Robótica Móvil
un enfoque probabilístico

Robótica Probabilística

Ignacio Mas

Basado en material de Wolfram Bugard, Dieter Fox y Cyrill Stachniss

Robótica Probabilística

Idea principal:

Representación explícita de la incertidumbre
(usando la teoría del cálculo de probabilidades)

- Percepción = estimación de estado
- Acción = optimización de utilidad

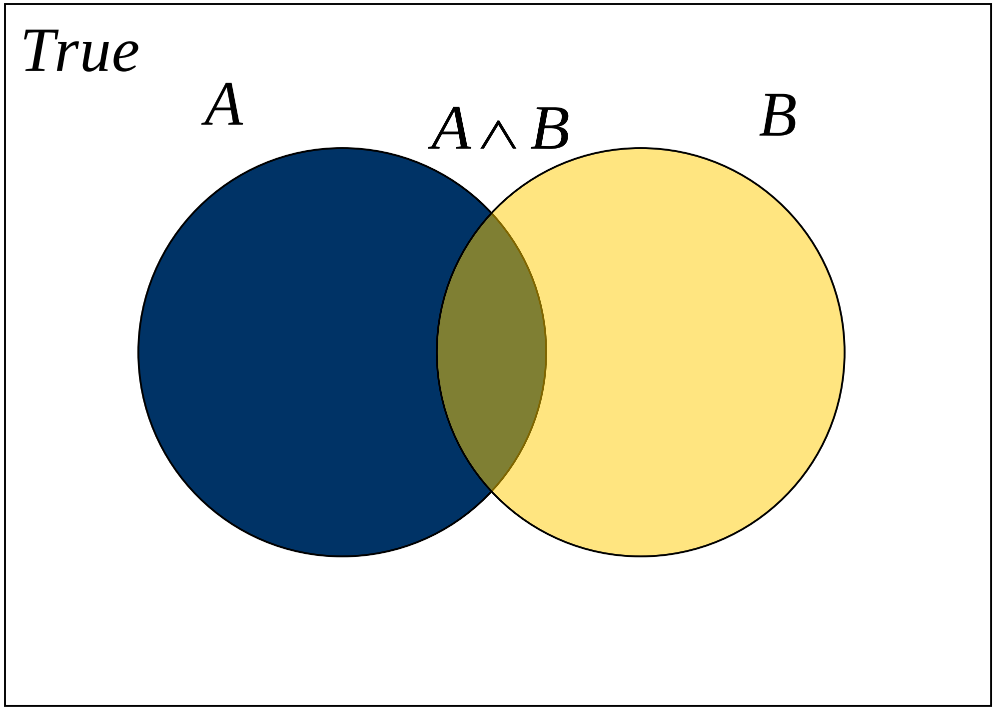
Axiomas de la Probabilidad

P*(A)* indica la probabilidad de que la proposición *A* es verdadera.

- $0 \text{ £ } \mathrm{P}(A) \text{ £ } 1$
- $\mathrm{P}(True) = 1$ $\mathrm{P}(False) = 0$
- $\mathrm{P}(A \vee B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \wedge B)$

Detalles del Axioma 3

$$\mathrm{P}(A \vee B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \wedge B)$$



Usando los Axiomas

$$
\begin{aligned}
P(A \vee \neg A) &= P(A) + P(\neg A) - P(A \wedge \neg A) \\
P(True) &= P(A) + P(\neg A) - P(False) \\
1 &= P(A) + P(\neg A) - 0 \\
P(\neg A) &= 1 - P(A)
\end{aligned}
$$

Variables aleatorias discretas

- X denota una variable aleatoria
- X puede tomar un número contable de valores en $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- $P(X=x_i)$ o $P(x_i)$ es la probabilidad que la variable aleatoria X tome el valor x_i
- $P(\cdot)$ es la función de masa de probabilidad
- Ejemplo:

