**Оценка сходимости разработанной математической модели**

**Формы биномиального распределения**

Для количественной оценки предпринимательской деятельности необходимо доступ к трем (как минимум) группам исходных данных:

1. Показатели эффективности предпринимательской деятельности

2. Расчетная схема функционирования предприятия

3. Исходные данные для расчетов

1. Функционирование предприятия

Схеме представления исходных данных (по трем упомянутым группам) удобно представить виде следующей таблицы:

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Время t | Поступление товара | Показатели эффективности предпринимательской деятельности  (efficiency index ) | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | |  | | |  | | | | | ... |
|  | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
|  | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ... |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | ... |
|  | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | ... |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| ... | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
|  | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | ... |
|  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | ... |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ... |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
|  | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ... |
| ... | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ... |
|  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | ... |
|  | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ... |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
|  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | ... |
| ... | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ... |
| ... | ... | ... | | | | | | | ... | | | ... | | | | | ... |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | |

****

Мы видим из таблицы 1, что “отсчет времени” идет одинаковыми порциями: . Факт поступления товара (или сырья) отмечен в Таблице 1 с

помощью: 1, а если товара (сырья) нет, то используется 0. Таблицы подобного типа известны под названием “временной срез”.

События, связанные с появлением товара, являются “довольно редкими” и по этому могут быть описаны с помощью “распределения Пуассона”, либо с помощью подобному Пуассону распределения промежуточного между Биноминальным и Пуассоновским. Такая возможность будет рассмотрена нами в дальнейшем.

В таблице 1 приведены три подвыборки, их длины равны, соответственно: ; ; . Без ограничения общности можно считать, что: n1=n2=n3=n0 и тогда:

.

В правой половине таблицы 1 находятся значения переменных: показатели эффективности предпринимательской деятельности: efficiency index.

Выбранный способ кодирования (с помощью 0 и 1) применим в равной степени, как к количественным (заданным с помощью чисел), так и к качественным. В том случае если используется количественная переменная, наличие 1 указывает на факт попадания значения переменной в определенный интервал.

Таким образом, мы имеем дело с т.н. логической функцией многих переменных , а по этому представляет огромный (практический) интерес “задача восстановления” (логической) функции.

**Дополнительные обозначения и оценки**

Для формирования задачи функционирования предприятия рассмотрим предприятие S, состоящее из j независимых отделов каждый из который работает при наличии в низ k – штук товаров определенного типа.

Необходимо определить вероятность функционирования предприятия S через время t0, после начала поступления товара.

Обозначим эту вероятность:

(2.1)

где: - вероятность работы, j–го отдела (входящее в предприятие S) не менее времени t (функция надежности j-го элемента).

Определим функцию: , для производного элемента (опуская индекс j).

В общем случае товары поступают довольно редко: следуют в потоке пачками (каждая i-ая пачка характеризует длительности ), и каждая пачка отделена друг от друга случайным интервалом времени (таблица 1).

Считаем, что поток (поступления товара) является Пуассоновским, при этом интенсивность потока: такова, что: (на интервалах ), j=1,2,3,…, и еще: , , (M и D – среднее и дисперсия, соответственно) , , .

Далее обозначим:

Можно показать, что – асимптотически нормальна со следующими характеристиками:

(2.2)

Здесь: M и D – среднее и дисперсия, соответственно.

В результате всего (опуская промежуточные вычисления), имеем:

(2.3)

Здесь: – число (неотбракованных и удовлетворяющих предприятие) поступлений товара за время t,

,

,

.

Выражение (2.3) для больших t может быть представлено в виде:

С помощью формулы (2.3) можно дать приближенную асимптотическую оценку вероятности работы j-го отдела предприятия S (за время t), равную:

Установление соответствия между полученными результатами ((2.2), (2.3), (2.4)) со способом представления исходных данных таблица 1.

Установим соответствия начиная с (2.2). Обозначим:

(3.1)

Определим, также:

(3.2)

при этом: с0=1, 2, 3,…,p0 и n0==8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384,…

Тогда с учетом: (2.2), (3.1), (3.2) и после преобразований, имеем:

(3.3)

Также с учетом: (2.2), (3.1), (3.2) и после преобразований, имеем:

(3.4)

при этом: С0= , и , .

Теперь определяем исходные данные для MathCad, они соответствуют “редким событиям”.

