

Robótica Móvil

un enfoque probabilístico

SLAM: Localización y Mapeo Simultáneo

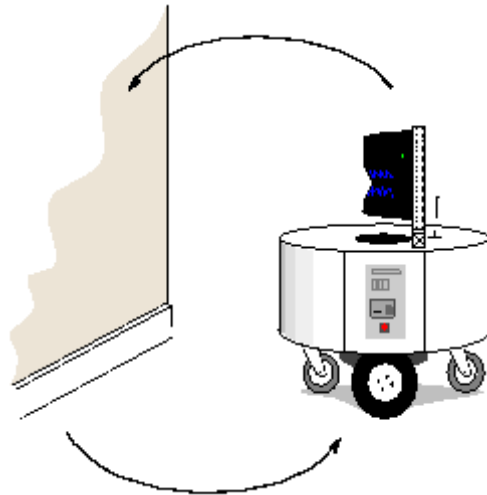
Ignacio Mas

¿Qué es SLAM?

- Estimar la pose del robot y el mapa del entorno al mismo tiempo
- SLAM es difícil, porque:
 - Se necesita un mapa para localización
 - Una buena estimación de pose es necesaria para hacer mapeo
- **Localización:** Inferir pose dado un mapa
- **Mapeo:** inferir un mapa dadas las poses
- **SLAM:** Aprender un mapa y localizar el robot en el mapa simultáneamente

El problema del SLAM

- SLAM se considera un problema estilo “El huevo y la gallina” :
 - Necesito mapa par localizar y
 - Necesito una estimación de pose para hacer un mapa



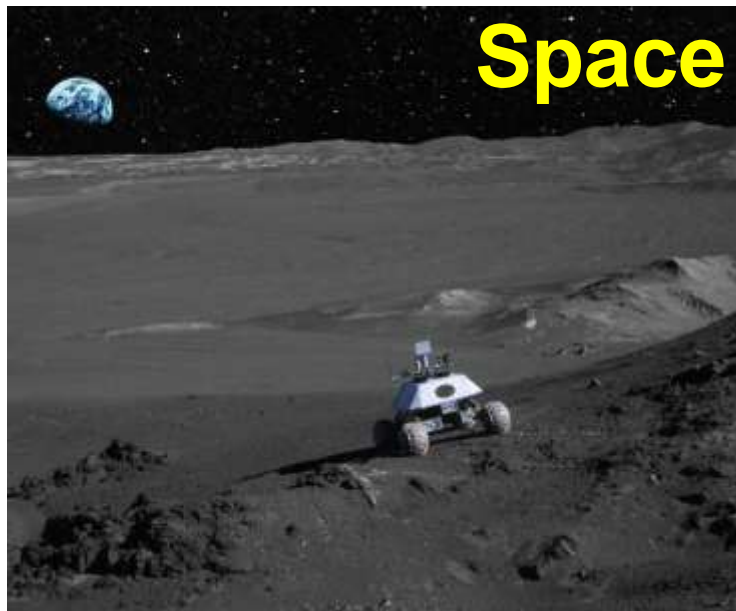
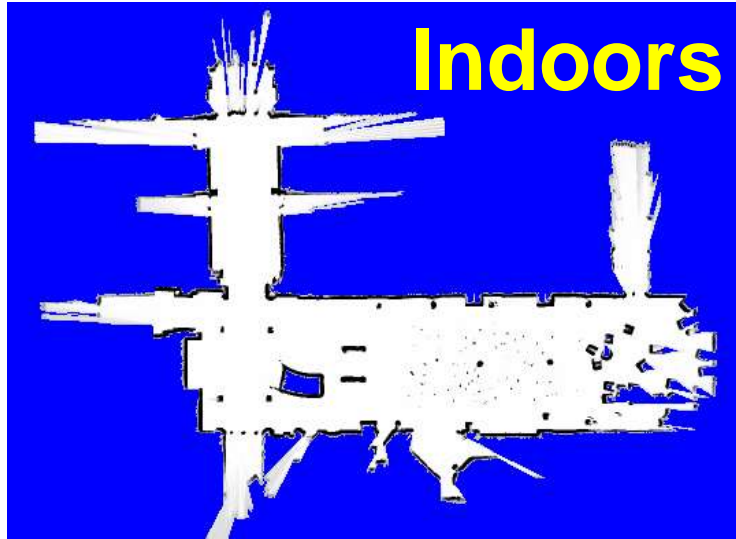
Aplicaciones de SLAM

- SLAM es central en aplicaciones de interiores y exteriores, en tierra, aire, ambiente submarino para vehículos tripulados y no tripulados.

Ejemplos:

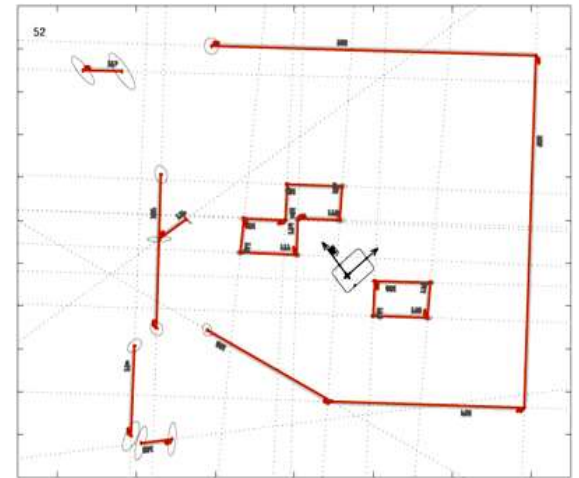
- Domésticos: aspiradoras, cortadoras de césped
- Aire: vigilancia con UAVs
- Submarino: monitoreo de corales
- Bajo tierra: exploración de minas
- Espacial: mapeo de terreno para geolocalización
- Cualquier aplicación que necesite de mapas

Aplicaciones de SLAM



Representaciones de Mapas

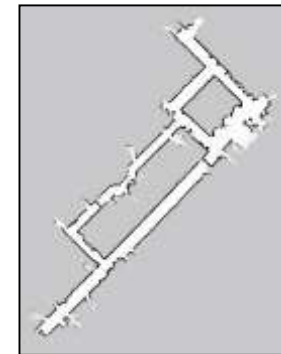
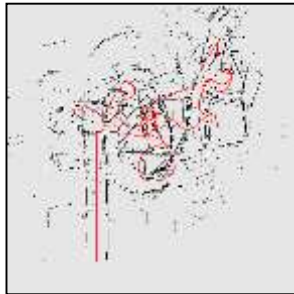
Ejemplos: Mapa de subte, mapa de ciudad, mapa basado en landmarks



Los mapas son modelos **topológicos** y/o **métricos** del entorno

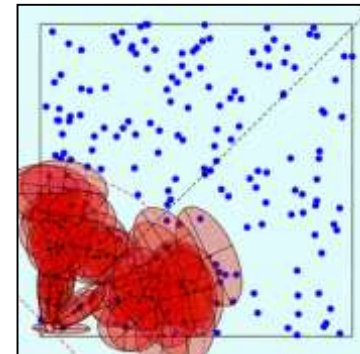
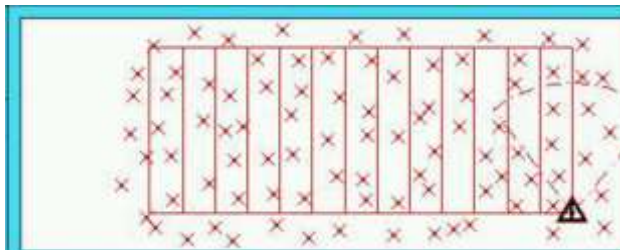
Representaciones de mapas en robótica

- Mapas de grilla o escaneos, 2d, 3d



[Lu & Milios, 97; Gutmann, 98; Thrun 98; Burgard, 99; Konolige & Gutmann, 00; Thrun, 00; Arras, 99; Haehnel, 01; Grisetti et al., 05; ...]

- Basado en landmarks



[Leonard et al., 98; Castelanos et al., 99; Dissanayake et al., 2001; Montemerlo et al., 2002; ...]

El problema del SLAM

- SLAM es considerado un **problema fundamental** para que los robots sean verdaderamente autónomos
- Se han desarrollado una gran variedad de métodos de SLAM
- La mayoría usa conceptos **probabilísticos**
- Los trabajos comenzaron a mediados de los 80s

SLAM basado en Features

Dados:

- Señales de control de robot

$$U_{1:k} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

- Observaciones relativas

$$Z_{1:k} = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$$

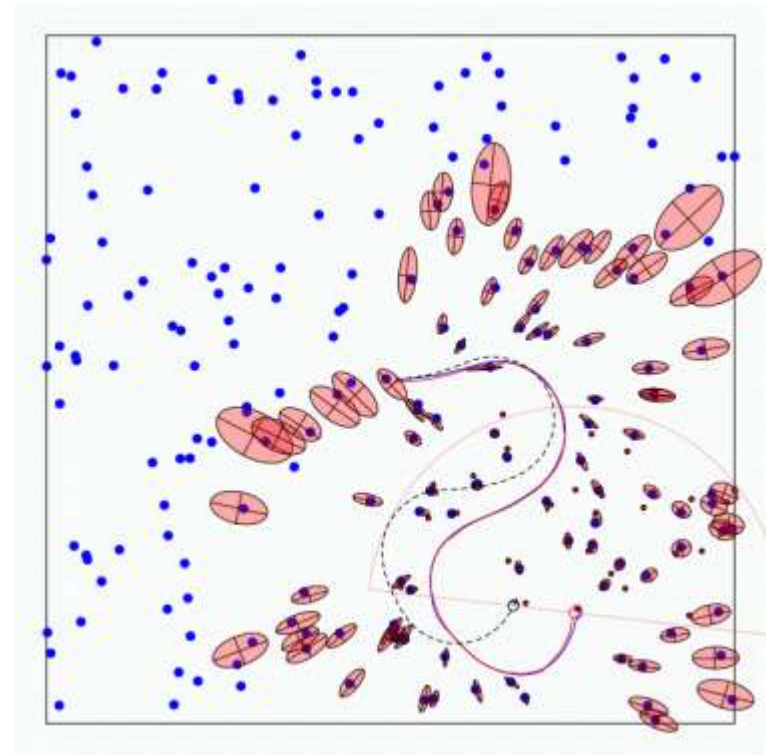
Buscamos:

