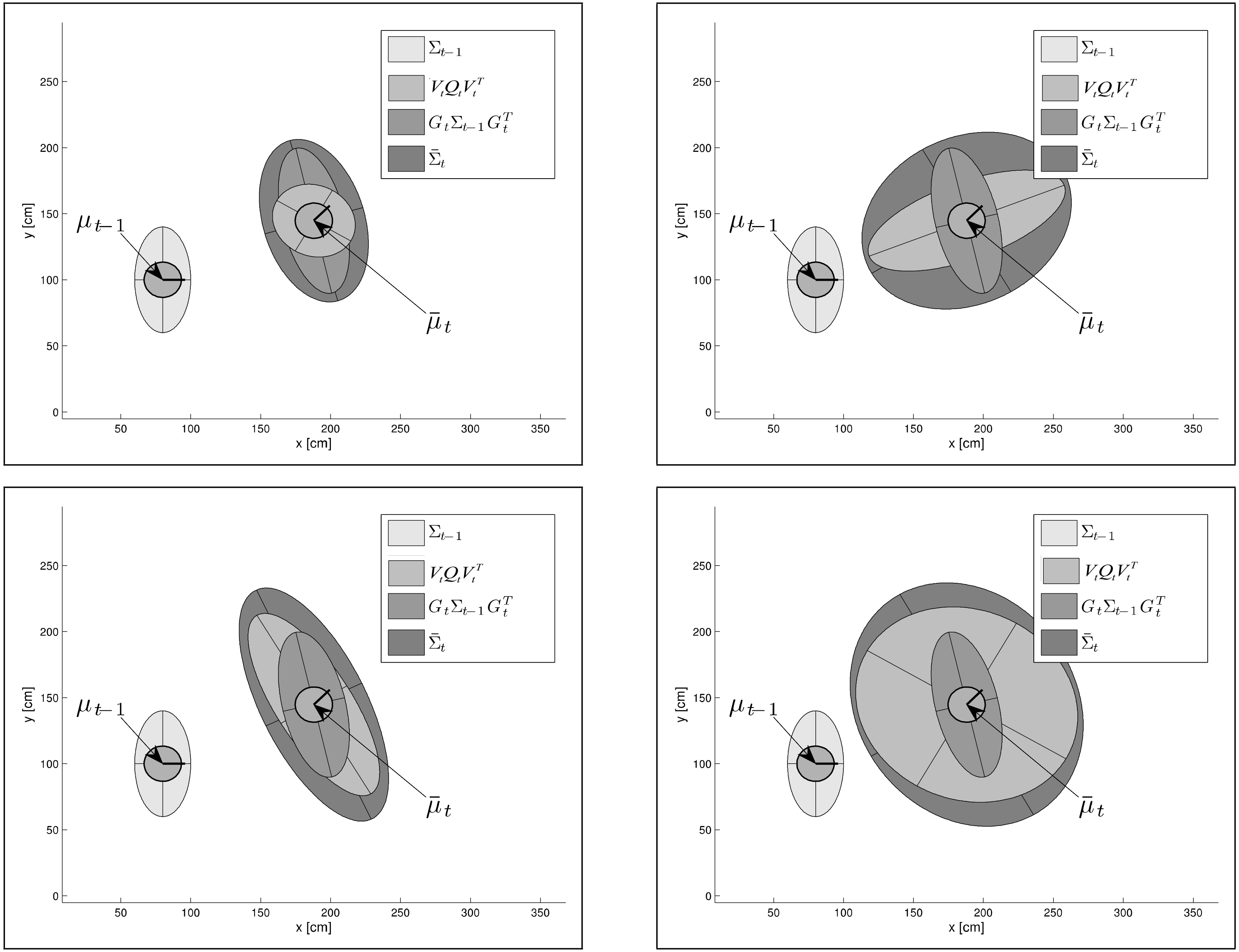
7. $$S_t = H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + R_t$$ Covarianza de innovación

8. $$K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T S_t^{-1}$$ Ganancia de Kalman