; ; ; ; ;

;

; ; ;

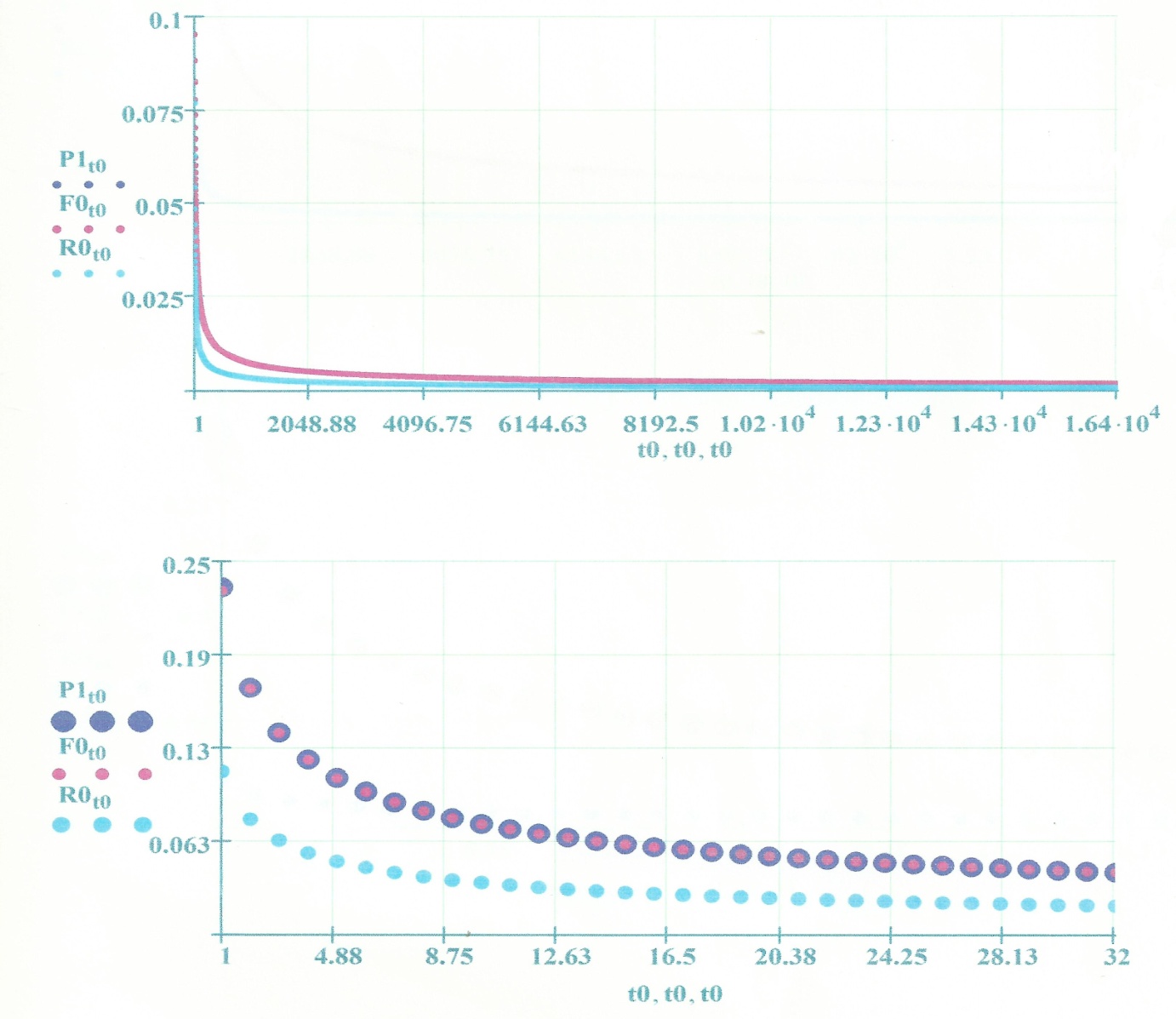
; ; ;

; ;

;

;   
;

