1. Найти собственные векторы

и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda) * (6-\lambda) - 2 * (-6) = 0$$
$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2$$

Определитель:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases}$$

=>> $x_1 = -1{,}5x_2$

При $x_1 = 1$ =>> $x_2 = -1{,}5$: вектор (1;-1,5)

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

=>> $x_1 = -2x_2$

При $x_1 = 2$ =>> $x_2 = -1$: вектор (2;-1)

> **2.** Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей
>
> $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
>
> Показать, что **любой** вектор является для него собственным.

Собственные значения:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

В такой логике X1 и X2 должны принять любое значение

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

=>>

$$\begin{cases} -x_1 = \lambda * x_1 \\ -x_2 = \lambda * x_2 \end{cases}$$

=>> оба X могут принимать любое значение =>> любой вектор является собственным

3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 1 + 1 = \lambda \\ -1 + 3 = \lambda \end{cases}$=>> $\lambda = 2$ =>> вектор x=(1,1) собственный

4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 * 3 + 3 * (-3) + 0 - (-4) = 3\lambda \\ 3 * 3 + 0 * (-3) + 0 * (-4) = -3\lambda \\ 0 * 3 + 0 * (-3) + 3 * (-4) = -4\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = \lambda \\ -3 = \lambda \\ 3 = \lambda \end{cases}$$

=>> вектор x=(3,-3,-4) НЕ является собственным