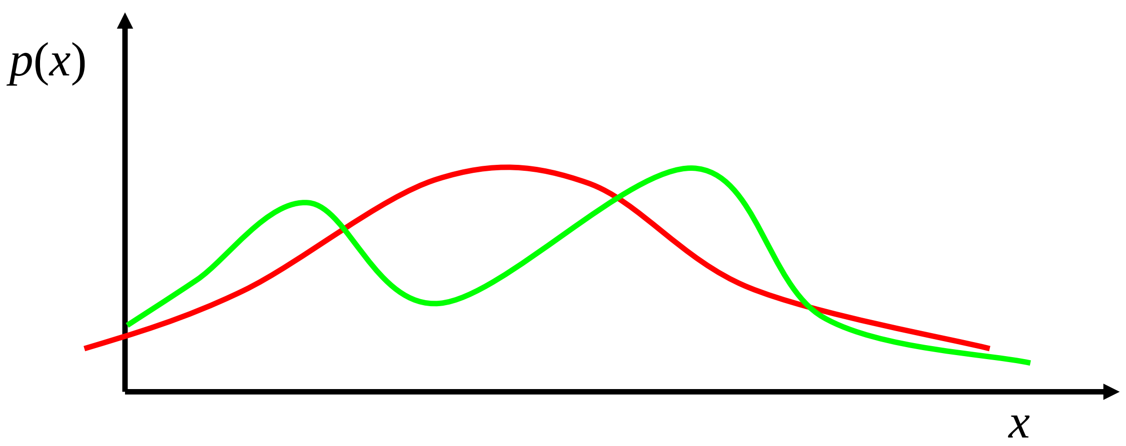
$$P(habitación) = \langle 0.7, 0.2, 0.08, 0.02 \rangle$$

Variables aleatorias continuas

- X toma valores en un continuo.
- $p(X=x)$ o $p(x)$ es una función de densidad de probabilidad

$$P(x \in [a,b]) = \int_a^b p(x)dx$$

- Ejemplo:



Las probabilidades suman 1

Caso Discreto

$$\sum_{x} P(x) = 1$$

Caso Continuo

$$\int p(x)dx = 1$$

Probabilidad conjunta y condicional

- $P(X=x \text{ e } Y=y)$ = $P(x,y)$

- Si X e Y son independientes entonces

$$P(x,y) = P(x)\, P(y)$$

- $P(x \mid y)$ es la probabilidad de x dado y

$$P(x \mid y) = P(x,y) \,/\, P(y)$$

$$P(x,y) \quad = P(x \mid y)\, P(y)$$

- Si X e Y son independientes entonces

$$P(x \mid y) = P(x)$$

Ley de la Probabilidad Total

Caso discreto

$$P(x) = \sum_{y} P(x \mid y) P(y)$$

Caso continuo

$$p(x) = \int p(x \mid y)\, p(y)\, dy$$

Marginalización

Caso Discreto

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

Caso continuo

$$p(x) = \int p(x, y)dy$$

Fórmula de Bayes

$$P(x, y) = P(x \mid y)P(y) = P(y \mid x)P(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{P(x \mid y) = \frac{P(y \mid x)P(x)}{P(y)} = \frac{\text{likelihood} \cdot \text{prior}}{\text{evidence}}}$$

Normalización

$$P(x|y) = \frac{P(y\,|\,x)P(x)}{P(y)} = \eta P(y\,|\,x)P(x)$$

$$\eta = P(y)^{-1} = \frac{1}{\sum_x P(y\,|\,x)P(x)}$$

Algoritmo:

$$\forall x : \mathrm{aux}_{x|y} = P(y\,|\,x)P(x)$$

$$\eta = \frac{1}{\sum_x \mathrm{aux}_{x|y}}$$

$$\forall x : P(x\,|\,y) = \eta\,\mathrm{aux}_{x|y}$$

Regla de Bayes con conocimiento de fondo (Background Knowledge)