Рисунок 1



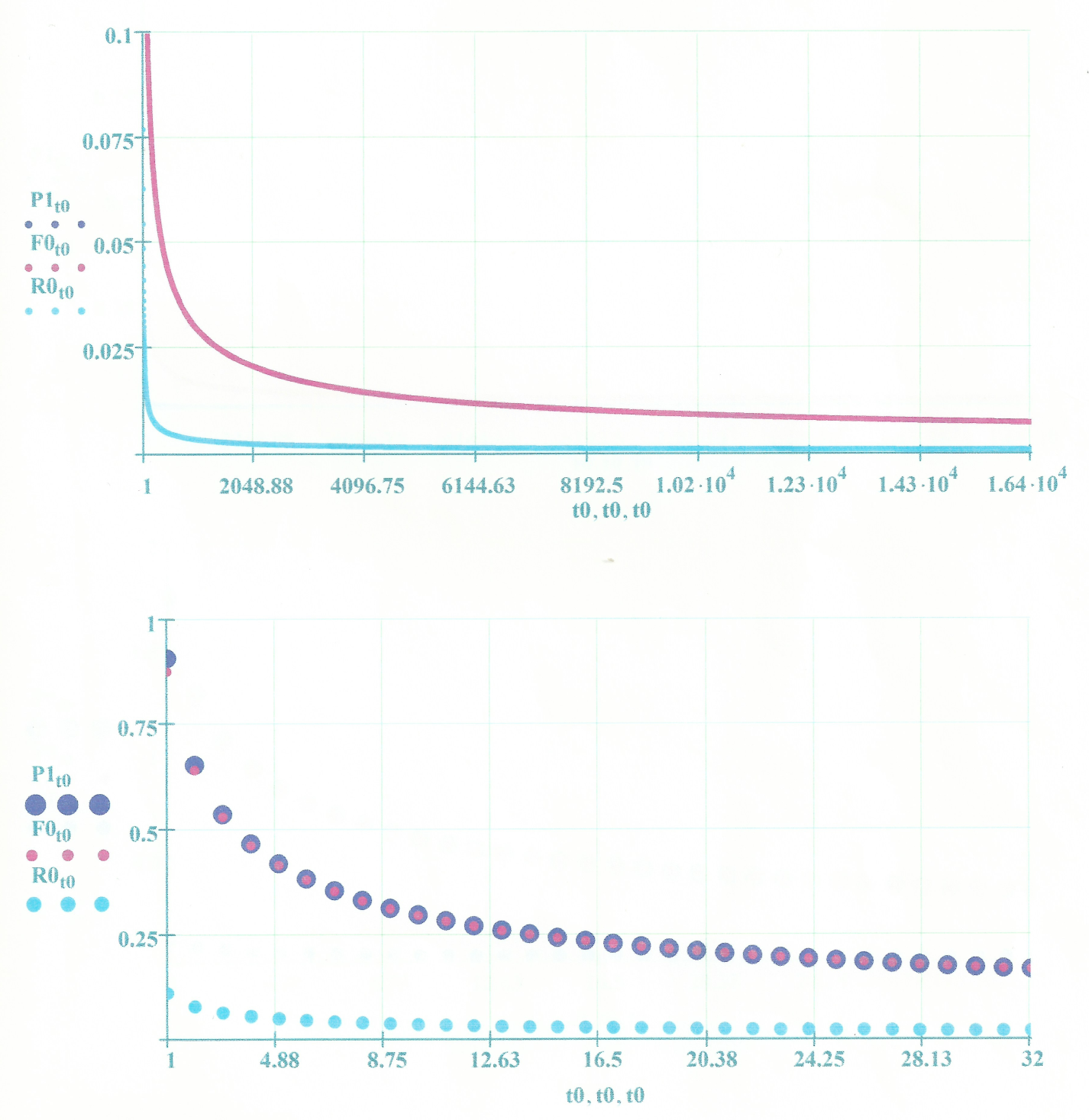
; ; ;

; ;

;

;   
;

