ДЗ УРОКА 6

1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вторая строка – (третья строка * 2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & -10 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Третья строка - первая

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + 5x_3 - x_4 = -10 \\ -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_4 = c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2c = 0 \\ x_2 = -5x_3 + c + 10 \\ x_3 = -2 + \frac{3}{2}c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 + 2c \\ x_2 = 10 - 7{,}5c + c + 10 \\ x_3 = -2 + \frac{3}{2}c \end{cases}$$

$$x_1 + 10 - 7{,}5c + c + 10 - \left(-2 + \frac{3}{2}c\right) - 2c = 0$$

$$x_1 = -10 + 7{,}5c - c - 10 + \left(-2 + \frac{3}{2}c\right) + 2c$$

$$x_1 = 10c - 22$$

$$\begin{cases} x_1 = 10c - 22 \\ x_2 = 20 - 6{,}5c \\ x_3 = -2 + \frac{3}{2}c \end{cases}$$

При С = 0

$$\begin{cases} x_1 = -22 \\ x_2 = 20 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

2. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2. \end{cases}$

А)

rankA=rankA~=n, где n =3, система совместима и имеет единственное решение;

Б)

если rankA<rankA~, то система несовместна;

В)

если rankA=rankA~<n, то система имеет бесконечное количество решений;

3. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

rankA=rankA~=n, где n =4, система совместима и имеет единственное решение;

4. Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right).$$

Найти соотношение между параметрами a, b и c, при которых система является несовместной.

Вторая строка – (Первая строка * 4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 7 & 8 & 9 & c \end{pmatrix}$$

Третья строка – (первая * 7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -4 & -12 & c-7a \end{pmatrix}$$

Третья строка * 3 – Вторая строка * 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & a \\ 0 & -3 & -6 & & b-4a \\ 0 & 0 & 12 & & 3c-5a-4b \end{pmatrix}$$

Несовместима при $-3c + 5a - 4b \neq 12$

ДЗ УРОКА 7

1. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

А)

$$detA = -4 + 6 = 2 \neq 0$$

Системы совместима

$$detA_1 = -4 + 14 = 10$$

$$detA_2 = 7 - 3 = 4$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 2$$

Б)

$$detA = 2 * 1 * 1 + (-1) * (-3) * 2 + 5 * 1 * 4 - 2 * 1 * 5 - 4 * (-3) * 2 - 1 * 1 * (-1) =$$

$$= 2 + 6 + 20 - 10 + 24 + 1 = 43 \neq 0$$

Системы совместима

$$detA_1 = 10 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 5 \cdot (-2) \cdot 4 - 5 \cdot 1 \cdot 1 - 10 \cdot (-3) \cdot 4 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 = 10 + 3 - 40 - 5 + 120 - 2 = 86$$

$$detA_2 = 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 10 \cdot (-3) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 1 = -4 - 60 + 5 + 20 + 6 - 10 = -43$$

$$detA_3 = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 + 10 \cdot 1 \cdot 4 - 10 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot 4 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 = 2 + 4 + 40 - 20 + 16 + 1 = 43$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1$$

2*. Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов:

а)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$$

А)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

Третья – первая*3

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix}$$

Вторая – первая *2

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix}$$

Третья – вторая*4

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$$

Вторая - первая*2

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$$

Третья - первая*3

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$$

Четвертая - первая*4

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix}$$

Третья - вторая*5

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix}$$

Четвертая - вторая *6

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix}$$

Четвертая - третья *7

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

3*. Решить систему линейных уравнений методом LU-разложения

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

```
import numpy as np
import scipy.linalg

x = np.array([[2, 1, 3], [11, 7, 5], [9, 8, 4]])
y = np.array([1, -6, -5])

lu, piv = scipy.linalg.lu_factor(x)
z = scipy.linalg.lu_solve((lu, piv), y)

print(f'lu:\n{lu}\n')
print(f'piv:\n{piv}\n')
```

4*. Решить систему линейных уравнений методом Холецкого

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$$

```
import numpy as np
import scipy.linalg

x = np.array([[81, -45, 45], [-45, 50, -15], [45, -15, 38]])
y = np.array([531, -460, 193])

cholesky = scipy.linalg.cho_factor(x)
z = scipy.linalg.cho_solve(cholesky, y)

print(f'Ax:\n{x @ z}\n')
print(f'Ax - b:\n{x @ z - y}\n')
```

5*. Написать на Python программу с реализацией одного из изученных алгоритмов решения СЛАУ.