- Un mapa de features

$$m = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$$

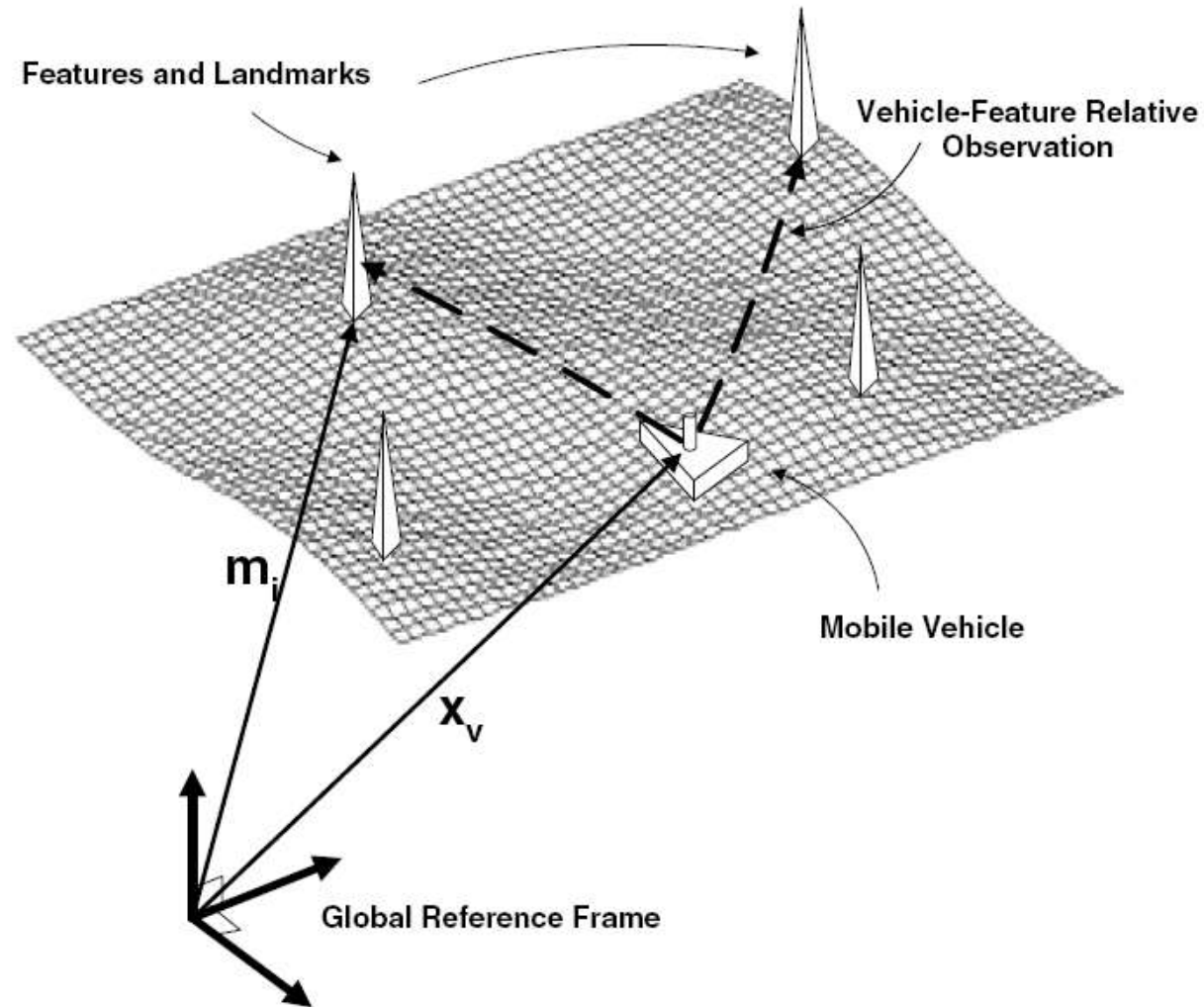
- El recorrido del robot

$$X_{1:k} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$



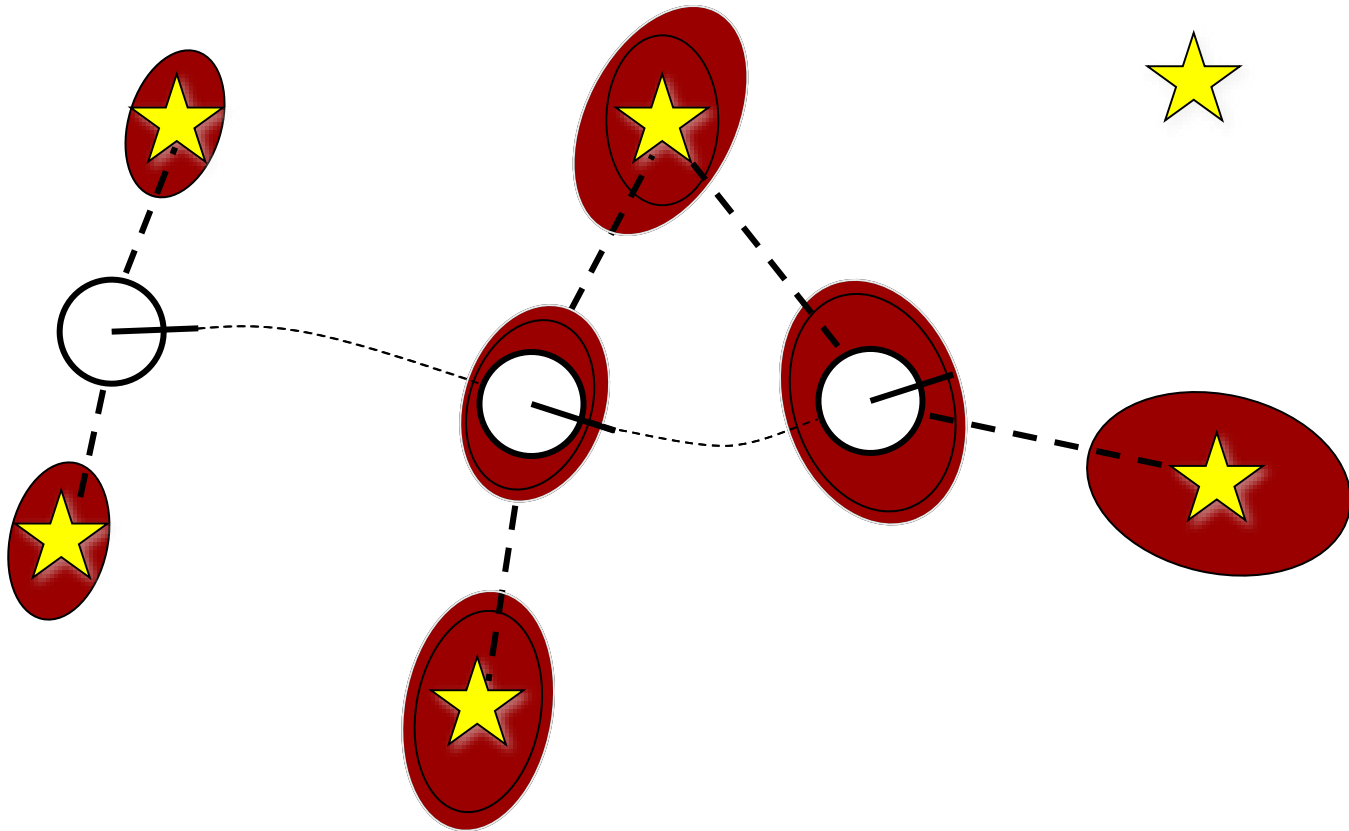
SLAM Basado en Features

- Poses de robot **absolutas**
- Posiciones de landmarks **absolutas**
- Pero solo mediciones **relativas** de landmarks



¿Por qué SLAM es un problema difícil?

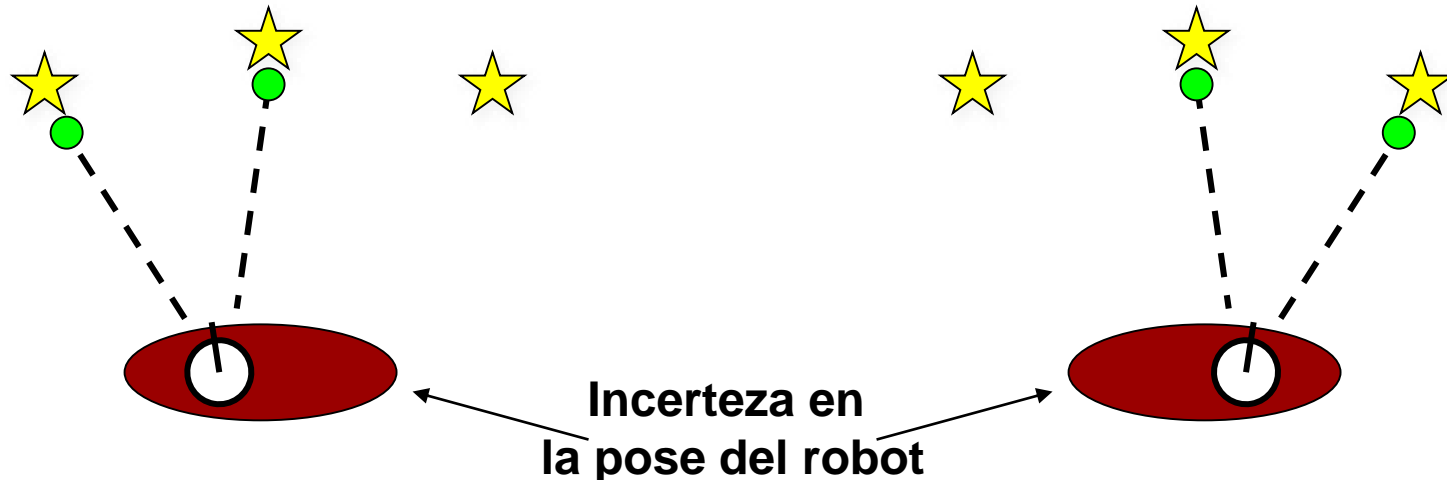
SLAM: el camino del robot y el mapa son ambos **desconocidos!**



El error en la ubicación del robot se correlaciona con errores en el mapa

¿Por qué SLAM es un problema difícil?

- El mapeo entre observaciones y landmarks es desconocido
- La asociación de datos **incorrecta** puede tener consecuencias **graves** (divergencia)



SLAM: Localización y mapeo simultáneo

- Full SLAM:

$$p(x_{0:t}, m \mid z_{1:t}, u_{1:t})$$

Estima el trayecto completo y el mapa

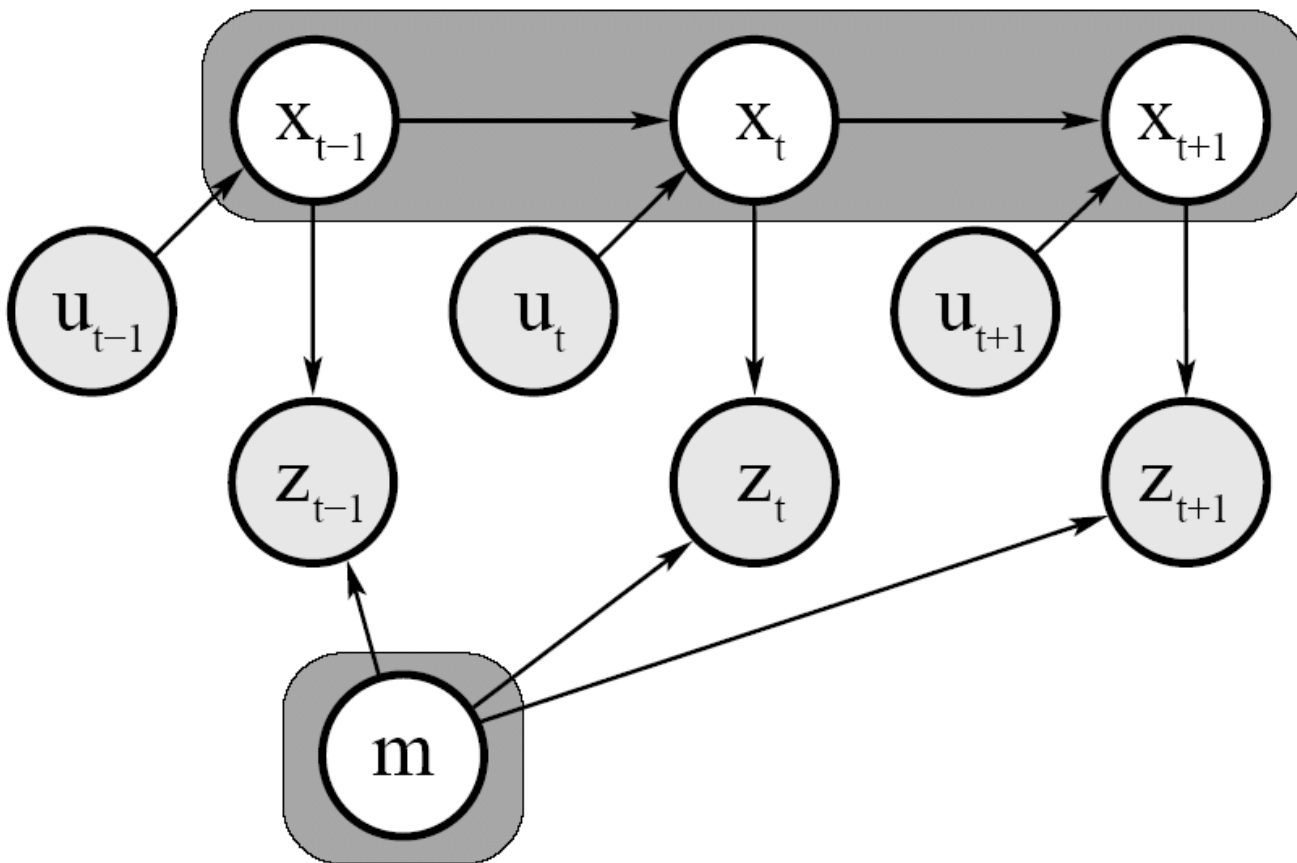
- Online SLAM:

$$p(x_t, m \mid z_{1:t}, u_{1:t}) = \int \int \dots \int p(x_{1:t}, m \mid z_{1:t}, u_{1:t}) dx_1 dx_2 \dots dx_{t-1}$$