Рисунок 2



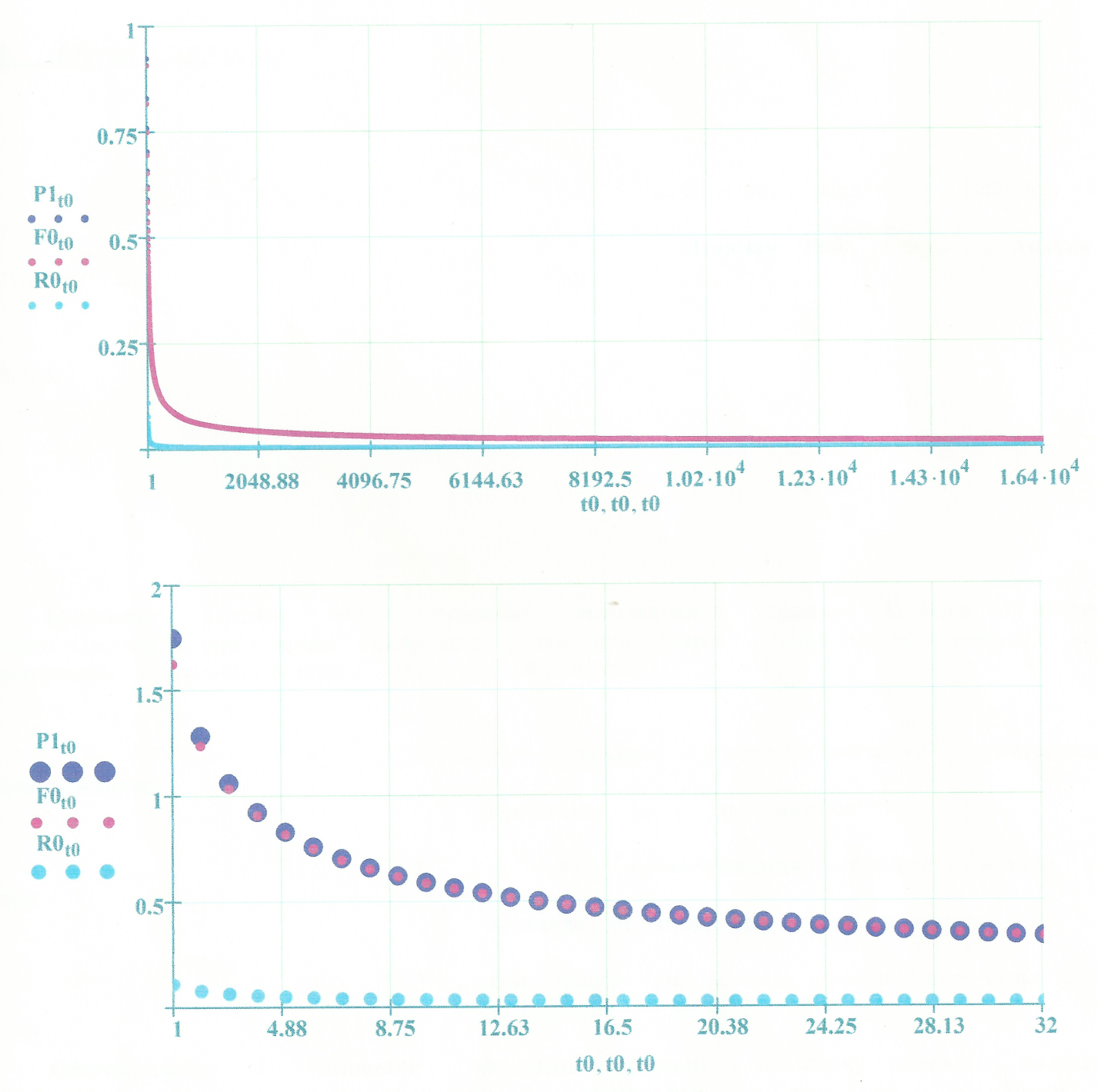
; ; ;

; ;

;

;   
;

Рисунок 3



Из сравнения графиков (Рис.1, Рис.2, Рис.3) можно сделать вывод, что:

и совпадают не только асимптотически, а на всем диапазоне изменения t0, однако при этом должно быть выполнено: С0=K0. Этот факт заслуживает самого тщательного изучения; оценить можно также, воспользовавшись соотношением:

(Г.М. Фихтенгольц)

Стоит отметить, что сам факт поступления товаров является главным, потому как без товаров, предприятие не будет работать вообще. Далее, некоторые из переменных ( (из Т.1)) сами находятся в тесной связи с количеством товаров ().

Таким образом, только наличии переменной мы можем установить и восстановить нелинейную зависимость: .

**Другие подходы**

Обозначим: , и , тогда:

,

,

,

и , …. ,

,

и ,

,

,

.