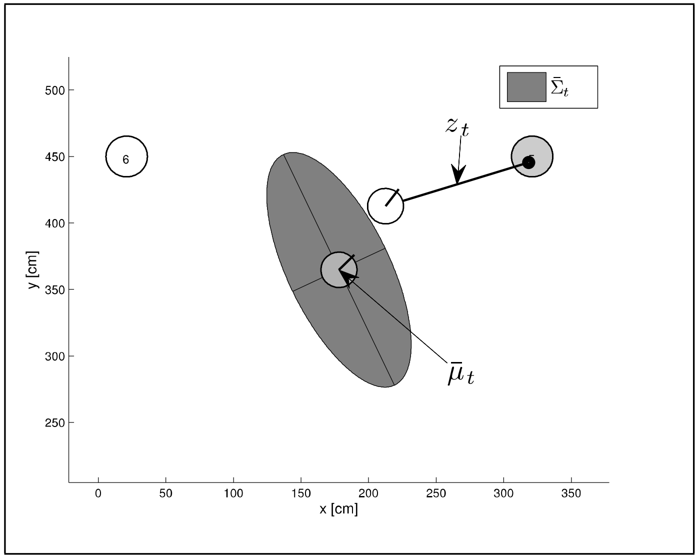
9. $$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - \hat{z}_t)$$ Media actualizada

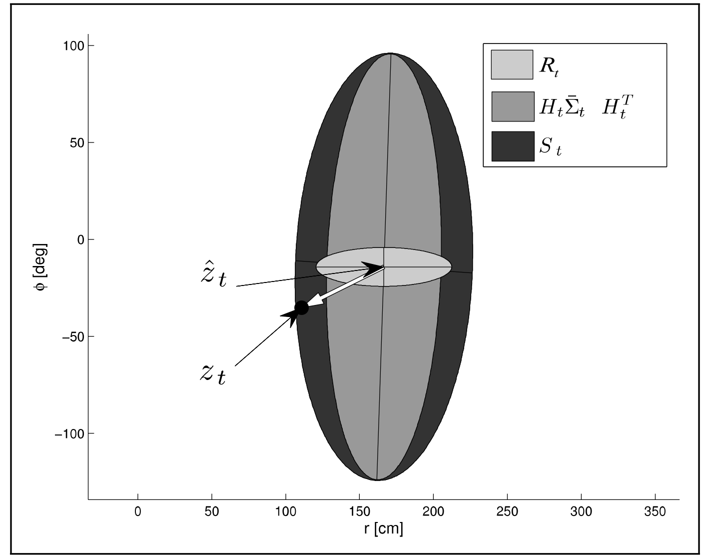
10. $$\Sigma_t = (I - K_t H_t)\bar{\Sigma}_t$$ Covarianza actualizada