Estima la pose más reciente y el mapa

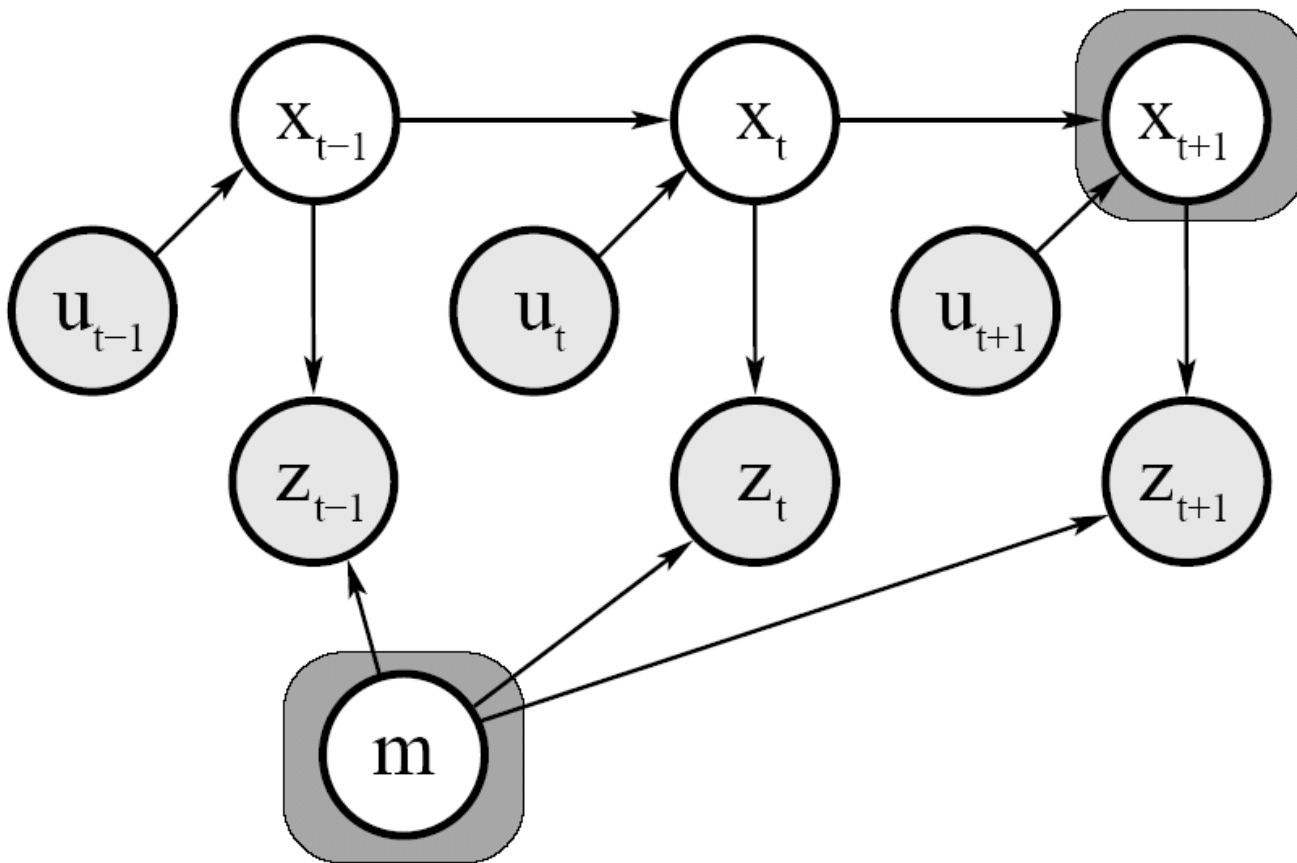
- Las integraciones (marginalizaciones) se hacen recursivamente

Modelo gráfico de Full SLAM



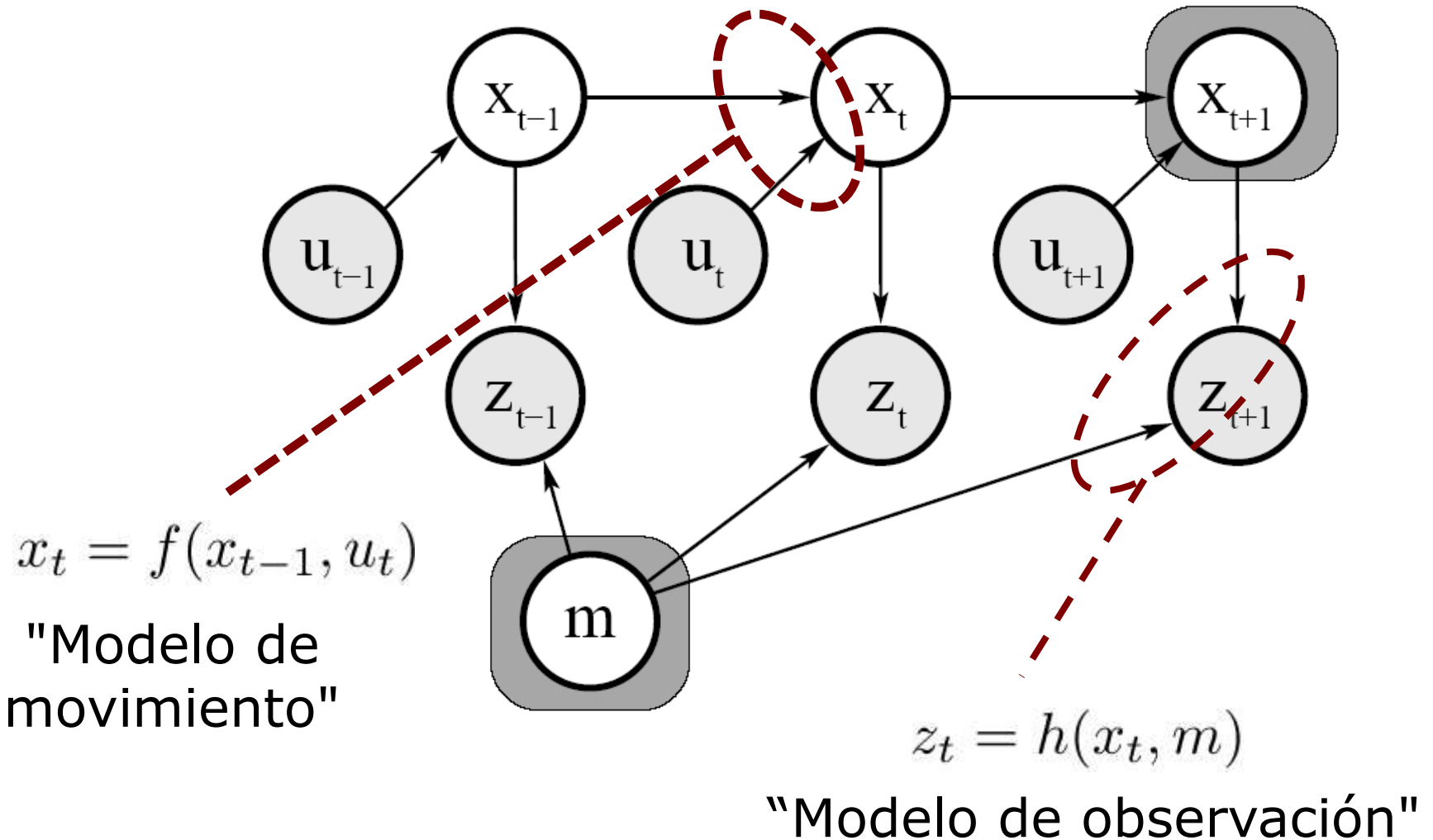
$$p(x_{1:t+1}, m \mid z_{1:t+1}, u_{1:t+1})$$

Modelo gráfico de Online SLAM



$$p(x_{t+1}, m \mid z_{1:t+1}, u_{1:t+1}) = \int \int \dots \int p(x_{1:t+1}, m \mid z_{1:t+1}, u_{1:t+1}) dx_1 dx_2 \dots dx_t$$

Modelo de movimiento y observación



Repaso de algoritmo KF

1. Algoritmo **Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):
2. Predicción:
3. $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
4. $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$
5. Corrección:
6. $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$
7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$
8. $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$
9. Return μ_t, Σ_t

SLAM EKF: Representación de estados

■ Localización

vector de pose 3x1
Matriz de cov. 3x3

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \theta_k \end{bmatrix} \quad \Sigma_k = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy}^2 & \sigma_{x\theta}^2 \\ \sigma_{yx}^2 & \sigma_y^2 & \sigma_{y\theta}^2 \\ \sigma_{\theta x}^2 & \sigma_{\theta y}^2 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}$$

■ SLAM

Los landmarks **extienden** el estado.

Crece el vector de estados y la matriz de covarianza!