Тогда: – асимметричная часть искомого распределения.

Окончательно:

,

здесь: и - для редких событий.

Таким образом, искомое распределение имеет следующий вид:

.

Согласно распространенному заблуждению, распределение:

называют Гауссовым, сходство тем более усиливается, если его записать в виде:

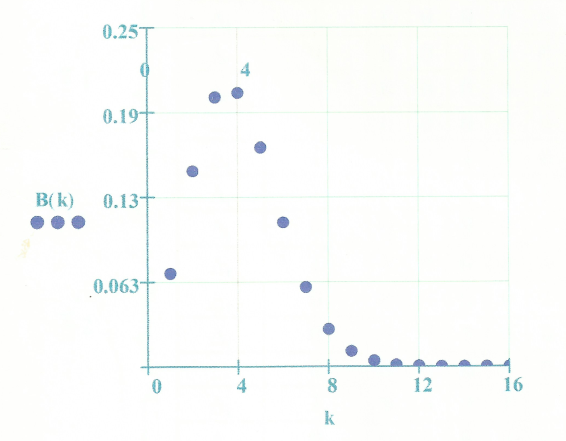
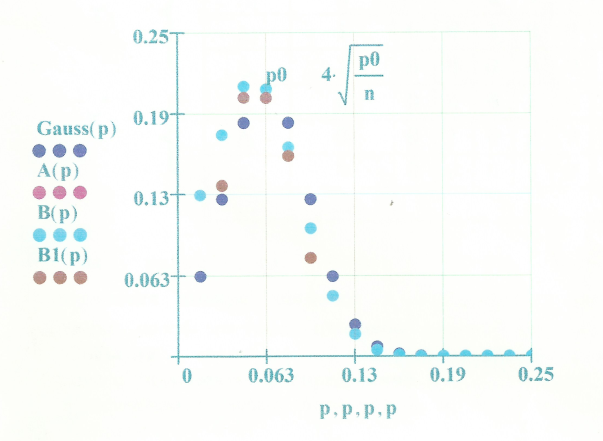
,

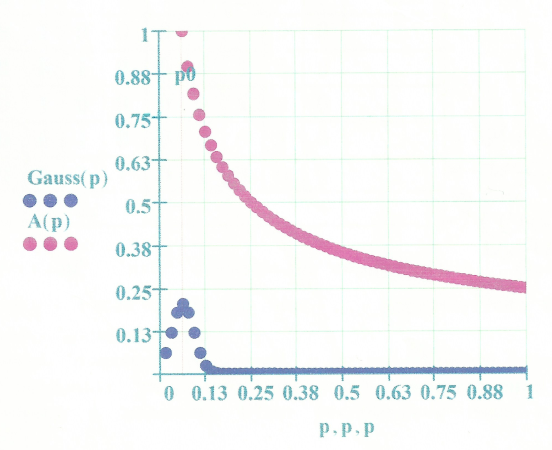
где , однако следует иметь ввиду, что распределение:

- дискретное, т.е.:

с дискретным спектром частот: .

Пример:



**Доказательство**

Имеем биноминальные распределения:

(1)

Мы видим, что (1) определяет дискретный спектр возможных частот: ; возможно частоты являются “оценками вероятности” ; при этом: , , , здесь: берется из:

, а в качестве длины выборки L

подразумевается: L=8, L=16, L=32,…, L=1024.

Видим, что именно “такие L” охватывают весь практически - необходимый диапазон значений L, используемый для решения т.н. “задач классификации и прогнозирования”; в математике такие задачи известны как: задача восстановления логической функции, по данным выборки ограниченной длины, содержащей дискретные данные.

Обозначим: и ;

Тогда, с учетом (1) имеем:

,

здесь: , ,

тогда:

Таким образом имеем:

,

здесь: ).

т.к: , а: ,

здесь: , и ,

то: (2)

здесь: ,

и .

Распределение: (согласно распространенному заблуждению) называют Гауссовым; сходство тем более усиливается, если его записать в виде:

, где: ;

при этом, сама величина является ничем иным, как оценкой вероятности появления определенного количества (равного: ) единиц: 1 в определенных клетках, определенных столбиков дискретной таблицы.

Само распределение: является дискретным, т.е имеет дискретный спектр частот: , где k является целым: k=1,2,3,…,(L-1).