$$P(x \mid y, z) = \frac{P(y \mid x, z)\, P(x \mid z)}{P(y \mid z)}$$

Independencia Condicional

$$P(x, y \mid z) = P(x \mid z) P(y \mid z)$$

- Equivalente a $P(x \mid z) = P(x \mid z, y)$

  y $P(y \mid z) = P(y \mid z, x)$

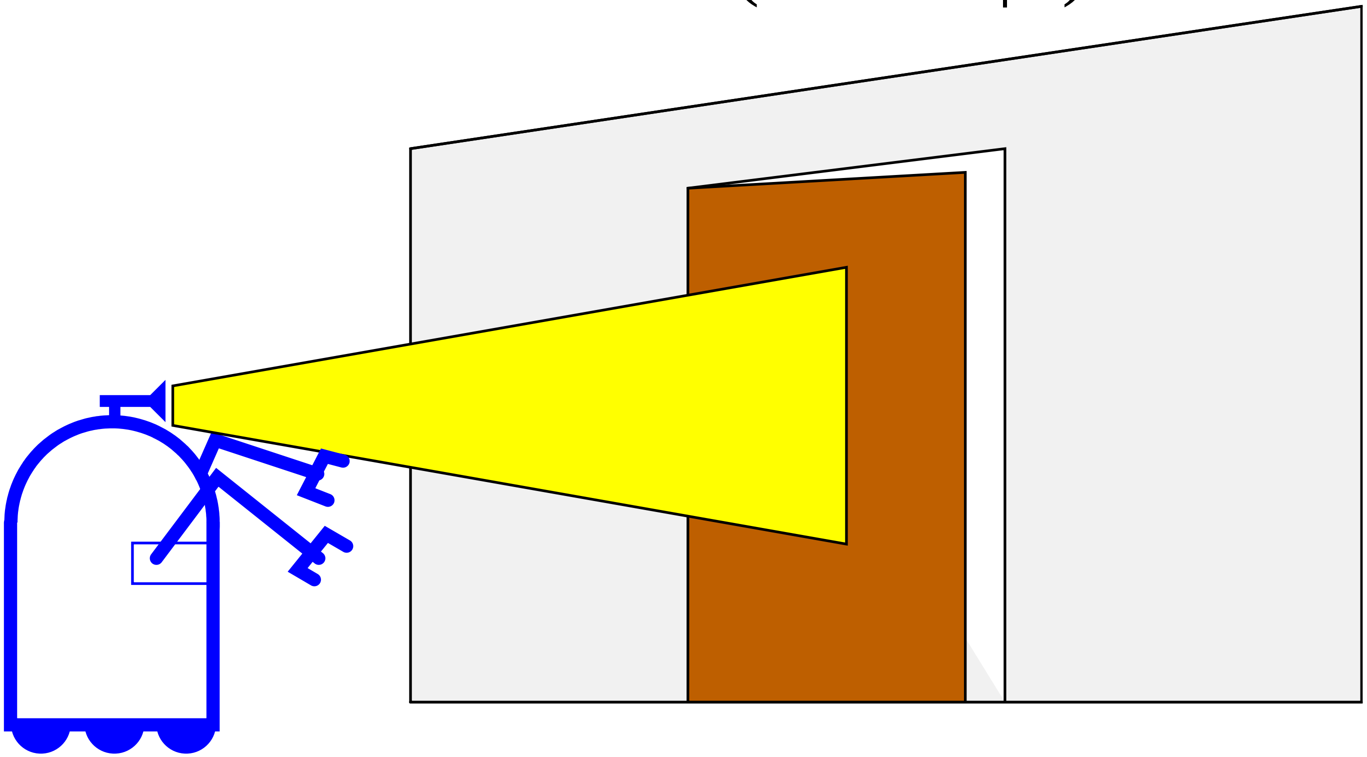
- Pero esto no necesariamente indica que

  $$P(x, y) = P(x) P(y)$$

  (independencia/independencia marginal)

Ejemplo simple de estimación de estado

- Supongamos que el robot obtiene la medición z
- Cuál es el valor de $P(abierta \mid z)$?



Causal vs. razonamiento diagnóstico

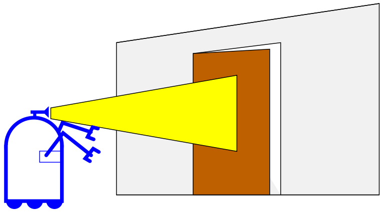
- $P(abierta|z)$ es un diagnóstico
- $P(z|abierta)$ es información causal
- Muchas veces, el conocimiento causal es más fácil de obt

contar frecuencias!

- Bayes permite usar información causal:

$$P(abierta \mid z) = \frac{P(z \mid abierta)P(abierta)}{P(z)}$$

Ejemplo



- $P(z|abierta) = 0.6$ $\quad$ $P(z|\neg abierta) = 0.3$
- $P(abierta) = P(\neg abierta) = 0.5$

$$P(abierta \mid z) = \frac{P(z \mid abierta) P(abierta)}{P(z \mid abierta) p(abierta) + P(z \mid \neg abierta) p(\neg abierta)}$$

$$P(abierta \mid z) = \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = \frac{0.3}{0.3 + 0.15} = 0.67$$

- *z* eleva la probabilidad que la puerta esté abierta

Combinando evidencia

- Supongamos que el robot obtiene una segunda medición z_2
- Cómo podemos incorporar esta nueva información?
- En general, cómo podemos estimar $P(x \mid z_1, \ldots, z_n)$?