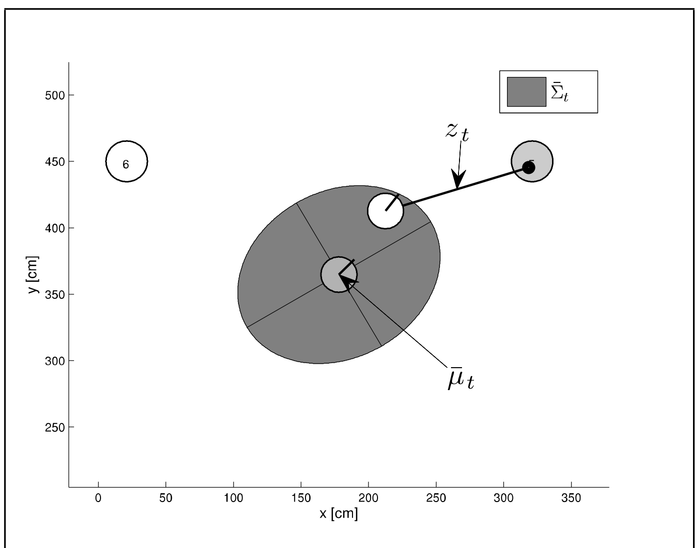
Ejemplos paso de predicción EKF

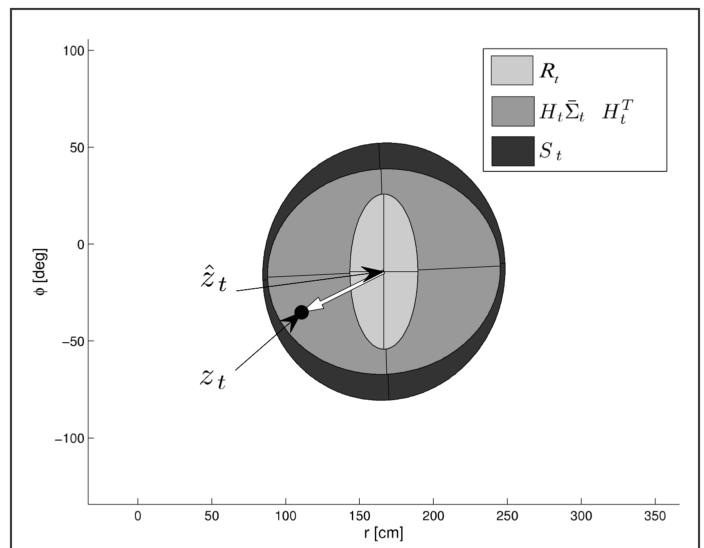


Paso de observación EKF

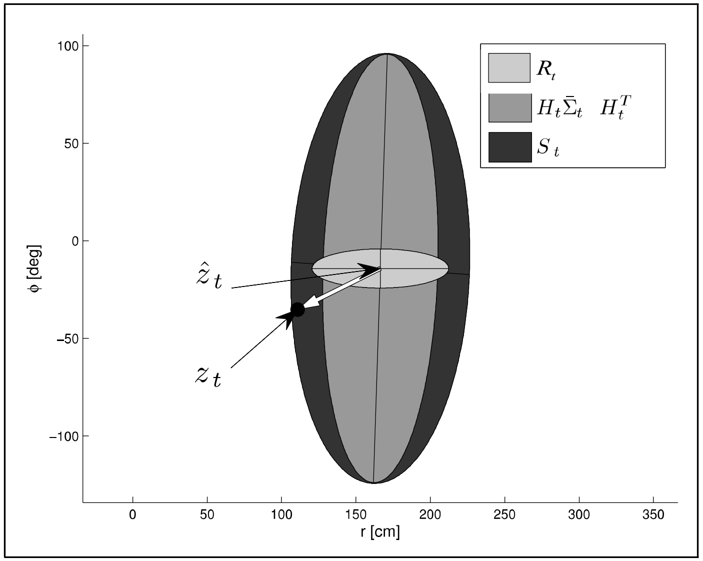


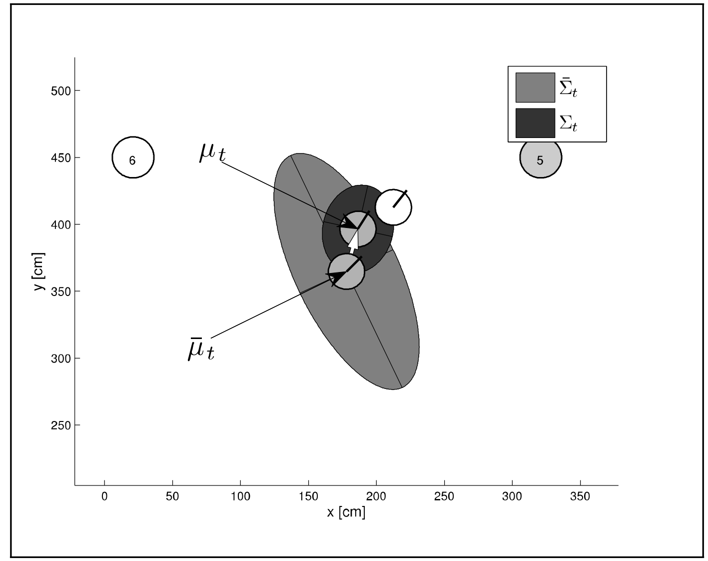