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_n \end{bmatrix} \quad \Sigma_k = \begin{bmatrix} \Sigma_R & \Sigma_{RM_1} & \Sigma_{RM_2} & \cdots & \Sigma_{RM_n} \\ \Sigma_{M_1 R} & \Sigma_{M_1} & \Sigma_{M_1 M_2} & \cdots & \Sigma_{M_1 M_n} \\ \Sigma_{M_2 R} & \Sigma_{M_2 M_1} & \Sigma_{M_2} & \cdots & \Sigma_{M_2 M_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{M_n R} & \Sigma_{M_n M_1} & \Sigma_{M_n M_2} & \cdots & \Sigma_{M_n} \end{bmatrix}$$

SLAM EKF: Representación de estados

- Mapa con n landmarks: Gaussiana de dimension $(3+2n)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ m_{1,x} \\ m_{1,y} \\ \vdots \\ m_{n,x} \\ m_{n,y} \end{bmatrix}}_{\mu} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{x\theta} & \sigma_{xm_{1,x}} & \sigma_{xm_{1,y}} & \dots & \sigma_{xm_{n,x}} & \sigma_{xm_{n,y}} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{y\theta} & \sigma_{ym_{1,x}} & \sigma_{ym_{1,y}} & \dots & \sigma_{ym_{n,x}} & \sigma_{ym_{n,y}} \\ \sigma_{\theta x} & \sigma_{\theta y} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta m_{1,x}} & \sigma_{\theta m_{1,y}} & \dots & \sigma_{\theta m_{n,x}} & \sigma_{\theta m_{n,y}} \\ \sigma_{m_{1,x}x} & \sigma_{m_{1,x}y} & \sigma_{\theta} & \sigma_{m_{1,x}m_{1,x}} & \sigma_{m_{1,x}m_{1,y}} & \dots & \sigma_{m_{1,x}m_{n,x}} & \sigma_{m_{1,x}m_{n,y}} \\ \sigma_{m_{1,y}x} & \sigma_{m_{1,y}y} & \sigma_{\theta} & \sigma_{m_{1,y}m_{1,x}} & \sigma_{m_{1,y}m_{1,y}} & \dots & \sigma_{m_{1,y}m_{n,x}} & \sigma_{m_{1,y}m_{n,y}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m_{n,x}x} & \sigma_{m_{n,x}y} & \sigma_{\theta} & \sigma_{m_{n,x}m_{1,x}} & \sigma_{m_{n,x}m_{1,y}} & \dots & \sigma_{m_{n,x}m_{n,x}} & \sigma_{m_{n,x}m_{n,y}} \\ \sigma_{m_{n,y}x} & \sigma_{m_{n,y}y} & \sigma_{\theta} & \sigma_{m_{n,y}m_{1,x}} & \sigma_{m_{n,y}m_{1,y}} & \dots & \sigma_{m_{n,y}m_{n,x}} & \sigma_{m_{n,y}m_{n,y}} \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

- Pueden manejarse cientos de dimensiones

SLAM EKF: Ciclo de Filtro

1. Predicción de estado (odometría)
2. Predicción de la medición
3. Medición
4. Asociación de datos
5. Actualización
6. Integración de nuevas landmarks

SLAM EKF: Ciclo de Filtro

1. Predicción de estado (odometría)
2. Predicción de la medición
3. Medición
4. Asociación de datos
5. Actualización
6. Integración de nuevas landmarks

SLAM EKF: Predicción de estado

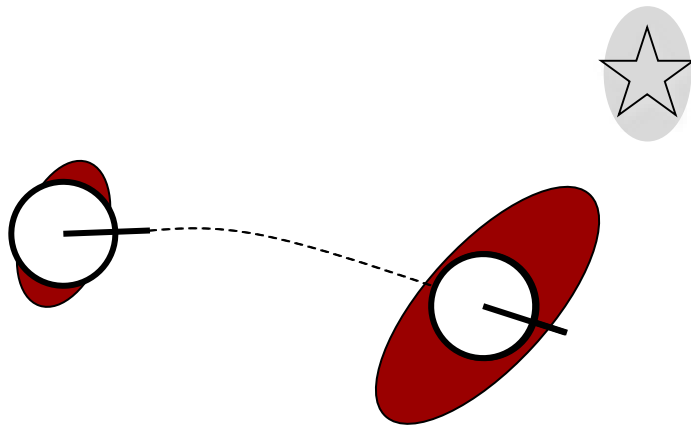
Odometría:

$$\hat{\mathbf{x}}_R = f(\mathbf{x}_R, \mathbf{u})$$

$$\hat{\Sigma}_R = F_x \Sigma_R F_x^T + F_u U F_u^T$$

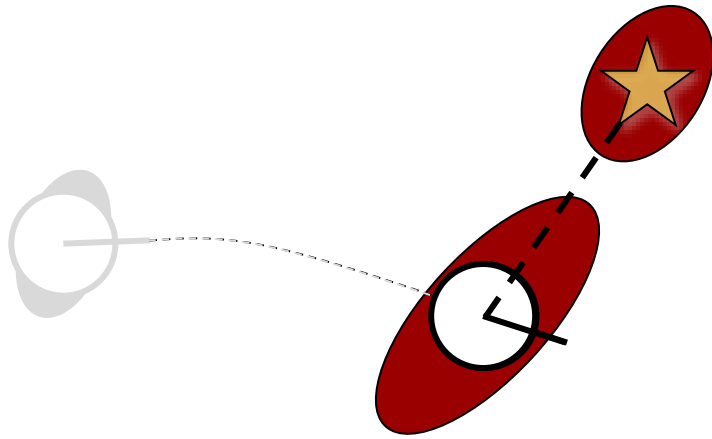
Predicción de covarianza robot-landmark :

$$\hat{\Sigma}_{RM_i} = F_x \Sigma_{RM_i}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_n \end{bmatrix}}_{\mu} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_R & \Sigma_{RM_1} & \dots & \Sigma_{RM_n} \\ \Sigma_{M_1 R} & \Sigma_{M_1} & \dots & \Sigma_{M_1 M_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{M_n R} & \Sigma_{M_n M_1} & \dots & \Sigma_{M_n} \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

SLAM EKF: Predicción de medición



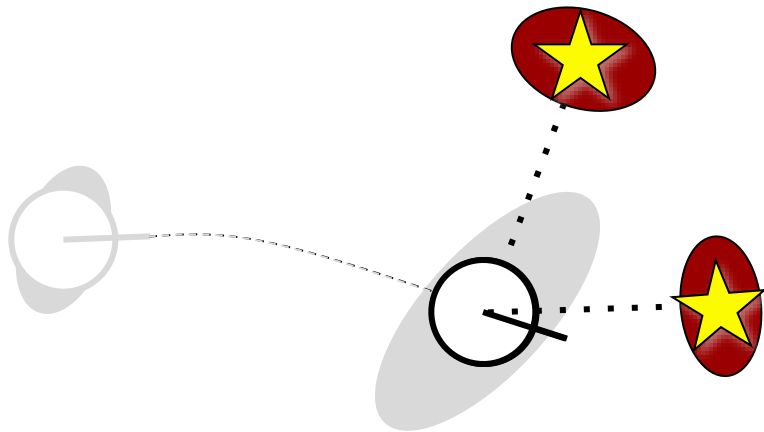
Transformación de
terna Global a Local h

$$\hat{\mathbf{z}}_k = h(\hat{\mathbf{x}}_k)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_n \end{bmatrix}}_{\mu} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_R & \Sigma_{RM_1} & \dots & \Sigma_{RM_n} \\ \Sigma_{M_1 R} & \Sigma_{M_1} & \dots & \Sigma_{M_1 M_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{M_n R} & \Sigma_{M_n M_1} & \dots & \Sigma_{M_n} \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

SLAM EKF: Medición Obtenida

landmark en punto (x,y)

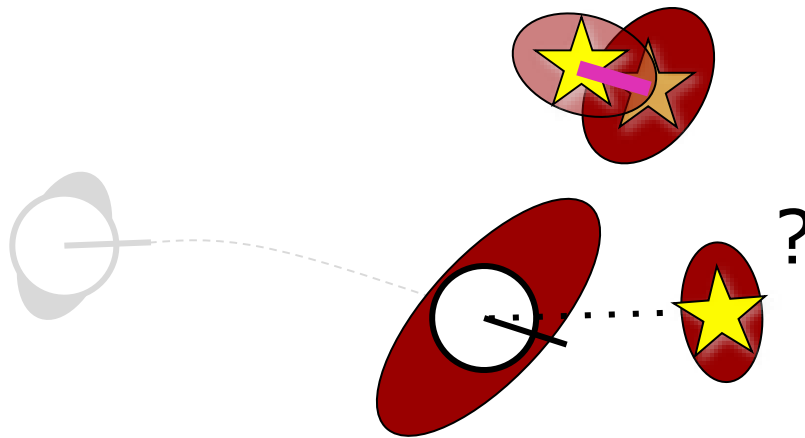


$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$R_k = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_n \end{bmatrix}}_{\mu} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_R & \Sigma_{RM_1} & \dots & \Sigma_{RM_n} \\ \Sigma_{M_1 R} & \Sigma_{M_1} & \dots & \Sigma_{M_1 M_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{M_n R} & \Sigma_{M_n M_1} & \dots & \Sigma_{M_n} \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

SLAM EKF: Asociación de Datos



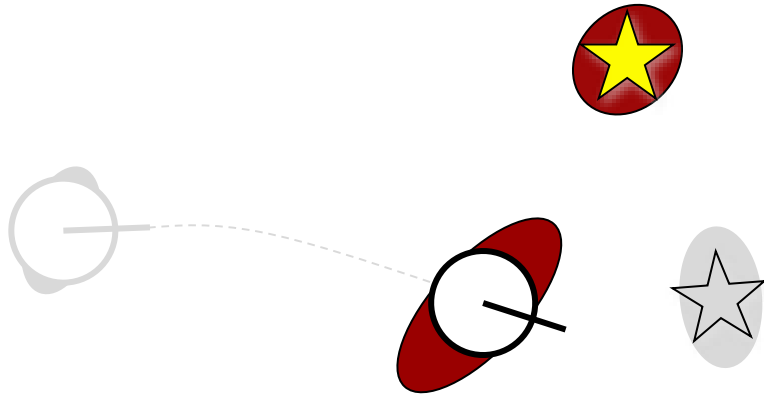
Asocia la medición predicha $\hat{\mathbf{z}}_k^i$ con la observación \mathbf{z}_k^j

$$\begin{aligned}\nu_k^{ij} &= \mathbf{z}_k^j - \hat{\mathbf{z}}_k^i \\ S_k^{ij} &= R_k^j + H^i \hat{\Sigma}_k H^{iT}\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_n \end{bmatrix}}_{\mu} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_R & \Sigma_{RM_1} & \dots & \Sigma_{RM_n} \\ \Sigma_{M_1 R} & \Sigma_{M_1} & \dots & \Sigma_{M_1 M_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{M_n R} & \Sigma_{M_n M_1} & \dots & \Sigma_{M_n} \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

SLAM EKF: Paso de Actualización

Las expresiones típicas del filtro de Kalman



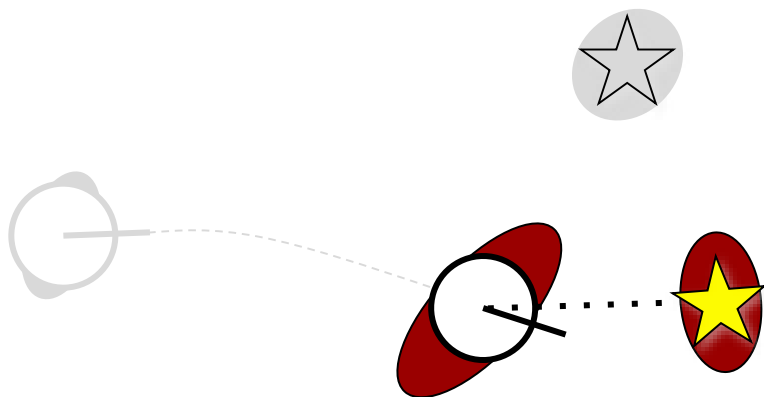
$$K_k = \hat{\Sigma}_k H^T S_k^{-1}$$

$$\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k + K_k \nu_k$$

$$C_k = (I - K_k H) \hat{\Sigma}_k$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_n \end{bmatrix}}_{\mu} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_R & \Sigma_{RM_1} & \dots & \Sigma_{RM_n} \\ \Sigma_{M_1 R} & \Sigma_{M_1} & \dots & \Sigma_{M_1 M_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{M_n R} & \Sigma_{M_n M_1} & \dots & \Sigma_{M_n} \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