Actualización Recursiva Bayesiana

$$P(x \mid z_1, \ldots, z_n) = \frac{P(z_n \mid x, z_1, \ldots, z_{n-1}) P(x \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}$$

Suposición de Markov:

z_n es independiente de $z_1,\ldots,z_{n-1}$ si conocemos x

$$P(x \mid z_1, \ldots, z_n) = \frac{P(z_n \mid x) P(x \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1, \ldots, z_{n-1})}$$

$$= \eta P(z_n \mid x) P(x \mid z_1, \ldots, z_{n-1})$$

$$= \eta_{1\ldots n} \left[\prod_{i=1\ldots n} P(z_i \mid x) \right] P(x)$$

Ejemplo: Segunda Medición

- $P(z_2|abierta) = 0.25$ $\quad$ $P(z_2|\neg abierta) = 0.3$
- $P(abierta|z_1)=2/3$

$$P(abierta \mid z_2, z_1) = \frac{P(z_2 \mid abierta)P(abierta \mid z_1)}{P(z_2 \mid abierta)P(abierta \mid z_1) + P(z_2 \mid \neg abierta)P(\neg abierto \mid z_1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{15}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

- z_2 disminuye la probabilidad que la puerta este abierta

Acciones

- En general el mundo es **dinámico** debido a:
  - **Acciones realizadas por el robot**,
  - **Acciones realizadas por otros agentes**,
  - O el simple paso del **tiempo** que produce cambios en el mundo
- Cómo podemos **incorporar** estas **acciones**?

Acciones más comunes

- El robot **gira sus ruedas** para moverse
- El robot **usa su manipulador** para agarrar un objeto
- El entorno cambia con el **tiempo** …

- Las acciones **nunca suceden con absoluta certeza**
- En contraste con las mediciones, las **acciones en general incrementan la incerteza**