**Промежуточный закон распределения**

Таким образом промежуточный закон распределения, является:

(3)

здесь: , ,

.

Однако, видно, что полученное распределение в виде:

,

является громоздким и малопригодным для практического использования (для всякого рода аналитических преобразований): здесь появились две дополнительные (помимо: ) конструкции: и ; при этом, конструкция призвана для того, чтобы учесть дополнительные члены: к ; однако есть веские причины, согласно которым можно не принимать в расчет эту конструкцию:

- с помощью прямого математического эксперимента (с использованием MathCad) легко установить, что вклад , не является решающим (значимым),

- этот вклад может быть учтен (для каждой из выборок с длиной L (п1)) другим способом, о нем далее…

Таким образом, имеем следующее выражение для Промежуточного закона распределения:

(4)

здесь: , .

Выражение (4) является компактным, потому как:

, получено без всяких приближений, а от учета бесконечно-малых высшего порядка в виде: мы отказались в пользу одного подхода.

Конструкция: является своеобразным масштабным коэффициентом: , который деформирует фигуру:

, в вертикальном направлении, по мере перемещения пика распределения влево (в сторону малых частот) или вправо (в сторону больших частот).

Также, в области тех частот, где работает Промежуточный закон распределения, выражение для можно упростить в еще большей степени: , т.е. .

**Вспомогательные формы законов распределений**

В биноминальном распределении:

, с помощью формулы Стирлинга преобразуем выражение: .

После нескольких преобразований, мы получим:

, а:

и, окончательно:

(5)

Однако мы не получили той простоты, которую ожидали, но вскоре будут получены выражения (6) и (7). Таким образом (5) является приближенной формой биноминального распределения (1):

.

Теперь используя (5), мы можем получить две модификации распределения Пуассона для малых и больших частот , соответственно.

Для малых частот, имеем:

,

здесь: – Пуассон для малых частот: small Frequency; от в (5) осталось: , потому как: , таким образом мы пренебрегли: и , а отсюда немедленно следует граница применимости для так мы можем ожидать, что: .

Будет уместным, оценить границу применимости и для распределения . Для этого достаточно вспомнить, что при получения (4) нами был использован малый параметр: , т.к ожидаемой границей для является: , то можно предположить: , и:

- нами получена граница для малых частот: small Frequency.

Поскольку распределение является симметричным относительно оси, проходящей через , то границей для больших частот: big Frequency, является: .

Нам еще не хватает аналога распределения Пуассона, только не для малых частот: small Frequency, а для больших частот: big Frequency. При этом, нам не потребуется снова (с помощью малого параметра ) биноминальное распределение (1), достаточно заметить, что и биноминальное распределение, и распределение Пуассона (для малых частот: small Frequency - ) симметричны относительно появления нулей и единиц (из т1), т.е. для того, чтобы получить из , - достаточно произвести следующие замены: на и на заметим, что: и .

Таким образом, производим необходимые замены в :

.

Тогда получим:

(7) ,

заметим, что: и .

Далее, мы подробно обсудим чрезвычайно важный вопрос об установлении соответствия типа используемого распределения и длинны выборки L для 4-рех типов распределений:

- распределения Пуассона для малых частот: small Frequency.

- распределения Пуассона для больших частот: big Frequency.

- промежуточный закон распределения,

– распределения похожее на распределение Гаусса.

Поскольку две формы ((6) и (7)) распределения Пуассона могут быть легко получены из его стандартного и наиболее распространенного выражения: , то закон распределения (5) можно считать обобщенным законом распределения Пуассона:

(8).

Таким образом, у нас имеются 4-ру типа распределения , , и и каждой выборке длиной L будут соответствовать свои типы.