SLAM EKF: Nuevas Landmarks



Estado aumentado por

$$\mathbf{m}_{n+1} = g(\mathbf{x}_R, \mathbf{z}_j)$$

$$\Sigma_{M_{n+1}} = G_R \Sigma_R G_R^T + G_z R_j G_z^T$$

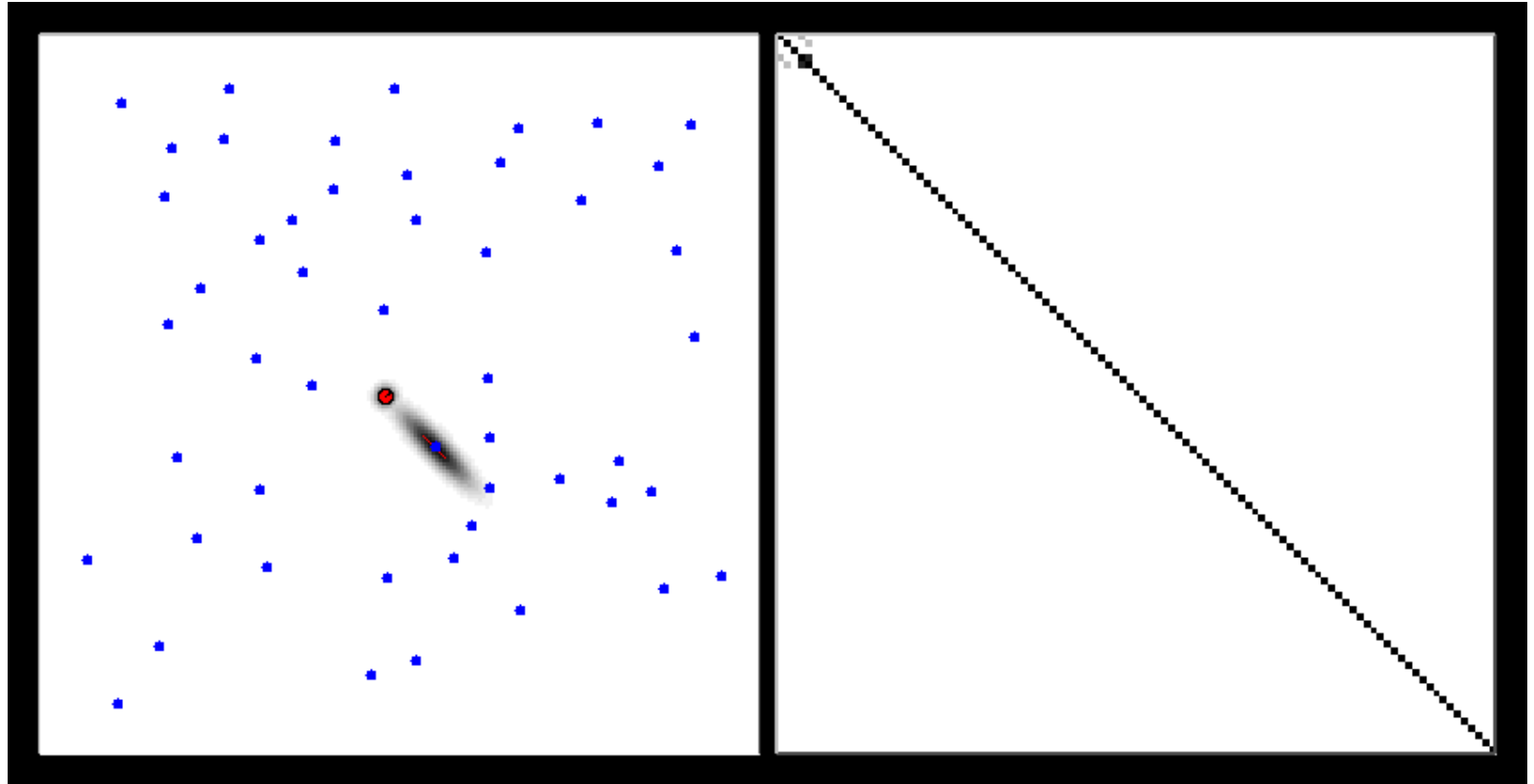
Covarianzas cruzadas:

$$\Sigma_{M_{n+1} M_i} = G_R \Sigma_{R M_i}$$

$$\Sigma_{M_{n+1} R} = G_R \Sigma_R$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_n \\ \mathbf{m}_{n+1} \end{bmatrix}}_{\mu} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_R & \Sigma_{R M_1} & \dots & \Sigma_{R M_n} & \Sigma_{R M_{n+1}} \\ \Sigma_{M_1 R} & \Sigma_{M_1} & \dots & \Sigma_{M_1 M_n} & \Sigma_{M_1 M_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Sigma_{M_n R} & \Sigma_{M_n M_1} & \dots & \Sigma_{M_n} & \Sigma_{M_n M_{n+1}} \\ \Sigma_{M_{n+1} R} & \Sigma_{M_{n+1} M_1} & \dots & \Sigma_{M_{n+1} M_n} & \Sigma_{M_{n+1}} \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

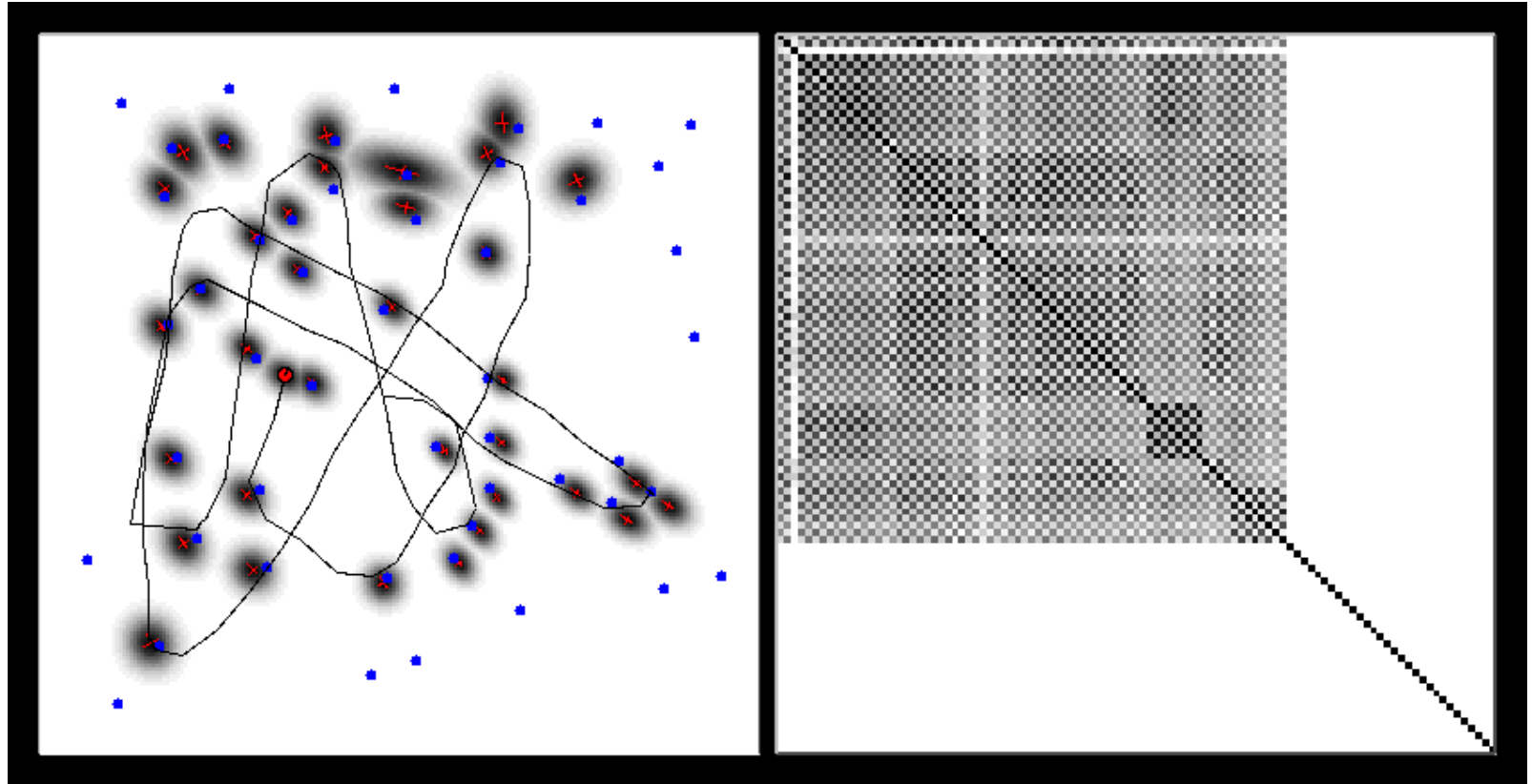
SLAM EKF



Mapa

Matriz de Correlación

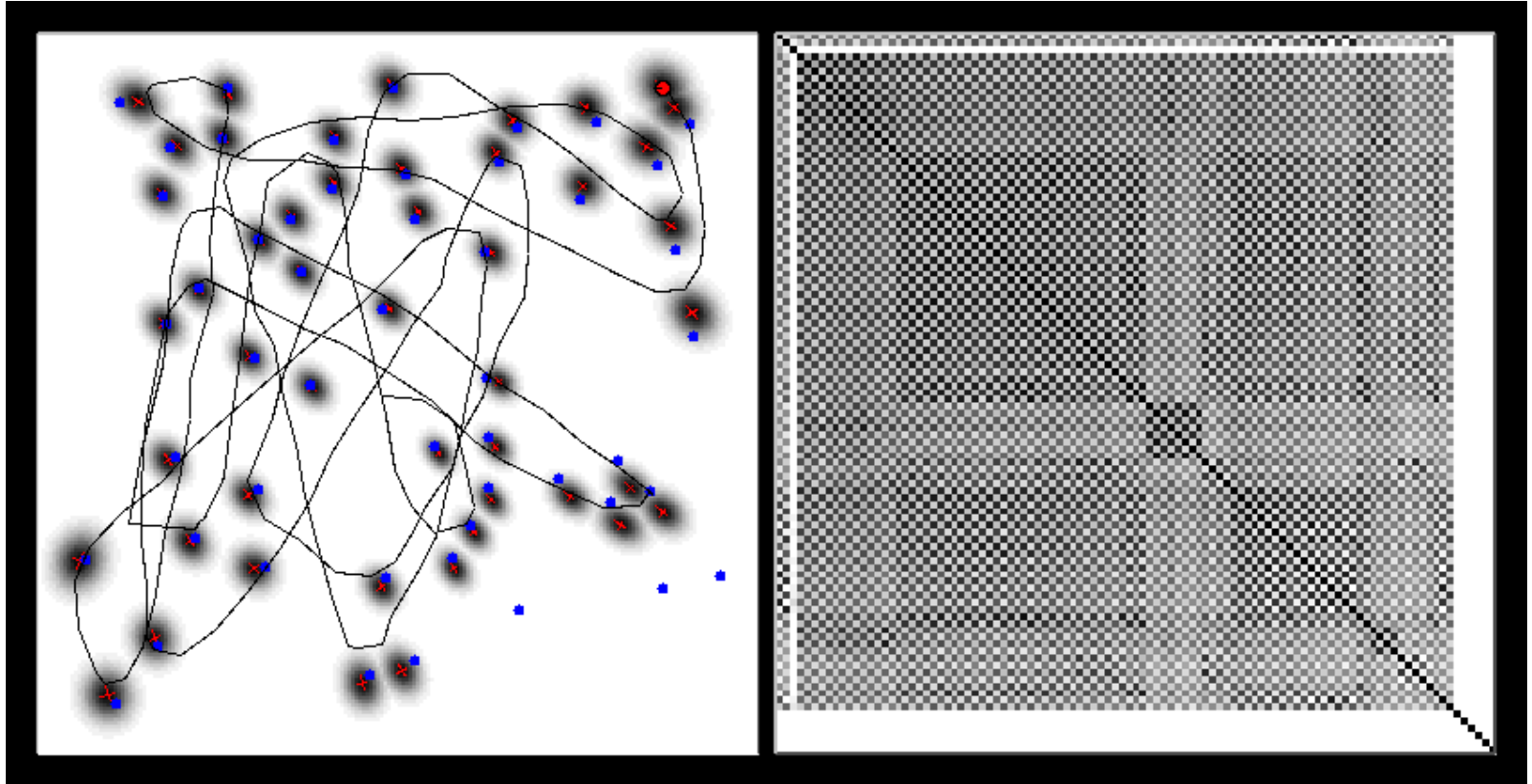
SLAM EKF



Mapa

Matriz de Correlación

SLAM EKF



Mapa

Matriz de Correlación

SLAM EKF: Las correlaciones son importantes

- Qué pasa si despreciamos las correlaciones cruzadas?