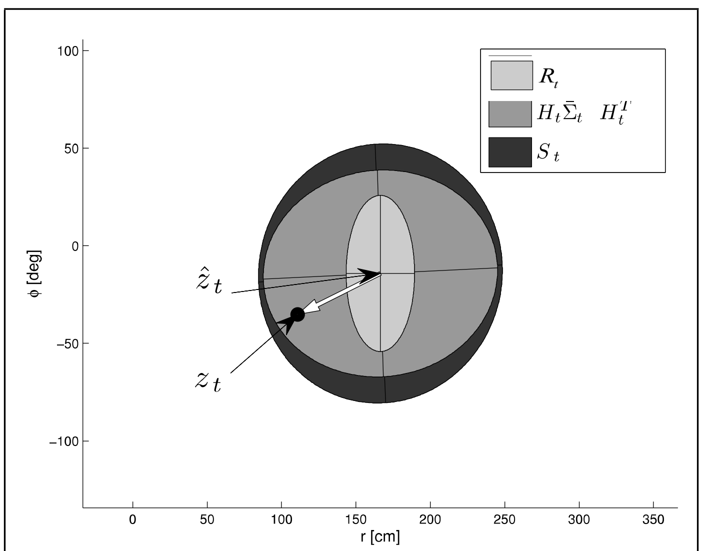


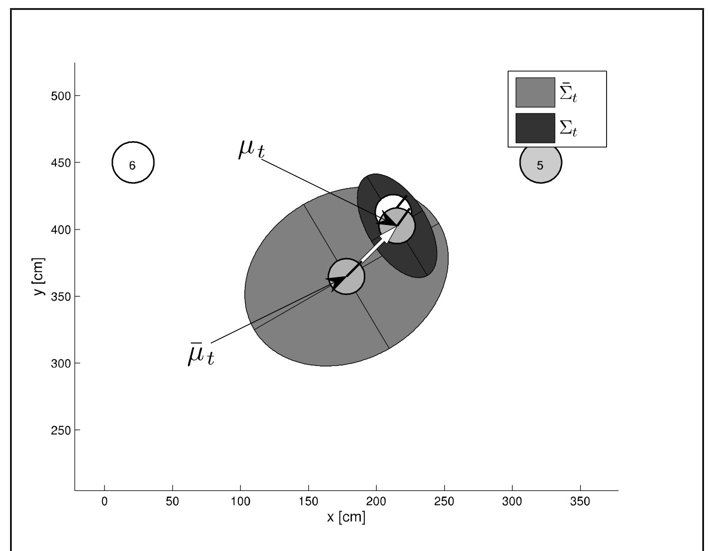


Paso de corrección EKF

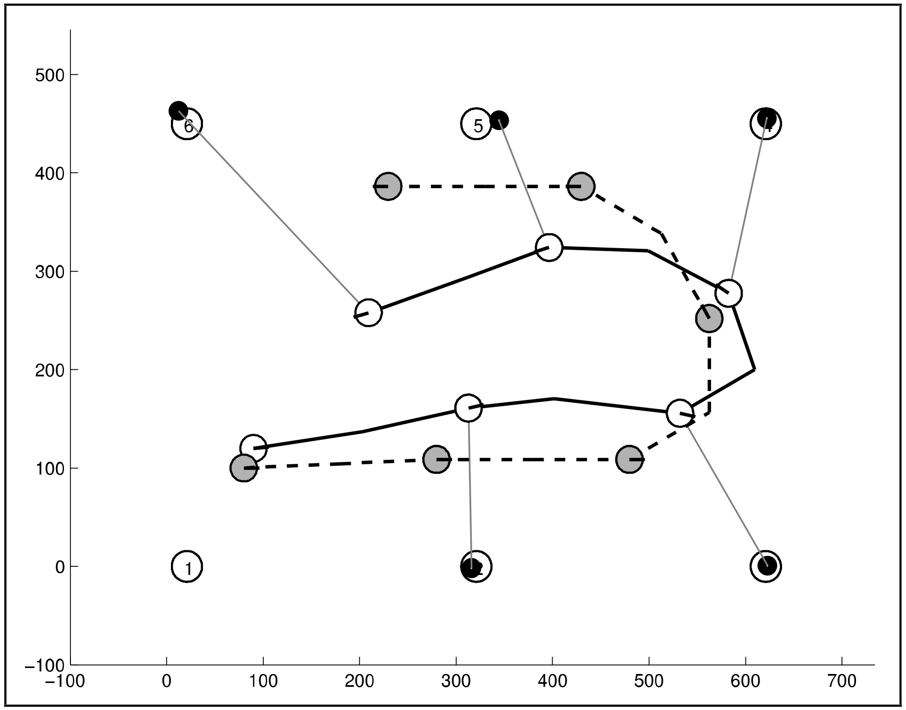


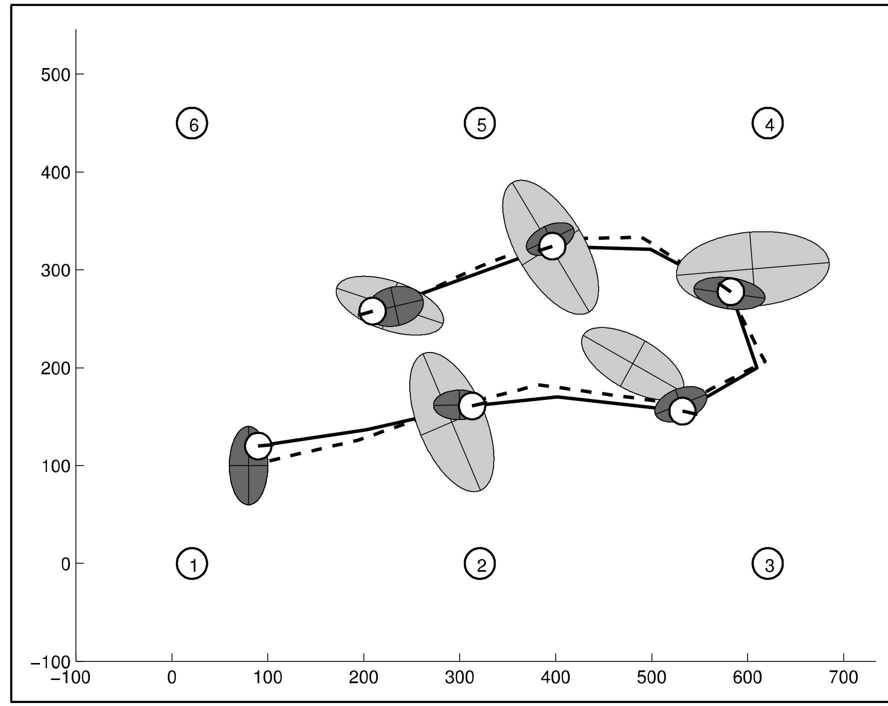




