Universidad Adolfo Ibañez Semestre 2, 2022
Master of Science in Data Science Tarea 2
Nombre: Álex Álvarez, Alfonso Tobar

Tarea 1: Grafos en Data Science

Pregunta 1

Si $\bar{w_1}, ..., \bar{w_n}$ son base para $\mathbb{R}^n$ quiere decir que las Bases son Linealmente independientes.

Si suponemos que $\bar{x}$ se puede escribir de dos formas distintas:

$$\vec{x} = c_1\vec{x_1}, ..., c_n\vec{x_n} \tag{1}$$
$$\vec{x} = d_1\vec{x_1}, ..., d_n\vec{x_n} \tag{2}$$

Si restamos (1) y (2):

$$\vec{0} = (c_1 - d_1)\vec{x_1}, ..., (c_1 - d_1)\vec{x_n}$$

Lo cual implica que $c_i - d_i = 0 \implies c_i = d_i$, por lo cual queda demostrado que existe una manera única de combinar linealmente las bases.

Pregunta 2

El proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt sirve para, a partir de un conjunto de vectores generadores de un espacio vectorial con producto interno, obtener un conjunto de vectores ortogonales, tal que su span recupere el mismo espacio vectorial. Entonces el conjunto obtenido será base ortogonal de tal espacio vectorial. Luego, normalizando cada uno de los vectores, se obtiene una base ortonormal.

Proceso:

Dado un espacio vectorial V contenido en $\mathbb{R}^n$ y cualquier conjunto de vectores $v_1, ...v_n \in \mathbb{R}^n$ que lo generen:

Se toma cualquiera de los vectores dados, diremos v_1 y se toma como referencia para determinar $u_1 = v_1$.
Luego, u_2 se toma como la diferencia entre v_2 y la proyección de v_2 sobre u_1, por lo que será ortogonal a u_1.
u_3 será la diferencia entre v_3 y el vector que resulta de proyectar a v_3 sobre el plano generado por u_1 y u_2, por lo que u_3 será ortogonal a u_1 y u_2.
Repetir el proceso hasta generar u_n con la diferencia entre v_n y el vector resultante de proyectar sobre el hiperplano generado por los $n-1$ vectores antes definidos.

Los vectores $u_1, ...u_n$ resultantes son base ortogonal para el espacio vectorial V contenido en $\mathbb{R}^n$. Finalmente, al normalizar el cada uno de los vectores del conjunto, se obtiene una base ortonormal.

Pregunta 3

Sea $\vec{x}$ un vector perteneciente a $\mathbb{R}^m$. Sea la matriz $A_{n\times m}$:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ A_{*,1} & \dots & A_{*,m} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Donde $A_{i,k} \in \mathbb{R}, \forall i, j$

Luego $A\vec{x}$ es la combinación lineal de los m vectores columna de A con los m componentes de $\vec{x}$.

$$A\vec{x} = A_{*,1}x_1 + ... + A_{*,m}x_m = T(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo que, toda transformación lineal T, de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$, cumple con:

- $T(\bar{x} + \bar{y}) = T(\bar{x}) + T(\bar{y})$, para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$.
- $T(\alpha\bar{x}) = \alpha T(\bar{x})$, para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Figura 1: Transformación Lineal.

Pregunta 4

Si suponemos una $A_{n\times m}$ y $B_{m\times p}$. Se tiene que la Multiplicación AB se puede escribir en función de productos externos como:

$$AB = A_{*,1} \otimes B_{1,*} + ... + A_{*,m} \otimes B_{m,*}$$

Luego cada término de las sumas por propiedad del Producto Externo tiene Rango 1 ya que $Rank(a \otimes b) = 1$ para cualquier par a, b.

Si pensamos que el rango se puede definir por el número de filas no nulas. La suma de m términos pueden aportar a lo más en m filas no nulas que sería $Rank(A)$.

Pregunta 5

Sea $\bar{b}$ un vector en el espacio de Rows(A), es decir, $Rows(A) = span(filas) = \sum c_i r_i$

Donde corresponde a las combinaciones lineales de las filas r_i. Luego el espacio $Null(A)$ es el espacio de vectores $\bar{z}$ tal que $\{\bar{z}/A\bar{z} = \vec{0}\}$

Luego la definición de este producto punto se puede resumir como:

$$A_{i,} \cdot \vec{z} = 0$$

Es decir, cada fila es ortogonal a los vectores del Espacio Nulo. Luego $Rows(A) \perp Null(A)$.

Pregunta 6

Al transcribir las transformaciones dadas en clases se tiene que se pueden escribir de la siguiente manera:

$L_2 L_1 A = U$

Donde:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

Luego sabemos que: $A = (L_2L_1)^{-1}U$. Donde $(L_2L_1)^-1 = L$

Luego la matriz L es igual a:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1{,}5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

La descomposición queda $A = LU$ descritos más alto.

Pregunta 7

Supongamos que $\vec{z}$ es proyección sobre V, por lo tanto $\vec{z} \in V$ entonces es una combinación lineal de los vectores que generan V: $\vec{z} = c_1w_1 + ... + c_kw_k$.

Luego para que $\vec{z}$ sea proyección, $(\overrightarrow{x - z})$ debe ser perpendicular a $\vec{z}$. Eso implica que:

$$(\overrightarrow{x - z}) \cdot \vec{z} = 0 \implies c_1w_1 \cdot (\overrightarrow{x - z}) + ... + c_kw_k \cdot (\overrightarrow{x - z}) = 0 \implies w_i \cdot (\overrightarrow{x - z}) = 0$$

Luego si

$$W = \begin{bmatrix} — & w_1 & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & w_k & — \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que:

$$W = \begin{bmatrix} — & w_1 & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & w_k & — \end{bmatrix} \cdot (\overrightarrow{x - z}) = \begin{bmatrix} w_1 \cdot (\overrightarrow{x - z}) \\ \vdots \\ w_k \cdot (\overrightarrow{x - z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancelto{0}{w_1 \cdot (\overrightarrow{x - z})} \\ \vdots \\ \cancelto{0}{w_k \cdot (\overrightarrow{x - z})} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Viendo la Equivalencia desde el otro lado, se puede fácilmente ver que $W(\overrightarrow{x - z}) = \vec{0}$

De acá se desprende que $w_i \cdot (\overrightarrow{x - z}) = 0, \forall i \in \{1, ..., k\}$ y eso implica que $(\overrightarrow{x - z}) \perp w_i$

Pregunta 8

Se puede calcular la norma de un Vector de manera Matricial de la siguiente manera:

$$||z|| = z^T \cdot z$$

Luego la Norma de $||Q\bar{x}||$ queda escrita de esta forma:

$$||Q\bar{x}||^2 = (Q\bar{x})^T(Q\bar{x}) = \bar{x}^TQ^TQ\bar{x} = \bar{x}^T\cancelto{I_n}{Q^TQ}\bar{x} = \bar{x}^T \cdot \bar{x} = ||\bar{x}||^2$$

$$||Q\bar{x}||^2 = ||\bar{x}||^2 \implies ||Q\bar{x}|| = ||\bar{x}||$$

Para el segundo caso. Podemos hacer algo similar si se presenta el producto punto de manera matricial como:

$$(Q\bar{x}) \cdot (Q\bar{y}) = (Q\bar{x})^T(Q\bar{y}) = \bar{x}^T Q^T Q\bar{y} = \bar{x}^T \overset{I_n}{\cancel{Q^T Q}}\bar{y} = x^T y = \bar{x} \cdot \bar{y}$$