$$\Sigma_k = \begin{bmatrix} \Sigma_R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_{M_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{M_n} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Sigma_{RM_i} &= \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \Sigma_{M_i M_{i+1}} &= \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

SLAM EKF: Las correlaciones son importantes

- Qué pasa si despreciamos las correlaciones cruzadas?

$$\Sigma_k = \begin{bmatrix} \Sigma_R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_{M_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{M_n} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Sigma_{RM_i} &= \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \Sigma_{M_i M_{i+1}} &= \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

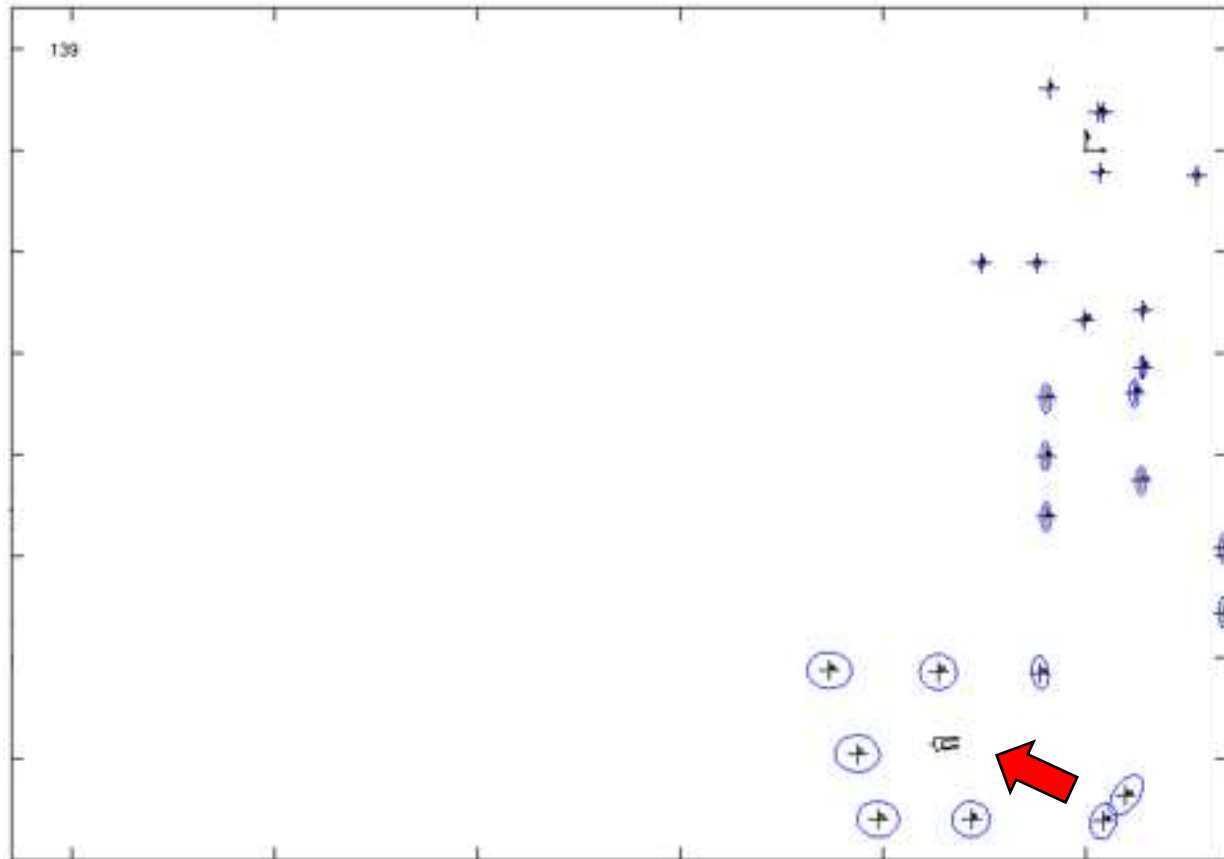
- Las incertezas de landmarks y robot son demasiado optimistas
- La asociación de datos fallaría
- Múltiples entradas en el mapa del mismo landmark
- Mapa inconsistente

SLAM: Cierre del lazo (Loop Closure)

- **Reconocer un área ya mapeada**, en general, después de una vuelta de exploración (el robot “cierra el lazo”)
- Estructuralmente igual a la asociación de datos, pero
 - Altos niveles de ambigüedad
 - Simetrías del entorno
- Las incertezas colapsan después de cerrar un lazo (ya sea un cierre correcto o no)