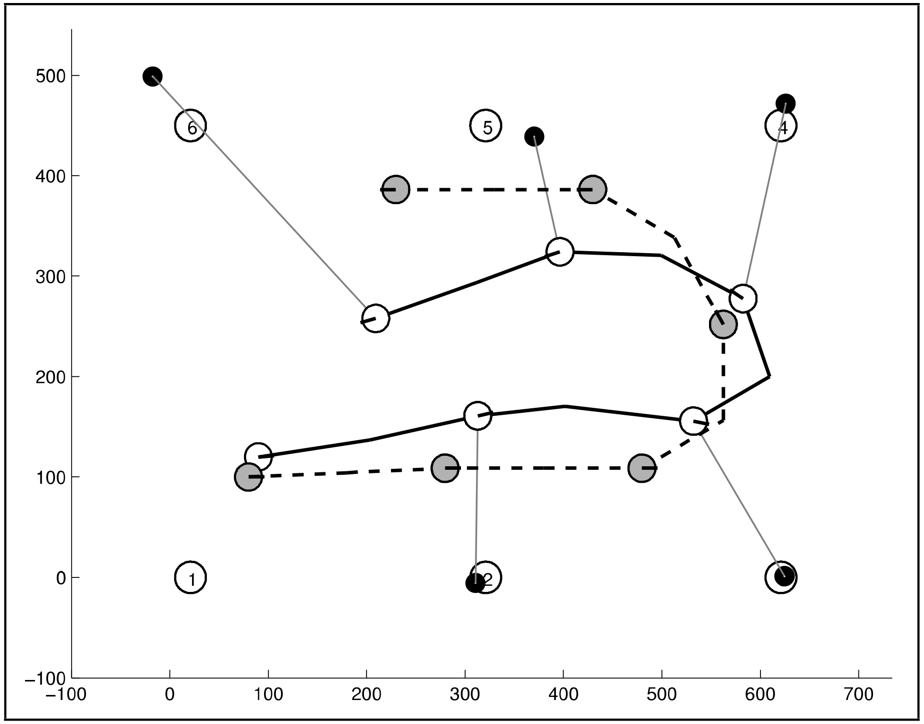


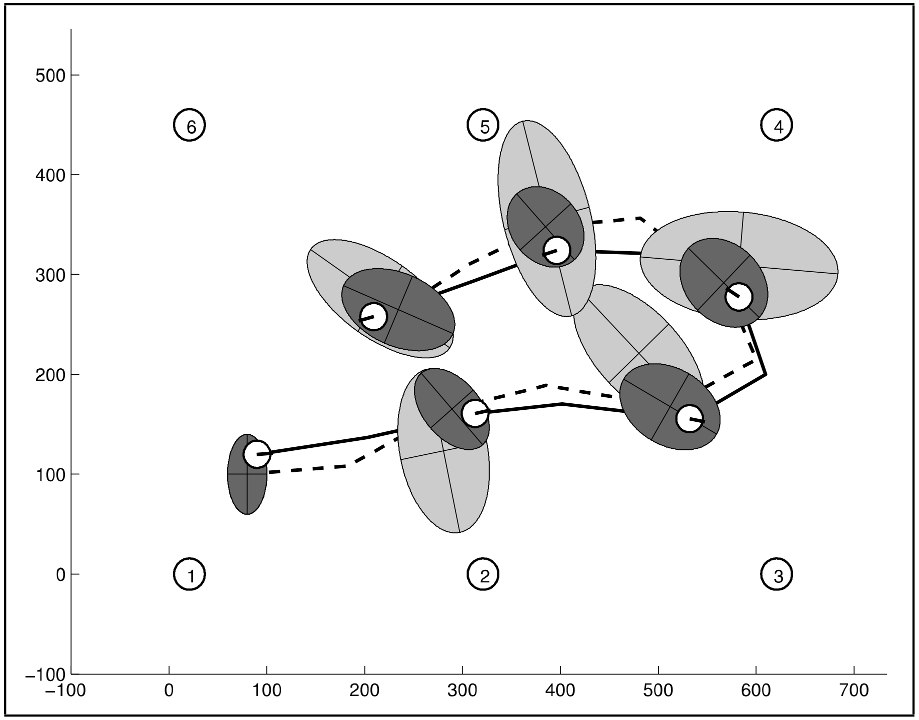
Secuencia de estimación (1)





Secuencia de estimación (2)





Resumen de filtro de Kalman Extendido

- Solución ad-hoc para tratar las no-linealidades
- Linealiza localmente en cada paso
- En la práctica, funciona bien para no-linealidades moderadas
- Ejemplo: localización de landmarks
- Hay otras maneras de tratar las no-linealidades (unscented Kalman Filter, UKF)