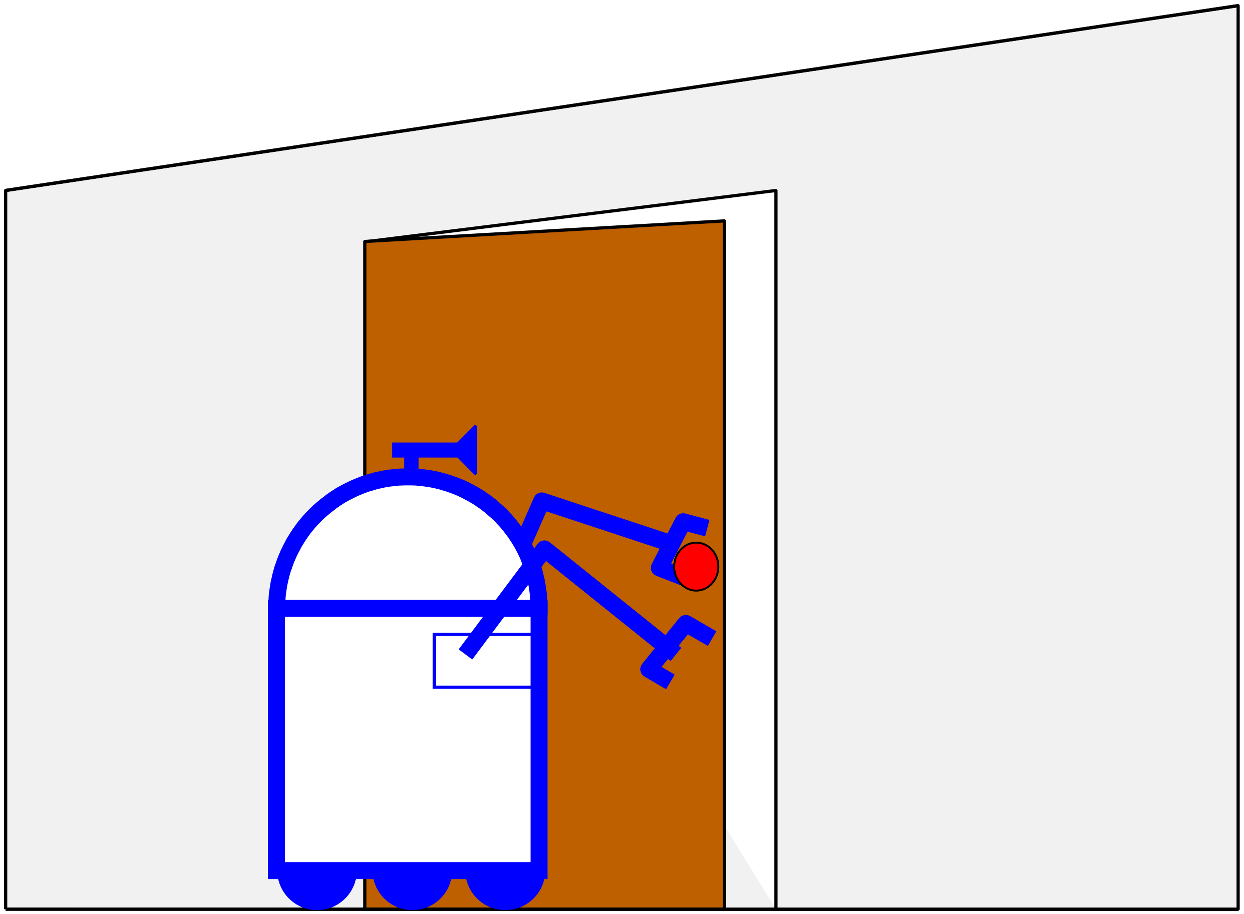
Modelado de acciones

- Para incorporar el resultado de una acción ***u*** al "belief" actual, usamos la función de densidad de probabilidad condicional

$$P(x \mid u, x')$$

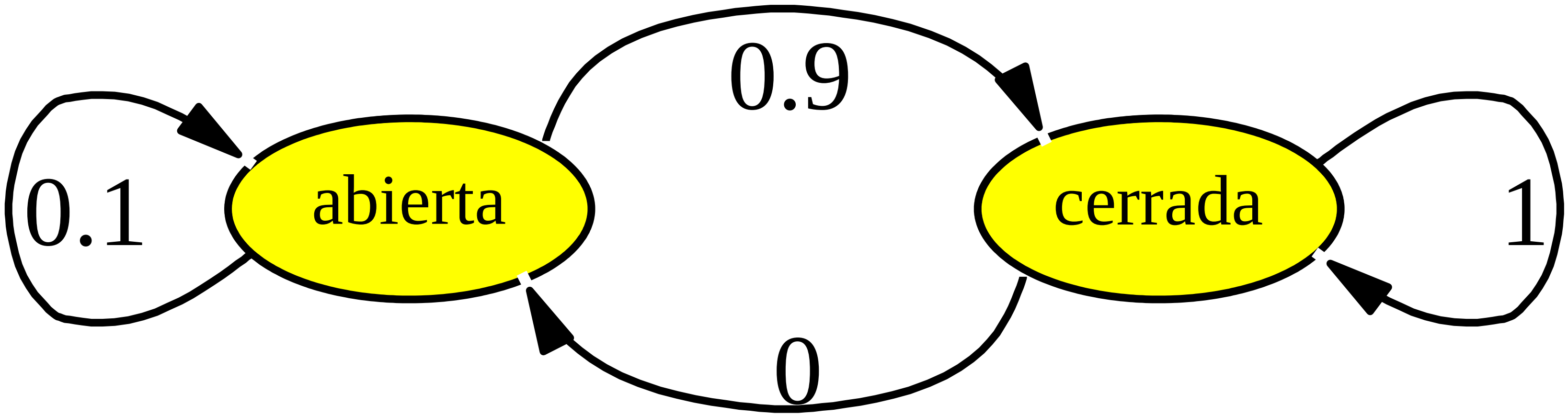
- Este término especifica la densidad de prob. según la cual **ejecutando *u*, el estado cambia de x' a x.**

Ejemplo: Cerrar una puerta



Transiciones de estado

$P(x \mid u, x')$ para u = “cerrar puerta”:



Si la puerta esta abierta, la acción “cerrar puerta” tiene éxito el 90% de las veces

Integrando el resultado de acciones

Caso continuo:

$$P(x \mid u) = \int P(x \mid u, x')P(x')dx'$$

Caso discreto:

$$P(x \mid u) = \sum P(x \mid u, x')P(x')$$

Haremos una suposición de independencia para eliminar la u en el segundo factor de la suma.

Ejemplo: El *Belief* resultante

$$P(cerrado|u) = \sum P(cerrado|u, x')P(x')$$

$$P(abierto|u) = \sum P(abierto|u, x')P(x')$$

Ejemplo: El *Belief* resultante

$$P(cerrado \mid u) = \sum P(cerrado \mid u, x')P(x')$$

$$= P(cerrado \mid u, abierto)P(abierto)$$

$$+ P(cerrado \mid u, cerrado)P(cerrado)$$

$$= \frac{9}{10} * \frac{5}{8} + \frac{1}{1} * \frac{3}{8} = \frac{15}{16}$$

$$P(abierto \mid u) = \sum P(abierto \mid u, x')P(x')$$

$$= P(abierto \mid u, abierto)P(abierto)$$

$$+ P(abierto \mid u, cerrado)P(cerrado)$$

$$= \frac{1}{10} * \frac{5}{8} + \frac{0}{1} * \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$$

$$= 1 - P(cerrado \mid u)$$