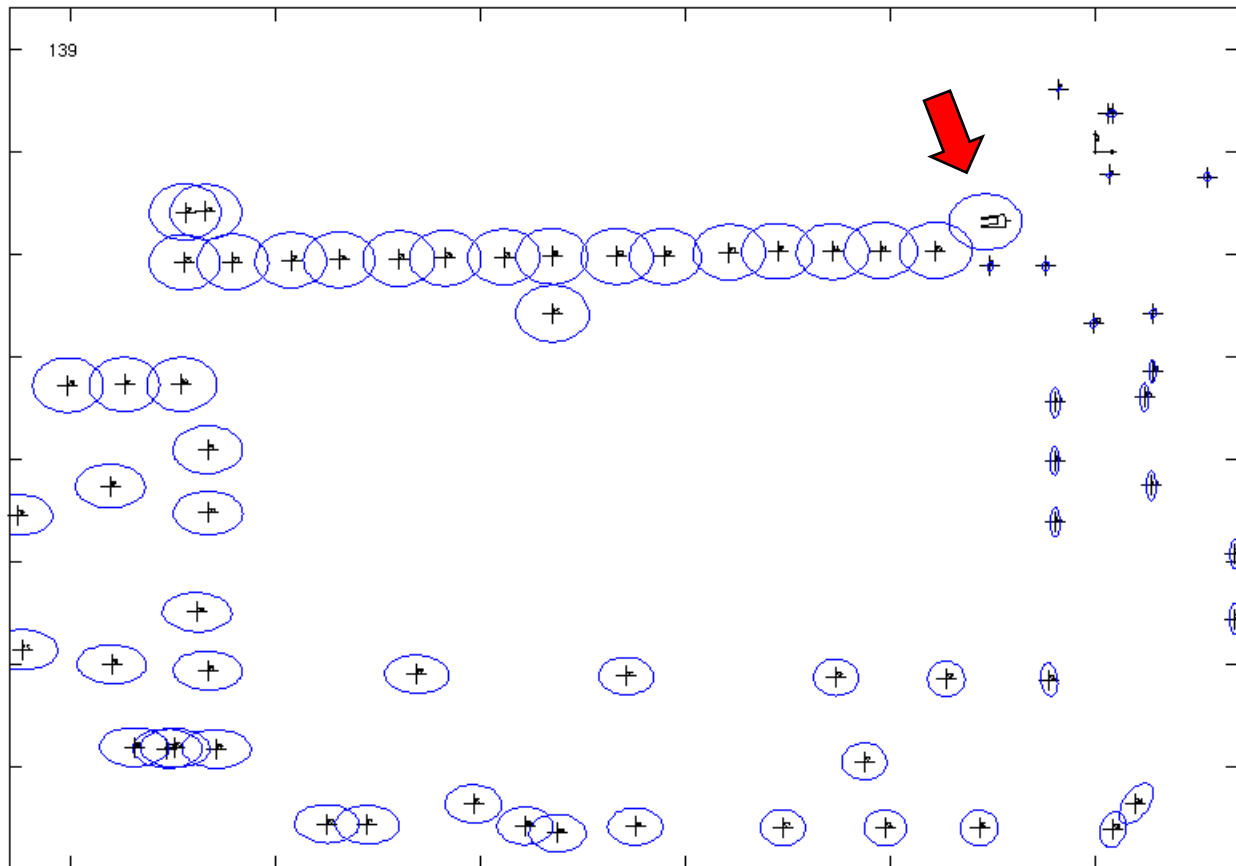
SLAM: Cierre del Lazo

- Antes del cierre del lazo



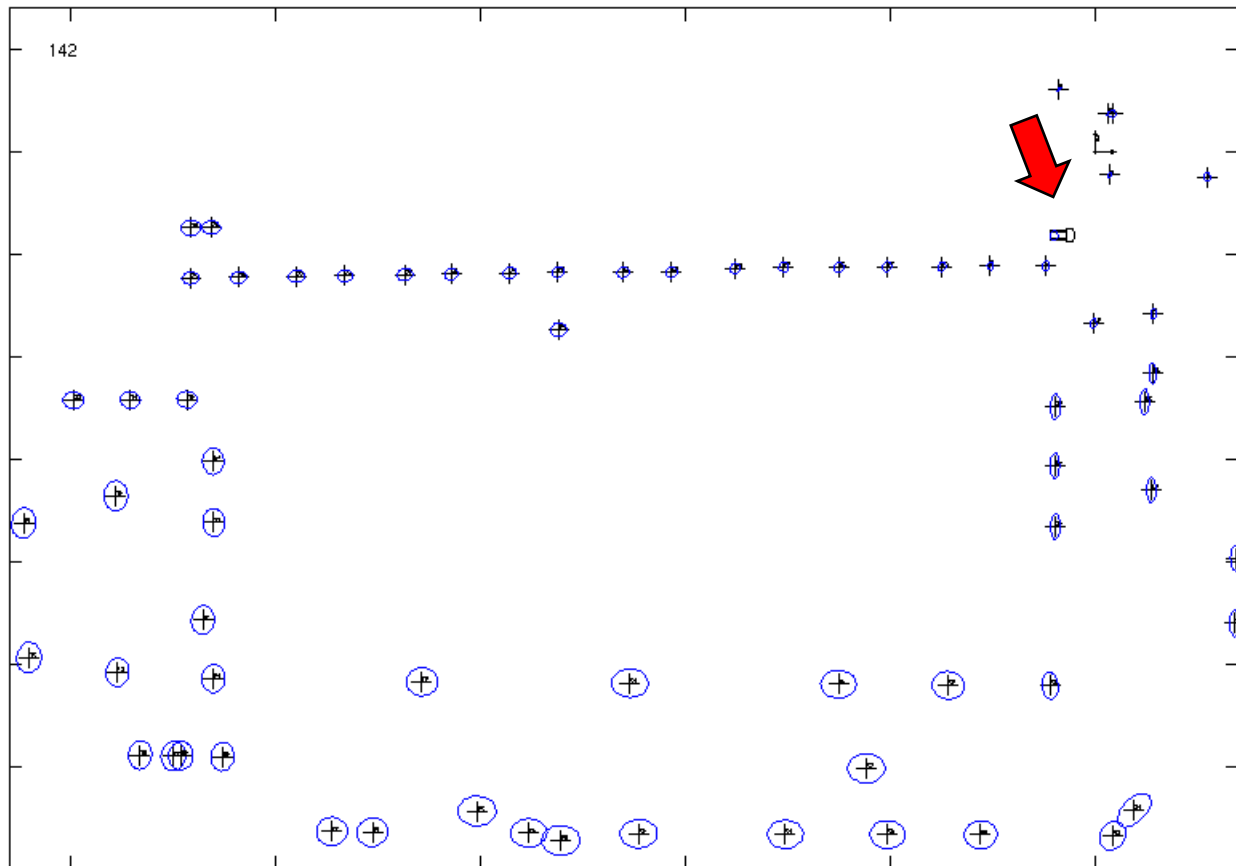
SLAM: Cierre del Lazo

- Antes del cierre del lazo



SLAM: Cierre del Lazo

- Después del cierre del lazo

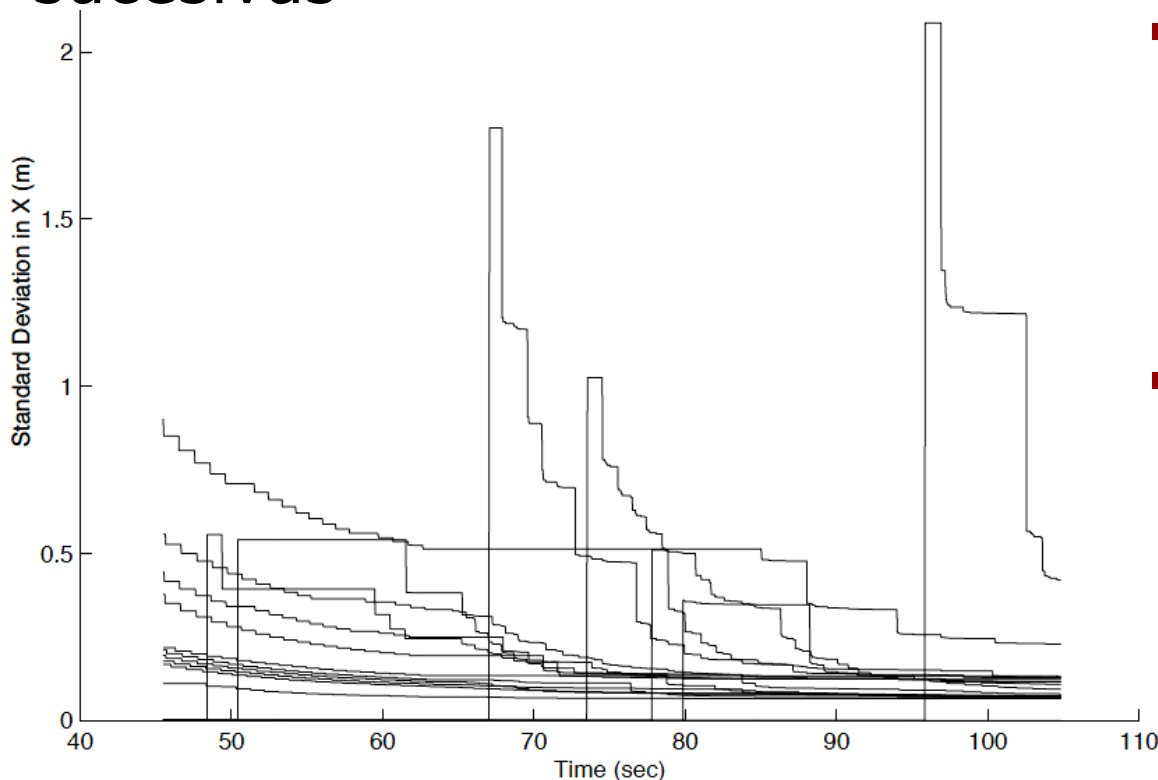


SLAM: Cierre del Lazo

- Al visitar áreas ya mapeadas, las incertezas en la estimación del robot y los landmarks se **reduce**
 - Esto puede usarse cuando se **explora** un entorno para obtener mejores mapas (más precisos)
 - Exploración: el problema de **dónde** adquirir **nueva información**
- Luego veremos más de este tema

SLAM-KF: Propiedades (Caso Lineal)

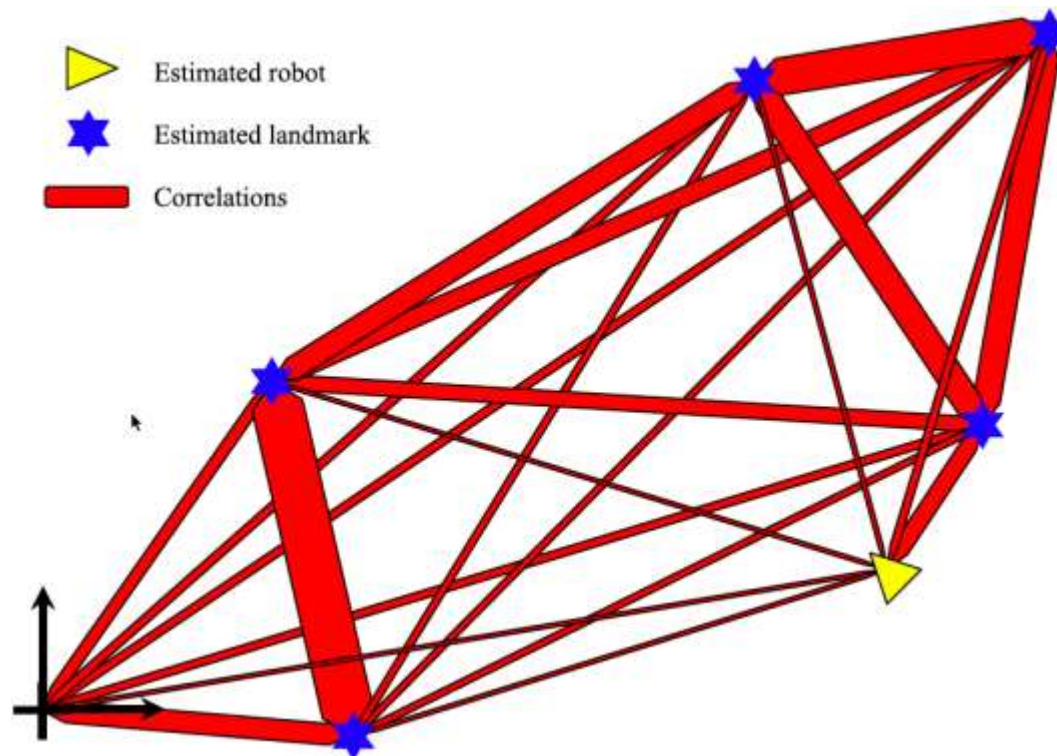
- El **determinante** de cualquier sub-matriz de la matriz de covarianza del mapa **disminuye monótonamente** al agregar observaciones sucesivas



- Cuando una nueva landmark es inicializada, su **incerteza** es **maxima**
- La incerteza del landmark **disminuye monótonamente** con cada nueva observación

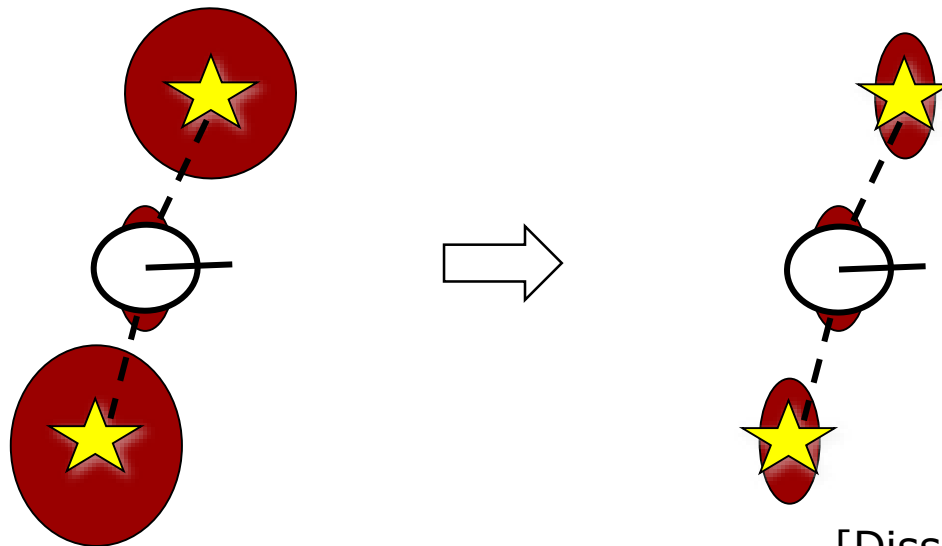
SLAM-KF Propiedades (Caso Lineal)

- En el límite, las estimaciones de landmarks están totalmente **correlacionadas**



SLAM-KF Propiedades (Caso Lineal)

- En el límite, la **covarianza** asociada a la estimación de posición de cada landmark está determinada sólo por la **covarianza inicial en la estimación de la posición del vehículo**.



SLAM EKF - Ejemplo: Victoria Park Dataset

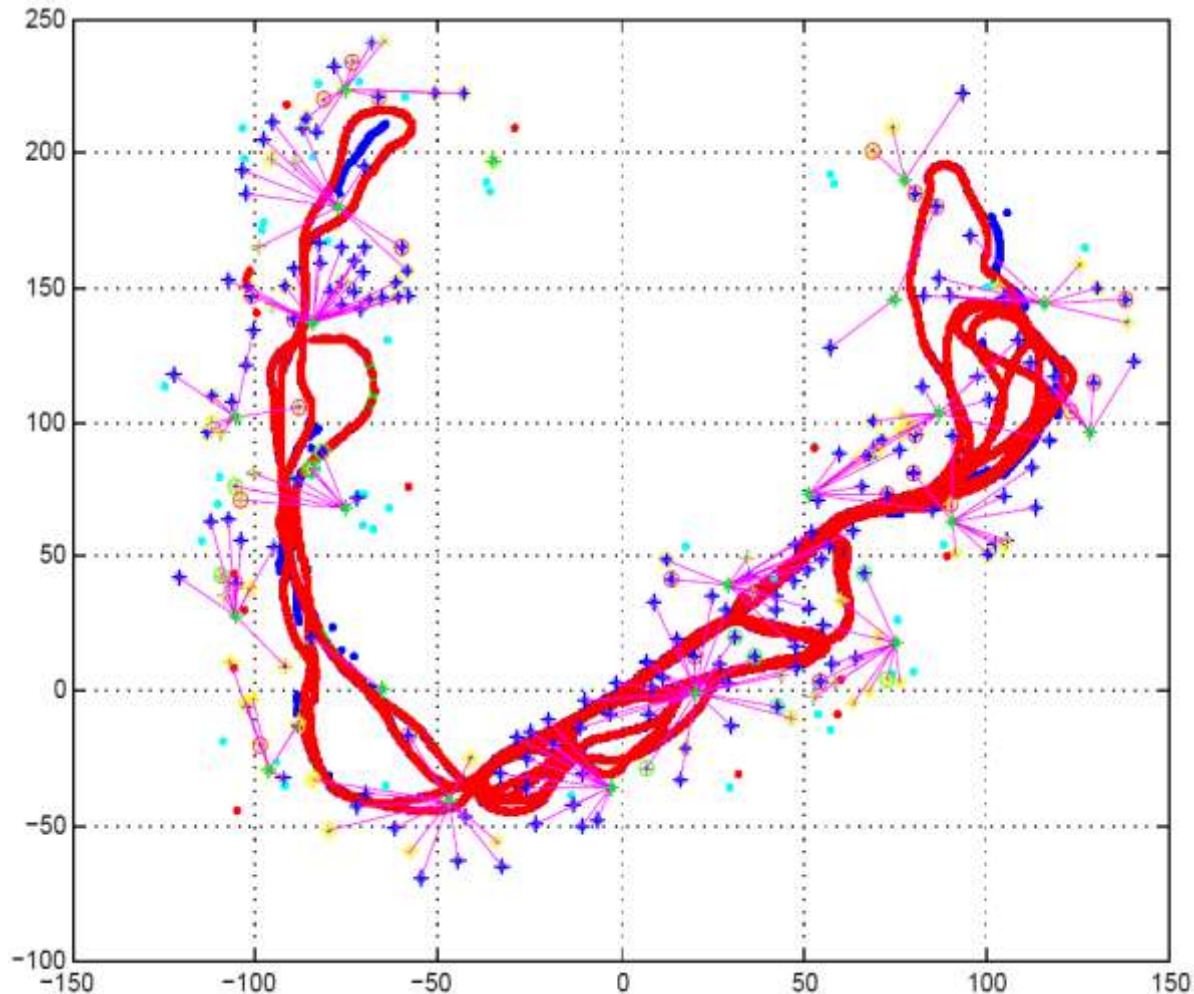


Victoria Park: Toma de datos



[cortesía de E. Nebot]