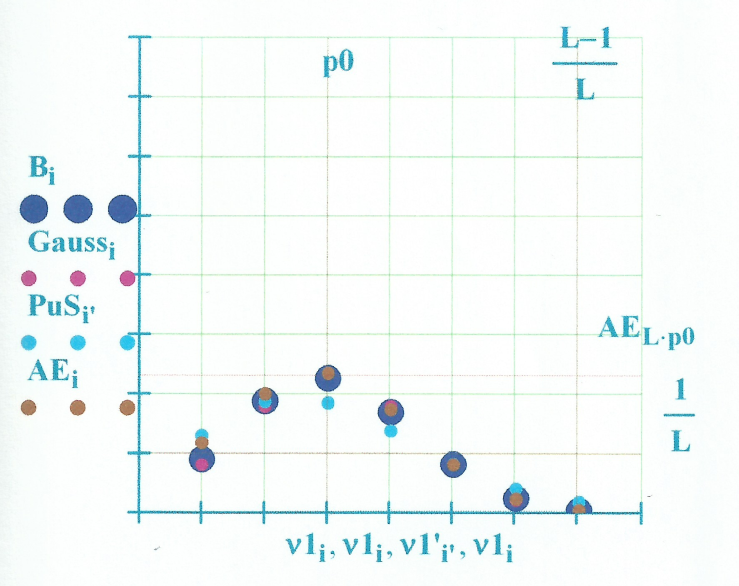
**Установление соответствия типа закона распределения и длины используемой выборки**

Рассмотрение начинаем для длин выборок L: L=8,16 и 32. Это наиболее простой случай и задача восстановления логической функции многих переменных .

(1.1)

; ; ; ; ; ; ;

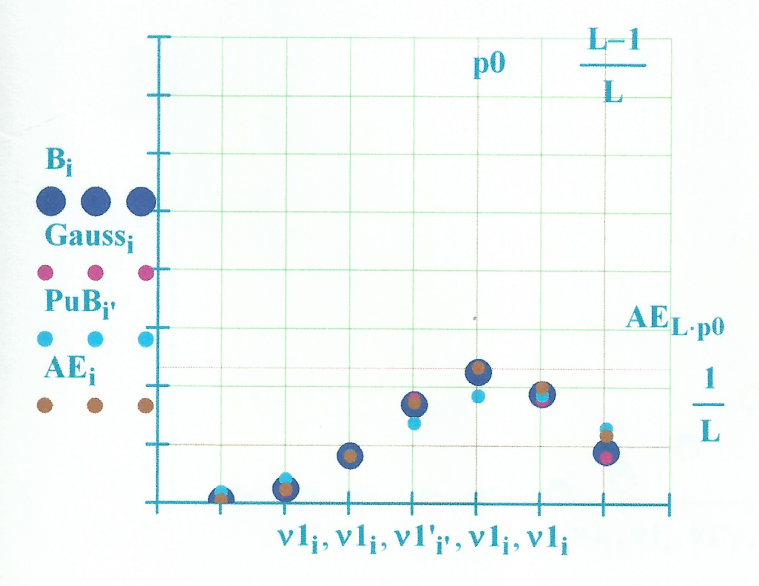
Рисунок 1



(1.2)

; ; ; ; ; ; ;

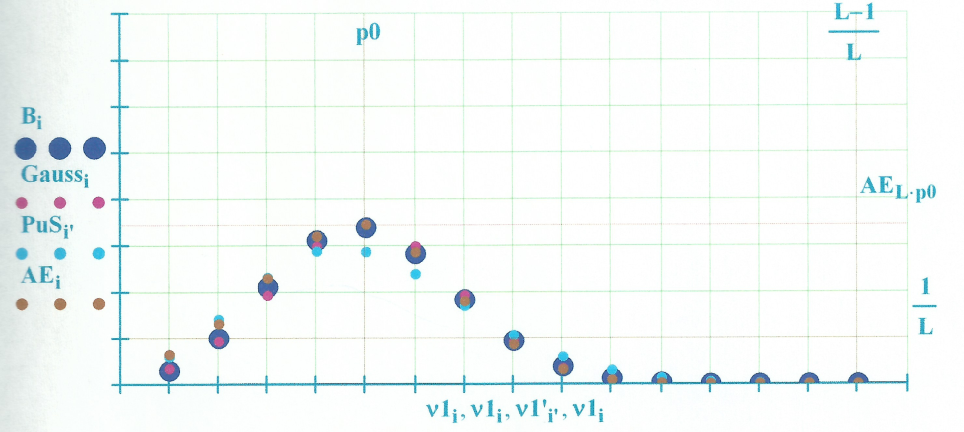
Рисунок 2



(1.3)

; ; ; ; ; ; ;

Рисунок 3



(1.4)

; ; ; ; ; ; ;

Рисунок 4