Victoria Park: Trayectoria Estimada



[cortesía de E. Nebot]

Victoria Park: Landmarks



[cortesía de E. Nebot]

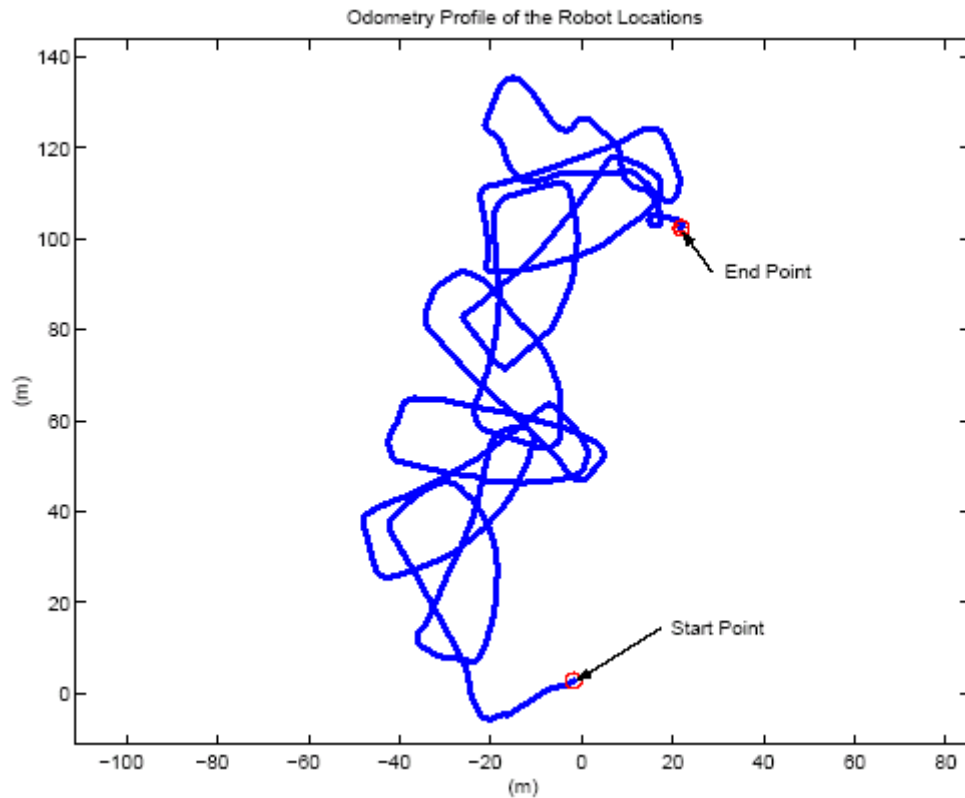
SLAM EKF: Ejemplo

Cancha de tenis

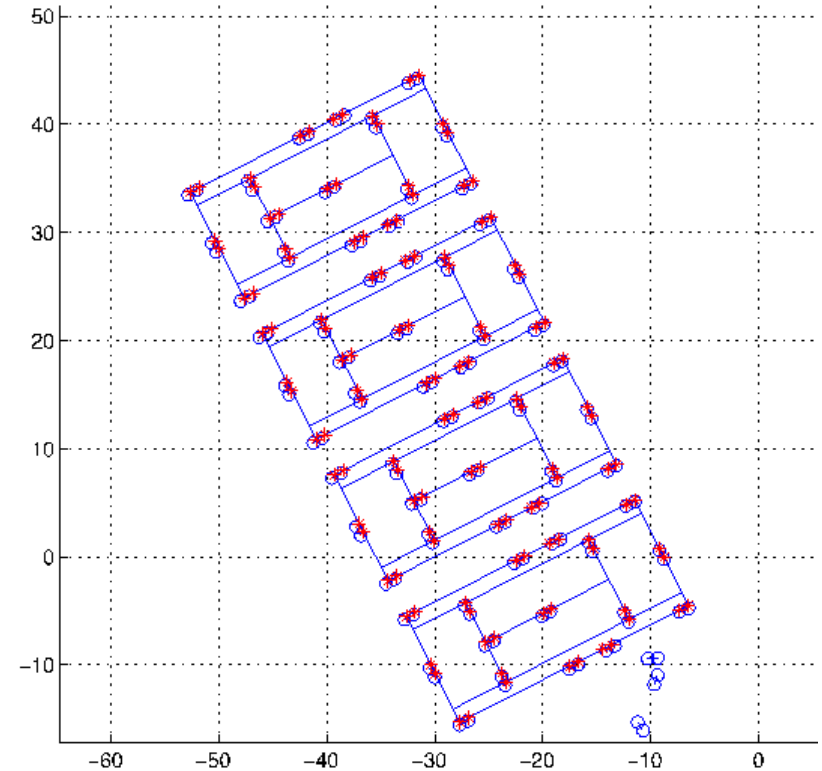


SLAM EKF: Ejemplo

Cancha de tenis



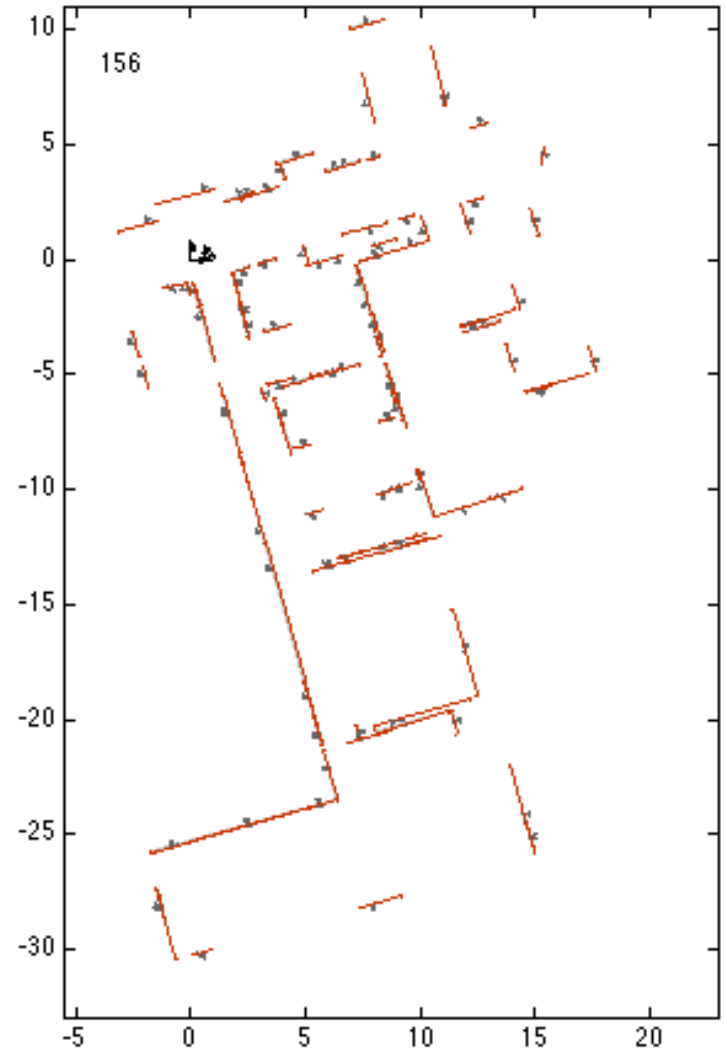
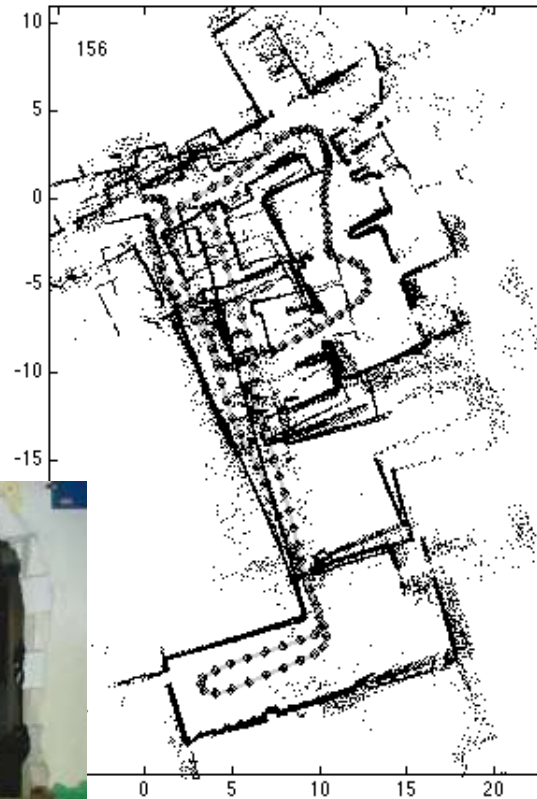
odometría



Estimación de Landmarks

Ejemplo SLAM EKF: Features de líneas

- KTH Bakery Data Set



SLAM-EKF: Complejidad

- Costo por paso: $O(n^2)$, donde n es el número de landmarks:
- Costo total para hacer un mapa con n landmarks: $O(n^3)$
- Consumo de memoria: $O(n^2)$
- Problema: Se hace computacionalmente intratable para mapas grandes!
- Existen variantes para evitar esto

Técnicas de SLAM

- SLAM EKF
- FastSLAM
- Basado en grafos (graph-based SLAM)
- SLAM topológico (reconocimiento de lugares)
- Macheo de escaneos / odometría visual (mapas localmente consistentes)
- Aproximaciones de SLAM: sub-mapas locales, filtros de información extendidos malos, links malos...
- ...

SLAM EKF: Resumen

- La primera solución al SLAM
- Se puede probar convergencia para el caso lineal gaussiano
- Puede divergir si las no-linealidades son grandes (y el mundo es no-lineal...)
- Solo puede lidiar con un solo modo
- Exitoso para entornos de mediana escala
- Existen aproximaciones para reducir la complejidad computacional